# Sonlu Projektif Düzlemlerde Bazı Alt Yapılar Üzerine

**Gökçe GÖKGÖZ GÜL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı**
**Haziran 2013**

# On Some Substructures of Finite Projective Planes

Gökçe GÖKGÖZ GÜL

**MASTER OF SCIENCE THESIS**
**Department of Mathematics and Computer Sciences**
**June 2013**

# Sonlu Projektif Düzlemlerde Bazı Alt Yapılar Üzerine

**Gökçe GÖKGÖZ GÜL**

**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca**

**Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı**

**Geometri Bilim Dalında**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Olarak Hazırlanmıştır**

**Danışman: Doç. Dr. Ayşe BAYAR**

**Haziran 2013**

# ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Gökçe GÖKGÖZ GÜL' nın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Sonlu Projektif Düzlemlerde Bazı Alt Yapılar Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

**İkinci Danışman** : –

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

**Üye :** Prof. Dr. Ziya AKÇA

**Üye :** Doç. Dr. Ayşe BAYAR

**Üye :** Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

**Üye :** Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .......................... tarih ve ....................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

# ÖZET

Bu tezde, projektif düzlemlerdeki bazı alt yapılar olan arklar maksimal arklar ve konikler incelenmiştir.

Birinci bölümde projektif düzlemlerle ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde projektif düzlemlerdeki ark ve maksimal ark kavramları ele alınıp maksimal arklarla ilgili örnekler, teoremler ve ispatları verilmiştir.

Son bölümde de projektif düzlemlerde konikler incelenip arklarla konikler arasındaki ilişkiler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Maksimal Arklar, Konikler

# SUMMARY

In this thesis; arcs, maximal arcs and conics in projective planes have been examined. In the first section, some notion in projective planes have been presented.. In the second section, arcs and maximal arcs in projective planes have been examined. Examples, theorems and proofs relationships of maksimal arcs have been explained. In the last section, conics in projective planes have been examined. Then some relationships of arcs and conics has been presented.

Keywords: Maximal Arcs, Conics

# TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

**Doç. Dr. Ayşe BAYAR** 'a;

tüm hayatım boyunca desteğini benden hiç bir zaman esirgemeyen

**sevgili aileme**,

ve her kararımda yanımda olan

**eşime**

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# BÖLÜM 0

# GİRİŞ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Ana konusu sonlu projektif düzlemlerdeki alt yapılar olan maksimal ark ve koniklerdir.

Birinci bölümde tez boyunca kullanacağımız bazı temel kavramlar verilmiştir. Öncelikle işlemler, cisim, vektör uzayı ve lineer alt uzay tanımlanmıştır. Daha sonra afin düzlem, projektif düzlem, cisim düzlemleri ve Fano düzlemi tanımları verilip örnekler incelenmiştir. Projektif düzlemlerde duallik ilkesinde bahsedilmiştir. Afin düzleme ideal doğru (sonsuz doğru) ve ideal doğrunun yeni noktaları olan ideal nokta (sonsuz nokta) eklenerek projektif düzleme elde edilişi anlatılmıştır.

İkinci bölümde projektif düzlemlerdeki ark ve maksimal ark tanımı verilip maksimal arklar incelenmiştir. Bir projektif düzlemden bir ark elde edilişi açıklanmıştır. Arkların özel durumlarına göre oval veya hiperoval olabileceğinden bahsedilmiştir. Daha sonra maksimal arklarla ilgili örnekler, teoremler ve ispatları verilmiştir.

Son bölümde projektif düzlemde konikler incelenmiştir. Projektif düzlemdeki bir koniğin denklemi ve matris formu verilmiştir. Projektif düzlemdeki bir konik denkleminden verilen bir homografi uygulanarak yeni bir konik denkleminin nasıl elde edildiği açıklanmıştır. Daha sonra da arklarla konikler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

# BÖLÜM 1

# BAZI TEMEL KAVRAMLAR

## 1.1 İşlemler ve Cebirsel Yapılar

**Tanım 1.1** $A$ boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ nın boş olmayan bir alt kümesi $\alpha$ olsun. $\alpha$ dan $A$ kümesine herhangi bir fonksiyona $A$ da bir **ikili işlem** ya da kısaca bir **işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A \times A$ nın herhangi bir $(a,b)$ elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a+b$, $ab$, $a.b$, $a \circ b$, $a \oplus b$, $a \odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).

**Örnek 1.1** En çok bilinen ikili işlem örnekleri tamsayıların (ve gerçel sayıların) toplama, çıkarma ve çarpma işlemleridir. Bölme işlemi tamsayılar içinde bir ikili işlem değildir.

**Örnek 1.2** Gerçel girdili $2 \times 2$ matrislerden oluşan $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ( daha genel olarak n×n matrislerden oluşan $\mathbb{R}^{n\times n}$ ) kümesi içinde matris toplamı ve matris çarpımı ilginç ikili işlem örnekleridir.

**Tanım 1.2** Bir $A$ kümesinde tanımlı bir $\circ$ işlemi verilmiş olsun. $x \circ y$ nin tanımlı olduğu her $(x,y)$ için $y \circ x$ de tanımlı ve

$$x \circ y = y \circ x$$

önermesi doğru ise $\circ$ işleminin **değişme özelliği vardır**, denir. Değişme özelliği bulunan bir işleme değişmeli işlem denir (Karakaş, 1998).

**Tanım 1.3** Bir $A$ kümesinde tanımlı bir $\circ$ işlemi verilmiş olsun. $(x \circ y) \circ z$ nin tanımlı olduğu her $x, y, z$ için $x \circ (y \circ z)$ de tanımlı ve

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

önermesi doğru ise $\circ$ işleminin **birleşme özelliği vardır**, denir (Karakaş, 1998).

**Örnek 1.3** Gerçel sayıların toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliğine sahip oldukları bilinmektedir. Çıkarma işleminin birleşme özelliği yoktur. Matris toplamı ve matris çarpımı, gerçel girdili matrisler üzerinde birleşme özelliğine sahiptirler. Gerçel sayıların toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği vardır. Çıkarma işleminin değişme özelliği yoktur. Gerçel girdili matrisler için matris toplamı işleminin değişme özelliği vardır, ancak matris çarpımı işleminin değişme özelliği yoktur.

**Tanım 1.4** $F$ boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+$ ve $\cdot$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F,+,\cdot)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu üçlüye **cisim** adı verilir.

C1) Her $a,b \in F$ için $a+b=b+a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ dır.

C2) Her $a,b,c \in F$ için $(a+b)+c = a+(b+c)$ ve $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dır.

C3) Her $a,b,c \in F$ için $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dır.

C4) $F$ kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki, her $a \in F$ için $a+0=a$ eşitliğini sağlar.

C5) $F$ kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı her $a \in F$ için $a \cdot 1 = a$ eşitliğini sağlar.

C6) Her $a \in F$ elemanı için, $F$ kümesinde öyle bir $-a$ elemanı vardır ki, $a+(-a)=0$ eşitliğini sağlar.

C7) Her $0 \neq a \in F$ için, $F$ kümesinde öyle bir $a^{-1}$ elemanı vardır ki, $a \cdot a^{-1} = 1$ eşitliğini sağlar.

**Örnek 1.4** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer cisim iken $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

**Tanım 1.5** $V \neq \varnothing$ bir küme ve $F$ bir cisim olsun. $+ : V \times V \to V$ ve $\cdot : F \times V \to V$ iki fonksiyon olmak üzere $(V,F,+,\cdot)$ dörtlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dörtlüye bir **vektör uzayı** adı verilir.

V1) Her $x,y \in V$ için $x+y=y+x$ dir.

V2) Her $x,y,z \in V$ için $(x+y)+z = x+(y+z)$ dir.

V3) Her $x \in V$ için $x+\theta = x$ olacak şekilde $V$ de en az bir $\theta$ elemanı vardır.

V4) Her $x \in V$ elemanı için, $x+y=\theta$ eşitliğini sağlayan $V$ de en az bir $y$ elemanı vardır.

V5) Her $a,b \in F$ ve her $x \in V$ için $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ dir.

V6) Her $a,b \in F$ ve her $x \in V$ için $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ dir.

V7) Her $a \in F$ ve her $x, y \in V$ için $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$ dir.

V8) Her $x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir.

**Örnek 1.5** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer vektör uzayıdır. n$\in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

**Tanım 1.6** $V$ bir vektör uzayı ve $U$ bunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $U$ kümesine $V$ nin bir **lineer alt uzayı** denir.

1) $x \in U$ ve $y \in U$ iken $x + y \in U$ dır.

2) $x \in U$ ve $r \in \mathbb{R}$ iken $rx \in U$ dır.

Bu iki işlemden anlaşıldığı gibi $U$ nun elemanlarına iki temel işlem uygulandığında yine $U$ nun elemanları elde edilir. Eğer $V$ bir kompleks vektör uzayı ise (2) koşulu, $x \in U$ ve $r \in \mathbb{C}$ iken $rx \in U$ şeklinde değiştirilir (Smith, 1977).

**Örnek 1.6** (1) $V$ daima kendisinin bir alt uzayıdır.

(2) Yalnız sıfır vektöründen oluşan $\{0\}$ kümesi, her zaman $V$ nin bir alt uzayıdır.

## 1.2 Çeşitli Geometrik Yapılar

**Tanım 1.7** Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ üzerinde bir $\circ$ bağıntısından meydana gelen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ üçlüsüne bir **geometrik yapı** denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$ gibi büyük harflerle, $\mathcal{D}$ nin elemanları $a$, $b$, $c, ...,$ $x$, $y$, $z, ...$ gibi küçük harflerle gösterilir.

**Tanım 1.8** $N_1, N_2, N_3, ... \in N$ noktaları için $N_i \circ d$, $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara **doğrudaş noktalar** denir.

**Tanım 1.9** $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $\mathcal{N} \circ d_1$ ve $\mathcal{N} \circ d_2$ olacak şekilde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yoksa $d_1$ve $d_2$ ye **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir. Buna karşın $d_1 \parallel d_2$ değilse $d_1 \nparallel d_2$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

**Tanım 1.10 ( Afin Düzlem)** $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine bir **afin düzlem** denir (Kaya, 2005).

A1) Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

**Teorem 1.11** Verilen her $F$ cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır ve bu düzlem $\mathbb{A}_2F$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

**Örnek 1.7** Öklid düzlemi bir afin düzlemdir. Çünkü "Verilen her $F$ cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır." teoreminde $F$ cismi yerine gerçel sayılar cismi $\mathbb{R}$ alındığında öklid düzleminin analitik gösterimi bulunmaktadır. Gerçek afin düzlem adıyla da anılan bu düzlem $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.12** Her sonlu $\mathbb{A}$ düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan $n \geq 2$ tamsayısı vardır ve bu tamsayıya $\mathbb{A}$ nın mertebesi denir (Kaya, 2005).

(1) $\mathbb{A}$ nın her doğrusu üzerinde tam olarak $n$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{A}$ nın her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{A}$ daki noktaların toplam sayısı $n^2$ dir.

(4) $\mathbb{A}$ daki doğruların tam sayısı $n^2+n$ dir.

**Örnek 1.8** $\mathcal{N} = \{A,B,C,D\}$, $\mathcal{D} = \{AB,AC,AD,BC,BD,CD\}$ve $\circ = \in$ olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir afin düzlemdir. Bu en küçük afin düzlemdir (Kaya, 2005).

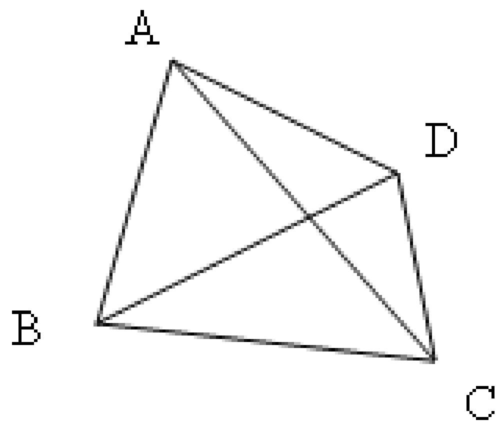
A1) $A$ ve $D$ farklı nokta çiftini ele alalım. $A$ ve $D$ noktalarından geçen bir tek $AD$ doğrusu vardır. $A$ ve $D$ noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) $D$ noktası ve $BC$ doğrusunu ele alalım. $D$ noktasından geçen ve $BC$ doğrusuna paralel olan $AD$ doğrusundan başka bir doğru çizilemez. Diğer nokta ve doğrular içinde bu durum geçerlidir. O halde bu düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilir. Diğer yandan bu düzlemde $AC \parallel BD$ dir.

A3) $B,D$ ve $C$ noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır.

Buradan şu sonuçlara varılır:

Dört noktalı bir afin düzlem vardır ve bu en küçük afin düzlemdir. En küçük afin düzlemin mertebesi 2 dir. Bir afin düzlemde bir nokta en az üç doğru üzerinde bulunur. Afin düzlem Şekil 1.1 de gösterilmiştir.




**Şekil 1.1.** Afin Düzlem

**Teorem 1.13** $F$ herhangi bir cisim olsun. Bu $F$ cismi yardımıyla analitik olarak tanımlanan

$$\mathcal{N} = F \times F = \{(x,y) : x,y \in F\}$$

$$\mathcal{D} = \{[m,b] : m,b \in F\} \cup \{[a] : a \in F\}$$

ve üzerinde bulunma bağıntısı

$$(x,y) \circ [m,b] \Leftrightarrow y = mx + b$$

$$(x,y) \circ [a] \Leftrightarrow x = a$$

ile verilen ($\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$,$\circ$) sistemi bir afin düzlemdir (Kaya, 2005).

$F = GF(p^r)$ sonlu cisimleri yardımıyla tanımlanan sonlu afin düzlemler vardır (Kaya, 2005).

**Örnek 1.9** $F = GF(3)$ olmak üzere $\mathbb{A}_2 F$ düzleminin noktaları ( karşılarında da üzerinde bulundukları doğrular gösterilmiş biçimde ) şunlardır (Kaya, 2005).

$$\begin{aligned}
(0,0) &: [0,0],[1,0],[2,0],[0] \\
(0,1) &: [0,1],[1,1],[2,1],[0] \\
(0,2) &: [0,2],[1,2],[2,2],[0] \\
(1,0) &: [0,0],[1,2],[2,1],[1] \\
(1,1) &: [0,1],[1,0],[2,2],[1] \\
(1,2) &: [0,2],[1,1],[2,0],[1] \\
(2,0) &: [0,0],[1,1],[2,2],[2] \\
(2,1) &: [0,1],[1,2],[2,0],[2] \\
(2,2) &: [0,2],[1,0],[2,1],[2]
\end{aligned}$$

A1) $(0,0)$ ve $(0,1)$ farklı iki nokta çiftini ele alalım. $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçen bir tek $[0]$ doğrusu vardır. $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) $(0,0)$ noktası ve $[1,1]$ doğrusunu ele alalım. $(0,0)$ noktasından geçen ve $[1,1]$ doğrusuna paralel olan $[1,2]$ doğrusundan başka bir doğru çizilemez. Diğer nokta ve doğrular içinde bu durum geçerlidir. O halde bu düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilir.

A3) $(0,0),(0,1)$ ve $(1,0)$ noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır.

**Tanım 1.14 (Projektif Düzlem)** $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir **projektif düzlem** denir (Kaya, 2005).

P1: Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: İki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

**Teorem 1.15** Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.16** Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır ve bu tamsayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir (Kaya, 2005).

(1) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{P}$ nin her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{P}$ deki noktaların toplam sayısı $n^2+n+1$ dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki doğruların tam sayısı $n^2+n+1$ dir.

**Tanım 1.17** $S$ bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. $S$ de ”nokta” yerine ”doğru” ve ”doğru” yerine ”nokta” koyarak bılunan yeni ifadeye $S$ nin **dual ifadesi** denir ve bu $S^*$ ile gösterilir.

Bu tanımdan hemen şu çıkar: birbirlerinin duali olan nokta ve doğru kavramlarından başka aşağıda yanyana yazılan kavramlar birbirlerinin duali olup dual ifade bulunurken onlarında yer değiştirmeleri gerekir (Kaya, 2005).

| | | |
|---|---|---|
| noktadaş | – | doğrudaş |
| $\vee$, birleşme | – | $\wedge$, kesişme |
| ...üzerinde bulunur | – | ...dan geçer |

**Teorem 1.18 ( Projektif düzlemlerde duallik ilkesi )** Bir projektif düzleme ilişkin her teoremin ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir (Kaya, 2005).

**Sonuç 1.19** Eğer $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlemse $\mathbb{P}^* = (\mathcal{D}, \mathcal{N}, \circ^{-1})$ de bir projektif düzlemdir. $\mathbb{P}^*$ a, $\mathbb{P}$ nin **dual projektif düzlemi** denir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.20** Verilen her $F$ cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır.

$F$ herhangi bir cisim olsun.

$\mathcal{N} = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3 \in F, (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0), (x_1,x_2,x_3) \equiv \lambda(x_1,x_2,x_3),$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$\mathcal{D} = \{[a_1,a_2,a_3] : a_1,a_2,a_3 \in F, [a_1,a_2,a_3] \neq [0,0,0], [a_1,a_2,a_3] \equiv \lambda[a_1,a_2,a_3],$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}\}$

$(x_1,x_2,x_3) \circ [a_1,a_2,a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemi bir projektif düzlemdir. $F$ cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere **cisim düzlemleri** denir ve genel olarak $\mathbb{P}_2F$ ile gösterilir. Özel olarak $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{Q}$ cisimleri için $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ kompleks projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ rasyonel projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005).

Yukarıdaki teoremlerden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.

**Sonuç 1.21** $r$ pozitif bir tam sayı $p$ de bir asal sayı olmak üzere $p^r$ elemanlı $GF(p^r)$ cismi var olduğu için bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde

$$\frac{(p^r)^3-1}{p^r-1} = (p^r)^2 + p^r + 1 \qquad (1.1)$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin $p^r$ olduğunu gösterir. Yani her $r$ pozitif tam sayısı ve her $p$ asal sayısı için mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşın cisimler yardımıyla elde edilen bir çok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri $p^r$ biçiminde yazılabilen pozitif tam sayılardır (Kaya, 2005).

**Örnek 1.10** En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.

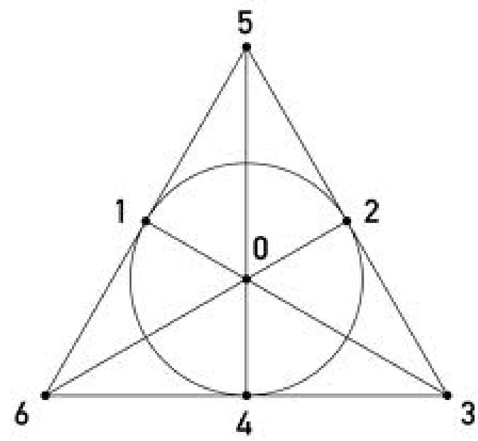
$$\mathcal{N} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$\mathcal{D} = \{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7\}$$

ve

$$\begin{array}{llll} d_1 = \{3,4,6\} \;, & d_2 = \{1,5,6\} \;, & d_3 = \{0,6,2\} \;, & d_4 = \{0,4,5\} \\ d_5 = \{0,1,3\} \;, & d_6 = \{2,3,5\} \;, & d_7 = \{1,2,4\} & \end{array}$$

olmak üzere $(\mathcal{N},\mathcal{D},\in)$ sistemi bir projektif düzlemdir. Yedi noktalı bu projektif düzleme **Fano Düzlemi** denir ve Şekil 1.2 deki gibi gösterilir (Kaya, 2005).




**Şekil 1.2.** Fano Düzlemi

P1) 4 ve 6 farklı nokta çiftini ele alalım. 4 ve 6 dan geçen bir tek $d_1$ doğrusu vardır. 4 ve 6 noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

P2) $d_1$ ve $d_2$ doğrularını ele alalım. Bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 6 dır. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

P3) $1,2,3$ ve 6 noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.

**Örnek 1.11** $F = GF(2)$ olmak üzere $\mathbb{P}_2F$ düzleminin noktaları $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ üçlülerinden oluşur. Doğruları da aynı üçlülerden ibarettir. Aşağıda her doğrunun üzerinde bulunan noktalar yanında gösterilmektedir.

$$[0,0,1] \qquad (0,1,0),(1,0,0),(1,1,0)$$

$$[0,1,0] \qquad (0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$$

$$[1,0,0] \qquad (0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)$$

$$[0,1,1] \qquad (0,1,1),(1,0,0),(1,1,1)$$

$$[1,0,1] \qquad (0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)$$

$$[1,1,0] \qquad (0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)$$

$$[1,1,1] \qquad (0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$$

$\mathbb{P}_2F$ bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.22** $K$ bir cisim ve $V$, $K$ üzerinde üç boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V$ nin tüm bir ve iki boyutlu alt uzaylarını içeren $PG\ (V)$ bir projektif düzlemdir.

$PG\ (V)$, iki boyutlu olduğundan aynı zamanda $PG\ (2,K)$ ile gösterilir. Boyuttan dolayı bir boyutlu alt uzaylara noktalar, iki boyutlu alt uzaylara ise doğrular denir. Şimdi $PG\ (V)$ nin özellikleri incelenebilir.

$PG\ (V)$ de birbirinden farklı $A$ ve $B$ noktaları için bu iki noktayı içeren tek bir $L$ doğrusu vardır. Çünkü $A$ ve $B$, $V$ nin birbirinden farklı bir boyutlu iki altuzayıdır ve bunlar tarafından gerilen tek bir iki boyutlu $L$ alt uzayı vardır.

$PG\ (V)$ de $L$ ve $M$ gibi farklı iki doğru için bu doğrular üzerinde bulunan tek bir $A$ noktası vardır. Çünkü $L$ ve $M$, $V$ nin birbirinden farklı iki boyutlu iki altuzayıdır ve bunlar tek bir, bir boyutlu $A$ altuzayında kesişirler.

Son olarak altı farklı doğru belirten dört nokta vardır. Gerçekten de $V$ deki koordinatları belirledikten sonra sırasıyla $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ vektörleri tarafından üretilen vektör doğrularını alabiliriz. Çünkü bunların herhangi üçü $V$ de düzlemdeş değildir (Akça, Bayar, Ekmekçi, Maldeghem, 2006).

**Tanım 1.23** Bir afin düzleme bir takım yeni noktalar ve bütün bu yeni noktaları üzerinde bulunduran tek bir doğru katarak bir projektif düzlemin nasıl elde edildiğini görelim. Afin düzleme katılacak doğruya **ideal doğru** ya da **sonsuzdaki doğru**, yeni noktaların her birine de **ideal nokta** ya da **sonsuzdaki nokta** denir. Buradaki sonsuz deyimi biraz sonra anlaşılacağı gibi (gerçel düzlem ve bir kaç hal hariç) uzaklıkla ilgili değildir. $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir afin düzlem olsun. Bu düzlemde birbirine paralel olan bütün doğrular kümesine bir **paralel doğru demeti** denir. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularının üzerinde bulunan ama $\mathcal{N}$ de bulunmayan yeni bir nokta göz önüne alalım. Böylece düzleme her doğrultuda yeni bir (ideal) nokta katılmış olur. Afin düzleme ideal noktalar katılırken $\mathbb{A}$ nın her $d$ doğrusu bir nokta ile genişletildi. $d$ doğrusu ve $d$ ye paralel tüm doğrular üzerine koyulan bu ideal nokta $D_\infty$ ile gösterilir. Tüm ideal noktaların üzerinde bulunduğu ideal doğruyu da $d_\infty$ ile göstererek $\mathbb{A}$ ya katalım. Böylece $\mathbb{A}$ daki $\circ$ bağıntısıda biraz genişletilerek (ki bu şimdilik $\circ$ ile gösterilir) bir $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ)$ sistemi elde edilir. Buna $A$ **nın tamamlanmışı** denir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.24** Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.25** Bir projektif düzlemden herhangi bir doğru ve üzerinde bulunan tüm noktalar çıkarılırsa geriye kalan geometrik yapı bir afin düzlemdir (Kaya, 2005).

**Tanım 1.26** $\mathbb{P}$ ve $\mathbb{P}'$ herhangi iki projektif düzlem olsun. $\mathbb{P}$ den $\mathbb{P}'$ ye $\mathbb{P}$ nin noktalarını $\mathbb{P}'$ nin noktalarına, $\mathbb{P}$ nin doğrularını $\mathbb{P}'$ nin doğrularına dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa bu **projektif (afin) düzlemler izomorftur** denir; bu fonksiyona da $\mathbb{P}$ den $\mathbb{P}'$ ye giden bir **izomorfizm** denir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.27** $\mathbb{A}_2F$ afin düzleminin tamamlanmışı $\mathbb{P}_2F$ projektif düzlemine izomorftur (Kaya, 2005).

**Sonuç 1.28** $\mathbb{A}_2F$ afin düzlemi $\mathbb{P}_2F$ projektif düzleminden $[0,0,1]$ doğrusu ve $(x_1,x_2,0)$ noktalarının çıkarılmasıyla elde edilen yapıya izomorftur (Kaya, 2005).

Özel olarak $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ den $x_3 = 0$ özelliğine sahip noktalar ve $[0,0,1]$ doğrusu atılarak $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ öklid düzlemi (gerçel afin düzlem ) bulunur veya $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzlemine ideal doğru ve noktalarının katılmasıyla $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlemi elde edilir. Dolayısıyla Öklid düzlemin noktaları $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x_1,x_2,1)$ biçiminde homogen koordinatlarla belirtilebilir. Öklid düzlemin doğruları da $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ denklemiyle belirtilebilir. $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ projektif düzlemi, Öklid düzleminin genişletilmesidir (Kaya, 2005).

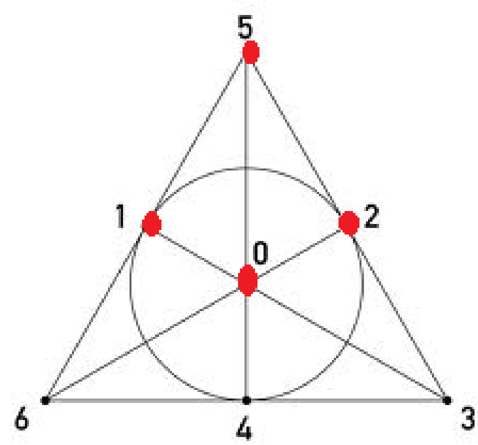
# BÖLÜM 2

# PROJEKTİF DÜZLEMLERDEKi MAKSİMAL ARKLAR

**Tanım 2.1** $PG(2,q)$ da herhangi üçü doğrudaş olmayan $k$ noktalı küme $k$-ark olarak adlandırılır (Casse, 2006).

**Tanım 2.2** Projektif düzlemin her doğrusu $k$-ark' ı en çok $n$ tane noktada kesiyorsa bu arka $\{k;n\}-$ ark denir (Hoadley, 2003).

**Örnek 2.1** 2. mertebeden en küçük projektif düzlem olan Fano düzleminin herhangi üçü doğrudaş olmayan en çok 4 noktası vardır. Bu yüzden Fano düzlemi 4-ark içerir. Şekil 1.3 te Fano düzleminin noktalarının $\{0,1,2,5\}$ kümesi bir 4-ark belirtir.




**Şekil 1.3.** Fano Düzlemi

**Tanım 2.3** $PG(2,q)$ da bir $\{k,n\}-$ ark ile $m$ noktada kesişen doğru $m$-sekant olarak adlandırılır (Hoadley, 2003).

**Teorem 2.4** **(Tallini Scafati)** $K$, $q$. mertebeden projektif düzlemde bir $\{k;n\}-$ ark ise

$$k \leq (q+1)(n-1)+1$$

eşitsizliğini sağlanır (Hoadley, 2003).

**İspat** $P, K$ nin herhangi bir noktası olsun. Bu durumda $P$ noktasından projektif düzlemin $(q+1)$ tane doğrusu geçer. Bu doğrular $K$ yı en çok $P$ hariç $(n-1)$ noktada keserler. Dolayısıyla $(q+1)$ doğrunun herbirinin üzerinde $K$ ya ait $P$ noktası hariç ençok $(n-1)$ nokta vardır. $P$ noktası da katılırsa

$$k \leq (q+1)(n-1)+1$$

elde edilir. □

**Örnek 2.2** Fano düzlemi 2. mertebeden bir projektif düzlem olduğundan $q = 2$ dir. *Örnek* 2.1 de 4-ark örneği verildi. Şekil 1.3. de görüldüğü gibi Fano düzleminde herhangi bir noktadan 3 doğru geçer ve herhangi üçü doğrudaş olmayan k noktalı kümeyi en çok 2 noktada keser. Bu durumda Fano düzleminde $n = 2$ dir. $k \leq (q+1)(n-1)+1$ eşitsizliğinde yerine konulursa

$$k \leq 3.1+1 = 4$$

sağlanır. Böylece Fano düzlemi bir $\{4;2\}$ ark içerir. Yani Fano düzleminde bir ark en çok 4 noktaya sahiptir.

**Tanım 2.5** $K$, $q$. mertebeden projektif düzlemde bir $\{k;n\}$ ark olsun. Eğer $K$,

$$k = (q+1)(n-1)+1$$

eşitliğini sağlıyorsa $K$ maksimal ark olarak isimlendirilir (Hoadley, 2003).

**Örnek 2.3** Fano düzlemindeki $\{4;2\}-$ arklar maksimal arklardır. Şekil 1.3 te Fano düzleminin noktalarının $\{0,1,2,5\}$ kümesi bir maksimal arktır.

**Teorem 2.6** $K$ , $q$. mertebeden bir projektif düzlemde $\{k;n\}$ bir maksimal ark ise, her doğru $K$ yı ya hiç kesmez ya da $n$ tane noktada keser (Hoadley, 2003).

**İspat** $K$, $q$. mertebeden bir projektif düzlemde bir maksimal $\{k;n\}$ ark olsun. Herhangi bir $l$ doğrusunun $K$ yı $m$ nin $1 \leq m < n$ aralığında $m$ noktada kestiğini farzedelim. $P$, $K$ arkında ve $l$ doğrusu üzerinde olan bir nokta olsun. $P$ den geçen $q+1$ doğru olduğundan $P$ noktası $l$ nin dışında $q$ tane doğru üzerindedir. Bu $q$ tane doğru $K$ nın $P$ hariç $n-1$ noktasını içerir. Böylece $K$ nın içerdiği nokta sayısı için

$$k \leq m + q(n-1) < n + q(n-1)$$

eşitsizliği geçerlidir ve $K$ bir maksimal ark değildir.

$K$ , $q$. mertebeden bir projektif düzlemde maksimal $\{k;n\}$ arkının bütün doğruları $K$ ile ya hiç kesişmez ya da $n$ tane noktasında kesişir ve $2 \leq n \leq q$ eşitsizliği sağlanır ve $k = q(n-1)+n$ dır (Hoadley, 2003). □

**Tanım 2.7** $K$, $q$. mertebeden projektif düzlemde bir $\{k;n\}$ ark olsun. Projektif düzlemin bir doğrusu bir $k-$ark ı bir noktada kesiyorsa tanjant doğru, iki noktada kesiyorsa sekant doğru, hiç kesişmiyorsa harici (dışsal) doğru olarak isimlendirilir. $n$ ye $\{k;n\}-$ ark ın derecesi denir (Hoadley, 2003).

**Teorem 2.8** $K$, $q$. mertededen projektif düzlemde $n < q$ için bir maksimal $\{q(n-1)+n;n\}-$ ark olsun. O zaman $K$ nın harici doğrular kümesi $K^D$ bir maksimal

$$\left\{q(\frac{q-n+1}{n});\frac{q}{n}\right\}$$

*arktır (Maes, 2011).*

**İspat** $K^D$, $\pi$ projektif düzleminin harici doğrularına ilişkin küme olsun. İspat için düzlemdeki her doğrunun $K^D$ ile ya 0 ya da $\frac{q}{n}$ noktalarında kesiştiği gösterilmelidir. $P$ noktası $K$ nın herhangi bir noktası ise $K$, $\{q(n-1)+n;n\}-$ maksimak ark olduğundan $P$ den geçen her doğru $K$ ya sekanttır ya da $K$ ile kesişmez. $P$ nin, $K$ nın bir noktası olmadığını varsayıldığında $P$ den geçen $K$ ya sekant ya da harici olan her doğru için

$$\frac{|K|}{n} = \frac{q(n-1)}{n} + 1$$

tane doğru $K$ ya sekanttır ve

$$q+1-\frac{q(n-1)}{n}-1 = \frac{q}{n}$$

tane doğru da haricidir. Bu durumda projektif düzlemin her doğrusu $K^D$ ile $\frac{q}{n}$ tane noktada kesişir. Böylece $K^D$ bir maksimal $\left\{q(\frac{q-n+1}{n});\frac{q}{n}\right\}$ $-$ *ark* tır *(Maes, 2011).* □

Mertebesi çift olan projektif düzlemlerde *hiperovaller* tarafından verilen diğer örnekler, $k$ arklar çalışmasından çıkmıştır. $q$. mertebeden sınırlı bir projektif düzlemde, $k-$ arklar lineer olmayan 3 noktanın kümesidir. $k$-arklarla bir noktada kesişen doğrular tanjant doğrularıdır.

**Tanım 2.9** $q$. mertebeden projektif düzlemde bir $k-$ ark, $(k+1)$-ark tarafından oluşmuyorsa bu arka bütün (tam) ark denir. Bir $k-$ ark' ın sahip olabileceği nokta; eğer $q$ çiftse $(q+2)$; eğer $q$ tekse $(q+1)$ dir. $(q+1)$-ark 'a oval ve $(q+2)$-ark'a da hiperoval denir (Ma*rshall, 2010).*

$q$. mertebeden projektif düzlemin bütün doğruları hiperovaller ile ya hiç kesismez yada iki noktada kesişir. Sonuç olarak hiperovaller maksimal $\{q+2;2\}-$ arklardır.

**Teorem 2.10 (Barlotti)** Eğer $K$, $q$. mertebeden bir $\pi$ projektif düzlemde bir

$$\{q(n-1)+n-1;n\}$$

*ark ise tam (bütün) bir ark değildir ve bir maksimal* $\{q(n-1)+n;n\}-$ *ark'a bir tek yolla tamamlanabilir (Maes, 2011).*

**İspat** $P$, $K$ nın herhangi bir noktası olsun. O zaman $(q+1)$ tane doğru $K$ ile $P$ nin dışında en fazla $(n-1)$ noktadan geçer.

$$|K| = 1+q(n-1)+(n-2)$$

olduğundan $P$ den geçen $q$ doğrular $K$ ile $n$ tane noktada kesişir ve $K$ ile $(n-1)$ noktalarında kesişen $P$ den geçen tek bir doğru vardır. Bundan dolayı $K$ nın herhangi bir noktasında bir tek $(n-1)-$ sekant vardır. O zaman $(n-1)-$ sekantlarının toplam sayısı

$$\frac{|K|}{n-1} = q+1$$

dir. Bu $(n-1)-$ sekantlar bir noktada kesişir bu kesişim noktası $K$ ya katılarak $K$, maksimal $\{q(n-1)+n;n\}$ arkına tamamlanabilir.

Öncelikle, düzlemin bütün doğrularının kestiği $(q+1)$ tane noktadan oluşan küme $l$ ise $l$ bir doğru üzerindeki noktalar kümesidir. Varsayalım ki $l$ bir doğru üzerindeki noktaların kümesi olmasın. O zaman $l$ yi en az iki noktada kesen $m$ doğruları vardır. Ancak $m$ üzerinde olup $l$ üzerinde olmayan bir $Q$ noktası vardır. $l$ nin m üzerinde olmayan en çok $q-1$ noktası var olduğundan $Q$ üzerinde $m$ den başka $q$ doğru geçer ve $Q$ dan geçen bazı doğrular $l$ yi kesmez. Bu her doğru $l$ yi keser hipotezi ile çelişir. Bu yüzden $l$ bir doğrunun noktalarının kümesi olmak zorundadır. Dual olarak gösterilebilir ki bir $q+1$ doğrulu küme noktadaş doğrular kümesidir.

Böylece $(n-1)-$sekantların kümesinin noktadaş olmadını varsayabiliriz. O zaman $K$ nın $(n-1)-$sekantı üzerinde olmayan düzlemin bazı $Q$ noktaları vardır. Sonuç olarak, $Q$ dan geçen bütün doğrular $K$ yı ya 0 ya da $n$ noktada keserler. Fakat

$$q(n-1)+n-1 = -1 \ (mod\ n)$$

den bir çelişki oluşur. Bu yüzden $(n-1)-$ sekantlar bir noktada kesişmek zorundadır *(Maes, 2011).* $\square$

**Teorem 2.11** $q$. mertebeden projektif düzlemde $K_1$ ve $K_2$, $n$. dereceden iki maksimal ark olsun. $K_1$ ve $K_2$ *deki nokta sayısı*

$$k = q(n-1)+n$$

iken

$$|K_1 \cap K_2| > k-(q-\frac{q}{n}+1)$$

*ise* $K_1 = K_2$ *dir.*

**İspat** $K_1$ ve $K_2$ nin farklı olduğu farzedilsin. Bu durumda $K_1 - K_1 \cap K_2$ de bir $P$ noktası vardır. Maksimal arkın harici doğrular kümesi dual düzlemde bir maksimal ark oluşturduğundan $P$ den geçen $K_1$ i kesen $K_2$ ye harici olan $\frac{q}{n}$ doğru vardır. Bu doğrular üzerinde $K_1$ in

$$\frac{q(n-1)}{n}+1$$

noktası vardır. $K_1$ ve $K_2$ farklı olduğundan

$$|K_1 \cap K_2| \leq k-(q-\frac{q}{n}+1)$$

*dir. Bu teoremin hipotezi ile çelişir. Dolayısıyla* $K_1$ ve $K_2$ eşittir. □

16. mertebeden olan düzlemde iki farklı 4. dereceden maksimal ark en fazla 39 noktada kesişebilir. Hiperovaller için (2. dereceden maksimal arklar), 2 farklı hiperoval en fazla

$$\frac{q}{2}+1$$

noktada kesişir. $PG(2,4)$ ve $PG(2,8)$ projektif düzlemlerinde noktalarının kesin olarak yarısı kesişen bilinen hiperoval örnekleri vardır..

**Teorem 2.12 (Tallani Scafati)** $K$, $q$. mertebeden bir $\pi$ projektif düzlemindeki $k$ noktalı küme olsun. $0 \leq i \leq q+1$ aralığındaki her $i$ için, $\pi$ nin $K$ yı $i$ tane noktada kesen doğruların sayısı $t_i$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\sum_{0<i<q+1} t_i &= q^2+q+1 \\
\sum_{1<i<q+1} it_i &= k(q+1) \\
\sum_{2\leq i\leq q+1} \frac{i(i-1)t_i}{2} &= \frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}$$

*dir (Abass, 2012).*

# BÖLÜM 3

# KONİKLER

$PG(2,q)$ projektif düzleminde bir konik bu projektif düzlemde bir kuadriktir. Bir konik genel olarak

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{01}+a_{10})x_0x_1 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + (a_{02}+a_{20})x_0x_2 = 0$$

denklemine sahiptir. Bu denklemin *matris formu*

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

dir.

Konik denklemiyle eşleşen birden fazla matris formu vardır. Ancak özel olarak bir simetrik matris bir tek konik denklemi tanımlar. $GF(q)$ nun karakteristiği 2 den farklı ise bir koniğin genel denklemi

$$ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + 2fx_1x_2 + 2gx_2x_0 + 2hx_0x_1 = 0$$

veya matris formda

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ile verilebilir. Burada $X^tAX = 0$, yani $A$ simetrik matristir (M*arshall, 2010).*

Projektif düzlemde bir koniğe teğet olan hiperdüzlemler doğrulardır. Bir doğru konik içerisinde tamamen bulunmaz. Koniği ya bir noktada, ya iki noktada ya da hiç kesmez.

**Tanım 3.1** $PG(2,q)$ da bir $C$ koniğini bir noktada kesen doğruya tanjant, iki noktada kesen doğruya sekant, konikle hiç bir ortak noktaya sahip olmayan doğruya da dış doğru denir. (Marshall, 2010).

Dejenere olmayan koniklerin bir tipi vardır. Bu koniğin noktaları bir oval oluşturur. $q$ tek sayı ise, $PG(2,q)$ nun her oval eğrisi dejenere olmayan bir konik oluşturur. $q$ tek iken $C$ nin üzerinde olmayan her nokta tam olarak iki tane teğet doğru üzerinde bulunur. $q$ çift sayı ise, $C$ koniğine teğet olan bütün doğrular bir ortak noktaya sahiptir. Bu noktaya koniğin *nucleus*'u denir. Konikle birlikte nucleus bir hiperoval oluşturur. Ancak bunun tersi doğru değildir. Yani, $PG(2,q)$ nun tüm hiperovalleri nucleusla birlikte bir konik oluşturmaz.

**Yardımcı Teorem 3.2** Üçü doğrudaş olmayan beş noktadan geçen dejenere olmayan yalnızca bir konik bulunur (Marshall, 2010).

**Tanım 3.3** $A$, 3x3 tipinde, bir $F$ cismi üzerinde tekil olmayan bir matris olsun.

$$\sigma : PG(2,F) \to PG(2,F)$$

$$(x,y,z) \to (x^{'},y^{'},z^{'})$$

ve

$$\rho \begin{bmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\rho \neq 0$ *olmak üzere* $PG(2,F)$ *de bir homografi olarak adlandırılır* (Casse, 2006).

$\sigma$ homografisi bir koniği tanımlayan matrisle birlikte yeni bir konik denklemi elde etmek için kullanılabilir. Bunu aşağıdaki yardımcı teorem ile verebiliriz.

**Yardımcı Teorem 3.4** $PG(2,F)$ *de* matrisi $A$ olan koniğe bir $\sigma$ homograsi uygulanısa, $\sigma^{-t}A\sigma^{-1}$matrisi bir konik belirtir. (Marshall, 2010).

**İspat** Bir $A$ matrisi ve $A$ matrisine ilişkin bir konik verilsin. Konik üzerindeki genel $X$ noktası $X^tAX = 0$ sağlar. Homografiyi koniğin noktalarına uyguladığımızı varsayalım, yani $X^{'} = \sigma X$ olsun.

$$\begin{aligned} X^tAX = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\sigma^{-1}X^{'})^tA(\sigma^{-1}X^{'}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (X^{'})^t(\sigma^{-1})^tA\sigma^{-1}X^{'} = 0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, yeni koniğin denklemi $\sigma^{-t}A\sigma^{-1}$ matrisiyle verilir.

$PG(2,q)$ de dejenere olamayan üç tane konik ifadesi vardır: bir nokta, bir çizgi ve kesişen doğrular (Marshall, 2010). □

**Örnek 3.1** $x^2+y^2+z^2 = 0$ denklemi $PG(2,q)$ da indirgenemez bir koniktir ve reel projektif düzlem $PG(2,R)$ de noktası yoktur, kompleks projektif düzlem $PG(2,C)$ de noktası bulunur (Casse, 2006).

**Örnek 3.2** $PG(2,q)$ da kaç tane farklı 5-arkın olduğu aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$PG(2,q)$ da $A$ ilk nokta olmak üzere, $q^2+q+1$ farklı şekilde seçilebilir. $A$ dan farklı ikinci $B$ noktası $q^2+q$ farklı şekilde seçilebilir ve üçüncü $C$ noktası, $AB$ üzerinde olmamak şartıyla herhangi bir nokta olabilir ve $q^2$ farklı şekilde seçilebilir. Dördüncü $D$ noktası $ABC$ üçgeninin üzerinde olmamak şartıyla

$$q^2+q+1-3(q-1)-3=(q-1)^2$$

farklı şekilde seçilebilir. Beşinci $E$ noktası $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinde veya üzerinde bulunamaz ve

$$q^2+q+1-6(q-2)-7=(q-2)(q-3)$$

farklı şekilde seçilebilir.

Böylece elde edilen farklı 5-arkların sayısı ise

$$\frac{1}{5!}(q^2+q+1)(q^2+q)q^2(q-1)^2(q-2)(q-3)$$

olarak bulunur.Bu sayıyı $M$ ile gösterilir (Casse, 2006).

**Örnek 3.3** $GF(q)$ üzerinde bulunmayan, $GF(q^2)$ de denklemleri iki ayrı (eşlenik) lineer denkleme ayrılan $PG(2,q)$ da indirgenebilir konik sayısı aşağıdaki şekilde belirlenebilir.

Koniğin denklemi, $\phi=0$ olsun. $GF(q^2)$ üzerindeki lineer polinom $\phi=ll^q$ olsun. Ancak bu konik $GF(q)$ üzerinde bulunmasın. $PG(2,q^2)$ de $\alpha$ ve $\alpha^q$ doğruları sırasıyla $l=0$ ve $l^q=0$ denklemleriyle gösterilir. Bundan dolayı,

$$P^q=(\alpha\cap\alpha^q)^q=\alpha^q\cap\alpha=P$$

olmak üzere $P=\alpha\cap\alpha^q$ noktası $PG(2,q)$ üzerindedir. $PG(2,q^2)\setminus PG(2,q)$ da $P$ den geçen doğru sayısı

$$(q^2+1)-(q+1)=q^2-q$$

olarak bulunur. Bundan dolayı, $PG(2,q)$ nun $P$ noktasından geçen eşlenik çiftlerinin sayısı $N$,

$$\frac{1}{2}(q^2-q)$$

dir. Bunun için, $GF(q^2)$ üzerindeki iki lineer denkleme ayrılan denklemlere sahip, $PG(2,q)$ da indirgenebilir konik sayısı

$$[PG(2,q) \text{ daki nokta sayısı}] \times N = (q^2+q+1)\frac{1}{2}(q^2-q) = \frac{q}{2}(q^3-1)$$

olarak bulunur (Casse, 2006).

**Örnek 3.4** $PG(2,q)$ da $q+1$ noktaya sahip indirgenemez konik sayısı $q^5-q^2$ dir.

*Örnek* 3.2 de $PG(2,q)$ daki 5-arkların M sayısını hesaplanılmıştı. $PG(2,q)$ da indirgenemez bir koniğin üzerinde $q+1$ nokta bulunur ve bu konik $(q+1)-$ arktır. Son örneğe göre de, $PG(2,q)$ da $q+1$ noktaya sahip indirgenemez konik sayısı

$$\begin{aligned} \frac{M}{\binom{q+1}{5}} &= \frac{1/5!(q^2+q+1)(q^2+q)q^2(q-1)^2(q-2)(q-3)}{1/5!(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)} \\ &= (q^2+q+1)q^2(q-1) \\ &= q^5-q^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur (Casse, 2006).

**Teorem 3.5** $PG(2,q)$ da indirgenemez bir konik (q + 1)-arktır (Casse, 2006).

**İspat** $PG(2,q)$ da konik sayısı $PG(5,q)$ nun farklı beş noktasının $(a,b,c,f,g,h)$ seçimlrinin sayısına eşittir ve

$$q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$$

dir. Temel olarak, beş farklı konik türü vardır:

i) Kesişen iki doğrunun oluşturduğu konik,

ii) $GF(q)$ da denklemleri iki ayrı (eşlenik) lineer denkleme ayrılan konikler,

iii) $GF(q^2)$ de denklemleri iki ayrı (eşlenik) lineer denkleme ayrılan konikler,

iv) $q+1$ noktalarına sahip indirgenemez konikler,

v) $PG(2,q)$ da noktası olmayan indirgenemez konikler.

*i*.tipin $PG(2,q)$ daki koniklerinin sayısı $N_i$ ile gösterilirse, $PG(2,q)$ da kesişen iki doğrunun oluşturduğu konik sayısı $N_1$ olur ve $q^2+q+1$ e eşittir. $N_2$, $PG(2,q)$ da farklı iki doğru çiftidir.

Bu durumda

$$N_2 = \binom{q^2+q+1}{2} = \frac{1}{2}(q^2+q+1)(q^2+q)$$

olarak bulunur.

$N_3$, $GF(q^2)$ de denklemleri iki ayrı (eşlenik) lineer denkleme ayrılan koniklerin sayısıdır. Bu sayı Örnek.3.3 de hesaplanmış olup

$$\frac{q}{2}(q^3-1)$$

dur.

$N_4$, $q+1$ noktalarına sahip indirgenemez koniklerin sayısıdır. Bu sayı Örnek.3.4 de hesaplanmış olup $q^5-q^2$ dir.

$$\begin{aligned}
q^5+q^4+q^3+q^2+q+1 &= N_1+N_2+N_3+N_4+N_5 \\
&= (q^2+q+1)+\tfrac{1}{2}(q^2+q+1)(q^2+q)+\tfrac{q}{2}(q^3-1)+q^5-q^2+N_5 \\
&= (q^2+q+1)(1+\tfrac{1}{2}(q^2+q)+\tfrac{1}{2}q(q-1)+q^2(q-1))+N_5 \\
&= (q^2+q+1)(1+q^3)+N_5 \\
&= q^5+q^4+q^3+q^2+q+1+N_5
\end{aligned}$$

$N_5=0$ bulunur. Bundan dolayı indirgenemez konikler $q+1$ arklardır (Casse, 2006). $\square$

# KAYNAKLAR DİZİNİ


1)Karakaş H. İbrahim, 1998, Soyut Cebire Giriş,Matemetik Vakfı Yayınları, 1-6, 140-143 s.

2)Smith L., 1977, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları, 17-35 s.

3)Kaya, R., 2005, Projektif Geometri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 21-59 s.

4)Daniel Marshall, 2010, Conics, unitals and Net Replacement, The University of Adelaide, 13-21 p.

5)Rey Casse, 2006, Projective Geometry, Oxford University, 138-143 p.

6)Leo Storme, 2010, Finite Projectif Planes, Nato-Asi Presentation.

7)P.A.Hoadley, 2003, Maximal Arcs in Finite Field Planes, The University of Adelaide, 13-23 p.

8)Thomas Maes, 2011, A Geometric Approach to Mathon Maximal Arcs, Universiteit Gent, 11-12 p.