Değişmeli Cebirler İçin Çaprazlanmış Modüller Üzerinde Tamlamalar

Elif Ilgaz

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Haziran 2013

Completions for Crossed Modules of Commutative Algebras

Elif Ilgaz

MASTER OF SCIENCE DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

June 2013

Değişmeli Cebirler İçin Çaprazlanmış Modüller Üzerinde Tamlamalar

Elif Ilgaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Haziran 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Elif Ilgaz'ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Değişmeli Cebirler İçin Çaprazlanmış Modüller Üzerinde Tamlamalar**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Üye : Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde topolojik cebir kavramı ve bu kavramla ilgili bazı temel özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca topolojik cebirlerin ters sistemi, ters limiti kavramları ile bazı örnekleri verilmiş ve 'cofinality' kavramı açıklanmıştır. İkinci bölümde tamlama kavramı tanımlandıktan sonra değişmeli cebirler üzerinde tamlama adım adım inşa edilmiştir. Üçüncü bölümde değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller, alt çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış idealler ve bölüm çaprazlanmış modüller ayrıntılı bir şekilde örneklerle incelenmiştir. Ayrıca çaprazlanmış modüllerin tamlamasında kullanılacak olan maksimal çaprazlanmış ideal ve çarpım ideali kavramları ile asal çaprazlanmış idealler, aralarında asal çaprazlanmış idealler, lokal ve yerel çaprazlanmış modüller tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde ise çaprazlanmış modüller için adic tamlama kavramının varlığı cat^1-cebirler yardımıyla ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Cebirler, Ters Sistem, Ters Limit, Tamlamalar, Çaprazlanmış Modüller, Cat^1-Cebir, Çaprazlanmış Modüllerin Tamlaması, Adic Tamlama.

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some basic properties of topological algebras are given. Also, the notions of inverse system and inverse limit of topological algebras are given with some examples and the notion of cofinality is explained. In the second chapter, the notion of completion of commutative algebras is defined and is given a construction step by step. In the third chapter, crossed modules, subcrossed modules, crossed ideals and quotient crossed modules are examined with examples. Furthermore, the maximal ideal used in completions of crossed modules and prime crossed ideals, co-prime crossed ideals, local crossed modules are defined . In the last chapter, existence of adic completions of crossed modules expressed by cat^1-algebras.

Keywords: Topological Algebras, Inverse System, Inverse Limit, Completions, Crossed Modules, Cat^1-Algebras, Completions of Crossed Modules, Adic Completion.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya yönlendiren ve tezimin her aşamasında bilgi ve desteğini esirgemeyen başta değerli danışman hocam, sayın;

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ’ye

Bu çalışma boyunca her türlü yardımlarından dolayı değerli hocam;

Doç. Dr. Enver Önder USLU’ya

Her zaman yanımda olan canım arkadaşım;

Arş. Gör. Elis SOYLU’ya

Bu çalışma süresince sağladığı burs desteği nedeniyle

TÜBİTAK’a

Ayrıca son olarak da beni bugünlere getiren,

değerli ailemdeki herkese

ayrı ayrı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

0.1 Önsöz

A bir halka ve M bir topolojik A-modül olsun. $\widehat{M}$; tam ve Hausdorff topolojik A-modül olmak üzere

$$\varphi : M \longrightarrow \widehat{M}$$

sürekli homomorfizmi aşağıda verilen evrensellik özelliğine sahip ise $\widehat{M}$ ya M nin bir *tamlaması* denir.

<u>Evrensellik Özelliği:</u> Herhangi bir M' tam ve Hasudorff topolojik A-modülü ve

$$f : M \longrightarrow M'$$

sürekli homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & M' \\
\widehat{M} \arrow[ur, dotted, "\exists!\ f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $f^*\varphi = f$) olacak şekilde bir tek

$$f^* : \widehat{M} \longrightarrow M'$$

sürekli homomorfizmi vardır.

Grup teoride bir çok yapının daha yüksek boyutlara genelleştirmesi yapılmaktadır. Yukarıda kısaca tanımını verdiğimiz "tamlama (completion)" kavramı F.J.Korkes ve T.Porter tarafından [11] çalışmasında 2-boyutlu grup olarak alınabilen çaprazlanmış modül kavramına taşınmıştır. Bu genelleştirmeden elde edilen yapı ise "$Pro-\mathcal{C}$ tamlama" olarak adlandırılmıştır.

Tamlama kavramı ilk olarak Sayılar Teorisi alanında ortaya çıkmıştır. Sayılar Teorisinde önemli bir kavram olarak kullanılan p-adic tamsayılar halkası; $\mathbb{Z}$ halkasının p asal sayı olmak üzere maksimal idealine göre bir adic tamlaması olarak elde edilir. Genel olarak maksimal idealler alındığında oluşan adic tamlama kavramı p-adic tamsayıların genelleştirilmiş halidir. Yani herhangi bir cebirsel yapı için (halka, modül ve cebir) herhangi bir ideali alınarak adic tamlaması oluşturulabilir. 1897 yılında Hensel bu kavram üzerinde çalışmış ve p-adic sayılar üzerinde gerekli sadeleştirmeleri yapmıştır. Diğer taraftan tamlama kavramının gruplar ve modüller üzerindeki tanımı ise D. Eisenbud [8], N. Bourbaki [6], M.F Atiyah-I.G.Macdonald [5] ve H. Matsumura [13, 14] tarafından verilmiş ve çeşitli özellikleri üzerinde durulmuştur.

Bu tezin öncelikli amacı modül teoride verilen tamlama kavramını değişmeli cebirler teorisine genelleştirmektir. Ayrıca değişmeli cebirlerin idealleri için bilinen birtakım özellik ve kavramlardan bazıları, değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri için ilk defa bu çalışmada ifade edilecektir. Çaprazlanmış ideallerin burada verilen özellikleri yardımıyla değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüller üzerinde adic tamlama kavramı tanımlanacak ve bu tanımın cat^1-cebirler içinde karşılığı ifade edilecektir.

0.2 Tezin Yapısı

Birinci bölümde öncelikle topolojik cebir kavramı ifade edilerek bazı temel özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra topolojik cebirlerin ters sistemi ve ters limiti kavramları açıklanarak ters limitin varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Diyagram olarak bu kavram

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, dotted, "\exists!\ \psi"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
 & X \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca daha sonra karşılaşacağımız bir kavram olan ”cofinality” şartı tanımlanarak bu şart altında topolojik cebirlerin farklı yönlendirilmiş kümelerle elde edilen ters sistemlerinin ters limitleri arasındaki izomorfluk açıklanmıştır.

İkinci bölümde değişmeli cebirler üzerinde tamlama kavramının genel bir tanımı verildikten sonra herhangi bir cebir uygun idealler ailesi alınarak bir topolojik cebir olarak ifade edilmiş ve üzerinde tamlama kavramı adım adım inşâ edilmiştir. Ayrıca bu bölümde tamlamanın özel bir hali olan adic tamlama kavramı da tanımlanarak temel bir yapı olan $\mathbb{Z}$ üzerindeki uygulamaları verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modül kavramı J.H.L Whitehead tarafından [21] da ifade edilmiştir. Whitehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerinde yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Çaprazlanmış modüller temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenebilir. Bu yapının Homotopi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatör grup teori dahil olmak üzere birçok alanda önemli yeri vardır.

Asosyatif ve değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı farklı bir isimle S.Lichtenbaum-M.Schlessinger [12] ve M.Gerstenhaber'in [9] çalışmalarında karşımıza çıkar. T.Porter ise [17] çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Ayrıca Z.Arvasi ve T.Porter [1, 2, 3] çalışmalarında değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerle ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Diğer taraftan bu bölümde tezin orijinal kısmı olan değişmeli cebirlerin ideallerinin sahip olduğu birçok özelliğin değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerdeki karşılıkları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Çaprazlanmış ideal olarak adlandırılan bu idealler yardımıyla bölüm çaprazlanmış modüllerde tanımlanmıştır. Böylece dördüncü bölümde ifade edilen çaprazlanmış modüller için adic tamlama kavramına temel oluşturulmuştur.

Son bölümde ise öncelikle **TopXMod** topolojik çaprazlanmış modüller kategorisi tanımlanarak bu kategoride bir obje özelliğine sahip olan çaprazlanmış modüller üzerinde adic tamlama kavramı ifade edilmiştir. Değişmeli cebirlerde olduğu gibi bu kavramın inşasından detaylı bir biçimde bahsedilmemiştir. Çünkü çaprazlanmış ideallerle oluşturulacak bölüm çaprazlanmış modülün ters limiti oldukça karışık ifadeler karşımıza getirir. Dolayısıyla buna alternatif olarak değişmeli cebirlerdeki duruma benzer olması nedeniyle **XMod** çaprazlanmış modüller ile $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ cat^1-cebirler kategorilerinin denkliği kullanılarak cat^1-cebirler üzerinde adic tamlamanın varlığı ifade edilmiştir. Ayrıca $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})$ cat^1-topolojik cebir kategorisi de tanımlanıp

$$\boxed{\mathbf{XMod} \cong \mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})}$$

denkliğine benzer olarak

$$\boxed{\mathbf{TopXMod} \cong \mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})}$$

denkliği de belirtilmiştir.

Bu çalışma boyunca kullanılacak tüm cebirler değişmeli olup K bir değişmeli halkadır. Ayrıca birimli halkalar için birimler sıfırdan farklıdır.

BÖLÜM 1

TERS LİMİT

1.1 Giriş

Bu bölümde öncelikle topolojik cebir kavramı ile bu kavramın bazı örnek ve özellikleri verilecektir. Daha sonra ise topolojik cebirler için sonraki bölümlerde kullanacağımız ters limit kavramı tanımlanacak ve bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Bu bölümle ilgili detaylar için [7, 15, 18] referanslarına bakınız.

1.2 Topolojik Cebir

Tanım 1.1 : K bir halka ve C bir $K-$cebir olmak üzere C üzerinde

$$\begin{array}{rlcl} +: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \times: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} -: & C & \longrightarrow & C \\ & c & \longmapsto & -c \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \cdot: & K\times C & \longrightarrow & C \\ & (k,c) & \longmapsto & k\cdot c \end{array}$$

fonksiyonları sürekli olacak şekilde bir topoloji varsa C ye bir *topolojik K-cebir* denir. Burada $C\times C$ çarpımı üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir.

Önerme 1.2 : C bir $K-$cebir olmak üzere C üzerinde bir topoloji verilsin.

$$\begin{array}{rlcl} m: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (c,c') & \longmapsto & c+c' \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rlcl} n: & C & \longrightarrow & C \\ & c & \longmapsto & -c \end{array}$$

fonksiyonları süreklidir ancak ve ancak

$$\begin{array}{rlcl} f: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (c,c') & \longmapsto & c-c' \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir.

İspat : Eğer m ve n fonksiyonları sürekli ise

$$\begin{array}{ccccc} C\times C & \xrightarrow{(1,n)} & C\times C & \xrightarrow{m} & C \\ (c,c') & \longmapsto & (c,-c') & \longmapsto & c-c' \end{array}$$

bileşke fonksiyonunun sürekliliğinden f süreklidir. Tersine, eğer

$$\begin{array}{rccc} f: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (c,c') & \longmapsto & c-c' \end{array}$$

fonksiyonu sürekli ise

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{(s,1)} & C\times C & \xrightarrow{f} & C \\ c & \longmapsto & (0_C,c) & \longmapsto & -c \end{array}$$

bileşke fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\begin{array}{rccc} n: & C & \longrightarrow & C \\ & c & \longmapsto & -c \end{array}$$

süreklidir. Ayrıca

$$\begin{array}{ccccc} C\times C & \xrightarrow{(1,n)} & C\times C & \xrightarrow{f} & C \\ (c,c') & \longmapsto & (c,-c') & \longmapsto & c+c' \end{array}$$

bileşke fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\begin{array}{rccc} m: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (c,c') & \longmapsto & c+c' \end{array}$$

süreklidir.

Örnekler:

1) $\mathbb{R}$, üzerindeki standart topolojiye göre bir topolojik $\mathbb{R}$-cebirdir. Şöyle ki;

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a-b \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir. Çünkü $\mathbb{R}$ deki bir (a,b) açık aralığı için

$$f^{-1}(a,b) = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid a<x-y<b\}$$

ters görüntüsü $\mathbb{R}^2$ de açık bir küme olduğundan f süreklidir. Ayrıca

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

fonksiyonu da süreklidir.

2) Benzer şekilde $\mathbb{C}$, üzerindeki standart topolojiye göre bir topolojik $\mathbb{C}$-cebirdir.

3) Her halka bir $\mathbb{Z}$-cebir olup R bir halka olmak üzere R ve $\mathbb{Z}$ üzerinde ayrık topolojiler alınırsa R bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebir olur. Çünkü R ve $\mathbb{Z}$ üzerindeki topolojiler ayrık topoloji olmak üzere $R\times R$ ve $R\times\mathbb{Z}$ üzerindeki topolojilerde ayrık topolojidir. Bu durumda ayrık topolojik

uzaydan herhangi bir uzaya tanımlı tüm fonksiyonlar sürekli olduğundan R üzerinde tanımlı tüm ikili ve tekli işlemler süreklidir.

4) Benzer şekilde R bir $\mathbb{Z}$-cebir olmak üzere R ve $\mathbb{Z}$ üzerinde kaba topolojiler alınırsa R bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebir olur. Çünkü herhangi bir uzaydan kaba uzaya tanımlı tüm fonksiyonlar süreklidir.

Tanım 1.3 : C ve C' birer topolojik $K-$cebir olmak üzere $f : C \longrightarrow C'$ sürekli homomorfizmine bir *topolojik cebir homomorfizmi* denir.

Örnekler:

1) C bir $K-$cebir olmak üzere $1_C : C \longrightarrow C$ birim fonksiyonu bir topolojik cebir homomorfizmidir.

2) $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$-cebirler olup üzerindeki ayrık topolojilerle birlikte topolojik $\mathbb{R}$-cebirdirler. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a,b) & \longmapsto & a+ib \end{array}$$

fonksiyonu bir $\mathbb{R}$-cebir homomorfizmi olup sürekli olduğundan f bir topolojik cebir homomorfizmidir.

Önerme 1.4 : Eğer $f : C \longrightarrow C'$ ve $g : C' \longrightarrow C''$ topolojik homomorfizmler ise $gf : C \longrightarrow C''$ de bir topolojik $K-$cebir homomorfizmidir.

İspat : Sürekli fonksiyonların bileşkesi sürekli ve cebir homomorfizmlerin bileşkesi cebir homomorfizmi olduğundan gf sürekli homomorfizmdir.

Önerme 1.5 : R, S, T topolojik K-cebirler olsun. Bu durumda $h : R \longrightarrow S$ sürekli, örten, açık homomorfizm ve $q : S \longrightarrow T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $q \circ h$ sürekli (açık) homomorfizm ise q sürekli (açık) homomorfizmdir.

İspat : h ve $q \circ h$ homomorfizm iken q da bir homomorfizmdir. Çünkü; h örten olduğundan her $s \in S$ için $h(r) = s$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Dolayısıyla $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere $h(r_1) = s_1$,

$h(r_2) = s_2$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Buna göre

$$\begin{aligned}
q(s_1+s_2) &= q(h(r_1)+h(r_2)) \\
&= q(h(r_1+r_2)) \text{ } (\because h \text{ cebir homo.}) \\
&= (q\circ h)(r_1+r_2) \\
&= (q\circ h)(r_1)+(q\circ h)(r_2) \text{ } (\because q\circ h \text{ cebir homo.}) \\
&= q(h(r_1))+q(h(r_2)) \\
&= q(s_1)+q(s_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(s_1s_2) &= q(h(r_1)h(r_2)) \\
&= q(h(r_1r_2)) \text{ } (\because h \text{ cebir homo.}) \\
&= (q\circ h)(r_1r_2) \\
&= (q\circ h)(r_1)(q\circ h)(r_2) \text{ } (\because q\circ h \text{ cebir homo.}) \\
&= q(h(r_1))q(h(r_2)) \\
&= q(s_1)q(s_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
q(k\cdot s) &= q(k\cdot h(r)) \\
&= q(h(k\cdot r)) \text{ } (\because h \text{ cebir homo.}) \\
&= (q\circ h)(k\cdot r) \\
&= k\cdot(q\circ h)(r) \text{ } (\because q\circ h \text{ cebir homo.}) \\
&= k\cdot q(h(r)) \\
&= k\cdot q(s)
\end{aligned}$$

olduğundan q bir homomorfizmdir.

Diğer taraftan $q\circ h$ sürekli iken q sürekli ve $q\circ h$ açık iken q açıktır. Çünkü $O\subseteq T$ açık bir alt küme olmak üzere

$$q^{-1}(O) = h(h^{-1}(q^{-1}(O))) = h((q\circ h)^{-1}(O))$$

olup $q\circ h$ sürekli ve h açık fonksiyon olduğundan $q^{-1}(O)\subseteq S$ açık bir alt kümedir. Dolayısıyla q süreklidir. Ayrıca $O\subseteq S$ açık bir alt küme olmak üzere

$$q(O) = q(h(h^{-1}(O))) = (q\circ h)(h^{-1}(O))$$

olup h sürekli ve $q\circ h$ açık fonksiyon olduğundan $q(O)\subseteq T$ açık bir alt kümedir. Yani q açık fonksiyondur.

1.3 Verilen Bir Topolojik Cebirden Yeni Topolojik Cebir Elde Etmek

1.3.1 Alt Topolojik Cebir

Önerme 1.6 : Bir topolojik cebirin alt cebiri topolojik cebirdir. Bu cebire *alt topolojik cebir* denir.

İspat : C bir topolojik $K-$cebir ve C'; C nin bir alt $K-$cebiri olsun. Bu durumda Tanım 1.1 de ifade edilen fonksiyonlar sürekli olup bu fonksiyonların C' ye kısıtlanmışı da süreklidir.

Örnek 1.1 : $n\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-cebir olup $n\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ nin alt cebiridir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebir olup $n\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ nin bir alt topolojik $\mathbb{Z}$-cebiridir.

1.3.2 Topolojik Cebirlerin Çarpımı

C ve C' birer topolojik $K-$cebir olsun. Bu durumda $C\times C'$ kartezyen çarpımı da

$$\begin{array}{ccc} (C\times C')\times(C\times C') & \longrightarrow & C\times C' \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a+c,b+d) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (C\times C')\times(C\times C') & \longrightarrow & C\times C' \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (ac,bd) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} K\times(C\times C') & \longrightarrow & C\times C' \\ (k,(c,c')) & \longmapsto & k\cdot(c,c')=(kc,kc') \end{array}$$

işlemleriyle bir topolojik $K-$cebirdir. Bu durumda $C\times C'$ topolojik $K-$cebirine C ve C' topolojik cebirlerinin *çarpımı* denir.

Örnek 1.2 : $\mathbb{Z}$ bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebir olup $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebirdir.

1.3.3 Topolojik Bölüm Cebiri

C bir $K-$cebir ve C'; C nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$C/C'=\{c+C' \mid c\in C\}$$

bölüm cebiri ve

$$\begin{array}{cccc} q: & C & \longrightarrow & C/C' \\ & c & \longmapsto & c+C' \end{array}$$

bölüm fonksiyonu olmak üzere C/C' üzerinde bölüm topolojisi tanımlı olup C/C' üzerindeki bölüm topolojisine göre $U \subseteq C/C'$ açık bir alt küme olmak üzere $q^{-1}(U)$ ters görüntüsü C de açık olur. O halde q bölüm fonksiyonu süreklidir.

Ayrıca C/C' bölüm cebiri

$$\begin{array}{ccc} C/C' \times C/C' & \longrightarrow & C/C' \\ (a+C', b+C') & \longmapsto & a+b+C' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C/C' \times C/C' & \longrightarrow & C/C' \\ (a+C', b+C') & \longmapsto & ab+C' \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} K \times C/C' & \longrightarrow & C/C' \\ (k, c+C') & \longmapsto & kc+C' \end{array}$$

işlemleriyle bir topolojik $K-$cebir olur. Bu durumda C/C' ye *topolojik bölüm cebiri* denir.

1.4 Ters Limit ve Özellikleri

Tanım 1.7 : I bir küme olmak üzere "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı;

$$\boxed{\text{"}i, j \in I \text{ ise } i, j \preceq k \text{ olacak şekilde } k \in I \text{ vardır"}}$$

şartını sağlıyorsa $(I, \preceq)$ ikilisine *yönlendirilmiş kısmi sıralı küme* denir.

Tanım 1.8 : $(I, \preceq)$ yönlendirilmiş kısmi sıralı küme olsun. $i \in I$ için X_i topolojik cebirler olmak üzere $\{X_i \mid i \in I\}$ ailesi ile $i \preceq j$ için $\varphi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ sürekli cebir homomorfizmlerinin ailesi verilsin. Eğer $\varphi_{ii} : X_i \longrightarrow X_i$ birim fonksiyonu ve $i \preceq j \preceq k$ için

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{jk}"'] & & X_i \\ & X_j \arrow[ur, "\varphi_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$) olacak şekilde varsa topolojik cebirler ve sürekli homomorfizmlerden oluşan $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ veya kısaca $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ sistemine I üzerinde *topolojik cebirlerin bir ters sistemi* denir.

Örnekler:

1) $I = \mathbb{N}$, p bir asal sayı ve $i \in \mathbb{N}$ için $X^i = \mathbb{Z}/ < p^i >$ verilsin. Bu durumda $i \leq j \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{ij} : & \mathbb{Z}/ < p^j > & \longrightarrow & \mathbb{Z}/ < p^i > \\ & n+ < p^j > & \longmapsto & n+ < p^i > \end{array}$$

sürekli homomorfizmi vardır. Burada $i \leq j \leq k$ için

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/<p^k> \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{jk}"'] & & \mathbb{Z}/<p^i> \\ & \mathbb{Z}/<p^j> \arrow[ur, "\varphi_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Çünkü

$$\begin{aligned} (\varphi_{ij}\varphi_{jk})(n+<p^k>) &= \varphi_{ij}(\varphi_{jk}(n+<p^k>)) \\ &= \varphi_{ij}(n+<p^j>) \\ &= n+<p^i> \\ &= \varphi_{ik}(n+<p^k>) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\{\mathbb{Z}/<p^i>, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem belirtir.

2) $I = \mathbb{N}$, $m \leq n \in \mathbb{N}$ için $m|n$ ve $X_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ olup

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{mn}: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & x+n\mathbb{Z} & \longmapsto & x+m\mathbb{Z} \end{array}$$

sürekli homomorfizmi vardır. Burada $m \leq n \leq k$ için

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \arrow[rr, "\varphi_{mk}"] \arrow[dr, "\varphi_{nk}"'] & & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, "\varphi_{mn}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Çünkü

$$\begin{aligned} (\varphi_{mn}\varphi_{nk})(x+k\mathbb{Z}) &= \varphi_{mn}(\varphi_{nk}(x+k\mathbb{Z})) \\ &= \varphi_{mn}(x+n\mathbb{Z}) \\ &= x+m\mathbb{Z} \\ &= \varphi_{mk}(x+k\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_{nm}\}$ bir ters sistem belirtir.

3) F bir cisim olmak üzere $F[X]$ polinomlar halkası ve $I = \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ için

$$<X^i> = X^i F[X] \trianglelefteq F[X]$$

olsun. $i \leq j \in \mathbb{N}$ için $f(X) \in F[X]$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{ij}: & F[X]/<X^j> & \longrightarrow & F[X]/<X^i> \\ & f(X)+<X^j> & \longmapsto & f(X)+<X^i> \end{array}$$

sürekli homomorfizmi vardır. Burada $i \leq j \leq k$ için

$$\begin{tikzcd} F[X]/<X^k> \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{jk}"'] & & F[X]/<X^i> \\ & F[X]/<X^j> \arrow[ur, "\varphi_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı açıkça değişmelidir. Böylece $\{F[X]/<X^i>, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem belirtir.

Tanım 1.9 : Y bir topolojik cebir, $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$; topolojik cebirlerin bir ters sistemi ve

$$\psi_i : Y \longrightarrow X_i$$

sürekli homomorfizm olsun. Bu durumda $i \preceq j$ için;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & X_i \\ & X_j \arrow[ur, "\varphi_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\varphi_{ij}\psi_j = \psi_i$) ise ψ_i dönüşümlerine *uyumludur (compatible)* denir.

Tanım 1.10 : $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ topolojik cebirlerin bir ters sistemi, X bir topolojik cebir ve $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ uyumlu olan sürekli cebir homomorfizmleri olsun. Diğer taraftan $i \in I$ olmak üzere Y topolojik cebiri ve $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$ uyumlu olan sürekli cebir homomorfizmler ailesi için

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & X \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $\varphi_i\psi = \psi_i$ olacak şekilde bir tek

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

sürekli cebir homomorfizmi varsa X'e $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ ters sisteminin bir *ters limiti* denir ve $X = \varprojlim X_i$ ile gösterilir.

Kısaca bu tanım

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\psi_j"'] \arrow[dr, "\psi_i"] \arrow[d, dotted, "\exists!\ \psi"] & \\ & X \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \\ X_j \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & X_i \end{tikzcd}$$

şeklinde diyagram ile ifade edilir.

Önerme 1.11 : (Varlık ve Teklik) $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ bir ters sistem olsun. Bu durumda $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ ters sisteminin ters limiti

$$\boxed{X = \varprojlim X_i = \{(x_i)_{i\in I} \in \Pi X_i \mid \varphi_{ij}(x_j) = x_i,\ i \preceq j \in I\}}$$

biçimindedir ve bu limit izomorfizm farkıyla tektir.

İspat : Y bir topolojik cebir ve $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$; $\varphi_{ij}\psi_j = \psi_i$ $(i \preceq j)$ olacak şekilde sürekli homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rccl} \psi : & Y & \longrightarrow & X \\ & y & \longmapsto & \psi(y) = \{\psi_i(y) | i \in I\} \subseteq \Pi X_i \end{array}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & X & \longrightarrow & X_i \\ & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

için $\varphi_i\psi = \psi_i$ olur. Çünkü;

$$\begin{aligned} (\varphi_i\psi)(y) &= \varphi_i(\psi(y)) \\ &= \varphi_i((\psi_i(y))_{i\in I}) \\ &= \psi_i(y) \end{aligned}$$

dir. Buradan $\varphi_i\psi = \psi_i$ olduğundan ψ süreklidir ve ψ nin tanımı gereğince ψ bir homomorfizmdir.

Ayrıca $\psi : Y \longrightarrow X$ sürekli homomorfizmi tektir. Çünkü eğer $\psi' : Y \longrightarrow X$; $\varphi_i\psi' = \psi_i$ olacak şekilde bir sürekli homomorfizm ise

$$\begin{aligned} \varphi_i\psi' = \varphi_i\psi &\Longrightarrow (\varphi_i\psi')(y) = (\varphi_i\psi)(y) \\ &\Longrightarrow \varphi_i(\psi'(y)) = \varphi_i(\psi(y)) \\ &\Longrightarrow \psi'(y) = \psi(y) \\ &\Longrightarrow \psi' = \psi \end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan (X,φ_i) ve (Y,ψ_i); $\{X_i,\varphi_{ij},I\}$ ters sisteminin birer ters limiti ise $\psi_i\psi = \varphi_i$ olacak şekilde biricik $\psi : X \longrightarrow Y$ topolojik izomorfizminin (hem homeomorfizm hem cebir izomorfizmi) olduğunu göstermeliyiz. (X,φ_i); $\{X_i,\varphi_{ij},I\}$ ters sisteminin bir ters limiti ise

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & X \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $\varphi_i\psi = \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi : Y \longrightarrow X$ sürekli cebir homomorfizmi vardır.

(Y,ψ_i); $\{X_i,\varphi_{ij},I\}$ ters sisteminin bir ters limiti ise

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & Y \arrow[dl, "\psi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $\psi_i\varphi = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \longrightarrow Y$ sürekli cebir homomorfizmi vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi_i(\psi\varphi) &= (\varphi_i\psi)\varphi \\ &= \psi_i\varphi \\ &= \varphi_i \end{aligned}$$

olup $\psi\varphi = id_X$ ve

$$\begin{aligned} \psi_i(\varphi\psi) &= (\psi_i\varphi)\psi \\ &= \varphi_i\psi \\ &= \psi_i \end{aligned}$$

olup $\varphi\psi = id_Y$ olur. Dolayısıyla $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir topolojik izomorfizmdir.

Örnekler:

1) $\{\mathbb{Z}/<p^i>, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem olup

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/<p^i> \\ & n & \longmapsto & n+<p^i> \end{array}$$

bölüm fonksiyonu örten, sürekli homomorfizm olacak şekilde vardır. Dolayısıyla

$$\varprojlim \mathbb{Z}/<p^i> = \{(x_i+<p^i>)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{Z},\ x_i \equiv x_j\ (mod\ p^i),\ i \leq j\}$$

dir.

2) $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_{mn}\}$ bir ters sistem olup

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & x+n\mathbb{Z} \end{array}$$

bölüm fonksiyonu örten, sürekli homomorfizm olacak şekilde vardır. Dolayısıyla

$$\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{(x_n+n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{Z},\ x_n \equiv x_m\ (mod\ m),\ m \leq n\}$$

dir.

3) $\{F[X]/<X^i>, \varphi_{ij}\}$ bir ters sistem olup bu sistemin ters limiti $F[[X]]$ tir. (Bkz [8])

Önerme 1.12 : : Eğer $\{X_i, \varphi_{ij}\}$; Hausdorff topolojik cebirlerin bir ters sistemi ise $\varprojlim X_i$; $\prod_{i\in I} X_i$ nin bir kapalı alt uzayıdır.

İspat : $(x_i) \in (\Pi X_i) - (\varprojlim X_i)$ olsun. Bu durumda $\varphi_{sr}(x_r) \neq x_s$ olacak şekilde $r \geq s$ özelliğinde $r,s \in I$ vardır. (Eğer $\varphi_{sr}(x_r) = x_s$ olsaydı $(x_i) \in (\varprojlim X_i)$ olurdu.) Buradan $\forall i \in I$ için X_i Hausdorff topolojik cebir olduğundan X_s deki $\varphi_{sr}(x_r)$ ve x_s noktalarının açık ayrık U ve V komşulukları vardır. Yani $\varphi_{sr}(x_r) \neq x_s$ olmak üzere $\varphi_{sr}(x_r) \in U$, $x_s \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde X_s uzayında U, V açık kümeleri vardır. Diğer taraftan φ_{sr} sürekli olduğundan $\varphi_{sr}(x_r)$ noktasının U açık komşuluğu için $x_r \in X_r$ noktasının

$$\varphi_{sr}(U') \subseteq U$$

olacak şekilde U' açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla $i \neq r,s$ için $V_i = X_i$ ve $V_s = V, V_r = U'$ olmak üzere $\prod_{i \in I} X_i$ nin $W = \prod_{i \in I} V_i$ açık alt kümesi alınırsa W; $\prod_{i \in I} X_i$ de (x_i) noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\varprojlim X_i$ kapalıdır.

1.5 Ters Sistemler Kategorisi

Objeleri ters sistemler olan bir kategori tanımlamak için ters sistemler arasında morfizmler tanımlanmalıdır. Şimdi bu morfizmlerin nasıl tanımlanacağını inceleyelim. $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ ve $\{X_i', \varphi_{ij}', I\}$; yönlendirilmiş I kümesi üzerinde topolojik cebirlerin birer ters sistemi olsun. Bu durumda

$$\Theta : (X_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (X_i', \varphi_{ij}')$$

biçiminde ters sistemler arasındaki morfizm; $i \preceq j$ için

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[d, "\theta_j"'] & X_i \arrow[d, "\theta_i"] \\ X_j' \arrow[r, "\varphi_{ij}'"'] & X_i' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekildeki $\theta_i : X_i \longrightarrow X_i'$ sürekli homomorfizmlerinin kolleksiyonundan oluşur. Burada θ_i fonksiyonlarına Θ fonksiyonunun *bileşenleri* adı verilir.

Dolayısıyla $\Theta : (X_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (X_i, \varphi_{ij})$ morfizmi bileşenleri $\theta_i : X_i \longrightarrow X_i (i \in I)$ birim dönüşümleri olan birim morfizmdir. Ayrıca ters sistemler arasındaki morfizmlerin bileşkesi de tanımlanabilir. Şöyle ki;

$$\Theta : (X_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (X_i', \varphi_{ij}')$$

ve

$$\Psi : (X_i', \varphi_{ij}') \longrightarrow (X_i'', \varphi_{ij}'')$$

ters sistemler arasındaki morfizmler ise Θ nin bileşenleri θ_i ve Ψ nin bileşenleri ψ_i olmak üzere

$$\Psi\Theta : (X_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (X_i^{''}, \varphi_{ij}^{''})$$

bileşke morfizmi $\psi_i\theta_i$ bileşenlerinden oluşur. Bu şekilde bir kategori elde edilmiş olur.

1.6 Cofinality

Tanım 1.13 : I herhangi bir küme olsun. $I' \subseteq I$ olmak üzere $\forall i \in I$ için $i \preceq i'$ olacak şekilde bazı $i' \in I'$ elemanları varsa I' ye I da *cofinal*'dır denir.

Eğer $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ bir ters sistem ve $I'; I$ da cofinal ise $\{X_i, \varphi_{ij}, I'\}$ açıkça bir ters sistem belirtir. $\{X_i, \varphi_{ij}, I'\}$ sistemine $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ sisteminin *cofinal alt sistemi* denir.

Ayrıca $\{X_i, \varphi_{ij}, I'\}$; $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ sisteminin bir cofinal alt sistemi ise bu sistemlere karşılık gelen ters limitler sırasıyla

$$\varprojlim_{i' \in I'} (X_{i'}, \varphi_{i'}) \text{ ve } \varprojlim_{i \in I} (X_i, \varphi_i)$$

ile gösterilir.

Önerme 1.14 : $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$; kompakt, Hausdorff topolojik cebirlerin bir ters sistemi ve $I'; I$ da cofinal olsun. Bu durumda

$$\boxed{\varprojlim_{i \in I} X_i \cong \varprojlim_{i' \in I'} X_{i'}}$$

olur.

İspat : $\overline{\varphi_i} : \varprojlim_{I'} X_{i'} \longrightarrow X_i$ fonksiyonu $\varphi_{ii'} : X_{i'} \longrightarrow X_i$ ve $\varphi_{i'} : \varprojlim_{I'} X_{i'} \longrightarrow X_{i'}$ olmak üzere $\overline{\varphi_i} = \varphi_{ii'}\varphi_{i'}$ biçiminde tanımlı olup süreklidir. Ayrıca $\varphi_i\overline{\varphi} = \overline{\varphi_i}$ olacak şekilde

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi} : & \varprojlim_{i' \in I'} X_{i'} & \longrightarrow & \varprojlim_{i \in I} X_i \\ & (x_{i'})_{i' \in I'} & \longmapsto & (x_i)_{i \in I} \end{array}$$

sürekli fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Çünkü;

$$\begin{array}{rll} (x_{i'})_{i' \in I'} = (y_{i'})_{i' \in I'} & \Longrightarrow & \forall i' \in I' \text{ için } x_{i'} = y_{i'} \\ & \Longrightarrow & \forall i \in I \text{ için } x_i = y_i \qquad (\because I'; I \text{ da cofinal}) \\ & \Longrightarrow & (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \end{array}$$

dir. Diğer taraftan $\overline{\varphi}$ 1 : 1 ve örtendir. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}((x_{i'})_{i'\in I'}) = \overline{\varphi}((y_{i'})_{i'\in I'}) &\implies (x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \\ &\implies \forall i \in I \text{ için } x_i = y_i \\ &\implies \forall i' \in I' \text{ için } x_{i'} = y_{i'} \quad (\because I' \subseteq I) \\ &\implies (x_{i'})_{i'\in I'} = (y_{i'})_{i'\in I'}\end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\varphi}$ 1:1 dir. Ayrıca $\forall (y_i)_{i\in I} \in \varprojlim X_i$ olmak üzere $\forall i' \in I'$ için $x_{i'} = y_{i'}$ seçilirse

$$\overline{\varphi}((x_{i'})_{i'\in I'}) = \overline{\varphi}((y_{i'})_{i'\in I'}) = (y_i)_{i\in I}$$

olduğundan $\overline{\varphi}$ örtendir. Buradan $\varprojlim_{i'\in I'} X_{i'}$ ve $\varprojlim_{i\in I} X$ kompakt, Hausdorff topolojik cebir olduğundan $\overline{\varphi}$ bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla

$$\varprojlim_{i\in I} X_i \cong \varprojlim_{i'\in I'} X_{i'}$$

elde edilir.

BÖLÜM 2

DEĞİŞMELİ CEBİRLERİN TAMLAMASI (Completion)

2.1 Giriş

Tamlama kavramı; bir cebirsel yapı üzerinde uygun bir yöntemle tam ve Hausdorff topolojik uzay elde etmeyi amaçlar. Tamlamalar genel olarak verilen bir cebirsel yapı üzerinde tanımlı idealler kullanılarak elde edilen ters sistemin ters limiti yardımıyla oluşturulur.

Değişmeli cebirler üzerinde tamlamalar ise cebir üzerinde ideallerin bir ailesini, sıfırın komşuluklarının sistemi olacak şekilde alarak topolojik cebir tanımlayıp, yine bu idealler yardımıyla bir ters sistem elde edilerek bu sistemin ters limiti yardımıyla oluşturulur.

Tezin bu bölümünde [5, 6, 8, 13, 14] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.2 Değişmeli Cebirlerin Tamlaması

Tanım 2.1 : C bir topolojik K-cebir olsun. $\widehat{C}$ tam ve Hausdorff topolojik K-cebir olmak üzere

$$\varphi : C \longrightarrow \widehat{C}$$

sürekli homomorfizmi aşağıda verilen evrensellik özelliğine (Universal property) sahip ise $\widehat{C}$ ya C nin bir *tamlaması* denir.

Evrensellik Özelliği**:** Herhangi bir C' tam ve Hausdorff topolojik K-cebiri ve

$$f : C \longrightarrow C'$$

sürekli homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & C' \\ \widehat{C} \arrow[ur, dotted, "\exists!\ f^*"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $f^*\varphi = f$) olacak şekilde bir tek

$$f^* : \widehat{C} \longrightarrow C'$$

sürekli homomorfizmi vardır.

2.2.1 Değişmeli Cebirlerin Tamlamasının İnşâsı

Herhangi bir C topolojik K-cebiri üzerinde farklı tamlama kavramları tanımlanabilir. Şöyle ki;

i) I bir yönlendirilmiş küme olmak üzere C nin bir tamlaması;

$$i, j \in I \text{ için } i \leq j \text{ ise } C_i \supseteq C_j$$

özelliğindeki $\{C_i \mid i \in I\}$ idealleri yardımıyla elde edilen $\{C/C_i \mid i \in I\}$ ters sisteminin ters limiti yani $\widehat{C} = \varprojlim C/C_i$ dir.

ii) $\mathrm{I} \trianglelefteq C$ olmak üzere $n \leq m \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{I}^n \supseteq \mathrm{I}^m$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{C_{\mathrm{I}}} = \varprojlim C/\mathrm{I}^n$$

dir. (I-adic completion)

iii) Bkz [18] (Pro-$\mathcal{C}$ completion)

Bu bölümde bu kavramlardan en geneli yani (i) üzerinde durulacaktır. (ii) ve (iii) deki durumlar (i) nin özel halleridir.

Şimdi herhangi bir K-cebir üzerinde tamlamanın idealler yardımıyla nasıl inşa edildiğini inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle cebir üzerinde ideallerin ailesini, sıfırı içeren açık kümelerin bir sistemi olarak kabul eden bir topolojinin tanımlanabileceğini göstereceğiz.

Önerme 2.2 : C bir K-cebir ve I bir yönlendirilmiş küme olsun. $\mathcal{F} = \{C_i : i \in I\}$;

$$\boxed{i, j \in I \text{ için } i \leq j \text{ ise } C_i \supseteq C_j}$$

şartını sağlayan, C nin bazı ideallerinden oluşan bir aile olsun. C üzerindeki topoloji, $\mathcal{F}$ yi 0 ın açık komşuluklarının (temel) sistemi kabul eden topoloji olmak üzere bu topoloji ile birlikte C bir topolojik $K-$cebirdir.

İspat :

$$\boxed{\tau = \{U \subseteq C \mid \text{Her } u \in U \text{ için } u + C_i \subseteq U \text{ olacak şekilde } C_i \in \mathcal{F} \text{ vardır}\}}$$

olsun. Öncelikle τ nun bir topoloji olduğunu gösterelim:

(T-1) Herhangi $c \in C$ ve $C_i \in \mathcal{F}$ için $c + C_i \subseteq C$ olduğundan $C \in \tau$ olur. Diğer taraftan

$$\text{“}c \in \emptyset \text{ ise } c + C_i \subseteq \emptyset \text{ olacak şekilde } C_i \in \mathcal{F} \text{ vardır”}$$

bileşik önermesinin sol tarafı yanlış olduğundan önerme doğrudur. Yani $\emptyset \in \tau$ olur.

(T-2) J herhangi bir indis kümesi olmak üzere her $j \in J$ için $U_j \in \tau$ olsun. $x \in \bigcup_J U_j$ seçelim. Bu durumda en az bir $j_0 \in J$ için $x \in U_{j_0}$ olup $U_{j_0} \in \tau$ olduğundan

$$x + C_{i_0} \subseteq U_{j_0}$$

olacak şekilde $C_{i_0} \in \mathcal{F}$ vardır. Böylece

$$x + C_{i_0} \subseteq \bigcup_J U_j$$

olduğundan $\bigcup_J U_j \in \tau$ olur.

(T-3) $U_1, U_2 \in \tau$ için $U_1 \cap U_2 \in \tau$ dur. Çünkü her $u \in U_1 \cap U_2$ için $u \in U_1$ ve $u \in U_2$ olup $U_1, U_2 \in \tau$ olduğundan

$$u + C_1 \subseteq U_1 \text{ ve } u + C_2 \subseteq U_2$$

olacak şekilde $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ vardır. Böylece iki idealin kesişimi yine bir ideal olduğundan

$$C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$$

olup

$$u + C_1 \cap C_2 \subseteq U_1 \cap U_2$$

olduğundan $U_1 \cap U_2 \in \tau$ olur.

Böylece τ, C üzerinde $\mathcal{F}$ yi sıfırın komşuluklarının temel sistemi kabul eden topolojidir.

Şimdi τ nun toplam, fark, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri ile uyumlu yani sürekli olduğunu gösterelim:

C üzerinde $+$ ve $-$ fonksiyonlarının sürekliliği için Önerme 1.2 gereğince

$$\begin{array}{rccc} f: & C \times C & \longrightarrow & C \\ & (c_1, c_2) & \longmapsto & c_1 - c_2 \end{array}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $(c, c') \in C \times C$ olmak üzere $f(c, c')$ noktasını içeren her bir $U \in \tau$ için (c, c') noktasını içeren bir V açık kümesinin $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde olduğunu gösterelim. $C_j \in \mathcal{F}$ olmak üzere $V = (c + C_j, c' + C_j)$ alınırsa $V \in \tau_ç$ olup

$(c,c') \in V$ olur. Ayrıca $f(c,c') \in U$ ise $c-c' \in U$ olup $U \in \tau$ olduğundan $c-c'+C_i \subseteq U$ olacak şekilde $C_i \in \mathcal{F}$ vardır. Dolayısıyla her $(c_1,c_2) \in V$ için $f(c_1,c_2) \in c-c'+C_i$ olduğunu gösterirsek $f(c_1,c_2) \in U$ olup $f(V) \subseteq U$ olur.

$$(c_1,c_2) \in V \text{ ise } c_1 \in c+C_j \text{ ve } c_2 \in c'+C_j$$

olup

$$c_1 = c+c_j \text{ ve } c_2 = c'+c'_j$$

olacak şekilde $c_j, c'_j \in C_j$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} c_1-c_2 &= (c+c_j)-(c'+c'_j) \\ &= (c-c')+(c_j-c'_j) \\ &\in (c-c')+C_j+C_j \subseteq c-c'+C_i \end{aligned}$$

olur. Yani f süreklidir. Burada $\mathcal{F}$; C nin ideallerinin $i \leq j \Longrightarrow C_i \supseteq C_j$ olacak şekilde bir ailesi olduğundan $C_j+C_j \subseteq C_i$ olur. Benzer şekilde

$$\begin{array}{rccc} g: & K \times C & \longrightarrow & C \\ & (k,c) & \longmapsto & kc \end{array}$$

fonksiyonu da süreklidir. $(k,c) \in K \times C$ olmak üzere $g(k,c)$ noktasını içeren her $U \in \tau$ için (k,c) noktasını içeren bir V açık kümesinin $g(V) \subseteq U$ olacak şekilde olduğunu gösterelim. $C_j \in \mathcal{F}$ olmak üzere $V = (k+C_j, c+C_j)$ alınırsa $V \in \tau_ç$ olup $(k,c) \in V$ olur. Ayrıca

$$g(k,c) \in U \text{ ise } kc \in U$$

olup $U \in \tau$ olduğundan $kc+C_i \subseteq U$ olacak şekilde $C_i \in \mathcal{F}$ vardır. Dolayısıyla her $(k',c') \in V$ için $g(k',c') \in kc+C_i$ olduğunu gösterirsek $g(k',c') \in U$ olup $g(V) \subseteq U$ olur.

$$(k',c') \in V \text{ ise } k' \in k+C_j \text{ ve } c' \in c+C_j$$

olup

$$k' = k+c_j \text{ ve } c' = c+c'_j$$

olacak şekilde $c_j, c'_j \in C_j$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} k'c' &= (k+c_j)(c+c'_j) \\ &= (kc+rc'_j+c_jc+c_jc'_j) \\ &\in kc+C_j+C_j \ (\because C_j; C \text{ nin ideali}) \\ &\subseteq kc+C_i \end{aligned}$$

olur. Yani g süreklidir. Benzer şekilde

$$\begin{array}{rccc} h: & C\times C & \longrightarrow & C \\ & (c_1,c_2) & \longmapsto & c_1c_2 \end{array}$$

fonksiyonu da süreklidir. $(c_1,c_2)\in C\times C$ olmak üzere $h(c_1,c_2)$ noktasını içeren her $U\in\tau$ için (c_1,c_2) noktasını içeren bir V açık kümesinin $h(V)\subseteq U$ olacak şekilde olduğunu gösterelim. $C_j\in\mathcal{F}$ olmak üzere $V=(c_1+C_j,c_2+C_j)$ alınırsa $V\in\tau_ç$ olup $(c_1,c_2)\in V$ olur. Ayrıca $h(c_1,c_2)\in U$ ise $c_1c_2\in U$ olup $U\in\tau$ olduğundan $c_1c_2+C_i\subseteq U$ olacak şekilde $C_i\in\mathcal{F}$ vardır. Dolayısıyla her $(c_1',c_2')\in V$ için $h(c_1',c_2')\in c_1c_2+C_i$ olduğunu gösterirsek $h(c_1',c_2')\in U$ olup $h(V)\subseteq U$ olur.

$$(c_1',c_2')\in V \text{ ise } c_1'\in c_1+C_j \text{ ve } c_2'\in c_2+C_j$$

olup

$$c_1'=c_1+c_j \text{ ve } c_2'=c_2+c_j'$$

olacak şekilde $c_j,c_j'\in C_j$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} c_1'c_2' &= (c_1+c_j)(c_2+c_j') \\ &= (c_1c_2+c_1c_j'+c_jc_2+c_jc_j') \\ &\in c_1c_2+C_j+C_j \ (\because C_j; C \text{ nin ideali}) \\ &\subseteq c_1c_2+C_i \end{aligned}$$

olur. Yani h süreklidir.

Uyarı: Eğer $\mathcal{F}'$=$\{C_j : j\in J\}$; C nin ideallerinin bir başka ailesi ise $\mathcal{F}$ ile $\mathcal{F}'$ nün C üzerinde aynı topolojiyi tanımlaması için gerek ve yeter şart her C_i ideali için $C_j\subset C_i$ olacak şekilde $j\in J$ ve her C_j ideali için $C_{i'}\subset C_j$ olacak şekilde $i'\in I$ olmasıdır. Böylece $\varprojlim C/C_j\cong\varprojlim C/C_i$ olup $\widehat{C}$ yalnızca C üzerinde tanımlı topolojiye bağlıdır.

Şimdi de bir değişmeli cebirin tamlamasının her zaman varolduğunu ifade ederken kullanacağımız bir özelliği verelim:

Önerme 2.3 : $f:X\to Y$; $g,h:Y\to Z$ sürekli fonksiyonlar, Z bir Hausdorff uzay, $f(X)\subseteq Y$ yoğun alt küme olmak üzere

$$h\circ f=g\circ f\Longrightarrow h=g$$

dir.

İspat : $h\circ f=g\circ f$ olmak üzere $\exists y\in Y$ için $h(y)\neq g(y)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $h(y)\neq g(y)\in Z$ olup Z Hausdorff uzay olduğundan $h(y)\in U_z, g(y)\in V_z$ ve $U_z\cap V_z=\emptyset$ olacak şekilde U_z, V_z açık alt kümeleri vardır. Bu durumda h ve g sürekli fonksiyonlar olduğundan $y \in h^{-1}(U_z), y \in g^{-1}(V_z)$ olmak üzere $h^{-1}(U_z) = U_y, g^{-1}(V_z) = V_y$ biçiminde Y uzayında U_y, V_y açık kümeleri vardır. Ayrıca $y \in U_y \cap V_y$ olup $f(X) \subseteq Y$ yoğun alt küme olduğundan

$$(U_y \cap V_y) \cap f(X) \neq \emptyset$$

dır. Buradan $a \in (U_y \cap V_y) \cap f(X)$ alınırsa $a \in U_y \cap V_y$ ve $a \in f(X)$ olup $a = f(x)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rcl} a \in U_y \cap V_y & \Longrightarrow & a \in U_y \text{ ve } a \in V_y \\ & \Longrightarrow & a \in h^{-1}(U_z) \text{ ve } a \in g^{-1}(V_z) \\ & \Longrightarrow & h(a) \in U_z \text{ ve } g(a) \in V_z \end{array}$$

olup

$$\begin{array}{rcl} hf = gf & \Longrightarrow & h(f(x)) = g(f(x)) \\ & \Longrightarrow & h(a) = g(a) \end{array}$$

dir. Böylece $U_z \cap V_z \neq \emptyset$ elde edilir. Bu ise çelişki olup $\forall y \in Y$ için $h(y) = g(y)$ yani $h = g$ dir.

Tamlamanın Varlığı: C herhangi bir K-cebir olmak üzere C nin bir tamlaması her zaman vardır. Şöyle ki;

C herhangi bir K-cebir olmak üzere Önerme 2.2 gereğince C bir topolojik K-cebir haline dönüştürülebilir.

Diğer taraftan $i \leq j$ için

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{ij}: & C/C_j & \longrightarrow & C/C_i \\ & c + C_j & \longmapsto & c + C_i \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlı olup bir sürekli homomorfizmdir. Çünkü

$$\begin{array}{rcll} c + C_j = c' + C_j & \Longrightarrow & c - c' \in C_j & \\ & \Longrightarrow & c - c' \in C_i & (\because i \leq j \text{ için } C_i \supseteq C_j) \\ & \Longrightarrow & c + C_i = c' + C_i & \end{array}$$

olduğundan φ_{ij} iyi tanımlı olup

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{ij}(c_1 + C_j + c_2 + C_j) & = & \varphi_{ij}(c_1 + c_2 + C_j) \\ & = & (c_1 + c_2 + C_i) \\ & = & c_1 + C_i + c_2 + C_i \\ & = & \varphi_{ij}(c_1 + C_j) + \varphi_{ij}(c_2 + C_j) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{ij}((c_1 + C_j)(c_2 + C_j)) & = & \varphi_{ij}(c_1 c_2 + C_j) \\ & = & (c_1 c_2 + C_i) \\ & = & (c_1 + C_i)(c_2 + C_i) \\ & = & \varphi_{ij}(c_1 + C_j)\varphi_{ij}(c_2 + C_j) \end{array}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}(k(c+C_j)) &= \varphi_{ij}(kc+C_j) \\
&= kc+C_i \\
&= k(c+C_i) \\
&= k\varphi_{ij}(c+C_j)
\end{aligned}$$

olduğundan φ_{ij} bir homomorfizmdir. Ayrıca $\{C/C_i, \varphi_{ij}\}$ sistemi bir ters (inverse) sistem belirtir. Çünkü $i \leq j \leq k$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
C/C_k \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{jk}"'] & & C/C_i \\
& C/C_j \arrow[ur, "\varphi_{ij}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. O halde

$$\boxed{\widehat{C} = \varprojlim C/C_i = \{(\overline{x_i})_{i\in I} = (x_i + C_i)_{i\in I} \in \Pi C/C_i \mid \varphi_{ij}(\overline{x_j}) = \overline{x_i},\ i \leq j \in I\}}$$

biçiminde tanımlanırsa $\widehat{C}$; Önerme 1.12 gereğince $\Pi C/C_i$ çarpım uzayının bir kapalı alt uzayıdır. Böylece

$$\begin{array}{rrcl}
\varphi_i : & \widehat{C} & \longrightarrow & C/C_i \\
& (\overline{x_i})_{i\in I} = (x_i+C_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_i + C_i
\end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dotted, "\exists!\ \varphi"] \arrow[ddl, "q_j"'] \arrow[ddr, "q_i"] & \\
& \widehat{C} \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\
C/C_j \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & C/C_i
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup

$$\begin{array}{rrcl}
q_i : & C & \longrightarrow & C/C_i \\
& x & \longmapsto & x + C_i
\end{array}$$

için

$$\begin{array}{rrcl}
\varphi : & C & \longrightarrow & \widehat{C} \subseteq \Pi C/C_i \\
& x & \longmapsto & (q_i(x))_{i\in I} = (x+C_i)_{i\in I}
\end{array}$$

biçiminde tanımlanırsa açıkça φ sürekli homomorfizmdir.

Diğer taraftan $\varphi(C)$; $\widehat{C}$ nin yoğun bir alt kümesidir. Çünkü

$$\begin{aligned}
\varphi(C) &= \{\varphi(x) \mid x \in C\} \\
&= \{(x+C_i)_{i\in I} | x \in C\}
\end{aligned}$$

olmak üzere $\widehat{C}$ üzerindeki topoloji

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{\widehat{C_i} \mid \widehat{C_i} = \text{Çek}\varphi_i, i \in I\}$$

ailesi $\widehat{C}$ nin 0 komşuluklarının açık sistemi olarak alındığında belirli olup bu topolojiye göre her açık U kümesi için $U \cap \varphi(C) \neq \emptyset$ dir. Çünkü;

$$\begin{aligned}
\widehat{C_i} &= \text{Çek } \varphi_i \\
&= \{(x_i + C_i)_{i \in I} | \varphi_i((x_i + C_i)_{i \in I}) = 0 + C_i\} \\
&= \{(x_i + C_i)_{i \in I} | x_i + C_i = 0 + C_i\} \\
&= \{(x_i + C_i)_{i \in I} | x_i \in C_i\}
\end{aligned}$$

olup $(0 + C_i)_{i \in I} \in U \cap \varphi(C)$ dir.

Ayrıca bu topolojiye göre $\widehat{C}$ tam ve Hausdorff topolojik cebirdir. Çünkü $\widehat{C}$; $\Pi C/C_i$ çarpım uzayının bir kapalı alt uzayı olup $C_i \subseteq C$ açık kümeler olmak üzere

$$C - C_i = \bigcup_{i \in I} \{x + C_i\}$$

olduğundan C_i, C de kapalı kümelerdir. Dolayısıyla C_i hem açık hem kapalı küme olup C/C_i üzerindeki topoloji ayrık topolojidir. O halde ayrık topolojik uzaylar ayrık metrik tarafından indirgendiğinden tam uzay olup C/C_i uzayı tamdır. Böylece tam uzayların çarpım uzayları tam olduğundan $\Pi C/C_i$ tam uzaydır. Diğer taraftan tam uzayların kapalı her alt uzayı da tam olup $\widehat{C}$; $\Pi C/C_i$ nin kapalı alt uzayı olduğundan $\widehat{C}$ tam uzaydır. Ayrıca C/C_i üzerinde ayrık topoloji tanımlı olup ayrık topolojik uzaylar Hausdorff olduğundan C/C_i Hausdorff'tur. Dolayısıyla Hausdorff uzayların çarpım uzayları ve her alt uzayı Hausdorff olduğundan $\widehat{C}$ Hausdorff'tur.

Şimdi φ sürekli homomorfizminin evrensellik özelliğini sağladığını gösterelim:

C'; tam ve Hausdorff topolojik K-cebir olmak üzere $f : C \longrightarrow C'$ sürekli homomorfizmi verilsin. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc}
\varphi : & C & \longrightarrow & \widehat{C} \\
& x & \longmapsto & (x + C_i)_{i \in I}
\end{array}$$

sürekli bölüm homomorfizmi olmak üzere $q_i(x_i) = \overline{x_i}$ için

$$\begin{array}{rccc}
f^* : & \widehat{C} & \longrightarrow & C' \\
& (\overline{x_i})_{i \in I} = (x_i + C_i)_{i \in I} & \longmapsto & \lim\limits_{i \longrightarrow \infty} (f(x_i))
\end{array}$$

tanımlayalım. Bu durumda f^* iyi tanımlı olur. Çünkü $i \leq j$ olmak üzere $x_j - x_i \in C$ olup $(x_i)_{i \in I}$; C de bir Cauchy dizisi ve f sürekli olduğundan $(f(x_i))_{i \in I}$; C' de bir Cauchy dizisi olur. C' tam uzay olduğundan $\lim\limits_{i\longrightarrow\infty}(f(x_i))$; C' de vardır. Diğer taraftan $q_i(x_i)=\overline{x_i}$ ve $q_i(x_j)=\overline{x_j}$ olup

$$\begin{aligned} (\overline{x_i})_{i\in I}=(\overline{x_j})_{i\in I} &\Longrightarrow \overline{x_i}=\overline{x_j} \\ &\Longrightarrow q_i(x_i)=q_i(x_j) \end{aligned}$$

olduğundan burada tanımlı limit $\overline{x_i}$ nin ön görüntüsünden bağımsızdır. Yani fonksiyon iyi tanımlıdır. Açıkça f^* fonksiyonu sürekli olup f bir cebir homomorfizmi olduğundan f^* fonksiyonunun tanımı gereği f^* bir cebir homomorfizmidir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} (f^*\varphi)(x) &= f^*(\varphi(x)) \\ &= f^*((x+C_i)_{i\in I}) \\ &= f^*(\overline{x},\overline{x},\ldots) \\ &= \lim_{i\longrightarrow\infty}(f(x),f(x),\ldots) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & C' \\ \widehat{C} \arrow[ur, dotted, "\exists!", "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Diğer taraftan Önerme 2.3 gereğince $g^*:\widehat{C}\longrightarrow C'$ sürekli homomorfizm ve $g^*\varphi=f$ olmak üzere $g^*\varphi=f^*\varphi$ olup $\varphi(C)$; $\widehat{C}$ uzayının yoğun alt uzayı ve C' Hausdorff uzay olduğundan $f^*=g^*$ olup f^* bir tektir.

Böylece C nin tamlaması $\widehat{C}=\varprojlim C/C_i$ olur.

Tamlamanın Tekliği: C bir K-cebir olmak üzere C nin tamlaması, $\widehat{C}$, izomorfizm farkıyla tektir. Şöyle ki;

C, K-cebirinin $\widehat{C}$ ve $\widehat{C'}$ gibi farklı iki tamlaması olsun. Bu durumda;

$\widehat{C}$, C nin tamlaması ise

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widehat{C'} \\ \widehat{C} \arrow[ur, dotted, "\exists!"', "f^*"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $f^*\varphi = f$) olacak şekilde bir tek $f^* : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C'}$ sürekli homomorfizmi vardır.

$\widehat{C'}$, C nin tamlaması ise

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \widehat{C} \\ \widehat{C'} \arrow[ur, dotted, "\exists!"', "g^*"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $g^*f = \varphi$) olacak şekilde bir tek $g^* : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C}$ sürekli homomorfizmi vardır. Böylece

$$\begin{aligned} (f^*g^*)f &= f^*(g^*f) \\ &= f^*\varphi \\ &= f \\ &= 1_{\widehat{C'}}f \end{aligned}$$

olduğundan $f^*g^* = 1_{\widehat{C'}}$ ve

$$\begin{aligned} (g^*f^*)\varphi &= g^*(f^*\varphi) \\ &= g^*f \\ &= \varphi \\ &= 1_{\widehat{C}}\varphi \end{aligned}$$

olduğundan $g^*f^* = 1_{\widehat{C}}$ dir. Dolayısıyla $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ elde edilir.

Not: Eğer C; K-cebiri için $\mathrm{I} \trianglelefteq C$ olmak üzere Önerme 2.2 deki $\mathcal{F}$ ailesi $\mathcal{F} = \{\mathrm{I}^n : n \in \mathbb{N}\}$ olarak alınırsa C üzerinde tanımlı olan topoloji I-*adic topoloji* olarak adlandırılır. Buradan elde edilen C nin tamlamasına ise I-*adic tamlama* denir.

$$\boxed{\widehat{C} = \varprojlim C/I^n = \{(c_n + I^n)_{n\in\mathbb{N}} : c_n \equiv c_m (\mathrm{mod}\, I^n),\ n \le m \in \mathbb{N}\}}$$

Uyarı: C bir R-cebir olmak üzere I ve J; C nin

$$\boxed{\text{“Her } I^n \text{ için } J^m \subset I^n \text{ olacak şekilde } J^m \text{ ve her } J^n \text{ için } I^m \subset J^n \text{ olacak şekilde } I^m \text{ ideali vardır.”}}$$

özelliğinde idealleri ise $\varprojlim C/I^n \cong \varprojlim C/J^n$ dir. Diğer bir deyişle $\{I^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\{J^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesinde cofinal ise $\varprojlim C/I^n \cong \varprojlim C/J^n$ olur.

Yukarıda ifade ettiğimiz I-adic tamlama kavramının değişmeli cebirler üzerinde tanımlı çaprazlanmış modüllere ve cat[1]-cebirlere uygulaması Bölüm 4' te incelenecektir.

Örnekler:

1) $\mathbb{Z}$ bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebir olmak üzere

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & (x+n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

olarak tanımlanırsa $\widehat{\mathbb{Z}}$; $\mathbb{Z}$ nin bir tamlamasıdır. Çünkü A; tam ve Hausdorff topolojik $\mathbb{Z}$-cebiri ve $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ sürekli homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{array}{rccl} f^*: & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & A \\ & (x_n+n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{array}$$

sürekli homomorfizmi için

$$\begin{aligned} (f^*\varphi)(x) &= f^*(\varphi(x)) \\ &= f^*((x+n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olduğundan $f^*\varphi = f$ olup

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[ur, dotted, "\exists!\ f^*"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

2) $\mathbb{Z}$ bir topolojik $\mathbb{Z}$-cebir, p bir asal sayı olmak üzere I=$< p >= p\mathbb{Z}$ için

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & (x+p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

olarak tanımlanırsa $\widehat{\mathbb{Z}}$; $\mathbb{Z}$ nin bir I-adic tamlamasıdır. Çünkü A; tam ve Hausdorff topolojik $\mathbb{Z}$-cebiri ve $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ sürekli homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{array}{rccl} f^* : & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & A \\ & (x_n+p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{array}$$

sürekli homomorfizmi için

$$\begin{aligned} (f^*\varphi)(x) &= f^*(\varphi(x)) \\ &= f^*((x+p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olduğundan $f^*\varphi = f$ olup

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[ur, dotted, "\exists!", "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

BÖLÜM 3

ÇAPRAZLANMIŞ İDEALLER

3.1 Giriş

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J.H.L Whitehead tarafından [21] de gruplar üzerinde tanımlanmıştır. Whitehead, bu yapıyı homotopi grupları ile ilgili çalışmasında incelemiştir. Daha sonra T.Porter [16] çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak bu yapının Koszul komplekslerle yakın ilgisini göstermiştir.

Bu bölümde, değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını özetleyerek bazı örneklerini inceleyeceğiz. Daha sonra bu yapı üzerindeki bazı temel cebirsel özelliklere yer vereceğiz. Özellikle çaprazlanmış modüller üzerindeki tamamlama kavramı tanımlanırken karşımıza sıkça çıkacak olan çaprazlanmış ideal, çaprazlanmış ideallerin çarpımı ve bölüm çaprazlanmış modülü kavramları üzerinde durulacaktır. Bu kavramların tanımları ve özellikleri değişmeli cebirlerin idealleri ile karşılaştırılarak ifade edilecektir. Ayrıca yine benzer amaçla ve yöntemle çaprazlanmış ideal için asal ve maksimal çaprazlanmış ideal kavramları açıklanacaktır. Bu bölümde [4, 19] kaynaklarından yararlanılmıştır.

3.2 Çaprazlanmış Modül Kavramı

Çaprazlanmış modüller, modül ve ideallerin genelleştirmesidir. (Bkz Örnekler (1) ve (3)) Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarakta görülebilir. Şimdi, K sıfırdan farklı birimi olan değişmeli halka olmak üzere, T.Porter tarafından [16] da verilen K-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ile iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramlarını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim.

Tanım 3.1 : C ve R; K-cebirler olsun.

$$\begin{array}{rcl} f: R\times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & f(r,c)=r\cdot c \end{array}$$

fonksiyonu her $k \in K$, $c, c' \in C$, $r, r' \in R$ için,

$$\begin{array}{ll} (1) & k(r \cdot c) = (kr) \cdot c = r \cdot (kc) \\ (2) & r \cdot (c + c') = r \cdot c + r \cdot c' \\ (3) & (r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c \\ (4) & r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c') \\ (5) & (rr') \cdot c = r \cdot (r' \cdot c) = r' \cdot (r \cdot c) \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa f ye R nin C üzerinde *değişmeli cebir etkisi* denir.

Tanım 3.2 : K halka, R; K-cebir ve C; R-cebir olsun.

$$\begin{array}{lcl} R \times C & \longrightarrow & C \\ (r, c) & \longmapsto & r \cdot c \end{array}$$

değişmeli cebir etkisi ile birlikte

$$\partial : C \to R$$

cebir homomorfizmi

$$\begin{array}{llcl} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot c) & = & r\partial(c) \\ \text{ÇM2)} & \partial(c) \cdot c' & = & cc' \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa ∂'a (veya (C, R, ∂) üçlüsüne) *çaprazlanmış R-modül* denir. Burada ÇM2 şartına da *Peiffer şartı* denir.

NOT : ∂ cebir homomorfizmi olduğundan ÇM1 aksiyomu ihmal edilebilir. Ancak gruplar üzerindeki tanımlamaya benzer durumla karşılaşılabileceği için verilmiştir.

Örnekler:

1) R bir K-cebir ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{array}{rl} \partial : & I \longrightarrow R \\ & a \longmapsto a \end{array}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{ll} R \times I & \longrightarrow I \\ (r, a) & \longmapsto r \cdot a = ra \end{array}$$

şeklinde R nin çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i) \\ \text{ÇM2)} & \partial i \cdot i' = i \cdot i' = ii' \end{array}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla (I, R, ∂) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

$\boxed{\text{Böylece herhangi bir ideal verildiğinde çaprazlanmış modül elde edilmektedir.}}$

Tersine aşağıdaki örnekte de herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde bir ideal elde edildiği gösterilmiştir.

2) $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış modül ise $\partial(C) \trianglelefteq R$ dir. Çünkü $r \cdot c \in C$ olduğundan

$$r\partial(c) = \partial(r \cdot c) \in \partial(C)$$

dir.

3) M, herhangi bir R-modül olsun.

$$\begin{array}{rl} M \times M & \longrightarrow M \\ (m_1, m_2) & \longmapsto m_1 m_2 = 0 \end{array}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{array}{rl} 0 : M & \longrightarrow R \\ x & \longmapsto 0(x) = 0 \end{array}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi,

$$\begin{array}{rl} R \times M & \longrightarrow M \\ (r, m) & \longmapsto r \cdot m = rm \end{array}$$

R nin M üzerine etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül belirtir. Çünkü;

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1)} & 0(r \cdot m) = 0(rm) = 0 = r0 = r0(m) \\ \text{ÇM2)} & 0m \cdot m' = 0 \cdot m' = 0m' = 0 = mm' \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları kolaylıkla sağlanır.

$\boxed{\text{Böylece herhangi modül verildiğinde çaprazlanmış modül elde edilmektedir.}}$

Tersine aşağıdaki örnekte de çaprazlanmış modül verildiğinde bir modül elde edildiği gösterilmiştir.

4) $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış modül ise Çek∂ bir $R/\partial(C)$-modüldür. Öncelikle $\partial(C)$ nin Çek∂ üzerine etkisinin sıfır olduğunu gösterelim:

$$\begin{array}{ccc} \partial(C) \times \text{Çek}\partial & \longrightarrow & \text{Çek}\partial \\ (x, a) & \longmapsto & x \cdot a \end{array}$$

olmak üzere $x \cdot a = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} x \cdot a &= \partial(c) \cdot a \ (\because x \in \partial(C)) \\ &= ca \ (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ &= c\partial(a) \ (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ &= c0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $x \cdot a = 0$ dır. Böylece

$$\begin{array}{rcl} R/\partial(C) \times \text{Çek}\partial & \longrightarrow & \text{Çek}\partial \\ (r+\partial(C), a) & \longmapsto & (r+\partial(C)) \cdot a = ra \end{array}$$

etkisi tanımlı olup modül aksiyomları sağlanır.

M1) $(\text{Çek}\partial, +)$ bir Abelyen gruptur. $(\because \text{Çek}\partial \leq C)$

M2)

$$\begin{aligned} (r+\partial(C)) \cdot (a_1 + a_2) &= r(a_1 + a_2) \\ &= ra_1 + ra_2 \ (\because \text{Çek}\partial \text{ bir } R \text{ modül}) \\ &= (r+\partial(C)) \cdot a_1 + (r+\partial(C)) \cdot a_2 \end{aligned}$$

dir.

M3)

$$\begin{aligned} ((r_1+\partial(C)) + (r_2+\partial(C))) \cdot a &= ((r_1+r_2)+\partial(C)) \cdot a \\ &= (r_1+r_2)a \\ &= r_1 a + r_2 a \ (\because \text{Çek}\partial \text{ bir } R \text{ modül}) \\ &= (r_1+\partial(C)) \cdot a + (r_2+\partial(C)) \cdot a \end{aligned}$$

dir.

M4)

$$\begin{aligned} ((r_1+\partial(C))(r_2+\partial(C)) \cdot a &= (r_1 r_2+\partial(C)) \cdot a \\ &= (r_1 r_2)a \\ &= r_1(r_2 a) \\ &= (r_1+\partial(C)) \cdot (r_2 a) \\ &= (r_1+\partial(C)) \cdot ((r_2+\partial(C)) \cdot a) \end{aligned}$$

dir.

5) K bir **k**-cebir ve her $k, k' \in K$ için

$$R = \{f_k | f_k : K \longrightarrow K \ f_k(k') = kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \partial: & K & \longrightarrow & R \\ & k & \longmapsto & f_k \end{array}$$

cebir morfizmi

$$\begin{array}{ccc} R\times K & \longrightarrow & K \\ (f_k,k') & \longmapsto & (f_k)\cdot k' = kk' \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{array}{llcl} \text{ÇM1)} & \partial((f_k)\cdot k') & = & \partial(kk') \\ & & = & \partial(k)\partial(k') \ (\because \partial \text{ cebir morfizmi}) \\ & & = & f_k\partial(k') \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{llcl} \text{ÇM2)} & \partial(k)\cdot k' & = & (f_k)\cdot k' \\ & & = & kk' \end{array}$$

dır.

6) L ve M birer R-modül ve

$$\theta: \ L \longrightarrow M$$

R modüllerin bir morfizmi olsun. M, R-modül olduğundan $R\ltimes M$ yarı direkt çarpımı

$$(r,m)(r',m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile tanımlanır. Bu durumda L, her $l,l' \in L$ için

$$ll' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$\begin{array}{ccc} R\ltimes M & \longrightarrow & R \\ (r,m) & \longmapsto & r \end{array}$$

şeklinde izdüşüm (projection) yoluyla bir $R\ltimes M$ modül yapısı verildiğinde

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\theta}: & L & \longrightarrow & R\ltimes M \\ & l & \longmapsto & (0,\theta(l)) \end{array}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R\ltimes M$ modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{array}{ccc} (R\ltimes M)\times L & \longrightarrow & L \\ ((r,m),l) & \longmapsto & rl \end{array}$$

şeklindeki etki fonksiyonu ile birlikte $\widetilde{\theta}: L \longrightarrow R\ltimes M$ fonksiyonu

$$\begin{array}{llcll} \text{ÇM1)} & \widetilde{\theta}((r,m)\cdot l) & = & \widetilde{\theta}(rl) & (\because \text{etki tanımı}) \\ & & = & (0,\theta(rl)) & (\because \widetilde{\theta} \text{ tanımı}) \\ & & = & (0,r\theta(l)) & (\because \theta, R \text{ modül morfizmi}) \\ & & = & (r0,(r\theta(l))+0m)) & \\ & & = & (r,m)(0,\theta(l)) & (\because \text{yarı direkt çarpım tanımı}) \\ & & = & (r,m)\widetilde{\theta}(l) & (\because \widetilde{\theta} \text{ tanımı}) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{llll} \text{ÇM2)} & \widetilde{\theta}(l)\cdot l' & = (0,\theta(l))\cdot l' & (\because \widetilde{\theta} \text{ tanımı}) \\ & & = 0l' & (\because \text{etki tanımı}) \\ & & = 0 & \\ & & = ll' & (\because L \text{ de sıfır çarpımı}) \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Tanım 3.3 : $(C \xrightarrow{\partial} R) \xrightarrow{(\theta,\varphi)} (C' \xrightarrow{\partial'} R')$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ve

$$\begin{tikzcd} R\times C \arrow[r, "\varphi\times\theta"] \arrow[d] & R'\times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

yani

$$\begin{tikzcd} (r,c) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\varphi(r),\theta(c)) \arrow[d, mapsto] \\ (r\cdot c) \arrow[r, mapsto] & \theta(r\cdot c) = \varphi(r)\cdot\theta(c) \end{tikzcd}$$

olmak üzere

$$\boxed{\theta(r\cdot c) = \varphi(r)\cdot\theta(c)}$$

ise (θ,φ) ikililerine *çaprazlanmış modül morfizmi* denir.

Dolayısıyla

Objeleri; (C,R,∂), $(C',R',\partial')\ldots$ biçiminde çaprazlanmış modüller

Morfizmleri; $(\theta,\varphi) : (C \xrightarrow{\partial} R) \longrightarrow (C' \xrightarrow{\partial'} R')$ biçiminde çaprazlanmış modül morfizmleri

Kompozisyonu; (θ,φ) ve (θ',φ') çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere

$$(\theta,\varphi)\circ(\theta',\varphi') = (\theta\circ\theta',\varphi\circ\varphi')$$

olan bir kategori elde edilir. Bu kategoriye *çaprazlanmış modüller kategorisi* denir. Bu kategori **XMod** ile gösterilir. Özel olarak $R = R'$ ve φ birim dönüşüm alınırsa θ bir R-cebir morfizmi olup

$$\theta(r.c) = r\theta(c)$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\mu"'] & & C' \arrow[dl, "\mu'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\mu'\theta(c) = \mu(c)$$

olduğundan $(\theta,1_R)$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Dolayısıyla R üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış R-modül olduğundan **XMod** kategorisinin bir alt kategorisi elde edilir. Ve bu kategori **XMod**$/R$ ile gösterilir.

3.3 Verilen Çaprazlanmış Modülden Yeni Çaprazlanmış Modül Elde Etmek

3.3.1 Alt Çaprazlanmış Modüller

Tanım 3.4 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun.

(i) C', C nin ve R', R nin bir alt cebiridir;

(ii) C' üzerindeki R' etkisi, C üzerindeki R etkisinin kısıtlanmışıdır;

(iii) (C',R',∂') bir çaprazlanmış R'-modüldür;

(iv)

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "\partial'"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\ R' \arrow[r, hook, "v"'] & R \end{tikzcd}$$

u ve v içine (inclusion) dönüşümler olmak üzere diyagram değişmelidir;
şartlarını sağlıyorsa (C', R', ∂') çaprazlanmış modülüne (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünün *alt çaprazlanmış modülü* denir.

Örnekler

1) A, R nin bir alt cebiri olsun. Bu durumda (A, A, id), $(0, A, i)$, (R, R, id) ve $(0, R, i)$ birer çaprazlanmış modül olup (A, A, id); (R, R, id) ve $(0, A, i)$; $(0, R, i)$ birer alt çaprazlanmış modüldür.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "id"'] & R \arrow[d, "id"] \\ A \arrow[r, hook, "i"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "id"] \arrow[d, hook, "i"'] & 0 \arrow[d, "id"] \\ A \arrow[r, hook, "i"'] & R \end{tikzcd}$$

2) I, R cebirinin herhangi bir ideali olmak üzere (I, R, i); (R, R, id) çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & R \arrow[d, "id"] \\ R \arrow[r, "id"'] & R \end{tikzcd}$$

3) A ile B, R nin ideali ve $B \subseteq A$ olmak üzere (B,A,i); (A,R,i) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \arrow[d, hook, "i"] \\ A \arrow[r, hook, "i"'] & R \end{tikzcd}$$

4) A bir R-modül; B, A içinde R alt modül olmak üzere $(B,R,0)$; $(A,R,0)$ çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[d, "0"] \\ R \arrow[r, "id"'] & R \end{tikzcd}$$

3.3.2 Çaprazlanmış İdealler ve Çarpım İdeali

Tanım 3.5 :

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir ve $C' \subseteq C$ olmak üzere eğer (i) $(C',+) \leq (C,+)$ (ii) Her $c' \in C'$ ve $c \in C$ için $c'c \in C'$ ve $cc' \in C'$ şartları sağlanıyorsa C' alt cebirine C; R-cebirinin bir *ideali* denir ve $C' \trianglelefteq C$ ile gösterilir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olmak üzere eğer (i) $C' \trianglelefteq C$ ve $R' \trianglelefteq R$; (ii)$RC' \subseteq C'$ ve $R'C \subseteq C'$; şartları sağlanıyorsa (C',R',∂') alt çaprazlanmış modülüne (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir *çaprazlanmış ideali* denir ve $(C',R',\partial') \trianglelefteq (C,R,\partial)$ ile gösterilir.

Not: Çaprazlanmış ideal tanımındaki (ii) şartı bölüm çaprazlanmış modülde R/R' nün C/C' üzerine etkisini tanımlamak için vardır. Şöyle ki;

$$\begin{array}{ccc} R/R' \times C/C' & \longrightarrow & C/C' \\ (r+R', c+C') & \longmapsto & rc+C' \end{array}$$

etkisinin iyi tanımlı olması için R' nün C/C' üzerine aşikar olarak etki etmesi yani $R'C \subseteq C'$ olması gerekir. Ayrıca R nin C/C' üzerine etkisinin tanımlı olması içinde $RC' \subseteq C'$ olmalıdır.

Örnekler

1) I, R cebirinin bir ideali olmak üzere (I,I,id); (R,R,id) çaprazlanmış modülünün idealidir. Ayrıca $(0,I,i)$; $(0,R,i)$ çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

2) I ve I', R nin bir ideali olmak üzere (I,R,v) ve (I',R,v') çaprazlanmış modüldür. Bu durumda $(I\cap I',I,v) \trianglelefteq (I',R,v')$ ve $(I\cap I',I',v') \trianglelefteq (I,R,v)$ olur.

3) (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve $R_1 \trianglelefteq R$ olsun. Bu durumda $(\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial)$; (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir çaprazlanmış idealidir.

Not: (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün ideallerinin kümesi $Id(C,R,\partial)$ ile gösterilir. Yani

$$Id(C,R,\partial) = \{(C_i,R_i,\partial) : (C_i,R_i,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial), i \in \mathbb{N}\}$$

dir. $(0,0,\partial) \in Id(C,R,\partial)$ olduğundan $Id(C,R,\partial) \neq \emptyset$ dir.

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir, $C_1 \leq C$ ve $C_2 \trianglelefteq C$ olsun. Bu durumda $C_1+C_2 = \{a+b \mid a \in C_1,\, b \in C_2\}$ olarak tanımlıdır.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (C_1,R_1,∂), $(C_2,R_2,\partial) \in Id(C,R,\partial)$ için $(C_1,R_1,\partial)+(C_2,R_2,\partial) = (C_1+C_2,R_1+R_2,\partial)$ olarak tanımlıdır.

Önerme 3.6 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (C_1,R_1,∂), $(C_2,R_2,\partial) \in Id(C,R,\partial)$ için

$$(C_1,R_1,\partial)+(C_2,R_2,\partial) = (C_1+C_2,R_1+R_2,\partial)$$

ve

$$(0,0,\partial)+(C_1,R_1,\partial) = (C_1,R_1,\partial)$$

dır. Üstelik $+$ işlemi değişmeli ve birleşmelidir.

İspat : $(C_1+C_2,R_1+R_2,\partial) \in Id(C,R,\partial)$ olduğu açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned}(0,0,\partial)+(C_1,R_1,\partial) &= (0+C_1,0+R_1,\partial)\\ &= (C_1,R_1,\partial)\end{aligned}$$

olduğu da açıktır. O halde $+$ nın değişmeli ve birleşmeli olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}(C_1,R_1,\partial)+(C_2,R_2,\partial) &= (C_1+C_2,R_1+R_2,\partial)\\ &= (C_2+C_1,R_2+R_1,\partial)\\ &= (C_2,R_2,\partial)+(C_1,R_1,\partial)\end{aligned}$$

olup $+$ işlemi değişmelidir. Diğer taraftan $A = [(C_1,R_1,\partial)+(C_2,R_2,\partial)]+(C_3,R_3,\partial)$ ve $B = (C_1,R_1,\partial)+[(C_2,R_2,\partial)+(C_3,R_3,\partial)]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= (C_1+C_2,R_1+R_2,\partial)+(C_3,R_3,\partial) \\ &= ((C_1+C_2)+C_3,(R_1+R_2)+R_3,\partial) \\ &= (C_1+(C_2+C_3),R_1+(R_2+R_3),\partial) \\ &= (C_1,R_1,\partial)+[(C_2,R_2,\partial)+(C_3,R_3,\partial)] \\ &= B \end{aligned}$$

olup $+$ işlemi birleşmelidir.

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir olmak üzere $(C_i)_{i\in I}$; C nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap\limits_{i\in I} C_i$; C nin bir idealidir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olmak üzere $(C_i,R_i,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ olsun. Bu durumda $\bigcap(C_i,R_i,\partial)$; (C,R,∂) nın bir idealidir.

Önerme 3.7 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Eğer $(C_i,R_i,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ ise $\bigcap(C_i,R_i,\partial) = (\cap C_i,\cap R_i,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ dır.

İspat : (i) $\cap C_i \trianglelefteq C$ ve $\cap R_i \trianglelefteq R$ olduğu açıktır.

(ii) $r\in R$, $c\in \cap C_i$ olmak üzere $r\cdot c\in \cap C_i$ dir. Çünkü $c\in\cap C_i$ ise $\forall i\in I$ için $c\in C_i$ olup $(C_i,R_i,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial)$ olduğundan $r\cdot c\in\cap C_i$ olur. Benzer şekilde $r\in\cap R_i$, $c\in C$ için $r\cdot c\in\cap R_i$ dir. Açıkça $\bigcap(C_i,R_i,\partial)$; (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü olduğundan $\bigcap(C_i,R_i,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial)$ dır.

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir olmak üzere $X\subseteq C$ ve $C_i \trianglelefteq C$ olsun. $X\subseteq \bigcap\limits_{i\in I} C_i$ idealine X tarafından *üretilen ideal* denir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve (C_1,R_1,∂), $(C_2,R_2,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ olmak üzere $< D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) >$; $\{r_2\cdot c_1, r_1\cdot c_2 : r_1\in R_1, r_2\in R_2, c_1\in C_1, c_2\in C_2\}$ kümesi tarafından üretilen idealdir.

Önerme 3.8 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Eğer (C_1,R_1,∂), $(C_2,R_2,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ ve $< D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) >$;

$$\{r_2\cdot c_1, r_1\cdot c_2 : r_1\in R_1, r_2\in R_2, c_1\in C_1, c_2\in C_2\}$$

kümesi tarafından üretilen C nin bir alt cebiri ise

$$(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial)=(<D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)>,R_1R_2,\partial)$$

bir çaprazlanmış modüldür. Bu çaprazlanmış modüle (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) ideallerinin *çarpım ideali* denir. $(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial)$ ile gösterilir. Üstelik R birimli halka ise

$$(C_1,R_1,\partial)(C,R,\partial)=(C_1,R_1,\partial)$$

dır.

İspat : Öncelikle $(<D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)>,R_1R_2,\partial)$ nın bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim:

$$\begin{array}{rccl}\partial: & <D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)> & \longrightarrow & R_1R_2\\ & r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2 & \longmapsto & \partial(c_1)r_2+r_1\partial(c_2)\end{array}$$

cebir morfizmi

$$\begin{array}{ccccc}R_1R_2\times<D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)> & \longrightarrow & <D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)> & & \\ (r_1'r_2',(r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2)) & \longmapsto & r_1'r_2'(r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2) & = & (r_1'r_2'r_2)\cdot c_1+(r_1'r_2'r_1)\cdot c_2\end{array}$$

etkisiyle çaprazlanmış modül şartları kolayca sağlanır. Şöyle ki;

ÇM1)

$$\begin{aligned}\partial((r_1'r_2')(r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2)) &= \partial((r_1'r_2'r_2)\cdot c_1+(r_1'r_2'r_1)\cdot c_2)\\ &= \partial(c_1)(r_1'r_2'r_2)+(r_1'r_2'r_1)\partial(c_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(r_1'r_2')\partial(r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2) &= (r_1'r_2')(\partial(c_1)r_2+r_1\partial(c_2))\\ &= (r_1'r_2'r_2)\partial(c_1)+(r_1'r_2'r_1)\partial(c_2)\end{aligned}$$

olup ÇM1 sağlanır.

ÇM2)

$$\begin{aligned}[\partial(r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2)](r_2'\cdot c_1'+r_1'\cdot c_2') &= (\partial(c_1)r_2+r_1\partial(c_2))(r_2'\cdot c_1'+r_1'\cdot c_2')\\ &= ((\partial(c_1)r_2+r_1\partial(c_2))r_2')\cdot c_1'+((\partial(c_1)r_2+r_1\partial(c_2))r_1')\cdot c_2'\\ &= (\partial(c_1)r_2r_2'+r_1\partial(c_2)r_2')\cdot c_1'+(\partial(c_1)r_2r_1'+r_1\partial(c_2)r_1')\cdot c_2'\\ &= (\partial(c_1)\cdot c_1')\cdot(r_2r_2')+(r_1r_2')\cdot(\partial(c_2)\cdot c_1')+(\partial(c_1)\cdot c_2')\cdot(r_2r_1')+\\ &\quad (r_1r_1')\cdot(\partial(c_2)\cdot c_2')\\ &= (c_1c_1')\cdot(r_2r_2')+(r_1r_2')\cdot(c_2c_1')+(c_1c_2')\cdot(r_2r_1')+(r_1r_1')\cdot(c_2c_2')\end{aligned}$$

ve

$$(r_2\cdot c_1+r_1\cdot c_2)(r_2'\cdot c_1'+r_1'\cdot c_2')=(c_1c_1')\cdot(r_2r_2')+(r_1r_2')\cdot(c_2c_1')+(c_1c_2')\cdot(r_2r_1')+(r_1r_1')\cdot(c_2c_2')$$

olduğundan ÇM2 şartı da sağlanır.

Diğer taraftan R birimli halka ise $(C_1,R_1,\partial)(C,R,\partial)=(C_1,R_1,\partial)$ yani

$$(<D_R(C_1),D_{R_1}(C)>,R_1R,\partial)=(C_1,R_1,\partial)$$

olduğunu gösterelim:

R birimli olduğundan $R_1R=R_1$ dir. Çünkü;

$$\begin{aligned} r_1r\in R_1R &\implies r_1r\in R_1 \quad (\because R_1\trianglelefteq R)\\ &\implies R_1R\subseteq R_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r_1\in R_1 &\implies r_1=r_11_R \in R_1R\\ &\implies R_1\subseteq R_1R \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $<D_R(C_1),D_{R_1}(C)>=C_1$ dir. Açıkça $C_1\subseteq<D_R(C_1),D_{R_1}(C)>$ olup

$$\begin{aligned} r\cdot c_1+r_1\cdot c\in<D_R(C_1),D_{R_1}(C)> &\implies r\cdot c_1+r_1\cdot c\in C_1\ (\because (C_1,R_1,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial))\\ &\implies <D_R(C_1),D_{R_1}(C)>\subseteq C_1 \end{aligned}$$

dir.

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir olmak üzere $C_1,C_2\trianglelefteq C$ olsun. $C_1C_2=\{a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n \mid a_i\in C_1, b_i\in C_2\}$ kümesi C nin bir idealidir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve (C_1,R_1,∂), $(C_2,R_2,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ olsun. $(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial)$ $=(<D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)>,R_1R_2,\partial)$ kümesi (C,R,∂) nın bir idealidir.

Önerme 3.9 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve $(C_1,R_1,\partial),(C_2,R_2,\partial)\in Id(C,R,\partial)$ olsun.

$$(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial)=(<D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)>,R_1R_2,\partial)$$

(C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

İspat : i) $r\in R$, $r_1\in R_1$, $r_2\in R_2$, $r_1r_2\in R_1R_2$ ve $R_1\trianglelefteq R$ olduğundan,

$$r(r_1r_2)=(rr_1)r_2\in R_1R_2$$

olup $R_1R_2\trianglelefteq R$ elde edilir.

ii) $r \in R$, $r_2 \cdot c_1 + r_1 \cdot c_2 \in < D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) >$ için,

$$\begin{aligned} r \cdot (r_2 \cdot c_1 + r_1 \cdot c_2) &= r \cdot (r_2 \cdot c_1) + r \cdot (r_1 \cdot c_2) \\ &= r_2 \cdot (r \cdot c_1) + r_1 \cdot (r \cdot c_2) \\ &\in < D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) > \end{aligned}$$

dir.

iii) $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, $c \in C$ için,

$$\begin{aligned} (r_1 r_2) \cdot c &= r_1 \cdot (r_2 \cdot c) \\ &\in < D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) > \end{aligned}$$

dir.

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir ve $I \trianglelefteq C$ olsun.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve $(C_1,R_1,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial)$ olsun.
$I^n = \{i_1 i_2 \cdots i_n \mid i_1, i_2, \cdots, i_n \in I\}$	$(C_1,R_1,\partial)^n = (< D_{R_1^{n-1}}(C_1) >, R_1^n, \partial)$
biçimindedir.	biçimindedir.

Sonuç 3.10 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda

$$(C_1,R_1,\partial)^n = (< D_{R_1^{n-1}}(C_1) >, R_1^n, \partial)$$

dır. Eğer $C_1 = C$ ve C birim elemana sahip ise

$$(C_1,R_1,\partial)^n = (C, R_1^n, \partial)$$

dır.

Örnekler

1) Eğer $I \trianglelefteq R$ ise

$$(I,R,i)(I,R,i) = (< D_R(I) >, R^2, i)$$

dir.

2) Eğer M bir R-modül ise

$$(M,R,0)(M,R,0) = (< D_R(M) >, R^2, 0)$$

dır.

Önerme 3.11 : R birimli bir halka olsun. Bu durumda bir (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C_1,R,∂) şeklinde ideali yoktur.

İspat : Kabul edelim ki (C_1,R,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda $RC_1 \subseteq C_1$ ve $RC \subseteq C_1$ olup

$$\begin{array}{lllll} c \in C & \Longrightarrow & c = 1_R \cdot c \in RC \subseteq C_1 & \Longrightarrow & c \in C_1 \\ & & & \Longrightarrow & C \subseteq C_1 \end{array}$$

olur. O halde $C_1 \subseteq C$ olduğundan $C_1 = C$ elde edilir. Yani $(C_1,R,\partial) = (C,R,\partial)$ dır.

Önerme 3.12 : C; birimli R-modül ve (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) nın bir öz ideali ise (yani $(C_1,R_1,\partial) \neq (C,R,\partial)$) $R_1 \neq R$ dir.

İspat : $R_1 = R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $C_1 = C$ dir. Çünkü (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) nın bir ideali olduğundan

$$\begin{array}{llll} (i) & C_1 \trianglelefteq C & \text{ve} & R_1 \trianglelefteq R \\ (ii) & R_1C \subseteq C_1 & \text{ve} & RC_1 \subseteq C_1 \end{array}$$

olup

$$\begin{array}{lll} c \in C & \Longrightarrow & c = 1_R \cdot c = 1_{R_1} \cdot c \quad (\because R = R_1) \\ & \Longrightarrow & c \in R_1C \subseteq C_1 \\ & \Longrightarrow & c \in C_1 \\ & \Longrightarrow & C \subseteq C_1 \end{array}$$

olur. Diğer taraftan $C_1 \trianglelefteq C$ olduğundan $C_1 \subseteq C$ olup $C_1 = C$ elde edilir. Bu ise $(C_1,R_1,\partial) \neq (C,R,\partial)$ olmasıyla çelişir. Yani $R_1 \neq R$ dir.

3.3.2.1 Maksimal ve Asal Çaprazlanmış İdealler

Tanım 3.13 :

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir ve $I \neq C$ olmak üzere $I \trianglelefteq C$ olsun. C nin $I \subsetneq J \subsetneq C$ olacak şekilde $J \trianglelefteq C$ ideali yoksa I ya C nin *maksimal ideali* denir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve $(C_1,R_1,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial)$ olsun. $(C_1,R_1,\partial) \subseteq (C_2,R_2,\partial)$ olmak üzere $(C_2,R_2,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial)$ ideali için $(C_2,R_2,\partial) = (C,R,\partial)$ veya $(C_1,R_1,\partial) = (C_2,R_2,\partial)$ ise (C_1,R_1,∂) idealine (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün *maksimal ideali* denir.

Değişmeli cebirler ile çaprazlanmış modüllerin bir diğer benzer özelliğide;

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
Her birimli değişmeli cebir mutlaka bir maksimal ideale sahiptir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve R birimli halka olsun. Bu durumda (C,R,∂) çaprazlanmış modülü bir maksimal ideale sahiptir.

biçiminde ifade edilebilir.

Önerme 3.14 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve R birimli halka olsun. Bu durumda (C,R,∂) çaprazlanmış modülü bir maksimal ideale sahiptir.

İspat : μ; (C,R,∂) nın kendisinden farklı ideallerinin bir kümesi olsun. μ nin bir maksimal elemana sahip olduğunu gösterirsek bu eleman (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir maksimal ideali olur. Bunun için μ deki her Δ zincirinin Δ da bir üst sınıra sahip olduğunu göstermeliyiz. (Zorn Lemma) O halde Δ,μ de herhangi bir zincir olmak üzere

$$C_1 = \bigcup_{(C_i,R_i,\partial)\in\Delta} C_i$$

ve

$$R_1 = \bigcup_{(C_i,R_i,\partial)\in\Delta} R_i$$

alalım. $(C_1,R_1,\partial) \lhd (C,R,\partial)$ olduğunu göstereceğiz. Öncelikle $C_1 \lhd C$ ve $R_1 \lhd R$ olduğunu gösterelim. $C_1 \neq \emptyset, C_1 \subseteq C$ ve $R_1 \neq \emptyset, R_1 \subseteq R$ olduğu açık olup $c_1,c_2 \in C_1$ alınırsa $c_1 \in C_1', c_2 \in C_1''$ olacak şekilde $(C_1',R_1',\partial),(C_1'',R_1'',\partial) \in \Delta$ vardır. Buradan Δ bir zincir olduğundan $C_1' \subseteq C_1''$ veya $C_1'' \subseteq C_1'$ olup $c_1 - c_2 \in C_1'$ veya $c_1 - c_2 \in C_1''$ olur. Yani $c_1 - c_2 \in C_1$ dir. Benzer şekilde $r_1,r_2 \in R_1$ için $r_1 - r_2 \in R_1$ dir. Ayrıca $c \in C, c_1 \in C_1$ olmak üzere $cc_1 \in C_1$ ve $r \in R, r_1 \in R_1$ için $rr_1 \in R_1$ olduğu da açık olup $C_1 \lhd C$ ve $R_1 \lhd R$ olur. Diğer taraftan $(C_1,R_1,\partial);(C,R,\partial)$ çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür. Son olarak $RC_1 \subseteq C_1$ ve $R_1C \subseteq C_1$ olduğunu göstermeliyiz.

$r \in R, c_1 \in C_1$ olmak üzere $c_1 \in C_i$ olacak şekilde $(C_i,R_i,\partial) \in \Delta$ olup $(C_i,R_i,\partial);(C,R,\partial)$ çaprazlanmış modülünün bir ideali olduğundan $RC_i \subseteq C_i$ olur. Yani $rc_1 \in C_i$ olup $rc_1 \in C_1$ dir. Dolayısıyla $RC_1 \subseteq C_1$ olur.

Benzer şekilde $r_1 \in R_1, c \in C$ olmak üzere $r_1 \in R_i$ olacak şekilde $(C_i,R_i,\partial) \in \Delta$ olup $(C_i,R_i,\partial);(C,R,\partial)$ çaprazlanmış modülünün bir ideali olduğundan $R_iC \subseteq C_i$ olup $r_1c \in C_i$ dir. Yani $r_1c \in C_1$ olup $R_1C \subseteq C_1$ dir.

Böylece $(C_1,R_1,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial)$ elde edilir. Buradan $1_R\notin R_i(\because$eğer olsaydı $1_R\in R_i\trianglelefteq R\Longrightarrow R=R_i$ olurdu) olup $1_R\notin\bigcup_{(C_i,R_i,\partial)\in\Delta}R_i=R_1$ olur. O halde $(C_1,R_1,\partial)\neq(C,R,\partial)$ dır. Dolayısıyla μ bir maksimal elemana sahiptir.

Sonuç 3.15 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve R birimli halka olsun. (C',R',∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali ise

$$(C',R',\partial)\subseteq(C_1,R_1,\partial)\neq(C,R,\partial)$$

olacak şekilde bir (C_1,R_1,∂) maksimal ideali vardır.

Önerme 3.16 : R birimli halka olmak üzere $(C_1,R_1,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial)$ olsun. Bu durumda (C_1,R_1,∂) idealinin maksimal olması için gerek ve yeter şart R_1, R nin maksimal ideali ve C_1, C nin $\partial(C_1)\subseteq R_1$ özelliğindeki maksimal ideali olmasıdır.

İspat : $(\Longrightarrow)$ (C_1,R_1,∂) maksimal ideal olsun. Kabul edelim ki R_1, R nin maksimal ideali olmasın. Bu durumda $R_1\subsetneq R_2$ ve $R_2\neq R$ olacak şekilde $R_2\lhd R$ vardır. Dolayısıyla $(<D_R(C_1),D_{R_2}(C)>,R_2,\partial)$ biçiminde (C,R,∂) nın bir ideali elde edilir. Bu ideal

$$(C_1,R_1,\partial)\subseteq(<D_R(C_1),D_{R_2}(C)>,R_2,\partial)$$

olmak üzere (C,R,∂) ve (C_1,R_1,∂) ideallerine eşit değildir. $(\because R_2\neq R_1$ ve $R_2\neq R)$ Bu ise (C_1,R_1,∂) nın maksimal ideal olmasıyla çelişir. O halde R_1, R nin maksimal idealidir. Diğer taraftan $\partial(C_1)\subseteq R_1$ olmak üzere C_1; C nin maksimal ideali olmasın. Yani $\partial(C_2)\subseteq R_1$ ve $C_1\subset C_2$ özelliğinde C nin bir C_2 öz ideali olsun. Bu durumda

$$(C_1,R_1,\partial)\subseteq(<D_R(C_2),D_{R_1}(C)>,R_1,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial)$$

olup $R_1\neq R$ olduğundan $(<D_R(C_2),D_{R_1}(C)>,R_1,\partial)\neq(C,R,\partial)$ dır. Ayrıca (C_1,R_1,∂) maksimal ideal olduğundan

$$C_1=<D_R(C_2),D_{R_1}(C)>$$

dir. Buradan $c_2\in C_2$ olmak üzere $r\cdot c_2+r_1\cdot c=c_1\Longrightarrow r\cdot c_2\in C_1$ olup

$$c_2=1_R\cdot c_2\in RC_2\subseteq C_1$$

olup $C_2\subseteq C_1$ olur. Bu ise kabulle çelişir. O halde C_1; C nin maksimal idealidir.

$(\Longleftarrow)$ R_1, R nin maksimal ideali ve $\partial(C_1)\subseteq R_1$ olmak üzere C_1, C nin maksimal ideali olsun. $(C_1,R_1,\partial)\subseteq(C_2,R_2,\partial)$ olacak şekilde (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C_2,R_2,∂) idealinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(C_2,R_2,\partial)=(C,R,\partial)$ veya $(C_2,R_2,\partial)=(C_1,R_1,\partial)$ olmalıdır.

$(C_1,R_1,\partial) \subseteq (C_2,R_2,\partial)$ iken $R_1 \subseteq R_2$ olup R_1; R nin maksimal ideali olduğundan $R_1 = R_2$ veya $R_2 = R$ dir.

Eğer $R_2 = R$ ise (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C_2,R,∂) biçiminde ideali olmadığından ($\because$Önerme 3.11) $(C_2,R_2,\partial) = (C,R,\partial)$ olur.

Eğer $R_1 = R_2$ ise $(C_1,R_1,\partial) \subseteq (C_2,R_1,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial)$ ve $\partial(C_2) \subseteq R_1$ olur. Buradan $\partial(C_1) \subseteq R_1$ olmak üzere C_1, C nin maksimal ideali olduğundan $C_2 \subseteq C_1$ olur. Yani $C_1 = C_2$ olup $(C_2,R_2,\partial) = (C_1,R_1,\partial)$ dir. Dolayısıyla (C_1,R_1,∂) maksimal idealdir.

Örnek 3.1 : : R birimli halka olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve $R_1 \lhd R$ maksimal ideal olsun. Bu durumda $(\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial)$ maksimal idealdir. Şöyle ki;

$(\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) \subseteq (C_2,R_2,\partial) \lhd (C,R,\partial)$ ve $(C_2,R_2,\partial) \neq (C,R,\partial)$ olsun. $(\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) = (C_2,R_2,\partial)$ olduğunu göstermeliyiz. R_1 maksimal ideal olduğundan $R_1 = R_2$ olmak zorundadır. Diğer taraftan (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C',R,∂) biçiminde bir ideali olmadığından $C_2 = \partial^{-1}(R_1)$ olmalıdır. Böylece $(\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) = (C_2,R_2,\partial)$ olur. Yani $(\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial)$ maksimaldir.

Tanım 3.17 :

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir ve $I \neq C$ olmak üzere $I \trianglelefteq C$ olsun. $x,y \in C$ için $xy \in I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ ise I ya C nin *asal ideali* denir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve $(C_3,R_3,\partial) \lhd (C,R,\partial)$ olsun. $(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ özelliğindeki her $(C_1,R_1,\partial),(C_2,R_2,\partial)$ idealleri için $(C_1,R_1,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ veya $(C_2,R_2,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ oluyorsa (C_3,R_3,∂) idealine bir *asal çaprazlanmış ideal* denir.

Önerme 3.18 : $R' \lhd R$ maksimal ideal ise $(\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ asaldır.

İspat : $R' \lhd R$ maksimal olduğundan Örnek 3.1 gereği $(\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ maksimaldir. Diğer taraftan

$$(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$$

olsun.Bu durumda

$$(< D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2) >,R_1R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$$

olup

$$< D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2) > \subseteq \partial^{-1}(R')$$

ve

$$R_1R_2 \subseteq R'$$

dır. Diğer taraftan R' maksimal olduğundan asal ideal olup $R_1 \subseteq R'$ veya $R_2 \subseteq R'$ olur. $R_1 \subseteq R'$ olsun. Bu durumda $\partial^{-1}(R_1) \subseteq \partial^{-1}(R')$ olur. Çünkü $x \in \partial^{-1}(R_1)$ olup $\partial(x) \in R_1$ yani $\partial(x) \in R'$ olduğundan $x \in \partial^{-1}(R')$ dir. Böylece

$$(C_1,R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$$

olur. Burada $C_1 \subseteq \partial^{-1}(R_1)$ dir. Çünkü $\partial(C_1) \subseteq R_1$ dir. Benzer şekilde $R_2 \subseteq R'$ olsun. Bu durumda $\partial^{-1}(R_2) \subseteq \partial^{-1}(R')$ olur. Böylece

$$(C_2,R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$$

olur. O halde $(\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ asal idealdir.

Önerme 3.19 : $R' \lhd R$ asal ideal ise $(\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ asaldır.

İspat : $(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ olsun. Bu durumda $(C_1,R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ veya $(C_2,R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial) &\Longrightarrow (<D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)>,R_1R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)\\ &\Longrightarrow <D_{R_2}(C_1),D_{R_1}(C_2)> \subseteq \partial^{-1}(R') \quad ve \quad R_1R_2 \subseteq R'\end{aligned}$$

olur. R' asal olduğundan $R_1 \subseteq R'$ veya $R_2 \subseteq R'$ dür. $R_1 \subseteq R'$ ise $\partial^{-1}(R_1) \subseteq \partial^{-1}(R')$ olup

$$(C_1,R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$$

olur. Benzer şekilde $R_2 \subseteq R'$ ise $\partial^{-1}(R_2) \subseteq \partial^{-1}(R')$ olup

$$(C_2,R_2,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R_1),R_1,\partial) \subseteq (\partial^{-1}(R'),R',\partial)$$

olur. O halde $(\partial^{-1}(R'),R',\partial)$ asaldır.

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
Birimli değişmeli cebirde her maksimal ideal bir asal idealdir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(C,R,\partial)^2 = (C,R,\partial)$ ise her maksimal ideal bir asal idealdir.

Önerme 3.20 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(C,R,\partial)^2 = (C,R,\partial)$ ise her maksimal ideal bir asal idealdir.

İspat : $(C_3,R_3,\partial) \neq (C,R,\partial)$ bir maksimal çaprazlanmış ideal olsun. (C_3,R_3,∂) nın asal ideal olmadığını kabul edelim. Bu durumda $(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ iken

$$(C_1,R_1,\partial) \subsetneqq (C_3,R_3,\partial) \; ve \; (C_2,R_2,\partial) \subsetneqq (C_3,R_3,\partial)$$

olacak şekilde (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) idealleri vardır. Buradan

$$(< D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) >, R_1R_2, \partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$$

olup açıkça

$$(C_3,R_3,\partial) \subseteq (C_3+C_1, R_3+R_1, \partial)$$

dır. (C_3,R_3,∂) maksimal ideal olduğundan

$$(C_3,R_3,\partial) = (C_3+C_1, R_3+R_1, \partial)$$

veya

$$(C_3+C_1, R_3+R_1, \partial) = (C,R,\partial)$$

olur. Eğer $(C_3,R_3,\partial) = (C_3+C_1, R_3+R_1, \partial)$ ise

$$C_3 = C_3 + C_1 \; ve \; R_3 = R_3 + R_1$$

olup $(C_1,R_1,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ çelişkisi elde edilir. O halde $(C_3+C_1, R_3+R_1, \partial) = (C,R,\partial)$ dir. Benzer şekilde

$$(C_3,R_3,\partial) \subseteq (C_3+C_2, R_3+R_2, \partial)$$

olup (C_3,R_3,∂) maksimal ideal olduğundan

$$(C_3,R_3,\partial) = (C_3+C_2, R_3+R_2, \partial)$$

veya

$$(C_3+C_2, R_3+R_2, \partial) = (C,R,\partial)$$

olur. Eğer $(C_3,R_3,\partial) = (C_3+C_2, R_3+R_2, \partial)$ ise $C_3 = C_3+C_2$ ve $R_3 = R_3+R_2$ olup $(C_2,R_2,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ çelişkisi elde edilir. O halde $(C_3+C_2, R_3+R_2, \partial) = (C,R,\partial)$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
(C,R,\partial)^2 &= (C_3+C_1, R_3+R_1, \partial)(C_3+C_2, R_3+R_2, \partial) \\
&= [(C_1,R_1,\partial)+(C_3,R_3,\partial)][(C_2,R_2,\partial)+(C_3,R_3,\partial)] \\
&= (C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial)+(C_1,R_1,\partial)(C_3,R_3,\partial)+(C_3,R_3,\partial)(C_2,R_2,\partial) \\
&\quad (C_3,R_3,\partial)(C_3,R_3,\partial) \\
&\subseteq (C_3,R_3,\partial)+(C_3,R_3,\partial)+(C_3,R_3,\partial)+(C_3,R_3,\partial) \\
&= (C_3,R_3,\partial)
\end{aligned}$$

olup $(C,R,\partial)^2 = (C,R,\partial)$ olduğundan $(C,R,\partial) = (C_3,R_3,\partial)$ elde edilir. Bu ise

$$(C_3,R_3,\partial) \neq (C,R,\partial)$$

olmasıyla çelişir. Yani $(C_1,R_1,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ veya $(C_2,R_2,\partial) \subseteq (C_3,R_3,\partial)$ olup (C_3,R_3,∂) asal idealdir.

3.3.2.2 Aralarında Asal Çaprazlanmış İdealler, Jacobson Radikali, Lokal ve Yerel Çaprazlanmış Modüller

Tanım 3.21 :

Değişmeli Cebir	Çaprazlanmış Modül
C bir R-cebir olmak üzere C nin $I_1+I_2=C$ özelliğindeki I_1,I_2 ideallerine *aralarında asal idealler* denir.	R birimli halka olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün $(C_1,R_1,\partial)+(C_2,R_2,\partial)$ $=(C,R,\partial)$ özelliğine sahip (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) çaprazlanmış ideallerine *aralarında asal çaprazlanmış idealler* denir.

Açıkça (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) çaprazlanmış ideallerinin aralarında asal olması için gerek ve yeter şart $C = C_1 + C_2$, $R = R_1 + R_2$ olmasıdır.

Değişmeli Cebir	Çaprazlanmış Modül
C bir R-cebir ve I_1,I_2; C nin aralarında asal idealleri olsun. Bu durumda $I_1I_2 = I_1 \cap I_2$ dir.	R ve C birimli halkalar olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) idealleri aralarında asal ise $(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) = (C_1\cap C_2, R_1\cap R_2,\partial)$ dır.

Önerme 3.22 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) idealleri aralarında asal ise

$$(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) = (C_1\cap C_2, R_1\cap R_2,\partial)$$

dır.

İspat : (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C_1,R_1,∂), (C_2,R_2,∂) idealleri aralarında asal olsun. Bu durumda $(C_1,R_1,\partial)+(C_2,R_2,\partial) = (C,R,\partial)$ olup $C = C_1+C_2, R = R_1+R_2$ olur. Ayrıca $C_1\cap C_2 = C_1C_2$ ve $R_1\cap R_2 = R_1R_2$ dir. Dolayısıyla

$$(C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial) \subseteq (C_1\cap C_2, R_1\cap R_2,\partial)$$

olup

$$(C_1\cap C_2, R_1\cap R_2,\partial) \subseteq (C_1,R_1,\partial)(C_2,R_2,\partial)$$

olduğunu göstermeliyiz. Yani $C_1 \cap C_2 \subseteq < D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) >$ olduğu gösterilmelidir.
$c \in C_1 \cap C_2$ olsun. $R = R_1 + R_2$ olduğundan $1_R \in R_1 + R_2$ olup $1_R = r_1 + r_2$ olcak şekilde $r_1 \in R_1, r_2 \in R_2$ vardır. O halde

$$c = 1_R \cdot c = (r_1 + r_2) \cdot c = r_1 \cdot c + r_2 \cdot c \in < D_{R_1}(C_2), D_{R_2}(C_1) >$$

dir. Yani $C_1 \cap C_2 \subseteq < D_{R_2}(C_1), D_{R_1}(C_2) >$ olur. O halde

$$(C_1, R_1, \partial)(C_2, R_2, \partial) = (C_1 \cap C_2, R_1 \cap R_2, \partial)$$

dir.

Önerme 3.23 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C, R, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun.(C, R, ∂) çaprazlanmış modülünün (C_1, R_1, ∂), (C_2, R_2, ∂) idealleri aralarında asal ve (C_1, R_1, ∂), (C_3, R_3, ∂) idealleri aralarında asal ise (C_1, R_1, ∂) ile $(C_2, R_2, \partial)(C_3, R_3, \partial)$ idealleri de aralarında asaldır.

İspat : (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünün (C_1, R_1, ∂), (C_2, R_2, ∂) idealleri aralarında asal olduğundan

$$(C_1, R_1, \partial) + (C_2, R_2, \partial) = (C, R, \partial)$$

olur. Benzer şekilde (C, R, ∂) nın (C_1, R_1, ∂), (C_3, R_3, ∂) idealleri aralarında asal olduğundan

$$(C_1, R_1, \partial) + (C_3, R_3, \partial) = (C, R, \partial)$$

dır. O halde

$$\begin{aligned}
(C, R, \partial) &= [(C_1, R_1, \partial) + (C_2, R_2, \partial)][(C_1, R_1, \partial) + (C_3, R_3, \partial)] \\
&= \begin{array}{l} (C_1, R_1, \partial)(C_1, R_1, \partial) + (C_1, R_1, \partial)(C_3, R_3, \partial) + (C_2, R_2, \partial)(C_1, R_{1,}\partial) + \\ (C_2, R_2, \partial)(C_3, R_3, \partial) \end{array} \\
&\subseteq (C_1, R_1, \partial) + (C_1, R_1, \partial) + (C_1, R_1, \partial) + (C_2, R_2, \partial)(C_3, R_3, \partial) \\
&= (C_1, R_1, \partial) + (C_2, R_2, \partial)(C_3, R_3, \partial)
\end{aligned}$$

olup (C_1, R_1, ∂) ile $(C_2, R_2, \partial)(C_3, R_3, \partial)$ idealleri aralarında asaldır.

Sonuç 3.24 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C, R, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünün (C_1, R_1, ∂), $(C_{2,} R_2, \partial), \ldots,$ $(C_{2,} R_2, \partial)$ idealleri ikişer ikişer aralarında asal olsun. Bu durumda

$$(C_1, R_1, \partial)(C_{2,} R_2, \partial) \ldots (C_{2,} R_2, \partial) = (C_1, R_1, \partial) \cap (C_{2,} R_2, \partial) \cap \ldots \cap (C_{2,} R_2, \partial)$$

dır.

Tanım 3.25 :

Değişmeli Cebir	**Çaprazlanmış Modül**
C bir R-cebir olmak üzere C nin maksimal ideallerinin kesişimine C nin *Jacobson radikali* veya kısaca *radikali* denir. C nin tek bir maksimal ideali varsa C ye *lokal cebir* denir. C nin sonlu sayıda maksimal ideali varsa C ye *yerel cebir* denir.	(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C,R,∂) nın maksimal ideallerinin arakesitine (C,R,∂) nın *Jacobson radikali* veya kısaca *radikali* denir. (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün tek bir maksimal ideali varsa (C,R,∂) ya *lokal çaprazlanmış modül* denir. (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün sonlu sayıda maksimal ideali varsa (C,R,∂) ya *yerel çaprazlanmış modül* denir.

3.3.3 Bölüm Çaprazlanmış Modül

(C_1,R_1,∂); (C,R,∂) nın bir ideali olmak üzere $R_1C \subseteq C_1$ yani $r_1c \in C_1$ olduğundan

$$\begin{array}{rcl} R_1 \times C/C_1 & \longrightarrow & C/C_1 \\ (r_1, c+C_1) & \longmapsto & r_1(c+C_1) \;=\; r_1c+C_1 \;=\; 0+C_1 \end{array}$$

olup R_1; C/C_1 üzerine aşikâr olarak etki eder. O halde R/R_1 in C/C_1 üzerine etkisi

$$\begin{array}{rcl} R/R_1 \times C/C_1 & \longrightarrow & C/C_1 \\ (r+R_1, c+C_1) & \longmapsto & (r+R_1)(c+C_1) \;=\; rc+C_1 \end{array}$$

biçimindedir. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rrcl} \widetilde{\partial}: & C/C_1 & \longrightarrow & R/R_1 \\ & c+C_1 & \longmapsto & \partial(c)+R_1 \end{array}$$

cebir morfizmi iyi tanımlı olup bu etkiyle birlikte bir çaprazlanmış modüldür. Çünkü;

$$\begin{array}{rcl} c+C_1 = c'+C_1 & \Longrightarrow & c-c' \in C_1 \\ & \Longrightarrow & \partial(c-c') \in \partial(C_1) \subseteq R_1 \\ & \Longrightarrow & \partial(c)-\partial(c') \in R_1 \ (\because \partial \text{ cebir morfizmi}) \\ & \Longrightarrow & \partial(c)+R_1 = \partial(c')+R_1 \\ & \Longrightarrow & \widetilde{\partial}(c+C_1) = \widetilde{\partial}(c'+C_1) \end{array}$$

olup $\widetilde{\partial}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \widetilde{\partial}((r+R_1)\cdot(c+C_1)) & = & \widetilde{\partial}(rc+C_1) \\ & & = & \partial(rc)+R_1 \\ & & = & r\partial(c)+R_1 \\ & & = & (r+R_1)(\partial(c)+R_1) \\ & & = & (r+R_1)\widetilde{\partial}(c+C_1) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM2} & \widetilde{\partial}(c+C_1)(c'+C_1) & = & (\partial(c)+R_1)\cdot(c'+C_1) \\ & & = & \partial(c)c'+C_1 \\ & & = & cc'+C_1 \\ & & = & (c+C_1)(c'+C_1) \end{array}$$

dir.

Tanım 3.26 : $(C,R,\partial)/(C_1,R_1,\partial) = (C/C_1,R/R_1,\widetilde{\partial})$ çaprazlanmış modülüne *bölüm çaprazlanmış modülü* denir.

Önerme 3.27 : $\partial : C \longrightarrow R$; R cismi üzerinde bir çaprazlanmış modül ise $\partial = 0$ veya $\partial(C) = R$ dir.

İspat : $\partial \neq 0$ olmak üzere $\partial : C \longrightarrow R$; R cismi üzerinde bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\partial(C) \subseteq R$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $\partial \neq 0$ olduğundan $\partial(C) \neq 0$ olacak şekilde $\exists c \in C$ vardır. Buradan $\partial(c) \in R$ ve R bir cisim olduğundan

$$\begin{aligned} \partial(c)\partial(c)^{-1} = 1_R &\Longrightarrow \partial(c)\partial(c^{-1}) = 1_R \\ &\Longrightarrow \partial(cc^{-1}) = 1_R \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $r \in R$ için

$$\begin{aligned} r &= r1_R \\ &= r\partial(cc^{-1}) \\ &= \partial(r \cdot (cc^{-1})) \in \partial(C) \end{aligned}$$

olup $R \subseteq \partial(C)$ olur. O halde $\partial(C) = R$ elde edilir.

Önerme 3.28 : R bir cisim olmak üzere $(C_1,R_1,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{lll} (i) & \widetilde{\partial} = 0 & \text{veya} \\ (ii) & \widetilde{\partial}(C/C_1) = & R/R_1 \text{ dir. Yani } (C/C_1,R/R_1,\widetilde{\partial}) \cong (R/R_1,R/R_1,id) \text{ dir.} \end{array}$$

İspat : Önerme 3.27 gereği açıktır.

Önerme 3.29 : R ve C birimli halkalar ve (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda (C_1,R_1,∂) idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart

$a)$ R/R_1 cisim ve $C = C_1$ dir.

veya

$b)$ R/R_1 ve C/C_1 birer cisimdir.

olmasıdır.

İspat : $(\Longrightarrow)$ (C_1,R_1,∂) maksimal ideal olsun. Bu durumda Önerme 3.16 gereğince R_1, R nin maksimal idealidir. Dolayısıyla R/R_1 cisimdir. Diğer taraftan Önerme 3.28 gereği $\widetilde{\partial} = 0$ veya $(C/C_1,R/R_1,\widetilde{\partial}) \cong (R/R_1,R/R_1,id)$ olur. Eğer $\widetilde{\partial} = 0$ ise $\partial(C) \subseteq R_1$ dir. Çünkü

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial} : \quad C/C_1 &\longrightarrow R/R_1 \\ c + C_1 &\longmapsto \partial(c) + R_1 \end{aligned}$$

olmak üzere $\widetilde{\partial}=0$ olduğundan $\widetilde{\partial}(c+C_1)=\partial(c)+R_1=0+R_1 \Longrightarrow \partial(c)\in R_1$ dir. Böylece Önerme 3.16 gereği ve (C_1,R_1,∂) maksimal ideal olduğundan $C=C_1$ dir. Dolayısıyla (a) sağlanır. Eğer $C/C_1\cong R/R_1$ ise R/R_1 cisim olduğundan C/C_1 de bir cisim olup (b) sağlanır.

$(\Longleftarrow)$ (a) ve (b) sağlansın. (a) gereği R/R_1 cisim olup R_1; R nin maksimal idealidir. Ayrıca (a) gereğince $C=C_1$ olduğundan

$$\partial(C)=\partial(C_1)\subseteq R_1\subseteq R \Longrightarrow \partial(C_1)\subseteq R$$

ve (b) gereğince C_1; C nin maksimal ideali olup Önerme 3.16 gereğince (C_1,R_1,∂) maksimal idealdir.

Önerme 3.30 : R ve C birimli halkalar ve (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda(C_1,R_1,∂) idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{array}{ll} i) & R/R_1 \text{ cisim} \\ ii) & \left\{\begin{array}{llll} (a) & \text{Eğer} & \partial(C)\subseteq R_1 & \text{ise} \quad C_1=C \\ (b) & \text{Eğer} & \partial(C)\subsetneqq R_1 & \text{ise} \quad C/C_1 \text{cisim} \end{array}\right. \end{array}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat : $(\Longrightarrow)(C_1,R_1,\partial)$ maksimal ideal olsun. Bu durumda Önerme 3.16 gereği R_1; R nin maksimal ideali olup R/R_1 bir cisimdir. Yani (i) sağlanır. Diğer taraftan $\partial(C)\subseteq R_1$ ise (C,R_1,∂); (C,R,∂) nın öz ideali olup $(C_1,R_1,\partial)\subseteq(C,R,\partial)$ ve (C_1,R_1,∂) maksimal ideal olduğundan $C_1=C$ olur. Dolayısıyla (a) sağlanır. Eğer $\partial(C)\neq R_1$ ise $\widetilde{\partial}=0$ olamaz. Çünkü $\widetilde{\partial}=0$ iken $\widetilde{\partial}(c+C_1)=\partial(c)+R_1=0+R_1$ olup $\partial(c)\in R_1$ yani $\partial(C)\subseteq R_1$ dir. O halde $\widetilde{\partial}(C/C_1)=R/R_1$ olup Önerme 3.28 gereğince $(C/C_1,R/R_1,\widetilde{\partial})\cong(R/R_1,R/R_1,id)$ olur. O halde R/R_1 cisim olduğundan C/C_1 de cisimdir.

$(\Longleftarrow)$ (i) ve (ii) sağlansın. (i) gereğince R_1 maksimal idealdir. Eğer $\partial(C)\subseteq R_1$ ise (ii) de (a) gereğince $C_1=C$ olup $(C_1,R_1,\partial)=(C,R,\partial)$ maksimal idealdir. $(\because (C_1,R_1,\partial)\subseteq(C,R_1,\partial)$ iken $C_1=C$ yani $(C_1,R_1,\partial)=(C,R,\partial)$ dır.) Eğer $\partial(C)\subsetneqq R_1$ ise (ii) de (b) gereğince C/C_1 bir cisim olup $C_1;C$ nin maksimal idealidir. (i) ve Önerme 3.16 gereğince R_1 de maksimal olup (C_1,R_1,∂) maksimal idealdir.

Sonuç 3.31 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali ve $\partial(C)\subsetneqq R_1$ olsun. Bu durumda (C_1,R_1,∂) idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart C/C_1 ve R/R_1 birer cisim olmasıdır. (Yani C_1 ve R_1 maksimal ideallerdir.)

İspat : Önerme 3.30 gereğince açıktır.

Önerme 3.32 : R birimli halka ve (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. R_1; R nin maksimal ideali olmak üzere (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir tek (C_1,R_1,∂) maksimal ideali vardır.

İspat : Kabul edelim ki (C_1,R_1,∂) ve (C_2,R_2,∂) farklı iki maksimal ideal olsun. Bu durumda $(<D_R(C_1 \cup C_2)>,R_1,\partial)$ bir ideal olup $(C_1,R_1,\partial),(C_2,R_2,\partial) \subseteq (<D_R(C_1 \cup C_2)>,R_1,\partial)$ dir. O halde (C_1,R_1,∂) ve (C_2,R_2,∂) maksimal idealler olduğundan

$$(C_1,R_1,\partial) = (<D_R(C_1 \cup C_2)>,R_1,\partial) = (C_2,R_2,\partial)$$

olur. Yani $C_1 = C_2$ ve $R_1 = R_2$ dir.

Sonuç 3.33 : R birimli halka ve (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün maksimal ideallerinin kümesinden R nin maksimal ideallerinin kümesine bire bir dönüşüm vardır.

Önerme 3.34 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olmak üzere eğer $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_1^n = 0$ ise $C_1 \neq C$ dir.

İspat : $C_1 = C$ olduğunu kabul edelim. C birimli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n = C$ dir. Çünkü $c \in C$ için $c = c1_C1_C \ldots 1_C \in C^n$ olup $C \subseteq C^n$ ve $c_1c_2 \ldots c_n \in C^n$ için $c_1c_2 \ldots c_n \in C$ olup $C^n \subseteq C$ dir. Diğer taraftan $C =< D_{R_1^{n-1}}(C) >$ dir. Çünkü $c_1c_2 \ldots c_n \in C^n = C$ olmak üzere

$$c_1c_2 \ldots c_{n-1}c_n = \partial(c_1)\partial(c_2) \ldots \partial(c_{n-1})c_n \in D_{R_1^{n-1}}(C)$$

dir. Ayrıca $(C_1,R_1,\partial)^n = (<D_{R_1^{n-1}}(C)>,R_1^n,\partial)$ olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(C_1,R_1,\partial)^n = (\bigcap_{n=1}^{\infty} <D_{R_1^{n-1}}(C)>, \bigcap_{n=1}^{\infty} R_1^n,\partial) = (C,0,\partial)$$

olur. Buradan $1_C \in C, 1_C \neq 0$ olduğundan $C \neq 0$ ve $\partial(C) = 0$ iken $\partial = 0$ olur. Bu ise C birimli halka olduğundan $(C,R,0)$ nın bir çaprazlanmış modül olmasıyla çelişir.

Sonuç 3.35 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. R; R_1 maksimal idealine sahip lokal halka olmak üzere eğer $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_1^n = 0$ ise ∂ örtendir.

Sonuç 3.36 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. R; R_1 maksimal idealine sahip lokal halka olmak üzere ∂ örten olmasın. Eğer $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_1^n = 0$ ise (C_1,R_1,∂) idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart R_1 ve C_1 ideallerinin maksimal idealler olmasıdır.

Önerme 3.37 : R ve C birimli halkalar olmak üzere (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül ve (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Eğer $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(C_1,R_1,\partial)^n = (0,0,\partial)$ ise $C_1 \neq C$ dir.

İspat : $(C_1,R_1,\partial)^n = (< D_{R_1^{n-1}}(C_1) >, R_1^n, \partial)$ olmak üzere

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(C_1,R_1,\partial)^n = (0,0,\partial) \Longrightarrow (\bigcap_{n=1}^{\infty} < D_{R_1^{n-1}}(C) >, \bigcap_{n=1}^{\infty} R_1^n, \partial) = (0,0,\partial)$$

olup $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_1^n = 0$ olur. Bu durumda Önerme 3.34 gereği $C_1 \neq C$ olur.

Sonuç 3.38 : (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Eğer $R_1 \subsetneq radR$ olmak üzere R bir Noetherian halka ise $C_1 \neq C$ dir.

Sonuç 3.39 : (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Eğer $R_1 \subsetneq radR$ olmak üzere R bir Noetherian halka ise (C_1,R_1,∂) idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart R_1 ve C_1 ideallerinin maksimal idealler olmasıdır.

Sonuç 3.40 : (C_1,R_1,∂); (C,R,∂) nın bir ideali olsun. Eğer R ve C Noetherian lokal halkalar ise (C_1,R_1,∂) idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart R_1 ve C_1 ideallerinin maksimal idealler olmasıdır. Üstelik; eğer $\partial(C_1) = R_1$ ise $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(C_1,R_1,\partial)^n = (0,0,\partial)$ dır.

BÖLÜM 4

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN ADİC TAMLAMASI

4.1 Giriş

Bu bölümde, Bölüm 2' de değişmeli cebirler üzerinde tanımladığımız adic tamlama kavramının, Bölüm 3' te detaylı olarak birçok özelliğini incelediğimiz değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüller üzerinde karşılığını inceleyeceğiz. Bu kavramın değişmeli cebirler üzerindeki tanımına benzer olarak çaprazlanmış modüller için genel bir tanımını vermeden önce $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ kategorisini ve bu kategori ile **XMod** kategorisi arasındaki denkliği ifade edip, $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ kategorisinde de adic tamlama kavramını tanımlayacağız. Burada tamlama kavramının tanımı gereği ihtiyaç duyacağımız **TopXMod** ile $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})$ kategorilerinden de bahsedilecek ve tanımlanan kategoriler arasındaki uygun funktorların ve denkliklerin varlığı ifade edilecektir. Daha sonra değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüller üzerinde adic tamlama kavramı verilecektir. Bu bölümde ifade edilen kavramlar [10, 11, 20] den yararlanılarak elde edilmiştir.

4.2 TopXMod Kategorisi

Tanım 4.1 : (C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olsun.

i) C topolojik R-cebir ve R topolojik K-cebir

ii) R nin C üzerine etkisi sürekli

şartları sağlanıyorsa (C,R,∂) çaprazlanmış modülüne *topolojik çaprazlanmış modül* denir.

Tanım 4.2 : (C,R,∂) ve (C',R',∂') birer topolojik çaprazlanmış modüller olmak üzere μ ve η sürekli homomorfizmler ise

$$(\mu,\eta):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmine *topolojik çaprazlanmış modül morfizmi* denir.

Buradan;

Objeler; $(C,R,\partial),(C',R',\partial')\ldots$biçiminde topolojik çaprazlanmış modüller

Morfizmler; $(\mu,\eta):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$ biçimindeki topolojik çaprazlanmış modül morfizmleri

Kompozisyon; $(\mu,\eta):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$ ve $(\theta,\varphi):(C',R',\partial')\longrightarrow(C'',R'',\partial'')$ olmak üzere $(\theta,\varphi)\circ(\mu,\eta)=(\theta\circ\mu,\varphi\circ\eta)$
biçiminde bir kategori elde edilir. Bu kategori **TopXMod** ile gösterilir. Doğal olarak;

$$\mathcal{U}_{XMod}:\mathbf{TopXMod}\longrightarrow\mathbf{XMod}$$

biçiminde topoloji yapısını ihmal eden bir ihmal (forgetfull) funktoru vardır.

Şimdi **XMod** kategorisi ile denkliğini ifade edeceğimiz $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ kategorisini tanımlayacağız ve cat^1-cebirler için bazı özellikleri ifade edeceğiz. Daha sonra da cat^1-cebirler ile çaprazlanmış modüller için adic tamlamanın karşılıklarını inceleyeceğiz.

4.3 Cat^1-Cebir ve Cat^1-Cebirlerin Adic Tamlaması

Cat^1-grup kavramı ilk olarak homotopi n-tipleri için cebirsel bir model olarak Loday tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Ellis (1988) $K-$ cebir kategorisinde cat^1-cebir kavramını tanımlamıştır.

Tanım 4.3 : K bir halka ve A bir K-cebir olsun.

$$A\underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}}A$$

homomorfizmleri için

$$\begin{array}{ll} CA1) & ts=s,\ st=t \\ CA2) & \text{ÇektÇeks}=\{0_A\} \end{array}$$

şartlarını sağlayan (A,s,t) cebirsel sistemine *cat^1-cebir* denir.

Burada $x\in$ Çekt ve $y\in$ Çeks olmak üzere ÇektÇeks; xy elemanı tarafından üretilen A nın bir idealidir.

Diğer taraftan cat^1-cebirler arasındaki morfizm şu şekilde tanımlıdır:

(A,s,t) ve (A',s',t') cat^1-cebirler olmak üzere

$$s'\phi=\phi s \text{ ve } t'\phi=\phi t$$

özelliğinde

$$\phi : A \longrightarrow A'$$

homomorfizmi için

$$\phi : (A,s,t) \longrightarrow (A',s',t')$$

morfizmine *cat^1-cebir morfizmi* denir.

Böylece objeleri cat^1-cebirler, morfizmleri cat^1-cebir morfizmleri olan bir kategori elde edilir. Bu kategori $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ ile gösterilir.

Cat^1-cebir örneklerini vermeden önce, Shammu (1992) ve Porter tarafından verilen $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ ile **XMod** kategorilerinin denkliğini gösterelim:

Önerme 4.4 : **XMod** ve $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ kategorileri doğal denktirler.

İspat :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{XMod} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir}) \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

(C,R,∂) bir çaprazlanmış modül olmak üzere $R \ltimes C$,

$$s(r,c) = (r,0) \text{ ve } t(r,c) = (r+\partial(c),0)$$

olarak alınırsa $F(C,R,\partial) = (R \ltimes C, s, t)$ olarak tanımlanabilir. Çünkü; $R \ltimes C$

$$(r,c)(r',c') = (rr', r\cdot c' + r'\cdot c + cc')$$

işlemiyle bir K-cebir olup

$$R \ltimes C \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} R \ltimes C$$

bir cat^1-cebirdir. Şöyle ki;

CA1)

$$\begin{aligned} (st)(r,c) &= s(t(r,c)) \\ &= s(r+\partial(c),0) \\ &= (r+\partial(c),0) \\ &= t(r,c) \end{aligned}$$

olup $st=t$ ve

$$\begin{aligned}(ts)(r,c) &= t(s(r,c))\\ &= t(r,0)\\ &= (r+\partial(0),0)\\ &= (r,0)\\ &= s(r,c)\end{aligned}$$

olup $ts=s$ dir.

CA2)

$$\begin{aligned}\text{Çeks} &= \{(r,c)\mid s(r,c)=(0,0)\}\\ &= \{(r,c)\mid (r,0)=(0,0)\}\\ &= \{(r,c)\mid r=0, c\in C\}\\ &= \{(0,c)\mid c\in C\}\\ \text{Çekt} &= \{(r,c)\mid t(r,c)=(0,0)\}\\ &= \{(r,c)\mid (r+\partial(c),0)=(0,0)\}\\ &= \{(r,c)\mid r+\partial(c)=0\}\\ &= \{(-\partial(c),c)\mid c\in C\}\end{aligned}$$

olup $p\in$Çeks, $q\in$Çekt alınırsa

$$\begin{aligned}pq &= (0,c)(-\partial(c'),c')\\ &= (0(-\partial(c')),0c'+c(-\partial(c'))+cc')\\ &= (0,-cc'+cc')\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

olduğundan ÇektÇeks$=\{0_A\}$ dır.

Diğer taraftan $(\alpha,\beta):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$ çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$F(\alpha,\beta):(R\ltimes C,s,t)\xrightarrow{\theta}(R'\ltimes C',s',t')$$

$\theta(r,c)=(\beta(r),\alpha(c))$ olarak tanımlanırsa θ bir cat^1-cebir morfizmi olur. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}(\theta s)(r,c) &= \theta(s(r,c))\\ &= \theta(r,0)\\ &= (\beta(r),\alpha(0))\\ &= (\beta(r),0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s'\theta)(r,c) &= s'(\theta(r,c))\\ &= s'(\beta(r),\alpha(c))\\ &= (\beta(r),0)\end{aligned}$$

olduğundan $\theta s = s'\theta$ dir. Benzer şekilde $\theta t = t'\theta$ dır.

Bu durumda funktor şartları sağlanacağından F bir funktor belirtir.

Tersine; (A,s,t) bir cat^1-cebir olmak üzere

$$C = \text{Çeks},\ R = s(A) = t(A) \text{ ve } \partial = t|_{\text{Çeks}}$$

alınırsa $G(A,s,t) = (\text{Çeks}, s(A), t|_{\text{Çeks}})$ olarak tanımlanabilir. Çünkü; $(\text{Çeks}, s(A), t|_{\text{Çeks}})$ bir çaprazlanmış modüldür. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}\text{ÇM1) } \partial(r\cdot c) &= t(r\cdot c)\ (\because \partial = t|_{\text{Çeks}})\\ &= rt(c)\ (\because t \text{ cebir homomorfizmi})\\ &= r\partial(c)\ (\because \partial = t|_{\text{Çeks}})\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\text{ÇM2) } \partial(c)\cdot c' &= t(c)\cdot c'\ (\because \partial = t|_{\text{Çeks}})\\ &= s(c)\cdot c'\ (\because R = s(A) = t(A))\\ &= 0\cdot c'\ (\because c \in \text{Çeks})\\ &= 0\\ &= cc'\ (\because \text{ÇeksÇekt} = \{0_A\})\end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan $\theta : (A,s,t) \longrightarrow (A',s',t')$ cat^1-cebir morfizmi için $G(\theta) = (\theta|_{\text{Çeks}}, \theta|_{s(A)})$ olarak tanımlanırsa $G(\theta)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olur. Böylece G nin bir funktor olduğu açık olup $F\circ G = id_{\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})}$ ve $G\circ F = id_{\mathbf{XMod}}$ olacağından bu kategoriler izomorf dolayısıyla doğal denktirler.

Çaprazlanmış modüller için verdiğimiz örnekleri, **XMod** ve **Cat**^{1}(**Cebir**) kategorilerinin denkliğinden yararlanarak cat^1-cebirler için de verebiliriz.

Örnekler:

1) R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. (I,R,i) bir çaprazlanmış modül olup

$$s(r,a) = (r,0) \text{ ve } t(r,a) = (r+i(a),0) = (r+a,0)$$

olmak üzere $(R \ltimes I,s,t)$ bir cat^1-cebirdir.

2) R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere $(M,R,0)$ bir çaprazlanmış modüldür. Buna göre

$$s(r,m) = (r,0) \text{ ve } t(r,m) = (r+0(m),0) = (r,0)$$

olmak üzere $(R \ltimes M,s,t)$ bir cat^1-cebirdir.

4.3.1 Verilen Cat^1-Cebirden Yeni Cat^1-Cebir Elde Etmek

4.3.1.1 Alt Cat^1-Cebir

Tanım 4.5 : (A,s,t) bir cat^1-cebir olsun.

i) I; A nın alt cebiri

ii) $s' = s|_I$, $t' = t|_I$
şartlarını sağlıyorsa (I,s',t') cat^1-cebirine (A,s,t) cat^1-cebirinin *alt cat^1-cebiri* denir.

Örnekler:

1) I, A nın alt cebiri olmak üzere (I,id,id); (A,id,id) cat^1-cebirinin bir alt cat^1-cebiridir.

2) R bir halka, $I \trianglelefteq R$ olmak üzere $r \in R$, $a \in I$ için

$$s'(r,a) = (r,0) \text{ ve } t'(r,a) = (r+a,0)$$

olmak üzere $(R \ltimes I,s',t')$ bir cat^1-cebir olup $r_1,r_2 \in R$ için

$$s(r_1,r_2) = (r_1,0) \text{ ve } t(r_1,r_2) = (r_1+r_2,0)$$

olmak üzere $(R \ltimes R,s,t)$ cat^1-cebirinin bir alt cat^1-cebiridir.

4.3.1.2 Cat^1-Cebir İdeali

Tanım 4.6 : (A,s,t) bir cat^1-cebir olsun. $I \trianglelefteq A$ olmak üzere (I,s',t') alt cat^1-cebirine (A,s,t) cat^1-cebirinin bir *ideali* denir. $(I,s',t') \trianglelefteq (A,s,t)$ ile gösterilir.

Önerme 4.7 : (A,s,t) cat^1-cebir ve $(I,s',t') \trianglelefteq (A,s,t)$ olsun. Bu durumda (I,s',t') cat^1-cebirdir.

İspat :

CA1) $s't'=t'$ ve $t's'=s'$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall a \in I$ için

$$\begin{aligned} s't'(a) &= s'(t'(a)) \\ &= s(t'(a)) \ (\because s'=s|_I) \\ &= s(t(a)) \ (\because t'=t|_I) \\ &= t(a) \\ &= t'(a) \end{aligned}$$

olup $s't'=t'$ olur. Benzer şekilde $t's'=s'$ olur.

CA2) Çeks'Çek$t'=\{0_I\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \text{Çek}s' &= \{a \in I \mid s'(a)=0_I\} \\ \text{Çek}t' &= \{a \in I \mid t'(a)=0_I\} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} a \in \text{Çek}s' &\Longrightarrow s'(a)=0_I=0_A \\ &\Longrightarrow s(a)=0_A \\ &\Longrightarrow a \in \text{Çek}s \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b \in \text{Çek}t' &\Longrightarrow t'(b)=0_I=0_A \\ &\Longrightarrow t(b)=0_A \\ &\Longrightarrow b \in \text{Çek}t \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} ab \in Çeks'Çekt' &\Longrightarrow ab \in \text{Çek}s\text{Çek}t \\ &\Longrightarrow ab \in \{0_A\}=\{0_I\} \\ &\Longrightarrow ab \in \{0_I\} \end{aligned}$$

olur. Yani Çeks'Çek$t'=\{0_I\}$ olur.

Önerme 4.8 : (I,s',t'); (A,s,t) cat^1-cebirinin ideali olmak üzere (Çeks',Ims',$t'|_{\text{Çek}s'}$); (Çek$s$,Ims,$t|_{\text{Çek}s}$) çaprazlanmış modülünün idealidir.

İspat :

i) (Çeks',Ims',$t'|_{\text{Çek}s'}$); (Çek$s$,Ims,$t|_{\text{Çek}s}$) nin bir alt çaprazlanmış modülüdür.

ii) Çeks' $\trianglelefteq$Çek$s$ ve Ims' $\trianglelefteq$Ims olduğunu gösterelim:

$a \in$Çeks', $b \in$Çek$s$ için $a \in I$, $b \in A$, $s'(a) = 0_I$ ve $s(b) = 0_A$ olup

$$\begin{aligned} s'(ab) &= s(ab)\ (\because s' = s|_I) \\ &= s(a)s(b) \\ &= s'(a)s(b)\ (\because s' = s|_I) \\ &= 0_I 0_A \\ &= 0_I \end{aligned}$$

olduğundan $ab \in$Çeks' olur. Yani Çeks' $\trianglelefteq$Çek$s$ dir.

$s'(a) \in$Ims', $s(b) \in$Ims için $a \in I$, $b \in A$ olup

$$\begin{aligned} s'(a)s(b) &= s(a)s(b)\ (\because s' = s|_I) \\ &= s(ab) \\ &= s'(ab)\ (\because ab \in I) \\ &\in \text{Im}s' \end{aligned}$$

olup Ims' $\trianglelefteq$Ims olur.

iii) ImsÇeks' $\subseteq$Çeks' ve Ims'Çek$s$ $\subseteq$Çeks' olduğunu gösterelim:

$s(a) \in$Ims, $b \in$Çeks' olmak üzere $a \in A$, $b \in I$ ve $s'(b) = 0_I$ olup

$$\begin{aligned} s'(s(a)b) &= s(s(a)b)\ (\because s' = s|_I) \\ &= s(s(a))s(b)\ (s \text{ homomorfizm}) \\ &= s(a)s(b)\ (\because s^2 = s) \\ &= s(a)s'(b)\ (\because s' = s|_I) \\ &= s(a)0_I \\ &= 0_I \end{aligned}$$

olduğundan $s(a)b \in$Çeks' olur. Yani ImsÇeks' $\subseteq$Çeks' dir.

$s'(a) \in$Ims', $b \in$Çek$s$ olmak üzere $a \in I$, $b \in A$ ve $s(b) = 0_A$ olup

$$\begin{aligned} s'(s'(a)b) &= s(s'(a)b) \ (\because s' = s|_I) \\ &= s(s'(a))s(b) \ (s \text{ cebir morfizmi}) \\ &= s(s(a))s(b) \ (\because s' = s|_I) \\ &= s(a)s(b) \ (\because s^2 = s) \\ &= s(a)0_A \\ &= 0_A = 0_I \end{aligned}$$

olduğundan $s'(a)b \in$Çeks' olur. Yani Ims'Çek$s \subseteq$Çeks' dir. Böylece (Çeks',Ims',$t'|_{\text{Çek}s'}$) $\trianglelefteq$ (Çek$s$,Ims,$t|_{\text{Çek}s}$) elde edilir.

Önerme 4.9 : $(C_1, R_1, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olmak üzere

$$(R_1 \ltimes C_1, s_1, t_1) \trianglelefteq (R \ltimes C, s, t)$$

dir.

İspat : $(C_1, R_1, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olduğundan

i) $C_1 \trianglelefteq C$, $R_1 \trianglelefteq R$

ii) $R_1 C \subseteq C_1$, $RC_1 \subseteq C_1$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} s_1(r_1, c_1) &= (r_1, 0) \\ t_1(r_1, c_1) &= (r_1 + \partial(c_1), 0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s(r, c) &= (r, 0) \\ t(r, c) &= (r + \partial(c), 0) \end{aligned}$$

olmak üzere $(R_1 \ltimes C_1, s_1, t_1) \trianglelefteq (R \ltimes C, s, t)$ olması için

a) $(R_1 \ltimes C_1, s_1, t_1)$; $(R \ltimes C, s, t)$ nin alt cat^1-cebiri

b) $R_1 \ltimes C_1 \trianglelefteq R \ltimes C$
olmalıdır.

a) $R_1 \ltimes C_1$; $R \ltimes C$ nin alt cebiri olup $s_1 = s|_{R_1 \ltimes C_1}$, $t_1 = t|_{R_1 \ltimes C_1}$ olduğundan $(R_1 \ltimes C_1, s_1, t_1)$ nin bir cat^1-cebir olduğu açık olup $(R_1 \ltimes C_1, s_1, t_1)$; $(R \ltimes C, s, t)$ nin alt cat^1-cebiri olur.

b) $(r_1, c_1) \in R_1 \ltimes C_1$, $(r, c) \in R \ltimes C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (r_1, c_1)(r, c) &= (r_1 r, r_1 \cdot c + c_1 \cdot r + c_1 c) \\ &\in R_1 \ltimes C_1 \ (\because (C_1, R_1, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)) \end{aligned}$$

olduğundan $R_1 \ltimes C_1 \trianglelefteq R \ltimes C$ olur.

4.3.1.3 Bölüm Cat^1-Cebir

Tanım 4.10 : (A, s, t) bir cat^1-cebir ve $(I, s', t') \trianglelefteq (A, s, t)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{s} : \ A/I &\longrightarrow A/I \\ a + I &\longmapsto s(a) + I \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{t} : \ A/I &\longrightarrow A/I \\ a + I &\longmapsto t(a) + I \end{aligned}$$

homomorfizmleri için $(A/I, \bar{s}, \bar{t})$ cat^1-cebirine *bölüm* cat^1*-cebiri* denir.

Önerme 4.11 : $(R \ltimes C / R_1 \ltimes C_1, \bar{s}, \bar{t})$ bir cat^1-cebirdir.

İspat :

$$\begin{aligned} \bar{s} : \ R \ltimes C / R_1 \ltimes C_1 &\longrightarrow R \ltimes C / R_1 \ltimes C_1 \\ (r, c) + R_1 \ltimes C_1 &\longmapsto s(r, c) + R_1 \ltimes C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{t} : \ R \ltimes C / R_1 \ltimes C_1 &\longrightarrow R \ltimes C / R_1 \ltimes C_1 \\ (r, c) + R_1 \ltimes C_1 &\longmapsto t(r, c) + R_1 \ltimes C_1 \end{aligned}$$

olmak üzere

CA1) $\bar{s}\bar{t} = \bar{t}$ ve $\bar{t}\bar{s} = \bar{s}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} (\bar{s}\bar{t})((r, c) + R_1 \ltimes C_1) &= \bar{s}(\bar{t}((r, c) + R_1 \ltimes C_1)) \\ &= \bar{s}(t(r, c) + R_1 \ltimes C_1) \\ &= s(t(r, c)) + R_1 \ltimes C_1 \\ &= t(r, c) + R_1 \ltimes C_1 \\ &= \bar{t}((r, c) + R_1 \ltimes C_1) \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{s}\bar{t} = \bar{t}$ dir. Benzer şekilde $\bar{t}\bar{s} = \bar{s}$ olduğu da gösterilebilir.

CA2) Çek$\bar{s}$Çek$\bar{t} = R_1 \ltimes C_1$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\bar{s} &= \{(r,c)+R_1 \ltimes C_1 \mid \bar{s}((r,c)+R_1 \ltimes C_1) = R_1 \ltimes C_1\} \\
&= \{(r,c)+R_1 \ltimes C_1 \mid s(r,c) \in R_1 \ltimes C_1\} \\
&= \{(r,c)+R_1 \ltimes C_1 \mid (r,0) \in R_1 \ltimes C_1\} \\
\text{Çek}\bar{t} &= \{(r,c)+R_1 \ltimes C_1 \mid \bar{t}((r,c)+R_1 \ltimes C_1) = R_1 \ltimes C_1\} \\
&= \{(r,c)+R_1 \ltimes C_1 \mid t(r,c) \in R_1 \ltimes C_1\} \\
&= \{(r,c)+R_1 \ltimes C_1 \mid (r+\partial(c),0) \in R_1 \ltimes C_1\}
\end{aligned}$$

olmak üzere $\overline{(r,c)} \in$Çek$\bar{s}$, $\overline{(r',c')} \in$Çek$\bar{t}$ için

$$\overline{(r,c)}\ \ \overline{(r',c')} = \overline{(r,c)(r',c')}$$

olup $(r,c)(r',c') \in R_1 \ltimes C_1$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
(r,c)(r',c') &= (rr', r\cdot c' + c\cdot r' + cc') \\
&= (rr', (r+\partial(c))\cdot c' + c\cdot r') \\
&\in R_1 \ltimes C_1 \ (\because (C_1,R_1,\partial) \trianglelefteq (C,R,\partial))
\end{aligned}$$

olup Çek$\bar{s}$Çek$\bar{t} = R_1 \ltimes C_1$ dir.

Önerme 4.12 : (Çek$s/$Çeks', Im$s/$Ims', $\widetilde{t}$) bir çaprazlanmış modüldür.

İspat :

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}:\ \text{Çek}s/\text{Çek}s' &\longrightarrow \text{Im}s/\text{Im}s' \\
a+\text{Çek}s' &\longmapsto t|_{\text{Çek}s}(a)+\text{Im}s'
\end{aligned}$$

cebir morfizmi

$$\begin{aligned}
\text{Im}s/\text{Im}s' \times \text{Çek}s/\text{Çek}s' &\longrightarrow \text{Çek}s/\text{Çek}s' \\
((b+\text{Im}s'),(a+\text{Çek}s')) &\longmapsto ba+\text{Çek}s'
\end{aligned}$$

etkisiyle çaprazlanmış modül şartlarını sağlar.

ÇM1)

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}((b+\text{Im}s')(a+\text{Çek}s')) &= \widetilde{t}(ba+\text{Çek}s') \\
&= t|_{\text{Çek}s}(ba)+\text{Im}s' \\
&= bt|_{\text{Çek}s}(a)+\text{Im}s' \ (\because t|_{\text{Çek}s} \text{ çap.mod.}) \\
&= (b+\text{Im}s')\widetilde{t}(a+\text{Çek}s')
\end{aligned}$$

ÇM2)

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}(a+\text{Çek}s')(a'+\text{Çek}s') &= (t|_{\text{Çek}s}(a)+\text{Im}s')(a'+\text{Çek}s') \\
&= t|_{\text{Çek}s}(a)a'+\text{Çek}s' \\
&= aa'+\text{Çek}s' \\
&= (a+\text{Çek}s')(a+\text{Çek}s')
\end{aligned}$$

Daha önce **XMod** kategorisinin topolojik karşılığı olan **TopXMod** kategorisini tanımlamıştık. Şimdi de $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ kategorisinin topolojik karşılığı olan $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})$ kategorisini tanımlayalım:

Tanım 4.13 : A bir topolojik K-cebir ve s,t; A üzerinde sürekli homomorfizmler olsun. Bu durumda (A,s,t) cat^1-cebirine *topolojik cat^1-cebir* denir.

Topolojik cat^1- cebirler arasındaki morfizmler şu şekilde tanımlıdır:

(A,s,t) ve (A',s',t') topolojik cat^1-cebirler olmak üzere $\phi : A \longrightarrow A'$ sürekli topolojik cebir morfizmi $s'\phi = \phi s$ ve $t'\phi = \phi t$ olacak şekilde varsa

$$\phi : (A,s,t) \longrightarrow (A',s',t')$$

morfizmine *topolojik cat^1-cebir morfizmi* denir. Böylece objeleri topolojik cat^1-cebirler ve morfizmleri topolojik cat^1-cebir morfizmleri olan bir kategori elde edilir. Bu kategori $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})$ ile gösterilir.

Doğal olarak;

$$\mathcal{U}_C : \mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir}) \longrightarrow \mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$$

biçiminde topoloji yapısını ihmal eden bir forgetfull funktor tanımlıdır.

Önerme 4.4 de bahsedilen **XMod** ile $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})$ kategorilerinin denkliğine benzer olarak **TopXMod** ile $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})$ kategorilerinin de denk olduğu gösterilebilir.

Önerme 4.14 : **TopXMod** ve $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir})$ kategorileri doğal denktir. Yani

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{TopXMod} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{U}_{XMod}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{U}_{\mathcal{C}}} \\
\mathbf{XMod} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Cat}^1(\mathbf{Cebir})
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

İspat :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{TopXMod} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathbf{Cat}^1(\mathbf{TopCebir}) \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

(C,R,∂); bir topolojik çaprazlanmış modül olmak üzere C ve R topolojik K-cebirler olup ∂ cebir homomorfizmi ve C üzerindeki R etkisi süreklidir. Dolayısıyla $R \ltimes C$ ve

$$s(r,c) = (r,0) \text{ ve } t(r,c) = (r+\partial(c),0)$$

olarak tanımlanırsa $R \ltimes C$ bir topolojik K-cebir olup s ve t sürekli homomorfizmlerdir. Diğer taraftan Önerme 4.4 gereğince $(R \ltimes C,s,t)$ bir cat^1-cebir olduğundan $(R \ltimes C,s,t)$ bir topolojik cat^1-cebirdir. Yani

$$F(C,R,\partial) = (R \ltimes C,s,t)$$

alınırsa, açıkça F bir funktor belirtir.

Tersine; (A,s,t) bir topolojik cat^1-cebir olmak üzere A bir topolojik K-cebir ve s,t sürekli homomorfizmlerdir. Buna göre Önerme 4.4 gereğince

$$(\text{Çeks}, s(A), \partial = t|_{\text{Çeks}})$$

bir çaprazlanmış modül olup A bir topolojik K-cebir ve s,t sürekli homomorfizmler olduğundan $(\text{Çeks}, s(A), \partial = t|_{\text{Çeks}})$ bir topolojik çaprazlanmış modüldür. Yani

$$G(A,s,t) = (\text{Çeks}, s(A), t|_{\text{Çeks}})$$

alınırsa açıkça G bir funktor belirtir. Böylece $F \circ G = id_{\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Top-Cebir})}$ ve $G \circ F = id_{\mathbf{Top-XMod}}$ olduğundan kategoriler izomorf dolayısıyla doğal denktirler.

4.4 Cat^1-Cebirlerin Adic Tamlaması

(A,s,t) bir topolojik cat^1-cebir ve $(I,s,t) \trianglelefteq (A,s,t)$ olsun. Bu kısımda (A,s,t) topolojik cat^1-cebirinin (I,s,t)-adic tamlamasının yani

$$\widetilde{(A,s,t)} = \varprojlim (A,s,t)/(I,s,t)^n$$

nın bir topolojik cat^1-cebir olduğunu göstereceğiz.

(A,s,t) bir topolojik cat^1-cebir olduğundan A bir topolojik K-cebir ve s,t sürekli homomorfizmlerdir. Buradan

$$\widetilde{(A,s,t)} = \varprojlim (A,s,t)/(I,s,t)^n$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rlcl} \overline{s_n}: & A/I^n & \longrightarrow & A/I^n \\ & a+I^n & \longmapsto & s(a)+I^n \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \overline{t_n}: & A/I^n & \longrightarrow & A/I^n \\ & a+I^n & \longmapsto & t(a)+I^n \end{array}$$

sürekli homomorfizmleri tanımlıdır. Burada bu homomorfizmlerin sürekliliği şu şekilde açıklanabilir:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "q"] \\ A/I^n \arrow[r, "\overline{s_n}"'] & A/I^n \end{tikzcd}$$

$\overline{s_n}q = qs$ olmak üzere $U; A/I^n$ de açık küme olmak üzere q ve s sürekli dönüşümler olduğundan $(qs)^{-1} = (s^{-1}q^{-1})(U); A/I^n$ de açıktır. Buradan $(\overline{s_n})^{-1}(U)$ nun açık olduğunu göstermeliyiz. Eğer

$$(\overline{s_n})^{-1}(U) = q((s^{-1}q^{-1})(U))$$

olduğunu gösterirsek q açık fonksiyon olduğundan $(\overline{s_n})^{-1}(U); A/I^n$ de açık olur.

$$q^{-1}(U) = \{a \in A \mid q(a) \in U\}$$

$$\begin{aligned} s^{-1}(q^{-1}(U)) &= \{a \in A \mid s(a) \in q^{-1}(U)\} \\ &= \{a \in A \mid q(s(a)) \in U\} \\ &= \{a \in A \mid s(a)+I^n \in U\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q((s^{-1}q^{-1})(U)) &= \{a+I^n \mid s(a)+I^n \in U\} \\ &= (\overline{s_n})^{-1}(U) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\overline{s_n}$ ve benzer şekilde $\overline{t_n}$ sürekli fonksiyonlardır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \widetilde{(A,s,t)} &= \varprojlim (A,s,t)/(I,s,t)^n \\ &= (\varprojlim A/I^n, \widetilde{s} = (\overline{s_n})_{n\in\mathbb{N}}, \widetilde{t} = (\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

bir topolojik cat[1]-cebirdir. Burada $\widetilde{s} = (\overline{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\widetilde{t} = (\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ olup $\overline{s_n}$ ve $\overline{t_n}$ sürekli olduğundan $\widetilde{s}$ ve $\widetilde{t}$ süreklidir. Ayrıca Bölüm 2' de ifade edildiği üzere $\varprojlim A/I^n = \widehat{A}_I$ olup topolojik K-cebirdir. Buna göre $\widetilde{(A,s,t)}$ nın cat[1]-cebir olduğunu göstermek yeterlidir.

CA-1) $\widetilde{s}\,\widetilde{t} = \widetilde{t}$ ve $\widetilde{t}\,\widetilde{s} = \widetilde{s}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
(\widetilde{s}\,\widetilde{t})(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} &= \widetilde{s}(\widetilde{t}(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \widetilde{s}((\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \widetilde{s}(\overline{t_n}(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= (\overline{s_n})_{n\in\mathbb{N}}(t(a_n)+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (s(t(a_n))+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (t(a_n)+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \widetilde{t}(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

olup $\widetilde{s}\,\widetilde{t} = \widetilde{t}$ olur. Benzer şekilde $\widetilde{t}\,\widetilde{s} = \widetilde{s}$ dir.

CA-2) Çek$\widetilde{s}$Çek$\widetilde{t} = (I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\overline{s_n} &= \{a+I^n \mid \overline{s_n}(a+I^n) = I^n\} \\
&= \{a+I^n \mid s(a) \in I^n\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\overline{t_n} &= \{b+I^n \mid \overline{t_n}(b+I^n) = I^n\} \\
&= \{b+I^n \mid t(b) \in I^n\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\widetilde{s} &= \{(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \widetilde{s}((a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}}) = (I^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\
&= \{(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\overline{s_n})_{n\in\mathbb{N}}((a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}}) = (I^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\
&= \{(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\overline{s_n}(a_n+I^n))_{n\in\mathbb{N}} = (I^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\
&= \{(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (s(a_n)+I^n)_{n\in\mathbb{N}} = (I^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\
&= \{(a_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } s(a_n) \in I^n\} \\
&= (\text{Çek}\overline{s_n})_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\widetilde{t} &= \{(b_n+I^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } t(b_n) \in I^n\} \\
&= (\text{Çek}\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

olup Çek$s$Çek$t=\{0_A\}$ ve bölüm cat^1-cebir tanımı gereği $(A/I^n,\overline{s_n},\overline{t_n})$ bir cat^1-cebir olduğundan

$$\text{Çek}\overline{s_n}\text{Çek}\overline{t_n}=I^n$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\text{Çek}\widetilde{s}\text{Çek}\widetilde{t} &= (\text{Çek}\overline{s_n})_{n\in\mathbb{N}}(\text{Çek}\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\text{Çek}\overline{s_n}\text{Çek}\overline{t_n})_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (I^n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

olup CA-2 şartı sağlanır.

Böylece $\widetilde{(A,s,t)}$ bir topolojik cat^1-cebirdir.

4.5 Çaprazlanmış Modüllerin Adic Tamlaması

(C,R,∂) bir topolojik çaprazlanmış modül ve $(C_1,R_1,\partial)\trianglelefteq(C,R,\partial)$ olsun. Bu kısımda (C,R,∂) topolojik çaprazlanmış modülünün (C_1,R_1,∂)-adic tamlamasının yani

$$\begin{aligned}\widetilde{(C,R,\partial)} &= \varprojlim(C,R,\partial)/(C_1,R_1,\partial)^n\\ &= (\varprojlim C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>,\varprojlim R/R_1^n,\widetilde{\partial})\\ &= (\widetilde{C},\widetilde{R},\widetilde{\partial})\end{aligned}$$

nın bir topolojik çaprazlanmış modül olduğunu göstereceğiz.

(C,R,∂) bir topolojik çaprazlanmış modül olduğundan C ve R birer topolojik cebir olup ∂ ile $R\times C\longrightarrow C$ etkisi süreklidir. Buradan

$$\widetilde{(C,R,\partial)}=(\varprojlim C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>,\varprojlim R/R_1^n,\widetilde{\partial})$$

olmak üzere $\widetilde{(C,R,\partial)}$ nin bir topolojik çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim:

Burada Bölüm 2' de ifade edildiği üzere $\varprojlim C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>$ ve $\varprojlim R/R_1^n$ birer topolojik cebirdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial}_n:\ C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)> &\longrightarrow R/R_1^n\\ c+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)> &\longmapsto \partial(c)+R_1^n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\cdot_n:\ R/R_1^n\times C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)> &\longrightarrow C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>\\ (r+R_1^n,c+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>) &\longmapsto r\cdot c+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>\end{aligned}$$

olmak üzere cat[1]-cebirlerin adic tamlamasında da ifade edildiği gibi $\widetilde{\partial_n}$ ile $\cdot_n$ süreklidir. Böylece

$$\cdot : \varprojlim R/R_1^n \times \varprojlim C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)> \quad \longrightarrow \quad \varprojlim C/<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>$$

olmak üzere

$$\widetilde{\partial} = (\widetilde{\partial_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ ve } (\cdot) = (\cdot_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

alınırsa $\widetilde{\partial}$ ile $(\cdot)$ sürekli olurlar. Diğer taraftan çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır. Çünkü;

ÇM1)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\partial}((r_n+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}}(\cdot_n)_{n\in\mathbb{N}}(c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= (\widetilde{\partial_n})_{n\in\mathbb{N}}((r_n\cdot c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= (\widetilde{\partial_n}(r_n\cdot c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\partial(r_n\cdot c_n)+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (r_n\partial(c_n)+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= ((r_n+R_1^n)(\partial(c_n)+R_1^n))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (r_n+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{\partial_n}(c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (r_n+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{\partial_n})_{n\in\mathbb{N}}(c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (r_n+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{\partial}(c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

ÇM2)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\partial}((c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}})(\cdot_n)_{n\in\mathbb{N}}(c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\widetilde{\partial_n})_{n\in\mathbb{N}}(c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}}(\cdot_n)_{n\in\mathbb{N}}(c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\widetilde{\partial_n}(c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>))_{n\in\mathbb{N}}(\cdot_n)_{n\in\mathbb{N}}(c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\partial(c_n)+R_1^n)_{n\in\mathbb{N}}(\cdot_n)_{n\in\mathbb{N}}(c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\partial(c_n)\cdot c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (c_nc_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= ((c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)(c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (c_n+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}}(c_n'+<D_{R_1^{n-1}}(C_1)>)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla $\widetilde{(C,R,\partial)}$ bir topolojik çaprazlanmış modüldür.

Örnek 4.1 : (C,C,id) bir topolojik çaprazlanmış modül olmak üzere $I \trianglelefteq C$ için $(I,I,id) \trianglelefteq (C,C,id)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\widetilde{(C,C,id)} &= \varprojlim (C,C,id)/(I,I,id)^n \\
&= (\varprojlim C/<D_{I^{n-1}}(I)>, \varprojlim C/I^n, id)
\end{aligned}$$

olup $<D_{I^{n-1}}(I)>=I^n$ olduğundan

$$\widetilde{(C,C,id)} = (\varprojlim C/I^n, \varprojlim C/I^n, id)$$

elde edilir. Burada özel olarak $C = \mathbb{Z}$ ve $I = p\mathbb{Z}$ alınırsa

$$(\widetilde{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, id}) = (\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, id)$$

olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Arvasi, Z., Crossed Square and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Theory and Applications of Categories, (7) 3 (1997), 160-181 3

[2] Arvasi, Z. and Porter, T., Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, Journal of Algebras, 181 (1996), 426-448 3

[3] Arvasi, Z. and Porter, T., Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Applied Categorical Structure, 6 (1998), 455-471 3

[4] Arslan Ege, U., Çarpım Cebiri ve Çaprazlanmış Modüller, Doktora Tezi, (2002) 29

[5] Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, (1969) 2, 17

[6] Bourbaki, N., Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, (1972) 2, 17

[7] Balachandran, V.K., Topological Algebras, Elsevier, (2000) 4

[8] Eisenbud, D., Commutative Algebra, Springer-Verlag, (1960) 2, 13, 17

[9] Gerstenhaber, M., On the Deformation of Rings and Algebras, Ann.Math., 84 (1966) 3

[10] Gürmen, Ö., Geri Çekme, İleri İtme Çaprazlanmış Modüller, Cat^1-Cebirler ve Simplisel Cebirler, Doktora Tezi, (2007) 56

[11] Korkes, F.J. and Porter, T., Pro-C Completions of Crossed Modules, Edinburgh Math. Society, 33 (1990), 39-51 1, 56

[12] Lichtenbaum, S., and Schlessinger, M., The Cotangent Complex of a Morphism, Trans.American Society, 128 (1967), 41-70 3

[13] Matsumura, H., Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, (1986) 2, 17

[14] Matsumura, H., Commutative Algebra Second Section, The Benjamin/Cummings Publishing Company, (1980) 2, 17

[15] Mucuk, O., Topoloji, Nobel Yayınevi, 2009, 317-349 4

[16] Porter, T., Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J.Algebra, 99 (1986), 458-465 29

[17] Porter, T., Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 99 (1986), 458-465 3

[18] Ribes, L. and Zalesskii, P., Profinite Groups, Springer, (2000) 4, 18

[19] Shammu, N.M., Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras, Ph.D Thesis, (1992) 29

[20] Uslu, E., Değişmeli Cebirler Üzerinde Profinite Çaprazlanmış Modüller, Yükseklisans Tezi, (2001) 56

[21] Whitehead, J.H.C., Combinatorial Homotopy II, Bull. American Math. Society, 55 (1949), 453-456 3, 29