# RUSSELL PARADOKSU TEMELİNDE
# 20. YÜZYIL MANTIKSAL PARADOKSLARI

**Canan DURMAZ**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Eskişehir**

**2014**

# RUSSELL PARADOKSU TEMELİNDE 20. YÜZYIL MANTIKSAL PARADOKSLARI

**Canan DURMAZ**

**T.C.**
**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi**

**Sosyal Bilimler Enstitüsü**

**Felsefe ve Din Bilimleri Anabilim Dalı**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Eskişehir**

**2014**

**T.C.**

**ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ**

**SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**

**Canan DURMAZ tarafından hazırlanan Russell Paradoksu Temelinde 20. Yüzyıl Mantıksal Paradoksları başlıklı bu çalışma 26/06/2014 tarihinde Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddesi uyarında yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak Jürimiz tarafından Felsefe ve Din Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.**

**Başkan: Prof. Dr. Ejder OKUMUŞ …………………..**

**Üye: Yrd. Doç.Dr. Ali ÇETİN (Danışman) …………**

**Üye: Yrd. Doç. Dr. Abdullah ACAR …………………….**

**ONAY**
**..../…./2014**

……………………

**ÖZET**

# RUSSELL PARADOKSU TEMELİNDE 20. YÜZYIL MANTIKSAL PARADOKSLARI

**DURMAZ, Canan**
**Yüksek Lisans-2014**
**Felsefe ve Din Bilimleri Anabilim Dalı**

**Danışman:** Yrd. Doç. Dr. Ali Çetin

Paradokslar, mantıksal ve felsefi araştırmaların önemli parçasıdırlar. "Russell Paradoksu Temelinde 20. Yüzyıl Mantıksal Paradoksları" isimli bu çalışma, doğruluk, yanlışlık, sonsuzluk, sayı ve küme gibi çelişkili kavramlarla ilgili mantıksal paradoksları açıklamak için tasarlanmıştır. Bu çalışma üç bölüme ayrılmıştır.

Birinci bölümde küme kuramsal paradokslar ve Gödel'in ünlü Eksiklik Teoremi açıklanmıştır. Ayrıca en meşhur mantıksal veya küme kuramsal paradokslar olan Cantor Paradoksu ve Russell Paradoksu yer almaktadır.

İkinci bölümde paradoks ve oto referans kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca önemli semantik paradokslar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde sonsuzluk paradoksları betimlenmiştir. Sonsuzluk kavramıyla birlikte, Zeno Paradoksları, Galileo Paradoksu ve Hilbert'in Sonsuzluk Oteli Paradoksu gibi, en önemli ve iyi bilinen sonsuzluk paradoksları ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Mantıksal Paradokslar, Russell Paradoksu, küme, semantik, sonsuzluk.

# ABSTRACT

## THE TWENTIETH CENTURY LOGICAL PARADOXES ON THE BASIS OF RUSSELL'S PARADOX



**DURMAZ, Canan**
**Master Thesis-2014**
**Department of Philosophy and Religious Sciences**

**Adviser:** Yrd. Doç. Dr. Ali Çetin


Paradoxes are a substantial part of logical and philosophical investigations. This study which is named "The Twentieth Century Logical Paradoxes On The Basis Of Russell's Paradox" is designed to explain logical paradoxes about some controversial notions like truth, falsity, infinity, number and set. This study is divided into three section.

Set-theoretic paradoxes and Gödel's famous Incompleteness Theorem are described in the first section. In addition to that, Cantor's paradox and Russell's Paradox which are the most famous logical or set-theoretical paradoxes, have been dealt with.

Paradox and self reference notions are defined in the second section. Moreover important semantic paradoxes are explained. Paradoxes of infinity are described in the third section. The most important and well known paradoxes such as Zeno's Paradoxes, Paradox of Galileo, Paradox of Hilbert's Grand Hotel are demonstrated within the scope of this study and with the definition of infinity.



Key words: Logical Paradoxes, Russell's Paradox, set, semantic, infinity.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET…………………………………………………………………………...iv

ABSTRACT…………………………………………………………………v

EKLER LİSTESİ……………………………………………………………xi

KISALTMALAR LİSTESİ……………………………………………........xii

GİRİŞ ........................................................................................................ 1

I-Tezin Önemi ve Amacı.......................................................................... 1

II-Tezin Sınırları ....................................................................................... 6

III- Tezin İçeriği ve İzlenen Yöntem ......................................................... 6

### 1.BÖLÜM

### RUSSELL PARADOKSU VE KÜME KURAMSAL PARADOKSLAR

1.1. KÜME KURAMI.................................................................................. 8

1.1.1. Küme Kavramı .................................................................................. 8

1.2. KÜME PARADOKSLARININ TEMEL KAVRAMLARI ..................... 10

1.2.1. Küme Elemanı.................................................................................. 10
1.2.2. Genişleme Aksiyomu (Axiom Of Extensionality)............................. 10
1.2.3. Ayırma Aksiyomu (Unrestricted Comprehension Axiom).................. 11
1.2.4. Boş Küme Kavramı........................................................................... 12
1.2.5. Evrensel Küme (V) ........................................................................... 13

1.3. SONSUZ KÜME TEORİSİ.................................................................... 13

1.4. CANTOR PARADOKSU VEYA KUVVET KÜMESİ PARADOKSU ........... 14

1.4.1. Cantor Sonsuzu ................................................................................. 14

1.4.2. Transfinit Sayı Kavramı..................................................................... 15
1.4.3. Kuvvet Kümesi ................................................................................. 15
1.4.4. Sürekli Artan Sonsuzluk .................................................................... 16
1.4.5. Cantor Paradoksu Formel Gösterim................................................... 17
1.4.6. Cantor Paradoksu Sonucu .................................................................. 17
1.4.7. Cantor Paradoksu Önemi ................................................................... 18

1.5. RUSSELL PARADOKSU...................................................................... 19

1.5.1. Russell Paradoksu’na Giriş ........ 19
1.5.2. Bertrand Russell ve Alfred Whitehead ........ 20
1.5.3. Bertrand Russell ve Gottlob Frege ........ 21
1.5.4. Bertrand Russell ve Georg Cantor ........ 22
1.5.5. Russell Paradoksu ve Frege ........ 24
1.5.6. Russell Paradoksu İle İlgili Kavramlar ........ 26
1.5.6.1. Russell Kümesi ........ 26
1.5.6.2. Frege’nin V. Aksiyomu ........ 27
1.5.7. Russell Paradoksu Formel Şekli ........ 28
1.5.8. Russell Paradoksu Kavramsal Biçim ........ 29
1.5.9. Russell Paradoksu ve Sınıf Çeşitleri ........ 30
1.5.9.1. Russell Sınıfı Örnekleri ........ 30
1.5.9.2. Russell Paradoksu Sınıfsal Biçim ........ 31
1.6. RUSSELL PARADOKSU VERSİYONLARI ........ 33
1.6.1. Grelling–Nelson Paradoksu ........ 33
1.6.2. Kitap Kataloğu Paradoksu ........ 34
1.6.3. Kasabanın Berberi Paradoksu ........ 35
1.6.4. Belediye Başkanı Paradoksu ........ 36
1.7. RUSSELL PARADOKSU ÇÖZÜMÜNDE TİPLER TEORİSİ ........ 37
1.7.1. Tipler Teorisi ........ 37
1.7.2. Tipler Teorisi’nde Sayı Kuramı ........ 39
1.7.3. Tipler Teorisi’nde Tip Kavramı ........ 40
1.8. TİPLER TEORİSİ VE YALANCI PARADOKSU ........ 41
1.9. GÖDEL TEOREMİ VE ÇELİŞKİSİZLİK ........ 44
1.10. MANTIKSAL KANITLAMADA ÇELİŞKİLERİN ÖNEMİ ........ 46

**2. BÖLÜM**

**PARADOKS ÇEŞİTLERİ VE SEMANTİK PARADOKSLAR**

2.1. PARADOKS KAVRAMI ........ 48
2.1.1. Paradoks Kelimesinin Tanımı ve Kökeni ........ 48
2.1.1.1. Paradoks İle İlgili Kavramlar ........ 52
2.1.1.1.1. Karşıtlık (ingilizce: contradiction, latince: contradictionem) ........ 52
2.1.1.1.2. Antinomi (ingilizce: anti'nomy, grek: antinomia) ........ 54
2.1.2. Paradoks Çeşitleri ve Mantıksal Prensipler ........ 55
2.1.2.1. Doğru Çıkarımlı ve Yanlış Çıkarımlı Paradokslar ........ 55
2.1.2.2. Mantıksal Prensipler “Düşünce Yasaları” ........ 56
2.1.2.2.1. Çelişmezlik Yasası ........ 57
2.1.3. Felsefede Paradoksun Önemi ........ 58
2.2. SEMANTİK (ANLAM BİLİMİ) MANTIKSAL PARADOKSLARI ........ 59

2.2.1. Semantik Bilimi ........ 59
2.2.1.1. Semantik Tanımı ........ 59
2.2.1.2. Semantik Paradoks Tanımı ........ 59
2.2.1.3. Semantik ( Dil Bilimsel ) Paradoks Cümleleri ........ 60
2.2.1.4. Meta Kuram Kavramı ........ 62
2.2.1.5. Alfred Tarski ve Meta Kuram ........ 63
2.2.1.6. Semantik Paradoksların İncelenmesinde Üst Dil Kavramı ........ 65
2.2.2. Semantik Paradokslar ........ 66
2.2.2.1. Oto Referans -Kendine Gönderim- Kavramı ........ 66
2.2.2.2. Oto Referans Önerme Örnekleri ........ 66
2.2.2.3. Semantik Paradoks Örnekleri ........ 67
2.2.2.3.1. Timsah ve Kadın Paradoksu ........ 67
2.2.2.3.2. İstisna Paradoksu ........ 68
2.2.2.3.3. Berry Paradoksu ........ 69
2.2.2.3.4. Yunanlı Avukat Protagoras Paradoksu ........ 70
2.2.2.3.5. Epimenides Paradoksu ........ 71
2.2.2.3.6. Yalancı Paradoksu ........ 73
2.2.2.3.7. Plato Sokrates Paradoksu ........ 75
2.2.2.4. Semantik ve Sınıf Kavramı ........ 76
2.2.2.5. Kısır Döngü ve Düzeyler Hiyerarşisi ........ 77
2.2.2.6. Doğruluk Değeri ve Semantik ........ 78

**3. BÖLÜM**

**ANTİK ÇAĞDAN GÜNÜMÜZE SONSUZLUK PARADOKSLARI**

3.1. SONSUZLUK PROBLEMİ ........ 80
3.2. SONSUZ KELİMESİ KÖKENİ ........ 81
3.3. SONSUZLUK KAVRAMI ........ 81
3.4. SONLU VE SONSUZ KAVRAMI BAĞINTISI ........ 82
3.5. ANTİK ÇAĞDAN MODERN BİLİME SONSUZLUK ........ 83
3.6. SONSUZLUK VE PARADOKSLAR ........ 85
3.6.1. Sonsuzluğun Bilimsel Kuramı ........ 86
3.6.1.1. Sonsuz ve Sıfır ........ 86
3.6.1.2. Sonsuz ve Nokta ........ 87
3.6.1.3. Sonlu ve Sonsuz Sayı ........ 87
3.6.1.4. Sonsuz Kümeler ve Sınıfların Sonsuzluğu ........ 89
3.7. ZENO'NUN PARADOKSLARI ........ 90
3.7.1. Sonlu Bir Parçanın Bölünebilirliği ........ 90
3.7.2. Dikotomi Paradoksu (Koşu Yolu-Sürekli İkiye Bölme) ........ 91
3.7.2.1. Dikotomi Paradoksu İlerlemeli Biçimi ........ 91
3.7.2.2. Dikotomi Paradoksu Gerilemeli Biçim ........ 91

3.7.2.3. Koşu Yolu Paradoksu Modern İspatı ..... 92
3.7.3. Zeno'nun Aşil ve Kaplumbağa Paradoksu ..... 93
3.7.4. Zeno'nun Ok Paradoksu ..... 94
3.7.5. Zeno Paradokslarının Önemi ..... 95
3.7.6. Zeno Paradoksları Felsefi Sonuç ..... 97
3.8. GALİLEO PARADOKSU ( PARÇA BÜTÜN PARADOKSU) ..... 98
3.8.1. Galileo Paradoksunun Önemi ..... 99
3.8.2. Galileo Paradoksunun Çözümü ..... 100
3.8.2.1. Sonsuz Kümelerin Karşılaştırılması ..... 100
3.8.2.2. Sonsuz Sınıf Kavramı ..... 101
3.8.2 3. Cantor'un Galileo Paradoksu Çözümü ..... 102
3.9. HİLBERT'İN BÜYÜK OTEL PARADOKSU ..... 103
3.10. GALİLEO VE HİLBERT PARADOKSU ..... 104
3.11. SONSUZLUK PARADOKSLARI VE MODERN KÜME KURAMI ..... 105
SONUÇ ..... 107
EKLER: Maurits Cornelis Escher'in çizdiği paradoksal resimler ..... 113
KAYNAKÇA ..... 119

## EKLER LİSTESİ

**Ek 1**: M. C. Escher Oto Portresi: Elde Yansımalı Küre Litografı...……………113

**Ek 2:** Çizen Eller Gravürü……………………………………………............114

**Ek 3:** Sonsuz Döngüyü Betimleyen Şelale Resmi ……….……………….……........115

**Ek 4:** Resim Galerisi ……………………………………………………............116

**Ek 5:** İmkansız Merdiven……………………………………………………..117

**Ek 6:** İmkansız Küp Çizimi…………………………………………….......118

**KISALTMALAR LİSTESİ**

| | |
|---|---|
| a.e. | : Aynı eser |
| b. | : basım |
| C. | : Cilt |
| çev. | : Çeviren |
| Ed. | : Editör |
| Inc. | : Incorporation |
| Ltd. | : Limited |
| MÖ | : Milattan Önce |
| s. | : Sayfa |
| TİB | : Türk İş Bankası |
| UK | : United Kingdom |
| USA | : United State of America |
| vb. | : Ve benzeri |
| YKY | : Yapı Kredi Yayınları |
| yy. | : Yüzyıl |

# ÖNSÖZ

Antik Çağdan günümüze kadar keşfedilen mantıksal paradoksları tanıtma ve inceleme amacıyla hazırlanan "Russell Paradoksu Temelinde 20. Yüzyıl Mantıksal Paradoksları" adlı bu yüksek lisans tezi, toplam üç bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın amacı mantık, matematik ve felsefede önemli yeri olan paradoksları, basit çelişki cümlelerinden ayırmak; sonsuzluk, anlam bilimi ve küme kavramlarıyla nitelendirilen ciddi paradoksları açıklamak ve Antik Çağda ortaya çıkıp 20. yüzyıla kadar varlığını koruyan önemli paradokslara Bertrand Russell'ın yaklaşımını ve çözüm önerilerini sunmaktır.

Bu çalışmanın her aşamasında yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali ÇETİN'e teşekkür ederim.

ESKİŞEHİR, 2014 Canan Durmaz

# GİRİŞ

## I-Tezin Önemi ve Amacı

İslam dünyasında “baş üstad” anlamında “eş-şeyhü’r-reîs” unvanı ile de anılan İbn Sina, Mantık ilmini; “mantık insana, zihninde kazanılmış bilgilerden kazanılacak bilgilere geçme işlemlerini, bu bilgilerin özelliklerini, bu geçiş işlemlerini düzgün veya düzgün olmayarak meydana getiren sıralama ve yapıların sınıflarını ve bunların sayısını öğreten bir ilimdir” şeklinde tanımlamıştır.[1]

İslam düşünürü Ebu Hamid El–Gazâlî ise, kıyas, analoji gibi mantıksal metotlar temel alınarak ortaya çıkan bir düşünme süreci sonucunda, bilinmeyenin bilgisinin ancak bilinen ile elde edildiğini; ancak her bilinenle her bilinmeyenin bilgisine ulaşılamadığı, aksine her bilinmeyenin kendisine uygun bir bilineninin olduğu, onu zihne getiren, zihinde hazırlayan özel bir yönteminin bulunduğu ve bu yöntemin bilinmeyeni keşfetmeye götürdüğünü düşünmüştür.[2]

Ebu Hamid El–Gazâlî, doğru bilgiye ulaşma süreciyle birlikte Mantık ilminin faydasını ve gerekliliğini anlatmak için, şu cümleleri kullanmıştır: “Varlıkların bütün resimlerini bilgi olmadan nefiste toplamanın bir anlamı da yoktur. Mantık olmadan bilgi elde etmenin de başka bir yolu yoktur. Öyleyse mantığın faydası bilgiden yararlanmaktır. Bilginin faydası da ebedi mutluluğun elde edilmesidir.”[3]

Bununla birlikte Ebu Hamid El–Gazâlî, Mantık ilminin, diğer bütün ilimlerin ölçüsü ve terazisi konumunda olduğunu düşünmüştür. Ona göre terazide tartılmayan bir şeyin ağır olanı hafif olanından, kâr zararından ayırt edilemeyeceği gibi Mantık ilminin faydası da, bilgiyi bilgisizlikten ayırt etmektir.[4]

---

[1] İbn Sina, *İşaretler ve Tembihler*, çev., Ali Durusoy, Muhittin Macit, Ekrem Demirli, Litera Yayıncılık, İstanbul 2005, s. 1.
[2] Ebu Hamid El–Gazâlî, *Felsefenin Temel İlkeleri,* çev., Cemaleddin Erdemci, Vadî Yayınları, Ankara 2002, s. 43.
[3] El–Gazâlî, *a.e.*, s. 44.
[4] El–Gazâlî, *a.e.*, s. 43.

Ebu Hamid El–Gazâlî'nin tanımına benzer olarak Farabî, mantık ilminin, hataları kontrol etmekte kullanılan satır çizme aleti (mistar) veya; daireleri ölçmede kullanılan pergel gibi olduğunu düşünmüştür ve geniş bir tanımlama yapmıştır:

> Mantık sınaatı, bütün halinde, aklı düzeltmeğe (takvim) ve yanlış yapılması mümkün olan bütün mâkul şeylerde, insanı doğru yola ve gerçek tarafına yöneltmeğe yarayan kanunları ve insanı mâkullerde yanlıştan, sürçmeden ve hatadan koruyan ve muhafaza eden kanunları verir. Bir de yanlış yapan bir kimsenin mâkullerde yanlış yapmış olup olmadığından emin olunmazsa, onun denemesi (imtihân) için kullanılan kanunları gösterir. Bu da, mâkuller arasında, yanlış yapılması asla mümkün olmayan bazı şeylerin bulunması ile mümkündür. Bunlar da, insan ruhunun, yaratıldığı zaman, onları biliyormuş ve kesin bilgi (yakîn) halinde kabul ediyormuş gibi buldukları şeylerdir.[5]

Bilgiyi bilgisizlikten ayırmaya yarayan, ilimlere bir ölçü durumunda olan, elde edilen bilgilerden yeni bilgilere geçilmesini önermeler ve çıkarımlarla sağlayan Mantık ilminde, temel düşünce yasalarına karşıt olan ve kendi içinde çelişkili önermelerin ortaya çıkması mümkündür. Böylece dil biliminde, felsefe ve mantık gibi bilimlerde yapılan çalışmalar ve incelemelerle, sonsuzluk ve küme gibi bazı kavramlarda ortaya çıkabilen çelişkiler, doğru kabul edilen bazı kavramların veya doğruluk değerlerinin değişmesine neden olabilmektedir. Bu çelişkiler yardımıyla bilgi değişimi veya dönüşümü de mümkün olabilmektedir.

İbn Rüşd bilgilerdeki değişimle ilgili şu yorumu yapmıştır: "Bilgi izafetin kendisi olduğuna göre bilinenin değişmesi halinde bilginin de değişmesi gerekecektir."[6]

Bununla birlikte İbn Rüşd'e göre var olanın değişmesi sırasında bilgide de değişmenin meydana gelmesi, sadece var olan hakkındaki ma'lul bilgide şarttır ki bu da muhdes, yani sonradan meydan gelmiş bilgide mümkündür.[7]

Doğru kabul edilen bazı durumlarda ortaya çıkan çelişkiler, var olan bilginin değişimine neden olarak yeni bilgilerin elde edilmesinin başlangıcı konumunda olabilmektedirler.

---

[5] Farabî, *İhsâ'ül - Ulûm*, çev., Ahmet Ateş, Millî Eğitim Basımevi, İstanbul 1990, s. 67.
[6] İbn Rüşd, *Faslûl-Makâl*, çev., Doç.Dr. Bekir Karlığa, İşaret Yayınları, İstanbul 1992, s. 123.
[7] İbn Rüşd, *a.e.*, s. 125.

Farabî, *İhsâ'ül - Ulûm* isimli eserinde "dışarıdan bize bir fikir gelmesi veya aklımızdan nefsimize (ruhumuza) bir düşünce gelmesi ve bizi bugün bizce doğru veya yanlış olarak kabul ettiğimiz şeyin aksine çevirmesi mümkündür"[8] sözleriyle bu çelişkilerin kaçınılmaz olduğunu vurgulamıştır.

İbn Sina ise, *Oluş ve Bozuluş* isimli eserinde bu şekildeki değişim ve hareketleri süreklilik biçiminde kabul etmiş, kimi çelişkilerin kısır döngü biçiminde olması düşüncesine paralel olarak dairesel bir hareketten bahsetmiştir. Ona göre; "Oluş, bozuluş ve dönüşüm, başlangıcı olan durumlardır. Her başlangıcı olanın kaçınılmaz olarak mekansal hareketten bir sebebinin olması gerekir. Mekansal hareket sebepleri yaklaştırıp uzaklaştıran nitelikleri güçlendirip zayıflatan şeydir. Hareketlerin tamamının ilkeleri de dairesel olandandır."[9]

Farabî'nin söylediği gibi, bugün bizce doğru veya yanlış olarak kabul ettiğimiz şeyin aksine çevrilmesiyle meydana gelen, mantık kanunlarına zıt durumlara farklı isimlendirmeler yapılsa da, günümüzde en geniş anlamda paradoks kelimesi bu durumları nitelendirilmiştir. Paradokslar, önemli mantıksal problemler olarak tanımlanan, üzerinde düşünülüp değerlendirilmesi ve çözülmesi yoluyla insan aklının doğruya, yeni gerçekliklere ulaşılabilmesini sağlayan mantıksal araçlardır. Tüm arayışlarda amaç gerçeğe ve doğruya ulaşmak olduğundan bilimsel araştırma ve kuram geliştirme açısından paradoksun ortaya çıkışı ve sonuçta gelinen nokta oldukça önemli olabilmektedir.

Geleneksel sistemlere eleştirel gözle bakılarak keşfedilen, güçlü argümanlarla desteklenmiş ve doğru bir mantığa dayanan paradokslar, daha önceden ortaya konmuş kimi kuramlara, doğru kabul edilmiş bilgilere ve aksiyomlara karşıt durum sergiliyor ve sağlam görünen bir mantıksal yapıyı ortadan kaldırıyorsa, bu aynı zamanda yeni bir yapının, kuramın, aksiyomun veya fikrin temellerinin atılıyor olduğunun göstergesi olabilir. Bu açıdan bakıldığında 20. yüzyıl, paradokslar üzerinde daha fazla uğraşılan ve geçmiş zaman dilimlerinde keşfedilse de çözülememiş bazı paradoksların çözülebilmesi açısından önemli bir dönem olarak görülmektedir.

---

[8] Farabî, *İhsâ'ül - Ulûm*, çev., Ahmet Ateş, Millî Eğitim Basımevi, İstanbul 1990, s. 72.

[9] İbn Sina, *Oluş ve Bozuluş*, çev., Muammer İskenderoğlu, Ed., Muhittin Macit, Litera Yayıncılık, İstanbul 2008, s. 104.

Bu dönemde, Aristoteles'ten sonra en önemli görülen mantıkçılar yaşamış, birbirlerinden etkilenmiş, analitik felsefe ve matematiksel mantık üzerine yoğunlaşmışlardır. Böylece 20. yüzyıl mantıkçıları, Antik Çağın ve Orta Çağın en ünlü paradokslarının çözümlerini ortaya koymuş, yeni eserler üretmiş ve 21. yy. mantıkçılarına yol gösterici olmuşlardır. Bu çalışmanın temelinde olan Russell Paradoksu'nu keşfeden Bertrand Arthur William Russell bu dönemin en önde gelen mantıkçılarından birisidir. Bertrand Russell birçok alanda söz sahibi olup din, siyaset, ahlak, eğitim, matematik, mantık, felsefe, dil bilimi gibi birçok farklı alanda eserler vermiş olsa da, en önemli eseri matematiksel mantık alanına oldukça geniş yer verdiği *Matematiğin İlkeleri (The Principles of Mathematics )* isimli çalışmasıdır.

Analitik felsefenin kurucuları arasında kabul edilen Russell, 1949 yılında Britanya'nın sivillere verilen en yüksek ödülü olan Order of Merit ödülüne, ertesi yıl ise fikir özgürlüğünü savunan çeşitli yazıları nedeniyle, Nobel Edebiyat Ödülü'ne layık görülmüştür.[10]

Bertrand Russell'ın bakış açısına göre bilim ve felsefe arasında keskin bir ayrım mevcut değildir. Ona göre felsefenin temel görevi, günün en iyi bilimsel bilgisiyle, dünyanın tutarlılığını kapsamlı şekilde açıklamayı sağlamaktır. Kariyerinin sonlarına doğru kendi felsefi görüşünü; fizik, fizyoloji, psikoloji, matematiksel mantık olarak açıkladığı dört bilimin sentezi olarak tanımlamıştır.[11]
Russell, tüm aritmetiğin, saf mantıksal prensiplerden, mantıksal terimlerle tanımlanabilir kavramlar kullanılarak çıkarılabileceğini düşünmüştür. Daha ileri giderek, tüm matematiğin mantıktan elde edilebileceğini iddia etmiştir. 1902 yılı başlarında tüm matematiğin kendisinden elde edileceğini düşündüğü 24 adet mantıksal aksiyom ortaya koymuştur.[12]

Bu çalışmaya konu olan en önemli paradoks Bertrand Russell'ın, Frege'nin sisteminde keşfettiği çelişkiden yola çıkarak ve Cantor'un sonsuz kümelerle ilgili ispatları ışığında ortaya koyduğu Russell Paradoksu'dur.

---

[10] Nicholas Griffin (Ed.) *The Cambridge Companion To Bertrand Russell*, Cambridge University Press, New York 2003, s. 14.
[11] Griffin (Ed.), a.e., s. 18.
[12] Griffin (Ed,), a.e., s. 21.

Küme kuramıyla ilgili ciddi değişikliklere yol açan Russell Paradoksu'nun, ortaya çıkış sürecinin de yer aldığı bu çalışmada ayrıca, bu paradoksun keşfedilmesinde önemli rol oynayan 20. yüzyılın önde gelen iki mantıkçısına yer verilmiştir. Matematik tarihinde kümeler üzerine önemli kuramlar geliştiren Georg Ferdinand Cantor'un keşiflerinin ve fikirlerinin matematik ve felsefede önemli yeri vardır. Ortaya koyduğu Cantor Paradoksu ve küme çalışmaları, Bertrand Russell'ın paradoksunu keşfetme sürecinde önemli rol oynamıştır. Modern Matematiksel Mantık'ın kurucusu sayılan Friedrich Ludwig Gottlob Frege ise matematiğin mantığa indirgenebileceği düşüncesiyle *Aritmetiğin Temelleri (Grundgesetze der Arithmetik)* isimli kitabını kaleme almıştır. Bu eser, içinde paradoksal bir yapıyı barındırsa da oldukça önemli bir çalışmadır. Frege'nin küme kuramına birçok yenilik getiren çalışmalarıyla ilgilenen ve fikirlerinden etkilenen Russell her kadar bu eserdeki çelişkiyi ortaya koyarak, onun kurmaya çalıştığı bir temeli sarsmış olsa da, diğer açıdan Russell'ın bu paradoksu keşfetmesine olanak verdiği için Frege'nin çalışması ayrı bir önem kazanmaktadır.

Frege, felsefenin Mantık, Matematik Felsefesi, Dilbilim Felsefesi, Metafizik dahil olmak üzere birçok sahasına yaptığı katkılarla bilinmektedir. Ciddi bir felsefi eğitim almış olsa da, Frege öncelikle, hayat boyu devam eden ilgisi aritmetiğin temellerine yönelmiş olan bir matematikçidir. Aritmetiğin doğası düşüncesiyle, matematiksel gerçeklerin saf mantık gerçekleri olduğu görüşünde olan bir düşünürdür.[13]

Bertrand Russell genel olarak paradoksların kısır döngülerden ibaret olduğunu hem kendi paradoksunu hem de Antik Çağın dil bilimsel paradokslarını çözebilmek için kısır döngü prensibini ve bir sistemin kendisinin kendisini tanımlamasını değil, alt sistemlerle tanımlanması gerekliliğini ortaya koyan düzeyler hiyerarşisi kuramını geliştirmiştir. Bu çalışma; temelde Russell Paradoksları olmak üzere, mantıksal paradoksları tanımlamak, ciddi paradoksları basit bilmecelerden ve safsatalardan ayırabilmek, geçmişten günümüze gelen en önemli paradoksları Bertrand Russell'ın bakış açısıyla tanıtmak amacıyla hazırlanmıştır.

---

[13] Kevin C. Klement, *Frege And The Logic Of Sense And Reference*, Routledge, London 2002, s. 4.

## II-Tezin Sınırları

Bu çalışmada paradoks kelimesi ve paradoksal kavramların tanımlanması ile birlikte 20. yüzyıl paradoksları ele alınırken, kapsam olarak sadece bu yüzyılda keşfedilen paradokslar değil, bilinen eski paradoks örnekleri ve bu örneklere 20. yüzyıl mantıkçılarının bakış açısı ve çözüm önerileri açıklanmıştır. Önemli paradokslar; Semantik Paradokslar, Sonsuzluk Paradoksları ve Küme Kuramsal Paradokslar adı altında üç ana başlıkta toplanmıştır.

Paradokslara ve çözüm yollarına eleştirel bir bakış açısıyla yaklaşılmamıştır. Çalışmanın kapsamına giren tüm paradokslar nesnel bir bakış açısıyla ortaya konmuş ve ağırlıklı olarak Bertrand Russell, Georg Cantor ve Gotlob Frege'nin fikirlerine yer verilmiştir.

## III- Tezin İçeriği ve İzlenen Yöntem

Bu çalışmanın içeriği üç bölümde incelenmiştir. İçerikte öncelikle, kelime tanımları yapılmış, tanımlar örneklendirilmiştir. Her bölümle ilgili en önemli paradokslar açıklanmış ve birbirine benzer paradokslar karşılaştırılmış ve çözümlenebilmiş paradoksların çözüm yöntemleri ortaya konmuştur. Birinci bölümde küme kuramlı paradokslar ve kanıtlama kavramıyla ilgili Gödel'in ünlü Eksiklik Teoremi açıklanmıştır. Bu bölümde Cantor Teoremi'ne dayanan, aynı Russell Paradoksu gibi tüm kümeler kümesi ile ilgili olan Cantor Paradoksu, "kendisinin elemanı olmayan kümelerin kümesi" tanımıyla sezgisel küme kuramını içeren, belki de en ünlü mantıksal veya küme kuramsal olan Russell Paradoksu yer almaktadır. Ayrıca bu bölümde, Russell'ın kendi paradoksuna çözüm olarak sunduğu Tip Teorisi ve diğer paradoksların çözümü için ortaya koyduğu önemli fikirler bulunmaktadır.

Bununla birlikte, fiziksel ve matematiksel dünyada sınırların varlığına işaret eden, her şeyin kanıtlanamayacağı ve çözülemeyecek problemlerin ve anlaşılamayan bazı kavramların her zaman var olacağının bir göstergesi olan Kurt Gödel'in Eksiklik Teoremi ve doğru paradoksların var olduğunu savunan Dialetizm düşüncesi açıklanmıştır.

İkinci bölümde paradoks kelimesinin tanımı, kökeni ve Russell'ın paradoks tanımını yorumlayışı yer almaktadır. Paradoks kelimesiyle ilgili kavramlar, paradoks çeşitleri ve paradoksların basit bilmecelerden farkı ve felsefe üzerindeki etkisi örneklerle birlikte açıklanmıştır. Ayrıca bu bölümde önemli semantik paradokslar ve oto referans kavramı ortaya konmuştur. Semantik paradokslar arasında önemli yere sahip, doğruluk kavramıyla ilgili Yalancı Paradoksu, Epimenides Paradoksu ve Russell Paradoksu'na benzeyen Grelling-Nelson Paradoksu açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde felsefe, mantık ve matematikte yer alan sonsuzluk kavramına, ünlü düşünürlerin bakış açısı ile birlikte sonsuzluk kavramının en önemli paradoksları olan Zeno Paradoksları, Galileo Paradoksu, bu paradokslara benzer olan 20. yy.da David Hilbert'in geliştirdiği Sonsuzluk Oteli Paradoksu, Cantor'un sonsuzluk ve sonsuz küme kavramlarına yaklaşımı ve sonsuzluk paradokslarının çözümü için geliştirdiği ispatlar yer almaktadır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında yararlanılan kaynakların en önemlileri Bertrand Russell'ın paradokslar üzerine fikirlerinin, paradoksu keşfetme aşamasında yaşadığı çelişkiler ve çözüm yollarının ve diğer paradokslarla ilgili yorumlarının bulunduğu, *The Principles Of Mathematics*, *The Problems Of Philosophy*, *The Basic Writings Of Bertrand Russell* gibi eserleridir.

Bununla birlikte Douglas R. Hofstadter'in, *Gödel, Escher, Bach: Eternal Golden Braid* isimli Pulitzer Ödülü'nü kazanmış kitabı, Gottlob Frege'nin, *Aritmetiğin Temelleri* eseri en önemli kaynaklar arasındadır. Ayrıca oto referans kavramını somutlaştırmaya çalışan ünlü ressam matematikçi Maurits Cornelis Escher'in paradoksal resim çalışmaları, bu çalışmaya görsellik kazandırmıştır.

# 1.BÖLÜM

# RUSSELL PARADOKSU VE KÜME KURAMSAL PARADOKSLAR

## 1.1. KÜME KURAMI

### 1.1.1. Küme Kavramı

Küme kuramı; temelde Georg Cantor tarafından geliştirilmiş, kümelerin nitelikleri ve onların bağlantıları üzerinde yapılan çalışmaya verilen isimdir.[14] Küme Kuramı'nı, ilk defa İtalyan matematikçi Guisseppe Peano (1858-1932) öne sürmüştür. Küme kuramı, matematiğin temeli olarak, matematiksel sonsuzlukları inceleme, farklı nicel değişkenleri tanımlama çalışmasıdır. Bu kuram, kümelerin özelliklerini düzenlemeye; sayılar, fonksiyonlar ve diğer yapıları kullanmak ve tanımlamak için kavramlar, materyaller ve öz bir dil, sağlamaya yardımcı olmaktadır.[15]

Matematikte ve mantıkta en temel aksiyomlardan biri olan küme kavramı; en geniş anlamda nesnelerin sınıfı olarak tanımlanabilir ve elemanlarının listelenmesiyle tanımlanan ve elemanların isimleriyle adlandırılabilen bu kavramın kendisi de bir nesnedir.[16]

Nesneler topluluğu olarak düşünülse de küme, tam anlamıyla tanımlanamayan, bundan dolayı da paradokslara yol açabilecek bir kavramdır. Küme kavramına göre bir küme; kitaplar kümesi, tamsayılar kümesi, kümelerin birleşim kümesi, bir kümenin alt kümeleri kümesi gibi, elemanlarının her türden seçilebileceği nesneler topluluğu olarak kabul edildiğinden, aksi ispatlanana kadar, tüm kümelerin kümesinin bile bir küme olduğu düşünülmüştür.

---

[14] Christopher Clapham, James Nicholson, *The Concise Oxford Dictionary Of Mathematics*, 4. b., Oxford University Press, New York 2009, s. 718.

[15] Jethro Butler, , *Key Terms in Logic*, Ed., Federica Russo, Jon Williamson, Continuum International Publishing Group, London 2010, s. 92.

[16] Butler, *a.e.*, s. 92.

Küme kavramında, bir yandan sınırsız anlamında düşünülürse, sistematik olarak sınırlayıcı olan bir kümenin oluşturulabilirliği veya boş olarak adlandırdığımız elemansız bir kümenin varlığının tanımlanabilmesi gibi sorunlarla birlikte, kümelerdeki en çelişkili durum boş küme ve evrensel kümede ortaya çıkmaktadır. Eğer bir küme nesnelerin bir sınıfıysa o zaman boş küme kavramı algılanamaz, düşünülmez ve mantıksız olur ve neredeyse kümenin yokluğu veya küme olmayan demektir. [17]

Eğer bir küme kapsayıcı ise, o zaman sonsuz küme mantıksız olur; çünkü kapsayıcı tanımından dolayı sınırlı olmak zorunda olduğu için sonsuz büyüklükte olamaz. Boş küme kendisinin elemanı değildir çünkü öyle olsaydı artık boş olmayacaktır. Bu nedenle; ne evrensel küme ne de boş küme düzgün kümeler değildir.[18]

Tüm bilimlerde kullanılan sınıflama, sınıflandırma kavramları gibi, küme kavramı da temel bir kavram olarak matematikte bir düzenleyici görevinde kabul edilmektedir. Kendisi düzen oluşturan bir kuram düzensizliğin kaynağı olduğunda; yani küme kuramında paradokslar oluştuğunda, aksiyomların temelinde mantıksal bir hata var demektir. Bu kuramdaki paradoksal yapıyı, Georg Cantor ve Bertrand Russell gibi bilim adamları fark etmişlerdir. Her sınıfın veya topluluğun bir küme olamayacağını Bertrand Russell bize Russell kümesiyle ispatlamıştır.

Küme Kuramı'nı sağlamlaştırmak amacıyla bazı teoriler ortaya konmuştur. Ayrıca kümeleri paradokslardan korumak amacıyla, ilk kez Zermelo'nun 1908' de ortaya koyduğu daha sonra, Zermelo-Fraenkel Aksiyomları adı verilen teoriler geliştirilmiştir.[19]

---

[17] Joel D. Morrison, *Spinbitz İnterface Philosophy Mathematics Nondual Rational Empricism*, USA 2007, C. I, s. 210.

[18] Morrison, *a.e.*,. 210.

[19] Jethro Butler, *Key Terms in Logic*, Ed., Federica Russo, Jon Williamson, Continuum International Publishing Group, London 2010, s. 93.

## 1.2. KÜME PARADOKSLARININ TEMEL KAVRAMLARI

### 1.2.1. Küme Elemanı

Aristoteles eleman kavramını “bir şeyin içinde bulunan, onu meydana getiren ve tür bakımından başka türlere bölünemeyen ilk şey” olarak tanımlamıştır. [20]

Her küme, genel olarak topluluk olacağı için, bu topluluğun içinde yer alan her nesne kümenin elemanı olmaktadır. Kümelerin elemanları tek, çift ve çok sayıda farklı nesne olabileceği gibi farklı kümeler de bir kümenin elemanı olabilirler.

Eğer c, bir D kümesinin elemanı ise, $c \in D$ sembolik ifadesiyle gösterilmektedir. Buradaki $\in$ işareti, Peano tarafından ortaya konulmuştur ve Yunanca’da yer alan epsilon (ε) harfinden türetilmiştir. $c \in D$ ifadesi, “c, elemanıdır D’nin” anlamına gelmektedir.

Eğer bir nesne veya küme verilen kümenin dışında kalıyorsa, o kümenin elemanı değildir. Yani D kümesi, c elemanını içermez ise, $c \notin D$ şeklinde gösterilir.

### 1.2.2. Genişleme Aksiyomu (Axiom Of Extensionality)

Eleman kavramıyla ilgili önemli aksiyomlardan ilki olan genişleme aksiyomu; kümenin elemanlarıyla tanımlanması ve böylece farklı bir kümeye denk hale gelebilmesidir. Bir küme bütün olarak elemanları yardımıyla belirli hale gelmektedir. Eğer bir B kümesinin elemanları bilinirse, o kümenin kimliği ile ilgili her şey bilinmektedir. Bu prensip genişleme aksiyomunda ortaya çıkmaktadır.

[20] Aristoteles, *Metafizik*, çev., Ahmet Arslan, Sosyal Yayınları, İstanbul 1996, s. 239.

Genişleme aksiyomuna göre, eğer seçeceğimiz iki küme, örneğin A ve B kümesi aynı elemanlara sahipse, o zaman bu iki kümenin birbirine eşit olduğu söylenir.

A= “Toplamları 6 olan pozitif çift sayılar”

B= “1 ile 5 arasındaki çift sayılar”

Örnekteki gibi, iki farklı tanımlama bizi aynı kümeye yani, elemanları 2 ve 4 olan kümeye ulaştırabilir.

Sembolik olarak bu özellik;

$\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a=b$

şeklinde gösterilir. [21]

### 1.2.3. Ayırma Aksiyomu (Unrestricted Comprehension Axiom)

Frege bu prensiple bir mantıksal sistem inşa etmeye çalışmıştır. Bu aksiyomun özelliği bir kümeyi tanımlanan belirli bir özellik yöntemiyle formülleştirme çalışmasına verilen herhangi bir şartı, formülle ifade etmeye imkan verebilmesidir. Bir kümenin elemanlarının hepsinde var olan ortak bir özellik yardımıyla sembolik hale getirilebilmesidir. Kümenin içerdiği tüm elemanların, ayrı ayrı yazılması yerine, verilen özellikle genelleştirilerek sembolize edilmesidir.

$$\exists a \forall x[x \in a \leftrightarrow P(x)]$$

Bu ifadenin anlamı; Bir küme vardır ki, elemanları sadece bu P(x) sembolünün ifade ettiği özelliği sağlamalıdır. Bu iki aksiyom, bize kümeleri özellikleri yöntemiyle belirlememizi sağlamaktadır.[22]

---

[21] Jon Barwise, John Etchemendy, *Language Proof and Logic,* Csli Publications, Seven Bridges Press, New York 1999, s. 407.

[22] Barwise, Etchemendy, *a.e.*, s. 408.

### 1.2.4. Boş Küme Kavramı

Boş küme, herhangi bir elemana sahip olmasa da kümelerde var olan bir kavramdır. Boş küme aksiyomunun sembolü $\emptyset$, şeklindedir. Boş küme aslında hiçbir şey içermese de, kendisi bir şeydir. Günlük hayatta sözü edilen kümeler nesnelerin kümesidir. Fakat matematikte kuramsal kümeler yer almaktadır.

Bertrand Russell, boş küme kavramıyla ortaya çıkan çelişkiyi farketmiş ve şu sözlerle boş kümeyi tanımlamıştır:

> "Boş kümeyle, genel olarak ta "hiçbir şey" fikriyle ilgili büyük sorunlar vardır. "Hiçbir şey" gibi bir kavram vardır ve bu anlamda "hiçbir şey", "bir şey"dir. Sembolik mantıkta boş küme (sınıf), hiçbir terime sahip olmayan bir sınıftır ve sembolik olarak bir karşılığı vardır. [23]

En basit tanımlamayla "hiçbir şey" var olmayan demektir, fakat kavram olarak ele alındığında var olan bir kavramdır. Matematikte, bilimde, felsefede, günlük hayatta bu çeşit kavramlar için kullanılan semboller veya kelimeler vardır. Matematikte bu kavrama en yakın olan boş küme kavramıdır. Bu küme hiçbir şeyle tam olarak aynı değildir çünkü hiçbir üyesi olmayan ve her kümenin alt kümesi olan tek kümedir. Boş küme hiçbir şeyi içermese de belirttiği vardır. Mesela tüm kare olan dairelerin kümesi gibi.

Boş kümeyi, Russell kümesiyle tanımlayalım.

Russell kümesi sembolik olarak $R=\{X:X \text{ bir kümedir ve } X\notin X\}$ şeklinde gösterilmektedir.

Russell kümesinde, herhangi bir değişken olarak kabul edilen X elemanı yerine, boş küme yerleştirilirse;

$\emptyset$ bir kümedir ve $\emptyset \notin \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in$ R dir.

Şeklinde sonuca ulaşılır. Yani, boş küme bir Russell kümesi (kendisinin elemanı olmayan küme) dir. [24]

---

[23] Bertrand Russell, *The Principles Of Mathematics*, W. W. Norton Company Inc., New York 1938, s. 73.

[24] Richard Hammack, *Book Of Proof*, 2. b., Virginia Commonwealth University, Creative Commons Attribution, USA 2013, s. 29.

### 1.2.5. Evrensel Küme (V)

Kapsama aksiyomuna göre evrensel küme, kendisi de dahil olmak üzere her şeyi kapsayan kümedir ve genelde V sembolüyle gösterilir. Evrensel kümenin kuvvet kümesi, evrensel kümenin hem alt kümesidir hem de alt kümesi değildir. Cantor'un ortaya koyduğu çelişki bu konuda ortaya çıkmaktadır.

John Venn, evrensel küme kavramını somut hale getirmek için Venn Şeması'nı geliştirmiştir. Evrensel küme, içine sayılamayacak kadar çok eleman alsa da, sınırsız bir şekilde genişletilebilmesi çelişkili olan bir kümedir. Evrensel kümeyi, tüm mümkün olan kümelerin kümesi olarak nitelendireceğimiz bir kümeye genişletmemiz, bizi Russell Paradoksu ile karşılaştıran bir durumdur.

## 1.3. SONSUZ KÜME TEORİSİ

Kümeler üzerinde derin çalışmalar yapan Georg Cantor, küme teorisinde çok önemli bir çalışma geliştirmiştir. Bu konuda Bolzano'nun sonsuzluk paradoksları çalışmasından önemli ölçüde etkilenmiştir. Cantor'un sonsuz kümeler üzerine olan çalışması, diğer bilim adamları arasında farklı tepkilere yol açmıştır, mesela Poincaré, tüm küme kuramının matematikten çıkarılması gerektiğini düşünmüştür.

Buna rağmen Cantor, sonsuz küme kuramının sadece büyük bir matematik buluşu olduğuna değil, hem de insanlık ve Tanrı arasında bir köprü olduğuna inanmıştır. Cantor, Papa Leo XIII ve ünlü teolog Cardinal Franzelin'e; sonsuzluk üzerine yaptığı çalışmasının nihayet Tanrı'nın varlığını kanıtladığını söylediği mektuplar yazmıştır. Yaklaşık 1930'dan sonra küme kuramı fikri tüm matematiğin temeli olmuş ve geniş ölçüde kabul görmüştür ve günümüzde de bu kabul devam etmektedir.[25]

---

[25] Alexander A. Stepanov, Daniel E. Rose, *Notes on Set Theory*, Logic and Computation, USA 2013, s. 14.

## 1.4. CANTOR PARADOKSU VEYA KUVVET KÜMESİ PARADOKSU

### 1.4.1. Cantor Sonsuzu

Elemanları bir arada ve çok sayıda olmasına rağmen küme bir bütün halindedir. Sonsuz küme kuramıyla ilgili en önemli çalışmaları yapan Cantor küme tanımını yaparken teklik kavramına atıfta bulunmuştur. Teklik ve çokluk gibi iki zıt ve çelişkili kavramı küme tanımında biraraya getirmiş, "bir küme, kendisinin tekmiş gibi düşünülmesine izin veren bir çokluktur" demiştir. [26]

Sonsuz sınıfların belki de en önemlisi tüm kümelerin sınıfıdır. Tüm kümeler sınıfı; Evrensel Sınıf veya Cantor Sonsuzu (Cantor's Absolute) olarak adlandırılmaktadır. Cantor'un küme tanımını sonsuz çokluklara uygularsak, örneğin tüm kümeler sınıfını ele alırsak; bu sınıf bir küme değildir. Cantor, bu durumu 1905'te Dedekind' e yazdığı mektupta anlatmıştır.

Cantor, bu düşüncesini şu şekilde açıklamıştır:

> "Tüm elemanlarının bir olduğu böyle bir çokluğun varsayımı çelişkiye yol açmaktadır. Öyleyse sonlu bir şeymiş gibi, böyle bir çokluğu bir tek olarak algılamak imkansızdır. Böyle çoklukları mutlak sonsuz veya tutarsız çokluklar olarak adlandırırım" [27]

Cantor, kümeler arasında bire bir eşlemenin önemini ortaya koymuş ve gerçel sayıların sonsuzluğunun doğal sayıların sonsuzluğundan daha büyük olduğunu ispatlamıştır. Böylece sadece sonsuzluk değil, sonsuzluğun da kendi arasında bir hiyerarşiye sahip olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca kardinal sayı ve ordinal sayı kavramlarını ortaya atmış ve bu sayıların aritmetiğini tanımlamıştır.

Henri Poincare, Cantorizmi matematiğin iyileşmesi gereken bir hastalığı olarak görse de David Hilbert "hiç kimse Cantor'un bize sunduğu cennetten çıkaramaz" demiştir. Bertrand Russell, Cantor'un başarısını övmüş ve "belki de çağımızın gurur duyabileceği en büyük" başarı olarak tanımlamıştır.[28]

---

[26]Rudy Rucker, *Infinity and The Mind,* Princeton University Press, New Age International Ltd. Publishers, Delhi 2007, s. 40.
[27] Rucker, *a.e.*, s. 48.
[28] Martin Gardner, *The Colossal Book Of Mathematic Classic Puzzles Paradoxes and Problems*, W. Norton Company, New York 2001, s. 327.

Bertrand Russell, Cantor'un geliştirdiği ve ispatladığı sonsuz sayılar kuramıyla ilgili şu sözleri söylemiştir:

> " Galileo'nun sonsuz sayıların eşit olduğunu ele almasına karşın Cantor, daha büyük gibi kavramların sonsuzlara uygulanabileceğinin doğru olduğunu göstermiştir, yani sonsuz sayıların da sonsuz sayıda çeşitleri vardır ve daha büyük ve daha küçük kavramları bu sonsuzluklara tam olarak uygulanabilir." [29]

### 1.4.2. Transfinit Sayı Kavramı

Tüm sınıfların sınıfını düşünelim. Demek istediğimiz tüm sınıflar, tüm kitaplar, tüm fikirler, tüm sayılar, sınırlı ve sınırsız, gerçek ve sanal, rasyonel irrasyonel, bu veya başka bir evrendeki tüm nesneler gibi her şey bu sınıfın içerisindedir. Hiçbir sınıf, tüm sınıfların sınıfından daha çok elemana sahip değildir.

Fakat bu durumda bu sınıftaki transfinit sayısı, sorgusuz en büyük transfinit sayıdır. Ancak Georg Cantor en büyük transfinit sayının olmadığını kanıtlamıştır. Cantor'un ortaya koyduğu sonsuz sayılar paradoksu, 1897'de İtalyan matematikçi Burali-Forti'ye ışık tutmuş, dolayısıyla Russell Paradoksu'nun temelini oluşturmuştur.

### 1.4.3. Kuvvet Kümesi

Cantor Paradoksu'ndaki en önemli kavram, kuvvet kümesi kavramıdır. Nesnelerin bir kümenin elemanı olması gibi, kümeler de diğer kümelerin elemanı olabilirler. Herhangi bir kümenin tüm alt kümelerinin kümesi de tek bir kümedir. Bu küme de kuvvet kümesi olarak adlandırılır.

Kuvvet kümesi kavramı, n tane terimin, $2^n$ tane alt sınıfa sahip olması anlamına gelmektedir. Bu önerme n sonsuz olduğunda da geçerlidir.

---

[29] Bertrand Russell, *Our Knowledge Of The External World,* George Allen&Unwin Ltd., London 1914, s. 199.

Herhangi bir b kümesinin kuvvet kümesi $\wp$(b) sembolüyle gösterilmektedir. Bu kümeyi şöyle tanımlarsak: Herhangi bir b kümesi için elemanları sadece b nin alt kümeleri olan tek bir küme vardır. Cantor'un kuvvet kümesiyle ilgili kanıtladığı, $2^n$ sayısının n den daha büyük olduğu gerçeğidir.

Russell, kümelerin kuvvet kümesini şu örnekle açıklamıştır:

> "Örneğin bir yemeğin sonunda ev sahibi iki, üç veya herhangi birini seçebileceğiniz üç farklı tatlı teklif ederse; hepsini reddedebilirsiniz bu bir seçimdir. İçlerinden birisini alabilirsiniz; bu üç farklı seçim demektir. İçlerinden iki tanesini seçebilirsiniz, bu da üç şekilde mümkündür. Veya hepsini seçebilirsiniz ki bu da son ihtimaldir. İhtimallerin toplam sayısı böylece $2^3$ yani 8 tane olur" [30]

Bu mantığa göre, bu kavram için bir örneklem olarak evrendeki tüm nesneleri alırsak nesnelerin sınıflarının sayısının, var olan tüm nesnelerin sayısından daha fazla olduğu sonucuna varılacaktır.

3 elemanlı bir kümenin kuvvet kümesi $2^3 = 8$ elemanlı bir küme olacaktır.

4 elemanlı bir kümenin kuvvet kümesi $2^4 = 16$ elemanlı bir küme olacaktır.

..........

n elemanlı bir kümenin kuvvet kümesi $2^n$ elemanlı bir küme olacaktır.

### 1.4.4. Sürekli Artan Sonsuzluk

Kardinal sayı, sonlu veya sonsuz bir kümenin büyüklüğünü gösteren sayıdır. Sonsuz kümeleri ölçen transfinit kardinal sayılar teorisinde daha büyük ve daha küçük kavramları geçerlidir, örneğin doğal sayılar kümesi en küçük transfinit sayısına sahiptir. Reel sayılar kümesi daha geniş transfinit kardinal sayısına sahiptir. Yani reel sayılar kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi, doğal sayıların tüm alt kümeleri sayısından daha büyüktür. Bu şekilde devam ederek, sayıları gittikçe artan kümelerle karşılaşılmaktadır.

---

[30] Bertrand Russell, *My Philosophical Development,* George Allen&Unwin Ltd., New York 1959, s. 80.

Her boş olmayan kümenin, sonlu ya da sonsuz elemanlarından daha fazla alt kümesi vardır. Bu da verilen kümenin alt kümelerinin kümesi kardinal sayısının, verilen kümenin kardinal sayısından daha büyük olması demektir. Bu da bir kardinal sayı ne kadar büyük olursa olsun, daha büyük bir kardinal sayının hala var olmasını garanti etmektedir. [31]

### 1.4.5. Cantor Paradoksu Formel Gösterim

$2^{\aleph_0} > \aleph_0$ bu ifade Cantor Teoremi olarak bilinmektedir. Cantor Teoremi Cantor'un geliştirdiği kuvvet kümesi paradoksunun temel dayanağıdır.

A herhangi bir küme olsun, öyleyse $|A| < |\wp(A)|$ olur.

$\wp(A)$; A kümesinin kuvvet kümesine işaret etmektedir.

Eğer A sonluysa o zaman Cantor Teoremi'nden;

$$|A| < 2^{|A|} = |\wp(A)| \text{ olur.}$$ [32]

### 1.4.6. Cantor Paradoksu Sonucu

A-Aklımıza gelebilecek her mümkün kümeyi içeren tüm kümelerin kümesini ele alalım. Mantık olarak bu küme var olan en büyük ve en geniş küme olmak zorundadır.

B-Cantor'un ispatladığı Cantor Teoremi'ne göre, bir kümenin tüm alt kümelerinin kümesinin eleman sayısı, kümenin kendisinden daha büyüktür.

A ve B ifadelerinin birbiriyle çelişkili olduğu açıktır.

---

[31] Stephen F. Barker, *Philosophy Of Mathematics*, Ed., Elizabeth, Monroe Beardsley, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, USA 1964, s. 6.

[32] Richard Hammack, *Book Of Proof*, 2.b., Virginia Commonwealth University, Creative Commons Attribution, USA 2013, s. 227.

Cantor, ele alınan herhangi bir kümenin kuvvet kümesini alarak her zaman daha büyük bir küme elde edilebileceğini göstermiştir. O zaman var olan tüm kümelerin kümesi, öğeleri tüm kümeler olan en büyük küme olmalıdır. Ama aynı zamanda ondan da büyük bir kümenin varlığı kesindir. O halde "tüm kümelerin kümesi" hem var olan en büyük kümedir, hem en büyük değildir. Ana fikir şudur: tüm kümelerin kümesi, gayri meşru bir kümedir. [33]

Cantor, kuvvet kümesi ile ilgili bu paradoksundan mutlak sonsuzun kullanımı ile ilgili şöyle bir sonuç çıkarmıştır. Cantor'a göre "tüm kümeler kümesi" yoktur. Aristoteles'in potansiyel ve mutlak sonsuzluk ayrımını hatırlatarak, tüm kümelerin kümesi gibi bir küme var olsaydı mutlak sonsuz olması gerektiğini düşünmüştür.

Ona göre "tüm kümeler kümesi" gibi bir küme yoktur çünkü bu küme tamamlanmış bir bütün oluşturamaz. Dolayısıyla matematikte mutlak sonsuz yoktur; mutlak sonsuz yalnız Tanrı'nın yetki alanıdır. [34]

### 1.4.7. Cantor Paradoksu Önemi

Bertrand Russell, Cantor'un en büyük transfinit sayı olmadığı düşüncesine önceleri katılmasa ve bu fikri eleştirse de zamanla benimsediği fikrinden vazgeçmiş ve Cantor'un buluşları üzerinde düşünmesi sonucu da, Russell Paradoksu olarak bilinen çelişkiye ulaşmıştır.

[33] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. b., Hil Yayıncılık, İstanbul 2009, s. 84.
[34] Vann McGee (2005),"Logical Paradoxes", *in Encyclopedia Of Philosophy*, 2. b., Ed., Donald M. Borchert, USA 2006, C. V, s. 517.

Russell, Cantor Paradoksu için de şunları söylemiştir:

> "Verilen bir sınıfı içeren sınıfların sayısı, sınıfın elemanlarının sayısından daha büyüktür. Bu da en büyük kardinal sayı olmadığını göstermektedir. Ancak eğer tekilleri, tekillerin sınıflarını, tekillerin sınıflarının sınıflarını…....bir sınıfta toplarsak, alt sınıfları elemanları olan bir sınıf elde ederiz. Bu sınıf sayılabilen tüm nesneleri içerir. Eğer böyle bir sınıf varsa mümkün olan en büyük eleman sayısına sahip olmalıdır. Tüm alt sınıfları onun elemanı olduğundan elemanlarından fazla sayıda olamazlar. Bu da bir çelişkidir." [35]

Russell, 1901 yılında Cantor'un en büyük sonsuz sayı olmadığı ile ilgili kanıtıyla karşılaştığında bu kanıtı kusur bulabilmek için incelemiş ve tüm nesnelerin sınıfına uyguladığında paradoksla karşılaşmıştır.

Cantor, ortaya koyduğu paradoksta, Russell Paradoksu'nun da konusu olan, tüm kümelerin kümesi problemini, kuvvet kümesi düşüncesiyle ele almış ve çözümlemiştir. Cantor'un Paradoksu, Russell'ın paradokslarla ilgili düşüncelerinin temelini oluşturmuş, bu çelişki üzerinde çalışması önemli bir paradoksu keşfetmesine yol açmıştır.

## 1.5. RUSSELL PARADOKSU

### 1.5.1. Russell Paradoksu'na Giriş

Mantıkçılara göre aritmetik doğruluk mantıksal doğruluğun bir çeşidi olmuştur. Bu konudaki en detaylı araştırmalar ve geliştirme çalışmaları; Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Alfred North Whitehead ve Bertrand Russell tarafından gerçekleştirilmiştir. Russell'ın aksine Frege, ontolojik olarak, sayıları nesneler olarak kabul ettiği için realisttir. Frege için mantık 'mantıksal nesnelerin' olduğu bir varlık felsefesine sahiptir.[36]

---

[35] Bertrand Russell, *Introduction To Mathematical Philosophy*, Second Edition, George Allen &Unwin Ltd., New York 1920, s. 136.

[36] Stewart Shapiro, *The Oxford Handbook Of Philosophy Of Mathematics And Logic*, Oxford University Press, New York 2005, s. 11.

Frege'nin kariyeri 1874-1918 yılları arasında Jena Üniversitesi Matematik Bölümü'nde geçmiştir. Hayatını matematik ve felsefe bilimlerine adamış olan Frege bugün bile modern matematiksel mantığın kurucusu ve analitik felsefenin büyükbabası olarak kabul edilmiştir. [37]

Frege, doğal sayıları tekil olarak tanımlamada ve kavramları genişletme açısından özellikle doğal sayı kavramı için bazı tanımlamalar geliştirmiştir. Örneğin; 2 sayısı, iki elemana sahip olan tüm kavramların genişletilmiş hali veya bir sınıfıdır. Frege'nin bu genişletme teorisindeki tutarsızlıklar, daha sonra Russell Paradoksu'nda ortaya konacak ve Frege'nin mantıksal programına trajik bir son sağlayacaktır. [38]

Russell ve Whitehead, Frege'nin sistemindeki tutarsızlığı düzeltmek, farklı teoriler geliştirmek, daha güvenli ve sağlam mantık temeli kurabilmek için çalışmışlardır.

### 1.5.2. Bertrand Russell ve Alfred Whitehead

Klasik mantıktan farklı olarak simgesel mantık genel prensipleri biçimlendirme çabalarıyla meydana gelmiştir. Formel sistemi savunan mantıkçılar matematik ve mantık arasında yeni bağlantılar kurmaya veya bu iki sistemi yeni bir bakış açısıyla değerlendirmeye çalışmışlardır. Bu konuyu ele alan iki mantıkçı, Bertrand Russell ile Alfred N. Whitehead, mantıkla matematiğin temelde özdeş olduğu, matematiğin aslında mantığın, nicel uygulamalarda gelişen bir kolu sayılabileceği sonucuna ulaşmışlardır.[39]

---

[37] Michael Dummett, "Gottlob Frege", *In Blackwell Companions To Philosophy: A Companion To Analytic Philosophy*, Ed., A. P. Martinich, David Sosa, Blackwell Publishers Ltd., USA 2001, s. 7.
[38] Shapiro, *a.e.*, s. 12.
[39] Hans Reichenbach, *Bilimsel Felsefenin Doğuşu,* çev., Cemal Yıldırım, Remzi Kitabevi, İstanbul 1993, s. 150.

Russell’ın Whitehead’le birlikte çalışmış olduğu dönem onun özellikle matematiksel mantık sorunlarına eğildiği ve Whitehead'la birlikte 2000 sayfayı aşan, Aristoteles’ten beri insan usunun ortaya koyduğu en büyük mantık ürünü sayılan, matematiği mantığa indirgeme amacındaki Principia Mathematica’yı yazdığı dönemdir. 1910-1913 yılları arasında çıkan Principia Mathematica, matematiği mantığa indirgeme çalışması olmuştur. [40]

### 1.5.3. Bertrand Russell ve Gottlob Frege

Frege, 1891 yılından sonra, dört temel makale yayımlamıştır. Frege bu makalelerde 'kavramın kaplamı' anlayışını, fonksiyonların 'değer-alanı' kavramıyla daha teknik ve mantıksal bir açıdan ele almış; nesne ve kavram arasında yapmış olduğu keskin ayrıma yönelik eleştirilere yanıt olacak şekilde bu ayrımı daha teknik bir düzeyde incelemiştir. 1893'te yayımlanan *Aritmetiğin Temel Yasaları* (birinci cildi), tüm bu yenilikleri de kapsayacak şekilde aritmetiğin temel yasalarının, aslında sadece mantık yasalarından türediğini daha teknik bir dille ve aksiyomatik olarak ortaya koyabilmek amacıyla yazılmıştır.[41]

Frege’nin, üzerinde uzun süre çalıştığı yapıtının paradoks içermesi, onu derinden sarsmış olmakla birlikte, bu paradoksu ortadan kaldıracak çalışmalara da devam etmiştir; ancak tatmin edici bir çözüme ulaşamamıştır.

Paradokstan kurtulmak amacıyla değişiklik yapılan V. aksiyomun yeni versiyonunun da bir çelişkiye yol açtığı, Frege’nin ölümünden sonra Polonyalı mantıkçı Stanislaw Lesnievski tarafından kanıtlanmıştır. [42]

Frege, Russell'ın paradoksu haber veren mektubu eline ulaştıktan sonra *Aritmetiğin Temel Yasaları* eserinin ikinci cildine yazdığı ve “bir bilimsel yazarın başına gelebilecek en talihsiz şey, kurduğu yapının temellerinin, çalışması bittikten sonra sallanmasıdır” diye başladığı yazıda en sonunda şunları ifade etmiştir:

---

[40] Bertrand Russell, *Batı Felsefesi Tarihi*, çev., Muammer Sencer, Say Yayınları, 7. b., İstanbul 2000, s. 40.
[41] Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, çev., H. Bülent Gözkân, YKY, İstanbul 2008, s. 65.
[42] Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, çev., H. Bülent Gözkân, YKY, İstanbul 2008, s. 66.

> "Aritmetiğin asli sorusu, hangi yolla mantıksal nesneleri, özelde sayıları kavrayabiliyoruz sorusudur. Sayıları nesne olarak teşhis ettiğimizi hangi yolla gerekçelendiriyoruz? Bu ikinci cildi yazarken bu problem düşündüğüm ölçüde çözüme kavuşmuş olmasa da, çözüme giden yolun bulunduğundan halen kuşku duymuyorum." [43]

Frege'nin sayal sayının genel kavramının tanımlanma çabasında izlediği yol, kullandığı yeni kavramlar ve yaklaşım, içinde öylesine yeni ve daha önce hiç düşünülmemiş öğeleri barındırmaktadır ki, bu yaklaşımın aksiyomatik yapısında ortaya çıkan Russell Paradoksu'na rağmen Frege'nin yapıtı, kendisinden sonra bu yöndeki çalışmaların neredeyse hareket ve başvuru noktasını oluşturmuştur.

Dolayısıyla aritmetiğin mantığa indirgenmesi girişimi başarısızlığa uğramış olsa da, geliştirdiği yaklaşım ve doğal dilden hareketle dilin mantıksal yapısının incelenmesinde izlediği yol, doğal dilin mantıksal yapısının arka planını açığa çıkarma girişimi, kendinden sonraki çalışmalarda derin izler bırakmış, kendisinden sonra analitik felsefenin ortaya çıkmasını sağlayacak felsefi bir yönteme dönüşmüştür. [44]

### 1.5.4. Bertrand Russell ve Georg Cantor

Michael Dummett, *The Seas of Language* isimli eserinde küme kuramsal paradokslardan bahsetmiş, Russell Paradoksu ve Cantor Paradoksu gibi küme paradokslarının keşfiyle ilgili yorumlarda bulunmuştur.

Dummett, küme teorisiyle ilgili paradokslara oldukça alışıldığından dolayı, artık bu paradoksların şaşkınlık uyandırmadığını düşünmüş ve paradoksların önemini şu sözlerle ifade etmiştir: "onların keşfi hala, irrasyonel sayıların keşfiyle bütünüyle aynı değerde, tüm zamanların en çok, derin, büyük kavramsal keşiflerinden, buluşlarından birisidir. Cantor, meselenin Frege'nin öne sürdüğünden daha derin olduğunu görmüştür." [45]

---

[43] Frege, *a.e.*, s. 67.
[44] Frege, *a.e.*, s. 68.
[45] Michael Dummett, *The Seas of Language*, Clarendon Press, Oxford 1993, s. 440.

Aslında Cantor'un sonsuz sayılarla ilgili ortaya çıkan çelişkilere uygulamaya çalıştığı çözümler Russell Paradoksu'nun keşfinin temelini sağlamıştır. Russell için, Cantor'un ortaya koyduğu kanıtlar, çok önemli bir dönüm noktası olmuştur.

Bertrand Russell, ilk kez Cantor'un en büyük alef olmadığı (en büyük sonsuz sayı) ile ilgili kanıtıyla karşılaştığında bu iddiaya karşı çıkmıştır. Yani, Cantor'un tüm kümelerin kümesinin var olmadığı düşüncesine inanmamıştır. Bundan dolayı, bu düşünceyi bir safsata olarak değerlendirmiştir.

Russell, 1901 yılında yaptığı açıklamada Cantor'un, bu safsatadan suçlu olduğunu ilerideki çalışmasında açıklayacağını yazmıştır. Bununla birlikte, en büyük sayının var olması gerektiğinin çok açık olduğunu ifade etmiştir. Cantor tarafından ortaya konan kanıtı kabul etmediğini; "her şey, her şey alınmış ise, eklemek için bir şey kalmamaktadır" yorumuyla ifade etmiştir. [46]

Cantor, sonsuzluk kavramına yaklaştığı açıdan, "her şey" sözcüğüne baktığında sonsuzluk kavramına benzerliğinden dolayı, bu kavramı paradoksal bulup, birçok şeyden her şeye geçilebilmesini mümkün görmemiştir. Bu kavram kendi içinde çelişkili ve insan zihninin kavrayışının dışında ve ötesinde olduğundan, her şeyin varlığının mümkün olamayacağını düşünmüştür.

Bertrand Russell, Cantor'u eleştirdiği makalesini, 16 yıl sonra *Mysticism and Logic* eserinde tekrar bastırdığında, fikirlerini tamamen değiştirmiş ve bu eleştirisinde hatalı olduğunu kabul etmiştir.

Russell bu basımda eserine, bu hatası için özür dilediği bir dip not eklemiştir. Russell'ın bu hata üzerinde düşünmesi ve çalışması da onun çok ünlü küme paradoksunu keşfetmesine neden olmuştur.

---

[46] Martin Gardner, *The Colossal Book Of Mathematics Classic Puzzles Paradoxes and Problems*, W. Norton&Company, New York 2001, s. 61.

Bertrand Russell, kendi ifadeleriyle bu süreci şu şekilde anlatmıştır:

> "Bu çelişkiye, Cantor'un en büyük kardinal sayı olmadığı ile ilgili kanıtını düşünüyorken ulaştım. Dünyada var olan tüm nesnelerin sayısının mümkün olan en büyük sayı olması gerektiğini düşünmüştüm ve bu kanıtı, bu sayının ne olabileceğini görmek için kullandım. Bu süreç beni oldukça özel bir sınıf üzerinde düşünmeme yol açtı.
>
> Cantor'un argümanının uygulaması, beni kendilerinin üyesi olmayan sınıfları düşünmemi sağladı. Böyle bir sınıf kendisinin üyesi midir, yoksa değil midir? diye kendime sordum.
>
> İlk önce, mantığımda önemsiz bir hata olması gerektiğini düşündüm. Mantıksal bir mikroskop altında tüm adımları gözden geçirdim. Fakat herhangi bir hataya rastlamadım. Benim açımdan, matematikte olduğundan daha çok sorunun mantıkta olduğunu ve bu mantığın reform edilmesi gerektiğini düşündüm." [47]

### 1.5.5. Russell Paradoksu ve Frege

Modern mantığın kurucusu, matematikçi ve mantıkçı Frege 1893'te *Aritmetiğin Temelleri* adlı ünlü yapıtının birinci cildini yayımlamış ve bu yapıtında aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiştir. 1902 yılında ikinci cildin yazılması tamamlandığı sırada, 54 yaşındaki Frege, 30 yaşındaki Russell'dan "Sevgili Meslektaş" diye başlayan 16 Haziran 1902 tarihli, bir mektup almıştır.

Bu mektupta Russell, *Aritmetiğin Temelleri* eserini övmüş ve eserin ikinci cildinin yayınlanmasını ümit ettiğini belirtmiştir ve " '*grundgesetze der arithmetik'* çalışmanızı bir buçuk yıldır biliyordum, ancak eserinizle ilgili çalışmayı yapmak için zamanı şimdi bulabildim. Tüm esaslarda sizinle aynı fikirde olduğumu keşfettim. Ancak tek bir noktada bir zorlukla karşılaştım." [48] sözlerinden sonra, Frege'nin sisteminde bulduğu paradoksu açıklamıştır.

---

[47] Bertrand Russell, *My Philosophical Development,* George Allen&Unwin Ltd., Simon and Schuster Inc., New York 1959, s. 75-76.

[48] Bertrand Russell (1902) , "Letter To Frege", in Jean Van Heijenoort, *From Frege To Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967, s. 125.

Frege'nin kitabını baskıdan çekip temel değişiklikler yapması için çok geç olduğundan bir sonsöz yazmakla yetinmek zorunda kalmış ve Frege, Russell'ın mektubunu 22 Haziran 1902 günü yanıtlamıştır:

> "16 Haziran tarihli ilginç mektubunuz için çok teşekkürler, birçok noktada benimle aynı fikirde olmanız ve çalışmalarımı bütün yönleriyle ele alma isteğiniz beni memnun etti. Bulduğunuz çelişki bende çok büyük şaşkınlığa sebep oldu, aritmetiği inşa etmeye çalıştığım temeli sarstığı için derin üzüntüye uğrattı….Bu daha ciddi bir durum ortaya çıkarıyor ki, V. kuralın yanlışlığı ile birlikte, sadece bu temel sarsılmakla kalmıyor aynı zamanda aritmetiğin sağlam bir temele dayandırılabilmesi mümkün görünmüyor .... Her durumda keşfiniz oldukça hayranlık verici ve –ilk bakışta hoş karşılanmasa da – belki de ilerde mantıkta büyük ilerlemelere yol açacaktır." [49]

Aynı yıl Frege, *Aritmetiğin Temel Yasaları* adlı yapıtını şöyle bir notla yayınlamıştır:

> "Bilimsel bir yazar için, kurduğu yapıtın temellerinden birinin, yapı bittikten sonra çökmesi ölçüsünde şanssızlık olamaz. Yapıtın bitimine yakın Russell'ın mektubunu alınca böyle bir duruma düştüm. V. aksiyomla ilgili sorunun öbür aksiyomlar türünden apaçık olmadığını ve bir mantık yasası sayılamayacağını görmezlikten gelmiş değilim. Bu güçsüz noktayı I. cildin önsözünde de belirtmiştim. Yerine bir başkasını bulsaydım, sevinçle vazgeçerdim ondan.
>
> Şimdi bile, bir kavramdan, o kavramın uzanımına geçmeden, aritmetiğin bilimsel olarak nasıl kurulacağını ve sayıların, mantıksal nesneler olarak nasıl kavranıp gözden geçirileceğini bilmiyorum. Daima, bir kavramın, uzanım açısından öbürüyle çakışmasından, birinin sınırına giren kavramın öbürünün de sınırına girdiğinden söz edebilir miyim? [50]

Bertrand Russell bu paradoksu 1901 yılında keşfettiği zaman öncelikli olarak küme terimleriyle ifade etmemiştir. Mektubunda bahsettiği üzere, kendini elemanı olarak kabul etmeyen küme kavramından önce "kendine yüklemlenemez" şeklinde yüklem (predicate) sözcüğünü kullanmıştır. Paradokslardan arınmış bir mantığın ve matematiğin temellerini oluşturmak ve var olan paradoksa çözüm aramak için uzun yıllar uğraşmıştır.

---

[49] Gottlob Frege (1902), "Letter to Russell", in Jean Van Heijenoort, *From Frege To Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967, s. 126.

[50] Bertrand Russell, *Batı Felsefesi Tarihi*, çev., Muammer Sencer, Say Yayınları, 7. Basım, İstanbul 2000, s. 41.

Ama Russell Paradoksu'nu bağımsız bir şekilde keşfeden Ernst Zermelo, daha zarif ve doğal bir yaklaşımı bir belit sistemiyle bütünleştirmiştir. Bu yaklaşım daha sonra Abraham Fraenkel tarafından geliştirilmiş ve ona "ZF" adı verilmiştir ve bugün en popüler belitsel küme kuramı biçimidir. [51]

### 1.5.6. Russell Paradoksu İle İlgili Kavramlar

#### 1.5.6.1. Russell Kümesi

Bir küme sınıf, koleksiyon veya nesneler grubu şeklinde tanımlansa da genelde küme kavramı ve özelde de Russell kümesi, kendisini oluşturan elemanlardan daha bağımsız düşünülmelidir. Sonsuz çoklukta eleman içeren bir kümeyi, elemanlarını sayarak nitelemek mantıksal bakımdan imkansız olduğundan, tanımlayıcı koşul ile ele alınmalıdır. Tanımlayıcı koşul, bu küme için uygun olan genel bir ifadedir.

Russell kümesi de, kendisini tanımlayan belirleyici koşul ile düşünülmelidir. Biz "x, M kümesinin bir elemanıdır" ifade formunu "$x \in M$" biçiminde yazıp kısaltırsak bu demektir ki, yeni bir M kümesini yani "$x \in M$" yi , "x; şu ve şu koşullara uygundur" konumundaki bir ifadeyle eşdeğer sayarak elde edebiliriz. Bu yöntemin olağanüstü verimliliği, doğrudan sınırsız kümelerle uğraşmak yerine, sadece artık onların tanımlanmış koşullarıyla işlem yapmak gibi bir olanaktan ötürüdür. [52]

Bu durumda, belirleyici koşul yöntemiyle Russell Kümesi: " $x \in R \backslash$ x: kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerin kümesidir" şeklinde ifade edilebilir.

---

[51] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. b., Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 190.

[52] Wolfgang Stegmüller, "Bilim Kuramı", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, Derleyen: Doğan Özlem, 2. b., İnkılap Yayınları, İstanbul 1997, s. 321.

Russell'ın ortaya koyduğu bu tanımlamayla, R ile ifade edilen küme, elemanlarının bir araya gelmesiyle bir bütünlük oluşturmaz. Frege'nin belirlenmiş koşullarda her kümenin bir bütünlük oluşturması anlamındaki V. Aksiyomu'nun yanlış olduğu sonucuna ulaşan Russell, tanımlanmış bazı koşullar yoluyla, her kümenin bütünlük oluşturamayacağını, böyle bir kümenin oluşturulmasının mümkün olmadığı kanıtıyla ortaya koymuştur.

### 1.5.6.2. Frege'nin V. Aksiyomu

Gotlob Frege, kitapları, fikirleri vb. soyut veya somut nesneleri kendi sınıfına koyup bir sınıfın üyelerinin diğeriyle eşleştirileceğini ve öylece tüm farklı sınıfların ortak bir özellikle gösterilebileceğini düşünmüştür. Bu amaçla, kavramlar arasındaki bağıntıdan nesneler arasındaki bağıntıya geçebilmek için kavramların kaplamı anlayışını kullanmıştır.

Frege, kavramların tamamen kaplamsal olduğunu, örneğin F ve G eğer aynı elemanları içeriyorsa, onların aynı kavram olduğunu düşünmüştür. *Aritmetiğin Temel Yasaları* çalışmasında bu geçişi bir aksiyom olarak tanımlamıştır.

Bu aksiyomda birbiriyle ilintili iki sembolik ifade söz konusudur.

$$1\text{-}\forall x\,(Fx \equiv Gx) \rightarrow \{x: Fx\} = \{x: Gx\},$$ [53]

Birinci durumda F ve G gibi iki kavram eşitse, değer alanları da eşittir.

$$2\text{-}\{x: Fx\} = \{x: Gx\} \rightarrow \forall x\,(Fx \equiv Gx)$$

İkinci durumda, eğer iki sınıfın değer alanları brbirine eşitse, F ve G kavramları birbirine eşittir.

[53] Stewart Shapiro (Ed.), *The Oxford Handbook Of Philosophy Of Mathematics And Logic*, Oxford University Press, New York 2005, s. 131.

Sonuç olarak, iki sınıfın elemanları bire bir eşleniyorsa bu iki sınıf birbirine eşit olmalıdır. Burada ‘‘{x: Fx}’’ ifadesi F kavramının sınıfsal gösterim biçimi, F kavramının değer alanıdır. Böylece V. Aksiyomun biçimsel ifadesi şudur:

$$\{x: Fx\}= \{x: Gx\} \equiv \forall x\ (Fx \equiv Gx),$$

Fregenin V. temel aksiyomunda var olan problem, bu aksiyomun herhangi bir kavramın genelleştirilerek bir küme meydana getirmesine izin vermesi, kavram veya özelliklerin bu kümeye uygulanması sonucunda meydana gelmektedir. [54]

### 1.5.7. Russell Paradoksu Formel Şekli

Russell Paradoksu, formel biçimde ifade edilebilir. Herhangi bir değişken olan x ifadesi; $x \in y$ gösterimi ile sembolize edilen bir y sınıfının üyesi olarak kabul edilsin. Burada 'x' ve 'y' ise değiştirilebilir rastgele seçilmiş kavram isimlerinin değişkenleri olsun. ($\neg$) sembolü olumsuzlama, ($\Leftrightarrow$) sembolü ise mantıksal eşdeğerlik (ancak ve ancak) anlamında kullanılsın. R kümesinin tanımından, x değişkeni için,

$x \in R \Leftrightarrow \neg\ (x \in x)$

x değişkeni yerine R kümesini alırsak;

$R \in R \Leftrightarrow \neg\ (R \in R)$ [55]

Böylece, $R \in R$ ifadesi kendi olumsuzuna eşittir, bu durumda eğer ifade doğruysa hem de yanlıştır ve yanlışsa aynı zamanda doğrudur ve bu paradokstur.

---

[54] Paul Ernest, *The Philosophy Of Mathematics Education*, Routledgefalmer, Published in The Taylor & Francis E-Library, UK 2004, s. 8.

[55] I. Burhan Türkşen, *An Ontological And Epistemological Perspective Of Fuzzy Set Theory*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands 2006, s. 179.

### 1.5.8. Russell Paradoksu Kavramsal Biçim

Russell, Frege'ye yazdığı mektupta paradoksu tanımlarken sınıf kavramından önce yüklem kavramını kullanmıştır:

> "...Diyelim ki w, kendi kendisine yüklemlenemeyecek olan yüklem olsun. Bu durumda w kendisine yüklemlenebilir mi? Verilecek her yanıt karşıtıyla sonuçlanıyor. Bunu kısaca şu şekilde ifade edelim: w, 'kendi kendisine yüklenemeyen kavram' olsun. (bunu, 'kendi kendisinin üyesi olmayan kavram' olarak kümeler kuramı diliyle de ifade edebiliriz): '$x \notin x$'; bu durumda w, kendi kendisine yüklenemeyen tüm kavramları kaplamı olarak altında barındıracaktır; başka bir deyişle x kavramının, w'nun altında yer almasının koşulu '$x \notin x$' olacaktır."

Bu tanımlamanın sonucu olarak $\forall x\ ((x \notin x) \leftrightarrow (x \in w))$ ifadesine ulaşılır.[56]

Bu ifade tüm x'ler için geçerli olduğu için x'in yerine w yerleştirilirse $((w \notin w) \leftrightarrow (w \in w))$ gibi bir çelişkiyle karşılaşılmaktadır.

Russell, kümesini tanımlarken w sembolünü, kendi kendisine yüklemlenemeyecek olan yüklem biçiminde tanımlamıştır. Bir niteliğin bir ismi tanımlaması "göz rengi kahverengidir" şeklinde örneklendirilebilir. Bu gibi nitelik bildiren kavramların kendileri de bu niteliği taşıyıp taşımamasına göre gruplandırılabilir. Bu örnekteki kahverengi niteliğinin kendisinin kahverengi olmadığı açıktır. O yüzden bu tür ifadelere yüklemlenemez denilmektedir.

Genelde kavramlar belirttikleri niteliği taşımazlar ancak, daha az olsa da belirttiği niteliği taşıyan kavramlar vardır. Örneğin; belirgin özelliği belirgindir. Bu tür niteliklere yüklemlenebilir denilmektedir.

Her özellik ya yüklemlenebilir, ya da yüklemlenemez türden olmak zorundadır. O zaman yüklemlenemez niteliğinin sınıflandırılmasını ele alalım.

1. Varsayalım ki, yüklemlenemez niteliği yüklemlenebilir sınıfında olsun. Bu durum, aynı niteliğin kendisinde de olması demektir, yani kendi niteliğini taşıyordur; yani yüklemlenemez özelliği yüklemlenemezdir.

---

[56] Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, çev., H. Bülent Gözkân, YKY, İstanbul 2008, s. 66.

2. Varsayalım ki yüklemlenemez niteliği yüklemlenemez sınıfında olsun. Buna göre, yüklemlenemez adlandırdığı özelliği taşıyordur; kendi niteliğini taşıyanlar yüklemlenebilir olarak tanımlanmıştır. Öyle ise, yüklemlenemez yüklemlenebilir türdendir.

Böylece yüklemlenemez niteliğini, hangi sınıfa dahil etsek açık bir çelişkiye neden olmaktadır.

### 1.5.9. Russell Paradoksu ve Sınıf Çeşitleri

#### 1.5.9.1. Russell Sınıfı Örnekleri

Kesinlikle, dünyadaki tüm sınıfları içeren sınıfın da, yine bir sınıf olduğu düşünülmelidir. Russell'a göre eğer bir sınıfın, kendisinin üyesi olup olmayacağı sorusu ortaya çıkarsa günlük hayattaki, normal sınıfların tümünde, bir sınıf kendisinin bir elemanı olmayacaktır. Bu duruma göre, tüm kendisinin elemanı olmayan sınıflar bütünleştirildiği zaman "bu sınıf kendisinin elemanı mıdır yoksa değil midir diye sorulabilir. [57]

Genelde bir sınıfın, kendisinin üyesi olması beklenmez. Örneğin, dünyadaki tüm insanların sınıfı bir insan değildir. Normalde, nesnelerin tüm sınıfının kendisinin, bu sınıfın elemanı olmasının beklenemeyeceği söylenebilir. Bunun dışında, tanımlanabilir bazı kümeler kendi kendilerini içerirler. Mesela, dünyadaki çay kaşığı olmayan tüm nesneler sınıfı açıktır ki; bir çay kaşığı olmayacaktır ve kendisini içerir. İnsan olmayanların kümesi elemanları olan bir bütünlüktür. Ve kendisi bir insan olmayan olan bu küme, kümenin üyelerinden birisidir.

Russell sınıfına bir örnek olarak; R: "Elemanı olarak mantıkçıları kabul eden bir sınıfı" ele alalım.

---

[57] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*, published in the Taylor & Francis e-Library, Routledge Classics, London&Newyork 2009, s. 100.

Bu sınıf elemanlarından farklıdır ve elemanlarının toplamı olarak bir bütünlük oluşturmaz. Çok sayıda elemanı olan bu küme, insanlar kümesinin bir elemanı değil, alt kümesidir. Bu kümenin her elemanı bir mantıkçıdır. Örneğin Aristoteles bu kümenin bir elemanıdır. Ancak bu kümenin kendisi bir mantıkçı değildir ve bu küme kendi kendisini içermez; o yüzden bu sınıfı Russell sınıfı olarak kabul edebiliriz.

### 1.5.9.2. Russell Paradoksu Sınıfsal Biçim

Bertrand Russell'a göre iki çeşit sınıf vardır: Normal sınıflar ve normal olmayan sınıflar. Normal sınıflar kendi kendilerini içermeyen sınıflardır. Günlük hayatta karşılaştığımız çoğu sınıf normal sınıftır. Mesela kalemlerin sınıfı, bir kalem değildir ve kendisini içermez. Normal olmayan sınıflar da, bu tanımın çelişiği olan; kendi kendilerini içeren sınıflardır.

Bu tanımlamalara göre Russell sınıfını, tüm normal sınıfların sınıfı olarak nitelendirdiğimizde bu sınıf ya normal bir sınıf, ya da normal olmayan bir sınıf olmalıdır.

Buna göre; Russell sınıfı, normal bir sınıf mıdır? Yoksa normal olmayan bir sınıf mıdır?

Russell sınıfını; normal bir sınıf olarak kabul edelim.

1-Russell sınıfı, yani tüm normal sınıfların sınıfı, yapılan tanımlamadan dolayı kendisi de normal bir sınıftır ve kendisini içermek zorundadır.

2-Russell sınıfı, Russell'ın ortaya koyduğu varsayımdan dolayı normal bir sınıftır ve "kendi kendisini içermemesi" tanımlamasından dolayı, kendisini içermemelidir. [58]

---

[58] Jose A. Benardet'e, *Infinity An Essay in Metaphysics*, Oxford University Press, Printed in Great Britain 1964, s. 62.

Russell sınıfını;  normal olmayan bir sınıf olarak kabul edelim.

1-Normal olmayan sınıf tanımına göre, kendisini eleman olarak kabul eden sınıf olarak, Russell sınıfı kendini içermelidir.

2-Russell sınıfı kavramsal tanımından ve sadece normal sınıfları içerdiğinden, kendini eleman olarak kabul edemez, kendini içermemelidir. [59]

"Üçüncünün olmazlığı" (tertium non datur) mantıksal ilkesine göre her bir sınıf ya kendisinin elemanı olmalıdır ya da kendi kendisinin elemanı olmamalıdır. Burada ortaya konulan iki farklı varsayımın sonuçları da paradoksal bir durum ortaya çıkarmaktadır.

Russell kümesinin kendisinin bir üyesi olup olmadığını belirleyen şey, kümenin kendi tanımlayıcı özelliğine sahip olup olmadığıdır ve bu da kendisinin bir üyesi olup olmama meselesidir. Kendisinin elemanı olmayan kümelerin kümesi açık bir paradoksla sonuçlanmıştır.

Bununla beraber, Russsell kümesinin tersi olan, kendisinin elemanı olabilen kümelerin kümesi düşünüldüğünde bu çeşit bir paradoksal durumun ortaya çıkmadığı görülebilmektedir.

Kendi kendisinin üyesi olan kümelerin kümesi aynı şekilde bir çelişki üretmemesine karşın, eşit ölçüde temelsizdir, çünkü kendine ait olup olmaması, birbirine bağıntılıdır. Yapabileceğimiz tek şey, sonsuza kadar tekrar aynı soruyu sormaktır. Küme temelsizdir, çünkü statüsünü belirleyen bağımsız bir faktör yoktur. O halde bu iki tür küme de var olamaz. [60]

---

[59] Benardet'e, *a.e .*, s. 62.
[60] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. Baskı, Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 189.

Russell paradoks ortaya çıkaran bu durumun çözümlenebilmesi için ilk olarak şu yorumu yapmıştır:

> "Bir sınıfın kendisinin elemanı olup olmaması sorusunun saçma olduğunun gözlemlenmesiyle, bu durumdan kurtulabilinir. Yani hiçbir sınıf ne kendisinin elemanıdır, ne de değildir. Ve hatta bunu söylemek bile doğru değildir. Çünkü bu söyleyiş bile anlamsız bir gürültüden ibarettir." [61]

## 1.6. RUSSELL PARADOKSU VERSİYONLARI

### 1.6.1. Grelling–Nelson Paradoksu

1908 yılında, Kurt Grelling ve Leonard Nelson tarafından ortaya konmuş olan Grelling-Nelson Paradoksu hem bir Russell Paradoksu versiyonu, aynı zamanda semantik oto referans örneğidir.

Bu paradoksun konusu heterolojik ve otolojik özelliğe sahip kelimelerin tanımlanmasıyla ilgilidir. Kendi kendini tanımlamayan kelimeler, heterolojik olarak tanımlanmaktadırlar. Literatürdeki çoğu sözcük heterolojik olarak görünmektedir. Mesela, kitap sözcüğünün kendisi bir kitap değildir. Kendi kendini tanımlar nitelikte olan kelimeler ise otolojik olarak tanımlanmaktadırlar. Mesela sözcük kelimesinin kendisi de bir sözcüktür. Bu açıklamalar doğrultusunda otolojik ve heterolojik kavramları, birbirine zıt olduklarına göre, tüm kelimeler ya otolojik kelimeler sınıfına ya da heterolojik kelimeler sınıfına dahil olmak zorundadır.

Bu durumda paradoks oluşturan sorun, heterolojik kelimesinin heterolojik mi yoksa otolojik mi olması gerektiğidir.

---

[61] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*, Taylor&Francis e-Library, Routledge Classics, New York 2009, s. 101.

Birinci durumda, heterolojik kelimesinin, otolojik olduğunu varsayalım. Otolojik kavramı gereği, otolojik kendi kendini tanımlayan kelimeler için kullanıldığından, tanım gereği heterolojik kelimesi heterolojik olmak zorundadır.

İkinci durumda, heterolojik kelimesinin, heterolojik olduğunu varsayalım. Heterolojik kavramı tanım olarak, kendi kendini tanımlamayan kelimeler için kullanıldığından, tanıım gereği heterolojik kelimesi heterolojik olamayacaktır, böylece otolojik olur.

Her iki durumda da ele alınan hipotez çelişkiyle sonuçlanmaktadır. Russell Paradoksu'nun bir versiyonu olan Grelling-Nelson Paradoksu, Yalancı Paradoksu'na da benzerlik göstermektedir.

### 1.6.2. Kitap Kataloğu Paradoksu

Russell Paradoksu versiyonu olan, kitap kataloğu paradoksu şu şekilde açıklanabilir.

Kitapların zamanla çoğalması, kitapları listelemeyi gerektirmiştir. Böylece kitap katalogları da çoğalmıştır. Kataloglar da bir çeşit kitap olduğundan, kataloglar çoğalınca katalogların da katalogları yapılmaya başlanmıştır.

Büyük bir kütüphanede böyle kitap kataloglarını içeren bir oda yer almaktadır. Bu katalogların çoğu diğer kitapların isimlerini içerdikleri gibi kendi isimlerini de referans olarak göstermektedirler. Ancak katalogların bazıları da kendilerini referans olarak göstermemektedirler.

Kütüphaneci yeni bir katalog yapmaya karar verir ve bu katalogu "kendilerini içermeyen tüm katalogları listeleyen en büyük katalog" olarak adlandırır. Çalışmasını tam bitirecekken; "oluşturduğum katalogu kendi sayfaları içinde listelemeli miyim?" diye düşünür.

Eğer kendisini yani büyük katalog adını listeye eklemezse, yeni kataloğun eksik kalacağı düşüncesiyle bu eklemeyi yapmaya karar verir. Fakat bunu yaptığında, bu kataloğun kendilerini referans göstermeyen katalogların isimlerini içermesi gerektiğinden, ortaya bir tutarsızlık çıktığını fark etmiştir. [62]

"Büyük katalog" katalogu; eğer kendi adını içerirse, kataloğun türünden veya tanımından dolayı, adını içermemesi gerekmektedir. "Büyük katalog" katalogu eğer kendi adını içermezse de, kataloğun türünden dolayı, kendi adını içermesi gerekmektedir. Kütüphaneci ikilemde kalır. Eğer tutarlı olmak istiyorsa, yapmak istediği katalog tam olamayacaktır. Eğer büyük kataloğu tamamlarsa da, tutarsızlık söz konusu olacaktır.

Bu paradoksun çözümünde de, Russell sınıfını düşünerek, böyle bir katalog yapılamaz veya böyle bir büyük katalog yoktur, denilebilir.

### 1.6.3. Kasabanın Berberi Paradoksu

Berber paradoksunda karşılaştığımız durum paradoksun bir kanıta dönüşmesidir. Matematikte, paradoks olarak ele alınan bazen bir kanıt haline dönüşebilmekte veya bir kanıt olarak görünen bir paradoksa neden olabilmektedir. Bazen paradoks mu yoksa kanıtla mı uğraşıldığını anlamak kolay değildir. [63]

Berber paradoksunda Russell "herhangi bir şehirde bir berberin var olduğunu kabul edelim. Ve bu berber; ancak ve ancak kendilerini tıraş etmeyen tüm herkesi tıraş eden kişi olarak tanımlansın" demiştir.[64]

Bu tanımlama ilk bakışta mantığa uygun görünse de böyle bir berberin kendisini tıraş edip etmeyeceği meselesi çelişkiye neden olmaktadır.

---

[62] F. David Peat, *From Certainty To Uncertainty*, Joseph Henry Press, Washington 2002, s. 34.
[63] Bryan Bunch, *Mathematical Fallacies and Paradoxes*, Dover Publications Inc., New York 1997, s. 86.
[64] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*, Taylor&Francis e-Library, Routledge Classics, New York 2009, s. 101.

Birinci durumda eğer bu berber kendini tıraş ederse, berber (kendisi) tarafından tıraş edilmemelidir.

İkinci durumda eğer bu berber kendini tıraş etmezse, berber (kendisi) tarafından tıraş edilmelidir.

Bu şekildeki iki varsayım da, saçma ve mantıksız bir sonuca ulaşmaktadır. Bu kabul edilemez sonucu kanıtlamak için ortaya konacak argüman veya uygun bir sonuç böyle bir berberin var olmamasıdır. Bu noktada mantıkta kullanılan "olmayana ergi yöntemi" (reductio ad absurdum) kullanılmalıdır. Yani böyle bir berberin var olduğunu öne sürüp, 'ancak ve ancak berber kendisini tıraş etmezse, kendisini tıraş edecektir' gibi saçma bir çıkarıma ulaştığımızda, böyle bir berberin varlığı fikri çürütülmüş ve onun aslında var olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu şekilde Berber paradoksu basitçe, 'kendilerini tıraş edemeyenleri tıraş eden' bir berberi içeren bir kasabanın var olmadığının kanıtıdır.[65]

### 1.6.4. Belediye Başkanı Paradoksu

Russell Paradoksu'nun biraz daha basitleştirilmişi olan bu paradoks, küme paradoksuna benzer şekilde türetilmiştir. Russell Paradoksu'nun küme biçiminde 'kendi kendinin elemanı olmayan kümeler' tanımının yerine, 'kendi kendinin yönettiği şehirde oturmayan belediye başkanları' tanımlaması getirilmiştir. Bu paradoks şu şekildedir.

Kanunları, yerlisi olmayanların kentin belediye başkanı olabilmelerine olanak sağlayan bir ülke düşünelim. Yani bazı belediye başkanları başkanı oldukları kentte yaşarken, diğer başkanlar yönettikleri kentlerde yaşamıyorlardır.

[65] W. V. Quine, *The Ways Of Paradox*, Harvard University Press, London 1976, s. 2.

Reform yanlısı bir diktatör iktidara gelir ve yönettikleri kentte oturmayan -ama sadece kentlerinde oturmayan- bütün belediye başkanlarının, tek bir yerde yaşamalarını emreder. Bu kente C kenti diyelim. Bu verilenlere göre böyle bir durumda C kentine de bir başkan gerekli olacaktır. Paradoksal olan durum, C kentinin belediye başkanının nerede oturacağı sorusuyla ortaya çıkmaktadır.[66]

Russell Paradoksu'nda kümenin elemanını içermesi veya içermemesi durumuyla ortaya çıkan paradoksal sonuç burada da görülmektedir. Eğer C şehri bu başkanı içerirse, C kentinin tanımlanmasından dolayı, başkanı içermemesi gerekecektir; içermezse de içermesi gerekecektir. Yani belediye başkanı bulunduğu C şehrinde yaşıyorsa yaşamamak zorunda olacağı, yaşamıyorsa da yaşamak zorunda olacağı bir durum ortaya çıkmaktadır. Bu da bir paradokstur.

## 1.7. RUSSELL PARADOKSU ÇÖZÜMÜNDE TİPLER TEORİSİ

### 1.7.1. Tipler Teorisi

Tipler teorisi, sınıfları hiyerarşik biçimde sıralandırır ve sonsuz bir düzen sağlamaktadır. Birbirini takip eden bu ardışık düzen, üst ve alt tipler kavramlarıyla aynı zamanda alt basamak ve üst basamak kavramlarını içeren, Alfred Tarski'nin üst dil kuramıyla da benzerlik göstermektedir.

Bertrand Russell tipler kuramını şöyle tanımlamıştır:

> "Tipler kuramı, gerçekte nesneler değil, semboller kuramıdır. Düzgün bir mantıksal dilde bu oldukça açık olabilirdi. Burada sorun, adlandıramadığımıza isim vermek için uğraşma alışkanlığımızdan kaynaklanmaktadır." [67]

---

[66] John Allen Paulos, *I Think Therefore I Laugh*, Columbia University Press, New York 2000, s. 35.

[67] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*, Taylor&Francis e-Library, Routledge Classics, London 2009, s. 108.

Bertrand Russell, Tipler Teorisi için ,"böyle tiplerde aşama, devam, süreklilik olduğu için genel bir kavram olarak düzey (range) kelimesini kullanabilirim. Sonuç olarak bir düzey (a range) elemanlarından daha yüksek bir tiptedir" demiştir. [68]

1.Tip (0) :

Bir tekil, bir küme olmayan herhangi bir şeydir, tek tek nesneler, bir birey, hayvan veya eşya vb. sonsuz olan bütün tekillerin topluluğu, tipler hiyerarşisinin en alt basamağıdır. Russell'a göre tekiller, bir tip oluşturmazlar, böylece yanlış ve doğru kavramlarıyla değerlendirilemezler. Russell bu tipi şöyle açıklamıştır:

> "Bir terim veya birey (tekil) herhangi bir seviyede olmayan bir nesnedir. Bu, nesnenin en düşük tipidir. Eğer böyle bir nesne bir önermede ortaya çıkarsa herhangi başka tekil, önemini kaybetmeden onun yerini alabilir. Bu ilk sınıf, tekildir ve üyeleri tekillerdir. Günlük hayattaki nesneler, kişiler, masalar, sandalyeler, elmalar vb. ilk tipte sınıflardır. (Bir kişi, fiziksel varlıkların bir sınıfıdır, diğerleri maddeler sınıflarıdır) Tekil sözcüklerle tasarlanmış tüm nesneler, nesne veya kavram olsun olmasın, bu tipte olduğu görülebilir." [69]

2.TİP (1):

2. tip tekiller sınıfını veya düzeyini içermektedir. Genel olarak bir tip, kendinden önceki tipin bütün sınıflarını kapsamaktadır.

Tipleri ardışık bir sıralama ile gösterelim.

1. Tip (0)... tekiller topluluğudur.
2. Tip (1)... tip 0 sınıfları kullanılarak tanımlanabilen tekil sınıflarının topluluğudur.
3. Tip (2)... tip 0 sınıfları, tip 1 sınıfları kullanılarak tanımlanabilen tekil sınıflarının sınıfları topluluğudur.

Bu şekilde devam ederek, indüksiyon metodu kullanılarak bu sıralama genelleştirilirse; 'tip n' yani n.dereceden bir tip, tip 0 sınıfları, tip 1 sınıfları,………tip n-1 sınıfları kullanılarak tanımlanabilir.

---

[68] Bertrand Russell, *The Princıples Of Mathematics*, W. W Norton&Company Inc., New York 1938, s. 524.

[69] Russell, *a.e.*, s. 523.

Bu teoriye göre, iki veya daha fazla tipin toplamı da bir tiptir; ancak en düşük tip, bu toplam olamaz. Bu sıralamaya göre tipler, kendi kendilerini içermezler. Her bir üst tipi ise hiyerarşideki alt tipler tanımlayabilir. Böylece hiçbir düzey kendisini tanımlayamaz. Her ne kadar üst dereceye çıkıldığında tiplerin kapsamı artıyor olsa da, hiçbir küme kendi kendisinin elemanı olmadığından, tüm kümelerin kümesine asla ulaşılamaz. Bu çıkarımın sonucunda paradoksal Russell kümesi olan kendi kendisinin elemanı olmayan tüm kümelerin kümesine de ulaşılamaz.

Bertrand Russell, küme paradoksunu tipler teorisiyle çözebileceğini ortaya koysa da, bu teorinin tüm paradoksların genel bir çözümü olmadığını düşünmüştür:

> "Bu paradoksa oldukça benzeyen ve bu prensiple çözülemeyen en az bir paradoks vardır. Tüm mantıksal nesnelerin veya tüm önermelerin toplamı söz konusu olduğunda, temel bir mantıksal sorun görülebilir. Sorunun tam bir çözümünün ne olabileceğini keşfetmede başarı sağlayamadım. Fakat mantığın temellerini etkilediğinden dolayı, bu konuda tüm mantık öğrenenlerin çalışması gerektiği yorumunu yapabilirim." [70]

### 1.7.2. Tipler Teorisi'nde Sayı Kuramı

Doğal sayıları farklı bir yöntemle tanımlayan ilk önce, Alman mantıkçı Gottlob Frege daha sonra da Bertrand Russell olmuştur.

Doğal sayıların tanımlanmasındaki ilk basamak boş küme kavramından başlanılarak oluşturulmuştur. Sayıları yapılandırırken boş küme kavramı, sıfır sayısıyla ilişkilendirilmiştir. Sonra da sırasıyla diğer sayılar, süreklilik tanımına uygun olarak birbirini takip etmiştir. Böylece 0, 1, 2, 3…….sayıları hiyerarşik olarak oluşturulmuştur.

[70] Bertrand Russell, *The Principles Of Mathematics*, W- W Norton&Company Inc., New York 1938, s. 528.

0, kardinal sayısı boş kümenin elemanlarına denk olan tüm kümelerin eleman sayısı olarak tanımlanmıştır.

0 sayısını oluşturduktan sonra 1; sadece 0 elemanına sahip kümeye denk olan tüm kümelerin eleman sayısı olarak tanımlanmıştır.

2 sayısı; 0 ve 1 sayılarını içeren kümeye denk olan kümelerin eleman sayısıdır.

3 sayısı; 0, 1, 2 sayılarını içeren kümeye eşit tüm kümelerin eleman sayısı olmuştur.

Genel olarak bir sayı, tüm önceki sayıları içeren kümeye eşit tüm kümelerin eleman sayısı olarak yapılandırılarak bu kural bu şekilde devam etmiştir. [71]

Bu şekildeki bir süreklilik, en büyük sayıya, tüm kümeler kümesinin sayısına ulaşılmasını imkansız kılmaktadır. Frege tarafından ortaya konan bu sayı teorisi Russell'ın Tipler Teorisi'nin ilk adımı olarak görülebilir.

### 1.7.3. Tipler Teorisi'nde Tip Kavramı

Sınıf kavramıyla ilişkili paradoksları çözmek daha sağlam mantık temelleri oluşturmak için kaçınılmaz olduğundan, Bertrand Russell çözüm yolu için, düzeyler veya tipler hiyerarşisi olarak adlandırdığı bir teori geliştirmiştir.

Bu teoriyi sadece kendi keşfettiği çelişkiye değil, Antik Çağlardan günümüze gelen, Yalancı Paradoksu gibi paradokslara da uygulamıştır.

Tipler Teorisi, ait olma ve içerilme arasında Peano'nun yaptığı ve bir kümenin kendi kendine ait olmasını engelleyen ayırıma yaslanan bir çözümdür. Tıpkı ölümlülüğün kendisinin ölümlü olmaması gibi bir yüklemin kendi kendisinin yüklemi olması gerekmez. Sadece daha alt bir mantıksal tipin kavramı olan bireyi yüklemlemesi yeterlidir.

---

[71] Martin Gardner, *The Colossal Book Of Mathematics Classic Puzzles Paradoxes and Problems,* W. Norton&Company, New York 2001, s. 593.

Gerçekten de bütün çelişkilerin ortak kaynağı, örneğin “kendi kendisinin üyesi” bir kümeden bahsedildiğinde olduğu gibi, bu mantıksal hiyerarşiyi ihlal eden yüklemsel ifadelerde bulunuyor gibidir.[72]

Bertrand Russell, *Tipler Teorisine Dayalı Matematiksel Mantık* isimli makalesinde bir tipi, önerme fonksiyonunun anlamlılık düzeyi (a range) olarak tanımlamıştır ve bu tanımlamaya şu şekilde açıklık getirmiştir:

> “Bir önermede ne zaman belirgin bir değişken olursa, belirli değişkenin değerler aralığı bir tiptir. Nesnelerin tiplere ayrılması, refleksif (yansıyan) safsataların ortaya çıkmaması açısından gereklidir. Bu safsatalardan, kısır döngü prensibi adını verdiğimiz kuralla kaçınılabilinir, yani ‘hiçbir bütünlük kendi terimleriyle tanımlanmış üyeler içeremez’.
>
> Bu prensip, teknik dilde şöyledir: Belirgin değişken, ne içerirse içersin o değişkenin mümkün değerini içermemelidir. Böylece, belirli değişken, değişkenin alacağı mümkün değerler dışında farklı bir tipten olmak zorundadır. Onu da daha yüksek bir tip olarak söyleyebiliriz.” [73]

## 1.8. TİPLER TEORİSİ VE YALANCI PARADOKSU

Yalancı Paradoksu doğruluk teorilerinde çok önemli bir yer edinmiştir. Russell sınıf paradoksuyla Yalancı Paradoksu’nun aynı sorundan kaynaklandığını düşündüğünde yalancı için de tipler teorisini uygulamıştır.

Russell, Yalancı Paradoksu’nun ifadesini, “iddia ettiğim (onayladığım) ve yanlış olan bir önerme vardır” şeklinde tanımlamıştır. Bu “yalan söylüyorum” ifadesi de böylece şu biçime ulaşır: tüm p önermeleri için, eğer p yi; “p doğrudur” şeklinde iddia edilirse, tüm p önermeleri doğru değildir. [74]

---

[72] Christian Delacampagne, *20. Yüzyıl Felsefe Tarihi*, Ed., Ali Berktay, çev., Devrim Çetinkasap, TİB Kültür Yayınları, 11. b., İstanbul 2010, s. 39.
[73] Bertrand Russell, “Mathematical Logic As Based On The Theory Of Types” (1908) , *Logic and Knowledge* içinde, Ed., Robert Charles Marsh, Capricorn Boks, New York 1971, s. 75.
[74] Bertrand Russell, “Mathematical Logic As Based On The Theory Of Types” (1908) , *Logic and Knowledge* içinde, Ed., Robert Charles Marsh, Capricorn Books, New York 1971, s. 61.

Paradoks, bu cümleyi bir önerme olarak kabul etmekle ortaya çıkmaktadır. Russell’a göre bu durum, “tüm önermeler” kavramının meşru olmadığının bir kanıtıdır. Tüm önermeler, tüm fonksiyonlar kavramlarını içeren ifadeler anlamsızlaşır, çelişkiler bu çeşit ifadelerin kullanılmasından doğmaktadır.

Russell’a göre tüm önermeler ile ilgili herhangi şey söylenecekse; öncelikle önermeler tanımlanmalıdır. Önerme kelimesi, bizim genelde kullanmaya alışkın olduğumuz anlamda anlamsızdır ve biz önermeleri kümelere ayırmalıyız ve verilen kümedeki tüm önermelerle ifadeler oluşturabiliriz. Fakat bu önermelerin kendileri bu kümenin elemanları olmayacaktır. Mesela “tüm atomik önermeler ya doğrudur ya da yanlıştır” denilebilir; fakat bu önermenin kendisi atomik bir önerme olmayacaktır. Eğer “tüm önermeler ya doğrudur ya yanlıştır” sınırlanmadan söylenmeye çalışılırsa saçma olacaktır, eğer saçma olmazsa kendisi de bir önerme olması gerektiğinden ve kendi kapsamına girdiğinden, üçüncünün olmazlığı ilkesi anlamsız olacaktır. [75]

Russell, Yalancı Paradoksu’nu bu teoriye göre tanımlamıştır:

> “Nerede ‘tüm önermeler’den bahsedilirse, onun yerine biz ‘n. dereceden tüm önermeler’ ifadesini koymalıyız. n’ye verilen değer ne olursa olsun, bir değer alması önemlidir. Böylece bir adam ‘ben yalan söylüyorum’ dediğinde şöyle çevirmeliyiz: ‘onayladığım ve yanlış olan n. deredecen bir önerme var’ ancak bu (n+1).dereceden bir önermedir. Böylece adam n. dereceden bir önermeyi onaylamıyordur ve ifadesi yanlış olur. Onun yanlışlığı ‘yalan söylüyorum’ da görünen şekli ima etmez, doğru bir ifadeye sahiptir. Bu yalancıyı çözer.” [76]

Buna göre önermeler farklı tiplere bölünmelidir. Atomik önermelerle veya önerme kümelerine işaret etmeyen önermelerle başlanmalıdır. Sonra sırayla 1. türdeki önerme kümelerine işaret edenler ele alınmalıdır. İlk tipteki önerme kümelerine işaret edenler, ikinci tip olarak adlandırılabilir ve böylece devam eder. [77]

---

[75] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*, Taylor&Francis e-Library, Routledge Classics, London 2009, s. 103.
[76] Bertrand Russell, “Mathematical Logic As Based On The Theory Of Types” (1908), *Logic and Knowledge*, Ed., By Robert, Charles Marsh, Capricorn Books, New York 1971, s. 79.
[77] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*, This edition published in the Taylor &Francis e-Library, Routledge Classics, London 2009, s. 103.

Böylece "yalan söylüyorum" önermesini ifade eden kişi hangi tipte yalancı olduğunu söylemek zorundadır. Eğer "1. tipte yanlış bir önerme ortaya koyuyorum" derse aslında bu ifade 1. tipteki önermelerin toplamına işaret ettiğinden, bu ifade 2. tipten olur. Böylece 1. tip yanlış bir önerme ortaya koyduğu doğru değildir. Ve bir yalancı olarak kalır. Benzer şekilde eğer 30.000. tipte yanlış bir önerme ortaya koyuyorum dediğinde de, bu 30.001. tiptedir ve o hala bir yalancıdır. [78]

Sonuç olarak, birinci tipten bir yalancı, "ben birinci tipten yalancıyım" dediği zaman dışında sürekli yalan söyleyen birisi olacaktır; ikinci tipten bir yalancı "ben birinci tipten yalancıyım" dediği zaman bile yalan söyleyen, fakat "ben ikinci tipten bir yalancıyım" dediği zaman artık doğru söyleyen birisi olacaktır. Örnek olarak;

"2. tip yalancıyım" doğrudur.

1.tipte her söylediği yalandır.

"3.tip yalancıyım" doğrudur.

2.tipte her söylediği yalandır.

Bu amaçla geliştirilen tek metot olmasa da tiplerin açık ve formel kullanımı temelde mantık ve matematikte meydana gelen paradoksları önlemek amacıyla, 19. yy. sonu ve 20. yy. başlangıcında ortaya konmuştur. Günümüzde Tip Teorisi birçok farklı disiplin tarafından kullanılmaktadır ve birçok uygulamaya sahiptir. Matematik ve mantık içinde birçok farklı tip sistemi vardır. Fakat 1903'ten önce Russell Tipler Teorisi'ni ortaya koyduğunda, farklı formülasyon ve farklı bir tip teorisi olmasa da 20. yy'ın ikinci yarısından beri tip teorilerinde bir artış görülmektedir. [79]

Russell'ın paradoksu küme teorisindeki temel tutarsızlığa ışık tuttuğundan büyük öneme sahiptir. Bununla beraber Bertrand Russell, paradoksların temelde aynı problemden kaynaklandığını ve hepsinin kökünün ortak olduğunu düşünmüş; bunun kısır döngü prensibi olarak adlandırdığı kesinlikle doğru bir kuralı ihlal etmeleri sebebiyle olduğuna inanmıştır.

---

[78] Russell, *a.e.,* s. 104.

[79] Fairouz Kamareddine, Twan Laan, Rob Nederpelt, *A Modern Perspective On Type Theory*, Volume 29, Kluwer Academic Publishers, New York 2004, s. 1.

Epimenides Paradoksu; bu kuralı ihlal ediyor, Epimenides'in sözü bütüne atıfta bulunuyordur; bu bütünlük bir küme olarak tanımlandığında; "Giritliler tarafından yapılan tüm önermelerin" kümesidir.

Cantor Paradoksu'nun, aynı şekilde bu prensibi ihlal etmesinin sebebi ise kardinal sayıların sayısını tanımlamanın, bütüne işaret etmesindendir.

Russell Paradoksu ise kendilerinin elemanı olmayan tüm kümelerin kümesini tanımladığı ve böylece tüm böyle kümelerin toplamına atıfta bulunduğu için kuralı bozmaktadır. [80]

## 1.9. GÖDEL TEOREMİ VE ÇELİŞKİSİZLİK

Russell Paradoksu ve benzeri küme paradoksları küme kavramının ve onun sezgisel formunun çelişkili olabileceğini göstermektedir.

Russell, bu tür paradokslardan kaçınmak için çok çeşitli yöntemler denemiştir. Bunlardan ilki; böyle antinomileri formüle etmenin bile imkansız olduğu basit mantıksal sistemleri sınırlamaktır. İkincisi aksiyomlarının tehlikeli kümeleri dışlaması ile kurulan aksiyomatik küme teorisidir. Ancak, şimdiye kadar böyle uygulamalar bile geçici olmuştur ve aksiyomatik küme teorisinin tutarlılığı kanıtlanamamıştır. [81]

Mantıkta ve matematikte çelişkisiz bir sistem oluşturmak için çabalayan David Hilbert kendi sözcükleriyle bu zorunluluğu şu şekilde belirtmiştir: "her belirli matematiksel problem zorunlu olarak, ya sorulan soruya fiili bir yanıt biçiminde ya da çözümünün olanaksızlığının bir ispatı aracılığıyla kesin bir çözüme kavuşturulabilir olmalıdır." [82]

---

[80] Stephen F. Barker, Philosophy Of Mathematics, Ed., Elizabeth and Monroe Beardsley, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, USA 1964, s. 85.

[81] Helmut Moritz, *Science Mind and The Universe*, Wichmann, Heidelberg 1995, s. 34.

[82] John L. Casti, Werner Depauli, *Gödel*, çev., Ergün Akça, Kabalcı Yayınevi, 1. b., İstanbul 2004, s. 32.

Bu yüzden Hilbert, Russell'ın gösterdiği paradoksal önermelerin veya daha farklı çelişkilerin matematikte görünme imkanını ortadan kaldıracak şekilde, biçimsel bir kanıt bulmak için çalışmıştır. Ancak bir süre sonra, Avusturyalı mantıkçı Kurt Gödel, 1931 yılında ünlü Eksiklik Teoremi'ni ve böylece Hilbert'in tutarlılığın ispatlanabilmesi düşüncesinin, mümkün olmadığını ortaya koymuştur.

Hilbert'in çözümlemek istediği mantıksal paradoksların hepsi oto referans kavramına dayanmaktadır. Gödel'in Eksiklik Teoremi'yle yapmak istediği şey, paradoksal "bu tümce yanlıştır" gibi kendini referans gösteren önermeleri aritmetiğin çerçevesi içinde ifade etmenin bir yolunu bulmak olmuştur.

Gödel, sürekli olarak güvenilmez bir kavram görüntüsü çizen doğrulukla uğraşmak yerine, büyük bir iç görüyle doğruluğu biçimselleştirilebilir bir şeyle ispatlanabilirlik kavramıyla değiştirmeyi düşünmüştür. Böylece Epimenides Paradoksu'nu Gödel Tümcesi'ne çevirmiştir: Bu önerme ispatlanabilir değildir.[83]

Eğer önerme ispatlanabilir ise, o zaman doğrudur; demek ki, söylediği doğru olmalıdır ve bu ispatlanabilir değildir. O halde önerme ve değilleme önermesinin ikisi de ispatlanabilir, bu da tutarsızlığa yol açmaktadır. Öte yandan, eğer bildirim ispatlanabilir değilse, o zaman öne sürdüğü şey doğrudur. Bu durumda bildirim doğrudur ama ispatlanamazdır. Bu da biçimsel dizgenin eksik olduğunu gösterir.[84]

Gödel bir yandan da, metamatematiksel "aritmetik tutarlıdır" şeklinde çevrilebilecek bir A aritmetiksel önermesinin de nasıl kurulabileceğini göstermiştir. Böylece A önermesinin ispatlanabilir olmadığını ispatlamıştır; bu da aritmetiğin tutarlılığının, aritmetiği temsil eden herhangi bir biçimsel dizge kullanılarak tesis edilemeyeceği göstermektedir. Bütün bunları bir araya getirdiğimizde ortaya çıkan şudur: Gödel'in teoreminin, biçimsel mantık versiyonu ifadesi şöyledir "aritmetiğin her tutarlı biçimselleştirilmesi için öyle aritmetik doğrular vardır ki, bunlar bu biçimsel dizge içinde ispatlanabilir değillerdir." [85]

---

[83] John L. Casti, Werner Depauli, *Gödel*, çev., Ergün Akça, Kabalcı Yayınevi, Birinci Basım, İstanbul 2004, s. 56.
[84] Casti, Depauli, *a.e.*, s. 57.
[85] Casti, Depauli, *a.e.*, s. 58.

## 1.10. MANTIKSAL KANITLAMADA ÇELİŞKİLERİN ÖNEMİ

Çelişkiyi kullanarak gerçekleştirilen kanıtlama metodu, her çeşit önermenin kanıtlanmasında kullanılabilmektedir. Bilimsel araştırma sürecinde elde edilen verilerin doğruluk ve yanlışlığının, ele alınan hipotezlerin değerlendirilmesiyle ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

Buradaki temel düşünce, kanıtlanmak istenilen hipotezin veya önermenin başlangıçta yanlış olduğunu varsaymak ve daha sonra bu varsayımın absürt ve kabul edilemeyecek bir sonuca ulaştığını göstermektir. O zaman önermenin yanlış olduğu varsayımında yanılmış olduğumuz sonucuna ulaşırız ki böylece bu önerme doğru olmak zorundadır. Çelişkilerin varlığı ise zorunlu olarak bu kanıtlama yönteminde önemli bir konumdadır.

Sembolik olarak bu ifadeyi gösterirsek;

Kanıtın ilk adımında $\neg$ p ifadesinin doğru olduğunu varsayarız. Bu p önermesinin yanlış olduğunu varsaymaktır. Fakat eğer p gerçekten doğruysa, bu p önermesinin yanlış olduğu varsayımımızla çelişir.[86]

Mantıkta çelişkilerin önemli yeri olduğunu düşünen Alfred North Whitehead bunu şu şekilde dile getirmiştir:

> "Formel mantıkta, bir çelişki yenilgi sinyalidir, fakat hakiki bilginin evriminde gelişiminde; zafere doğru giden süreçte ilk adıma işaret eder. Düşünce çeşitliliğinin son derece hoş görülmesi için en önemli nedendir." [87]

---

[86] Richard Hammack, *Book Of Proof*, Edition 2, Virginia Commonwealth University, Creative Commons Attribution, USA 2013, s. 110.
[87] Alfred North Whitehead, *Science and The Modern World*, A Pelican Mentor Book, The New American Library, New York 1948, s. 186.

Ayrıca Karl Popper paradoksların dil bilimindeki yerini belirtmek için şu sözleri söylemiştir:

> " 'Dil bilim analizi' olarak adlandırılan kavramın, felsefede doğru bir yöntem olduğu inancının birkaç tarihi nedeni vardır. Bu nedenlerden biri, çözümleri için; anlamlı (iyi biçimlenmiş) ve anlamsız dilsel ifadeler arasındaki ünlü ayırımın yanında, dil bilimsel analiz yöntemine ihtiyaç duyan, Yalancı Paradoksu veya Russell Paradoksu gibi mantıksal paradokslardır."[88]

Günümüzde alternatif mantık fikri oldukça bilinmektedir. İki değerli, basit veya klasik mantık yanında dialetik mantık ( dialetheic logic ) olarak adlandırılan aynı anda hem doğru hem de yanlış olabilecek ifadeleri içinde barındıran mantık biçimleri bulunmaktadır.

Buna ek olarak üç değerli, çok değerli, süper değerli, bulanık ve anti realistlerin doğru olarak kabul ettiği sezgisel mantık kavramları vardır. [89]

Bu mantık biçimlerinin amacı, bir kavramı, klasik kavramlardan ayırıp somutlaştırmak, bazı durumlarda ise doğruluk kavramını bir sorun olmaktan çıkarmaktır. Klasik doğruluk kavramı buna izin vermese de dialetik mantık, semantik paradoksların mantıklı hale gelebilmesi için bazı önermelerin hem doğru hem de yanlış olmasına izin vermektedir.

Doğruluk değer boşluklarına izin veren bu şekildeki çok değerli mantık, genellikle normalde söylenilenlerin çoğunun belirsiz olması ve muğlak önermelerin 'doğru/yanlış' ikilemi içine uymaması düşüncesi tarafından motive edilmektedir. [90]

---

[88] Karl Popper, *The Logic of Scientific Discovery*, Taylor&Francis e-Library, London and New York 2005, s. xx.
[89] David Bostock, *Empiricism In The Phılosophy of Mathematics*, ed., Andrew D. Irvine, UK 2009, s. 219.
[90] Bostock, *a.e.*, s. 219.

# 2. BÖLÜM

# PARADOKS ÇEŞİTLERİ VE SEMANTİK PARADOKSLAR

## 2.1. PARADOKS KAVRAMI

### 2.1.1. Paradoks  Kelimesinin Tanımı ve Kökeni

Felsefi ve mantıksal araştırmaların önemli parçası olan, birbirinden farklı ve çok sayıda paradoks örneği mevcuttur. Bu örneklerde kullanılan paradoks kelimesinin de farklı tanımları vardır. Çatışkı, çelişki, antinomi, aporia, çıkmazlık, argüman, çıkarım, problem, karşıtlık, tutarsızlık gibi kelimeler de ufak tefek farklılıklarına rağmen paradoks kelimesiyle eş anlamlı sözcüklerdir.

İngilizce'de yazılışı "paradox", Grekçe "paradoxon", Latince "paradoxum" olan sözcüğün kökeni, Antik Çağ Yunanlılara dayanmaktadır. "Paradoxon", paradoks (karşıt düşünce) içeren iddia anlamındadır. Yunanca "para" yan(ında), boyunca, üzerinden, dışa karşı gibi anlamlara sahipken, "doksa" düşünce anlamındadır. Bu iki sözcüğün birleşimi olan "paradoxon" kelimesi, "insolubilia" ve "aporia" ile de karşılanmıştır. "Görünüşte apsürt olan, yine de sağlam görünen önerme; kendi içinde çelişik; mantıklı ve mümkün olan yerleşmiş fikir ve kavramlarla çatışan; geçerli görüş ve beklentiye aykırı ifade ya da doktrin" şeklinde genel bir tanımı yapılabilen paradoks kelimesi özellikle Zeno'nun aporialarıyla (çıkmazlık), Epimenides'in kendi içinde çelişkili meşhur cümlesi ve Russell kümesi ile örneklendirilmiştir. [91]

[91] H. W. Fowler, F. G. Fowler, *The Concise Oxford Dictionary Of Current English*, 7. bs., Oxford At The Clarendon Press, London 1919, s. 59.

Bu Yunanca kökenli sözcük, daha sonra batı dillerinde yer almıştır. Kökende sözcük; kabul görmüş bir düşünceyle çelişen karşıt bir ifade anlamında kullanılırken günümüzde bu anlamdan daha farklı tanımlamalar kullanılmaktadır.

Osmanlıca'da paradoks veya çelişki kavramının karşılığı olarak tenâkuz kelimesi yer almaktadır. Tenâkuz kelimesi çelişme, insanın bir sözü ötekini çürütmesi, bir sözü ötekine uymaması, karşıtlık, zıddiyet şeklinde açıklanmıştır. [92] Bu tanımlamayla birlikte İbn-i Sina çelişki kavramını, "iki önermenin, zatı gereği belirli veya belirsiz olarak, biri doğru iken diğeri yanlış olacak tarzda olumluluk ve olumsuzluk yönünden birbirinden farklı olmasıdır" biçiminde açıklamıştır.[93]

Paradoks kelimesinin İngilizce karşılığının, 1616'da en eski kayıtlı kullanımında şu tanım yer almaktadır: "Paradoks, sanki birisinin dünyanın kendi ekseni etrafında dönüp, güneşin hareketsiz durmakta olduğunu iddia etmesi gibi, izin verilmiş yaygın düşünceye karşı olarak sürdürülmüş bir fikirdir." Bu tanımlamayla zamanındaki tüm çelişkili görünümüne rağmen, Kopernik'in ileri sürdüğü argüman kanıtlanıp bir gerçek olarak kabul edildiği için, Kopernikçi Paradoks artık bir paradoks olmaktan çıkmıştır. [94]

Çoğu felsefeci ve bilim adamı argümanların paradoksta önemli rol aldığını düşünmektedir. Öyle ki L. Mackie bunu "paradoks argüman bütünüdür" şeklinde ifade eder. Bazı düşünürler paradoks kelimesini "tek olarak mantıklı fakat birlikte tutarsız önermeler" olarak tanımlar. Nicholas Rescher'e göre felsefi durumlar, paradoksun farklı çözüm şekilleri olarak sınıflandırılabilir. Gareth Matthews ise paradoksu "gerçek kavramıyla çelişen ifade olarak" tanımlayarak "sadece ve sadece özgür olmadıklarını bilenler özgürdürler" Stoacı felsefi görüşünü örnek verir. [95]

Matematikçi ve mantıkçı Bertrand Russell, 1908'de paradoksların bir bütünün kendi kendisinin üyesi olarak kabul edilmesiyle ortaya çıkan bir kısır döngüden kaynaklandığını keşfetmiştir.

---

[92] Ferit Devellioğlu, *Osmanlıca – Türkçe Ansiklopedik Lûgat,* 16. Baskı, Aydın Kitabevi Yayınları, Ankara 1999, s. 1076.

[93] İbn-i Sina, *İşaretler ve Tembihler*, çev., Ali Durusoy, Muhittin Macit, Ekrem Demirli, Litera Yayıncılık, İstanbul, 2005, s. 40

[94] Roy Sorensen, *A Brief History Of The Paradox*, Oxford University Press Inc., New York 2003, s. 224.

[95] Sorensen, *a.e.,* s. 6.

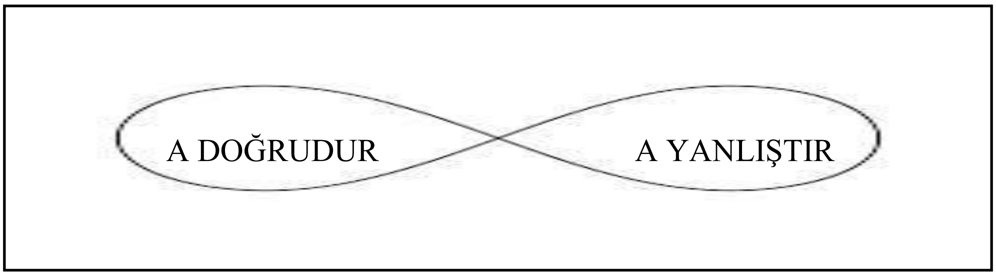
Bertrand Russell'ın bu düşüncesine göre paradokslar kısır döngülerdir. Russell, bu tanımlamayı şu şekilde açıklamıştır:

> "Kaçınılması gereken paradokslar incelendiğinde görünür ki, hepsi belirli türdeki kısır döngüden meydana gelir. Söz konusu kısır döngüler, bütünlüğün o bütünün terimleriyle tanımlanabilir üyeler olması varsayımından kaynaklanır." [96]

Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: Eternal Golden Braid* isimli ödüllü kitabında paradoks kavramını tanımlamış ve bu kavramı "garip döngüler" (strange loops) olarak isimlendirmiştir. Bu paradoksal döngü kavramının sadece mantıkta değil, müzisyenlerin notalarında ve müzik sistemlerinde de ortaya çıkabileceğini belirtmiştir.

Hofstadter, garip döngüler kavramına ilk örnek olarak Bach'ın müzik sistemini vermiştir. Tüm zamanların en entelektüel ve canlı çizimlerini meydana getiren, 1902-1972 yıllarında yaşamış olan M. C. Escher'in çalışmalarında garip döngü kavramının en güzel ve güçlü görsel gerçekliğinin var olduğunu söylemiştir.[97]

Hofstadter'ın sonsuz döngü kavramına bir örnek olarak A: "Bu önerme yanlıştır" önermesini ele alalım.




Yukarıdaki şekilde sonsuzluğu ifade eden matematik sembolünün kullanılması, bu iki önermenin sürekli birbirini takip ettiğini göstermektedir. Burada "Bu önerme yanlıştır" şeklindeki A önermesinde "bu" ifadesi cümlenin kendisini işaret etmektedir. Bu durumda "A doğrudur" ifadesinin onaylanması bizi "A yanlıştır" ifadesine götürür. Bu iki hüküm arasında sürekli bir döngü vardır.

---

[96] Alfred North Whitehead, Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, 2.b. , Cambridge University Press, London 1963, cilt I, s. 37.

[97] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguin Books Ltd., UK 1980, s. 18.

Bu önerme sisteminde, bu iki farklı basamak arasında sonsuz bir döngü oluşmuştur. Hofstadter, bu örnekteki gibi veya daha farklı sistemlerdeki birbirini izleyerek ortaya çıkan ilginç durumları tanımlamak için, meydana gelen olaya "garip döngü"; olayın meydana geldiği bu hiyerarşik sisteme de "karmaşık hiyerarşi" (tangled hierarchy) adını vermiştir. Bu kavramı kendi sözleriyle şöyle tanımlamıştır:

> "Garip Döngüler (Strange loops) fenomeni meydana geldiği zaman bazı hiyerarşik sistem basamakları arasından yukarı veya aşağı hareket edilerek, kendimizi ummadığımız bir şekilde tekrar başladığımız yerde buluruz. Bazen, karmaşık hiyerarşi terimini garip döngülerin meydana geldiği sistemi tanımlamak için kullanırım. Böylece devam edildikçe garip döngü teması tekrar ve tekrar oluşur. [98]

W. V. Quine, paradoks kavramını tanımlayabilmek için paradoksal olan iki farklı örneği ortaya koymuştur. Bu örneklerden ilki bir önerme olarak şöyle ifade edilebilir: "*Penzance Korsanları* kitabının başkahramanı Frederic sadece beş doğum günü geçirdiği halde yirmi bir yaşına ulaşmıştı." [99]

Bu örnekte problem yaş kavramının, doğum tarihiyle doğum gününün eşleştirilerek tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. İlk bakışta absürt (safsata) olarak görünen bu önerme bazı şartlarla doğrulanabilir. Eğer Frederic artık yılda doğmuşsa ve sadece artık yılda var olan 29 Şubat dört yılda bir ortaya çıktığı için yirmi bir yılda beş doğum günü geçirmesi mümkün olabilir. Böylece bu şartlar altında bu önerme doğru olur. İlk bakışta saçma veya paradoksal görünen bu durum, doğrulanabilir bir varsayımla çelişkili olmaktan kurtulmuş olacaktır.

Bu örnekten yola çıkarak Quine bu örnek tipindeki paradoksu "ilk bakışta saçma görünen ama onu onaylayan bir argümana sahip herhangi bir sonuç" olarak tanımlamıştır.[100] Ama Quine'e göre paradoksun bu şekildeki tanımlanması daha ciddi paradokslar için yeterli değildir.

---

[98] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguin Books Ltd., UK 1980, s. 18.

[99] W. V. Quine, *The Ways Of Paradox*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1976, s. 1.

[100] Quine, *a.e.*, s. 2.

W. V. Quine, Russell Paradoksu'nun daha basit versiyonu olan "bir kasabadaki sadece kendini tıraş edemeyenleri tıraş edebilme özelliğine sahip bir berberin kendisini tıraş edip edemeyeceği" paradoksu nedeniyle yaptığı tanımı genişleterek:

> "Genel olarak, bir paradoks ilk bakışta saçma görünen ama onu onaylayan bir argümana sahip herhangi bir sonuçtur diyebilir miyiz? Sonuçta bu tanımlama sağlam olsa da söylenmedik bazı şeyler kalır. Bir paradoksu onaylayan argüman, gizli bir öncülün veya bazı ön kavramların - fiziksel teori, matematik veya düşünce sürecine merkez olarak anılan önceki bazı kavramların- absürtlüğünü açığa çıkarabilir. Bu nedenle en masum gibi görünen paradoksta, felaket pusuda olabilir. Bu tehlikeli bölgeye ilk adım olarak, 1918 de ortaya konan kasabanın berberi paradoksunu düşünelim" demiştir. [101]

### 2.1.1.1. Paradoks İle İlgili Kavramlar

#### 2.1.1.1.1. Karşıtlık (ingilizce: contradiction, latince: contradictionem)

Paradoks sadece bir argüman olarak veya son derece sağlam bir mantıkta görünen bir argümanın saçma bir şekilde yanlış bir sonuca ulaşması, son derece sağlam görünen bir mantıkla bir şeyin hem doğru hem de yanlış olması durumu olarak tanımlanabilir. Bu gibi durumlar Orta Çağ mantıkçıları tarafından "sophismata" başlığı altında toplanmışlardır. [102]

Bu kavramı daha geniş biçimde tanımlayabilmek için eş anlamlı veya yakın anlamlı kavramları tanımlamak gerekir. Bu kavramların başında "karşıtlık" gelmektedir. "Karşıt" kavramı terim anlamı olarak "inkar etme, tutarsızlık, süreksizlik, birbirine zıt iki önerme anlamlarına gelmektedir." [103]

---

[101] W. V. Quine, *The Ways Of Paradox*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1976, s. 2.

[102] Stephen F. Barker, *Philosophy Of Mathematics*, Ed., Elizabeth and Monroe Beardsley, Prentice-Hall Inc., USA 1964, s. 82.

[103] H. W. Fowler, F. G. Fowler, *The Concise Oxford Dictionary Of Current English*, 7. b. , Oxford At The Clarendon Press, London 1919, s. 180.

En basit karşıtlık durumları olumlu ve olumsuz, renk açısından siyah beyaz gibi kavramların birbirlerine göre durumlarıdır. Ancak mutlak karşıtlık olarak kontradiktorik karşıtlıktan yani çelişkiden söz edilir. Örneğin A, A-olmayan karşısında böyle bir karşıtlık içindedir ve bu ikisi arasında hiçbir aracı öğe bulunmaz. Yani burada "ya, ya da" bağıntısı söz konusudur. [104]

Bununla beraber başka bir karşıtlık örneği de sonlu sonsuz gibi kavramların birbirine göre olan durumlarıdır. Burada da bir mutlak karşıtlık söz konusu olmakla birlikte, kutuplardan birinin varlığı öbürüne bağlıdır ve dolayısıyla kutuplar birbirlerine karşıt konumları ile vardırlar. [105]

Aristoteles'e göre zıt kavramı çelişikler, karşıtlar, göreliler, yoksun olma ve sahip olma, oluş ve yok oluşun kendisinden çıktıkları ve kendisine döndükleri uçlar hakkında kullanılır.

Aristoteles temel karşıtlıkları birkaç farklı şekilde tanımlamıştır. Bu farklı tanımlamalar "aynı zamanda, aynı özneye ait olmaları mümkün olmayan cins bakımından birbirinden farklı nitelikler; aynı cins içinde birbirinden farklı nitelikler; kendilerini kabul eden öznede birbirinden farklı nitelikler; aynı yetinin alanı içine giren şeyler arasında birbirlerinden en farklı olanlar; ayrımları ister mutlak olarak, ister cins ister tür bakımından birbirlerinden en büyük olan şeyler" şeklinde özetlenebilir. [106]

Aristoteles'in felsefesini inceleyen İbn-i Sina, zıtlık, karşıtlık gibi kavramlara, farklı bir bakış açısıyla yaklaşmıştır. Önermelerde ortaya çıkan çelişkilerin, olumlu ve olumsuz olarak birbirinden farklı olduğu düşüncesinin yanında, zıtların maddede bir arada bulunduğunu düşünmüştür. Bu düşüncesini şöyle açıklamıştır: "bilmemiz gerekir ki, kuvvet bir şey, tam yatkınlık (istidat) başka bir şeydir. Maddede bütün zıtlar bilkuvve bulunur, fakat değişik durumların bütünü içinde onda ortaya çıkan, tam yatkınlığın onu bir duruma seçmesi nedeniyle zıtlardan birinde özelleşir." [107]

---

[104] Alwin Diemer, "Ontoloji", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, Derleyen: Doğan Özlem, İkinci Basım, İnkılap Yayınları, İstanbul 1997, s. 122.
[105] Diemer, *a.e.*, s. 123.
[106] Aristoteles, *Metafizik*, çev., Ahmet Arslan, Sosyal Yayınları, İstanbul 1996, s. 257.
[107] İbn-i Sina, *Oluş ve Bozuluş*, çev., Muammer İskenderoğlu, ed. Muhittin Macit, Litera Yayıncılık, İstanbul 2008, s. 103.

### 2.1.1.1.2. Antinomi (ingilizce: anti'nomy, grek: antinomia)

Antinomi terimi sözlük anlamı olarak “bir kuraldaki veya iki kural arasındaki karşıtlık, otoriteyle çatışan” [108] anlamlarına gelmektedir. Mantıksal bir terim olarak “bir çift karşıt önermenin, her biri geçerli dedüktif kanıt kullanılmasıyla ispat edilerek çelişkiye neden olması” anlamındadır. Felsefi bir terim olarak antinomi, Kant’ın *Saf Aklın Eleştirisi* gibi önemli çalışmalarında en geniş anlamını bulmaktadır. Kant kozmolojik antinomileri; evrenin yapısı, maddenin bölünebilirliği gibi kavramları ele almak için kullanmıştır.[109]

Kant antinomilerini metafiziksel mantığın yetersizliğini, hatalı oluşunu göstermenin bir yolu olarak geliştirmiştir. [110]

Kant sonuçları tez ve antitez halinde birbirleriyle tam olarak karşıt olan dört antinomi ortaya koymuştur. Bir antinomi örneği olarak Kant’ın ilk çatışkısı oldukça dikkat çekicidir. Bu antinomi tüm düşünürlerin üzerinde tartıştığı en önemli konulardan biri ve temel çelişkilerin kaynağı olan sonsuzluk kavramı ile ilgilidir. Kant, evrenin ve dünyanın sonlu veya sonsuz olması düşüncesinden hareketle antinominin tezi olarak dünyanın zaman içinde bir başlangıcı ve uzay içinde bir sınırı olması gerektiği fikrini, antitez olarak ise dünyanın zamanda bir başlangıcının olmadığı ve uzayda herhangi bir sınıra sahip olmaması gerektiği düşüncesini ortaya koymuştur.

Zaman ve uzay hakkında olan bu antinomiyle ilgili Aristoteles antitezin kanıtlanabileceğini, Augustine tezin kanıtlanabileceğini, Aquinas ikisinin de kanıtlanamayacağını iddia etmiştir. Kant ise tabi ki birbirine zıt iki doğrunun olacağını göstermek için değil, mantığın bir bütün olarak dünyadan bahsetmek için zayıf olduğunu ortaya koymak için, ikisinin de kanıtlanabileceğini savunmuştur. [111]

---

[108] H. W. Fowler, F. G. Fowler, *The Concise Oxford Dictionary Of Current English*, 7. b., Oxford At The Clarendon Press, London 1919, s. 36.

[109] Jethro Butler, *Key Terms in Logic*, Ed., Federica Russo, Jon Williamson, Continuum International Publishing Group, London 2010, s. 5.

[110] Charles Taliaferro, Elsa J. Marty, *A Dictionary of Philosophy of Religion*, The Continuum International Publishing Group, New York 2010, s. 18.

[111] Anthony Kenny, *A New History Of Western Philosophy*, Clarendon Press, New York 2006, Volume III, s. 177.

### 2.1.2. Paradoks Çeşitleri ve Mantıksal Prensipler

#### 2.1.2.1. Doğru Çıkarımlı ve Yanlış Çıkarımlı Paradokslar

Safsata, bir argümanın ya geçerli (argüman dedüktif ise) veya sağlam (eğer indüktif ise) olmasını önleyen, argümanın içindeki bir kusur olarak tanımlanmıştır.[112] Başka bir deyişle safsata geçersiz bir argümandır. "Aşil ve kaplumbağa" örneğinde olduğu gibi paradokslara yol açan, bariz şekildeki yanlış sonuçlardır. [113]

İbn Sina, *Sofistik Deliller* isimli eserinde safsatayı mugalatalı susturma (tebkit) olarak tanımlayarak bu kavramı şu şekilde açıklamıştır: "filozofa benzeyen kişinin bir vazın çelişiğini sonuç olarak çıkarmak için yaptığı kıyastır. Kimi şeyler gerçek kimileri gerçeğe benzerdir. Bunun gibi kimi kıyaslar mevcut ve gerçek iken kimileri safsatalı (sofistik) bir susturmadan ibarettir, gerçeğe benzer ama onun mevcut bir kıyaslık hakikati yoktur." [114]

Yanlış çıkarımlı paradokslar, safsata olarak değerlendirilmişlerdir, argümanın bir kısmında yapılan hatadan kaynaklanırlar ve ortaya ilginç, kabul edilemeyecek sonuçlar çıkarabilirler. Yanlış çıkarımlı paradoks, önermesi ilk bakışta saçma görünen değil aynı zamanda yanlış olan çıkarımdır. De Morgan tarafından ortaya konan bir safsata örneği "2=1" gibi yanlış kanıtlamadır ve şu şekildedir.

$x = 1$ olsun. İki yanı da x ile çarparak $x^2=x$ bulunur. Her iki taraftan 1 çıkararak ($x^2-1 = x-1$) bulunur. Her iki tarafı ($x - 1$) ile bölerek ($x + 1 = 1$) sonucu bulunur. İlk adımda $x = 1$ olduğundan $2 = 1$ sonucuna ulaşılır.

Burada ($x-1$) ile bölme işleminde safsata vardır. Çünkü değeri sıfırdır, hiçbir sayı sıfıra bölünemez. [115]

---

[112] Roy T. Cook, *A Dictionary Of Philosophical Logic*, Edinburgh University Press, Edinburgh 2009, s. 116.
[113] Christopher Clapham, James Nicholson, *The Concise Oxford Dictionary Of Mathematics*, Fourth Edition, Oxford University Press, New York 2009, s. 306.
[114] İbn Sina, *Sofistik Deliller*, çev., Ömer Türker, Litera Yayıncılık , İstanbul 2006, s. 2.
[115] W. V. Quine, *The Ways Of Paradox*, Arevised And Enlarged Edition, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1976, s. 1.

Doğru çıkarımlı paradoks, beş doğum günü geçirdiği halde yirmi yaşını dolduran bir kişi ve kasabanın berberi paradoksları ile örneklendirilebilir. Bu iki paradoks, paradoks çeşitlerinin, doğru çıkarımlı (veridical) veya yanlış çıkarımlı (falsidical) olması açısından birbirine benzerlik göstermektedir.

Bertrand Russell'ın ortaya koyduğu küme paradoksunun benzeri ve basitleştirilmiş örneği olan berber paradoksu önermesinde, paradoksun doğrulanması için bir kanıt olan varsayımı "hiçbir kasaba böyle bir berberi içermez" şeklinde kabul edersek, o halde bu paradoks doğru çıkarımlı olmaktadır.

### 2.1.2.2. Mantıksal Prensipler "Düşünce Yasaları"

Mantıksal prensipler, "düşünce yasaları" kavramıyla bir bütün olarak düşünüldüğünde mantıkta en temel, önemli ve doğruluğu bariz olan üç temel yasa ile belirlenmişlerdir. Düşünce yasaları, herhangi bir sistemli düşünme sürecinde temel olarak kabul edilen, tüm bilimlerde kullanılan ve nesnelliği belirleyen yasalardır. Bununla birlikte, mantıksal prensiplerle çelişki halindeki durumlar problem ortaya koymaktadır. Bu temel üç prensip kendinden kanıtlı, sezgisel ve mantıksal prensiplerdir.

Bu mantıksal prensipler şu şekildedir.

1-Özdeşlik yasası "bir şey neyse odur."

2-Çelişmezlik yasası " bir şey aynı zamanda hem odur, hem de o değildir, olamaz"

3-Üçüncünün imkansızlığı yasası "her şey için, ya odur veya o değildir olması zorunludur." [116]

[116] Bertrand Russell, *The Problems Of Philosophy*, Walsh Philosophy Collection, Home University Library Of Modern Knowledge, Ed., Herbert Fisherno, New York 2007, s. 113.

### 2.1.2.2.1. Çelişmezlik Yasası

Paradoksların bir problem haline gelmesi mantıksal prensiplere özellikle de çelişmezlik yasasına karşıt olması nedeniyledir. Aristoteles mantıktaki temel prensipleri değerlendirirken, çelişmezlik yasasının kendinden ispatlı ve doğruluğu mutlak olarak bariz bir yasa olduğuna hükmetmiştir.

Ayrıca Aristoteles'e göre çelişmezlik prensibi bütün ilkeler içinde en kesin ilke ve yanılmamızın imkansız olduğu bir ilkedir. Bu ilkenin, hem bütün ilkeler içinde en iyi bilinen ilke olması hem de koşulsuz olması zorunludur. Çünkü herhangi bir varlığı kavramak için sahip olunması zorunlu olan bir ilke başka bir ilkeye bağlı olmamalıdır. Aristoteles çelişmezlik ilkesini "aynı niteliğin aynı zamanda, aynı özneye, aynı bakımdan hem ait olması hem de ait olmaması imkansızdır" biçiminde tanımlamış ve "bu ilke doğası gereği bütün diğer aksiyomların da hareket noktasıdır" demiştir.[117]

Çelişmezlik prensibi aynı zamanda mantıksal olarak da şöyle formüle edilebilir: "bir yüklem bir özne hakkında hem söylenmiş hem de söylenmemiş olamaz" yani; bir yargı aynı zamanda hem evetleyici hem değilleyici olamaz. Bu prensip bilgi kuramı açısından da şöyle formüle edilebilir: "bir ifade hem doğru hem de yanlış olamaz. Çelişkisizlik ilkesi daha önceleri bir varlık ilkesi olarak kabul edilirken şimdi bir sistemin çelişkiden arınmışlığını sağlayan mantıksal bir ilke olarak anlaşılmaktadır. [118]

---

[117] Aristoteles, *Metafizik*, çev., Ahmet Arslan, Sosyal Yayınları, İstanbul 1996, s. 201-202.
[118] Alwin Diemer, "Biçimsel Ontoloji", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, çev., Doğan Özlem, İkinci basım, İnkılap Yayınları, İstanbul 1997, s. 106.

### 2.1.3. Felsefede Paradoksun Önemi

Theseus'un gemisi paradoksu felsefi paradoksların en önemlilerinden birisidir. Bu paradoksta, dış dünyada gözleyemediğimiz değişimler ve bu değişimlerin maddenin özdeşliğine etkisini ortaya koymak amaçlanmıştır. Fiziksel dünyadaki, en basit anlamda renklerin birbirine dönüşmesi, maddelerdeki renklerin değişimi, canlıların ve bitkilerin değişimleri gibi belki çoğunu fark edemediğimiz bu değişimler sonucu madde hangi noktada başka bir şeye dönüşmektedir?

Theseus'un gemisi paradoksu şu şekilde açıklanabilir: Atinalı kahraman Theseus'un, yıllar geçtikçe yıpranan ve yıpranan kısımlarını sürekli olarak onardığı bir gemisi vardı. Eski tahtaları, halatları, yelkenleri vb. tüm parçalarını yeni parçalarla değiştirmişti. Tüm bu süreç sonucunda Theseus'un gemisi, tamamen yeni parçalarla donatılmış ve yepyeni olmuştu. Buradaki paradoksal düşünce tüm bu değişimlerden sonra, bu geminin aynı gemi olduğu söylenebilir mi? sorusuyla ortaya çıkmaktadır.

Bu paradoks sınırları birbirinden ayırmak konusunda bir soru ortaya koymaktadır. Aslında Theseus'un gemisi ne zaman aynı gemi olmaktan çıkmıştır? Genelde insanlar daha çok, kolay fark edilen değişimlerle ilgililerdir. Ancak Sorites, ufak değişimlerle, hatta en dikkat edilmeyen değişimlerle ilgilenmiştir. [119]

Felsefede çok tartışılan değişim, özdeşlik ve kimlik sorununu ortaya koyan bu paradoks gibi felsefi birçok problemi tartışabilmek için paradokslar gerekli olmuştur. Böylece basit gibi görünen hatta çoğu zaman görünür olmayan, değişim gibi bir kavramdan mantıktaki en önemli prensibi ilgilendiren önemli sonuçlara ulaşılabilmektedir.

Bertrand Arthur William Russell, bu konunun önemini felsefe ve paradoks ilişkisini tanımladığı şu cümleyle belirtmiştir: "Felsefenin amacı bir değer belirtmeyecek kadar basit görünen bir şeyle başlayıp, kimsenin inanmayacağı derecede paradoksal bir sonuca ulaşmaktır." [120]

---

[119] Peter Cave, *This Sentence is False*, The Continuum Books Group, London 2009, s. 71.
[120] Saul Smilansky, *10 Moral Paradoxes,* Blackwell Publishing Ltd., UK 2007, s. 1.

## 2.2. SEMANTİK (ANLAM BİLİMİ) MANTIKSAL PARADOKSLARI

### 2.2.1. Semantik Bilimi

#### 2.2.1.1. Semantik Tanımı

Semantik, dil ile ilgili simgelerin incelenmesidir. Biçimsel semantik genelde üç bölümde incelenmektedir: sentaks, semantik ve pragmatik.

Sentaks (söz dizimi) simgeler arasındaki bağıntıları inceler. Söz dizimi, doğal dillerdeki cümle kurma ilke ve kurallarını, bu dildeki cümlelerin esnekliğini inceleyen dil bilimi dalıdır. Semantik ise sembollerin anlamlandırılması üzerine yapılan çalışmalardır. Pragmatik, sembollerin kendi aralarındaki ilişkileri inceler.[121]

Semantik bilimi, Alfred Tarski'nin karakterize ettiği gibi, "bir dildeki ifadelerle, bu ifadelerin işaret ettiği nesneler ve şartlar arasındaki bağıntıyı inceleyen bilim dalıdır". Bu bilimin temel teorik kavramları; doğruluk, referans (ima) ve düşüncedir. [122]

#### 2.2.1.2. Semantik Paradoks Tanımı

Semantik paradokslar; doğruluk, gönderme gibi anlamsal kavramların önemli bir rolü olarak karakterize edilmiş mantıksal bilmeceler grubudur. Her paradoks gibi bunların tanımlayıcı özelliği saçma sonuçları kolayca reddedilebilir herhangi öncülya da kavram kullanmadan kabul etmeye zorlamalarıdır. Semantik Paradokslar, küme-teorik paradokslardan ayırmak amacıyla birlikte gruplandırılır. [123]

---

[121] Donald M. Borchert, *Encyclopedia Of Philosophy*, 2.b., USA 2006, C. V, s. 556.
[122] Borchert, *a.e.*, s. 517.
[123] T. Kenyon, "Paradoxes Semantic", *Concise Encyclopedia Of Philosophy Of Language and Linguistics*, Ed., Alex Barber, Robert J.Stainton, Elsevier Ltd., UK 2010, s. 557.

### 2.2.1.3. Semantik ( Dil Bilimsel ) Paradoks Cümleleri

Günlük hayatta kullandığımız bazı cümleler biz farkında olmasak bile kendi içinde çelişkili olabilirler. Kendi içinde tutarlı olması gereken bir cümle eğer kendi kendini işaret ediyor ve çelişkili bir sonuca varılıyorsa; bu açıdan doğru kabul edildiğinde yanlış, yanlış kabul edildiğinde doğru sonuca varılıyorsa anlamsal bir paradoksla karşılaşılmış demektir.

Dolayısıyla cümlenin anlamıyla ilişkili paradokslar genelde oto referans veya kendine gönderim kavramı ve kısır döngü ile ilgilidirler. Öncüllerini inkar eden bir sonuç olarak, başında doğru olarak kabul edilen argümanın nihayetinde onu inkar eden bir şekilde sonuçlanması olarak tanımlanabilen safsata örnekleriyle, sıradan konuşmaların seyri içinde ve farkında olmadan en basit şekilde kullanılan cümlelerde bile karşılaşılmaktadır.

Pozitivist bir babanın oğluyla olan diyalogunun yer aldığı küçük bir örnek bu duruma işaret etmektedir. Bu örnekte baba oğluna;

“Oğlum, bu dünyada hiçbir şeyden emin olamayacağımız ve hiçbir şey kesin olmadığı için deneyimlerimizin bize öğrettiğine tutunmak zorundayız” der.

Oğlu babasına “emin misin baba?” diye sorar.

Babasının yanıtı “evet oğlum, eminim” olur.[124]

Semantik açıdan çelişkili, kimisi daha basit, kimisi girift ve içinden çıkılamayan tek cümlelik bazı paradoks örnekleri içinde belki de bilinen en ünlü semantik paradoks cümlesi Sokratik yöntemi ortaya koyan, antik dönem Yunan filozofu Sokrates’in “bildiğim tek şey, bir şey bilmediğimdir” ifadesidir.

Sokrates’in tanınan paradoksundaki, “bildiğim tek şey, bir şey bilmediğimdir” ifadesine benzer olan bir cümle de Alman filozof Georg Wilhelm Friedrich Hegel’e aittir. Hegel “biz; tarihten hiçbir şey öğrenilemeyeceğini, tarihten öğreniriz.” demiştir.[125]

---

[124] Madsen Pirie, *How to Win Every Argument,* Continuum International Publishing Group, London 2006, s. 36.
[125] Roy Sorensen, *A Brief History Of The Paradox*, Oxford University Press, New York 2003, s. 306.

"Düşmanla karşılaştık ve o biziz." [126]

Walt Kelley'nin söylediği bu ifade anlamsal paradoks cümlesidir. Çünkü düşman, bir kişiye zarar vermek isteyen demektir. Düşman olunması için karşılıklı kişiler veya taraflar olması gerekir. Bu tanımdan dolayı ve her iki taraf kişinin kendisi olduğundan, yani yalnızca bir taraf olduğu için kendi içinde bir kısır döngüyü oluşturur. Dolayısıyla burada çelişkili bir durum oluşmuştur.

Bu paradoksal cümlenin kaynağı daha eski bir söz olan "O, kendisinin en kötü düşmanıdır." önermesidir. Farklı şekillerde söylenebilen bu ifade aslında şu şekilde açıklanabilir. Çevreci anlayışla söylenirse biz günümüzdeki kirlenmenin kurbanlarıyız ama aynı zamanda bu kirliliğin sebepleriyiz. "O, kendisinin en kötü düşmanıdır" demek şunu söylemenin başka bir şeklidir. "O bir işte devam ederken kendisi için sorun teşkil edecek durumları meydana getirmektedir." [127]

Eğer bir levhada "lütfen bu uyarıyı görmezden geliniz" yazıyorsa bu ne anlama gelmektedir? Aslında bu cümle önerme değil, bir emir cümlesidir. Böyle olduğundan emir cümlesi doğru veya yanlış olarak nitelendirilmez.

Ancak anlamsal açıdan bakılırsa cümle çelişkilidir.

1-Eğer bu ifade öyle yapmanızı istediği için yazıyı göz ardı ederseniz böylece bu uyarıyı göz ardı etmemiş olursunuz.

2-Eğer uyarıyı göz ardı etmezseniz, bu uyarıya dikkat etmeniz gerekmektedir. [128]

Bu çelişkiye benzer olarak bir kütüphanedeki kitap dolu bir odaya girildiğinde "bu odadaki hiçbir şeyi okumayın" yazılı bir levha ile karşılaşıldığını varsayalım. Levhada söylenileni yapabilmek için bu levhadaki yazıyı okumak zorunlu olmaktadır. Fakat eğer bu yazı okunmamışsa o zaman bu emir gerçekleştirilemeyecek demektir.

---

[126] Bryan Bunch, *Mathematical Fallacies And Paradoxes*, Dover Publications, New York 1997, s. 95.
[127] Bunch, *a.e.*, s. 95.
[128] Bunch, *a.e.*, s. 95.

Aslında bu yazı duvarda yazılı olmasaydı ve içeri girildiğinde kütüphaneci okuyana hitaben "bu odadaki hiçbir şeyi okumayın" deseydi bu noktada bir paradoksal durum ortaya çıkmayacaktı. Burada paradoksal özellik cümlenin kendine göndermeli halde olmasından kaynaklanmaktadır. [129]

Antik Çağın en ünlü paradoks cümlesi, modern zamanlarda "bu ifade yanlıştır" biçiminde öne sürülen ve dil biliminde ciddi düşünceler üretilmesini sağlayan Epimenides'in "tüm Giritliler yalancıdır" önermesidir.

Yalancı Paradoksu'na yakın olan kendi içinde çelişkili bazı ifade örnekleri şu şekildedir; "bu cümle kendine göndermeli olduğundan anlamsızdır", "bu cümlede yüklem yoktur", "Şu an yazdığım cümle, şimdi okuduğunuz cümledir" [130]

George Bernard Shaw'ın "tek altın kural, altın kural olmamasıdır" önermesi de örnek olarak verilebilir. [131]

### 2.2.1.4. Meta Kuram Kavramı

Antik Çağdan 20. yüzyıla kadar ortaya konan ciddi cümlesel veya küme kuramsal paradoksların getirdiği çelişkiler, formalizmde çelişkisizlik isteyen mantıkçı ve matematikçileri bu sorunları çözmeye teşvik etmiş, tamamen tutarlı formel teoriler geliştirme çabalarının temeli olmuşlardır. O yüzden David Hilbert, Alfred Tarski gibi düşünürler çalışmalarını bu noktada yoğunlaştırmışlardır.

Bu çalışmalar sonucu, ilk kez 1930'larda "semiotik" adıyla da bilinen bizzat formelleştirilmiş kuramların kendileri üzerine düşünme yolu; yani meta kuram yolu açılmıştır.[132]

---

[129] Bryan Bunch, *Mathematical Fallacies And Paradoxes*, Dover Publications, New York 1997, s. 95.
[130] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguin Books Ltd., UK 1980, s. 490.
[131] Martin Gardner, *Gotcha Paradoxes to Puzzle and Delight*, W. H. Freeman Company, Twentieth Printing, New York 1999, s. 6.
[132] Robert Feys, "Mantık", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, çev. ve der. , Doğan Özlem , 2.b., İnkılap Yayınları, İstanbul 1997, s. 46.

Günlük konuşma dili mantıksal açıdan bakılarak incelendiğinde, farkında olunmadan kullanılan birçok çelişkili anlatımlar içerdiği görülmektedir. Konuşmalarda kullandığımız ve yapılan araştırmalara aracı olan dilin kendisi de aslında önemli bir araştırma konusudur.

Dil, hem araştırılması gereken bir konu hem de bu bilimsel ve felsefi araştırmaların betimlenme yeridir. Felsefi açıdan bakıldığında da bu olgusal durum insanın bizzat kendisi üzerine düşünümle yönelebilmesi anlamını taşır ki, "dil içinde dil üzerine konuşabilmek" sadece insana özgü bir şey olarak kendisini göstermektedir. Ama dili bir konu olarak ele almak için "dil üzerine konuşan bir dile" yani bir üst dile gereksinim vardır. Bu dilsel katmanlar arasındaki ilişkiyi araştırmayı metafiziksel yorumlara asla başvurmak istemeksizin mantıkçı pozitivizm kendisine görev olarak koymuştur.[133]

İlk kez Varşova Mantıkçı Okulu tarafından kullanılan bu terimlerden genel olarak anlaşılan şey üzerinde konuşulan dilin nesne dili; nesne dilinden söz eden dilin ise üst dil olarak adlandırılması gerektiğidir. Bu üst dil bir nesne dilinin betimini ve çözümlemesini üstlenerek bir dil sıra düzeni (hiyerarşisi) oluşturulmuştur.[134]

### 2.2.1.5. Alfred Tarski ve Meta Kuram

Matematiksel mantık üzerinde çalışan Polonya asıllı matematikçi ve mantıkçı Alfred Tarski 1930'larda mantıkta önemli bir çalışma olan semantik metodunu yani meta dil (üst dil) kuramını biçimlendirmiştir.

---

[133] Waltraud Bumann, "Dil Felsefesi", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri,* çev., Doğan Özlem (Derleyen), İkinci Basım, İnkılap Yayınları, İstanbul 1997, s. 515.
[134] Bumann, *a.e.*, s. 516.

Mantıkçı Alfred Tarski anlamlar ve anlamların gösterdiği formel dil (semboller) arasındaki bağı incelemiştir. Bu incelemeler sonucunda semantik paradoksları çözümleyebilmek için daha güçlü bir dile gereksinim olduğunu düşünmüştür. Tarski, belirli şekilde biçimlendirilmiş dilde (sembolik mantığı kullanarak bazı ifadeleri biçimsel gösterim yardımıyla ortaya koyan dil), verilen, doğruluk kavramının daha güçlü bir dilde (kendi adlandırdığı isimle üst dil), nasıl tanımlanabileceğini göstermiştir.[135]

*Doğruluk ve Kanıt* isimli makalesinde Tarski doğruluk, kanıt kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Bu çalışmasında belirttiği üzere, üst dil ve nesne dili kavramları arasındaki ilişkide önemli olan üst dilin yeteri kadar zengin olmasıdır. Tarski'ye göre özellikle üst dil, nesne dilini bir parçası olarak içermek zorundadır. Yani nesne dilinin her cümlesi aynı zamanda üst dilin cümlesi olmak zorundadır. [136]

Tarski'nin meta kuram çalışması, denklik prensibine dayanmaktadır. Bu prensibe göre, doğruyu tanımlamadaki sembolik gösteriminde; " 'p' doğrudur; ancak ve ancak p ise" formu sağlanmak zorundadır.

Burada denkliğin iki tarafındaki 'p' yerine nesne dilindeki istenilen bir cümle yerleştirilebilmektedir.

Tarski bu düşüncesinde gösterdiği sembolik formda p yerine nesne dilinden "kar beyazdır" cümlesini seçerek, formu örneğiyle görselleştirmiştir.

1) " 'kar beyazdır' doğrudur ancak ve ancak kar beyazsa "

1') " 'kar beyazdır' yanlıştır ancak ve ancak kar beyaz değilse " [137]

Fakat denklik prensibi felsefi açıdan nötrdür. Tarski'nin çalışması da. herhangi gerçeklik teorisinde 'kar beyazdır', ' "kar beyazdır" doğrudur" önermesine denk olarak düşünülmektedir. [138]

---

[135] Hilary Putnam, *Reason Truth and History*, Cambridge University Press, UK 1981, s. 128.
[136] Alfred Tarski, "Truth and Proof", *Scientific American*, USA June 1969, (75–77), s. 6.
[137] Tarski, *a.e.*, s. 2.
[138] Putnam, *a.e.*, s. 129.

### 2.2.1.6. Semantik Paradoksların İncelenmesinde Üst Dil Kavramı

Semantik paradoksların incelenmesi dilde önemli bir farklılığa neden olmaktadır. Bu, nesne dili ile üst dil arasındaki farklılıktır. Geleneksel dil genellikle nesnelerle ilgili olduğu halde üst dil, dilin kendisinden bahsetmektedir.

Örneğin bir dil teorisi oluşturulduğunda bu teorinin dili üst dildir. Ayrıca "sözcük" ve "cümle" gibi kelimeler üst dile ait sözcüklerdir. Dil düzeylerindeki bu ayırım mantığın zorunlu ön koşullarından biridir. Yazmada üst dile geçiş genellikle alıntı işaretiyle gösterilmektedir. [139]

Dil ile ilgili paradoksların ortaya çıkmasına, cümlelerin çelişkili duruma gelmesine, bu alt ve üst dilin birbirinden ayrı tutulmaması ve ifadenin kendine gönderimi neden olmaktadır.

"Şu anda söylediğim yanlıştır" önermesini ele alırsak, bu cümle paradoksal bir ifadedir. Çünkü eğer bu cümle doğruysa cümle yanlış olmalıdır; eğer bu cümle yanlışsa cümle doğru olmalıdır. Bu çelişkinin sebebi cümledeki dilin kendini ima etmesi yani kendinden söz etmesi ve dil düzeyi ayırımına uymamasıdır. Örneğin "'Eylül yaz aylarındandır'. Bu ifade yanlıştır" ifadesinde bu kelimesi ilk cümleyi işaret ettiğinden burada bir çelişki ortaya çıkmamaktadır.

Üst dil üzerindeki çalışmalar çoğu kez semantik ya da semyotikten en genel bir simgeler teorisinin oluşturulmasına yol açmıştır. Teori her türlü dilsel ifade biçimlerinin özelliklerini amaçlamaktadır. Dilsel ifade biçimleri arasında kullanılan dil gibi anlam iletişimine araçlık eden trafik işaretleri veya resimleri de gösterilebilir.[140]

---

[139] Hans Reichenbach, *Bilimsel Felsefenin Doğuşu*, çev., Cemal Yıldırım, Remzi Kitabevi, İstanbul 1993, s. 153.
[140] Reichenbach, *a. e.*, s. 153.

### 2.2.2. Semantik Paradokslar

#### 2.2.2.1. Oto Referans -Kendine Gönderim- Kavramı

Oto referans tanımlamasına göre bir cümle ele alındığı zaman, cümlenin konusu kendisiyse, bu durum kendine gönderimi ifade etmektedir.

Ünlü Hollandalı matematikçi ressam Maurits Cornelis Escher tarafından çizilen ünlü *Çizen El Gravürü* kendini kaynak gösterme (oto referans) çelişkisinin görselleştirilmiş halidir. Oldukça dikkat çekici, biri diğerini çizmekte olan eller resmi iki aşamalı bir garip döngüyü ifade etmektedir. Resme bakan bizler aynı geleneksel mantıksal paradokslardan, bir üst dile sıçrayarak kurtulduğumuz gibi. sistemin dışına çıkarak ve onu meta düzeyden görerek bu paradokstan kurtulabiliriz. Bununla beraber, insan zihni, nöronların ateşlenip nöronlar hakkında düşünceler üretmesi nedeniyle, kendine yansıma yeteneğine sahip olduğundan, bizler de garip döngülere sahibiz. Daha geniş bir perspektiften bakıldığında insan beyni evrenin, kendini düşünmek gibi müthiş yeteneği kazanmış bir düzeyindedir. [141]

#### 2.2.2.2. Oto Referans Önerme Örnekleri

Semantik paradokslar, temelde ifadenin kendine gönderimli kullanılmasından kaynaklanır. Genelde anlamsal paradokslar, içinde yalan, yanlış, doğru değildir gibi kelimeleri barındıran cümlelerde ortaya çıkmaktadır. Olumlu bir ifade olan “bu önerme doğrudur” cümlesini kendine göndermeli olarak ele alırsak, mantıksal olarak ortada çelişki olmaz, ama önerme totolojik bir ifade gösterir, doğruysa doğru yanlışsa yanlıştır. Bu cümleyi aynı zamanda hem doğru hem yanlış yapabilen bir durum söz konusu değildir.

[141] Martin Gardner, *The Colossal Book Of Mathematics Classic Puzzles Paradoxes*, W. Norton Company, New York 2001, s. 664.

"Yalan söylüyorum" önermesini inceleyelim.

"Yalan söylüyorum" demek, "yanlış bir önermede bulunuyorum" anlamına gelmektedir. Eğer mesela "ben sadakatsiz değildim. Hayır, kabul etmeliyim. Yalan söylüyorum" gibi başka bir cümleye referansta bulunuluyorsa bu problem oluşturmaz. Ama kendine göndermeli kullanılırsa problem ortaya çıkar. Problem, kendine göndermeli kullanımın "yalan söylüyorum" önermesini hem doğru hem yanlış kılarak çelişkiye yol açmasıdır.[142]

"Giritliler yalancıdır" cümlesi bir paradoks ortaya koymaz, sıradan bir ifadedir. Sadece bu cümleyi söyleyen kişinin Giritli olduğu bilinirse bu cümle bir paradoks ifade eder. Buna ifadenin kendine göndermeli hale gelmesi sebep olur.

"Bu cümle yanlıştır" ifadesi bir paradoks mudur? Buradaki "bu" kelimesi neye atıf yapar, hangi cümle yanlıştır?

Şöyle bir ifade okuduğumuzu varsayalım "su elli derecede kaynama noktasına ulaşır. Bu ifade yanlıştır" Bu noktada bir problem ortaya çıkmaz. "Bu cümle yanlıştır" cümlesini paradoks yapmak için bu cümle, bu cümle hakkında olmalıdır. Yani başka bir deyişle cümle kendi hakkında konuşmalıdır.

Kendine göndermeli önermelerin bir örneği de Descartes'ın "düşünüyorum, o hâlde varım" felsefi düşüncesidir. Düşünüyor olmak var oluşun bir göstergesi olduğuna göre, düşünüldüğü inkar edilip yok sayılsa bile, düşünme eylemi gerçekleştiriliyor demektir. Var olunmadığını düşünmek bile varlığın bir kanıtıdır.

#### 2.2.2.3. Semantik Paradoks Örnekleri

##### 2.2.2.3.1. Timsah ve Kadın Paradoksu

Timsah paradoksu, mantıksal paradokslar içinde, yalancı paradoksu kadar önemli bir yerde değildir. Ama tarihsel olarak Antik Çağ'da ve Orta Çağ'da birçok mantıkçı bu şekildeki çelişkiler üzerinde çalışmalar yapmıştır.

[142] Michael Clark, *Paradoxes From A To Z*, Second Edition, Routledge, New York 2007, s. 112.

Timsah paradoksu şu şekilde hikayelendirilir.

Bir timsah bir kadının bebeğini alır.

Kadına “eğer soracağım soruya doğru bir şekilde cevap verirsen bebeği geri vereceğim” der.

Soru şudur: “bebeği geri verecek miyim?”

Kadın “Geri vermeyeceksin ” diye yanıtlar. [143]

Bu yanıtla birlikte, anlamsal bir karışıklık ve çelişki ortaya çıkar. Bu yanıt sonucunda her ikisi de varmak istedikleri sonuç için her biçimde kendi içinde çelişecek olan bir mantık yürütürler.

Timsah; bu yanıtın sonucu olarak bebeği geri vermeyeceğini iddia eder. Eğer bebeği geri verecekse kadın yanlış konuşmuş cevabı bilememiş olacaktır. O zaman bebeği geri vermemesi gerekir.

Kadın; sonuçta bebeği vermesi gerektiğini iddia eder.Eğer bebeği geri vermeyecekse, geri vermeyeceksin sözüyle doğru bir yanıt verdiğini, cevabı doğru bildiği için anlaşmaya göre bebeği geri vermesi gerektiğini söyler.

Eğer kadın bebeği geri vereceksin, demiş olsaydı o zaman çelişki olmayacaktır. Geri vermeyeceksin, cümlesi anlamsal olarak, eğer timsahın bebeği geri vermeyecekse, geri vermesi; eğer geri verecekse, geri vermemesi gerektiği gibi paradoksal bir sonuç ortaya çıkarmaktadır.

### 2.2.2.3.2. İstisna Paradoksu

“ Tüm kurallar, istisnalara sahiptir. ”

İyi bilinen bu ifadedeki çelişkiyi fark etmek için tüm kelimesine dikkat edilmelidir.

---

[143] I. M. Bocheński, *Ancient Formal Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1951, s. 101.

Bir konudaki tüm elemanlarla ilgili bir önerme cümlesi kuruluyorsa ve bu elemanların içine önermenin kendisi de dahil oluyorsa bu durum bir kısır döngüye ve çelişkiye neden olabilir. Bu önermenin kendisi de aslında bir kuraldır ve diğer kuralları etkilediği gibi kendisini de etkilemektedir. Bu durumda karşımıza iki varsayım çıkaracaktır.

Birincisi:

Varsayalım ki, tüm kuralların istisnaları olsun o zaman bu özel kural yani "tüm kurallar istisnalara sahiptir" kuralı da bir istisnaya sahip olmalıdır. Peki bu kural için istisna ne olabilir? Bu, istisnaya sahip olmayan kurallar var demektir.

İkincisi:

Varsayalım ki, istisnasız bir kural olsun o zaman da "tüm kurallar istisnalara sahiptir" önermesi doğru olamayacaktır.

Bu çelişkiyi, sıralı önermeler şeklinde gösterelim.

1) "Tüm kurallar  istisnalara sahiptir."

2) (1) ifadesi bir kuraldır.

3) Bunun için (1) istisnaya sahiptir.

4) Böylece tüm kurallar istisnaya sahip değildir. [144]

Kuraldışıdır.

#### 2.2.2.3.3. Berry Paradoksu

Bertrand Russell'ın üzerinde durduğu ve kısır döngü prensibiyle çözmeye çalıştığı bu paradoks 19. yüzyılda Oxford Bodleian kütüphanesinde kütüphaneci olan G. G. Berry tarafından ortaya konmuştur.

---

[144] Eugene P. Northrop, *Riddles in Mathmematics*, D. Van Nostrad Company Inc., Princeton, New Jersey 1944, s. 198.

Bu paradoksta ilk betimlenemeyen sayı ifadesi kullanılmıştır. Berry, genel bir tanımlama olarak "verilen belirli sayıdaki kelimeyle tanımlanamayan en küçük tamsayı" ifadesini kullanmıştır.

Berry paradoksunun cümlesel olarak anlatımı şu biçimdedir.

"Yirmiden az heceyle betimlenemeyen en küçük tamsayı" ifadesini düşünelim. Bu önermenin kendisi on dokuz hecelik bir betimlemedir. O halde yirmiden az heceyle betimlenemeyen en küçük tamsayı yirmiden az heceyle betimlenebilir çünkü alıntılanan ifade böyle bir betimlemedir ve yalnızca on dokuz hecesi vardır." [145]

Bir oto referans örneği gösteren bu ifade anlamsal açıdan bakıldığında bir paradokstur. Paradoksu ortadan kaldırmak için yapılabilecek olan çözüm böyle tanımlanabilen bir sayı olmamasını kabul etmektir. Bertrand Russell bu paradoksu kısır döngü prensibine göre çözeceğini düşünmüştür.

O, "kısır döngü ilkesi adını alan bu düşünce, yasa dışı bütünleri ortadan kaldırmak amacıyla kullanılabilir" demiştir. Russell'a göre bu prensip "Bir derlemenin bütününü içinde bulunduran, bu bütünden biri olmamalıdır" ya da tersine "belirli bir derleme, bir bütüne sahip olmasıyla, sadece bu bütününün terimleriyle tanınabilir üyelere sahip olacaktır" ifadesidir. Sonuçta adı geçen derleme bir bütüne sahip olmayacaktır. [146]

### 2.2.2.3.4. Yunanlı Avukat Protagoras Paradoksu

En eski paradokslardan biri Yunanlı avukat hakkındadır. Protagoras'ın fakir ama yetenekli bir öğrencisi vardır ve onunla ücretsiz ders vereceğine dair anlaşma yapar ancak anlaşmada bir şart vardır.

---

[145] Hilary Putnam, *Reason Truth and History*, Cambridge University Press, UK 1981, s. 127.
[146] Bertrand Russell, *Batı Felsefesi Tarihi*, çev., Muammer Sencer, Say Yayınları, 7. basım, İstanbul 2000, s. 52.

Eğer başarılı bir şekilde öğrenciliğini tamamlarsa ve bununla beraber ilk davasını kazanırsa belirli bir ücreti hocası Protagoras'a ödeyecektir ancak eğer kazanamazsa ücret ödemeyecektir. İkisi de bu anlaşmayı kabul ederler. Bir süre sonra öğrenci tüm çalışmalarını başarılı bir şekilde bitirir. Ancak uzun bir süre geçmesine rağmen öğrenci herhangi bir dava almamıştır. Bundan dolayı avukat Protagoras yaptıkları anlaşmayı öne sürerek eski öğrencisine dava açar. Genç avukat bu ilk davasında kendini savunmayı üstlenir.

Onların mahkemeye sundukları argümanları şu şekildedir:

Öğrenci "eğer davayı kazanırsam anlaşmanın tanımından dolayı herhangi ücret ödemek zorunda değilim. Eğer davayı kaybedersem henüz ilk davamı kazanmamış olacağım. Protagoras'la yaptığım anlaşmaya göre ilk davayı kazandıktan sonra ödeme yapmalıyım böylece davayı kaybetsem de kazansam da ücret ödemek zorunda değilim" der. Protagoras öğrencisi için; "eğer davayı kaybederse hukuki tanımdan dolayı bana ödeme yapmak zorundadır. Her şeyden önce dava bununla ilgilidir. Eğer kazanırsa ilk davasını kazanmış olacak ve yaptığımız anlaşmadan dolayı bana ödeme yapmalıdır. İki durumda da bana ödeme yapmak zorundadır" der. [147]

Genç avukat bu ilk davasını ya kazanacak yada kaybedecektir. Kazanması halinde ücreti ödemeyecekse ödeyecek, kaybetmesi halinde ise ödeyecekse ödemeyecektir. Bu bir paradokstur.

### 2.2.2.3.5. Epimenides Paradoksu

Semantik paradoksların en önemlisi aynı zamanda en eskisi olan Epimenides Paradoksu (MÖ 4. yüzyılda) Miletli olduğu bilinen filozof Eubulides tarafından oldukça açık olarak yazılıp formüle edilen mantıksal bulmacadır.

[147] Raymond M. Smullyan, *What is The Name Of This Book,* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1978, s. 213.

Antik Yunan’da 2.500 yıl önce yaşamış Epimenides, Girit Adası sakinlerindendir. Kendine göndermeli ifadenin en eski formunu sözlü şekilde ortaya koymuştur. Epimenides bu ifadeyi paradoks olarak düşünmede şüpheli olsa da; “Bir adam yalan söylüyorum diyorsa, doğruyu mu söylüyordur, yoksa yanlış mı?” sorusunu soran Miletli Eubulides bu deyimiyle bir paradoks ortaya koymuştur. Şunu belirtmek gerekir ki, Antik Çağda paradoks olarak görülmeyen Epimenides Paradoksu orijinali “The Cretans, always liars, evil beasts, idle bellies!” ifadesi olup yeni ahitten alıntılanan bir önermedir.[148]

Giritli filozof Epimenides’in ortaya koyduğu Yalancı Paradoksu, Epimenides Paradoksu veya Giritli Paradoksu olarak da anılan paradoks; “Tüm Giritliler yalancıdır” önermesidir.

Epimenides’e atfedilen bu ifade mantıksal olarak kendi içerisinde çelişkili bir durum ortaya çıkarmaktadır. Aslında ‘ben yalancıyım’ diyen birisinin yalan söylemesi durumu geçici olarak düşünülürse bir yalancının bazen doğruyu söylediği gerçektir. Bu durumda bazen doğruyu söylemesi bu cümleyi her zaman çelişkili yapamayacaktır. Ancak bu önerme yalancıların daima yalan söylediklerini ve yalancı olmayanların her zaman doğruyu söylediklerini iddia etmemiz şartıyla çelişkilidir.

Bu Paradoksal önerme şu şekilde açıklanabilir:

Birinci durumda, eğer “tüm Giritliler yalancıdır” önermesi doğru kabul edilirse, kendisi de Giritli olan Epimenides'in yalancı olması gerekmektedir.

Eğer Epimenides yalancıysa, bütün söyledikleriyle birlikte, "tüm Giritliler yalancıdır" önermesinin de yanlış olması gerekmektedir. Doğru söylediğine inanılırsa buradan yalan söylediği sonucu çıkmaktadır. Bu düşünceye göre, bu önermenin aynı zamanda hem doğru hem yanlış olduğu gibi bir çelişki ortaya çıkmaktadır. İkinci durumda, Eğer “tüm Giritliler yalancıdır” önermesi yanlış kabul edilirse kendisi de Giritli olan Epimenides'in doğru söylüyor olması gerekmektedir.

---

[148] A. Anastasios Tsonis, *Rules and Randomness in the Realm of the Infinite*, Imperial College Press, London 2008, s. 8.

Bu durumda, “tüm Giritliler yalancıdır” önermesinin doğru olması gerekmektedir. Böylece yine çelişkili bir sonuç ortaya çıkmaktadır.

Üçüncü bir durum olarak, üçüncünün imkansızlığı ilkesine göre, bir önerme hem doğru hem de yanlış olamaz.

İkinci durumu ele aldığımızda “tüm Giritliler yalancıdır” önermesinin çelişkili olmasında bu önermenin tersinin ele alınış biçimi vardır. “ Tüm Giritliler yalancıdır” önermesinin tersi “tüm Giritliler doğru söyler” değildir. Bu önermenin tersi “en az bir Giritli vardır ki, doğru söyler” şeklinde olmalıdır. Bu şekilde düşünüldüğünde, “tüm Giritliler yalancıdır” önermesi yanlışsa, “en az bir Giritli doğru söyler” önermesi doğrudur. Bu kişilerden birinin Epimenides olması mümkün olduğundan bu önermenin ortaya koyduğu çelişki de ortadan kalkmış olur.

Bu paradokstaki gibi tümü, kimi ve değildir şeklindeki mantıksal sabitler içeren ifadelerin en yaygın kullanımı, sezgisel olarak açıktır.

Örneğin; “Herkes keldir” ifadesini ele alalım. Bu önerme simgesel olarak ($\forall$x B(x), bütün x’ler için x keldir) biçimindedir.

Bu önermenin olumsuzlanması, “hiç kimse kel değildir” önermesi değil “kimileri kel değildir” ya da “herkesin kel olduğu söylenemez” şeklindedir. Bu önerme de simgesel olarak şu şekildedir: ($\exists$ x $\neg$B(x), kel olmayan bir x vardır) [149]

### 2.2.2.3.6. Yalancı Paradoksu

Yalancı paradoksunun temelinde Epimenides paradoksu vardır. Bununla birlikte anlamsal çelişkilere sebep olan içinde yanlış, doğru sözcüklerinin geçtiği türetilmiş birçok benzeri paradoks vardır.

[149] John Allen Paulos, *Düşünüyorum Öyleyse Gülüyorum*, çev., Türkan Yöney, Sarmal Yayınevi, İstanbul 1998, s. 35.

Ancak en önemlisi "yalan söylüyorum" önermesidir. Yalancı paradoksunun bazı farklı biçimleri "bu cümle yanlıştır", "bu önerme doğru değildir" gibi ifadelerdir. Bu ifadelerin en açık paradoksal şekli ise "bu cümle yanlıştır" önermesidir. Bu paradoksun çeşitlemeleri arasındaki "bu cümle doğru değildir" (güçlendirilmiş yalancı) ifadesi, yanlış sözcüğü yerine doğru değildir, ifadesi varsayılarak oluşmuştur.

Orta Çağda Fransız filozof Jean Buridan yalancı paradoksuna benzer şekilde bir sofizma ortaya koymuştur: 'bu cümleye inanmazsın.' Eğer bu cümleye inanılmazsa doğrudur ve inanılması gerekir. Böylece bu önermeye karşı mantıklı bir tavır sergilenemeyecektir. Ama başkalarının gözlemleri cümleye inanıldığını gösterirse mantıklı olarak bu cümlenin yanlış olduğuna hükmedilebilir. Eğer cümleye inanılmadığını gösterirse, mantıksal olarak cümlenin doğru olduğuna hükmedilebilir. [150]

Yalan ve doğru kavramlarının içinde bulunduğu çelişkili bir hikayenin ifadesi Bertrand Russell ve arkadaşıyla ilgilidir. Meslektaşı ve arkadaşı Moore'un dürüstlüğüne hayran olan Bertrand Russell, Moore'un asla yalan söylemediğini anlatır. Russell bir keresinde kurnazca sorar: "Moore, her zaman doğruyu mu söylersin?" Moore'un yanıtı "hayır" dır. Moore'un diğer tüm durumlarda doğru söylediğini varsayarsak bu yanıt yalan olmalıdır.[151]

Hayatı boyunca sadece bir kez yalan söylediği varsayılan bir kişiye her zaman doğru söyleyip söylemediğine dair soru sorulsa, o da hayır dese bu onun hiçbir zaman doğruyu söylemediği anlamına gelmez. Her zaman ifadesinin olumsuz durumunun bazen ifadesi olmasından kaynaklanır.

[150] Roy Sorensen, "Paradoxes Of Rationality", *in The Oxford Handbook Of Rationality*, Ed., Alfred R. Mele, Piers Rawling, Oxford University Press, New York 2004, s. 269.
[151] Peter Cave, *This Sentence is False*, The Continuum Books Group, London 2009, s. 3.

### 2.2.2.3.7. Plato Sokrates Paradoksu

Yalancı paradokslarını düşündüğümüzde, tüm önermeler kendilerini işaret ederlerse genelde problem oluştururlar.

Ancak bütün çelişkilere neden olan sadece kendine gönderim değildir. Antik Yunanlılar kendine referansın yok edilmesinin çelişkileri ortadan kaldırmak için yeterli bir çözüm olmadığını düşünmüşlerdir. Bununla ilgili de birbirinden farklı önerme cümlelerinde de kısır döngü olabilecek örnekler ortaya koymuşlardır. Bu örneklerden birisi de Plato Sokrates Paradoksu'dur. Yalancı Paradoksu'nun bu versiyonu Orta Çağ mantıkçıları tarafından çok önemli görülüp çok tartışılmıştır çünkü "doğru değerli" paradokslarda karışıklığın kaynağının kendine gönderimden daha derin olduğunu kanıtlamıştır. Birbirlerine işaret eden iki cümleden oluşan yalancı döngüsü Plato Sokrates Paradoksu şu şekilde ifade edilebilir.

Plato: "Sokrates'in söylediği ifade yanlıştır."

Sokrates: "Plato doğru söylemiştir." [152]

Plato Sokrates Paradoksu şu şekilde basitleştirilebilir.

A: "B cümlesi yanlıştır."

B: "A cümlesi doğrudur."

Hangi ifadeye doğru değerini verirsek çelişki ortaya çıkacaktır. Burada hiçbir cümle kendi hakkında konuşmaz. Ama birlikte alındığında Yalancı Paradoksu gibidir.

Eğer A doğru ise B yanlıştır; eğer B yanlışsa A da yanlış olmalıdır.

Fakat A yanlışsa B doğrudur; eğer B doğruysa A doğru olmalıdır.

Böyle bir döngüden sonra başladığımız yere döneriz ve bu süreç devam eder. Hiçbir cümle kendinden bahsetmese de birlikte alındığında sürekli birbirinin doğruluk değerini değiştirir. Böylece hangi cümle doğru veya yanlış olduğunu söyleyemeyiz.

---

[152] Martin Gardner, *Gotcha Paradoxes to Puzzle and Delight*, W. H. Freeman Company, Twentieth Printing, New York 1999, s. 12.

Yalancı Paradoksu'nun Cicero, St. Paul, Gellius, Lucian, St. Hieronymus ve daha birçok yazar tarafından ifade edilen farklı formları mevcuttur. Theophrastus'un, bu konuda üç kitap yazdığı, Chrysippus'un çalışmalarının en az altı başlığının bu konuda olduğu bilinmektedir. Bu paradoksun tek bir formu yoktur. Aristoteles "yalancı" yı, dilden bağımsız ikinci çeşit safsata olarak sınıflandırmaktadır.[153]

### 2.2.2.4. Semantik ve Sınıf Kavramı

Semantik Paradoksların bazılarında, tüm kavramı belirgindir. Belirli nesne sınıflarının bütün elemanları hakkındaki önermelerle ilgilidirler. Bazı sınıfların bütün üyeleri hakkında bir önerme yapıldığında ve sınıfın bir üyesi olarak önerme kendini ima ediyorsa kısır döngüden kaçınmak zordur.

Bertrand Russell, bu zorluğun üstesinden gelebilmek için "mantıksal tipler teorisi" adını verdiği bir düşünce geliştirmiştir. Mantıksal elemanların; önermeler, kurallar, nesneler vb. bir tipin bütünü olmadığını birbirinden radikal olarak farklı tipler hiyerarşisine bölündüğünü savunmuştur. Dahası belirli nesneler sınıfının tümüne dahil olan neyse, nesnelerin kendisiyle aynı tipte değildir. [154]

Örnek olarak "Giritliler tarafından yapılan tüm önermeler yanlıştır" ifadesinde "önermeler" kelimesi nesneler (şeyler) hakkındaki önermeleri ima eder. Önermenin kendisi nesneler hakkındaki bir önerme değildir, nesneler hakkındaki önermelerin önermesidir. Bu yüzden farklı tipteki bir önermedir. Ve o zaman kendini ima edemeyecektir. Böylece de bir paradoksa neden olmayacaktır. Aynı şekilde "tüm kuralların istisnaları vardır" kuralında "kurallar" nesneler hakkındaki kuralları ima eder, kuralın kendisi nesneler hakkındaki kural değildir, nesneler hakkındaki kuralların bir kuralıdır. [155]

---

[153] I. M. Bocheński, *Ancient Formal Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1951, s. 17.
[154] Eugene P. Northrop, *Riddles In Mathmematics*, D. Van Nostrad Company, Princeton, New Jersey 1944, s. 201.
[155] Northrop, *a.e.*, s. 201.

### 2.2.2.5. Kısır Döngü ve Düzeyler Hiyerarşisi

Douglas Hofstadter'in "garip döngü" olarak tanımladığı, sonsuz döngü (kısır döngü) olarak adlandırılan kavram, sürekli devam ederek birbirini takip eden adımların aynı noktaya ulaşmasıdır. Bu kavramın en bilinen örneklerden birisi, tavuk ve yumurta hakkındaki en eski sorudur. Farklı bir örnek olarak, birbirine bakan aynalar, yansımaların sonsuz döngüsü olarak görülebilirler.

Bertrand Russell Yalancı Paradoksu gibi paradokslardan kaçınmak için bir yol olarak kısır döngü prensibini uygulamış ve böylece düzeyler hiyerarşisi kavramını ortaya koymuştur. Düzeyler hiyerarşisi, cümlelerin belirli bir sıralamaya koyulması düşüncesidir.

Düzey 1 de "doğru" ancak düzey 0'ın cümleleri için geçerli olabilir.

Ama aynı düzeyin, düzey 1' in cümleleri için geçerli olamaz. Birbirini izleyen her bir düzeyde yalnızca bir alt düzeyin cümleleri için geçerli olabilen ayrı bir doğruluk yüklemi vardır. Bu hiyerarşiyi bir örnekle uygulayalım.

' "Paris Fransa'nın başkentidir" doğru 1' dir.

' "Paris Fransa'nın başkentidir' doğru 1' dir" doğru 2'dir.

Böyle devam ederek hiçbir cümle kendine gönderme yapmak için kullanılamaz. Bu yaklaşıma göre doğru ve yanlış yüklemlerimiz tek anlamlı olmaları yanı sıra sonsuz çoklukta ayrı yüklem sayılırlar.[156]

---

[156] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı,* çev., Ahmet Fethi, 1.Baskı Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 90.

### 2.2.2.6. Doğruluk Değeri ve Semantik

Doğruluk değerine sahip paradokslar, içinde sadece doğru ve yanlış kavramlarını barındıran iki değerli paradokslardır. Semantik paradokslar doğru ve yanlış değerini aynı anda kapsayan doğruluk değerli paradokslardır.

Semantik paradoksları cümlesel ifade etmenin yanı sıra küme veya sınıf kavramlarının tanımlanma biçimiyle de gösterebiliriz. Böylece anlamsal bir paradoksu sınıf kavramıyla ilişkilendirebiliriz.

Doğruluk değeriyle tanımlanan semantik paradokslarla, küme teorisi veya sınıf paradokslarının arasındaki bağ her doğru değerli önermenin kümeleri tanımlama biçimiyle sınıfsal önermeler olarak yeniden yazılabilmesidir.

Mesela “tüm elmalar kırmızıdır” demek “tüm elmalar kümesinin tüm kırmızı nesnelerin alt kümesi” olması demektir. Bu da doğru değerli dilde, semantik bir cümle olarak; “Eğer x’ in bir elma olduğu doğruysa, öyleyse x’ in kırmızı olduğu doğrudur” şeklinde yeniden söylenebilir.

Yalancı paradoksu ifadesini düşünelim.

“Bu önerme yanlıştır” şöyle bir ifadeye dönüştürülebilir:

“Bu ifade tüm yanlış ifadeler kümesinin bir üyesidir” [157]

Semantik paradoksların Alfred Tarski tarafından geliştirilen üst dil yöntemiyle çözülmesiyle doğru ve yanlış sözcükleri alt dilde ortaya çıkamayacaktır. Bu dilde doğruluk ve yanlışlık hakkında konuşmak için merdivenin bir üst basamağındaki üst dili kullanmak zorunlu olacaktır

Üst dil, alt dilin tümünü kapsamaktadır ve alt dilin doğruluk değerinden bahsettiği için de daha zengin bir dildir. Üst dil kavramında merdivenin en alt basamağında konu veya nesneler hakkında önermeler vardır.

[157] Martin Gardner, *Gotcha Paradoxes to Puzzle and Delight*, W. H. Freeman Company, Twentieth Printing, New York 1999, s. 20.

Alt ve üst dil farkını gösterebilmek için iki basamaklı bir örnek belirtelim.

A: B cümlesi yanlıştır.

B: Hayvanlar cansızdır.

Bu örnekte bir paradoks yoktur, çünkü A cümlesinin üst dilde yazıldığı varsayılır ve A cümlesi, B cümlesinin doğruluk değeri hakkındadır ki, B cümlesi alt dilde yazılmıştır. A ifadesiyle gösterilen ikinci basamaktaki üst dilin doğruluk değeri hakkında konuşulabilmesi için de, o zaman daha yüksek bir üst dile gidilmelidir. Bir üst basamaktaki dilin doğruluk değeri için de daha üst basamaktaki dile gidilmelidir.

Böylece devam ederek, bu sonsuz merdivenin her bir basamağı aşağıdaki basamağa üst dildir ve yukarıdaki basamak için bir alt dildir.

Merdivenin ilk dört basamağındaki ifadelerden birisini örneklendirelim.

1. A: Dik açı 90 derecedir.
2. B: A cümlesi doğrudur
3. C: B cümlesi doğrudur.
4. D: C cümlesi doğrudur.

Bu dört basamaklı örnekte dördüncü basamaktaki ifadenin doğruluk ve yanlışlığı hakkında konuşabilmek için merdivenin üçüncü basamağına gidilmeli, yani bu şekilde aşağıdaki tüm dillere işaret eden daha yüksek bir üst dilde konuşulmalıdır.

# 3. BÖLÜM

# ANTİK ÇAĞDAN GÜNÜMÜZE SONSUZLUK PARADOKSLARI

## 3.1. SONSUZLUK PROBLEMİ

Bilim dünyasında ve felsefede zaman ve uzamla ilgili iki farklı iddia, birbiriyle çelişen iki çatışkı vardır. İlki, dünyanın bir başlangıcı olduğu, karşıtı ise dünyanın başlangıcının da uzamın da sınırları olmaması ve ikinci çatışkı, sonsuzluk problemi ve süreklilik sorunu arasındaki ilişki ile ilgilidir.

Bertrand Russell, dünyanın fiziksel gerçekliğini düşünüp sonsuzluğu ve sürekliliği imkansız görenlere karşı eleştirel gözle bakmıştır. Sonsuzluğun ve sürekliliğin deneysel olarak açıklanamayacağı sonucuna ulaşanlara karşın tam tersi düşünceyle "yine de sonsuzluğu ve sürekliliği kabul eden açıklama, bilimsel görüş açısından herhangi başka açıklamaya göre kıyaslanamayacak kadar kolay ve doğal olarak kalır" diyerek, Georg Cantor'un sonlu ve sonsuz kümelerde ortaya koyduğu ispatları göz önünde bulundurup "Georg Cantor sözde çelişkilerin kuruntu olduğunu gösterdikten sonra, artık dünyanın sonlucu (finitist) açıklamasıyla uğraşmak için bir sebep yoktur" demiştir.[158]

Sonsuzluk ve süreklilik kavramlarının birbirine bağıntılı olmasının sebeplerinden biri sürekli serilerle ilgili olmasındandır. Sürekli seriler sonsuz sayıda terim içermektedirler. Dolayısıyla Russell, sonsuz kavramındaki çelişkinin kaldırılmasıyla, süreklilikteki çelişkilerin kaldırılabilmesi ve sürekliliğin bilimin kabul ettiği biçimiyle mantıksal olabilirliğinin de mümkün olduğunu düşünmüştür. [159]

---

[158] Bertrand Russell, *Dış Dünya Üzerine Bilgimiz,* çev., Vehbi Hacıkadiroğlu, İkinci basım, Kabalcı Yayınevi, İstanbul 1996, s. 141.
[159] Russell, *a.e.*, s. 141.

## 3.2. SONSUZ KELİMESİ KÖKENİ

Grekçe "apeiron" kelimesinin orijinal anlamı, sonsuzdan ziyade sınırsız olup, evrenin nihai kaynağını tanımlamak için Anaximander tarafından kullanılmıştır. Aristoteles, Pisagorcu bakış açısını özetleyerek, peras (limit) ve apeiron (sınırsız) kelimelerini birbirine zıt olarak ortaya koymuştur. Peras, teklik (sayısal), hareketsizlik, birlik, iyilik anlamlarında kullanılmış ve apeiron; çiftlik, çoğulluk, hareket ve kötülük kavramlarına eşit sayılmıştır. [160] "Sonsuz" (infinity) sözcüğünün Yunanca'daki karşılığı "apeiron"; kelime anlamıyla sınırsız anlamına gelmekte, aynı zamanda sonsuz, kesin olmayan, tanımsız anlamlarını da karşılamaktadır. Apeiron negatif ve hatta yermeli bir sözcüktür. [161]

## 3.3. SONSUZLUK KAVRAMI

Sonsuzluk denildiğinde ilk akla gelen, sonsuzluk sembolü olan "∞" şeklidir. Bu sembolün teknik anlamı, "kelebek eğrisi" veya "sekiz eğrisi" olarak adlandırılmaktadır. Sonsuzluk ve ebediliği simgeleyen bu sembol, ilk kez 1655 yılında John Wallis tarafından ortaya atılmış, *Arithmetica İnfinitorum* eserinde yer almıştır. Fakat Jacob Bernolli'nin ölümünün ardından 1713'te yeğeni Nikolaus Bernoulli tarafından yayınlanan, *Ars Conjectandi* eserine kadar baskıda görülmemiştir. Sembolü ℵ şeklinde gösterilen İbrani alfabesinin ilk harfi olan Alef (aleph), sonsuzluğun modern matematik teorisini kuran Georg Cantor tarafından sonsuzluğun çeşitli boyutlarını göstermek için ilk defa kullanılmıştır. [162]

---

[160] G. B. Kerferd (1967), "apeiron", *Encyclopedia Of Philosophy*, Ed., Donald M. Borchert, 2.b., The Thomson Corporation, USA 2006, C. I, s. 225.

[161] Rudy Rucker, *Infinity and The Mind*, Princeton University Press, New Age International Ltd. Publishers, Delhi 2007, s. 2.

[162] David Darling, *The Universal Book Of Mathematics*, Wiley &Sons Inc., New Jersey 2004, s. 9.

Sonsuz sembolünün şeklinde, sonu olmayan bitmeyen devamlı bir hareket gerçeği vardır. Sonsuz kelimesi bütünüyle düzensiz, sonsuz karmaşık, sınırlı bir kararlılığa tabi olmayan anlamlarında kullanılmaktadır.

Sonsuzluk için potansiyel sonsuzluk ve gerçek sonsuzluk kavramlarını ortaya koyan Aristoteles, "hiçbir hareket sonsuz değildir, tersine her hareketin bir sonu vardır" [163] demiştir. Ancak "sonsuz olmak bir yokluk, mükemmellik değil ama bir sınırın yokluğudur" tanımıyla Aristoteles, "apeiron" gerçekliğine işaret eden dünyanın birçok yönlerinin olduğunu kabul etmiştir. [164]

Böylece Aristoteles sonsuzluk kavramının çelişkili yapısını; "sonsuz, ya doğası bakımından kat edilemez olduğu için katedilmesi imkansız olandır veya katedilmesi mümkün olan ancak sonu olmayandır veya katedilmesi hemen hemen imkansız olandır" şeklinde tanımlamıştır. [165]

## 3.4. SONLU VE SONSUZ KAVRAMI BAĞINTISI

Sonlu ve sonsuz, birbirine zıt ancak tanımlanması birbirine olan bağımıyla yapılabilen evrendeki zıt olguları tanımlamamızı sağlayan kavramlardır. Evrenin sonsuzluğunu kabul ettiğimizde, bu sonsuzluk sayısız sonlularda ortaya çıkmaktadır. O yüzden doğal olarak tanımlama yapılırken sonlu bir biçimde düşünüldüğünden sonsuzu tanımlamak için sonlu kavramı kullanılmıştır. Ancak bu tanımlama sonsuzun,'sonlu olan çok büyük şey' demek olduğunu göstermez. Örneğin yeryüzündeki var olan tüm ağaçların tüm yapraklarının sayısı, çok büyük bir sayıyla ifade edilse bile yine de sonludur.

---

[163] Aristoteles, *Metafizik*, çev., Ahmet Aslan, Sosyal Yayınları, 2. Basım, İstanbul 1996, s. 171.
[164] Rudy Rucker, *Infinity and The Mind*, Princeton University Press, New Age International Ltd. Publishers, Delhi 2007, s. 3.
[165] Aristoteles, *a.e.*, s. 470.

Sonlu kavramı sınırlı, sonsuz kavramı sınırsız kavramlarına benzerdir. Aristoteles sınır kavramını “her şeyin en son noktası, kendisinden ötede bir şeyin hiçbir parçasını bulmanın mümkün olmadığı, kendisinden beride onun her parçasının bulunduğu ilk nokta veya büyüklüğü olan bir şeyin formu” ifadeleriyle tanımlamıştır. [166]

## 3.5. ANTİK ÇAĞDAN MODERN BİLİME SONSUZLUK

Antik Çağın en büyük filozoflarından Aristoteles, sonsuzluk kavramının olasılıkla, fiili olanı arasında bir ayrım yapmış ve yalnızca olası sonsuzluğu kabul etmiştir. Milattan Önce 3. yüzyılda, Arşimet çok büyük sayıları tasarlamak için bir sistem ortaya koymuştur. Arşimet o zaman bilinen evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısını kendi araştırmalarına göre hesaplayıp ortaya koyduğu zaman sonsuzla, büyük sonlu arasındaki ayrımı göstermek istemiştir.

Arşimet çok büyük sayıları yazabilmek için bir yöntem geliştirdiği bu yüzyılda yaşayanlar için gökteki yıldızların, denizdeki balıkların sayısı gibi büyük sayılar sayılamazdı. *The Psammites (Kumtaşları)* ya da *Sand Reckoner (Kum Sayıcı)* adlı bilimsel kitapçığında Arşimet sonsuzluk kavramını şöyle açıklamıştır:

> “Bazıları, kum tanelerinin sayısının, sonsuz çoklukta olduğunu düşünüyorlar. Burada sadece yalnızca Syracuse ve Sicilya’nın öteki kısımlarındaki var olan değil, dünyanın üzerinde yaşansın ya da yaşanmasın tüm bölgelerinde bulunan tüm kum tanelerini kastediyorum. Yine, sonsuz sayıları dikkate almadan, yeryüzündeki tüm kum tanelerinin sayısını belirleyecek kadar büyük bir sayı olmadığını düşünenler vardır. Bu görüşte olanların, dünyanın bütün çukurlarını, denizlerini dolduran, en yüksek dağların tepelerine kadar yükselen ve yeryüzünün tüm kütlesindeki kum tanelerin sayısını düşünerek bunu karşılayacak bir sayının olmayacağını düşündükleri açıktır. Ama, size şimdi söyleyeceğim ve adlandıracağım sayının, yukarıda belirtildiği gibi yalnız dünyanın kütlesini karşılayan miktarda değil, bütün evrenin kütlesine bile eşit olabileceğini göstermeye çalışacağım.” [167]

[166] Aristoteles, *a.e.*, s. 274.
[167] George Gamow, *One Two Three..Infinity*, Dover Publications Inc., New York 1988, s. 5.

Evrenin, nesnelerin sonsuzluğunu kavramaya çalışan felsefeci ve bilim adamları birbirinden farklı iddialar ortaya atmışlardır. İtalyan gökbilimci, filozof Giordino Bruno, Kopernik'in sonsuz evren fikrini aynı zamanda da evrenin bir olduğu tezini savunmuştur.

Bruno'ya göre evren sonsuzdur ve onun merkezinde çevresinde ya da arada bulunması gereken herhangi bir cisim yoktur. Onu sınırlamak için hiçbir neden olmadığından uzayı sonsuzluk olarak adlandırmıştır. Ona göre dünya evrenin mutlak merkezi değildir ve insanı nesnelerin sonsuz çokluğundan uzaklaştıracak ya da mahrum bırakacak hiçbir son, sınır ya da duvar yoktur.[168]

Çağdaş astronominin kurucusu sayılan, fizikçi ve matematikçi Kepler ise, Bruno'nun sonsuz evren fikrini reddetmiştir. Kepler, sonsuzluk kavramının birtakım paradoksal sonuçları olduğunu söylemiştir. Aklındaki çelişkili soruları şöyle açıklamıştır:

> "Sonsuz bir uzayda her yer sınırsız olacağından merkezi bulmak nasıl mümkün olacak? Sonsuzluk içindeki her nokta eşit bir biçimde yani sonsuz bir biçimde birbirinden sonsuz uzaklıkta duran bitiş noktalarını ayırmaktadır. Tek bir noktanın hem merkez olup hem de merkez olamaması şeklindeki paradoksal sonuç ve diğer pek çok çelişkili şey içeriden sınırlı olan yıldızlarla dolu gökyüzünü dışarıdan da sınırlayan herkes tarafından kaçınılması gereken bir duruştur." [169]

Batı düşüncesinin önemli düşünürlerinden modern felsefenin kendisiyle başladığı kabul edilen Fransız bilim adamı filozof ve matematikçi Rene Descartes, kendine ait bir felsefe sistemi geliştirmiş, düşüncenin var olmasından başka her şeyden şüphe duyulması gerektiğini savunmuştur. Bu fikirlerden hareketle evreni tanımlayıp açıklamaya çalışmıştır.

Descartes sonsuzluk kelimesinin Tanrı dışında evrende yer alan hiçbir şey için kullanılamayacağını savunmuştur. Sonsuz kelimesi yerine belirsiz kavramının kullanılması gerektiğini düşünmüştür. Bu fikirleri 1644 yılında yayımladığı *Principia Philosophiae (Felsefenin İlkeleri)* kitabında yer almıştır.

---

[168] Paolo Rossi, *Modern Bilimin Doğuşu*, çev., Neşenur Domaniç, 1. b., Literatür Yayıncılık, İstanbul 2009, s. 130.

[169] Rossi, *a.e.*, s. 132.

Descartes'a göre sonsuza ilişkin anlaşmazlıkların içine girmek gerekli değildir fakat sadece yıldızların sayısı, maddenin parçalarının bölünebilirliği, dünyanın genişlemesi gibi tanımsız olan ve kendinde sınır bulunulmayacak olanı göz önünde bulundurmak gereklidir. Sonlu olan insanın, sonsuzu belirlemesi ve böylece bir limiti varmış gibi onu anlamaya çalışması saçmadır. Ona göre, sonsuz bir çizginin yarısının da sonsuz mu olduğu, sonsuz bir sayının çift mi tek mi olduğu sorularına cevap arayanlara yanıt vermek gibi bir kaygı gereksizdir ve kendisinde sınır bulunamayan bütün şeylerin sonsuz olduğu değil, sadece belirsiz oldukları iddia edilebilir.[170]

20 yy. bilim adamlarından Fransız matematikçi Henri Poincare Descartes'in fikriyle paralel olarak "kendimiz sonlu olduğumuzdan ancak sonlu nesneler üzerinde işleyebiliriz" demiştir.[171] Ayrıca sonsuzun mantığına, Cantor'dan beri matematik ve mantıkta bilim adamlarının sonsuzun kullanılması hakkında iki zıt fikre eğilim duyduklarını belirtmiştir. Bunların ilki; sonsuzun sonludan türediği ve mümkün sayısız sonlu nesne olduğundan dolayı sonsuzun var olduğu fikri, diğeri de sonsuzun sonludan önce var olduğu, sonsuz içinden bir küçük parça kopararak sonlunun elde edildiği düşüncesidir. [172]

## 3.6. SONSUZLUK VE PARADOKSLAR

Matematik ve mantıkta, temelinde sonsuzluk kavramı olan birçok problem ve paradoks vardır. Sonsuz hakkında sezgisel olarak düşündüğümüzde veya hep bir sonraki anın varlığını hissettiğimizde her şeyin bir sonu olduğunu düşünmek çelişkili görünmektedir.

---

170 Rene Descartes, *Principles Of Philosophy*, Translated By John Veitch Edition, Project Gutenberg's The Principles Of Philosophy, USA 2003, s. 20.

171 Henri Poincare, *Son Düşünceler*, çev., Hamdi Ragıp Atademir, Süleyman Ölçen, 2.b., Milli Eğitim Basımevi, İstanbul 1986, s. 107.

172 Poincare, *a.e.*, s. 107.

En önemli sonsuzluk paradokslarından biri Russell Paradoksu'nun temeli olan ve küme kuramının modern temellerini kuran Georg Cantor'un ortaya koyduğu Cantor Paradoksu'dur ve sonsuz sınıflar ile ilgilidir. Galileo Paradoksu, sonsuz sayılar, sonsuz noktalar ve sonsuz parça ve bütün kavramları ile ilintilidir. Tarihteki en eski paradokslardan olan Zeno'nun Çıkarımlarından en önemlileri, sonsuz bütünlük ve bölünebilirlikle ilintilidir.

Öncelikle sonsuzlukla ilgili paradokslara neden olan bu; sonlu ve sonsuz sayı, sonlu ve sonsuz küme, sonlu ve sonsuz sınıf kavramları inceleyelim.

### 3.6.1. Sonsuzluğun Bilimsel Kuramı

#### 3.6.1.1. Sonsuz ve Sıfır

Sonsuzlukla ilgili kavramlardan biri de sıfır ( 0 ) kavramıdır. Sıfır ve sonsuz derecede küçük veya sonsuz derecede büyük kavramları sonsuzluğun farklı boyuttaki görüntüleridir. Sıfır ve sonsuz arasındaki bu bağıntının sembolik olarak gösterimi de $1/0 = \infty$ şeklindedir.

Mantıksal olarak baktığımızda, Epimenides'in Yalancı Paradoksu'nda karşılaştığımız oto referans kavramı sıfır mesafeye işaret etmektedir. Burada söylenen cümle o anda söylenmiştir. Bunun gibi Bertrand Russell'ın 'kendini içermeyen tüm kümelerin kümesi', yüksek dereceden sonsuzdur ve ayrıca Russell'ın 'kendini tıraş edemeyenleri tıraş eden berber' tanımıyla verilen paradoksunda berber kendisinden sıfır mesafe uzaklıktadır. [173]

[173] Helmut Moritz, *Science Mind and Universe,* Wichmann, Heidelberg 1995, s. 37.

### 3.6.1.2. Sonsuz ve Nokta

Nokta kavramının paradoksal olmasının nedeni, dar veya geniş bir mesafede olmasına bakılmaksızın tüm noktaların birbirine eşit olduğu düşüncesindendir.

Georg Cantor, kısa bir çizgi üzerindeki noktaların sayısının, belirsiz uzunlukta bir çizgi veya düzlem veya daha yüksek boyutlu matematiksel uzayda olan nokta sayısının aynı olduğunu göstermiştir. Bu konuda Dedekind'e "görüyorum ama inanmıyorum" diye yazmıştır. [174]

Uzun ve kısa çizgiler eşit çoklukta noktaya sahiptir. Sonsuz kümelerin olağan dışı özelliklerine aşina olmayan için, bu cümle zihinde şüphe gölgesi bırakabilir. Ancak sonsuz kümelerin nitelikleri günlük yaşamda öğrendiklerimize benzer değildir. Aslında uzun veya kısa bir alt kesit eşit miktarda noktaya sahiptir. Bu, milyon ışık yılı uzunluktaki noktalar ile atom çekirdeğinin yarıçapındaki noktaların sayısının aynı çoklukta olması düşüncesine alışmak oldukça zordur. [175]

### 3.6.1.3. Sonlu ve Sonsuz Sayı

Sonsuz sayılar kuramını Georg Cantor bulmuş ve 1882'de yayımlanmıştır. Sayıların mantıksal tanımına, sonsuz sayıların sonlu sayılardan daha farklı özelliklere sahip olmaları nedeniyle bu sayıları karşılaştırarak ulaşılabilir.

Bertrand Russell'a göre sonsuz sayıların sonlu sayılardan ayrıldığı iki yön vardır. Birincisi, sonsuz sayılarda, sonlu sayılarda bulunmayan yansımalılık (reflexiveness) özelliğinin var olmasıdır. İkincisi, sonlu sayılarda, sonsuz sayılarda bulunmayan tümevarımsallık (inductiveness) olarak tanımladığı özelliğin varlığıdır.

---

[174] David Darling, *The Universal Book Of Mathematics*, Wiley & Sons Inc., New Jersey 2004, s. 54.
[175] N. Ya. Vilenkin, *In Search Of Infinity*, Translated by Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995, s. 63.

Bu iki özellikten yansımalılık özelliğinde bir sayı, 1 sayısı eklenmesiyle büyümezse onun yansımalı olduğu söylenebilir. Bundan da hemen, bir yansımalı sayıya, onu hiç büyütmeden herhangi bir sonlu sayının eklenebileceği çıkmaktadır. Bu özelliğinden ötürü, belli bir sonsuz nesneler topluluğuna, topluluğun sayısını azaltıp arttırmadan herhangi sonlu sayıda nesne eklenebilir ya da çıkarılabilir. Giderek sonsuz sayıda nesneler de, belli koşullar altında, sayıyı hiç değiştirmeden eklenip çıkarılabilirler. [176]

Sonsuz sayılardan ilkinin hemen bir öncesi yoktur; demek ki bir sayıdan ondan sonraki sayıya doğru art arda adımlarla bir sonlu sayıdan sonsuz sayıya ulaşılamaz ve adım adım kanıt yöntemi geçersiz kalır. Bu, sonsuz sayılarda varsa-yılan kendiyle çelişikliğin başka bir sebebidir. Sayıların en alışılan özelliklerinden pek çoğu ki gelenekler insanları bunlara mantıksal zorunlu diye bakmaya yöneltmiştir ancak adım adım yöntemiyle tanıtlanabilirler ve sonsuz sayılar için doğru kalmazlar. [177]

Bu sonlu ve sonsuz sayı arasındaki farklar ve kıyaslamaların ışığı altında sonsuz sayıyı, yansıma özelliğine sahip olan ve birbiri ardına sayıların eklenerek kendisine ulaşılamayan, bir sayı eklendiğinde de kendi niteliği değişmeyen sayı olarak tanımlanabilir.

Sonlu sayıyı da aynı düşünceyle, tümevarım özelliğiyle kendinden önceki sayının eklenmesiyle elde edilebilen ve tümevarımsal olarak bir sonraki sayının kendisinden farklı olduğu sayı olarak tanımlanabilir.

---

[176] Bertrand Russell, *Dış Dünya Üzerine Bilgimiz,* çev., Vehbi Hacıkadiroğlu, 2.b., Kabalcı Yayınevi, İstanbul 1996, s. 171.
[177] Russell, *a.e.*, s. 177.

### 3.6.1.4. Sonsuz Kümeler ve Sınıfların Sonsuzluğu

Sonsuzluk cebirde, geometride, felsefede, mantıkta yer alan ve çok çeşidi olan bir kavramdır. Sonsuz derecede küçük, sonsuz büyüklük veya genişlikte vb. kavramlar vardır. Böylece tek bir sonsuzluk değil, sonsuzluk hiyerarşisinden bahsedilebilir.

Sonsuz sınıfı, grup ve nesneler bütünü olarak ele alırsak sonsuz sınıf, üyeleri sınırlı bir zaman periyodunda, ne kadar uzun olsa da, sayılamayacak olandır. [178]

Alman mantıkçı ve matematikçi Georg Cantor: "Bir küme, kendisinin bir tek gibi düşünülmesine izin veren bir çokluktur" şeklinde bir tanım yapmıştır. [179]

Küme veya sınıf kavramı, birbirine benzer nesnelerin ve kavramların tek bir bütünde gruplandırılması ve benzer olmayan objelerin ayrılması göz önünde bulundurulduğunda, kümeler sınıflandırma sistematiğinin temeli olarak nerdeyse tüm bilimlerde önemli yere sahip olmaktadır.

Herhangi bir odadaki eşyaların kümesi, insan vücudundaki hücreler kümesi, Türkçe'deki kelimelerin kümesi, hayvan veya bitki türleri kümesi, doğal sayılar kümesi vb. akla gelebilecek bir çok küme oluşturulabilir.

Gerçek nesneler kümesi, sonlu çoklukta eleman içerir. Sonlu kümelerde az sayıda veya sayılamayacak çoklukta eleman olabilir. Mesela bir yıldaki aylar kümesi, az sayıda elemanı olan veya bir bölgedeki kum taneleri çok geniş sayıda elemanı olan kümelerdendir ve bu kümeleri listelemek neredeyse imkansızdır. Doğal sayılar kümesi veya bir düzlemdeki noktalar kümesi sınırlı değil, sonsuz kümelerdir.

---

[178] Eugene P. Northrop, *Riddles in Mathmematics,* D. Van Nostrad Company, Princeton, New Jersey 1944, s. 117.
[179] N. Ya. Vilenkin, *In Search Of Infinity*, çev., Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995, s. 34.

## 3.7. ZENO’NUN PARADOKSLARI

Aristoteles’in diyalektiğin kurucusu olarak adlandırdığı Elealı Zeno, doğru olduğuna inandığı felsefi problemlerin çözümü ve Hocası Parmenides’in “hareket yoktur” iddiasını eleştirenlere karşı savunma yapmak için sonsuz bölünebilirlik kavramının çelişkili yapısından yararlanarak mantıksal paradokslar geliştirmiştir. Zeno, en önemli üç çıkarımında, sonsuzluk çelişkisiyle bağıntılı olan, yokluk, varlık, süreklilik problemlerini ortaya koymuştur.

Hegel, Zeno için kelimenin modern anlamıyla diyalektiğin babası demiştir. Zeno’nun hareketin imkansızlığını ispat etmek için ortaya koyduğu bu mantıksal antinomiler bizim fiziksel dünyayı algıladığımız, duyusal sistemimizi kullandığımız reel dünyadaki günlük deneyimlerimizle çelişkilidir. Bu nedenle ünlü filozof kinik Diogenes, Zeno’nun iddialarını öğrendiğinde, basitçe ayağa kalkıp yürümüştür.[180]

### 3.7.1. Sonlu Bir Parçanın Bölünebilirliği

Aristoteles’e göre sürekli olan “doğası bakımından tek bir harekete sahip olan ve ondan başkasına sahip olmayan” şeydir. Ayrıca birlik ve bölünmezlik için “bir hareket bölünemediği taktirde birdir, bölünmezlik ise zaman bakımından bölünemezliktir” demiştir.[181]

Günlük deneyimlerimiz ekmeğin bir iki veya daha fazla bölünebileceği, on bin kırıntıya bölümlenebileceğidir. Maddelerin bölünebilme limiti var mıdır? gibi bir soruya deneyimler bir cevap sağlayamazlar. Bölünebilme limiti sorununda bazı filozoflar maddenin sonsuz bölüneceğini düşünmüştür. Anaxagoras, küçük nesnelerin en azı olmadığını daima daha küçük şeyler olduğunu idddia etmiştir. Pisagorcular, maddenin en küçük parçasının atom olduğunu, atomların bölünemeyeceğini savunmuştur. Leucippus ve Democritus bu fikri geliştirmiştir.[182]

---

[180] N. Ya. Vilenkin, *In Search Of Infinity*, çev., Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995, s. 7
[181] Aristoteles, *Metafizik*, çev., Ahmet Aslan, Sosyal Yayınları, 2. basım, İstanbul 1996, s. 246.
[182] Vilenkin, *a.e*, s. 6.

### 3.7.2. Dikotomi Paradoksu (Koşu Yolu-Sürekli İkiye Bölme)

Zeno'nun, en ünlü çıkarımı, sürekli şekilde iki parçaya bölme paradoksudur. Zeno'nun, bu çıkarımında, sınırlı bir zamanda sonsuz çoklukta hareketin olamayacağını ispatlamaya çalışması, ilerlemeli ve gerilemeli biçim olarak iki farklı şekilde açıklanabilir.

#### 3.7.2.1. Dikotomi Paradoksu İlerlemeli Biçimi

İlerlemeli biçiminde A ve B gibi iki nokta arasında A noktasından harekete başlayan bir koşucu, koşu yolunun sonuna ulaşamaz çünkü, önce yolun yarı noktasına ulaşmak, daha sonra diğer yarısının yarısına, daha sonra kalan kısmın yarısına ulaşmak ve böylece peş peşe, geriye kalan her uzaklığın yarı noktasına ulaşarak sonsuz bir aralıklar dizisini geçmek zorundadır. Bu sonsuz ikiye bölünebilirlik, sonsuza kadar devam edeceğinden yolun sonuna asla ulaşılamayacaktır.[183]

#### 3.7.2.2. Dikotomi Paradoksu Gerilemeli Biçim

Gerilemeli biçimde yolun sonuna varmadan önce yolun birinci yarısı geçilmelidir. İlk birinci yarıyı geçmeden önce, birinci yarının yarısı yani ilk çeyreği, ilk çeyreği geçmeden onun yarısı, yani yolun ilk sekizde biri geçilmelidir. Gerilemeli versiyondaki paradoksal durum ilerlemeli biçiminden daha farklı olarak koşucunun koşmaya başlamasının bile imkansız olmasını ortaya koymaktadır. Sonsuz noktayı geçebilmesi bir yana, başlama noktasının ötesine bile geçemeyecektir. Her durumda, onun için koşulacak bir ilk aralık var olmadığından dolayı hareket, ortaya çıkamayacaktır.[184]

---

[183] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1.b., Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 157.
[184] Clark, *a.e.*, s. 157.

### 3.7.2.3. Koşu Yolu Paradoksu Modern İspatı

Zeno'nun Koşu Yolu Paradoksu'nda, sonsuz aralıklardaki noktaların bir sona varmasının imkansız olması iddia edilmektedir. Zeno iki mesafe arasını geçebilmek yani, 0' dan 1' e ulaşmak için koşucunun bu belirli mesafede bir uçtan diğerine sonsuz sayıda nokta geçeceğini söylemiştir. Şunu da belirtmek gerekir ki, bu paradoks iyi bilinen bir matematiksel gerçeğe dayanmaktadır. Zeno bu paradoksta sonsuz serilerin sonlu bir toplama ulaşamayacağını görselleştirmek istemiştir. Ancak bazı sonsuz uzunluktaki sayılar serisinin sonlu bir toplama sahip olduğu artık kanıtlanmıştır. Bu ispatı şu şekilde gösterebiliriz. Diyelim ki koşucu 0 noktası ve 1 noktası arasında yol alsın.

0 ..……………………………..½ …..…...¾ ….⅞…..………................1

Özellikle paradoksun yapısı, şöyle bir seriyi ifade eder ki; yolun yarısı, yarısının yarısı……gibi sürekli bir mesafe, sembolik olarak 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ……şeklindedir. Acaba bu sonsuz toplam bir sonlu sayıya ulaşamaz mı? Acaba koşucu yolun sonuna ulaşamaz mı? 1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + …… eşitliğine ulaşabilir miyiz? Öncelikle bu sonsuz toplamı x gibi bir değişkene eşitleyelim. $x = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$

her iki tarafı 2 ile çarpalım. $2x = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$

$$2x = 1 + x$$

$$x = 1$$

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = 1$$ [185]

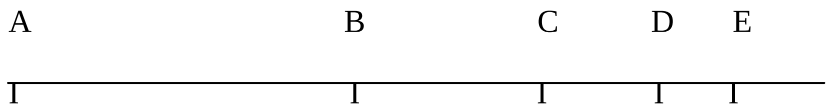
Böylece sonsuz noktaların toplamının sonlu bir sayı olabildiği ispatlanmış, Zeno'nun iddiası çürütülmüş olacaktır.

---

[185] Roy T. Cook (2005) , "Infinity In mathematics and Logic", *in Encyclopedia Of Philosophy*, Ed., Donald M. Borchert, 2.b., The Thomson Corporation, USA 2006, C. IV, s. 655.

### 3.7.3. Zeno'nun Aşil ve Kaplumbağa Paradoksu

Zeno'nun çıkarımlarından ikincisi Aşil ve Kaplumbağa Paradoksu, koşu yolunun ilerlemeli biçimine benzemektedir. Bu paradoks belki de en hızlı koşucu olan, savaşçı Aşil ve en yavaş koşucu olan kaplumbağa ile ilgilidir. Aşil kaplumbağadan çok daha hızlı koştuğu için kaplumbağaya yarışa önceden başlama şansı verilmiştir. Zeno'ya göre Aşil ne kadar hızlı olursa olsun ve de yarış ne kadar uzun sürerse sürsün kaplumbağayı asla yakalayamayacaktır. Arada ne kadar küçük bir boşluk olsa da Aşil'in onu geçmek için zamana ihtiyacı olacak ve bu zamanda kaplumbağa yeni bir boşluk oluşturacaktır. Paradoksu şekil olarak gösterelim.




Aşil, kaplumbağadan daha hızlı koşar, bu yüzden kaplumbağanın önde başlamasına izin verilir. Aşil A'da, kaplumbağa B'de başlar. Aşil kaplumbağanın başlangıç noktası B'ye geldiğinde kaplumbağa C'dedir. Aşil C'ye geldiğinde, kaplumbağa D'ye ulaşmıştır. Aşil'in yeni mesafeyi kapattığı her seferinde, kaplumbağa biraz daha ileri gitmiştir. Aşil'in geçmesi gereken sonsuz sayıda mesafe bulunduğuna göre, kaplumbağayı nasıl yakalayabilir? Zeno'ya göre, Aşil'in kaplumbağanın bir önceki konumuna ulaştığı her durumda, kaplumbağa ileriye doğru başka bir konuma ulaşmaktadır.[186]

Yarış ne kadar uzun sürerse sürsün, Aşil, kaplumbağayı geçmeden önce onun bulunduğu her noktayı tek tek geçmelidir. İşte bundan dolayı, Aşil'in kaplumbağayı yakalayabilmesi için, sonsuz sayıdaki noktanın tek tek her birinden geçmesi gerekecektir. Bu noktaların tek tek her birinden geçmek onun belli bir zamanını alırsa eğer, Aşil kaplumbağayı asla yakalayamaz. Demek ki, sonlu bir mesafeyi geçmek sonsuz bir zaman gerektirir göründüğü için, bildik hareket konsepsiyonunu kabul etmek asla söz konusu olamaz.[187]

---

[186] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. Baskı, Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 180.
[187] Clark, *a.e.,* s. 180.

### 3.7.4. Zeno’nun Ok Paradoksu

Zeno duyularımızla bir gerçeklik olarak algıladığımız hareket kavramının, aslında var olmadığını akıl yardımıyla ispatlamaya çalışmıştır. Zeno’ya göre atılan bir ok asla hareket edemez. Bir ok, bulunmadığı bir konumda zaten hareket etmiyordur, çünkü yoktur. Bulunduğu bir konumda, belirli bir anda da hareket edemez çünkü ok atıldığı noktadan varış noktasına gidene kadar katedeceği yolun her noktasında, anında bulunmak zorundadır. Bir andaki noktada bulunmak, durmak demektir. O hâlde, okun uçuşu sırasında her bir noktada durduğu kabul edilirse, varış noktasına hiçbir zaman varamayacaktır.

Zeno’ya göre ok, diğer her şey gibi, oldukları yerde sonsuza kadar hareketsiz ve sabittirler. Hiçbir şey, ne gelecek veya geçmişte, olmadığı bir yerde bulunamaz. böylece hareket yoktur. Aslında nesneler daima bulundukları yerde olduğundan, dün veya yarın yoktur, zamansız bir şu an vardır. Yani Zeno’nun ok argümanı yarının asla gelmeyeceğini çünkü daima bugünün var olduğunu iddia etmektedir.[188]

Aristoteles bu çıkarımı “eğer bir şey tekdüze biçimde deviniyorsa, her an ya devimde ya da duruştadır, ancak devimde olan her zaman şimdidedir, demek devinen ok devimsizdir” şeklinde açıklamıştır. [189]

Bertrand Russell, Zeno’nun bu çıkarımında, sonlu bir zaman parçasının, ardışık anların sonlu bir serisinden oluştuğunu kabul etmek gerektiğini düşünmüştür. Russell bu düşüncesini şu şekilde açıklamıştır:

> “Yani, bin andan oluşan bir süreyi düşündüğümüzü kabul edelim ve okun bu süre boyunca devimde bulunduğunu düşünelim. Bin andan her birinde ok neredeyse oradadır, bunu izleyen anda ise başka bir yerdedir. Bergson’un, gerçeğin sinematografik sunuluşu dediği şey budur. Üzerinde düşündükçe zorluk daha da gerçek olur. Bunun çözümü sürekli seriler kuramında bulunur. Ok devim durumundayken, bir sonraki anda bir sonraki konumu alacağı düşüncesinden kendimizi kurtaramayız ancak gerçekte bir sonraki an ve bir sonraki konum yoktur, bu imgelemsel olarak kavrandığı anda zorluk yok olur.” [190]

---

[188] Burton F. Porter, *What The Tortoise Taught Us*, Rowman & Littlefield Publishers, Inc., UK 2011, s. 12.
[189] Bertrand Russell, *Dış Dünya Üzerine Bilgimiz,* çev., Vehbi Hacıkadiroğlu, 2. b., Kabalcı Yayınevi, İstanbul 1996, s. 157.
[190] Russell, *a.e.*, s. 158.

### 3.7.5. Zeno Paradokslarının Önemi

Mantık, matematik ve metafizikte tartışma konusu olan Zeno'nun paradoksları, Parmenides'in gerçekliğin tek, değişmez ve hareketsiz olması gerektiği ve çokluğun, nesnelerin parçalara ayrılıp sonsuz bölünmesinin mümkün olmadığı iddialarını kanıtlamak amacıyla ortaya konmuştur. Bu çıkarımlar, bir nesnenin hareketinin kabulü durumunda, çelişkili veya imkânsız sonuçların ortaya çıkacağını nesnelerin hareket ettikleri ve değiştikleri gözlemlenebilse bile, onların gerçekte hareket edemez veya değişemez olduklarını göstermeye çalışmışlardır.

Russell'a göre Zeno'nun ilk iki çıkarımı, bölünmezler varsayımına göre sağlam görünürler, ayrıca bu varsayım olmadan da, sonsuz sayılardaki geleneksel çelişki çözülmemiş olsa yine sağlam olabilirlerdi, ancak bu çelişki çözülmüştür. Russell bu çıkarımların safsata olmadığını söylemiştir: "Demek ki Zeno'nun tartışmasının, uzam ve zamanın noktalar ve anlardan oluştukları görüşüne karşı olduğu sonucuna varabiliriz; ve sonlu bir uzam ya da zaman parçasının sonlu sayıda nokta ve anlardan oluştuğu görüşüne karşı, çıkarımları safsata değil sağlamdır. Zeno'nun bizi götürmek istediği sonuç, çokluğun bir aldanma, zaman ve uzamın da gerçekten bölünmez olduğudur."[191]

Bertrand Russell, Zeno'nun çıkarımlarının safsata olarak görünmese de bu çıkarımların kanıt niteliğinde olamayacağını söylemiştir. Bu düşüncesine rağmen aynı zamanda bu paradokslara olumlu eleştiri getirmiştir:

> "Böylece sonlu bölünmezler varsayımını (çok haklı sebeplere dayanarak) dağıtmaya yeterli olmalarına karşın, devimin, değişikliğin ve çokluğun olmadığını kanıtlamaya yetmezler. Nedir ki bunların hiçbiri saçma söz oyunları değildir. Bunlar, yanıtlanmaları iki bin yıl alan, giderek bugün de çoğu filozofların öğretileri için öldürücü zorlukları ortaya koyan önemli çıkarımlardır." [192]

---

[191] Bertrand Russell, *Dış Dünya Üzerine Bilgimiz,* çev., Vehbi Hacıkadiroğlu, 2.b., Kabalcı Yayınevi, İstanbul, 1996, s.154.
[192] Russell, *a.e.*, s. 154.

Bertrand Russell, hareketle ve sonsuzlukla ilgili bu argümanları eleştirmesine rağmen bu çıkarımları, ölçülemez şekilde zekice, incelikli ve çok derin bulur. Ancak diğer filozofların Zeno'ya karşı tavrını eleştirmiştir:

> "Tüm ölçülemeyecek kadar ince ve derin dört argümanı icat etmiş, sonraki filozoflar kabalıkla onu sadece ustaca hokkabaz olarak telaffuz etmişler ancak iki bin yıllık sürekli tekzipten sonra bu sofizmalar, yeniden ortaya konmuştur ve muhtemelen kendisi ve Zeno arasında herhangi bir bağlantının asla hayalini kurmayan bir Alman profesör tarafından, matematiksel bir rönesansın temelini oluşturmuştur." [193]

Bu Alman profesör, birçok bilim adamının Zeno Paradokslarını, ortaya koyduğu sonsuzluk ve sonsuz kümelerle ilgili transfinit aritmetik kuramlarıyla çözdüğüne inandığı Georg Cantor'dur.

19. yüzyıl sonlarında Georg Cantor, Zeno'nun dikotomi paradoksu ile ilgili şöyle yanıt vermiştir:

> "Zeno hızın sınırlarını yanlış anlamıştır. İnsanlar, sonlu bir zaman aralığında sınırsız birçok hareket yapmak için yeterince hızlı gidebilir, daha hızlı ve daha hızlı hareket ederek bir odadan çıkabilirsin. 10 saniyede yolun yarısı, sonra kalanın yarısını 5 saniyede sonra, kalanın yarısını 2,5 saniyede. 20 saniyelik bir sürede odanın sonundasındır." [194]

Tüm bu düşüncelerin yanında Zeno Paradokslarının önemli olma sebeplerinden birisi de bu paradoksların, matematik ve mantıkta kullanılan en önemli mantıksal tekniklerden birisi olan, saçmalığa indirgeme olarak da adlandırılabilecek olmayana ergi (reductio ad absurdum) kavramının ilk kayıtlı örneklerinden olmalarıdır. [195]

---

[193] Sir Thomas Heath, *A History Of Greek Mathematics*, Oxford At The Clarendon Press, London 1921, C. I, s. 273.
[194] Roy Sorensen, *A Brief History of The Paradox*, Oxford University Press Inc., New York 2003, s. 54.
[195] Philip Stokes, *Philosophy 100 Essential Thinkers*, Enchanted Lion Books, New York 2006, s. 19.

### 3.7.6. Zeno Paradoksları Felsefi Sonuç

Zeno, Pisagorcuların, atomcuların ve metafiziksel çoğulcuların savunduğu, sonsuz küçük ve sonsuz bölünebilme, değişme, hareket, çokluk gibi kavramları eleştiri konusu yapmış, evrende yalnızca hareket ve değişim olduğunu yolundaki Heraklitçi düşüncenin savunucularına karşı iddiasını kanıtlamak için bu çıkarımlarını üretmiştir. Zeno, bir cismin parçalardan oluştuğu varsayılırsa, bu parçaların da başka parçalardan oluşması gerektiğini düşünmüştür.

Eğer uzayda yer kaplayan her cisim sonsuz bölünebilirse iki ihtimal ortaya çıkmaktadır. Birinci ihtimal sonsuza kadar bölünen küçük parçaların uzayda hiç yer kaplamaması, ikinci ihtimal de uzayda kesinlikle bir yer kaplaması gerektiği düşüncesidir. Şayet bu parçalar uzayda bir yer kaplamıyorsa, bunlardan ne kadarı bir araya getirilirse yine de bir şey meydana gelmiş olmaz. Gerçekten de parçaların hacmi sıfır ise sıfırları toplamaktan bir sonuç çıkmaz. Şayet bu parçalar uzayda bir yer kaplıyorlarsa, hacimleri ne kadar küçük olursa olsun, sonsuz büyüklükte bir şey oluşacaktır. O halde bir cismi sonsuz bölünebilen parçalardan oluşmuş saydığımızda bu cisim, uzayda yer kaplamak bakımından ya sıfır ya da sonsuz büyüklükte olacaktır. Her iki durumda da çelişkiye düşülür. [196]

Yer, zaman kavramları ve onlara bağlı olan sonsuz bölünme, değişme, çokluk gibi kavramların, kimi çelişkilerin kaynağı olması nedeniyle bazı filozoflar duyuların kesin bir doğruluk olarak gösterdiği hareketin varlığının, gerçeklik olmadığını, görünüş olduğunu savunmuşlardır.

Bu görüşü paradokslarla kanıtlamaya çalışan Zeno'ya göre devim olgusal değil yalnızca göreli bir yargıdır, görünürdeki devim oranı iki ya da daha çok nesne arasındaki bir karşılaştırmaya bağlıdır. Aşil ve kaplumbağada, zamanın sürekliliğinde ayrım yapabilmek, geçmiş ve gelecek arasındaki anı saptamak da imkansız hale gelecektir, çünkü içinde bulunduğumuz anı belirtip şu an dediğimizde bile zaman geçmiş olacak ve anı yakalamak mümkün olmayacaktır.[197]

---

[196] Ernst Von Aster, *İlkçağ ve Ortaçağ Felsefe Tarihi*, çev., Vural Okur, İm Yayınları, İstanbul 2005, s. 103.
[197] William S. Sahakian, *Felsefe Tarihi*, çev., A.Yardımlı, İdea Yayınevi, 2. b., İstanbul 1995, s. 22.

## 3.8. GALİLEO PARADOKSU ( PARÇA BÜTÜN PARADOKSU)

Galileo, sadece doğal sayılar (0,1,2,3,4,..) değil, tüm sonsuz kümelerin özelliklerinde bir çelişki olduğunu ortaya koymuştur. Ancak daha belirgin olarak, tamsayılar ve tamsayıların kareleri kümesini ele almıştır. Galileo'ya göre bu paradoks, parça ve bütün ilişkisini tamamen dışlayan apaçık bir çelişkidir.

(1, 2, 3, ...) 1 den sonsuza giden tamsayıları sıralayalım.

Bu sayıların kendileri ile çarpılarak elde edilen, sayıların karelerini sıralayalım.

(1, 4, 9, ...)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | …….. |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | ……….. |

Öncelikle tam sayıların karelerinden daha fazla elemanı var gibi görünmektedir. Çünkü azlık çokluk kavramına göre, ilk dizide ikincisinde olmayan elemanlar vardır. Doğal sayıların kareleri kümesi (0,1,4,9,..) bu karelerin arasında gittikçe artan boşluk olmasına rağmen, (81 ve 100 arasında çok sayıda doğal sayı vardır) hem doğal sayılar hem de kareleri kümesi sonsuzdur. Sayılar ve sayıların kareleri sıralanırsa, her bir tamsayının karşılığında sadece bir tane kare sayısı vardır.

Sayıların kareleri, tüm pozitif tamsayılardan çok daha az gibi görünür ve alışılmış artan sıra halinde düzenlenmiş tamsayılar dizisinden seçip alırsanız, hızla seyrelirler. Ama kuşkulu Galileo'nun (1564-1642) fark ettiği gibi, tüm pozitif tamsayılarla baştan sona eşleştirilebilirler: Her pozitif tamsayının kendisiyle bağlantılı benzersiz bir karesi vardır ve her karenin, benzersiz bir pozitif tamsayısı (pozitif karekökü) vardır. Kareler, pozitif tamsayıların bir *astkümesini*, yani öğe sayısı pozitif tamsayılar kümesinden eksik kalan ve bu nedenle ondan ayrı olan bir altküme oluştururlar. Yine de altküme, tüm pozitif tamsayılar kümesiyle artıksız eşleştirilebilir. Öyleyse, daha az kare mi vardır, yoksa bir o kadar kare mi vardır?[198]

[198] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. b., Hil Yayınları, İstanbul 2009,s. 29.

Birinin öğeleri diğerinin öğelerine bire bir karşılık gelirse iki kümenin aynı sayıya sahip olduğu düşüncesi, sayma pratiğimiz ve sayı nosyonumuz bakımından temel bir düşüncedir. David Hume; "iki sayıyı, biri diğerinin her birimine karşılık gelen bir birime sahip olacak şekilde birleştirdiğimizde, onları eşit ilan ederiz" demiştir.[199]Öğeleri pozitif tamsayılarla bire bir eşleştirilebilen bir küme sayılabilirdir. Sonsuz bir küme, ast kümesiyle eşleşebilirse, Dedekind sonsuzu olarak tanımlanır. Beşinci yüzyıl Eukleides yorumcusu Proclus, bir dairenin sonsuz çoklukta farklı çapı bulunduğunu ve her çap daireyi ikiye böldüğü için, yarımların ikili bir sonsuzluğu olduğunu belirtmiştir. İkili sonsuzluğun tekil sonsuzluklardan biriyle eşleşebildiği açıktır ve ikisinin örtüştürülmesi, tek bir sayım verir.[200]

### 3.8.1. Galileo Paradoksunun Önemi

Galileo, keşfettiği paradoksun sonucunu genellemiş ve sonsuzluk kavramını ve sonsuz sayıları tanımlamış:

> "Sonsuz nicelikler içinde eşitliğe, ya da daha çok veya daha aza ilişkin özelliklere yer yoktur, bu özellikler sadece tanımlı niceliklere aittir ve bunlar sonsuz sayılara uygun değildir, çünkü bir şeyin diğerinden çok mu, az mı yoksa ona eşit mi olduğu söylenemez" demiştir. [201]

1638 yılında Galileo, *Dialogues* kitabında sonsuz olan iki sınıf hakkında söylenen eşit, daha büyük veya daha küçük tanımlarının sadece sonlu sınıflara uygulanabileceği, sonsuz sınıflara uygulanamayacağı sonucuna ulaştığından bahsetmiştir. Bu problem, 1851'de Bolzano tarafından tekrar ele alınmıştır. Ama Bolzano, bu konudaki araştırmalarını yeterince ilerletememiştir. 1873 yılında ilk defa Georg Cantor sonsuzluk derecelerini kıyaslama ihtimalinin farkına varmış ve çok ilginç sonuçlara ulaşan kümeler teorisini ortaya koymuştur.[202]

---

199 Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. b., Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 30.
200 Clark, *a.e.*, s. 32.
201 Paolo Rossi, *Modern Bilimin Doğuşu*, çev., Neşenur Domaniç, 1. b., Literatür Yayıncılık, İstanbul 2009, s. 220.
202 Eugene P. Northrop, *Riddles In Mathmematics*, D. Van Nostrad Company Inc., Princeton, New Jersey 1944, s. 149.

### 3.8.2. Galileo Paradoksunun Çözümü

#### 3.8.2.1. Sonsuz Kümelerin Karşılaştırılması

Hilbert Paradoksu'nun kaynağı olan Galileo Paradoksu'nun temel meselesi sonsuz kümelerin karşılaştırılmasıdır.
Sonsuz kümeler hakkındaki tartışmalardan biri iki sonsuz kümenin birbirine eşit olma durumudur. sonlu kümeler için hangisinin daha çok elemana sahip olduğunu söyleyebiliriz ama sonsuz kümelerde bu komplike bir durumdur. doğal sayılar mı rasyonel sayılar kümesi mi daha geniştir.veya rasyonel sayılar mı reel sayılar mı daha geniştir.bir çizgideki noktalar sayısı,onun bir parçasındaki noktalar sayısından daha fazla mıdır.bir karede bir çizgidekinden daha fazla nokta var mıdır? [203]

İki solu küme için, ikisinin arasında bire bir bağıntı olduğunu söylemek eşit çoklukta elemana sahip olduklarını söylemek demektir. Cantor sonsuz kümeleri aynı şekilde karşılaştırmaya karar verdiğinde, küme teorisinde temel bir dönüm noktası olmuştur. Diğer deyişle Cantor, A ve B gibi iki sonsuz kümenin, eğer aralarında birebir bağıntı varsa eşit çoklukta elemana sahip olacağını söylemiştir. Cantor böylece "A ve B kümeleri eşit çoklukta elemana sahiptir" şeklinde tanımlamak yerine "A ve B aynı kardinaliteye sahiptir veya "A ve B denktir" tanımını yapmıştır. [204]

Böylece sonsuz kümelerde yapılan birebir eşlemede doğal sayıların bir parçası olan tüm bu kümelerle, tüm doğal sayılar arasında birebir eşleştirme yapılabileceği, yani tüm doğal sayılar kümesi ve herhangi sonsuz alt kümesi arasında bağıntı kurulabileceği kanıtlanmıştır.

1 , 2 ,3 , ………… , n ,….…….

1 , 3 ,5 , ………… , 2n-1,…….

2 , 4 ,6 , . ………. , 2n , ……. .[205]

---

[203] N. Ya. Vilenkin, *In Search Of Infinity*, çev., Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995, s. 47.
[204] Vilenkin, *a.e.*, s. 49.
[205] Vilenkin, *a.e.*, s. 51.

Sonsuz kümelerin nitelikleri, günlük yaşamda öğrendiklerimize benzer değildir. Uzun ve kısa çizgiler eşit çoklukta noktaya sahiptir. Sonsuz kümelerin olağandışı özelliklerine aşina olmayanlar için bu cümle zihinde şüphe gölgesi bırakabilir ancak uzun veya kısa bir alt kesit eşit miktarda noktaya sahiptir. Milyon ışık yılı uzunluktaki noktaların, atom çekirdeğinin yarıçapındaki noktalar kadar çoklukta olması düşüncesine alışmak oldukça zordur. [206]

#### 3.8.2.2. Sonsuz Sınıf Kavramı

Galileo çelişkiye neden olan bu düşüncesinin temelinde sonlu nitelikleri sonsuzluğa uygulama mantığı olduğunu söylemiştir. Galileo, sonlu zihinlerimiz ile sonsuzu tartışmaya teşebbüs ettiğimizde sonlu ve sınırlı olana verdiğimiz özellikleri kullandığımız için problemlerin ortaya çıktığını düşünmüştür. Ona göre sonsuz nicelikler hakkında biri diğerinden büyük, daha az veya birbirine eşit olmak gibi durumlardan bahsedilemez. Çelişkiyi çözmek için de sonlu kavramına uygulanan niteliklerin, sonsuza uygulanamayacağı sonucuna ulaşmıştır.

Bu açıdan "eşittir", "daha az" gibi nicelikler sonsuz kümeler üzerinde kullanılırsa bu çelişkiye yol açabilir ancak bu sonsuz kümelerin var olmadığını göstermez. Fakat bazı düzeltmeler yapılmadan sonsuz kümelere uygulanamazlar. Galileo bu kavramlarda nasıl bir düzeltilme olacağını görememiştir. Bu görev 250 yıl sonra Georg Cantor'un olmuştur.[207] Cantor "bütün, parçasının bir kısmına eşittir" ifadesini sonsuzlukları tanımlamak için kullanmıştır. Genelde sonsuz sınıfın tarifinde "herhangi sınırlı bir zaman periyodunda sayılmakla tükenmeyen sınıf" tanımlaması yapılırken Cantor sonsuz sınıfı "kendisinin bir parçasıyla birebir eşleme kurulabilecek olan sınıf" olarak tanımlamıştır. [208]

---

[206] N. Ya. Vilenkin, *In Search Of Infinity*, çev., Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995, s. 63.
[207] Rudy Rucker, *Infinity and The Mind*, Princeton University Press, New Age International Ltd. Publishers, Delhi 2007, s. 6.
[208] Eugene P. Northrop, *Riddles in Mathmematics*, D. Van Nostrad Company Inc., Princeton, New Jersey 1944, s. 153.

### 3.8.2 3. Cantor'un Galileo Paradoksu Çözümü

Cantor, sonsuz sayılarla ilgili eski çağlardan beri düşünülen mantıksal paradokslara açıklık getirmiştir. Galileo'nun elde ettiği sonuçları eleştirmiş ve sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında ortaya çıkan durumun bir çelişki olmadığını düşünmüştür.

Galileo Paradoksu'nda konu edilen örneği ele alalım. 1'den başlayıp ileriye doğru giden sayıların serisi düşünülürse, bu sayılar sonlu değillerdir. Hangi sonlu sayı ele alınırsa alınsın oldukça açık olarak ondan daha büyük bir sayı vardır. Sonsuz sayıları karşılaştırdığımızda daha ilginç sonuçlara ulaşırız. Galileo, ortaya koyduğu paradoksu açıklamak için, tam sayılar ve tamsayıların kareleri kümesini karşılaştırmıştır. Bu uygulama daha farklı sonsuz küme örnekleriyle de yapılabilir. Pozitif doğal sayılar ve pozitif çift doğal sayılar karşılaştırılırsa, çift sayıların sayısı, tüm sayıların sayısıyla aynı olmalıdır.

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . .

2, 4, 6, 8, 10, 12, . . . .

Aşağıdaki sıranın karşılığı olarak üst sırada da sayı vardır. Alt sıradaki sayıların üst sıradakinin yarısı kadar sayıyı içermesine rağmen iki sıra bire bir eşlenebilir. Böylece iki sıra da aynı sayıdadır. [209]

Bertrand Russell, Cantor'un çözümlediği paradoksal durumu şu şekilde açıklamıştır:

> "Bu durumu farkeden Leibniz bunun bir çelişki olduğunu düşünmüştü. Böylece sonsuz sınıflar olduğu ama sonsuz sayılar olmadığı sonucuna ulaşmıştı. Georg Cantor aksine bunun bir çelişki olmadığını savunmuştu ve haklıydı da. Bu sadece tuhaf bir durumdu. Cantor sonsuz sınıfı, "parçaları bütün sınıfının içerdiği sayıda terim içeren parçalara sahip olarak tanımlamıştı" ve bu temelde, sonsuz sayılarla ilgili önceden mistisizm ve karışıklığa terk edilmiş olan kesin mantık alanını da içine alan en ilginç matematiksel teoriyi inşa etmiştir."[210]

---

[209] N. Ya. Vilenkin, *In Search Of Infinity*, çev., Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995, s. 51.
[210] Bertrand Russell, *The Basic Writings Of Bertrand Russell*, Ed., Robert E. Egner, Lester E. Denonn, Routledge Classics, New York 2009, s. 278.

## 3.9. HİLBERT'İN BÜYÜK OTEL PARADOKSU

David Hilbert, sonsuz sayıda odası olan hayali bir hotel hakkında bir çelişki ortaya koymuştur ve sonsuz sınıflarla ilgili olan bu paradoks (Hilbert's Paradox of Grand Hotel) Hilbert'in Büyük Otel Paradoksu olarak adlandırılmıştır. David Hilbert, bu paradoksu sonsuz çoklukları karşılaştırabilmek için somut bir örnek olarak derslerinde kullanmıştır. Sonlu sayıda odası olan örneğin yüz odalı bir oteli düşündüğümüzde eğer bu otel doluysa, 1 den 100 e kadar her odada bir müşteri var demektir ve artık daha fazla müşteri almasının imkansız olduğu açıktır. Ancak sonsuz sayıda odası olan bir oteli hayal ettiğimizde ve tüm odaları dolu olduğunda acaba yeni bir müşteriye yer olabilecek midir? Böyle hayali bir otelde her odanın dolu olması, daha fazla müşteriye yer olmaması anlamına gelir mi? Sonsuza yapılan eklemeler durumu nasıl değiştirir? Sonsuz başka bir sonsuzdan çıkarıldığında, hala bir sonsuz var mıdır? Hilbert'in Büyük Otel Paradoksu, yapılan eklemeler ve çıkarımların sonsuzluğu nasıl etkilediğini görselleştirmiştir.

Galileo Paradoksu'na, sonsuz büyüklükler açısından benzer olan bu paradoksa göre; tümü dolu sonsuz çoklukta odası olan bir otel, eğer herkes bir oda ilerlerse yeni bir müşteri alabilir. Bu yüzden, otel tam dolu olmasına karşın, her zaman yeni bir müşteriye bir oda verebilir.[211]

Galileo Paradoksu'nda gördüğümüz gibi eğer (1, 2, 3, ...) kümesi ve bu sayıların kendileri ile çarpılarak elde edilen, sayıların kareleri kümesi (1, 4, 9, …..) eşlenebiliyorsa; ( 1, 2, 3, 4, 5, 6 ......) ve ( 2, 3, 4, 5, 6 ...... ) kümeleri birbirine eşlenebilir. Bu eşlemeyle birlikte, problemi çözebilmek için sonsuz sayıda odası olduğu var sayılan bu otelde yeni bir müşteriye yer açabilmek için, 1. odadaki müşteriyi 2. odaya, 2.odadakini 3. odaya, 3.odadakini 4. odaya …….şeklinde yer değiştirilmesi yeterlidir. Böylece sonsuz çoklukta müşterilerden her biri bir sonraki, numarası kendisininkinden bir fazla olan odaya hareket edebilir ve 1 numaralı oda yeni gelen müşteri için boşalır. Önceki müşterilerden hiçbiri odasız kalmamıştır.[212]

---

[211] Michael Clark, *Paradokslar Kitabı*, çev., Ahmet Fethi, 1. b., Hil Yayınları, İstanbul 2009, s. 69.
[212] Clark, *a.e.*, s. 69.

## 3.10. GALİLEO VE HİLBERT PARADOKSU

Galileo Paradoksu'nda sonsuzluk, bir nicelik olarak ele alınmaktadır. Bu paradoksta ekleme, çıkarma, bölme gibi niceliklerle ilgili özelliklerin sonsuzluğa uymadığı görülmektedir. Hilbert Paradoksu'nu eğer oteldeki odaları sadece kareler ile eşleştirdiğimiz odaları dolduruacak şekilde genişletirsek Galileo Paradoksu'nun daha canlı görsel bir örneğini görebiliriz. Galileo tarafından kullanılan bire bir bağıntı kavramıyla düşünürsek müşterileri tek tek kaydırırsak otel ve onun sınırsız kapasitesinde bir değişiklik olmayacaktır .

Galileo Paradoksu'nda, bir parça veya alt küme bütün halindeki sonsuz kümeyle özdeş oluyor, bu da parça bütün aksiyomunun ihlali ve bir paradoks olarak adlandırılmaktadır. Aslında ortaya konan bu paradoks, çelişkili duruma ait yeni bir tanımlamanın ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Paradoksun kendisi sonsuz büyüklüklerde bütünün parçasına denk olabileceği şeklindeki bir tanıma dönüşmektedir.

Galileo, sonsuz tamsayılar kümesiyle ve onun sonsuz alt kümesi arasında bire bir bağıntı kurulabileceğini ve böylece onların eşitliğinin gösterilebileceğini keşfettiğinde, zıtların özdeşliğini bir an için görmüştür. Daha sonraları Cantor saydığımız (Cantor'un, sayılabilirlik olarak tanımladığı bağıntı) doğal sayılar kümesi ile olan bağıntının, tüm sonsuz küme tipleri için doğru olmadığını bulmuştur. [213]

Hilbert ve Galileo Paradoksu'nda gördüğümüz en ilginç durumlardan biri de yapılan eklemenin sonsuzluğa etkisidir. Bugün de kabul edilen bir nitelik olarak, sonsuz bütünlük veya sonsuzluk işleme konulduğunda, yani sonsuz bütünlüğe ekleme veya ondan çıkarma yapıldığında da, sonuç her zaman sonsuza dönüşmektedir.

---

[213] Joel D. Morrison, *Spinbitz İnterface-Philosophy Mathematics Nondual Rational-Empricism*, USA 2007, C. I, s. 230.

## 3.11. SONSUZLUK PARADOKSLARI VE MODERN KÜME KURAMI

Antik Çağlardan 19. yüzyılın sonlarına kadar, hem felsefi hem de mantıksal olarak sonsuzluk tanımı en basit bir biçimde sonlu kavramının karşıt anlamlı olmuştur. Sonlu küme, sınırlı küme ve sonsuz küme sınırsız küme olarak algılanmıştır. Bu dönemden sonra paradoksların ışığında sonsuzluk tanımı önemli ölçüde değişmiştir.

Georg Cantor, gerçek sonsuz kümeler hakkında birtakım ilginç sonuçlar elde etmiştir. Gerçek bir çizgi üzerindeki noktalar kümesinin, tüm doğal sayılar kümesinden daha yüksek bir sonsuzluğa sahip olması bu keşiflerin en önemlisi olmuştur.

Cantor, tek bir sonsuzluğun var olduğunu ve mutlak kavramını; kendinden var olan ve bütünlüğün en ileri derecesine sahip olan anlamında kullanarak; bu tek sonsuzluk kavramının mutlak sonsuzluk olduğunu belirtmiştir.

Sonlu ile bu mutlak sonsuz arasında birçok orta seviye olduğunu ortaya koymuş ve üç bölümden oluşan sonsuzlukları mutlak sonsuzluk, fiziki sonsuzluk ve matematiksel sonsuzluk şeklinde ayırmıştır. Böylece Cantor sonsuzluğun "hep veya hiç" bir kavram olmadığını, sonsuzluğun dereceleri olduğunu göstermiştir.

Cantor sonlu ve sonsuz sayılar arasında bir geçiş olarak, Grek alfabesinden seçtiği harfleri kullanmıştır. Grek alfabesinin son harfi olan Omega'yı ( ω) tüm sonlu sayılardan sonraki sayı olarak seçmiştir. Sonlu ötesi sayıları tanımlamak için de, İbrani alfabesinin ilk harfi olan, alef (ℵ) harfini kullanmıştır.

Sonsuzluğun çözümlenebilmesi ve paradoksların çözülmesi için yeni küme teorilerinin ortaya çıkması zorunlu olmuştur. O zaman sonsuzluk, karşıt terimlerle tanımlanmaktan çıkıp, geniş anlamda Cantor'un, sonlu kümelerle, küme teorisini transfinite genişletmesiyle, yeniden tanımlanmıştır. [214]

---

[214] Joel D. Morrison, *Spinbitz İnterface-Philosophy Mathematics Nondual Rational-Empricism*, C. I, USA 2007, s. 228.

Böylece sonsuzluk kavramının özelliğini tanımlamada yeni bir bakış açısı ortaya konmuştur. Yani sonsuz bir kümenin, kardinalitesi (eleman sayısı) o kümenin bazı alt kümelerinin kardinalitesine eşit olabilecek küme anlamında belirlenmesi mümkün olmuştur.

Sonuçta 20. yüzyılda Cantor, sonsuzluğun küme kuramındaki tanımını, “bazı parçalarına eşit olan veya özdeş olan bir şey” olarak basitçe tanımlamıştır. Bu tanım doğal olarak sonlunun modern tanımının tersidir. [215]

[215] Joel D. Morrison, *Spinbitz İnterface-Philosophy Mathematics Nondual Rational-Empricism*, USA 2007, C. I, s. 229.

## SONUÇ

Gerçek paradoks yanlış gibi görünüp aslında doğru olan, doğru görünüp aslında yanlış olan veya kendi kendisiyle çelişen bir sonuca ulaşan, mantıksal açıdan imkânsızlık ortaya koyan, içinden çıkılamayacak kısır döngülerdir. Theseus'un gemisi örneğinde görüldüğü üzere; özdeşlik sorunu gibi önemli felsefi problemleri ortaya koyan, sonlu bir zaman ve mesafe içine sonsuzluk gibi bir kavramı sığdıran cümlelerdir. paradoksal cümlelerin bazıları kolay çözümlenebilirken, bazıları daha ciddi problemlerdir. Bu paradoksal cümlelerin genel ifadelerini ele alalım.

"İki baba ve iki çocuk kasabayı terk ederler. Bu durumda şehrin nüfusu üç azalır." Bu ifade yanlış mıdır?

Bir kişi "ben yalan söylüyorum" derse bu cümle doğru mudur, yanlış mıdır?

A noktasından B noktasına hiçbir zaman ulaşılamaz çünkü her seferinde mesafenin yarısı gidilmelidir. Sonra yarısının da yarısı…………....

Hareket kavramı sanal mıdır? Gerçekten bitmeyen bir mesafe var mıdır?

Theseus'un gemisi zaman içinde çok defa tamir gördü ve bir gün bakıldı ki, değişmemiş tek bir parçası kalmamış. Bu hâlâ aynı gemi midir?

Tüm kümelerin kümesi gibi her şeyi içine alan düşünülebilecek en büyük kümeden daha büyük bir küme var mıdır?

"Kendi kendisinin elemanı olmayan tüm kümelerin kümesi" ve dolayısıyla "tüm kümelerin kümesi" var mıdır?

Paradokslar, bu örneklerdeki gibi önemli sorularla ortaya çıkmaktadırlar. İlk bakışta paradoks gibi görünen bazı ifadeler, hatalı sonuçlanan bazı varsayımlarda bulunmaktadırlar. Bu ifadeler sezgi ve mantığa aykırı gibi görünse de basit bir çözümlemeyle sonuca kavuşan basit bilmecelerdir. Bununla birlikte "ben yalan söylüyorum" diyen birinin bu cümlesi eğer doğruysa o zaman kişi yalan söylüyordur. Eğer yanlışsa doğru söylüyor demektir. Bu kısır döngü sonsuza kadar böyle devam eder.

Dünyanın en hızlı koşucusunun bile yakalayamadığı kaplumbağa, başlangıç noktasından atılsa da hareket edemeyen ve sona ulaşamayacak olan bir ok, ne kadar tamamı dolu olsa da yeni müşterisine yer açılabilecek hayali bir otel, en büyük çokluktan bile daha büyük olabilecek sonsuz kümeler, kendi içinde yer aldığı varsayıldığı zaman, kendi dışında olması gereken bir küme örneklerindeki gibi çok ciddi paradoksların yanında, hayatın herhangi bir anında veya doğal bir konuşmanın seyri içinde kullanılan cümlelerin içinde bile, çelişkili durumlarla karşılaşabiliriz.

Karşılaşılan bu çelişkili durumların bazısı kolay çözümlenebilir, mantık oyunları veya sözsel bilmecelerdir. Örneğin; "iki baba ve iki çocuğun kasabayı terk etmeleri sonucunda şehrin nüfusu üç kişi azalır" önermesinde sayısal bir çelişkiyle ifade yanlış görünüyor olsa da; bu önermedeki üç kişi eğer bir baba, bir çocuk ve bir büyükbabadan oluşursa doğru olur. Ancak bu tür mantıksal veya anlamsal bilmeceler paradoks değildir.

Bununla birlikte; tüm doluluğuna rağmen sonsuz sayıda odası olan bir otelin sakinlerine yeni eklemeler yapılabilmesine izin veren; "bu ifade yanlıştır" cümlesini, kendisi eğer doğruysa o zaman yanlış olmak zorunda bırakan, bu önermenin ne doğru ne de yanlış olarak kabul edilememesine sebep olan; tüm kümelerin kümesi gibi her şeyi içine alan düşünülebilecek en büyük kümeden daha büyük bir küme varlığını kabul etmekle veya kendi kendisinin elemanı olmayan tüm kümelerin kümesi ve dolayısıyla tüm kümelerin kümesinin varlığını kabul etmekle ortaya çıkan problemler gerçek paradokslardır.

Ancak gerçek paradoks olarak adlandırdığımız böyle ciddi çelişkilerin çözümü kolay olmamakla birlikte, kimisinin çözümüne ulaşabilmek için asırlar geçmesi gerekmiştir. Belki de bazıları hala tam olarak çözülememiş problemlerdir.

Belki de hiçbir şeyde mutlak kesinlik olmadığını, zihinsel ve fiziksel gerçekliğin birbiriyle çelişkili olabileceğini, birbiriyle çelişik birçok fikir gibi doğruluk, küme, sonsuzluk gibi kavramların kendi içinde çelişkili veya birtakım çelişkilere temel olabileceğini gösteren paradokslar; hem cümlelerde, hem sayılarda veya geometrik şekillerde karşımıza, yeni düşünce adımlarının başlangıcı olarak şaşırtıcı biçimde çıkmaktadırlar.

Düşünce dünyasının en eski kaynaklarında yer alan ve asırlar geçse de var olan paradokslar; Antik Çağ, Orta Çağ veya Yeni Çağ mantıkçılarının en önemli meselesi olmuştur. Antik Çağda veya Orta Çağlarda keşfedilen; Zeno Paradoksları veya Galileo Paradoksu gibi paradoksların etkisi 20. yüzyıla kadar devam etmiştir. 20 yüzyıl mantıkçıları da bu eski problemler üzerine yoğunlaşmışlar ve çalışmalar yapmışlardır. Üzerinde uğraşılan paradoksların belirsizlik, bilgi, inanç, uzay, zaman, sonsuz, küme, sayı, sınıf gibi kavramlarla ilintili olmasıyla 20. yy. başlangıcından itibaren mantığın ve bilimin temelleri bu problemlerden etkilenmiştir. O zamandan beri de öncelikle Georg Cantor, Bertrand Russell, Kurt Gödel gibi mantıkçıların, Alfred Tarski gibi dil bilimcilerin paradokslar üzerinde yoğunlaşmaları ve çalışmaları çağdaş mantığın ve bilimin ilerlemesine katkıda bulunmuştur.

Paradokslar, semantik açıdan bakıldığında bazı temel kavramları algılayışımızı değiştirmiş, kavramların içeriğini, ne anlama geldiğini ve aynı zamanda tanımlamalarda kullandığımız dildeki problemleri derinlemesine incelememize olanak sağlamıştır. Örneğin semantik paradoksların incelenmesiyle, özellikle Yalancı Paradoksu'nda karşımıza çıkan oto referans kavramıyla önermelerin doğruluk, yanlışlık tanımlamalarının kısır döngüye neden olması, dil bilimsel analiz üzerinde etkili olmuş, bu bilim dalında yeni kuramlar ortaya çıkmasının temelini oluşturmuştur.

Hareket ve süreklilik, zaman gibi kavramlar üzerinde bugün bile birbirinden farklı varsayımların tartışıldığı, yeni hipotezlerin geliştirildiği ve hala çözülememiş problemlerin var olduğu düşünülürse Zeno'nun Paradokslarının önemi daha fazla anlaşılmaktadır.

Zeno'nun, en önemli paradokslarını düşündüğümüzde uzay, zaman, çoğulluk, hareket ve sonsuzluk gibi felsefi kavramları irdeleyen ciddi paradokslar karşımıza çıkmaktadır. Örneğin Zeno'nun dikotomi argümanı, onun zamanında bilinen sonsuzluk algısındaki yetersizliği göstermektedir. Bu argüman veya "aşil ve kaplumbağa", aslında bir limit problemi olup, sonsuz serilerin toplamının sonsuz bir toplam olması gerektiği gibi yanlış bir algıya dayanmaktadır ve 20. yüzyıldan itibaren matematikteki gelişmeler sonsuz serilerin toplamının sonlu olabileceği ispatıyla birlikte bu paradoksun iddiasını çürütmüştür.

Her ne kadar çözülemeyeceği düşünülse de, 20. yüzyıldan sonra, matematiksel keşiflerle özellikle Cantor tarafından ortaya konan sonsuzluk problemine getirilen çözümlemeler ve ispatlarla “aşil ve kaplumbağa” gibi Antik Çağdan itibaren çözülemeyen ve paradoks olarak görülen bazı problemler bir safsata örneği haline gelmiştir.

Diğer açıdan bakılırsa aynı zamanda, Zeno’nun dikotomi veya “aşil ve kaplumbağa” gibi paradokslarının varlığı, Cantor’un hem bu paradoksları çözebilmesine hem de sonsuzluk problemiyle bağıntılı olan farklı problemleri çözebilmesine olanak sağlamıştır. Örneğin sonsuz kümelerle ilgili teoremler geliştirmiş, sonsuz sayılar ve sonsuz kümelerde önemli ispatlar ortaya koymuştur. Ayrıca Galileo tarafından keşfedilen paradoksun varlığını temel alan Cantor, küme teorisindeki modern sonsuz kavramını geliştirmiş, belki de uzun süre çelişki olarak kabul edilen bu durumu, yeni tanımlamalar ve kuramlarla çelişkiden kurtarmıştır.

Nasıl ki, Zeno’nun Paradokslarının çözümüyle sonsuzluk kavramı biraz daha anlaşılabilir bir hale geldiyse, küme paradokslarının çözümüyle de, sonsuz küme kavramındaki algılar da değişim göstermiştir.

Özellikle Cantor, Frege ve Russell’ın küme kuramına ve özelde sonsuz küme kavramına yeni tanımlamalar katmış olmaları ve ortaya koydukları paradokslar ve çözüm yolları sayesinde; Georg Cantor, Cantor Paradoksu’yla aksiyomatik küme kuramını, Bertrand Russell, Russell Paradoksu’yla Tip Teorisi’ni geliştirilmiştir. Böylece bu kuram ve teoriler, yeni küme kuramlarına ve tip teorilerine temel oluşturmuşlardır.

Russell Paradoksu Tipler Teorisi’yle kaldırabilir veya diğer paradoksların çözümü için farklı yöntemler geliştirilebilir. Bugün için küme veya sonsuzluk kavramıyla karşımıza çıkan çelişkiler, karşılaştığımız son çelişkiler değildir.

Kurt Gödel’in, çelişkisizliğin ispatlanamayacağına dair ortaya koyduğu kanıtlama, bize paradoksların daima var olacağını, bütün sistemlerin çelişkiden arınamayacağını göstermiştir. Böylece gelecekte de doğru sanılan bazı sistemlerde herhangi bir paradoks ortaya çıkması ve keşfedilen her yeni paradoksla, yeni bir düşünce, yeni bir kuram, yeni bir sistem ortaya çıkması olasıdır.

Gödel'in Eksiklik Teoremi, aksiyomların tutarlılığının kanıtlanamayacağının kanıtı olarak, Bertrand Russell'ın ve David Hilbert'in büyük çaba harcayarak ortaya koymak istediği, mantığa ve aritmetiğe sağlam temeller kazandırmak ve her aksiyomu kanıtlanabilir kılmak çabalarını boşa çıkarmıştır.

Ayrıca bu teorem, bir bilgisayarın tüm matematiksel sorulara cevap verecek şekilde programlanamayacağını, her zaman çözülemeyecek çelişkilerle karşılaşılabileceğini göstermektedir. Aynı zamanda herhangi aksiyomatik matematiksel sistemde veya herhangi bir aksiyomatik sistemde bilimsel anlamda hem kanıtlanamayacak hem de çürütülemeyecek önermeler veya hipotezlerin olabileceğini yani, tüm aksiyomların tutarlılığının kanıtlanamayacağını ispatlamıştır.

Paradokslar, mantığın temel prensiplerinden sayılan çelişmezlik ilkesine aykırı olan durumları ortaya çıkardığından, hatalı varsayımlar veya yanlış sonuçlar olarak değerlendirilmektedirler. Başka bir açıdan bakıldığında örneğin semantik paradokslarda, karşılaşılan bir sonucun hem doğru hem de yanlış olması durumunu hatalı olarak kabul etmek, bu durumun mutlak kabul edilmiş bir ilkeye zıt olması veya ihtimal dışı bulunması, bir cümlenin hem doğru aynı anda yanlış olabilmesinin imkansız görünmesi sebebiyledir.

Ama eğer bu durumda bir paradoksla karşılaşılmadığı, bunun olanaklı bir durum olduğu varsayılacak olursa, yani paradoksal durum doğru kabul edildiğinde çelişkisizlik prensibine aykırı farklı bir fikir ortaya çıkmaktadır. Dialetizm olarak adlandırılan bu düşünce sistemi, aynı anda hem doğru hem yanlış olabilen önermelerin bulunduğuna işaret etmektedir.

Dialetizm bazı önermelerin hem kendisinin hem de olumsuzunun doğru olarak kabul edilmesinin mümkün olması demektir. Bu düşünce de doğrunun olumsuzunun yanlış olduğunun kesinlikle kabul edilmesi fikriyle çelişmektedir. Böylece, Dialetizm sisteminde doğru olan çelişkilerin var olduğunu iddia eden dialetistler, farklı bir bakış açısıyla çelişkisizlik ilkesinin karşıtı olan ve bir çelişki veya tutarsızlık ilkesi olarak adlandırılabilecek ilkeyi kabul etmektedirler.

Bu açıdan bakıldığında, ortaya konan her paradoks belki de henüz kavramakta yetersiz olduğumuz bazı kavramlara ve doğruluğu kesin olarak kabul edilmiş bazı ilkelere yeni bakış açıları kazanmamıza neden olacaktır. Gödel'in ortaya koyduğu ve ispatladığı çelişkisizliğin ispatlanamayacağı ve tutarsızlığın sona ermeyeceği düşüncesiyle bu değişim süreklilik kazanacaktır.

Dünyanın sabit olması gibi, asırlar önce bir gerçeklik olarak kabul edilen bu şekildeki bir önermenin çelişiği olarak, dünyanın döndüğü varsayımını paradoks olarak ortaya atan filozofun bu fikrinin zamanla bir kanıt haline dönüşmesi gibi; bugün paradoks olarak kabul edilen bir fikir gelecekte yeni bir gerçeklik oluşturabilecektir.

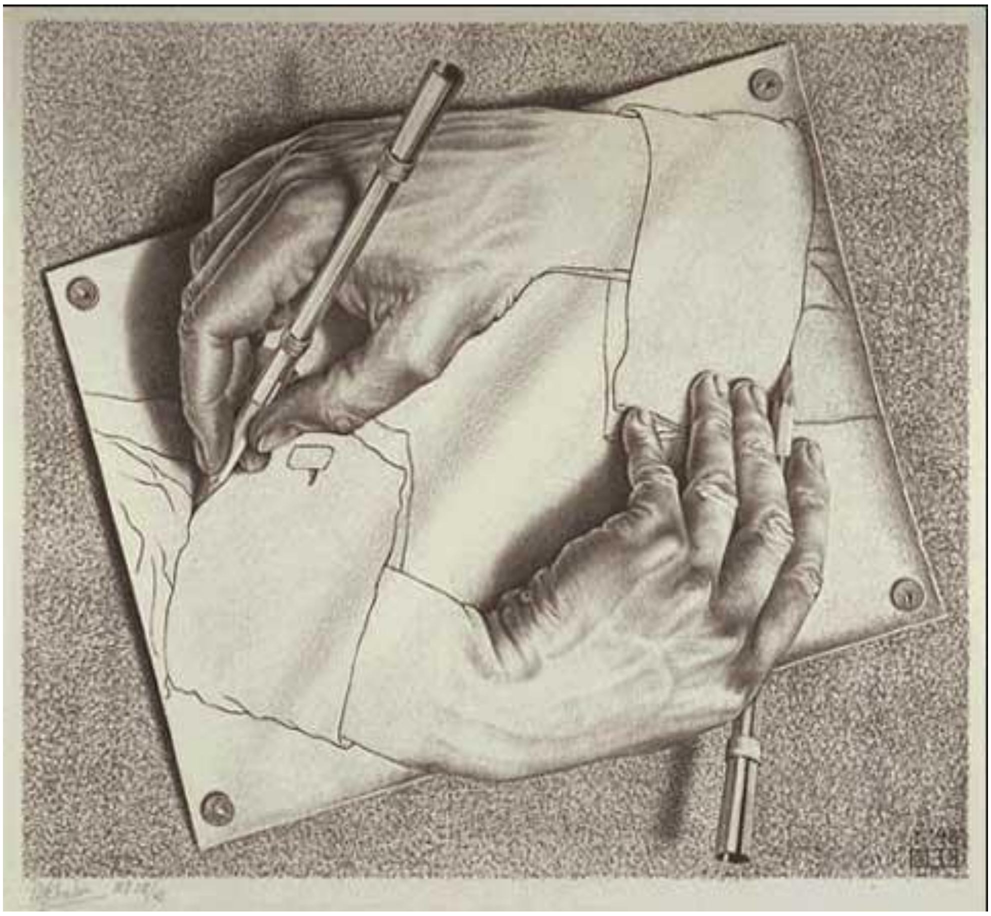
Bertrand Russell'ın düşündüğü gibi; bir paradoksla karşılaşıldığında akla gelen ilk düşünce, çıkarım yaparken hata yapıldığına dairdir. Eğer çıkarımın herhangi bir noktasında hata varsa, var olan kusur bu durumun bir paradoks olmadığı, sadece safsata olduğudur. Ama eğer düşünce sisteminde herhangi bir hata yoksa o zaman, mantıksal ve varlıksal bir kanun olan çelişkisizliği ortadan kaldırabilmek için, normalde belki düşünülemeyecek fikirler ortaya çıkabilir. Paradoksların ortaya konmasıyla önceden düşünülmemiş fikirler ortaya çıkıp, yepyeni teoriler üretilip, bilimsel keşiflere kapı aralanabilir. Bu durum felsefi paradokslar, matematiksel, semantik ve genel olarak mantıksal paradoksların yardımıyla, dil bilimi, mantık, felsefe, matematik gibi tüm temel bilimlerde kendini göstermiştir.

Matematiksel, felsefi, mantıksal veya dil bilimsel bir çok sahada, ilkin çelişki olarak görülen ve şaşırtıcı biçimde, kendi çağlarında kabul edilmeyen düşünceler zamanla yeni ispatlarla birer gerçekliğe dönüşebilir. Bu bakış açısıyla paradokslar, yeni keşiflerin yolundaki ilk basamaklardır.

**EKLER: Maurits Cornelis Escher'in çizdiği paradoksal resimler**

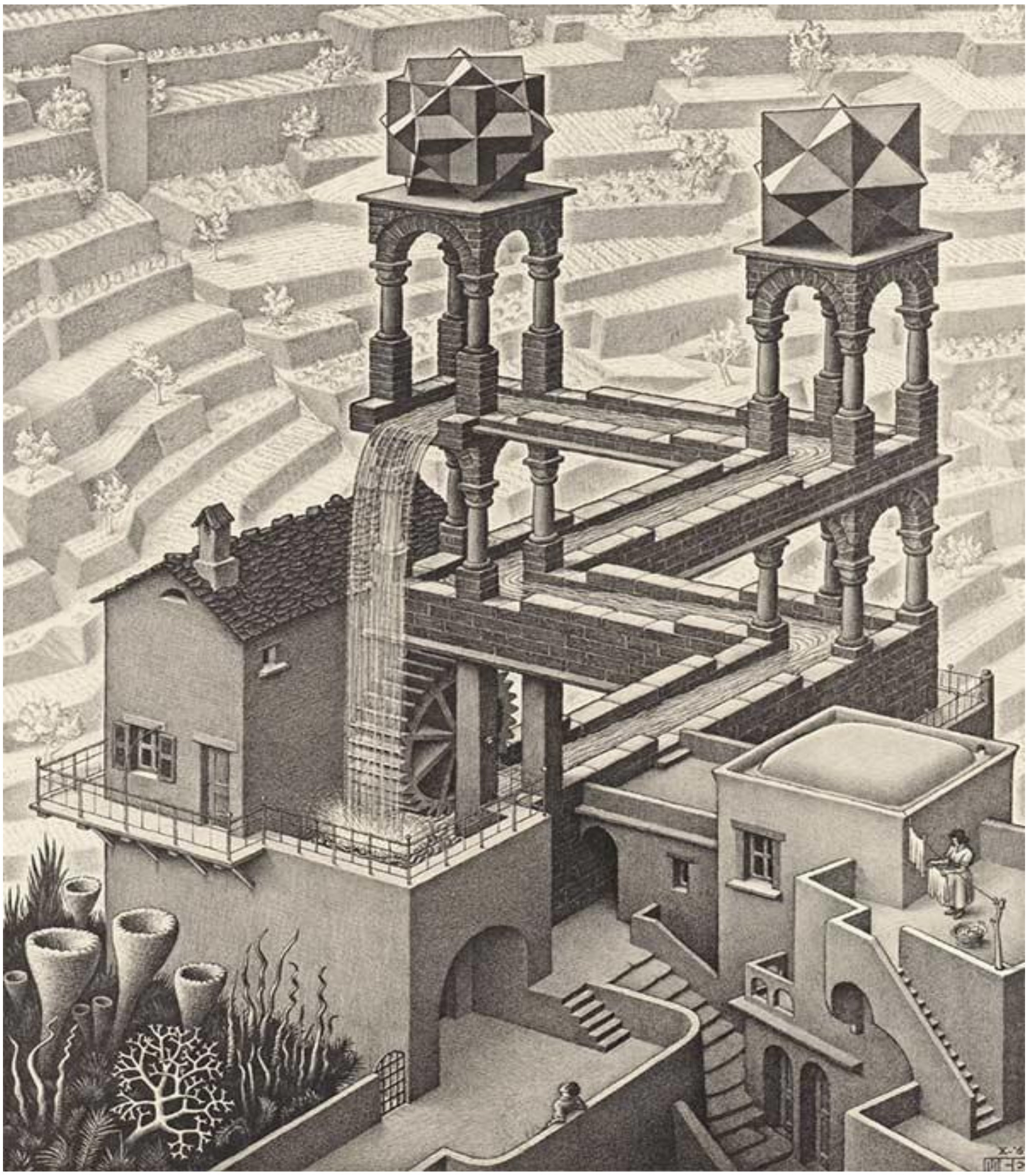
**1- M. C. Escher Oto portresi : Elde Yansımalı Küre Litografı (1935)**

Elde yansımalı küre resmi, oto referans çelişkisini görselleştirmektedir.



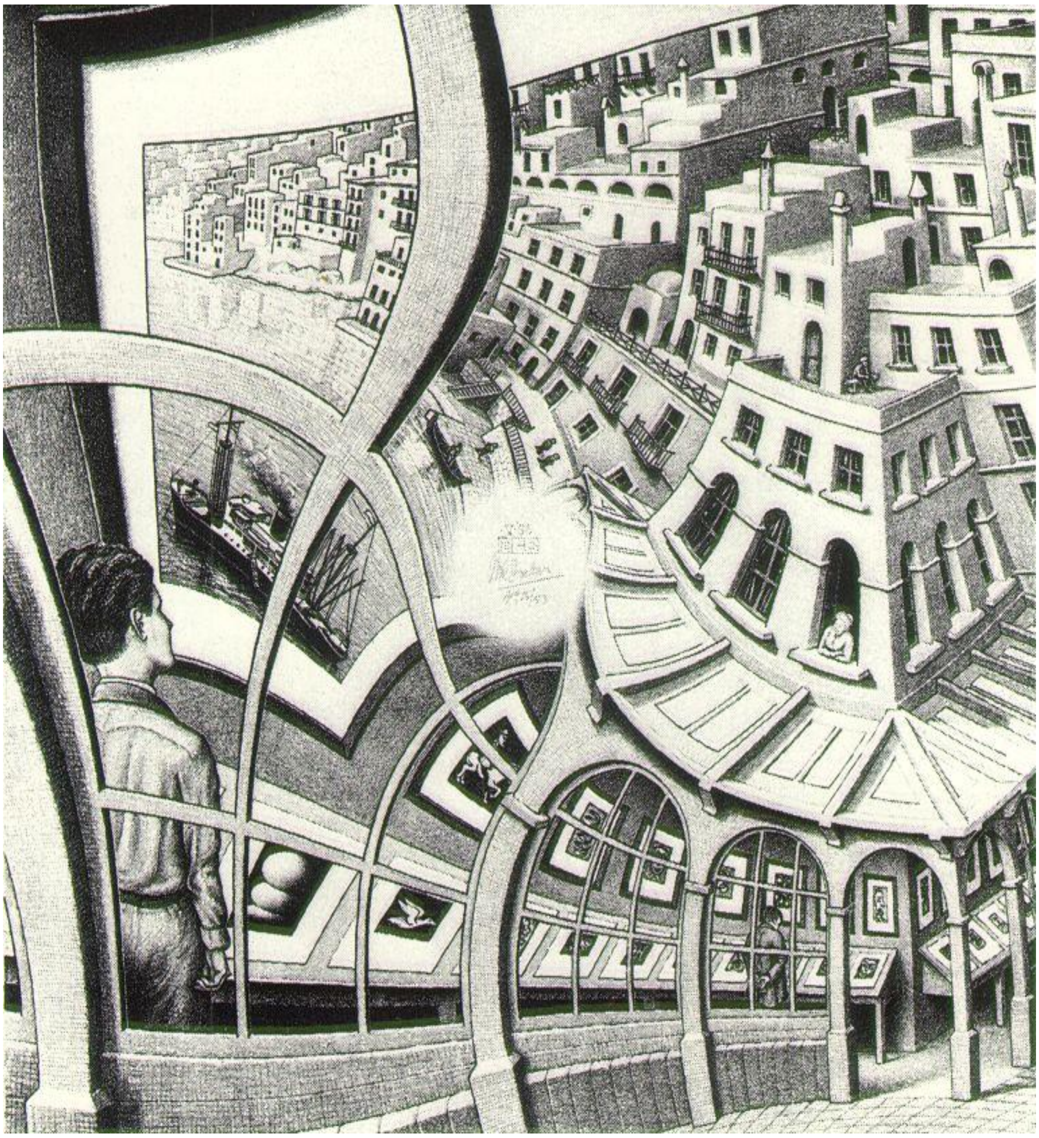
**2- Çizen Eller Gravürü: 1948**

Oto referans Paradoksu'nun resmi:Ünlü ressam Maurits Cornelis Escher tarafından çizilen "çizen eller" resmi, kendini kaynak gösterme (oto referans) çelişkisini ifade etmektedir. Bu döngüde iki el birbirini takip ettiği için sıkı bir döngü söz konusudur.



**3- Sonsuz Döngüyü Betimleyen Şelale Resmi: 1961**

Bu resimde, “kendi kendini çizen eller” resminden farklı olarak daha gevşek bir döngü söz konusudur. Diğer resimde iki aşamalı bir döngü resmedilirken burada beş aşama sonra başa dönen bir gevşek döngü tasvir edilmiştir.

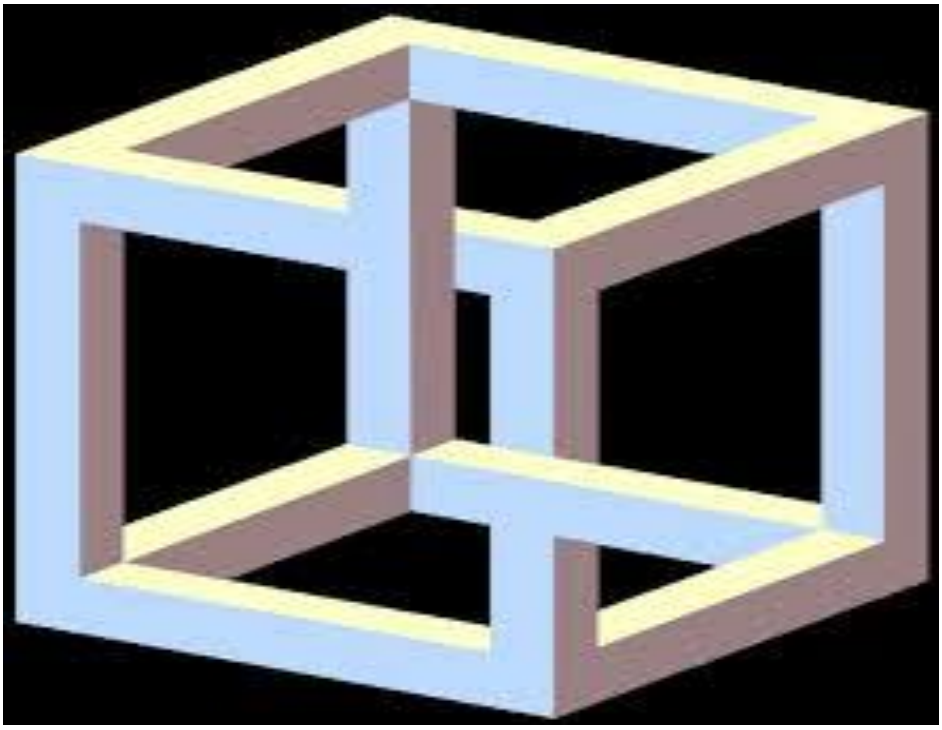


**4- Resim Galerisi: 1956**

Kendisinden çıkıp yine kendisine dönen resmi gösteren, resim galerisi çalışması; sonsuzluk ve oto referans paradoksları örneğinin görselleşmiş halidir.

**5- İmkansız Merdiven: 1960**

Sürekli Çıkan Sonsuz Merdiven



**6-İmkansız Küp çizimi**

Çizim, tüm biçimiyle gözümüzün önünde olsa da aslında var olmayan bir şeyi temsil etmektedir. Russell kümesi gibi.

## KAYNAKÇA


Aristoteles, *Metafizik*, çev., Ahmet Arslan, Sosyal Yayınları, İstanbul 1996.

Aster, Ernst Von, *İlkçağ ve Ortaçağ Felsefe Tarihi*, çev., Vural Okur, İm Yayınları, İstanbul 2005.

Barker, Stephen F., *Philosophy Of Mathematics*, Ed., Elizabeth &Monroe Beardsley, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, USA 1964.

Barwise, Jon ve Etchemendy, John, *Language Proof and Logic*, Csli Publications, Seven Bridges Press, New York 1999.

Benardet'e, Jose A., *Infinity An Essay In Metaphysics*, Oxford University Press, Great Britain 1964.

Bocheński, I. M., *Ancient Formal Logic*, North&Holland Publishing Company, Amsterdam 1951.

Borchert, Donald M., *Encyclopedia Of Philosophy*, 2. b., C. V, USA 2006.

Bumann, Waltraud, "Dil Felsefesi", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, çev., Doğan Özlem, 2.b., İnkılap Yayınları, İstanbul 1997.

Bunch, Bryan, *Mathematical Fallacies and Paradoxes*, Dover Publications Inc., New York 1997.

Butler, Jethro, *Key Terms in Logic*, Ed., Federica Russo, Jon Williamson, Continuum International Publishing Group, London 2010.

Casti, John L. ve Depauli, Werner, *Gödel*, çev., Ergün Akça, Kabalcı Yayınevi, 1.b., İstanbul 2004.

Cave, Peter, *This Sentence is False*, The Continuum Books Group, London 2009.

Clapham, Christopher ve Nicholson, James, *The Concise Oxford Dictionary Of Mathematics*, 4. b., Oxford University Press, New York 2009.

Clark, Michael, *Paradoxes From A To Z*, Second Edition, Routledge, New York 2007

Clark, Michael, *Paradokslar Kitabı*, Hil Yayınları, İstanbul 2009.

Cook, Roy T. (2005), "Infinity in Mathematics and Logic", *in Encyclopedia Of Philosophy*, Ed., Donald M. Borchert, Second Edition, Volume IV, Thomson Corporation, USA 2006.

Cook, Roy T., *A Dictionary Of Philosophical Logic*, Edinburgh University Press, Edinburgh 2009.

Darling, David, *The Universal Book Of Mathematics*, Wiley&Sons Inc., New Jersey 2004.

Delacampagne, Christian, *20. Yüzyıl Felsefe Tarihi*, çev., Devrim Çetinkasap, TİB Kültür Yayınları, 11. Baskı, İstanbul 2010.

Descartes, Rene, *Principles Of Philosophy*, Translated By John Veitch Edition, Project Gutenberg's The Principles Of Philosophy, USA 2003.

Devellioğlu, Ferit, *Osmanlıca Türkçe Ansiklopedik Lûgat*, 16. Baskı, Aydın Kitabevi Yayınları, Ankara 1999.

Diemer, Alwin, "Biçimsel Ontoloji", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, çev., Doğan Özlem, 2.b., İnkılap Yayınları, İstanbul 1997.

Dummett, Michael, *The Seas of Language*, Clarendon Press, Oxford 1993.

Dummett, Michael, "Gottlob Frege", *in Blackwell Companions To Philosophy A Companion To Analytic Philosophy*, Ed., A. P. Martinich, David Sosa, Blackwell Publishers Ltd., USA 2001.

Ebu Hamid El–Gazâlî, *Felsefenin Temel İlkeleri*, çev., Cemaleddin Erdemci, Vadî Yayınları, Ankara 2002.

Ernest, Paul, *The Philosophy Of Mathematics Education*, Routledge Falmer, The Taylor&Francis E-Library, UK 2004.

Farabî, İhsâ'ül - Ulûm, çev., Ahmet Ateş, Millî Eğitim Basımevi, İstanbul 1990.

Feys, Robert, "Mantık", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, Derleyen: Doğan Özlem, 2. b., İnkılap Yayınları, İstanbul 1997.

Fowler, H. W ve Fowler, F. G., *The Concise Oxford Dictionary Of Current English*, 7. b., Oxford At The Clarendon Press, London 1919.

Frege, Gottlob (1902) ,"Letter to Russell," in Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Pres, Cambridge 1967.

Frege, Gottlob, *Aritmetiğin Temelleri*, çev., H. Bülent Gözkân, YKY, İstanbul 2008.

Gamow, George, *One Two Three..İnfinity*, Dover Publications Inc., New York 1988.

Gardner, Martin, *Gotcha Paradoxes to Puzzle and Delight*, Twentieth Printing W. H. Freeman Company, New York 1999.

Gardner, Martin, *The Colossal Book Of Mathematics Classic Puzzles Paradoxes*, W. Norton Company, New York 2001.

Griffin, Nicholas (Ed,), *The Cambridge Companion To Bertrand Russell*, Cambridge University Press, New York 2003.

Hammack, Richard, *Book Of Proof*, 2. b., Virginia Commonwealth University, Creative Commons Attribution, USA 2013.

Heath, Sir Thomas, *A History Of Greek Mathematics*, C. I, Oxford At The Clarendon Press, London 1921.

Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguin Books Ltd., UK 1980.

İbn Rüşd, *Faslûl-Makâl*, çev., Doç.Dr. Bekir Karlığa, İşaret Yayınları, İstanbul 1992.

İbn Sina, *İşaretler ve Tembihler*, çev., Ali Durusoy, Muhittin Macit, Ekrem Demirli, Litera Yayıncılık, İstanbul 2005.

İbn Sina, *Oluş ve Bozuluş*, çev., Muammer İskenderoğlu, Ed., Muhittin Macit, Litera Yayıncılık, İstanbul 2008.

Kamareddine, Fairouz, Laan, Twan ve Nederpelt, Rob, *A Modern Perspective On Type Theory*, C. 29, Kluwer Academic Publishers, New York 2004.

Kenny, Anthony, *A New History Of Western Philosophy*, C. III, Clarendon Press, New York 2006.

Kenyon, T., “Paradoxes, Semantic”, *in Concise Encyclopedia Of Philosophy Of Language and Linguistics*, Ed., Alex Barber&Robert J.Stainton, Elsevier Ltd., UK 2010.

Kerferd, G. B. (1967), “apeiron” *in Encyclopedia Of Philosophy*, Ed., Donald M. Borchert, Second Edition, C. I, A Part Of The Thomson Corporation, USA 2006.

Klement, Kevin C. , *Frege And The Logic Of Sense And Reference*, Routledge, London 2002.

McGee, Vann (2005), “Logical Paradoxes”, *in Encyclopedia Of Philosophy*, 2. Edition, Volume V, Ed., Donald M. Borchert, USA 2006.

Moritz, Helmut, *Science Mind and Universe*, Heidelberg, Wichmann 1995.

Morrison, Joel D., *Spinbitz İnterface-Philosophy Mathematics and Nondual Rational Empricism*,Volume I, USA 2007.

Nagel, Ernest ve Newman, James R., *Gödel Kanıtlaması*, çev., Bülent Gözkân Sarmal Yayınevi, İstanbul 1994.

Nagel, Ernest ve Newman, James R., *Gödel's Proof*, Routledge, This edition published in the Taylor&Francis e-Library, London 2004.

Northrop, Eugene P., *Riddles İn Mathmematics*, D. Van Nostrad Company Inc., Princeton, New Jersey 1944.

Paulos, John Allen, *Düşünüyorum Öyleyse Gülüyorum*, çev., Türkan Yöney, Sarmal Yayınevi, İstanbul 1998.

Paulos, John Allen, *I Think Therefore I Laugh*, Columbia University Press, New York 2000.

Peat, F. David, *From Certainty To Uncertainty*, Joseph Henry Press, Washington 2002.

Pirie, Madsen, *How To Win Every Argument*, Continuum International Publishing Group, London 2006.

Poincare, Henri, *Son Düşünceler*, çev., Hamdi Ragıp Atademir ve Süleyman Ölçen, 2. b., Milli Eğitim Basımevi, İstanbul 1986.

Popper, Karl, *The Logic of Scientific Discovery*, This edition published in the Taylor & Francis e-Library, London&New York 2005.

Porter, Burton F., *What The Tortoise Taught Us*, Rowman&Littlefield Publishers Inc., UK 2011.

Putnam, Hilary, *Reason Truth and History*, Cambridge University Press, UK 1981.

Quine, W. V., *The Ways Of Paradox*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1976.

Reichenbach, Hans, *Bilimsel Felsefenin Doğuşu*, çev., Cemal Yıldırım, Remzi Kitabevi, İstanbul 1993.

Rossi, Paolo, *Modern Bilimin Doğuşu*, çev., Neşenur Domaniç, 1. b., Literatür Yayıncılık, İstanbul 2009.

Rucker, Rudy, *Infinity and The Mind*, Princeton University Press, New Age International Ltd. Publishers, Delhi 2007.

Russell, Bertrand, *My Philosophical Development*, George Allen&Unwin Ltd., Published By Simon And Schuster Inc., New York 1959.

Russell, Bertrand, *The Basic Writings Of Bertrand Russell*, Ed., Robert E. Egner and Lester E. Denonn, Routledge Classics, London&New York 2009.

Russell, Bertrand, *Introduction To Mathematical Philosophy*, Second Edition, George Allen&Unwin Ltd., London 1920.

Russell, Bertrand, *Our Knowledge Of The External World*, George Allen&Unwin Ltd., London 1914.

Russell, Bertrand, *The Principles Of Mathematics*, W.W.Norton&Company Inc., New York 1938.

Russell, Bertrand, *The Problems Of Philosophy*, Walsh Philosophy Collection, Home University Library Of Modern Knowledge, Ed., Herbert Fisherno, New York 2007.

Russell, Bertrand, *The Philosophy of Logical Atomism*, Taylor&Francis e-Library, Routledge Classics, London&Newyork 2009.

Russell, Bertrand (1902) , "Letter to Frege," in Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967.

Russell, Bertrand, "Mathematical Logic As Based On The Theory Of Types" (1908), *in Logic And Knowledge*, Ed., Robert Charles, Marsh Capricorn Books, New York 1971.

Russell, Bertrand, *History Of Western Philosophy*, George Allen and Unwin Ltd., Second Impression, Great Britain 1947 (Russell, Bertrand, *Batı Felsefesi Tarihi*, çev., Muammer Sencer, Say Yayınları, 7. b., İstanbul 2000)

Russell, Bertrand, *Dış Dünya Üzerine Bilgimiz,* çev., Vehbi Hacıkadiroğlu, İkinci Basım, Kabalcı Yayınevi, İstanbul 1996.

Sainsbury, R. M., *Paradoxes*, Third edition, Cambridge University Press, UK 2006.

Shapiro, Stewart, *The Oxford Handbook Of Philosophy Of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, New York 2005.

Smilansky, Saul, *10 Moral Paradoxes*, Blackwell Publishing Ltd., UK 2007.

Smullyan, Raymond M., *What Is The Name Of This Book?,* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1978.

Stegmüller, Wolfgang, "Bilim Kuramı", *Günümüzde Felsefe Disiplinleri*, Derleyen: Doğan Özlem, 2.b., İnkılap Yayınları, İstanbul 1997.

Stepanov, Alexander A. ve Rose, Daniel E., *Notes on Set Theory*, Logic and Computation, USA 2013.

Stokes, Philip, *Philosophy 100 Essential Thinkers*, Enchanted Lion Books, New York 2006.

Sorensen, Roy, *A Brief History of the Paradox,* Oxford University Press Inc., New York 2003.

Sorensen, Roy, "Paradoxes Of Rationality", *in The Oxford Handbook Of Rationality*, Ed., Alfred R. Mele, Piers Rawling, Oxford University Press, New York 2004.

Taliaferro, Charles ve Marty, Elsa J., *A Dictionary of Philosophy of Religion*, The Continuum International Publishing Group, New York 2010.

Tarski, Alfred, *Truth and Proof*, Scientific American, USA 1969.

Tsonis, A. Anastasios, *Rules And Randomness In The Realm Of The Infinite*, Imperial College Press, London 2008.

Türkşen, I. Burhan, *An Ontological and Epistemological Perspective Of Fuzzy Set Theory*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands 2006.

Vilenkin, N. Ya., *In Search Of Infinity*, Translated By Abe Shenitzer, Birkhäuser, Boston 1995.

Whitehead, Alfred North ve Russell, Bertrand, *Principia Mathematica*, Volume I, Second Edition, Cambridge University Press, London 1963.

Whitehead, Alfred North, *Science and The Modern World*, A Pelican Mentor Book, Published By The New American Library, New York 1948.

http://www.mcescher.com/gallery/most-popular/