

RLW ve KdV Denklemlerinin Solitary Dalga ve Soliton Çözümleri

Oğuz İduğ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2013

Solitary wave and soliton solutions of the RLW and KdV equations

Oğuz İduğ

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics
June 2013

RLW ve KdV Denklemlerinin Solitary Dalga ve Soliton Çözümleri

Oğuz İduğ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk

Haziran 2013

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Oğuz İduğ'un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "RLW Denkleminin Sayısal Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

Üye : Prof. Dr. İdris Dağ

Üye : Doç. Dr. Ahmet Bekir

Üye : Doç. Dr. Suat Pat

Üye : Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma regularized long wave (RLW) ve Korteweg de-Vries (KdV) denklemlerinin genişletilmiş kübik b-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri hakkındadır.

İlk bölümde, daha sonraki bölümde kullanılacak bazı tanımlar verilmiştir. İlk olarak soliton ve solitary dalgalar hakkında bilgi verilerek, sonlu farklar ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi anlatılmıştır. Spline fonksiyon kavramı tanımlandıktan sonra kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar elde edilmiştir. Son olarak sonraki bölümlerde sayısal olarak çözülecek olan RLW ve KdV denklemleri tanıtılmıştır.

İkinci bölümde RLW denkleminin sayısal çözümü genişletilmiş kübik b-spline Galerkin yöntemi ile araştırılmıştır. Solitary dalga ve iki tane solitary dalgasının çarpışması test problemleri önerilen metodun incelenmesinde kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde KdV denkleminin sayısal çözümü genişletilmiş kübik b-spline Galerkin yöntemi ile araştırılmıştır. Solitony dalga ve iki tane soliton dalgasının çarpışması test problemleri önerilen metodun incelenmesinde kullanılmıştır.

Son bölümde ise önerilen metotlar hakkında öneriler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: B-spline, sonlu elemanlar metodu, Soliton, Solitary dalgalar

SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of regularized long wave (RLW) and Korteweg de-Vries (KdV) equations by extended cubic B-spline finite element Galerkin method.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First, a brief history for solitary and soliton waves are given and, the finite difference and the finite element methods are described. After the concept of the spline functions is outlined, cubic B-spline and extended cubic B-spline functions are described and are constructed. Finally, RLW and KdV equations solved numerically in the next chapters are introduced together with their test problems.

In the second chapter, the RLW equation is solved numerically by using extended cubic B-spline Galerkin method. Two test problems including solitary waves and interaction of two solitary waves are used to examine proposed method.

In the third chapter, extended cubic B-spline Galerkin method is used to solve the CKdV equation numerically. The proposed method is examined by using solitary and interaction of two solitary waves test problems.

In the last chapter a discussion about the proposed method is given.

Keywords: B-spline, Finite element method, Soliton, Solitary waves.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk'a, bu çalışma sırasında hiç bir zaman desteğini esirgemeyen eşim Serpil İduğ ile kardeşim Yunus İduğ ve aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Solitary Dalgalar ve Soliton.....	1
1.2 Sonlu Farklar Metodu	4
1.3 Galerkin Sonlu Elemanlar Metodu	6
1.4 Spline Fonksiyonlar	7
1.4.1 Kübik B-Spline galerkin metodu	7
1.4.2 Genişletilmiş kübik B-Spline galerkin metodu	10
1.5 KDV denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri.....	14
1.5.1 Soliton dalga oluşumu	16
1.5.2 İki Soliton dalgasının çarpışması	16
1.6 RLW denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri	17
1.6.1 Solitary dalga oluşumu	18
1.6.2 İki Solitary dalgasının çarpışması	19
2. SAYISAL YÖNTEMİN RLW DENKLEMİNE UYGULANMASI	20
2.1 Metodun Uygulanması	20
2.2 Test Problemleri	26
2.2.1 Solitary dalga oluşumu problemi	26
2.2.2 İki solitary dalgasının çarpışması problemi	35
3. SAYISAL YÖNTEMİN KdV DENKLEMİNE UYGULANMASI	41
3.1 Metodun Uygulanması	41
3.2 Test Problemleri	47

3.2.1 Soliton dalga oluşumu problemi	47
3.2.2 İki soliton dalgasının çarpışması problemi	56
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	62
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	63

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Basit bir dalga profili 1
1.2	Bir solitary dalgasının hareketi..... 3
1.3	$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında $\varphi_{m-1}, \dots, \varphi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları 9
1.4	$\lambda = -10, -5, 0, 5, 10$ için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar 13
2.1	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 27
2.2	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ ve $-1.5 \leq \lambda \leq 1.5$ için L_∞ 28
2.3	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 30
2.4	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 31
2.5	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 31
2.6	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 32
2.7	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.03$ ve $-80 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 34
2.8	iki solitary dalgasının çarpışması $t=0, 60, 150$ 36
2.9	C_1 korunum sabiti için mutlak hata 38
2.10	C_2 korunum sabiti için mutlak hata 39
2.11	C_3 korunum sabiti için mutlak hata 40
3.1	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 48
3.2	$h = \Delta t = 0.1, c = \frac{1}{6}, 0 \leq x \leq 50$ ve $-2 < \lambda < 2$ için L_∞ 49
3.3	$h = 0.1, \Delta t = 0.1, c = \frac{1}{6}$ ve $0 \leq x \leq 50$ için $t = 10$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 51
3.4	$t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu 52
3.5	$h = \Delta t = 0.1, c = \frac{1}{12}, 0 \leq x \leq 50$ ve $-2 < \lambda < 2$ için L_∞ 53
3.6	$h = 0.1, \Delta t = 0.1, c = \frac{1}{12}$ ve $0 \leq x \leq 50$ için $t = 10$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 55

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
3.7	iki soliton dalgasının çarpışması $t=0, 40, 90$	57
3.8	C_1 korunum sabiti için mutlak hata	59
3.9	C_2 korunum sabiti için mutlak hata.....	60
3.10	C_3 korunum sabiti için mutlak hata	61

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri 9
1.2	Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri..... 13
2.1	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 29
2.2	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.03$ ve $-80 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 33
2.3	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 10$ zamanındaki hata normları..... 35
3.1	$h = \Delta t = 0.1, c = \frac{1}{6}, 0 \leq x \leq 50$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 50
3.2	$h = \Delta t = 0.1, c = \frac{1}{6}, 0 \leq x \leq 50$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 54
3.3	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 10$ zamanındaki hata normları..... 56

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar **Açıklama**

KdV	Korteweg de Vries
RLW	Regularized Long Wave

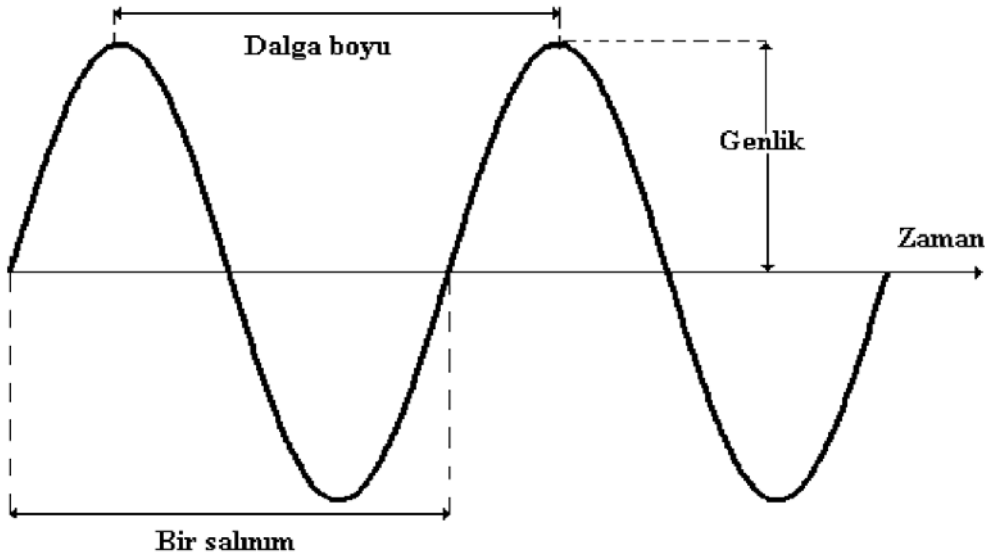
BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak soliton-solitary dalgalar, sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodları özetlendikten sonra sayısal çözümleri araştırılacak olan, RLW ve KdV denklemleri başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtılmıştır. Bu bölümdeki kavramların çoğu (Irk, 2007) referanslı doktora tezi temel alınarak hazırlanmıştır. Ayrıntılı bilgi için referans verilen çalışma ve içindeki referanslar incelenebilir.

1.1 Solitary Dalgalar ve Soliton

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olan dalgalar, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Frekans: Birim zamandaki salınımların sayısı

Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlar, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, F., 1982).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, M., 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

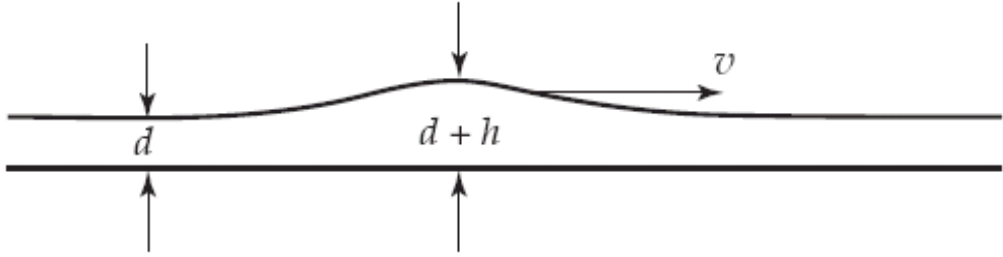
Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarak tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarak adlandırılabilirler. Russel solitary dalgalarını bir su kanalında gözlemledikten sonra laboratuvarında su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

- (i) Solitary dalgaları $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$ şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.

- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.
- (iv) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalğanın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bakınız Şekil 1.2).



Şekil 1.2 Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, laser fiziği, süperiletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chaohao, 1995).

1.2 Sonlu Farklar Metodu

Fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferensiyel denklemler, kısmi türevli diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ile ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar metodu bu yöntemlerden birisidir. Sonlu farklar metodu bir diferensiyel denklemin tanım aralığını, sonlu sayıdaki alt aralıklara ayırarak her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımının yazılması olarak özetlenebilir. Bu durumda diferensiyel denklem bilinen yöntemler ile kolaylıkla çözülebilen bir cebirsel denkleme dönüşecektir.

Bir bağımsız değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir. Sonlu fark yaklaşımını elde etmek için öncelikle $[a, b]$ konum aralığı, N bir pozitif tamsayı, $h = \frac{b-a}{N}$ olmak üzere

$$x_m = a + mh, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

formundaki bölünme noktalarına ayrılınsın. Bu durumda, $u(x)$ fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere, $u(x_m + h)$ ve $u(x_m - h)$ ifadelerinin x_m noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u(x_m + h) = u(x_m) + hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.2)$$

$$u(x_m - h) = u(x_m) - hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (1.3)$$

olarak yazılabilir. Konuma göre birinci türev için sonlu fark yaklaşımı elde edilmek istenirse (1.2-1.3) eşitliklerinden $u_x(x_m)$ teriminin çekilmesi sonucunda

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) - \dots, \quad (1.4)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_m - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (1.5)$$

yazılabileceğinden u ifadesinin x_m noktasındaki birinci türevi

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} + \mathcal{O}(h) \Rightarrow (u_x)_m = \frac{u_{m+1} - u_m}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.6)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_m - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \Rightarrow (u_x)_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.7)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.6-1.7) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve $\mathcal{O}(\cdot)$ ile gösterilir. Hatanın derecesi ne kadar yüksek olursa yaklaşımda genelde o kadar iyi olacaktır. Eğer hatanın derecesi yükseltilmek istenirse (1.3) eşitliği, (1.2) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} u_x(x_m) &= \frac{u(x_m + h) - u(x_m - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ (u_x)_m &= \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995) incelenebilir.

Crank-Nicolson metodu

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, zamana göre ikinci dededen ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank and Nicolson, 1947). Crank ve Phyllis metotlarında, diferensiyel denklemin sonlu fark metoduyla sayısal çözümünü araştırmak için

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\ uu_x &= \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. Burada Δt zaman artımıdır. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir. Dolayısıyla

zaman ve konum değişkenleri içeren bir kısmi diferensiyel denklemin veya sistemin sayısal çözümleri araştırılırken Crank-Nicolson yöntemi tercih edildiğinde zamana göre bir parçalanma yapılabilmektedir.

1.3 Galerkin Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar yöntemleri, çeşitli mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan problemlerin kabul edilebilir bir yaklaşım ile çözümünün arandığı bir sayısal çözüm yöntemidir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için öncelikle ele alınan probleminin çözüm bölgesi alt bölgelere parçalanır ve her alt bölgede polinom olarak kabul edilen çözümün katsayıları belirlenmeye çalışılır.

L bir lineer diferensiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonsiyon ve $u(x)$ aranan çözüm olmak üzere

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.9)$$

şeklinde diferensiyel denklemin sayısal çözümü için ağırlıklı kalan metodu kullanıldığında, aranan $u(\cdot)$ ifadesi yerine

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.10)$$

formundaki bir $U(\cdot)$ sonlu yaklaşım serisi kullanılır. (1.10) eşitliğinde $a_j, j = 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılar olmak üzere, $\phi_j(x), j = 1, \dots, N$ fonsiyonu diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır. Bununla birlikte $\phi_j(\cdot)$ fonsiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemini sağlamazlar. Bu durumda (1.10) yaklaşık çözümü, (1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$R(x) = LU(x) - f(x) = LU(x) - Lu(x) \quad (1.11)$$

olarak tanımlanan $R(x)$ kalanı elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde $R(x)$ kalanı, seçilen $\phi_j(\cdot)$ fonsiyonları ve a_j bilinmeyen parametrelerinin bir fonsiyonudur. Bu yöntemler yardımı ile a_j parametrelerinin belirlenmesinde, $R(x)$ kalanı ile bir w_j ağırlık fonsiyonunun çarpımının Ω bölgesindeki integralinin sıfır olması dolayısıyla

$$\int_{\Omega} w_j(x) R(x) dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

olması istenir. Böylece (1.12) formundaki N bilinmeyenli N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Ağırlıklı kalan metodunun farklı uygulamaları vardır. Bu uygulamalar ağırlık fonksiyonunun seçimine göre değişir. Ağırlıklı kalanının metodunun bir uygulaması olan Galerkin sonlu elemanlar metodunda w_i ağırlık fonksiyonları olarak $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları seçilir. Dolayısıyla Galerkin metodu için çözüm, (1.10) eşitliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$LU(x) - Lu(x) = 0$$

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \left[L \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) - f(x) \right] dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.13)$$

formunda elde edilir.

1.4 Spline Fonksiyonlar

İlk olarak 1946 yılında Schoenberg tarafından tanıtılmıştır (Schoenberg, 1946). Bununla birlikte spline fonksiyonlar ancak 1960 yılından sonra matematiksel modellere ve fiziksel problemlere uygulanmıştır. $[a, b]$ aralığının bir parçalanması üzerindeki tüm noktaları sağlayan polinom fonksiyonların derecesi, nokta sayısı arttıkça artacaktır. Bununla birlikte $[a, b]$ aralığını alt aralıklara bölerek belirlenen alt aralıklarda daha düşük dereceden polinom fonksiyonlar tanımlanabilir. Spline fonksiyon kavramı bu düşünceden ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla spline interpolasyon parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani verilen çözüm aralığı sonlu sayıda alt aralıklara bölünerek her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlar yardımı ile yaklaşımlar elde edilir. Spline fonksiyonlar,

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

sonlu parçalanışının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k . dereceden uygun polinomlar olup, tanımlanan her alt aralıkta $(k - 1)$. mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır.

1.4.1. Kübik B-Spline Galerkin metodu

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere $\phi_m(x)$, x_m noktalarındaki kübik B-spline fonksiyonları olsun. Kübik B-Spline

Galerkin metodunda, deneme fonksiyonları olarak kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak, $u(x, t)$ çözümü için $U_m(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.14)$$

formunda araştırılır. Burada $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametreler olup sınır şartları ve ileride tanımlanacak olan denklem sistemi yardımıyla bulunacaktır. $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışına tanımlanan ϕ_m kübik B-spline fonksiyonları $m = -1, 0, \dots, N+1$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (1.15)$$

formundadır. Kübik B-spline fonksiyonları ile onun birinci ve ikinci mertebeden türevleri $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$ aralığı dışında sıfırdır. $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^3} (x_{m-2} - x_{m-2})^3 = 0, \\ \phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m-1} - x_{m-1}) + 3h(x_{m-1} - x_{m-1})^2 - 3(x_{m-1} - x_{m-1})^3] = 1, \\ \phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^3] = 4, \\ \phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^3} (x_{m+2} - x_{m+1})^3 = 1, \\ \phi_m(x_{m+2}) &= 0, \\ \phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{3}{h^3} (x_{m-2} - x_{m-2})^2 = 0, \\ \phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [3h^2 + 6h(x_{m-1} - x_{m-1}) - 9(x_{m-1} - x_{m-1})^2] = \frac{3}{h}, \\ \phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0, \\ \phi'_m(x_{m+1}) &= -\frac{3}{h^3} (x_{m+2} - x_{m+1})^2 = -\frac{3}{h}, \\ \phi'_m(x_{m+2}) &= 0, \\ \phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{6}{h^3} (x_{m-2} - x_{m-2}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m''(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m-1} - x_{m-1})] = \frac{6}{h^2}, \\
\phi_m''(x_m) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2}, \\
\phi_m''(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3} (x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{6}{h^2}, \\
\phi_m''(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Tablo 1.1'de, bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri görülmektedir.

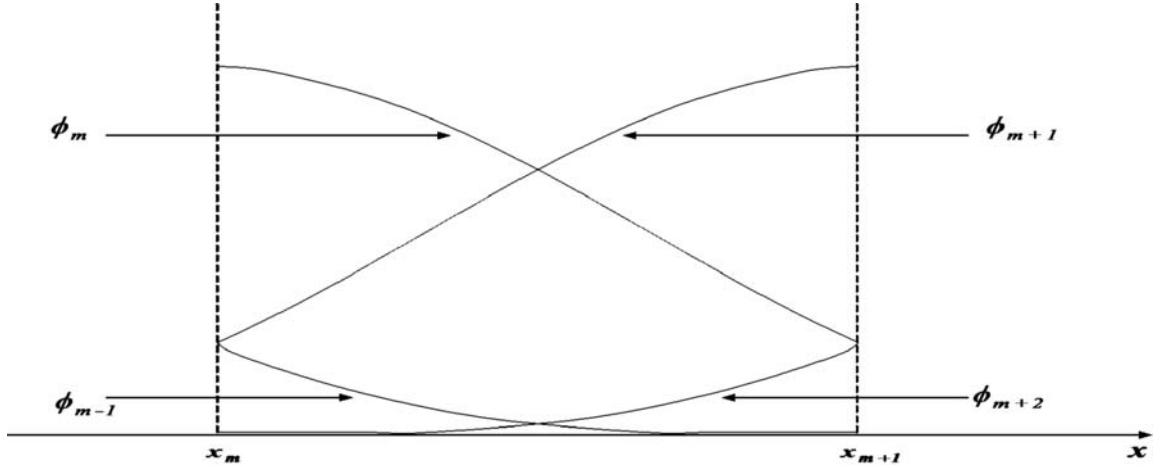
Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi_m'(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi_m''(x)$	0	6	-12	6	0

Şekil 1.3'den görüleceği gibi $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Böylece U için yaklaşım ifadesi

$$U_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.16)$$

formunda bulunur.



Şekil 1.3: $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında $\phi_{m-1}, \dots, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları

Zamana göre birinci mertebeden homojen bir kısmı türevli denkleme Crank-Nicolson yöntemi uygulandığında

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + L \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) = 0 \quad (1.17)$$

adi diferensiyel denkleme ulaşsın. Bu durumda $[a, b]$ konum aralığının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığında da kübik B-spline Galerkin yöntemi diferensiyel denkleminin çözümüne uygulandığında, $i = m - 1, \dots, m + 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(x) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^{n+1}(t) + \frac{\Delta t}{2} L \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^{n+1}(t) \right) \right] dx \\ = \\ \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(x) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^n(t) - \frac{\Delta t}{2} L \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^n(t) \right) \right] dx \end{aligned} \quad (1.18)$$

elde edilecektir. Burada ϕ_m , $m = 0, 1, \dots, N - 1$ kübik B-spline fonksiyonları ve δ_m ise bulunması gereken bilinmeyenlerdir. Denklem sistemi açık olarak yazılırsa m nin her bir değeri için 4×4 lük bir matris gelecektir. Her bir matris için bilinmeyenler ise

$$\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}$$

olacaktır. Her bir matris hesaplandıktan sonra matrisler birbirlerine eklenerek gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N, \delta_{N+1}$$

olarak bilinmeyenler bulunabilir.

1.4.2 Genişletilmiş kübik B-Spline Galerkin metodu

$\phi_m(x)$ genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalamış $a = x_0 < x_1 \dots x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarında tanımlansınlar. Deneme fonksiyonları olarak genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ için $U_m(x, t)$ yaklaşık çözümü genişletilmiş kübik B-Spline Galerkin metodunda

$$U_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.19)$$

formunda araştırılır. Burada $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametreler olup sınır şartları ve ilerde tanımlanacak olan denklem sistemi yardımıyla bulunacaktır. $[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışına tanımlanan ϕ_m genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları $m = -1, 0, \dots, N + 1$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} 4h(1 - \lambda)(x - x_{m-2})^3 + 3\lambda(x - x_{m-2})^4 & [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (4 - \lambda)h^4 + 12h^3(x - x_{m-1}) \\ + 6h^2(2 + \lambda)(x - x_{m-1})^2 & [x_{m-1}, x_m], \\ -12h(x - x_{m-1})^3 - 3\lambda(x - x_{m-1})^4 \\ (4 - \lambda)h^4 + 12h^3(x_{m+1} - x) \\ + 6h^2(2 + \lambda)(x_{m+1} - x)^2 & [x_m, x_{m+1}], \\ -12h(x_{m+1} - x)^3 - 3\lambda(x_{m+1} - x)^4 \\ 4h(1 - \lambda)(x_{m+2} - x)^3 + 3\lambda(x_{m+2} - x)^4 & [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (1.20)$$

formundadır (Gang, 2008). $\lambda = 0$ alındığında genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları, bilinen kübik B-spline fonksiyonlarına dönmektedir. En doğru sonuç elde edilene kadar, üzerinde çalışılan denklemlerin sayısal çözümleri λ nın farklı değerleri için yeniden hesaplanır. $\lambda = 0$ alınması durumunda bulunan sonuçlar kübik B-spline yönteminin sonuçlarına karşılık geldiğinden λ nın sıfır olduğu kübik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yöntem ile λ nın sıfırdan farklı değerler aldığı genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yöntem arasında karşılaştırma yapılabilmektedir. Kübik B-spline fonksiyonlarında olduğu gibi genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları ile onun birinci ve ikinci mertebeden türevleri $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$ aralığı dışında sıfırdır. $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında, $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla,

$$\phi_m(x_{m-2}) = \frac{1}{24h^4} [4h(1 - \lambda)(x_{m-2} - x_{m-2})^3 + 3\lambda(x_{m-2} - x_{m-2})^4] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{m-1} - x_{m-1}) + 6h^2(2+\lambda)(x_{m-1} - x_{m-1})^2 \\
&\quad - 12h(x_{m-1} - x_{m-1})^3 - 3\lambda(x_{m-1} - x_{m-1})^4], \\
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{4-\lambda}{24}, \\
\phi_m(x_m) &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 - 12h^3(x_m - x_{m+1}) + 6h^2(2+\lambda)(x_m - x_{m+1})^2 \\
&\quad + 12h(x_m - x_{m+1})^3 - 3\lambda(x_m - x_{m+1})^4], \\
\phi_m(x_m) &= \frac{8+\lambda}{12}, \\
\phi_m(x_{m+1}) &= -\frac{1}{24h^4} [4h(\lambda-1)(x_{m+1} - x_{m+2})^3 + 3\lambda(x_{m+1} - x_{m+2})^4] = \frac{4-\lambda}{24}, \\
\phi_m(x_{m+2}) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{24h^4} [12h(1-\lambda)(x_{m-2} - x_{m-2})^2 + 12\lambda(x_{m-2} - x_{m-2})^3] = 0, \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{24h^4} [12h^3 + 12h^2(2+\lambda)(x_{m-1} - x_{m-1}) - 36h(x_{m-1} - x_{m-1})^2 \\
&\quad - 12\lambda(x_{m-1} - x_{m-1})^3], \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{2h}, \\
\phi'_m(x_m) &= \frac{1}{24h^4} [-12h^3 + 12h^2(2+\lambda)(x_m - x_{m+1}) + 36h(x_m - x_{m+1})^2 \\
&\quad - 12\lambda(x_m - x_{m+1})^3], \\
\phi'_m(x_m) &= 0, \\
\phi'_m(x_{m+1}) &= -\frac{1}{24h^4} [4h(\lambda-1)(x_{m+1} - x_{m+2})^3 + 3\lambda(x_{m+1} - x_{m+2})^4] = -\frac{1}{2h}, \\
\phi'_m(x_{m+2}) &= 0, \\
\phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{24h^4} [24h(1-\lambda)(x_{m-2} - x_{m-2}) + 36\lambda(x_{m-2} - x_{m-2})^2] = 0, \\
\phi''_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{24h^4} [12h^2(2+\lambda) - 72h(x_{m-2} - x_{m-1}) - 36\lambda(x_{m-2} - x_{m-1})^2] = \frac{2+\lambda}{2h^2}, \\
\phi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{2+\lambda}{h^2}, \\
\phi''_m(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{2+\lambda}{2h^2}, \\
\phi''_m(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Tablo 1.2'de, bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri görülmektedir.

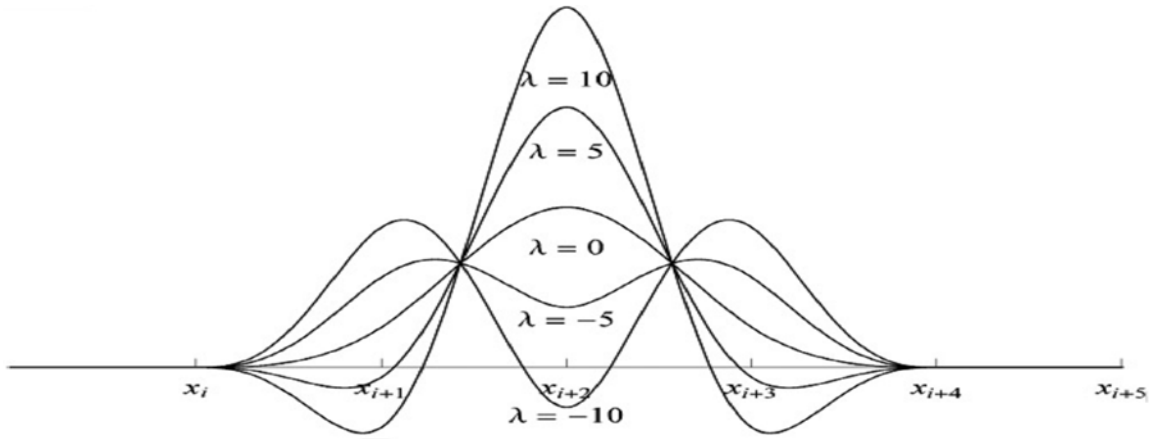
Tablo 1.2: Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$24\phi_m(x)$	0	$4 - \lambda$	$16 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	0
$2h\phi'_m(x)$	0	1	0	-1	0
$2h^2\phi''_m(x)$	0	$2 + \lambda$	$-4 - 2\lambda$	$2 + \lambda$	0

Ayrıca her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} gibi (1.20) deki dört genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür ve böylece U için yaklaşım idafesi

$$U_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.21)$$

formunda bulunur. Şekil 1.4 de ise genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar λ nın farklı değerleri için görülmektedir (Hamid et al., 2011).

Şekil 1.4: $\lambda = -10, -5, 0, 5, 10$ için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar

Kübik B-spline Galerkin metodunu anlatırken kullanılan (1.17) adi diferensiyel denklemini ele alalım. Denkleme $[a, b]$ konum aralığının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığında da genişletilmiş kübik B-spline Galerkin yöntemi uygulandığında, $i = m - 1, \dots, m + 2$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(x) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^{n+1}(t) + \frac{\Delta t}{2} L \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^{n+1}(t) \right) \right] dx \\ = \\ \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(x) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^n(t) - \frac{\Delta t}{2} L \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j^n(t) \right) \right] dx \end{aligned} \quad (1.22)$$

elde edilecektir. Burada kübik B-spline Galerkin yönteminden farklı olarak ϕ_m , $m = 0, 1, \dots, N - 1$ genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde denklem sistemi açık olarak yazılırsa m nin her bir değeri için 4×4 lük bir matris gelecektir. Her bir matris için bilinmeyenler ise

$$\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}$$

olacaktır. Her bir matris hesaplandıktan sonra matrisler birbirlerine eklenerek gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N, \delta_{N+1}$$

olarak bilinmeyenler de kübik B-spline Galerkin yöntemine benzer şekilde bulunabilir.

1.5 KdV denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.23)$$

formundan sığ su dalgalarının hareketi modelleyen denklem üzerine çalışmaya başladılar. Denklemden

- $u(x, t)$, dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$, küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$, dağılma parametresine,
- γ , lineer olmayan parametreye,
- T , yüzey gerilimine;

- ρ , suyun yoğunluđuna;

karşılık gelmektedir. Korteweg ve de Vries, (1.23) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.24)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Buradaki $\tilde{u}(x - vt)$ terimi, Russell'ın solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries, solitary dalgaların varlığını kanıtlamış oldular ve çalışmalarını Korteweg'in damışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınladılar (Korteweg and de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky and Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarakta verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

Bu çalışmada (1.23) denkleminin alternatif bir formu olan μ reel sabitler, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermek üzere

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (1.25)$$

formundaki KdV denklemi üzerinde çalışılacaktır. KdV denklemi için soliton dalga oluşumu problemindeki fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \rightarrow 0$ şeklindedir. Bununla birlikte sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığına sınırlandırılacak ve dolayısıyla

$$\left. \begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) = 0 \\ u'(a, t) = u'(b, t) = 0 \end{aligned} \right\} t > 0 \quad (1.26)$$

sınır şartları, $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.27)$$

başlangıç şartı kullanılacaktır. Ayrıca sayısal metodun analitik çözümle olan uyumunun kontrolü için

$$L_\infty = \max_m |U_m - u(x_m, t)| \quad (1.28)$$

hata normu kullanılacaktır. Burada U_m , x_m noktasındaki yaklaşık çözümü, $u(x_m, t)$ ise tam çözümü göstermektedir.

1.5.1 Soliton oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = \varepsilon c$ dalga hızlı KdV denkleminin soliton çözümü $A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(A[x - x_0 - vt]) \quad (1.29)$$

formunda yazılabilir (Alexander and Morris, 1979). (1.29) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(A[x - x_0]) \quad (1.30)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

KdV denkleminin için ilk 3 korunum sabiti

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 - 3 \frac{\mu}{\varepsilon} (u_x)^2 \right) dx \quad (1.31)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$C_1 = \frac{6c}{A}, \quad C_2 = \frac{12c^2}{A}, \quad C_3 = \frac{144c^2 (\mu A^2 - c\varepsilon)}{5A\varepsilon} \quad (1.32)$$

olarak bulunabilir.

1.5.2 İki Soliton dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genlikli iki soliton dalgasının çarpışma problemi $A_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_i}{\mu}}$, $i = 1, 2$ olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(A_1 [x - x_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(A_2 [x - x_2]) \quad (1.33)$$

formunda modellenenebilir. (1.33) eşitliğinde $c_1 > c_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Dalgaların başlangıç anında birbirleri ile etkileşimlerinin olmaması ve her iki dalganında aralığın uç noktalarında sifira gitmesi oldukça önemlidir. Dolayısıyla parametreler bu şekilde uygun olarak seçildiğinde genliği büyük olan dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Soliton dalgaları çarpışma sonrasında genliklerini ve hızlarını koruyacağından çarpışmanın öncesinde ve sonrasında korunum sabitleri sabit kalmalıdır. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c_1}{A_1} + \frac{6c_2}{A_2}, \\ C_2 &= \frac{12c_1^2}{A_1} + \frac{12c_2^2}{A_2}, \\ C_3 &= \frac{144c_1^2(\mu A_1^2 - c_1\varepsilon)}{5A_1\varepsilon} + \frac{144c_2^2(\mu A_2^2 - c_2\varepsilon)}{5A_2\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.34)$$

olarak bulunabilir.

1.6 RLW denklemleri, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

Sayısal çözümü araştırılacak olan ikinci denklem olan RLW denklemleri ise

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.35)$$

formundadır. Denklemlerde ε ve μ reel sabitler, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. RLW denklemleri için solitary dalga oluşumu problemindeki fiziksel sınır şartları KdV denkleminde olduğu gibi $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \rightarrow 0$ şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için ise çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığına sınırlandırılacak ve dolayısıyla

$$\left. \begin{aligned} u(a, t) &= u(b, t) = 0 \\ u'(a, t) &= u'(b, t) = 0 \end{aligned} \right\} t > 0 \quad (1.36)$$

sınır şartları, $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.37)$$

başlangıç şartı ve sayısal metodun analitik çözümle olan uyumunun kontrolü için ise

$$L_\infty = \max_m |U_m - u(x_m, t)| \quad (1.38)$$

hata normu kullanılacaktır. Burada U_m , x_m noktasındaki yaklaşık çözümü, $u(x_m, t)$ ise tam çözümü göstermektedir.

RLW denklemi, Peregrine tarafından ardışık dalgaların gelişimini modellemek için önerilmiştir (Peregrine, 1966). Peregrine ayrıca denklemin sonlu farklar metodu ile ilk sayısal çözümlerini elde etmiştir. Benjamin, Bona ve Mahony ise, RLW denkleminin dalga denklemi çözümlerini, daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin dalga denklemi çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir (Benjamin et.al., 1972).

1.6.1 Solitary dalga oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin analitik çözümü $k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]) \quad (1.39)$$

formunda yazılabilir (Peregrine, 1966). (1.39) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.40)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

RLW denklemi için korunum sabitleri sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^3 + 3u^2) dx \quad (1.41)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$C_1 = \frac{6c}{k}, \quad C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{36c^2}{5k} (4c + 5) \quad (1.42)$$

olarak bulunabilir.

1.6.2 İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genlikli iki solitary dalgasının çarpışma problemi $k_i = \sqrt{\frac{\varepsilon c_i}{4\mu(1 + \varepsilon c_i)}}$, $i = 1, 2$ olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(k_1 [x - x_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(k_2 [x - x_2]) \quad (1.43)$$

formunda modellenenir. KdV denkleminin çarpışması probleminde olduğu gibi (1.43) eşitliğinde $c_1 > c_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Dolayısıyla parametreler bir önceki bölümde KdV denkleminde anlatıldığı seçildiğinde genliği büyük olan dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Bu test problemi için korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right), \\ C_2 &= 12 \left(\frac{c_1^2}{k_1} + \frac{c_2^2}{k_2} \right) + \frac{48}{5} \mu (k_1 c_1^2 + k_2 c_2^2), \\ C_3 &= \frac{36c_1^2}{5k_1} (4c_1 + 5) + \frac{36c_2^2}{5k_2} (4c_2 + 5) \end{aligned} \quad (1.44)$$

olarak bulunabilir.

BÖLÜM 2

SAYISAL YÖNTEMİN RLW DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu bölümde, (1.35) kısmi diferensiyel denkleminin genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin metoduyla sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu solitary dalga test problemi için hata normu ve her iki test problemi için korunum sabitleri hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

2.1 Metodun Uygulanması

İlk bölümde bahsedilen

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad (2.2)$$

sınır şartlarını ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.3)$$

başlangıç şartı ile birlikte verilen $[a, b]$ konum aralığı üzerinde tanımlanan (1.35)

$$u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt} = 0$$

RLW denklemini ele alalım. RLW denklemine Crank-Nicolson yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u_x^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^{n+1} (u_x)^{n+1} - \mu (u_{xx})^{n+1} \\ = u^n - \frac{\Delta t}{2} u_x^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^n (u_x)^n - \mu (u_{xx})^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilebilir. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (2.4) denkleminde Galerkin metodu uygulandığında

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) \left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} u_x^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^{n+1} (u_x)^{n+1} - \mu (u_{xx})^{n+1} \right) dx \\ = \int_a^b w(x) \left(u^n - \frac{\Delta t}{2} u_x^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^n (u_x)^n - \mu (u_{xx})^n \right) dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

bulunur. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine ϕ_i genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılırsa, (2.5) denklemi i, j ve k $m-1, m, m+1, m+2$ ve $m=0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx \right) \delta_j^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_k (\delta_k^{n+1}) \phi_j' dx \right) \right] \delta_j^{n+1} \\
& - \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx \right) \delta_j^{n+1} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^n \\
& - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx \right) \delta_j^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_k (\delta_k^n) \phi_j' dx \right) \right] \delta_j^n \\
& - \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx \right) \delta_j^n
\end{aligned} \tag{2.6}$$

eşitliğine ulaşılır. (2.6) sistemi $m=0, 1, \dots, N-1$ için

$$A^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx, \quad B^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx, \quad C(\delta) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_k (\delta_k) \phi_j' dx, \quad D^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx$$

ve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T, \\
A_{m-1, m-1}^e &= A_{m+2, m+2}^e = \frac{h}{40320} (20\lambda^2 - 110\lambda + 160), \\
A_{m-1, m}^e &= A_{m, m-1}^e = A_{m+1, m+2}^e = A_{m+2, m+1}^e = \frac{h}{40320} (-37\lambda^2 - 294\lambda + 1032), \\
A_{m-1, m+1}^e &= A_{m+1, m-1}^e = A_{m, m+2}^e = A_{m+2, m}^e = \frac{h}{40320} (14\lambda^2 - 258\lambda + 480), \\
A_{m-1, m+2}^e &= A_{m+1, m-2}^e = \frac{h}{40320} (3\lambda^2 - 10\lambda + 8), \\
A_{m, m}^e &= A_{m+1, m+1}^e = \frac{h}{40320} (88\lambda^2 + 1170\lambda + 9504), \\
A_{m, m+1}^e &= A_{m+1, m}^e = \frac{h}{40320} (-65\lambda^2 + 54\lambda + 7464), \\
B_{m-1, m-1}^e &= -B_{m+2, m+2}^e = \frac{1}{40320} (-35\lambda^2 + 280\lambda - 560), \\
B_{m-1, m}^e &= -B_{m+2, m+1}^e = \frac{1}{40320} (87\lambda^2 + 48\lambda - 504),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m-1,m+1}^e &= -B_{m+2,m}^e = \frac{1}{40320} (-69\lambda^2 - 264\lambda + 1008), \\
B_{m-1,m+2}^e &= -B_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{40320} (17\lambda^2 - 64\lambda + 56), \\
B_{m,m-1}^e &= -B_{m+1,m+2}^e = \frac{1}{40320} (53\lambda^2 + 512\lambda - 3976), \\
B_{m,m}^e &= -B_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{40320} (-105\lambda^2 - 2520\lambda - 840) 0, \\
B_{m,m+1}^e &= -B_{m+1,m}^e = \frac{1}{40320} (51\lambda^2 + 2832\lambda + 10248), \\
B_{m,m+2}^e &= -B_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{40320} (\lambda^2 - 824\lambda + 2128),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m-1,m-1}^e &= \frac{1}{31933440} (-49280 - 9240\lambda^2 + 770\lambda^3 + 36960\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-26400 + 4176\lambda^2 - 1806\lambda^3 + 10296\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (73920 + 3528\lambda^2 + 1302\lambda^3 - 44352\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (1760 + 1536\lambda^2 - 266\lambda^3 - 2904\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m}^e &= C(\delta)_{m,m-1}^e = \frac{1}{31933440} (-282480 - 2088\lambda^2 - 1407\lambda^3 + 105732\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-229680 + 39096\lambda^2 + 3213\lambda^3 - 3564\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (489456 - 42624\lambda^2 - 2205\lambda^3 - 77220\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (22704 + 5616\lambda^2 + 399\lambda^3 - 24948\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m+1}^e &= C(\delta)_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{31933440} (-110880 - 15624\lambda^2 + 504\lambda^3 + 77616\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-139392 + 25704\lambda^2 - 1008\lambda^3 + 27720\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (231264 - 15624\lambda^2 + 504\lambda^3 - 83952\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (19008 + 5544\lambda^2 - 21384\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m+2}^e &= C(\delta)_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{31933440} (-880 - 768\lambda^2 + 133\lambda^3 + 1452\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-3696 - 72\lambda^2 - 399\lambda^3 + 3564\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (3696 + 72\lambda^2 + 399\lambda^3 - 3564\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-133\lambda^3 + 768\lambda^2 - 1452\lambda + 880) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m,m}^e &= \frac{1}{31933440} (-1906080 + 32688\lambda^2 + 2814\lambda^3 + 7128\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-3104640 - 138600\lambda^2 - 6930\lambda^3 - 1219680\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (4400352 + 109440\lambda^2 + 5418\lambda^3 + 1491336\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (610368 - 3528\lambda^2 - 1302\lambda^3 - 278784\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m,m+1}^e &= C(\delta)_{m+1,m}^e = \frac{1}{31933440} (-941424 + 16920\lambda^2 - 1407\lambda^3 + 271260\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-3087216 + 720\lambda^2 + 4221\lambda^3 - 856548\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (3087216 - 720\lambda^2 - 4221\lambda^3 + 856548\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (941424 - 16920\lambda^2 + 1407\lambda^3 - 271260\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m,m+2}^e &= C(\delta)_{m+2,m}^e = \frac{1}{31933440} (-19008 - 5544\lambda^2 + 21384\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-231264 + 15624\lambda^2 - 504\lambda^3 + 83952\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (139392 - 25704\lambda^2 + 1008\lambda^3 - 27720\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-504\lambda^3 + 15624\lambda^2 - 77616\lambda + 110880) \delta_{m+2}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m+1,m+1}^e &= \frac{1}{31933440} (-610368 + 3528\lambda^2 + 1302\lambda^3 + 278784\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-4400352 - 109440\lambda^2 - 5418\lambda^3 - 1491336\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (3104640 + 138600\lambda^2 + 6930\lambda^3 + 1219680\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (1906080 - 32688\lambda^2 - 2814\lambda^3 - 7128\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m+1,m+2}^e &= C(\delta)_{m+2,m+1}^e = \frac{1}{31933440} (-22704 - 5616\lambda^2 - 399\lambda^3 + 24948\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-489456 + 42624\lambda^2 + 2205\lambda^3 + 77220\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (229680 - 39096\lambda^2 - 3213\lambda^3 + 3564\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (1407\lambda^3 + 2088\lambda^2 - 105732\lambda + 282480) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m+2,m+2}^e &= \frac{1}{31933440} (266\lambda^3 - 1536\lambda^2 + 2904\lambda - 1760) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-1302\lambda^3 - 3528\lambda^2 + 44352\lambda - 73920) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (1806\lambda^3 - 4176\lambda^2 - 10296\lambda + 26400) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-770\lambda^3 + 9240\lambda^2 - 36960\lambda + 49280) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{m-1,m-1}^e &= D_{m+2,m+2}^e = \frac{1}{1680h} (-4\lambda^2 - 7\lambda + 56), \\
D_{m-1,m}^e &= D_{m+2,m+1}^e = \frac{1}{1680h} (11\lambda^2 - 98), \\
D_{m-1,m+1}^e &= D_{m+2,m}^e = \frac{1}{1680h} (-10\lambda^2 + 21\lambda + 28), \\
D_{m-1,m+2}^e &= D_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{1680h} (3\lambda^2 - 14\lambda + 14), \\
D_{m,m-1}^e &= D_{m+1,m+2}^e = \frac{1}{1680h} (11\lambda^2 + 70\lambda + 462), \\
D_{m,m}^e &= D_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{1680h} (-32\lambda^2 - 189\lambda - 616), \\
D_{m,m+1}^e &= D_{m+1,m}^e = \frac{1}{1680h} (31\lambda^2 + 168\lambda - 154), \\
D_{m,m+2}^e &= D_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{1680h} (-10\lambda^2 - 49\lambda + 308)
\end{aligned}$$

eleman matrislerinin uygun şekilde birbirlerine eklenerek düzenlenmesi sonucunda

$$\left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \mathbf{C} (\boldsymbol{\delta}^{n+1}) - \mu \mathbf{D} \right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \mathbf{C} (\boldsymbol{\delta}^n) - \mu \mathbf{D} \right] \boldsymbol{\delta}^n \quad (2.7)$$

sistemine ulaşılır. Elde edilen (2.7) denklem sistemi $(N + 3)$ denklem ve

$$(\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})$$

olmak üzere $(N + 3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki $u(a, x) = u(b, x) = 0$ sınır şartları kullanılıp δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (2.7) denklem sistemi $(N + 1) \times (N + 1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemide Gauss yoketme metodunun bir uygulaması olan Thomas algoritması yardımıyla kolayca çözülebilir. Bununla birlikte sınır şartları uygulandıktan sonra elde edilen denklem sistemi, katsayılarda bulunan $\boldsymbol{\delta}^{n+1}$ teriminden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sistemin çözülebilmesi için her bir zaman adımında $\boldsymbol{\delta}^{n+1}$ yerine ilk olarak bir önceki zaman adımındaki değerler alınmış ve

hesaplanan değer sadece δ^{n+1} değerine atanarak 5 adımlık bir iç iterasyon yapılmıştır. Böylece δ_m^{n+1} terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılarak sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülmüştür.ebilir.

RLW denkleminin genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (2.7) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörünün bulunması gereklidir.

Başlangıç durumu

$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$ başlangıç vektörü, ilk bölümde RLW denklemi için verilen

$$u(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (2.8)$$

başlangıç şartı,

$$u_x(a, 0) = u_x(b, 0) = 0 \Rightarrow u_x(x_0, 0) = u_x(x_N, 0) = 0 \quad (2.9)$$

sınır şartları ve

$$u(x_m, 0) = \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{m-1}^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_m^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{m+1}^0 \quad (2.10)$$

genişletilmiş kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak bulunabilir. Bu durumda (2.8) eşitliği açık olarak yazılırsa $N + 3$ bilinmeyen ve $N + 1$ denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{-1}^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_0^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_1^0 &= u(x_0, 0) \\ \frac{4 - \lambda}{24} \delta_0^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_1^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_2^0 &= u(x_1, 0) \\ &\vdots \\ \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{N-1}^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_N^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{N+1}^0 &= u(x_N, 0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

sistemine ulaşılır. (2.9) sınır şartlarında

$$u_x(x_m, 0) = \frac{1}{2h} (\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \quad (2.12)$$

solitary dalgasının $v = 1 + \varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. $c = 0.1$ seçimi yapılırsa RLW denkleminin solitary dalga çözümü

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}} = \frac{1}{2\sqrt{11}}$$

olacağından

$$u(x, t) = 0.3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{11}} [x - 1.1t] \right) \quad (2.16)$$

formunda yazılabilir. Solitary dalga çözümünde $t = 0$ alındığında

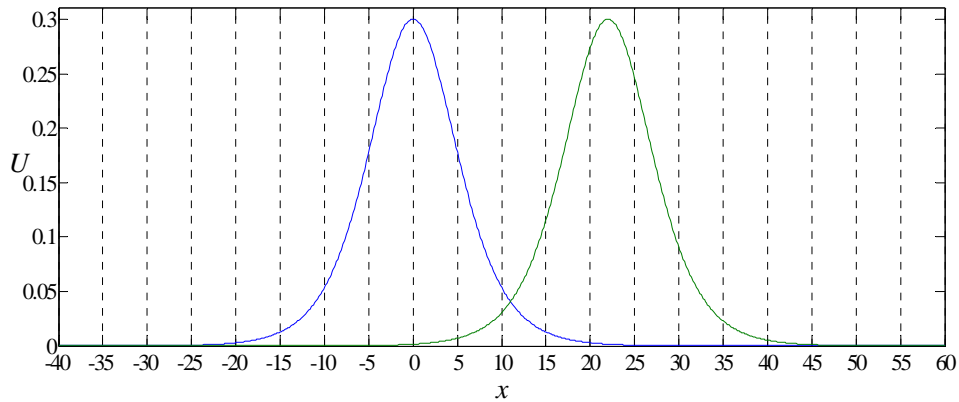
$$u(x, 0) = 0.3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{2\sqrt{11}} \right) \quad (2.17)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 20$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 0 + [1 + 1.(0.1)] 20 = 22$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.1: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

Bu test probleminde ilk olarak genlik $3c = 0.3$ olarak alındığında 0.3 genlikli solitary

dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.42) eşitliklerinden

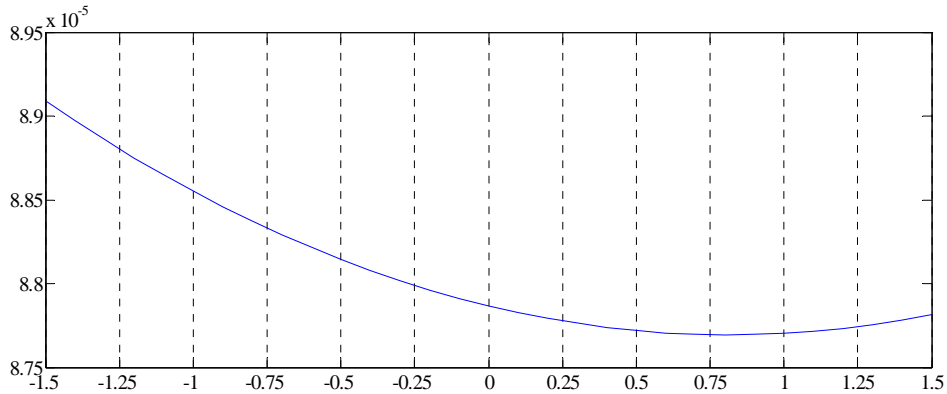
$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 3.9799497484,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0.8104624942,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 2.5790074370$$

olarak hesaplanabilir.

En düşük hatanın elde edilebilmesi için λ parametresinin seçimi oldukça önemlidir. $c = 0.1$, konum artımı olarak $h = 0.125$, zaman artımı olarak $\Delta t = 0.1$ seçimleri yapılarak $-1.5 \leq \lambda \leq 1.5$ için $t = 20$ anında oluşacak maksimum hataları veren grafik Şekil 2.2 de çizilmiştir. Şekil incelendiğinde en düşük hatanın yaklaşık olarak λ nın 0.75 değeri civarında oluştuğu söylenebilir.



Şekil 2.2 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$,

$$-40 \leq x \leq 60 \text{ ve } -1.5 \leq \lambda \leq 1.5 \text{ için } L_\infty$$

Program $t = 20$ oluncaya kadar tekrar çalıştırılmış ve en düşük maksimum hatanın $\lambda = 0.82000$ de oluştuğu görülmüştür. $\lambda = 0$ ile $\lambda = 0.82000$ için $t = 20$ olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin değerleri Tablo 2.1 de verilmiştir.

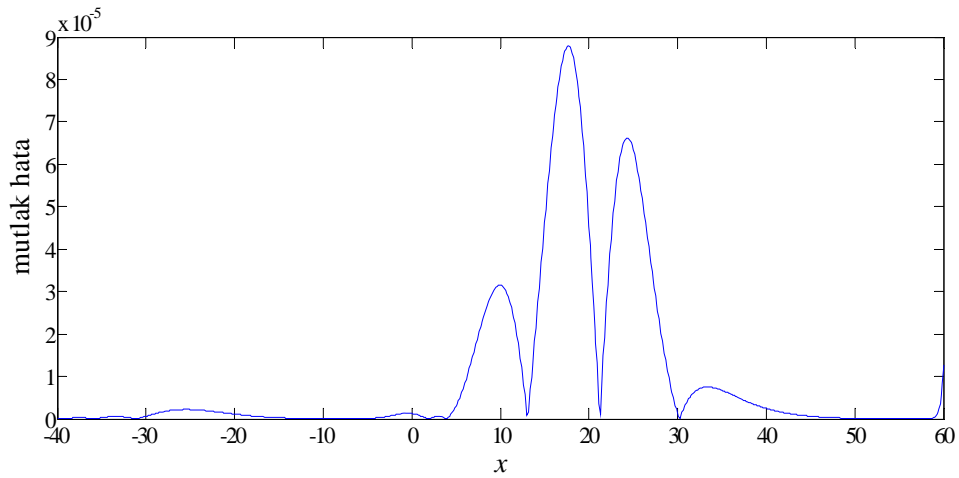
Tablo 2.1: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$

için korunum sabitleri ve hata normları

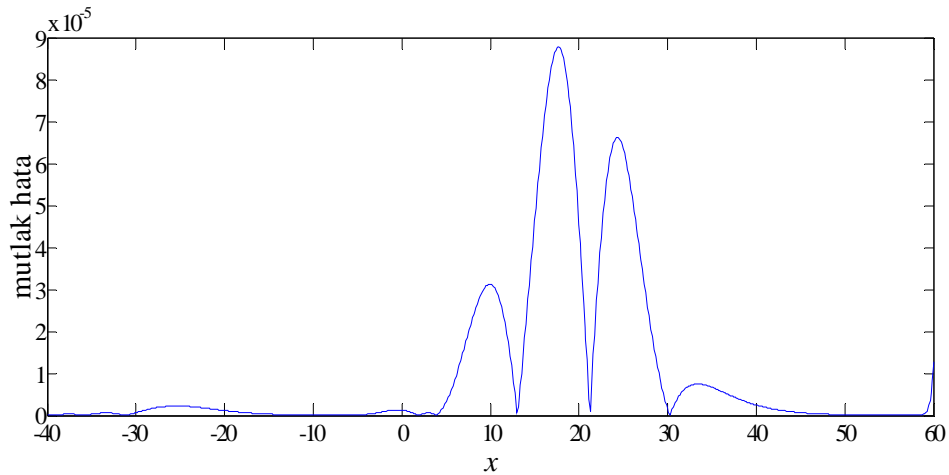
$\lambda = 0$				
Zaman	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	3.9799250	0.8104621	2.5790070
4	0.01956	3.9799299	0.8104625	2.5790074
8	0.03918	3.9799281	0.8104625	2.5790073
12	0.05714	3.9799255	0.8104624	2.5790072
16	0.07330	3.9799168	0.8104624	2.5790072
20	0.08787	3.9798827	0.8104624	2.5790071
$\lambda = 0.82000$				
Zaman	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	3.9799205	0.8104615	2.5790074
4	0.01949	3.9799299	0.8104615	2.5790074
8	0.03905	3.9799281	0.8104615	2.5790073
12	0.05698	3.9799255	0.8104614	2.5790072
16	0.07312	3.9799168	0.8104614	2.5790072
20	0.08769	3.9798827	0.8104614	2.5790071

Tablo 2.1 incelendiğinde çalışma boyunca hesaplanan korunum sabitleri ile analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları tablodan görülebilir. Bununla birlikte λ nın en iyi seçimi sonucunda bulunan maksimum hatanın yeterince iyileştirme sağlamadığı söylenilebilir.

Şekil 2.3 de $t = 20$ anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafikler çizilmiştir. Grafikler incelendiğinde $\lambda = 0$ ile $\lambda = 0.82$ için maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenilebilir.



a) $\lambda = 0$



b) $\lambda = 0.82000$

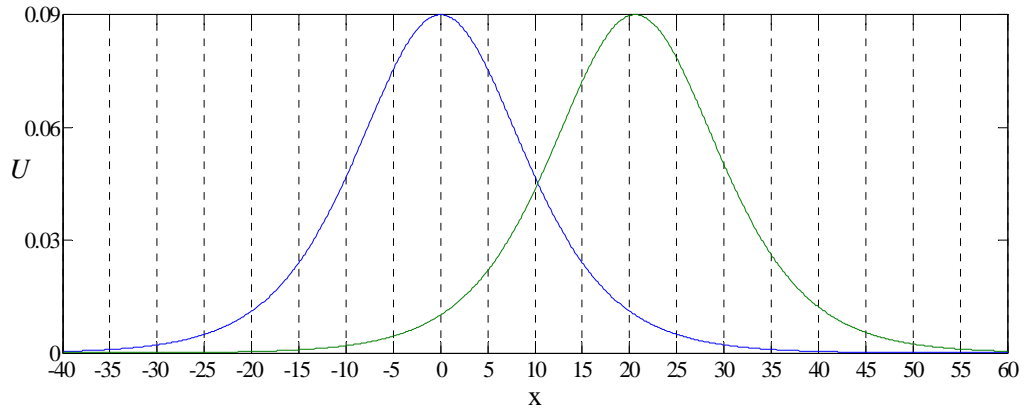
Şekil 2.3 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki

[Analitik çözüm – Sayısal çözüm]

Solitary dalgasının oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızını ve genliğini etkileyen c değeri değiştirilerek problem incelenmiştir. $c = 0.03$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu Şekil 2.4 de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 20$ anında dalganın tepe noktası

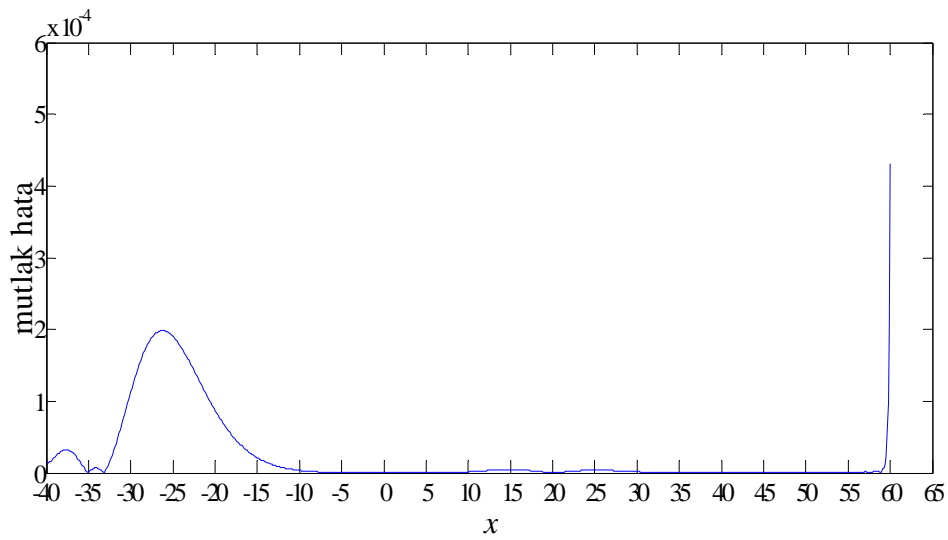
$$x_0 + vt = 0 + [1 + 1.(0.03)] 20 = 20.6$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.4: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

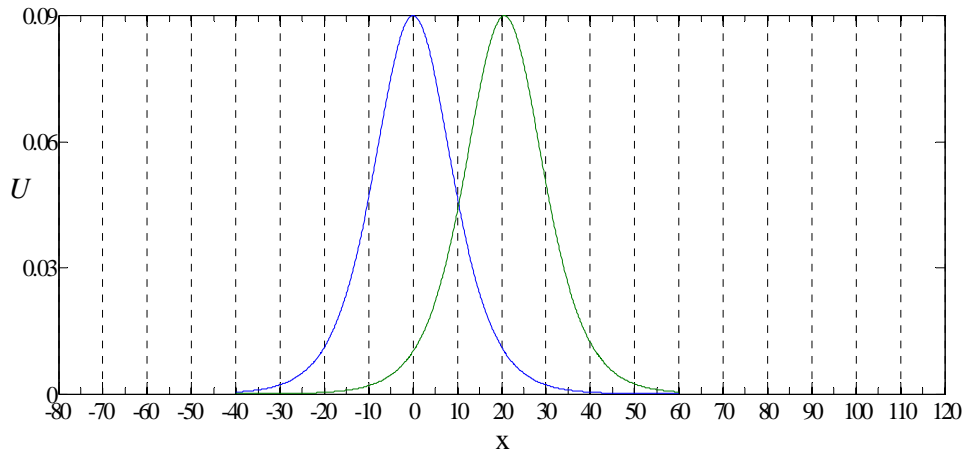
Dalgaların konumundan da anlaşılabilceği üzere tanım aralığının başında ve ucunda analitik değerler sıfıra gitmemektedir. Bunun sorun yaşatıp yaşatmayacağını görmek için $\lambda = 0$ için mutlak hatanın grafiği Şekil 2.5 te verilmiştir.



Şekil 2.5 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki

$|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$

Şekilden de görüleceği üzere en büyük hata konum aralığının uç noktası civarında oluşmaktadır. Bu sorunu aşmak için iki yol vardır. Birinci yol sınır şartı olarak kullanılan değerlerin sıfır değilde dalganın o noktada aldığı analitik değerlerin alınmasıdır. İkinci yol ise $[a, b]$ aralığını dalganın uç noktaları sıfıra gidecek şekilde genişletmektir. Solitary dalga tanımı gereği aralıkların seçimi yapılırken uç noktalarda dalganın sıfıra gitmesi fiziksel sınır şartları sebebiyle gerekli olduğundan konum aralığı $-80 \leq x \leq 120$ aralığına genişletilebilir. Bu durumda $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu Şekil 2.6 da verilmiştir.



Şekil 2.6: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

$c = 0.03$ seçimi için korunum sabitlerinin analitik değerleri ise

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 2.1094074997,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0.1273017187,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 0.3888059904$$

olarak bulunabilir. Program $-80 \leq x \leq 120$ konum aralığı için $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar çalıştırılarak en düşük maksimum hatanın $\lambda = 1.05500$ de olduğu görülmüştür. $\lambda = 0$ ile $\lambda = 1.05500$ için $t = 20$ olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin değerleri Tablo 2.2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en iyi λ için maksimum

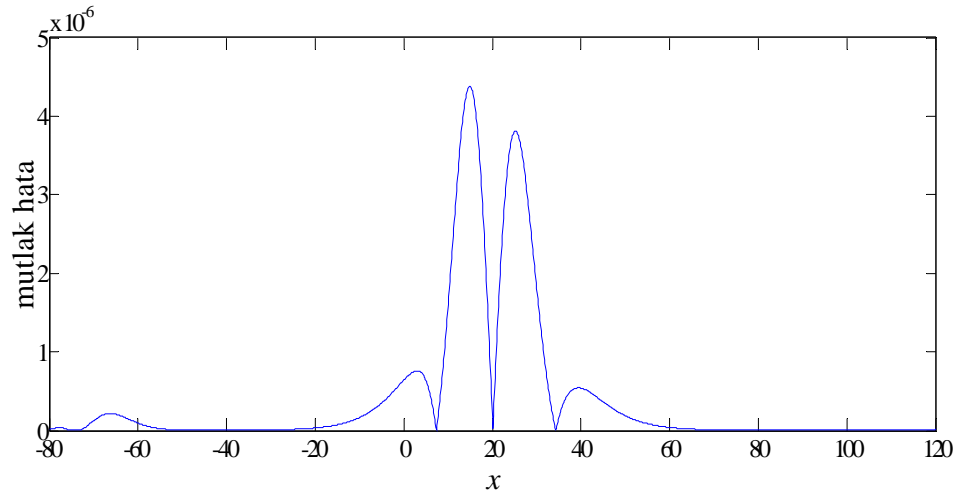
hatada bir miktarda olsa iyileşme olduğu görülebilir. Bununla birlikte her iki durum içinde korunum sabitlerinin değerleri analitik değere oldukça yakındır.

Tablo 2.2: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-80 \leq x \leq 120$

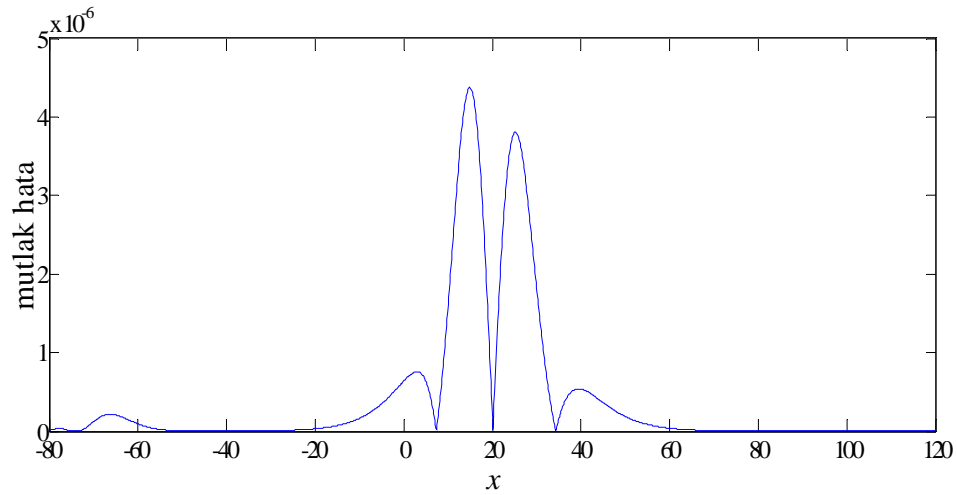
için korunum sabitleri ve hata normları

$\lambda = 0$				
Zaman	$L_\infty \times 10^5$	C_1	C_2	C_3
0	0	2.1094046	0.1273017	0.3888060
4	0.08457	2.1094052	0.1273017	0.3888060
8	0.17152	2.1094051	0.1273017	0.3888060
12	0.26001	2.1094052	0.1273017	0.3888060
16	0.34908	2.1094051	0.1273017	0.3888060
20	0.43802	2.1094050	0.1273017	0.3888060
$\lambda = 1.05500$				
Zaman	$L_\infty \times 10^5$	C_1	C_2	C_3
0	0	2.1094046	0.1273017	0.3888060
4	0.08442	2.1094052	0.1273017	0.3888060
8	0.17120	2.1094051	0.1273017	0.3888060
12	0.25951	2.1094051	0.1273017	0.3888060
16	0.34841	2.1094051	0.1273017	0.3888060
20	0.43721	2.1094050	0.1273017	0.3888060

Yeni konum aralığı için hata grafikleri ise Şekil 2.7 de verilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın artık konum aralığının uç noktalarında değilde orta kısımlarda ve oldukça küçük değerlerde olduğu kolaylıkla görülebilir. Her iki durum için oluşan maksimum hatanın Tablo 2.2 da verilen L_∞ hatası kadar olduğuda görülebilir.



a) $\lambda = 0$



b) $\lambda = 1.05500$

Şekil 2.7 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-80 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki

|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

$c = 0.1$, $c = 0.03$ ve farklı konum-zaman artımı değerleri için hesaplanan hata normlarının değerleri Tablo 2.3 de verilmiştir. Konum ve zaman artım değerleri büyüdükçe hata normlarının değerlerinde her iki durum için arttığı tablodan kolaylıkla söylenebilir. Diğer taraftan $\lambda = 0$ ve en iyi λ için hesaplanan hata normları incelendiğinde genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodunun yüksek bir iyileştirme sağlamadığı görülebilir.

Tablo 2.3:Farklı konum ve zaman artımları için

 $t = 20$ zamanındaki hata normları $c = 0.1, -40 \leq x \leq 60$

		$\lambda = 0$	
h	Δt	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.05	0.02198	0.02195($\lambda = 0.8500$)
0.125	0.1	0.08787	0.08769($\lambda = 0.8200$)
0.25	0.2	0.35079	0.35010($\lambda = 0.8000$)
0.5	0.4	1.39403	1.39140($\lambda = 0.7600$)
1.0	0.8	5.35600	5.34819($\lambda = 0.6100$)

 $c = 0.03, -80 \leq x \leq 120$

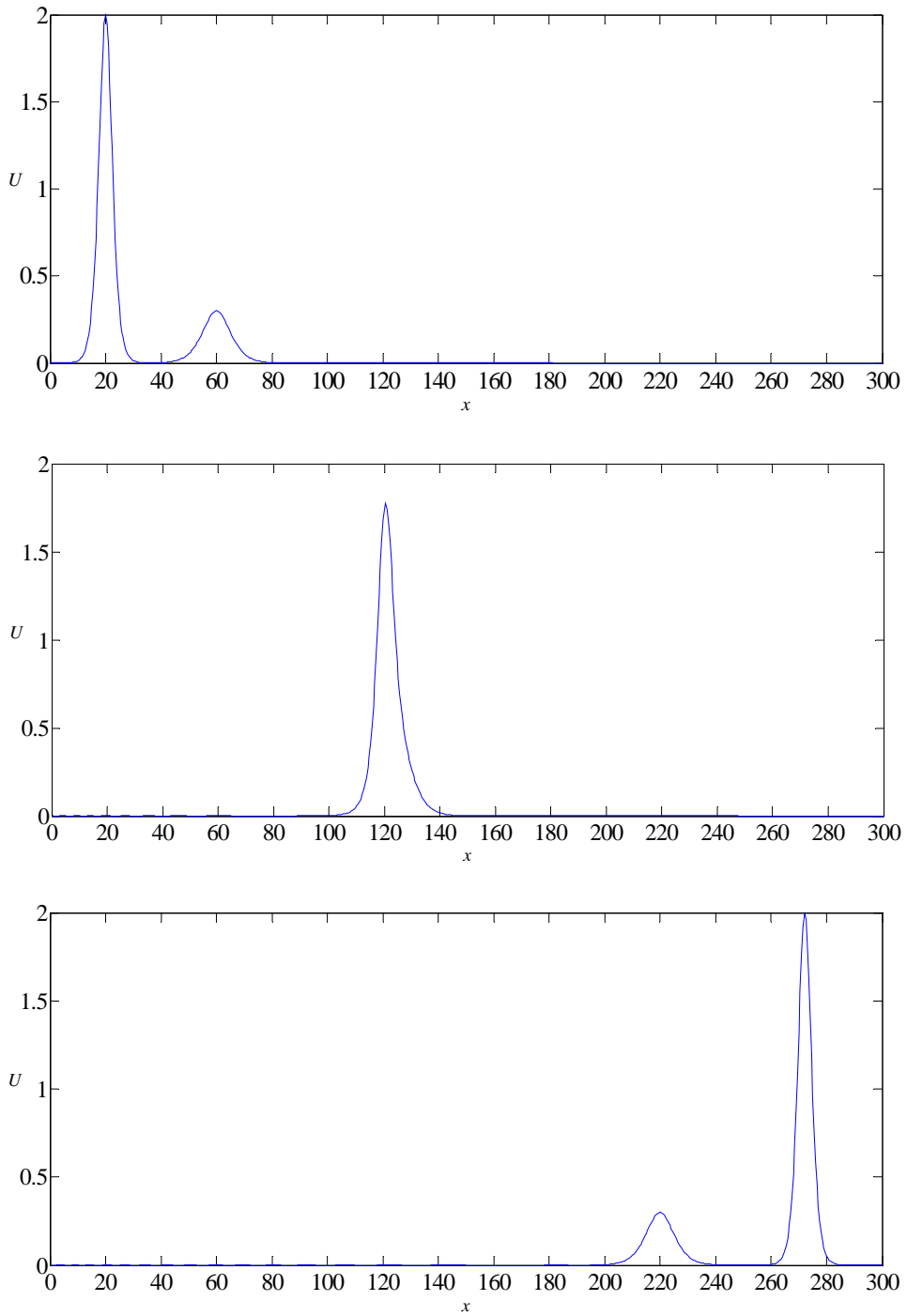
		$\lambda = 0$	
h	Δt	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.05	0.00110	0.00109($\lambda = 1.0600$)
0.125	0.1	0.00438	0.00437($\lambda = 1.0550$)
0.25	0.2	0.01751	0.01748($\lambda = 1.0500$)
0.5	0.4	0.06995	0.06982($\lambda = 0.9900$)
1.0	0.8	0.27828	0.27787($\lambda = 0.8100$)

2.2.2 İki Solitary Dalgasının Çarpışması Problemi

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.43) eşitliğinde $\varepsilon = \mu = 1$, $x_1 = 20$, $x_2 = 60$, $c_1 = 2/3$, $c_2 = 0.1$, seçimleri yapılırsa $k_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $k_2 = \frac{\sqrt{11}}{22}$ olmak üzere

$$u(x, 0) = 2\text{sech} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} [x - 20] \right) + 0.3\text{sech} \left(\frac{\sqrt{11}}{22} [x - 60] \right) \quad (2.18)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır. $h = 0.5$, $\Delta t = 0.1$ ve $[0, 300]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 150$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar $t = 0$, $t = 60$, $t = 150$ zamanlarında Şekil 2.8 de verilmiştir.



Şekil 2.8: İki solitary dalgasının çarpışması $t=0,60,150$

Şekil sadece $\lambda = 0$ için çizilmiştir. Çünkü en iyi λ için şekil çizilsede gözle görülür bir fark olmayacaktır. İlk şekil incelendiğinde genliği 2 olan dalganın $x = 20$ noktasına

tepe noktası gelecek şekilde yerleştigi, genligi 0.3 olan dalganın ise tepe noktası $x = 60$ noktasına gelecek şekilde yerleştigi görülebilir. Bu dalgalar solitary dalga olduklarından genligi daha büyük olan dalga daha hızlı ilerleyecektir. Dolayısıyla bir müddet sonra genligi yüksek olan dalga diğer dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Çarpışma işlemi yaklaşık olarak $t = 60$ zamanı civarında olmaktadır. İkinci şekilde çarpışmanın etkisi görülebilir. Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmeyeceğinden çarpışma işlemi genligi daha büyük olan dalganın yoluna devam etmesi sonucu bir müddet sonra sona erecektir. Genligi büyük olan dalga daha hızlı olduğundan diğer dalgayı geride bırakarak yoluna devam edecektir. Bu durum üçüncü şekilde görülebilir. Dalgaların başlangıç anındaki şekillerinde bir bozulma olmadığı kolaylıkla görülebilir. Bununla birlikte $t = 150$ anında dalgaların genlikleri

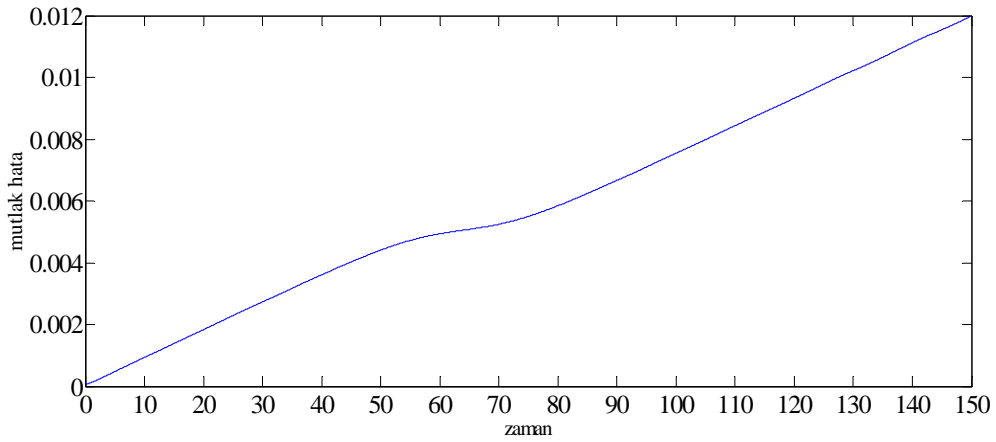
	Genlik $\lambda = 0$	Genlik $\lambda = 2.90$
Küçük Dalga	0.29960	0.29961
Büyük Dalga	1.99125	1.99377

olarak ölçülmüştür. Solitary dalgaları çarpışma sonrasında genliklerini korumak isteyeceğinden $\lambda = 2.90$ için program çalıştırıldığında dalganın genliğindeki kaybın daha az olması sebebiyle λ değeri değiştirildiğinde sonucun daha iyi olduğu söylenilebilir

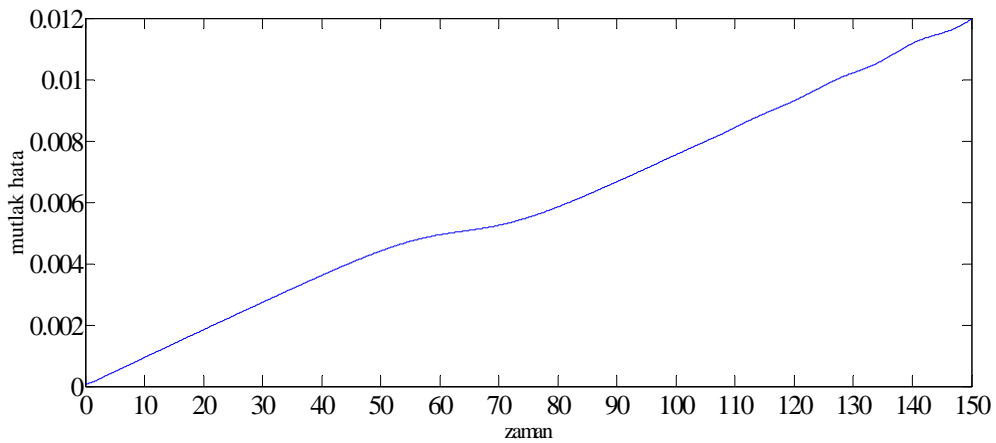
İlk korunum sabitinin tam değeri

$$C_1 = 6 \left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right) \approx 16.62906039$$

olarak bulunabilir. Şekil 2.9 da C_1 korunum sabiti için hata grafiği bir eksen zaman ekseni diğer eksende korunum sabitinin tam değeri ile yaklaşık değerinin mutlak değeri olmak üzere çizilmiştir. λ nın değeri değiştirilsede grafikteki değişiklik gözle görülemeyecek şekildedir. Diğer taraftan her iki şekilde de çarpışmanın oluştuğu zamanda grafikteki değişiklik kolaylıkla görülebilmektedir.



a) $\lambda = 0$



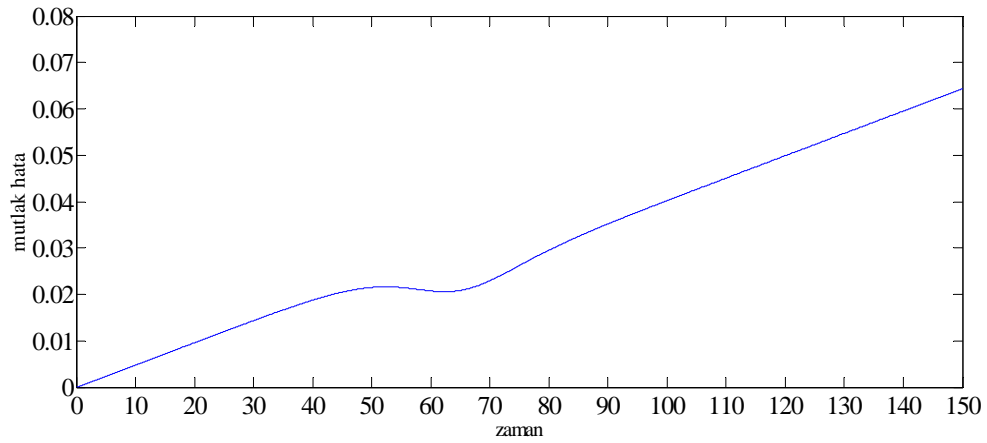
b) $\lambda = 2.90$

Şekil 2.9: C_1 korunum sabiti için mutlak hata

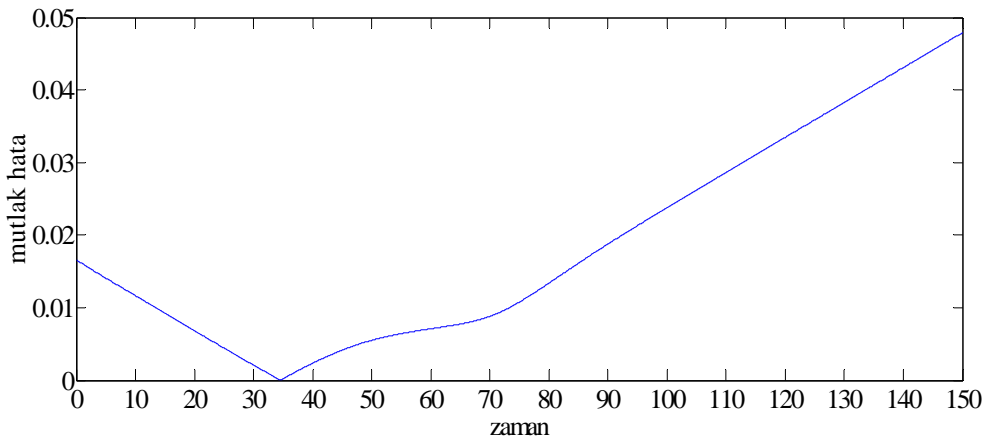
İkinci korunum sabitinin tam değeri ise

$$C_2 = 12 \left(\frac{c_1^2}{k_1} + \frac{c_2^2}{k_2} \right) + \frac{48}{5} \mu (k_1 c_1^2 + k_2 c_2^2) \approx 19.02518182$$

olarak bulunabilir. Şekil 2.10 da ise Şekil 2.9 da olduğu gibi hata grafiği çizilmiştir. λ nın değeri değiştirildiğinde hatanın dahada azaldığı grafikler incelendiğinde görülebilir. Ayrıca her iki şekilde de çarpışmanın olduğu zamanda grafikteki değişiklik kolaylıkla görülebilmektedir.



a) $\lambda = 0$



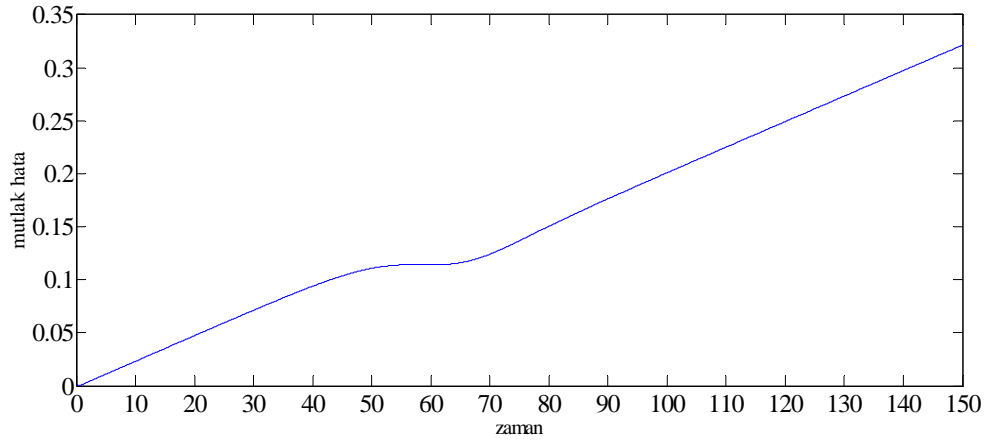
b) $\lambda = 2.90$

Şekil 2.10: C_2 korunum sabiti için mutlak hata

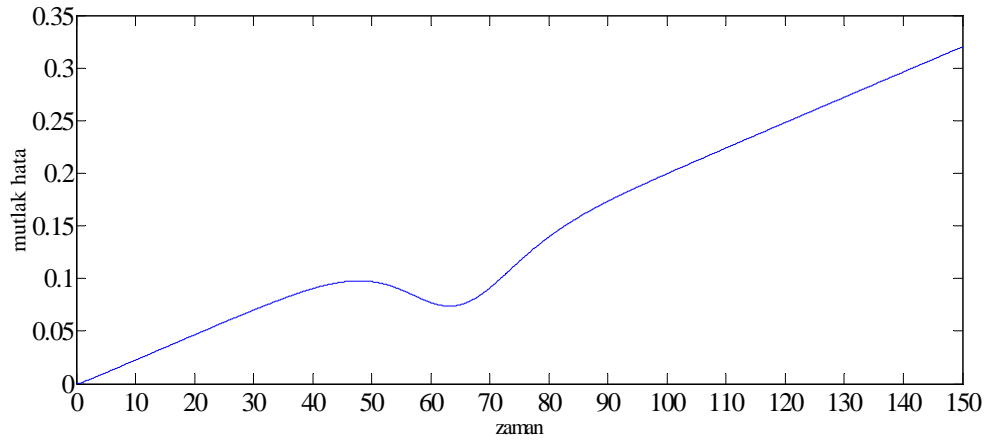
Son korunum sabitinin tam değeri de

$$C_3 = \frac{36c_1^2}{5k_1} (4c_1 + 5) + \frac{36c_2^2}{5k_2} (4c_2 + 5) \approx 80.16021942$$

olarak bulunabilir. Şekil 2.11 da C_3 korunum sabiti için hata grafiği önceki grafiklerde olduğu gibi çizilmiştir. Grafikler incelendiğinde λ nın değeri değiştirildiğinde grafiklerdeki değişiklik kayda değer oranda olmadığı görülebilir. Diğer taraftan her iki şekilde de çarpışmanın olduğu zamanda grafikteki değişiklik kolaylıkla görülebilmektedir.



a) $\lambda = 0$



b) $\lambda = 2.90$

Şekil 2.11: C_3 korunum sabiti için mutlak hata

BÖLÜM 3

SAYISAL YÖNTEMİN KdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu bölümde, (1.25) kısmi diferensiyel denkleminin genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak galerin metoduyla sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu soliton dalga test problemi için hata normu ve soliton oluşumu ve iki soliton dalgasının çarpışması test problemleri için korunum sabitleri hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

3.1 Metodun Uygulanması

İlk bölümde bahsedilen $[a, b]$ konum aralığı üzerinde tanımlanan (1.25)

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (3.1)$$

KdV denklemi ile birlikte

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad (3.3)$$

sınır şartlarını ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.4)$$

başlangıç şartını ele alalım. KdV denklemine Crank-Nicolson yöntemi uygulanırsa

$$u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^{n+1} (u_x)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \mu (u_{xxx})^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^n (u_x)^n - \frac{\Delta t}{2} \mu (u_{xxx})^n \quad (3.5)$$

elde edilebilir. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (3.5) denklemine Galerkin metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b w(x) \left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^{n+1} (u_x)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \mu (u_{xxx})^{n+1} \right) dx \\ & = \int_a^b w(x) \left(u^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^n (u_x)^n - \frac{\Delta t}{2} \mu (u_{xxx})^n \right) dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.6) denkleminde kısmi integrasyon uygulanır ve konuma göre üçüncü mertebeden türevin mertebesi düşürülürse

$$\begin{aligned} & \int_a^b w(x) \left(u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^{n+1} (u_x)^{n+1} \right) dx + \frac{\Delta t}{2} \mu \left(w(x) (u_{xx})^{n+1} \Big|_a^b - \int_a^b w'(x) (u_{xx})^{n+1} dx \right) \\ &= \int_a^b w(x) \left(u^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon u^n (u_x)^n \right) dx - \frac{\Delta t}{2} \mu \left(w(x) (u_{xx})^n \Big|_a^b - \int_a^b w'(x) (u_{xx})^n dx \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

bulunur. Soliton dalgaının fiziksel sınır şartları gereği $x \rightarrow a$ ve $x \rightarrow b$ iken $u_{xx} \rightarrow 0$ olacağı gözönüne alınır ve $w(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine ϕ_i genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılırsa, (3.7) denklemi i, j ve $k, m-1, m, m+1, m+2$ ve $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi'_i \phi''_j dx \right) \delta_j^{n+1} \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_k (\delta_k^{n+1}) \phi'_j dx \right) \right] \delta_j^{n+1} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^n \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi'_i \phi''_j dx \right) \delta_j^n - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\sum_{k=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_k (\delta_k^n) \phi'_j dx \right) \right] \delta_j^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. (3.8) sistemi $m = 0, 1, \dots, N-1$ için

$$A^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx, \quad B^e = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi'_i \phi''_j dx, \quad C^e(\delta) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_k (\delta_k) \phi'_j dx$$

ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T, \\ A_{m-1, m-1}^e &= A_{m+2, m+2}^e = \frac{h}{40320} (20\lambda^2 - 110\lambda + 160), \\ A_{m-1, m}^e &= A_{m, m-1}^e = A_{m+1, m+2}^e = A_{m+2, m+1}^e = \frac{h}{40320} (-37\lambda^2 - 294\lambda + 1032), \\ A_{m-1, m+1}^e &= A_{m+1, m-1}^e = A_{m, m+2}^e = A_{m+2, m}^e = \frac{h}{40320} (14\lambda^2 - 258\lambda + 480), \\ A_{m-1, m+2}^e &= A_{m+1, m-2}^e = \frac{h}{40320} (3\lambda^2 - 10\lambda + 8), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{m,m}^e &= A_{m+1,m+1}^e = \frac{h}{40320} (88\lambda^2 + 1170\lambda + 9504), \\
A_{m,m+1}^e &= A_{m+1,m}^e = \frac{h}{40320} (-65\lambda^2 + 54\lambda + 7464), \\
B_{m-1,m-1}^e &= -B_{m+2,m+2}^e = -B_{m,m}^e = B_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{240h^2} (-30), \\
B_{m-1,m}^e &= -B_{m+2,m+1}^e = -B_{m,m-1}^e = B_{m+1,m+2}^e = \frac{1}{240h^2} (-\lambda^2 + 8\lambda + 50), \\
B_{m-1,m+1}^e &= -B_{m+2,m}^e = \frac{1}{240h^2} (2\lambda^2 - 16\lambda - 10), \\
B_{m-1,m+2}^e &= -B_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{240h^2} (-\lambda^2 + 8\lambda - 10),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m,m+1}^e &= -B_{m+1,m}^e = \frac{1}{240h^2} (-3\lambda^2 + 24\lambda + 90), \\
B_{m,m+2}^e &= -B_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{240h^2} (2\lambda^2 - 16\lambda - 70),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m-1}^e &= \frac{1}{31933440} (-49280 - 9240\lambda^2 + 770\lambda^3 + 36960\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-26400 + 4176\lambda^2 - 1806\lambda^3 + 10296\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (73920 + 3528\lambda^2 + 1302\lambda^3 - 44352\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (1760 + 1536\lambda^2 - 266\lambda^3 - 2904\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m}^e &= C(\delta)_{m,m-1}^e = \frac{1}{31933440} (-282480 - 2088\lambda^2 - 1407\lambda^3 + 105732\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-229680 + 39096\lambda^2 + 3213\lambda^3 - 3564\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (489456 - 42624\lambda^2 - 2205\lambda^3 - 77220\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (22704 + 5616\lambda^2 + 399\lambda^3 - 24948\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m+1}^e &= C(\delta)_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{31933440} (-110880 - 15624\lambda^2 + 504\lambda^3 + 77616\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (-139392 + 25704\lambda^2 - 1008\lambda^3 + 27720\lambda) \delta_m^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (231264 - 15624\lambda^2 + 504\lambda^3 - 83952\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&\quad + \frac{1}{31933440} (19008 + 5544\lambda^2 - 21384\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta^n)_{m-1,m+2}^e &= C(\delta)_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{31933440} (-880 - 768\lambda^2 + 133\lambda^3 + 1452\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-3696 - 72\lambda^2 - 399\lambda^3 + 3564\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (3696 + 72\lambda^2 + 399\lambda^3 - 3564\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-133\lambda^3 + 768\lambda^2 - 1452\lambda + 880) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m,m}^e &= \frac{1}{31933440} (-1906080 + 32688\lambda^2 + 2814\lambda^3 + 7128\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-3104640 - 138600\lambda^2 - 6930\lambda^3 - 1219680\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (4400352 + 109440\lambda^2 + 5418\lambda^3 + 1491336\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (610368 - 3528\lambda^2 - 1302\lambda^3 - 278784\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m,m+1}^e &= C(\delta)_{m+1,m}^e = \frac{1}{31933440} (-941424 + 16920\lambda^2 - 1407\lambda^3 + 271260\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-3087216 + 720\lambda^2 + 4221\lambda^3 - 856548\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (3087216 - 720\lambda^2 - 4221\lambda^3 + 856548\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (941424 - 16920\lambda^2 + 1407\lambda^3 - 271260\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m,m+2}^e &= C(\delta)_{m+2,m}^e = \frac{1}{31933440} (-19008 - 5544\lambda^2 + 21384\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-231264 + 15624\lambda^2 - 504\lambda^3 + 83952\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (139392 - 25704\lambda^2 + 1008\lambda^3 - 27720\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-504\lambda^3 + 15624\lambda^2 - 77616\lambda + 110880) \delta_{m+2}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m+1,m+1}^e &= \frac{1}{31933440} (-610368 + 3528\lambda^2 + 1302\lambda^3 + 278784\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-4400352 - 109440\lambda^2 - 5418\lambda^3 - 1491336\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (3104640 + 138600\lambda^2 + 6930\lambda^3 + 1219680\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (1906080 - 32688\lambda^2 - 2814\lambda^3 - 7128\lambda) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m+1,m+2}^e &= C(\delta)_{m+2,m+1}^e = \frac{1}{31933440} (-22704 - 5616\lambda^2 - 399\lambda^3 + 24948\lambda) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-489456 + 42624\lambda^2 + 2205\lambda^3 + 77220\lambda) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (229680 - 39096\lambda^2 - 3213\lambda^3 + 3564\lambda) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (1407\lambda^3 + 2088\lambda^2 - 105732\lambda + 282480) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\delta)_{m+2,m+2}^e &= \frac{1}{31933440} (266\lambda^3 - 1536\lambda^2 + 2904\lambda - 1760) \delta_{m-1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-1302\lambda^3 - 3528\lambda^2 + 44352\lambda - 73920) \delta_m^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (1806\lambda^3 - 4176\lambda^2 - 10296\lambda + 26400) \delta_{m+1}^n \\
&+ \frac{1}{31933440} (-770\lambda^3 + 9240\lambda^2 - 36960\lambda + 49280) \delta_{m+2}^n,
\end{aligned}$$

eleman matrislerinin uygun şekilde birbirlerine eklenerek düzenlenmesi sonucunda

$$\left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \mu \mathbf{B} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \mathbf{C} (\boldsymbol{\delta}^{n+1}) \right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mu \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \mathbf{C} (\boldsymbol{\delta}^n) \right] \boldsymbol{\delta}^n \quad (3.9)$$

olarak yazılabilir. (3.9) denklem sistemi bir önceki bölümde RLW denkleminin çözümünde ulaşıldığı gibi $(N + 3)$ denklem ve olmak üzere $(N + 3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Benzer şekilde denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki $u(a, x) = u(b, x) = 0$ sınır şartları kullanılıp δ_{-1}^{n+1} and δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (3.9) denklem sistemi $(N + 1) \times (N + 1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla kolayca çözülebilir. (3.9) denklem sistemine sınır şartları uygulandıktan sonra ulaşılan denklem sistemi, katsayılarda bulunan $\boldsymbol{\delta}^{n+1}$ teriminden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sisteminin çözülebilmesi için bir önceki bölümde anlatılan lineerleştirme işlemi burada da uygulanmıştır.

KdV denkleminin genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörünün bulunması gereklidir.

Başlangıç durumu

$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$ başlangıç vektörü, KdV denklemi için verilen

$$u(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.10)$$

başlangıç ve

$$u_x(a, 0) = u_x(b, 0) = 0 \Rightarrow u_x(x_0, 0) = u_x(x_N, 0) = 0 \quad (3.11)$$

sınır şartları kullanılarak bulunabilir. Bunun için öncelikle

$$u(x_m, 0) = \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{m-1}^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_m^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{m+1}^0 \quad (3.12)$$

genişletilmiş kübik B-spline eşitlikleri kullanılır ve (3.10) eşitliği açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{-1}^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_0^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_1^0 &= u(x_0, 0) \\ \frac{4 - \lambda}{24} \delta_0^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_1^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_2^0 &= u(x_1, 0) \\ &\vdots \\ \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{N-1}^0 + \frac{16 + 2\lambda}{24} \delta_N^0 + \frac{4 - \lambda}{24} \delta_{N+1}^0 &= u(x_N, 0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

sistemine ulaşılır. Açık olarak yazılan (3.13) sistemi $N + 3$ bilinmeyen ve $N + 1$ denklemden oluşmaktadır. (3.11) sınır şartlarında

$$u_x(x_m, 0) = \frac{1}{2h} (\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \quad (3.14)$$

olarak verilen birinci türev için genişletilmiş kübik B-spline eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_x(x_0, 0) &= \frac{1}{2h} (\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) = 0 \\ \delta_{-1}^0 &= \delta_1^0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} u_x(x_N, 0) &= \frac{1}{2h} (\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0), \\ \delta_{N+1}^0 &= \delta_{N-1}^0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

bulunur. (3.15) ve (3.16) eşitlikleri (3.13) sisteminde kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

formunda yazılabilir. Soliton dalga çözümünde $t = 0$ alındığında

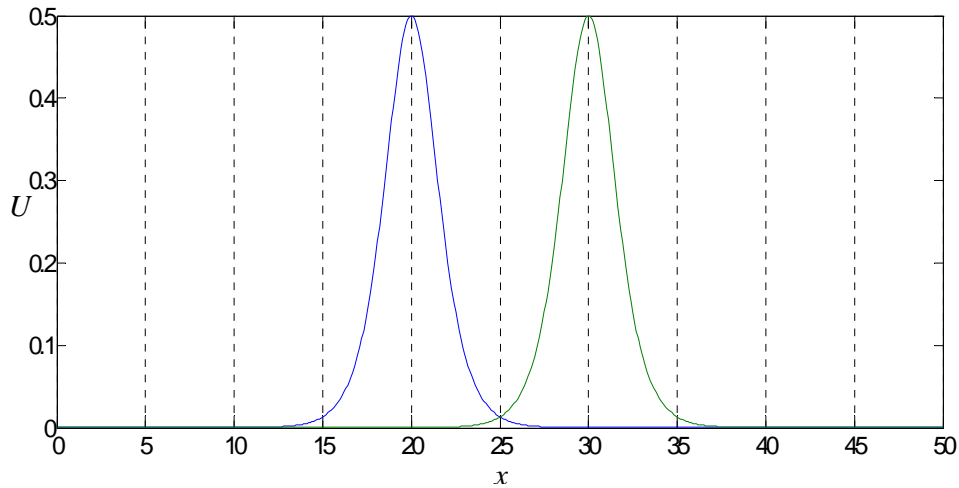
$$u(x, 0) = 0.5 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - 20}{2} \right) \quad (3.19)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

$t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 10$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 20 + 10 = 30$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 3.1: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

Alınan parametrelere göre 0.5 genlikli soliton dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.32) eşitliklerinden

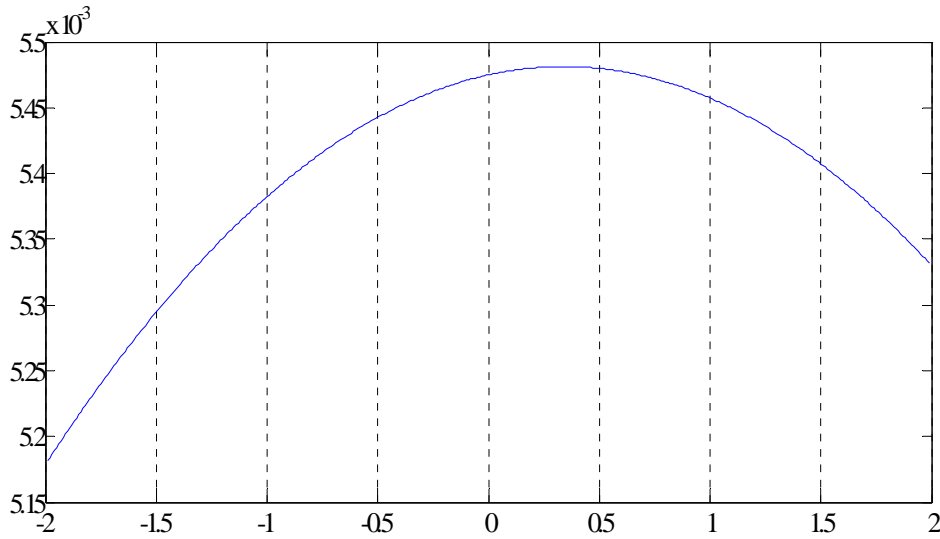
$$C_1 = \frac{6c}{A} = 2,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{A} = \frac{2}{3} \approx 0.6666666667,$$

$$C_3 = \frac{144c^2 (\mu A^2 - c\varepsilon)}{5A\varepsilon} = 0.2$$

olarak hesaplanabilir.

En düşük hatanın elde edilebilmesi için λ parametresinin seçimi oldukça önemlidir. Konum ve zaman artımı olarak $h = \Delta t = 0.1$ seçimleri yapılarak $-2 < \lambda < 2$ için $t = 10$ anında oluşacak maksimum hataları veren grafik Şekil 3.2 de çizilmiştir. Şekil incelendiğinde en düşük hatanın yaklaşık olarak λ nın -2 değeri civarında olduğu söylenebilir. $\lambda = -2$ değerinin hesaplamaya katılmamıştır. Çünkü $\lambda = -2$ alındığında sınır şartlarından dolayı denklem sisteminin çözümü esnasında sıfıra bölme işlemi gelmektedir.



Şekil 3.2 : $h = \Delta t = 0.1$, $c = 1/6$, $0 \leq x \leq 50$ ve $-2 < \lambda < 2$ için L_∞

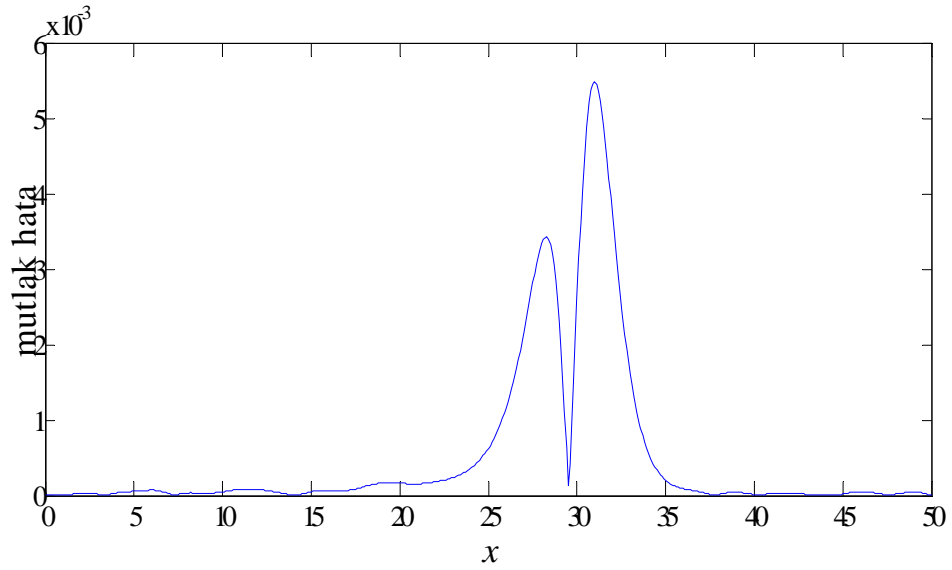
Program $t = 10$ oluncaya kadar çalıştırılmış ve en düşük maksimum hatanın $\lambda = -1.999$ de olduğu görülmüştür ve $\lambda = 0$ ile $\lambda = -1.999$ için $t = 10$ olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin değerleri Tablo 3.1 de verilmiştir. Çalışma boyunca hesaplanan korunum sabitleri ile analitik sonuçların birbirleri ile oldukça uyumlu oldukları tablodan görülebilir. Tabloya göre ayrıca $\lambda = -1.999$ seçimi yapıldığında bulunan maksimum hatanın $\lambda = 0$ olduğu anda bulunan maksimum hataya göre daha düşük olduğu da görülebilir. Dolayısıyla bu test probleminde alınan parametrelere göre genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodunun kübik B-spline Galerkin metoduna göre ufakta olsa bir iyileştirme yaptığı

söylenilebilir.

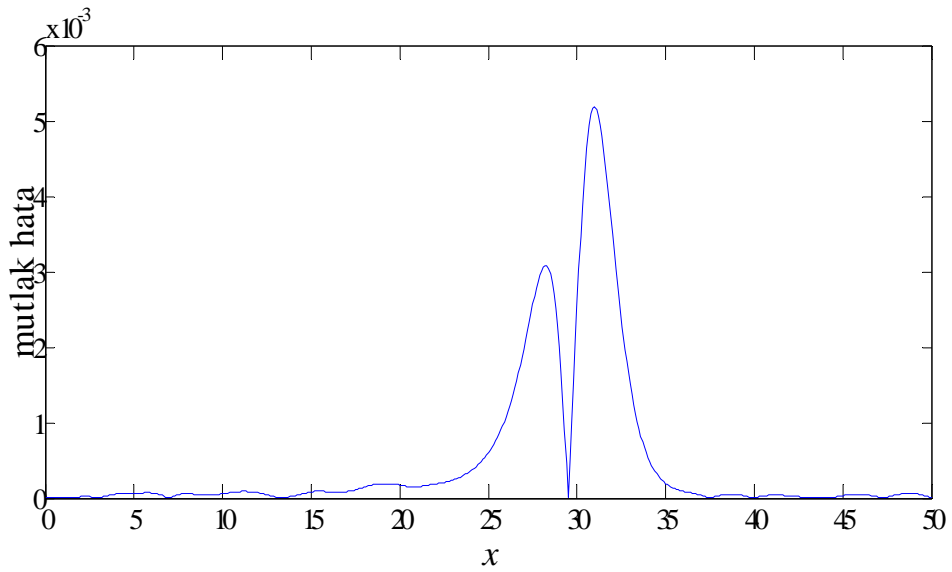
Tablo 3.1: $h = \Delta t = 0.1$, $c = 1/6$ ve $0 \leq x \leq 50$ için korunum sabitleri ve hata normları

$\lambda = 0$				
Zaman	L_∞	C_1	C_2	C_3
0		1.999965868	0.666615323	0.199974395
2	0.00056	1.999322509	0.665645560	0.199489670
4	0.00117	1.998646711	0.664631613	0.198983437
6	0.00219	1.997973248	0.663624816	0.198481274
8	0.00364	1.997309180	0.662624646	0.197982955
10	0.00548	1.996646428	0.661631396	0.197488565
$\lambda = -1.999$				
Zaman	L_∞	C_1	C_2	C_3
0		1.999965816	0.666615246	0.199894835
2	0.00056	1.999319841	0.665643671	0.199409370
4	0.00104	1.998643393	0.664627377	0.198902253
6	0.00201	1.997970830	0.663618261	0.198399161
8	0.00339	1.997302913	0.662615670	0.197899999
10	0.00518	1.996638581	0.661620094	0.197404724

Şekil 3.3 de $t = 10$ anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik çizilmiştir. Grafik incelendiğinde $\lambda = 0$ ile $\lambda = -1.999$ için maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu görülebilir. Dolayısıyla metodumuz için sınır şartlarının hata üzerinde etkisi yoktur diyebiliriz.



a) $\lambda = 0$



b) $\lambda = -1.999$

Şekil 3.3 : $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $c = 1/6$ ve $0 \leq x \leq 50$ için $t = 10$ zamanındaki

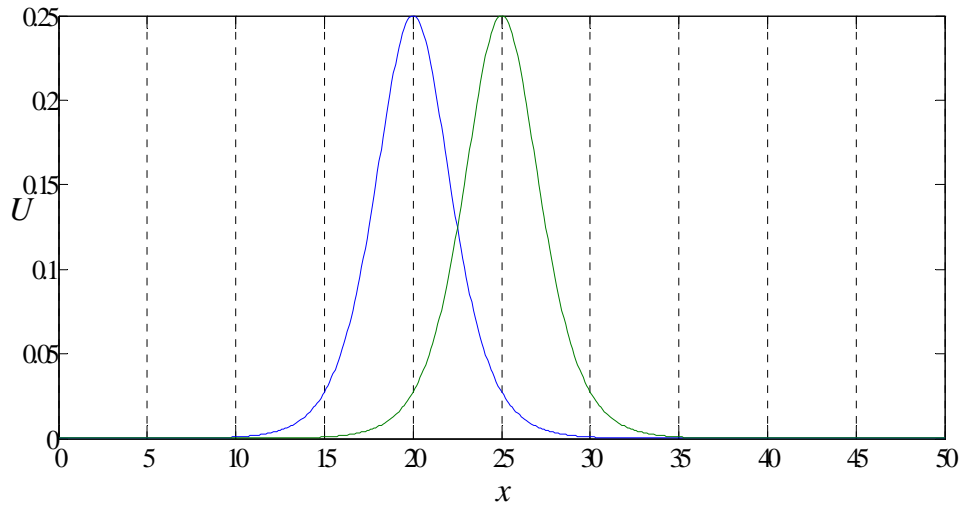
|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

Soliton dalgasının oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızı ve genliği üzerinde etkisi olan c değeri değiştirilerek problem incelenmiştir. $c = 1/12$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu Şekil 3.4 de gösterilmiştir. Şekilden de

anlaşıldığı gibi $t = 10$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 20 + \frac{6}{12}10 = 25$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 3.4: $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu

Alınan parametrelere göre 0.25 genlikli soliton dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değeri (1.32) eşitliklerinden

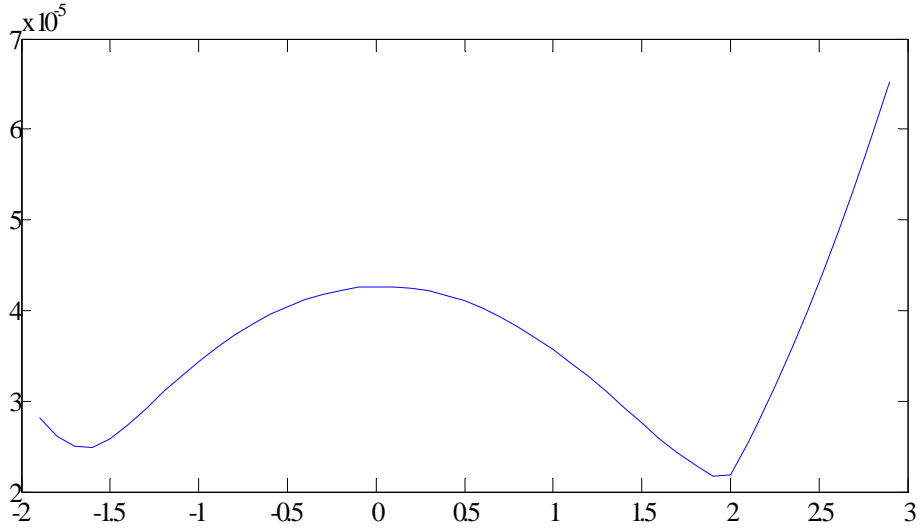
$$C_1 = \frac{6c}{A} = \sqrt{2} \approx 1.414213562,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{A} = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.2357022603,$$

$$C_3 = \frac{144c^2(\mu A^2 - c\varepsilon)}{5A\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{40} \approx 0.03535533905$$

olarak hesaplanabilir.

En düşük hatanın elde edilebilmesi için λ parametresinin seçimi oldukça önemlidir. Konum ve zaman artımı olarak $h = \Delta t = 0.1$ seçimleri yapılarak $-2 < \lambda < 3$ için $t = 10$ anında oluşacak maksimum hataları veren grafik Şekil 3.5 de çizilmiştir. Şekil incelendiğinde en düşük hatanın yaklaşık olarak λ nın 2 değeri civarında oluştuğu söylenebilir.



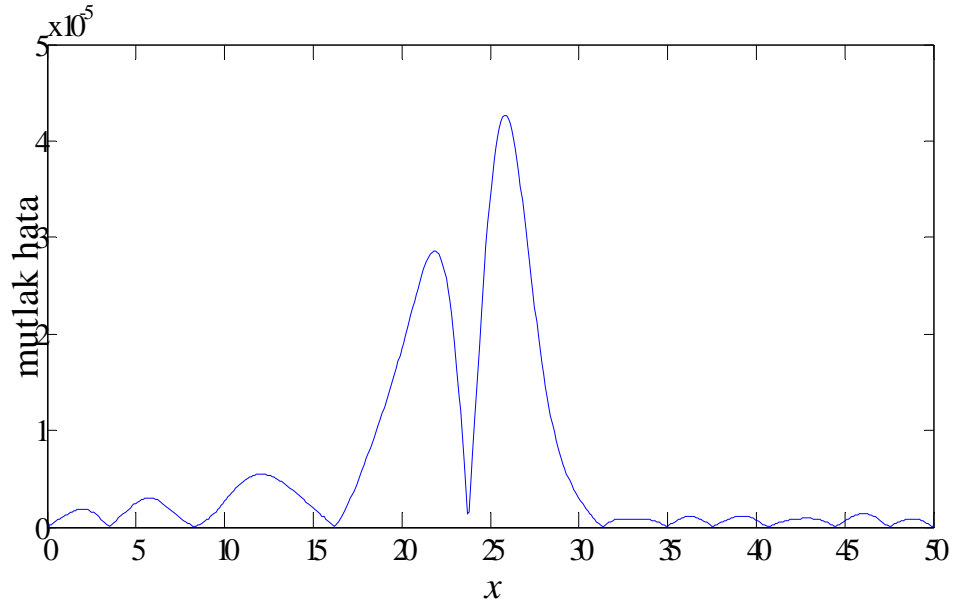
Şekil 3.5 : $h = \Delta t = 0.1$, $c = 1/12$, $0 \leq x \leq 50$ ve $-2 < \lambda < 2$ için L_∞

Program $t = 10$ oluncaya kadar çalıştırılmış ve en düşük maksimum hatanın $\lambda = 1.969$ de olduğu görülmüştür ve $\lambda = 0$ ile $\lambda = 1.969$ için $t = 10$ olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin değerleri Tablo 3.2 de verilmiştir. Çalışma boyunca hesaplanan korunum sabitleri ile analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları tablodan görülebilir. λ nın seçimine bağlı olarak bulunan maksimum hata ise $\lambda = 0$ için bulunan maksimum hatadan daha düşüktür. İlk iki korunum sabiti aynı olsada son korunum sabiti $\lambda = 1.969$ için hesaplandığında analitik çözüme daha yakın çıkmaktadır. Dolayısıyla yöntem azda olsa bir iyileştirmeye sebep olmuştur. Tablo 1 e göre hem $\lambda = 0$ hemde en iyi λ için mutlak hatanın daha düşük gelmesinin sebebi ise bu durumda modellenen soliton dalgasının genliğinin düşük olmasıdır.

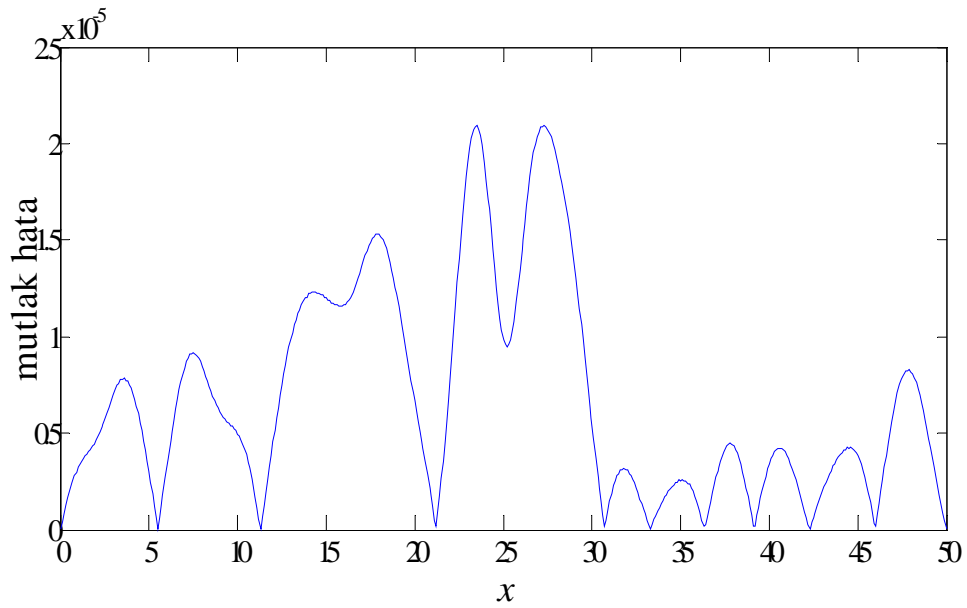
Tablo 3.2: $h = \Delta t = 0.1$, $c = 1/12$ ve $0 \leq x \leq 50$ için korunum sabitleri
ve hata normları

$\lambda = 0$				
Zaman	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	1.414212034	0.235701886	0.035355249
2	0.00911	1.414203352	0.235694765	0.035353469
4	0.01637	1.414194138	0.235687273	0.035351595
6	0.02423	1.414184864	0.235679781	0.035349723
8	0.03273	1.414175699	0.235672291	0.035347850
10	0.04266	1.414166479	0.235664803	0.035345978
$\lambda = 1.96900$				
Zaman	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	1.414211985	0.235701885	0.035362153
2	0.02274	1.414203482	0.235694763	0.035360374
4	0.02574	1.414194094	0.235687264	0.035358499
6	0.02559	1.414184850	0.235679766	0.035356625
8	0.02431	1.414175956	0.235672268	0.035354750
10	0.02094	1.414166366	0.235664772	0.035352875

Şekil 3.6 da $t = 10$ anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik çizilmiştir. Grafik incelendiğinde $\lambda = 0$ ile $\lambda = 1.96900$ için maksimum hatanın dalgalının ortalarında olduğu görülebilir. Dolayısıyla metodumuz için sınır şartlarının hata üzerinde etkisi yoktur diyebiliriz. Ayrıca maksimum hatanın $\lambda = 0$ iken 4×10^{-5} civarında olduğu ve $\lambda = 1.96900$ iken ise 2×10^{-5} civarında olduğu söylenilebilir. Dolayısıyla şekil ile üstte verilen tablo arasında herhangi bir uyumsuzluk görülmemektedir.



a) $\lambda = 0$



b) $\lambda = 1.96900$

Şekil 3.6 : $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $c = 1/12$ ve $0 \leq x \leq 50$ için $t = 10$ zamanındaki

[Analitik çözüm – Sayısal çözüm]

Konum aralığı olarak $0 \leq x \leq 50$ ile $c = 1/6$, $c = 1/12$ ve farklı konum-zaman artımı değerleri için $t = 10$ anında hesaplanan hata normlarının değerleri Tablo 3.3

de verilmiştir. Konum ve zaman artım değerleri büyüdükçe hata normlarının değerlerinde arttığı tablodan kolaylıkla söylenebilir. Ayrıca λ nın en uygun değerleri için hata normlarında düşüş olduğu görülebilir. Ayrıca c değeri küçüldüğünde hata normlarında küçüldüğü görülebilir.

Tablo 3.3: Farklı konum ve zaman artımları için

$t = 10$ zamanındaki hata normları

$c = 1/6, 0 \leq x \leq 50$

		$\lambda = 0$	
h	Δt	L_∞	L_∞
0.05	0.05	0.00098	0.00090($\lambda = -1.999$)
0.1	0.1	0.00548	0.00518($\lambda = -1.999$)
0.2	0.2	0.02215	0.02112($\lambda = -1.999$)
0.5	0.5	0.03975	0.03975($\lambda = 0$)

$c = 1/12, 0 \leq x \leq 50$

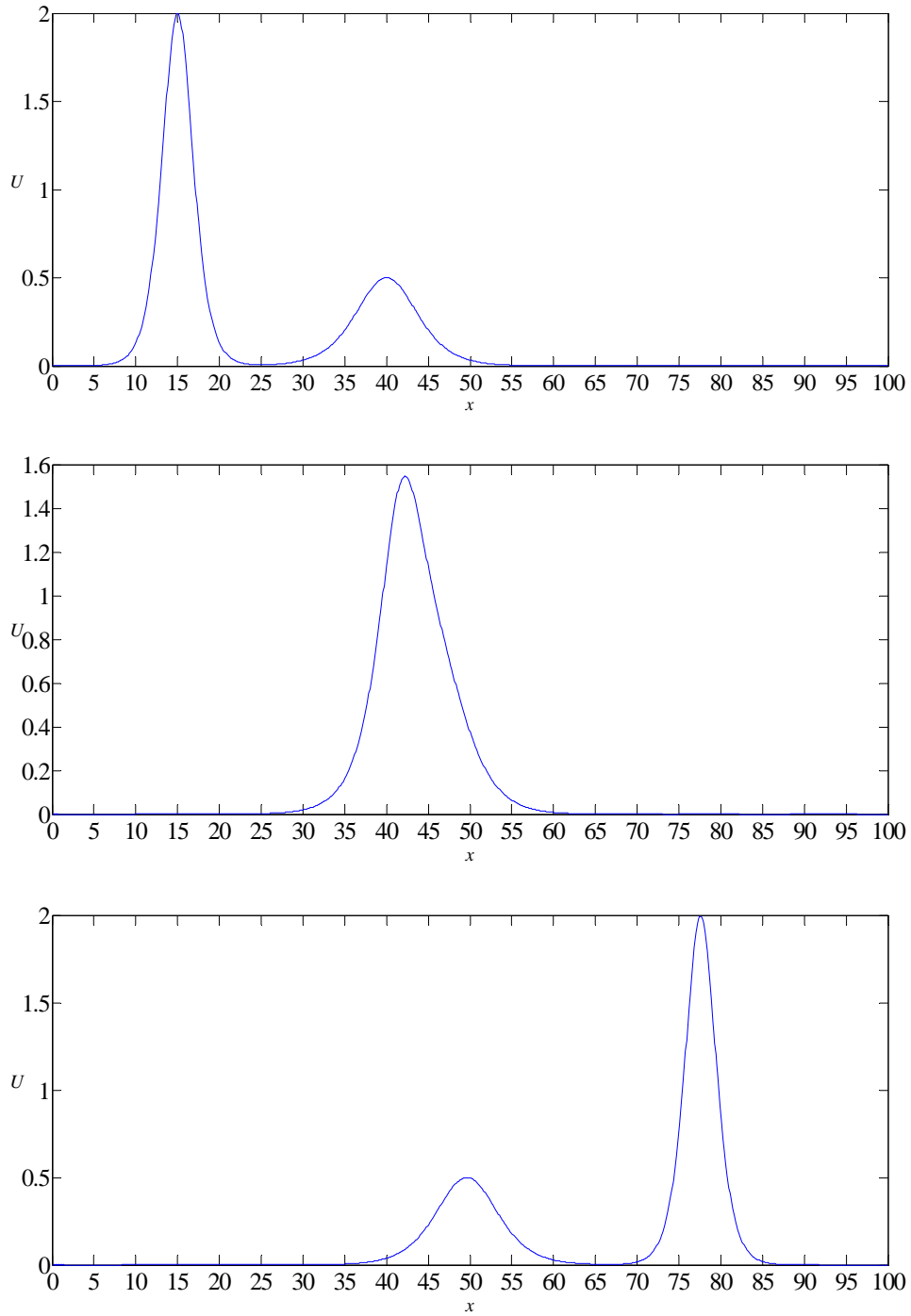
		$\lambda = 0$	
h	Δt	$L_\infty \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.05	0.05	0.00783	0.00349($\lambda = -1.599$)
0.1	0.1	0.04266	0.02494($\lambda = -1.599$)
0.2	0.2	0.22734	0.17131($\lambda = -1.599$)
0.5	0.5	1.55496	1.53397($\lambda = -0.799$)

3.2.2 İki Soliton Dalgasının Çarpışması Problemi

Birinci bölümde verilen iki soliton dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.33) eşitliğinde $\varepsilon = \mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 40$, $c_1 = 2/3$, $c_2 = 1/6$, $A_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $A_2 = \frac{\sqrt{6}}{12}$ alındığında

$$u(x, 0) = 2\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}[x - 15]\right) + 0.5\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{12}[x - 40]\right)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır. $h = \Delta t = 0.1$ ve $[0, 100]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 90$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçların grafiği $t = 0$, $t = 40$, $t = 150$ zamanlarında Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.7: İki soliton dalgasının çarpışması $t=0,40,90$

Şekiller sadece $\lambda = 0$ için çizilmiştir. Çünkü en iyi λ için şekil çizilsede gözle görülür bir fark olmayacaktır. İlk şekil incelendiğinde genliği 2 olan dalganın $x = 15$ noktasına tepe noktası gelecek şekilde yerleştiği, genliği 0.5 olan dalganın ise tepe noktası $x = 40$ noktasına gelecek şekilde yerleştiği görülebilir. Bu dalgalar soliton dalga olduklarından ve aynı yönde hareket ettiklerinden genliği daha büyük olan dalga daha hızlı ilerleyeceğinden bir müddet sonra genliği yüksek olan dalga diğer dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Çarpışma işlemi yaklaşık olarak $t = 40$ zamanı civarında olmaktadır ve bu durumun etkisi ikinci şekilde görülebilir. Normal dalgaların aksine soliton dalgaları asla birleşmeyeceğinden çarpışma işlemi genliği daha büyük olan dalganın yoluna devam etmesi sonucu bir müddet sonra sona erecektir. Genliği büyük olan dalga daha hızlı olduğundan diğer dalgayı geride bırakarak yoluna devam edecektir. Bu durum üçüncü şekilde görülebilir. Dalgaların başlangıç anındaki şekillerinde bir bozulma olmadığı kolaylıkla görülebilir. Bununla birlikte $t = 90$ anında dalgaların genlikleri

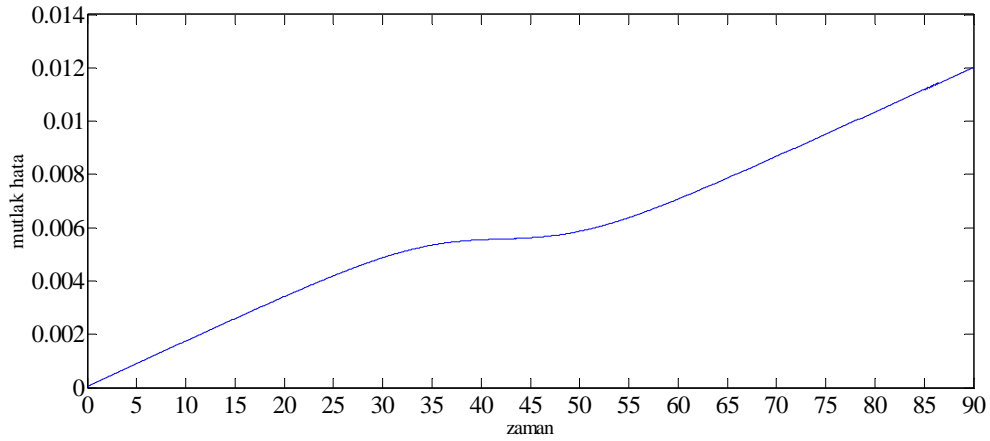
	Genlik $\lambda = 0$	Genlik $\lambda = 0.166$
Küçük Dalga	0.4999186	0.4999187
Büyük Dalga	1.9923119	1.9923167

olarak ölçülmüştür. Soliton dalgaları çarpışma sonrasında genliklerini korumak isteyeceğinden $\lambda = 0.166$ için program çalıştırıldığında dalganın genliğindeki kaybın daha az olması sebebiyle λ değeri değiştirildiğinde sonucun daha iyi olduğu söylenilebilir.

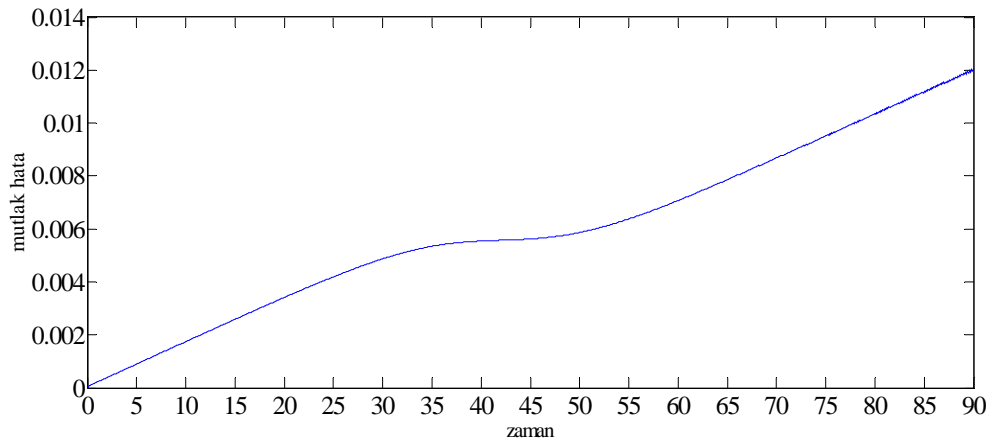
İlk korunum sabitinin tam değeri

$$C_1 = \frac{6c_1}{A_1} + \frac{6c_2}{A_2} \approx 14.69693846$$

olarak bulunabilir. Şekil 3.9 da C_1 korunum sabiti için hata grafiği bir eksen zaman eksenini diğer ekseninde korunum sabitinin tam değeri ile yaklaşık değerinin mutlak değeri olmak üzere çizilmiştir. λ nın değeri değiştirilsede grafikteki değişiklik gözle görülmeyecek şekildedir. Diğer taraftan her iki şekilde de çarpışmanın olduğu zamanda grafikteki değişiklik kolaylıkla görülebilmektedir.



a) $\lambda = 0$



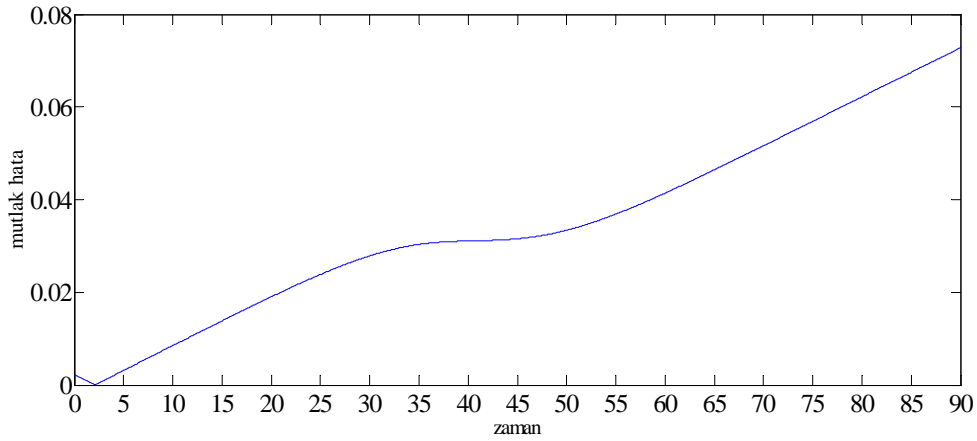
b) $\lambda = 0.166$

Şekil 3.9: C_1 korunum sabiti için mutlak hata

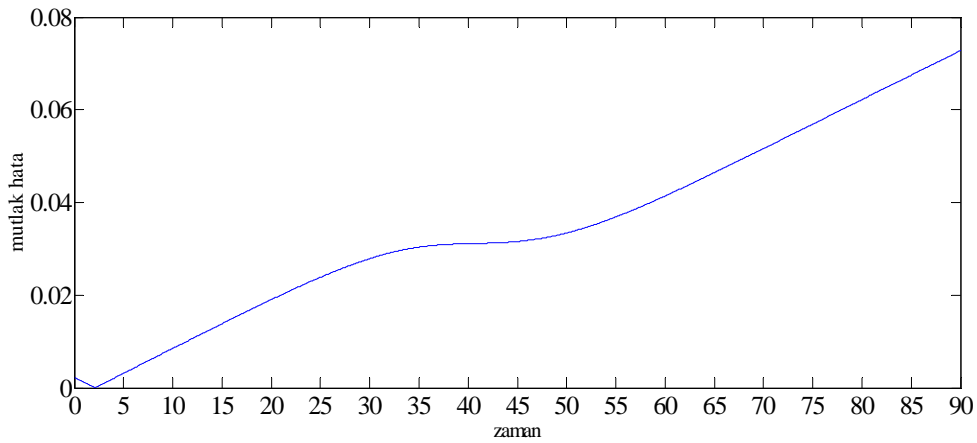
İkinci korunum sabitinin tam değeri

$$C_2 = \frac{12c_1^2}{A_1} + \frac{12c_2^2}{A_2} \approx 14.69693846$$

olarak bulunabilir. Şekil 3.10 da C_2 korunum sabiti için hata grafiği bir eksen zaman eksenini diğer ekseninde korunum sabitinin tam değeri ile yaklaşık değerinin mutlak değeri olmak üzere çizilmiştir. λ nın değeri değiştirilse de grafikteki değişiklik gözle görülmeyecek şekildedir. Diğer taraftan her iki şekilde de çarpışmanın olduğu zamanda grafikteki değişiklik kolaylıkla görülebilmektedir.



a) $\lambda = 0$



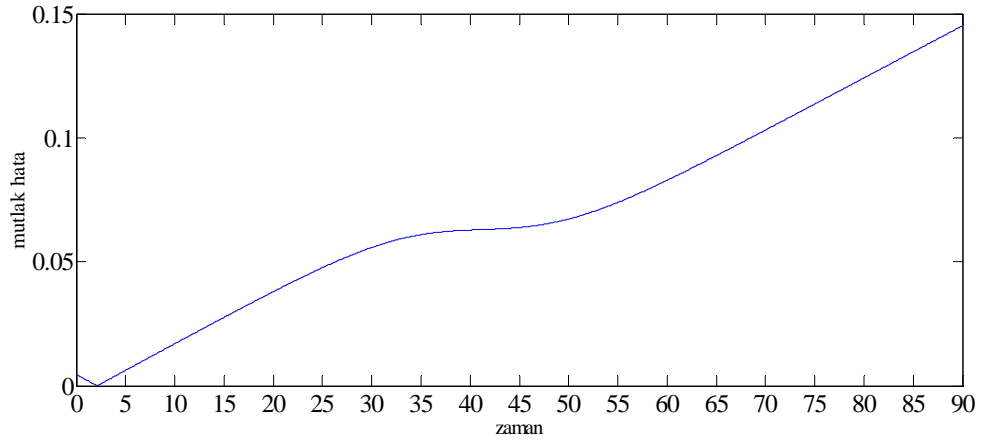
b) $\lambda = 0.166$

Şekil 3.10: C_2 korunum sabiti için mutlak hata

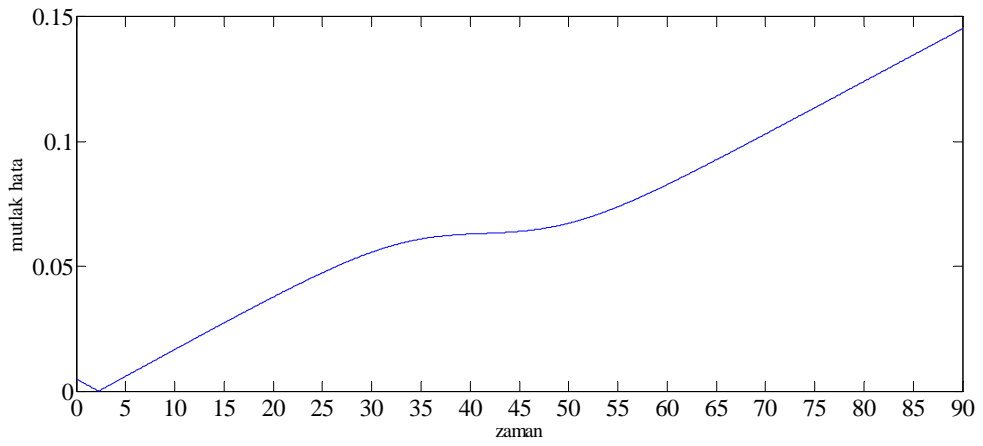
Son olarak üçüncü korunum sabitinin tam değeri ise

$$C_3 = \frac{144c_1^2 (\mu A_1^2 - c_1 \varepsilon)}{5A_1 \varepsilon} + \frac{144c_2^2 (\mu A_2^2 - c_2 \varepsilon)}{5A_2 \varepsilon} \approx 16.16663231$$

olarak bulunabilir. Şekil 3.11 de C_3 korunum sabiti için hata grafiği bir eksen zaman ekseni diğer ekseninde korunum sabitinin tam değeri ile yaklaşık değerinin mutlak değeri olmak üzere çizilmiştir. Bu grafik içinde λ nın değeri değiştirildiğinde grafikteki değişiklik gözle görülemeyecek şekildedir. Ayrıca daha önce gözlemlendiği gibi her iki şekilde de çarpışmanın olduğu zamanda grafikteki değişiklik kolaylıkla görülebilmektedir.



a) $\lambda = 0$



b) $\lambda = 0.166$

Şekil 3.11: C_3 korunum sabiti için mutlak hata

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada RLW ve KdV denklemlerinin sayısal çözümü genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodu kullanılarak araştırılmıştır. İlk olarak denklemin zamana göre parçalanması için Crank-Nicolson yöntemi kullanıldıktan sonra genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi sayesinde çözümü aranan denklemler cebirsel denklem sistemine indirgenmiştir.

Bu çalışmanın amacı genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar konum parçalanması için kullanıldığında Galerkin sonlu elemanlar yönteminin hatayı ne kadar düşürdüğünü görmektir. Bu sebeple elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülürken genişletilmiş kübik B-spline daki λ parametresi en iyi çözüm için taratılmıştır. Test problemlerinde $\lambda = 0$ yani kübik b-spline Galerkin yöntemi ve λ nın en düşük hatayı veren en iyi durumu diğer bir ifade ile genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodu için sonuçlar incelenmiştir.

Sonuç olarak RLW ve KdV gibi kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümleri için genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodu uygulanabilir. Diğer taraftan elde edilen sonuçlar incelendiğinde genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodunun, kübik B-spline Galerkin metoduna göre azda olsa bir iyileştirme yaptığı görülmüştür. Fakat genişletilmiş kübik B-spline metodunda λ nın belirlenmesi esnasında bir maliyet ortaya çıktığından ortaya çıkan ekstra maliyette göz önüne alındığında beklenen iyileşmenin gerçekleşmediği de söylenilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alexander, M.E. and Morris, J.L.L. 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *Journal of Computational Physics* 30, 428-451.
- Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., 1972, Model Equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 272, 47-78.
- Chaohao, G., 1995, *Soliton theory and its applications*, Springer, 403 p.
- Crank J. and Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43, 50-64.
- Crawford, F., 1968, *Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3 Waves*, Mcgraw-Hill College, 600 p.
- Falkovich, G., 2007, *Soliton: A brief history of* , <http://www.weizmann.ac.il/home/fnfal/-soliton.pdf>.
- Gang, X. and Guo-Zhao, W., 2008, Extended cubic uniform B-spline and α -B-spline. *Acta Automatica Sinica* 34, 980-983.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters* 19, 1095-1097.
- Hamid, N.N.A, Masalahi, A.A. and Ismail, A.I.M, 2010, Extended cubic B-spline interpolation method applied to two point boundary value problems, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 62, 566-568.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, 148 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Korteweg, D.J and De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine* 39, 422-443.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley and Sons, 677 p.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85, 143–159.
- Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics* 25(2), 321-330.
- Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Parts A and B, *Quart. Appl. Math.* 4, 45–99 and 112–141.
- Smith, G.D., 1978, *Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods*, Oxford university press, 304 p.
- Thomas, J.W., 1995, *Numerical partial differential equations*, Springer, 437 p.
- Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics* 57(5), 841-847.
- Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D., 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, *Physical Review Letters* 15, 240-243.