Sonlu Lineer Uzayların Doğru Dereceleri Üzerine

Metin Şahin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2013

On Line Degrees Of The Finite Linear Spaces

Metin Şahin

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

August 2013

Sonlu Lineer Uzayların Doğru Dereceleri Üzerine

Metin Şahin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Ağustos 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Metin Şahin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Sonlu Lineer Uzayların Doğru Dereceleri Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Üye : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin özeti verilmiştir. İkinci bölümde, L. M. Batten (1986), R. Kaya (1992), L. M. Batten ve A. Beutelspacher (1993) den alınan temel kavram, tanım, önerme ve teoremler verilmiştir. Bazı teoremler ispatlanmıştır. Üçüncü bölümde, lineer uzaylarda bazı yapıların komplementleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bazı lineer uzaylar ardışık doğru dereceli olmasına göre incelenmiştir. Bu bölümde, ardışık iki doğru dereceli lineer uzayların delinmiş afin ya da projektif düzlem, sonsuzdaki bir nokta ilaveli bir afin düzlem, bir afin düzlemin bir doğrusunun bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmasıyla elde edilen lineer uzay, bir projektif düzlemden bir üçgenin atılmasıyla elde edilen lineer uzay, Nwankpa-Shrikhande düzlemi veya projektif düzlemde herhangi iki doğrunun pseudo-komplementi olduğu gösterilmiştir. Ardışık üç doğru dereceli lineer uzaylardan bazılarının bir projektif düzlemde bir yayın komplementi ve Nwankpa-Shrikhande düzlemi olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda, ardışık olmayan iki doğru dereceli lineer uzayların bir projektif düzlemde bir demetin pseudo-komplementi veya bir doğrusu atılmış projektif düzlemde bir maksimal yayın pseudo-komplementi olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer uzay, doğru derecesi, komplement, afin düzlem, projektif düzlem

SUMMARY

This thesis consists of four sections. Summary of the thesis is given in the first chapter. In the second chapter, the basic concepts, definitions, propositions and the theorems taken from L. M. Batten (1986), R. Kaya (1992), L. M. Batten and A. Beutelspacher (1993) are given. Some theorems are proved. Complements of some structures in the linear spaces are examined in the third chapter.

Some linear spaces are examined in terms of consecutive line degrees in the fourth chapter. In that section, it is shown that linear spaces with consecutive two line degrees are a punctured affine plane, a punctured projective plane, an affine plane added a point at infinity, an affine plane extracted a line and all its points except one point of that line, a projective plane extracted a triangle, Nwankpa-Shrikhande plane or a pseudo-complement of two lines in a projective plane. It is shown that some of linear spaces with consecutive three line degrees are a projective plane extracted an arc or the Nwankpa-Shrikhande plane. It is also shown that linear spaces with non-consecutive two line degrees are the pseudo-complement of a pencil in a projective plane or the pseudo-complement of a maximal arc in a projective plane which has an line deleted.

Keywords: Linear space, line degree, complement, affine plane, projective plane

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca dersleri sevme noktasında ve tez çalışmamda desteğini eksik etmeyen danışmanım sayın Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI hocama, daima desteğini almış olduğum aileme, eşim Fadime ŞAHİN'e ve maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR 2013 Metin ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathcal{P}$	Nokta kümesi
$\mathcal{L}$	Doğru kümesi
S	Lineer uzay
v	Uzaydaki nokta sayısı
b	Uzaydaki doğru sayısı
r_p	p noktasından geçen doğru sayısı
k_L	L doğrusu üzerindeki nokta sayısı
b_n	Uzaydaki $n-$ doğru sayısı
v_n	Uzaydaki $n-$ nokta sayısı
$n - doğru$	Üzerinde n tane nokta bulunan doğru
$n - nokta$	Üzerinden n tane doğru geçen nokta
$d - demet$	Uzayın sabit bir noktasından geçen d adet doğru kümesi
$L \cap M$	L ve M doğrularının kesişim noktası
$L \cup H$	L ve H doğrularının birleşimi üzerindeki noktalar
pq	p ve q noktalarından geçen doğru
$p \in L$	p noktasının L doğrusu üzerinde olması
$p \notin L$	p noktasının L doğrusu üzerinde olmaması
$L \| L'$	L ve L' doğrularının paralel olması
$\|X\|$	X kümesinin nokta sayısı
$k - yay$	Herhangi üçü doğrudaş olmayan k nokta kümesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada, sonlu lineer uzaylar doğru derecelerine göre sınıflandırılmıştır. Ardışık iki doğru dereceli lineer uzaylar L. M. Batten ve J. Totten tarafından 1980'de, ardışık üç doğru dereceli lineer uzaylar L. M. Batten tarafından 1980'de ve ardışık olmayan iki doğru dereceli lineer uzaylar ise A. Beutelspacher tarafından 1986'da sınıflandırılmıştır. Bu tezde bu makaleler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım, önerme ve teoremler ifade edilmiştir. Lineer uzay, noktasal ve doğrusal regülerlik, $d-$demet kavramları ifade edilip, afin ve projektif uzaylar incelenmiştir ve bunlarla ilgili bazı temel sonuçlar verilmiştir. Afin ve projektif uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra herhangi bir sonlu lineer uzayda nokta ve doğru dereceleri arasındaki ilişkiler incelenip dizayn kavramı ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, sonlu lineer uzaylarda pseudo-komplementler incelenmiştir. Herhangi bir konfigürasyonun pseudo-komplementinin neler olduğu araştırılmıştır. Pseudo-komplement teoremleri Totten tarafından 1976'da, Oehler tarafından 1975'de ve Batten tarafından 1991'de incelenmiştir. Örneğin bir projektif düzlemdeki bir doğrunun komplementinin afin düzlem olduğu bilinmektedir. İki doğru, üçgen ve hiperovallerin pseudo-komplementlerinin sırasıyla bir gerçek komplement olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak herhangi bir sonlu bir lineer uzay ardışık iki doğru dereceli olmasına göre incelenmiştir. Ardışık iki doğru dereceli lineer uzaylar üzerindeki ilk çalışma L. M. Batten tarafından 1980'de, J. Totten ve P. de Witte tarafından 1983'de verilmiştir. Böyle bir lineer uzayın nokta sayısı, nokta derecesi ve doğru derecesinin hangi şartları sağlaması gerektiği bir teorem yardımıyla belirtilmiştir. Daha sonra ise nokta sayısının bazı değerlerden küçük olması şartına ve bazı durumlarda da doğru derecesinin belli şartları sağlamasına bağlı olarak lineer uzaylardan bazılarının delinmiş afin düzlem, projektif düzlem veya bir nokta ilaveli afin düzlem olduğu görülmüştür. Bölüm 4.3 de ardışık üç doğru dereceli lineer uzaylar incelenmiştir. Ardışık iki doğru dereceli uzaylardaki mantığa paralel olan durumlarda uzayla ilgili sonuçlar çıkarılmıştır. Bölüm 4.2 ve Bölüm 4.3 ün sonuçları de Witte ve Batten tarafından 1983'de ve Batten ve Totten tarafından 1980'de verilmiştir. Son olarak Beutelspacher'ın ardışık olmayan iki doğru dereceli lineer uzaylar üzerindeki makalesi incelenmiştir. Doğru derecesinin ve uzayın bazı özel şartları sağlaması koşuluyla bu uzay hakkında bazı sonuçlar çıkarılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümdeki temel kavram, tanım, önerme ve teoremler L. M. Batten (1986), R. Kaya (1992), L. M. Batten ve Beutelspacher (1993) den alınarak verilmektedir.

Tanım 2.1.1. $\mathcal{P}$ noktalar kümesi $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ kümesinin altkümelerinin ailesi olmak üzere elemanları doğrular olan bir küme olsun. Aşağıdaki $(L1)$ ve $(L2)$ aksiyomlarını sağlayan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yapısına bir **lineer uzay** denir:

$(L1)$ Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

$(L2)$ Her doğru en az iki nokta kapsar.

Genel olarak noktalar p, q, s,..., x, y, z gibi küçük harflerle, doğrular ise L, M, N,..., X, Y, Z gibi büyük harflerle gösterilecektir. Farklı p ve q noktalarından geçen doğru pq ile gösterilecektir. Eğer farklı L ve M doğruları bir noktada kesişiyorsa, bu nokta $L \cap M$ ile gösterilecektir. "Bir doğru üzerindeki bir nokta", "Bir noktadan geçen bir doğru" şeklinde bir geometrik dil kullanılacaktır.

Bu tez boyunca nokta kümesi sonlu olan lineer uzaylar incelenecektir. Nokta kümesi sonlu olan lineer uzaylara **sonlu lineer uzay** denilecektir. S sonlu lineer uzayı, v ve b sırasıyla S nin noktalarının ve doğrularının sayısını temsil edecektir. Herhangi bir p noktasından geçen doğruların sayısı r_p, herhangi L doğrusu üzerindeki noktaların sayısı da k_L ile gösterilecektir. Aynı zamanda r_p ve k_L sırasıyla p noktasının ve L doğrusunun **derecesi** olarak adlandırılacaktır. **i-nokta** ve **i-doğru** terimleri sırasıyla i dereceli bir noktayı ve i dereceli bir doğruyu temsilen kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2. Bir S lineer uzayının her noktasından aynı sayıda doğru geçiyorsa S ye **noktasal regüler,** her doğrusu aynı sayıda nokta kapsıyorsa S ye **doğrusal regüler** denir.

Önerme 2.1.3. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı sonlu bir lineer uzay olsun. S doğrusal regüler ise noktasal regülerdir.

İspat. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ doğrusal regüleritesi k olan v noktalı sonlu bir lineer uzay olsun. $p \in \mathcal{P}$ sabit bir nokta olmak üzere, p noktasından geçen doğrular üzerindeki noktalar uzayın tüm noktalarını verdiğinden,

$$v - 1 = r_p(k - 1)$$

dir. Buradan,

$$r_p = \frac{v-1}{k-1}$$

dir. v ve k sabit değerler olduğundan, r_p sabittir. Böylece S noktasal regülerdir. $\square$

Tanım 2.1.4. Bir S lineer uzayının sabit bir noktasından geçen d adet doğru kümesine **d-demet**; S, v noktalı ve 1 adet $(v-1)-$doğru ve $v-1$ adet $2-$doğru kapsayan bir lineer uzay ise S ye **yaklaşık demet** denir.

Tanım 2.1.5. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. X in farklı herhangi p ve q noktalarına karşılık gelen pq doğrusu X in bir altkümesi ise X e S nin **bir altuzayı** denir. Eğer $Y \subseteq \mathcal{P}$ ise Y yi kapsayan en küçük altuzaya Y nin **gerdiği altuzay** denir ve $\langle Y \rangle$ ile gösterilir. Eğer $\forall y \in Y$ için $y \notin \langle Y - \{y\} \rangle$ ise Y ye **bağımsız bir küme** denir. Y bağımsız ve $\langle Y \rangle = S$ ise Y ye S nin **bir tabanı** denir.

2.2. Afin Uzaylar

Tanım 2.2.1. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayına bir **afin düzlem** denir.

$(A1)$ Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

$(A2)$ Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Önerme 2.2.2. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir lineer uzay olsun. S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart S deki tüm p noktaları ve L doğruları için $r_p = n + 1$ ve $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısının var olmasıdır.

İspat. $(\Longrightarrow)$ $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir afin düzlem; L, $H \in \mathcal{L}$ ve $p \in \mathcal{P}$ olsun.

Eğer $p \notin L \cup H$ ise;

(i) L ve H paralel olsun. Bu durumda $(A1)$ aksiyomundan p noktasından $k_L + 1 = k_H + 1$ tane doğru geçer. Buradan $k_L = k_H = n$ ve $r_p = n + 1$ bulunur.

(ii) L ve H kesişen iki doğru olsun. Bu durumda da $(A1)$ den p noktasından $k_L + 1 = k_H + 1$ tane doğru geçer ve $k_L = k_H = n$ ve $r_p = n + 1$ bulunur.

Eğer $p \notin L \cup H$ olacak şekilde bir p noktası yoksa L ve H paralel olmak zorundadır ve S nin tüm doğruları iki noktalıdır. Buradan $k_L = k_H = n = 2$ ve $r_p = n + 1 = 3$ eşitlikleri sağlanır.

Eğer $p \in L \cup H$ ise;

(i) L ve H paralel olsun. $p \in L$ ise $r_p = k_H + 1$ ve $L \cup H$ nın dışındaki herhangi bir nokta yardımıyla $k_L = k_H$ eşitliği bulunur. Buradan $k_L = k_H = n$ ve $r_p = n + 1$ dir. Aynı durum $p \in H$ için de geçerlidir.

(ii) L ve H kesişen iki doğru olsun. $p \in L \setminus H$ ise $r_p = k_H + 1$ ve $L \cup H$ nın dışındaki herhangi bir nokta yardımıyla $k_L = k_H$ eşitliğinden $k_L = k_H = n$ ve $r_p = n + 1$ dir. Aynı durum $p \in H \setminus L$ için de geçerlidir. $p \in L \cap H$ ise $L \cup H$ nın dışındaki herhangi bir nokta yardımıyla ilk önce $r_p = n + 1$ buradan da $k_L = k_H = n$ eşitliği elde edilir.

Son iki durumda $p \notin L \cup H$ olacak şekilde bir nokta yoksa $k_L = k_H = n = 2$ ve $r_p = n + 1 = 3$ olduğu görülür. Tüm durumlar için $k_L \geq 2$ olduğundan $n \geq 2$ dir. Böylelikle S deki tüm p noktaları ve L doğruları için $r_p = n + 1$ ve $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı vardır.

$(\Longleftarrow)$ Diğer taraftan, S deki tüm p noktaları ve L doğruları için $r_p = n + 1$ ve $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. $p \notin L$ için L ye p noktasından bir tek paralel çizileceğinden $(A1)$ aksiyomu sağlanır. $(A2)$ aksiyomunun sağlandığı ise açıktır. Böylelikle S bir afin düzlemdir. $\square$

Önerme 2.2.3. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir lineer uzay olsun. Bu durumda S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart $v = n^2$ ve S deki tüm L doğruları için $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısının var olmasıdır.

İspat. $(\Longrightarrow)$ $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir afin düzlem; $L, H \in \mathcal{L}$ ve $p \notin L \cup H$ olsun. $(A1)$ aksiyomundan p den $k_L + 1 = k_H + 1$ tane doğru geçer. Buradan $k_L = k_H = n$

dir. Eğer bu şekilde bir p noktası yoksa, bu durumda kolayca görülebileceği üzere L ve H paraleldir ve S nin tüm doğrularının iki noktası vardır.

Herhangi bir p noktası ve Önerme 2.2.2 den dolayı bu noktadan geçen $n+1$ tane doğru düşünüldüğünde S deki toplam nokta sayısı n^2 bulunur.

($\Longleftarrow$) Diğer taraftan S, v noktalı lineer uzayı için $v = n^2$ ve S nin tüm L doğruları için $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S nin herhangi bir p noktası için $r_p(n-1) = n^2 - 1$, buradan da $r_p = n+1$ bulunur. Böylece Önerme 2.2.2 den S bir afin düzlemdir. $\Box$

Önerme 2.2.4. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart S de $b = n^2 + n$ ve her L doğrusu için $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısının var olmasıdır.

İspat. ($\Longrightarrow$) $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir afin düzlem olsun. Önerme 2.2.3 den $v = n^2$ olacak şekilde $n \geq 2$, n tamsayısı vardır. Düzlemin n^2 noktası arasından seçilecek her iki farklı nokta bir doğru belirtir. Seçilecek toplam farklı iki nokta sayısı $\binom{n^2}{2}$ dir. Fakat seçilen farklı nokta çiftleri ortak doğru üzerinde seçilmişse aynı doğru elde edilir. Bir doğru üzerinde seçilecek farklı nokta çifti sayısı ise $\binom{n}{2}$ dir. Dolayısıyla düzlemdeki toplam doğru sayısı,

$$\frac{\binom{n^2}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{n^2(n^2-1)/2}{n(n-1)/2} = n^2 + n$$

dir.

($\Longleftarrow$) Diğer taraftan S, b doğrulu lineer uzayı için $b = n^2 + n$ ve S deki her L doğrusu için $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S lineer uzayı doğrusal regüler olduğundan Önerme 2.1.3 den noktasal regülerdir. Herhangi bir L, $n-$doğrusu için $p \in L$ olmak üzere bu doğruyu kesen $(r_p - 1)n$ tane doğru vardır. L ye paralel doğru olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$(r_p - 1)n + 1 = n^2 + n$$

den, $n \mid (n^2 + n - 1)$ çelişkisi elde edilir. L ye paralel doğru olmak zorundadır.

Buradan $r_p \geq n+1$ dir. Aynı zamanda

$$(r_p - 1)n + 1 < n^2 + n$$

dir. Dolayısıyla $r_p = n+1$ olmak zorundadır. Önerme 2.2.2 den S bir afin düzlemdir. □

Son üç önermeden görüleceği üzere herhangi bir sonlu A afin düzleminin tüm p noktalarına ve L doğrularına karşılık $v = n^2$, $b = n^2+n$, $r_p = n+1$ ve $k_L = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı vardır. Bu sayıya **A nın mertebesi** denir.

Tanım 2.2.5. S nin herhangi iki tane L ve L' doğrusu için $L = L'$ veya $L \cap L' = \varnothing$ ise bu iki doğruya **paralel doğrular** denir. S nin bir paralel doğrular kümesi K olsun. Eğer S nin herbir noktası K nın tam olarak bir doğrusu üzerinde ise K ya S de bir **paralel sınıf** denir. L ve L' doğruları aynı paralel sınıfta iki doğru ise, birbirlerine paralel iki doğrudur ve $L \| L'$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6. Bir S lineer uzayının **boyutu** $\min\{|X| \mid X, S \text{ nin bir tabanı}\} - 1$ dir. Eğer S lineer uzayının boyutu d ise S ye, **d-boyutlu** bir lineer uzay denir.

$2-$boyutlu öklidyen uzay bir afin düzlem örneğidir.

Tanım 2.2.7. 2 $-$boyutlu her altuzayı afin düzlem olan bir lineer uzaya **afin uzay** denir. Herhangi bir afin uzayın en az $3-$boyutlu olduğu açıktır. Bir düzlem $2-$boyutlu bir lineer uzaydır. S nin bir **hiperdüzlemi**; S nin bir maksimal has lineer altuzayıdır.

2.3. Projektif Uzaylar

Tanım 2.3.1. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayına bir **projektif düzlem** denir.

$(P1)$ Farklı iki doğru tam olarak bir noktada kesişir.

$(P2)$ Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Tanım 2.3.2. $(P1)$ şartını sağlayıp $(P2)$ şartını sağlamayan aşikar olmayan bir lineer uzaya **dejenere projektif düzlem** denir.

Herhangi bir yaklaşık demetin bir dejenere projektif düzlem olduğu açıktır. Her dejenere projektif düzlemin de bir yaklaşık demet olduğu açıktır. Projektif düzlemlerde tüm dogrular ikişerli kesişir.

En küçük projektif düzlem yedi noktalıdır. Projektif düzlemler; noktalar ve doğrularla oynadığı dual rol nedeniyle lineer uzayların özel bir sınıfını oluşturur. Noktalar da doğrular gibi temel aksiyomları sağlar. Noktalar ve doğrularla ilgili dual olma durumu "nokta" ve "doğru" kelimelerinin yer değiştirmesiyle elde edilir. Örneğin $(L2)$ nin duali "S de herhangi bir nokta S nin en az iki doğrusu üzerindedir" şeklindedir. Herhangi bir projektif düzlemde $(L1)$, $(L2)$, $(P1)$ ve $(P2)$ şartlarının duallerinin doğruluğunun ispatı açıktır.

Tanım 2.3.3. Bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan $k > 3$, k nokta kümesine **k-yay** denir.

Aşağıdaki kısımda sonlu projektif düzlemlerin karakteristik özelliklerini veren birtakım önermeler incelenecektir.

Önerme 2.3.4. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir lineer uzay olsun. S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart S deki tüm p noktaları ve L doğrularına karşılık $r_p = n + 1$ ve $k_L = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısının var olmasıdır.

İspat. $(\Longrightarrow)$ $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir projektif düzlem, L, $L' \in \mathcal{L}$ olsun. $(P2)$ aksiyomundan, bu iki doğrudan herhangi birisinin üzerinde olmayan bir p noktası vardır. Böyle bir nokta aracılığıyla L ve L' doğrularının üzerindeki noktalar arasında $1 - 1$ eşleme yapılabilir. Böylece $k_L = n + 1$ sabittir ve $(P2)$ gereğince $n \geq 2$ dir. Aynı zamanda $r_p = n + 1$ dir.

$(\Longleftarrow)$ Diğer taraftan S deki tüm p noktaları ve L doğrularına karşılık $r_p = n + 1$ ve $k_L = n+1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. Bu durumda S de $(P1)$ ve $(P2)$ aksiyomlarının geçerli olduğu görülür. O halde S bir projektif düzlemdir. $\square$

Önerme 2.3.5. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir lineer uzay olsun. Bu durumda S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart $v = n^2 + n + 1$ ve S deki tüm L doğrularına karşılık $k_L = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısının var olmasıdır.

İspat. $(\Longrightarrow)$ $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir projektif düzlem olsun. Önerme 2.3.4 gereği $\forall p \in \mathcal{P}$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $k_L = n + 1$ ve $r_p = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$,

n tamsayısı vardır. S deki nokta sayısı bir noktadan geçen doğruların üzerindeki noktalar yardımıyla hesaplanıldığında $v = n^2 + n + 1$ bulunur.

($\Longleftarrow$) Diğer taraftan S, v noktalı lineer uzayı için $v = n^2 + n + 1$ ve S deki tüm L doğrularına karşılık $k_L = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S nin bir p noktasından geçen doğrular yardımıyla $r_p n + 1 = n^2 + n + 1$, $r_p = n + 1$ bulunur. Buradan da S nin bir projektif düzlem olduğu açıktır. $\square$

Önerme 2.3.6. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart S de $b = n^2 + n + 1$ ve herbir L doğrusu için $k_L = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısının var olmasıdır.

İspat. ($\Longrightarrow$) $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir projektif düzlem olsun. Bir doğrunun üzerindeki noktalar yardımıyla o doğruyu kesen tüm doğrular bulunarak uzaydaki toplam doğru sayısı hesaplanabilir. Önerme 2.3.4 den S bir projektif düzlem ise $\forall p \in \mathcal{P}$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $r_p = n + 1$, $k_L = n + 1$, $n \geq 2$ olacak şekilde bir n tamsayısının var olduğu biliniyor. Buradan

$$b = (r_p - 1)(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$$

bulunur.

($\Longleftarrow$) Diğer taraftan S, b doğrulu lineer uzayı için $b = n^2+n+1$ ve S nin herbir L doğrusu için $k_L = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S doğrusal regüler olduğundan aynı zamanda noktasal regüler bir lineer uzaydır. Herhangi bir L doğrusuna paralel $a \geq 1$, a tane doğru olsun. Bu durumda L nin üzerindeki bir p noktası için

$$(r_p - 1)(n + 1) + 1 + a = n^2 + n + 1$$

bulunur. Buradan $r_p \leq n$ olmalıdır. Aynı zamanda tüm doğruların derecesi $n + 1$ olduğundan $r_p \geq n + 1$ dir. Bu durum çelişkidir. Dolayısıyla herhangi bir doğruya paralel olan bir doğru yoktur. Bu durumda bir L doğrusu üzerindeki noktalar yardımıyla,

$$(r_p - 1)(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$$

bulunur. Buradan $r_p = n + 1$ dir. Önerme 2.3.4 den S bir projektif düzlemdir. $\square$

Yukarıda verilen önermeler gereğince herhangi bir sonlu projektif düzlemin tüm p noktaları, L doğruları ve bazı $n \geq 2$, n tamsayıları için $v = b = n^2 + n + 1$ ve $r_p = k_L = n + 1$ dir. n sayısı **projektif düzlemin mertebesi** olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.7. Her altdüzlemi bir projektif düzlem olan bir lineer uzaya **projektif uzay** denir. Eğer bir projektif uzayın her düzlemi bir projektif düzlem veya dejenere projektif düzlem ise lineer uzaya **genelleştirilmiş projektif uzay** denir.

Bir **projektif uzayın mertebesi** herhangi bir doğrunun nokta sayısının bir eksiği olarak tanımlanır. Böylelikle bir projektif düzlemin mertebesi ile benzer bir tanımlamaya sahip olunur.

2.4. Afin ve Projektif Uzay Arasındaki İlişkiler

Bir afin uzayın bir projektif uzaya genişletileceğini göstermek için afin uzaydaki herbir paralel sınıf "yeni nokta" veya "sonsuzdaki nokta" ya karşılık getirilecektir. Böylece yeni doğrular elde edilmiş olacaktır. A afin uzayının tüm eski noktalarından, yeni noktalarından ve yeni doğrularından oluşan bu yeni yapı bir projektif uzay oluşturur.

A nın herbir doğrusu yeni bir noktaya sahip olur; bu nokta $(A1)$ aksiyomundan dolayı bir tek paralel sınıfa karşılık gelen sonsuzdaki noktadır. Elde edilen yeni noktalar kümesi tek başına projektif uzayın bir hiperdüzlemini oluşturur. n. mertebeden bir projektif uzaydan herhangi bir hiperdüzlem kaldırılırsa n. mertebeden bir afin düzlem elde edilir.

Afin ve projektif uzaylar arasındaki bağlantı ve projektif uzay tanımı gereğince bir afin uzayın herhangi bir düzleminin bir afin düzlem olduğu sonucu elde edilir. Mertebenin iki olması durumunda ortaya çıkan problem 2. mertebeden afin düzlemin tanımlanan şekilde bir düzlem olmayışıdır (Fakat mertebesi iki olmayan afin düzlemler gerçek düzlemdir).

2. mertebeden bir afin düzlem olma durumu için $(A2)$ aksiyomunun duali olan $(A2)'$ aksiyomu problemin üstesinden gelinebilmesini sağlar. Tek değişik durum mertebenin iki olması değildir. Kendisi afin uzay olmamasına rağmen tüm düzlemleri 3. mertebeden afin düzlem olan bir lineer uzay örneği verilmiştir (Hall, 1960).

Bu ise sonsuz sayıda bu tip örnek bulunabilmesi için bir olanak sağlamıştır. Eğer bir lineer uzayın herbir düzlemi en az 4. mertebeden bir afin düzlem ise uzayın bir afin uzay olduğu ispatlanmıştır (Buekenhout, 1969).

Genel olarak eğer $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ ve $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ ise $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayı $S' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ lineer uzayına gömülebilirdir.

2.5. Bazı Temel Sonuçlar ve Teoremler

Bu kısımda sonlu lineer uzaylarla ilgili çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel argümanlar ve sonuçlar verilecektir.

Önerme 2.5.1. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay $p \notin L$ ve $L \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda $r_p \geq k_L$ dir.

İspat. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay $p \notin L$ ve $L \in \mathcal{L}$ olsun. $p \notin L$ olduğundan, p noktası ile L üzerindeki tüm noktaların birleştirilmesiyle k_L adet doğru meydana gelir. Bu taktirde $r_p \geq k_L$ dir. $\square$

Herhangi bir $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayı bir matris ile temsil edilebilir. Her nokta matrisin bir satırına ve her doğru matrisin bir sütununa karşılık gelir. p_i noktası L_j doğrusu üzerinde ise matrisin i. satır j. sütununa 1, üzerinde değil ise 0 yazılır. Tanımlanan matrisin $(i, j)-$inci elemanı r_{ij} olarak gösterilir ve

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 \; ; \; p_i \notin L_j \\ 1 \; ; \; p_i \in L_j \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.5.2. r_{ij} değerine p_i noktasının L_j doğrusu **üzerinde bulunma değeri** denir. Bu nokta ve doğruların temsil edildiği matrise de üzerinde bulunma matrisi denir. Bu lineer uzayı temsil eden matrise bakıldığında uzay hakkında bazı bilgiler elde edilebilir. Örneğin; herhangi bir satırdaki birlerin sayısı bu satıra eşlenen noktadan geçen doğru sayısıdır. Ayrıca; herhangi bir sutundaki birlerin sayısı bu sütuna eşlenen doğru üzerindeki nokta sayısıdır.

Önerme 2.5.3. Herhangi bir $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ sonlu lineer uzayında

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} k_L = \sum_{p \in \mathcal{P}} r_p$$

dir.

İspat. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayı için eşitliğin sol tarafındaki toplam herbir doğru üzerindeki noktaların sayısının toplamını verir. Eşitliğin sağ tarafındaki toplam ise herbir noktadan geçen doğruların sayısının toplamını verir. Üzerinde bulunma matrisi yardımıyla her iki tarafın eşitliği görülebilir. □

Önerme 2.5.4. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı herhangi bir sonlu lineer uzay olsun. Bu durumda

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} k_L(k_L - 1) = v(v - 1)$$

dir.

İspat. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı sonlu bir lineer uzay olsun. Farklı nokta çiftlerinin sayısı iki farklı yoldan sayılacaktır. Öncelikle herhangi farklı iki nokta $(L1)$ gereğince bir tek doğru belirttiği için, doğruların üzerindeki farklı nokta çiftlerinin sayılmasıyla eşitliğin sol tarafı oluşur. Lineer uzayın tüm farklı nokta çiftleri sayısı eşitliğin sağ tarafına yazılıp gerekli düzenleme yapıldığında yukarıdaki eşitliğe ulaşılır. □

Önerme 2.5.5. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, b doğrulu sonlu bir lineer uzay olsun. Bu durumda

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} r_p(r_p - 1) \leq b(b - 1)$$

dir. Bu ifadenin eşitlik olması için gerek ve yeter şart S deki herhangi iki doğrunun kesişmesidir.

İspat. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, b doğrulu sonlu bir lineer uzay olsun. Eşitsizliğin sol tarafına kesişen doğru çiftleri sayısı, sağ tarafına ise tüm doğru çiftleri sayısı yazıldığında sol tarafın sağ taraftan küçük veya eşit olması gerektiği görülür. Böylece yukarıdaki eşitsizlik ortaya çıkar. Eşit olması için gerek ve yeter şart S deki tüm doğruların kesişmesidir. □

Aşağıda sonlu lineer uzayların temel teoreminin ispatı verilecektir. Literatürde birçok ispatı vardır. İlk yapılan ispat Bruijn ve Erdös'ün 1948 deki ispatıdır. Fakat kıyaslama açısından daha kısa olan Fowler'in 1984 deki ispatı verilecektir.

Teorem 2.5.6. (Temel Teorem) $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, b doğrulu ve v noktalı aşikar olmayan sonlu bir lineer uzay olsun. Bu durumda $b \geq v$ dir. Ayrıca $b = v$ olması için gerek ve yeter şart S nin bir projektif düzlem veya yaklaşık demet olmasıdır.

İspat. $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, b doğrulu ve v noktalı aşikar olmayan sonlu bir lineer uzay olsun. S deki tüm p noktaları ve L doğruları için $b - r_p > 0$ ve $b - k_L > 0$ dır. $b \leq v$ olsun. Herhangi bir L doğrusu için $(v - k_L)/(b - k_L) \geq v/b$ dir.

Herhangi bir p noktası ve L doğrusu için

$$\delta(p, L) = \begin{cases} 0\ , & p \notin L \\ 1\ , & p \in L \end{cases}$$

olsun.

Bir L doğrusu için

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \delta(p, L) = k_L$$

ve bir p noktası için

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} \delta(p, L) = r_p$$

dir. Böylece

$$v = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{b - r_p}{b - r_p} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \delta(p, L)}{b - r_p} \right)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $p \in L$ ise

$$\frac{1 - \delta(p, L)}{b - r_p} \geq \frac{1 - \delta(p, L)}{b - k_L} \tag{1}$$

dir. $p \notin L$ ise Önerme 2.5.1 gereğince $r_p \geq k_L$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} v &\geq \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \delta(p, L)}{b - k_L} \right) = \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 - \delta(p, L)}{b - k_L} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{v - k_L}{b - k_L} \geq \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{v}{b} = v \end{aligned}$$

dir. Böylece yukarıdaki her yerde eşitlik vardır; $(v - k_L)/(b - k_L) = v/b$ ve dolayısıyla $v = b$ olur. Ek olarak $p \notin L$ için (1) denklemindeki eşitsizlik $r_p = k_L$ olmasını gerektirir; böylece herhangi iki doğru kesişir. Buradan hareketle S bir projektif düzlem veya yaklaşık demettir. □

Tanım 2.5.7. Herbir doğrusu k noktadan oluşan v noktalı sonlu bir S lineer uzayına **2-(v,k,1) dizayn** denir. $2-(v,3,1)$ dizaynına **Steiner üçlü sistemi** denilecektir.

Afin ve projektif düzlemler sırasıyla $2-(n^2,n,1)$ ve $2-(n^2+n+1,n+1,1)$ dizayndır.

Tanım 2.5.8. Her noktasından 1 tane $4-$doğru, 4 tane $3-$doğrunun geçtiği, 12 nokta ve 19 doğrulu lineer uzaya **Nwankpa-Shrikhande düzlemi** denir. Ayrıca $5-$noktalı 1 tane doğru ve $3-$noktalı 15 tane doğru içeren 11 noktalı bir tek lineer uzaya ise **Nwankpa düzlemi** denir.

BÖLÜM 3

LİNEER UZAYLARIN KOMPLEMENTLERİ

3.1. Bölümün Amacı

Bu bölümdeki temel tanım, önerme ve teoremler L. M. Batten (1986) dan alınmıştır.

Bu bölümde bazı lineer uzayların bir projektif düzleme nasıl gömülebildiği gösterilecektir. İki doğru, üçgen, hiperoval ve Baer altdüzlemin komplementleri böyle yapılar arasındadır. Burada pseudo-komplement fikri önem arz etmektedir. n. mertebeden bir P projektif düzleminden bir X kümesinin kaldırıldığı varsayılsın. Bu durumda bazı parametrelere sahip (nokta sayısı, doğru sayısı, nokta ve doğru derecesi gibi) bir $P-X$ lineer uzayı elde edilir. $P-X$ ile aynı parametreye sahip bir lineer uzaya P projektif düzleminde X in **pseudo-komplementi** denir.

Bir projektif düzlemde bir doğrunun pseudo-komplementi bir afin düzlemdir. n. mertebeden bir projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementi n^2-n noktalı ve n^2+n-1 doğrulu bir lineer uzayın her noktasının $n+1$ dereceli ve her doğrusunun $n-1$ veya n dereceli olmasıdır.

Bu bölümün temel amacı bazı pseudo-komplementlerin bir gerçek komplement olduğunu göstermektir. Herhangi farklı iki noktanın tam olarak bir doğru oluşturmasından meydana gelen doğrulardan ve noktalardan oluşan sonlu bir S üzerinde bulunma yapısı düşünülecektir. Böyle bir yapı 1 dereceli doğruların bulunmasına izin verilen bir lineer uzay olacaktır.

$(L1)$ aksiyomunu ve her noktasından tam olarak r tane doğru geçmesi koşulunu sağlayan $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ çifti bir **(r,1)-dizayn** olarak adlandırılır.

Gömme yapısının altında yatan fikir; bir projektif düzleme ulaşmak için S lineer uzayına yeni noktalar ilave edilerek S nin genişletilmesidir.

Tanım 3.1.1. Bir projektif veya afin düzlemden bir nokta atılarak elde edilen sonlu lineer uzaylara sırasıyla bir **delinmiş projektif** veya **delinmiş afin düzlem** denir.

Tanım 3.1.2. $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, n. mertebeden bir projektif düzlem ve $\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}$ olsun. $\Pi \diagdown X$ e X in **P de komplementi** denir.

Tanım 3.1.3. S bir $(r,1)-$dizayn ve p, S nin bir noktası olsun. $S' = S - p$ üzerinde bulunma yapısı; S nin p den farklı noktalarından ve p den farklı noktalardan geçen doğrularından oluşur. Bu durumda S' bir $(r,1)-$dizayndır. S, S' nün **genişlemesi** olarak adlandırılır.

Eğer bir S^*, $(r,1)-$dizaynı, S den s tane noktanın atılmasıyla oluşan yapı ise, S^*, $(r,1)-$dizaynının S ye s defada genişletileceği söylenebilir.

Önerme 3.1.4. S; b doğrulu $b = n^2+n+1$ ve ikişerli kesişen s adet $n-$doğruya sahip bir $(n+1,1)-$dizayn ise S, s kez genişletilebilir.

İspat. S; b doğrulu $b = n^2 + n + 1$ ve ikişerli kesişen s adet $n-$doğruya sahip bir $(n+1,1)-$dizayn olsun. N bir $n-$doğru olsun.

$$\Pi_N = \{N\} \cup \{X \ \mid X,\ N \text{ ye paralel bir doğru}\}$$

olsun. Her nokta $n+1 = k_N + 1$ dereceli olduğundan, N nin dışındaki herbir nokta N ye paralel olan tam olarak bir doğru üzerindedir. Bu ise, Π_N nin bir paralel sınıf olduğunu gösterir. N kendisi hariç n^2 tane doğru ile kesiştiğinden $|\Pi_N| = n+1$ dir.

N ve G kesişen iki farklı $n-$doğru olsun. Bu durumda G, Π_N in n tane doğrusuyla kesişir; bu yüzden $|\Pi_G \cap \Pi_N| = 1$ dir.

İkişerli olarak kesişen s adet $n-$doğru var olduğundan, herhangi ikisi bir tek ortak doğruya sahip bir Π_1, $\Pi_2, ...,$ Π_s paralel sınıfı vardır. Π_j nin doğruları S nin yeni bir p_j ($j = 1, ...,$ s) noktasında kesişsin.

Π_j ve Π_k daki tek ortak doğru, S nin iki yeni p_j ve p_k noktasından geçen doğrudur. S ye yeni $p_1, ..., p_s$ noktalarının ilave edilmesiyle oluşan S' bir lineer uzaydır. Her Π_j paralel sınıfı $n+1$ doğruya sahip olduğundan, bu lineer uzay bir $(n+1,1)-$dizayndır. Böylece S, s kez genişletilebilir. $\square$

Önerme 3.1.5. $S=(\mathcal{P},\mathcal{L})$, $b=n^2+n+1$ doğrulu ve $v=n^2+n+1-s$ noktalı bir $(n+1,1)-$dizayn olsun. Bu durumda S deki $n-$doğruların sayısı $b_n \geq s(n+2-s)$ dir. $b_n=s(n+2-s)$ olması için gerek ve yeter şart S deki her doğrunun $n-1$, n veya $n+1$ dereceli olmasıdır.

İspat. $S=(\mathcal{P},\mathcal{L})$, b doğrulu, v noktalı $b=n^2+n+1$ ve $v=n^2+n+1-s$ olan bir $(n+1,1)-$dizayn olsun. Önerme 2.5.3 ve Önerme 2.5.4 den,

$$v(n+1)=\sum_{p\in\mathcal{P}} r_p=\sum_{L\in\mathcal{L}} k_L \text{ ve } v(v-1)=\sum_{L\in\mathcal{L}} k_L(k_L-1)$$

dir. Buradan

$$\sum_{L\in\mathcal{L}}(n+1-k_L)(n-1-k_L)=s(s-2-n)$$

ve

$$0\leq \sum_{k_L\neq n}(n+1-k_L)(n-1-k_L)=s(s-2-n)+b_n$$

dir.

$$-b_n\leq \sum_{L\in\mathcal{L}}(n+1-k_L)(n-1-k_L)$$

olduğundan

$$s(n+2-s)\leq b_n$$

dir.

($\Longrightarrow$) Buradan eğer $b_n=s(n+2-s)$ ise

$$\sum_{k_L\neq n}(n+1-k_L)(n-1-k_L)=b_n+s(s-2-n)=0$$

dır. Böylece sadece $n+1$, n ve $n-1$ dereceli doğrular vardır.

($\Longleftarrow$) Tersine $k_L\in\{n+1,n,n-1\}$ ise $b_n=s(n+2-s)$ dir. $\square$

Önerme 3.1.6. **(**Vanstone, 1973; de Witte, 1975**)** S, v noktalı bir lineer uzay ve S nin her noktası en çok $n+1$ dereceli olsun. Eğer $v\geq n^2$, $n\geq 2$ ise, o zaman S, n. mertebeden bir projektif düzleme genişletilebilir.

İspat. S, v noktalı bir lineer uzay ve S nin her noktası en çok $n+1$ dereceli olsun. Her noktadan n veya $n+1$ tane doğru geçer ve her doğru n veya $n+1$

noktalıdır. Ayrıca her $(n+1)-$noktadan yalnızca $n-$doğrular geçer. Herhangi bir $(n+1)-$doğru her $n-$noktadan geçer. Her p, $n-$noktası $S-p$ lineer uzayının $n-$doğrularından oluşan n adet paralel sınıftan birine karşılık gelmektedir. Bu paralel sınıfa, ona karşılık gelen yeni bir p' noktası ve pp' doğrusu katıldığında p ve p' noktaları $(n+1)-$nokta olur. Dolayısıyla S nin bir $(n+1,1)-$dizayn olduğu kabul edilebilir.

Açıkça, S deki tüm L doğruları için $k_L \leq n+1$ dir. $k_L = n+1$ olması için gerek ve yeter şart L nin her doğru ile kesişiyor olmasıdır. Eğer S de $n+1$ dereceli doğru varsa, bu durumda S bir $(n+1,1)-$dizayn olduğundan S deki doğru sayısı $b = 1 + k_L n = n^2 + n + 1$ dir.

Eğer $v = n^2+n+1$ ise Önerme 2.3.5 den S bir projektif düzlemdir. Diğer taraftan eğer $v < n^2+n+1$ ise, o zaman Önerme 3.1.5 den S nin en az bir $n-$doğrusu vardır. Önerme 3.1.4 den, S genişletilebilir. Bu yol tekrarlanırsa ispat tamamlanır.

Eğer S deki her doğru en çok n dereceli ise, o zaman $v \geq n^2$ den ve S deki tüm p noktaları için $r_p = n+1$ olduğundan, her noktadan sadece n dereceli doğruların geçtiği gösterilebilir. Dolayısıyla S, Önerme 2.2.2 den n. mertebeden bir afin düzlemdir. $\square$

Sonuç 3.1.7. S, v noktalı, ikişerli kesişen s adet $n-$doğruya sahip $b = n^2+n+1$ doğrulu bir $(n+1,1)-$dizayn olsun. Eğer $v + s \geq n^2$ ise, o zaman S, n.mertebeden bir projektif düzleme gömülebilir.

İspat. İspata Önerme 3.1.4 ve Önerme 3.1.6 dan ulaşılabilir. $\square$

3.2. Pseudo-Komplement Teoremleri

Paralel sınıfların genişleyen lineer uzaylarda önemli bir rol oynadığı görüldü. Buraya kadar paralel sınıflar $n-$doğrular tarafından belirlendi. Eğer uzayda hiç $n-$doğru yoksa, bir paralel sınıfın varlığını ispatlamak daha zordur. Örneğin, bir $(n+1,1)-$dizayndaki $(n-1)$. dereceden bir L doğrusunun herhangi bir paralel sınıfta bulunduğunu göstermek için, L ye paralel doğrular kümesinin karşılıklı olarak paralel iki doğru kümesine ayrılabilir olduğunu göstermek gerekir. Bunun için aşağıdaki önerme kullanışlı olacaktır.

Önerme 3.2.1. S bir $(n+1,1)-$dizayn ve $b = n^2+n+1-z$ doğrulu olsun. L doğrusu ikişerli kesişen L_1, L_2 ve L_3 doğrularına paralel olan $n-1$ dereceli bir doğru olsun. Eğer L_j nin derecesi $n+1-d_j$ ile gösterilirse ($j = 1,2,3$) o zaman,

$$n \leq d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 - d_1 - d_2 - d_3 - z$$

dir.

İspat. S önermedeki şartları taşıyan bir $(n+1,1)-$dizayn olsun. M, L ye paralel olan doğruların kümesi olsun. L yi kesen $k_Ln = n^2 - n$ tane doğru olduğundan, $|M| = b - 1 - (n^2 - n) = 2n - z$ dir.

$M - \{L_j\}$ kümesinin L_j ile kesişen doğrularının kümesi M_j olsun. L_j nin her noktası L ye paralel iki doğrunun üzerinde bulunduğundan, $|M_j| = n + 1 - d_j$ dir. $j \neq k$ için, $M - (M_j \cup M_k)$ nın her doğrusu L_j ve L_k ya paraleldir.

L_j ve L_k ya paralel olan doğruların sayısı

$$b - 2 - k_{L_j}n - k_{L_k}n + n - 1 + (n - d_j)(n - d_k) = d_jd_k - z$$

dir.

L doğrusu, L_j ve L_k ya paralel olduğundan $|M| - |M_j \cup M_k| \leq d_jd_k - z - 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |M_j \cap M_k| &= |M_j| + |M_k| - |M_j \cup M_k| \\ &\leq |M_j| + |M_k| - |M| + d_jd_k - z - 1 = d_jd_k - d_j - d_k + 1 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup M_3| &\geq |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| \\ &\geq 3n - d_1d_2 - d_1d_3 - d_2d_3 + d_1 + d_2 + d_3 \end{aligned}$$

dür. $M_j \subseteq M$ ve $|M| = 2n - z$ den

$$3n - d_1d_2 - d_1d_3 - d_2d_3 + d_1 + d_2 + d_3 \leq 2n - z = |M|$$

dir. $\square$

Teorem 3.2.2. **(**Totten, 1976; Oehler, 1975; Batten, 1991**)** $n \geq 5$, n. mertebeden bir projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementi olan S bir gerçek komplementtir.

İspat. S, n. mertebeden bir projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementi olsun. S, n. dereceden $n-1$ tane ve $(n-1)$. dereceden n^2 tane doğruya sahiptir. S de her noktadan n. dereceden 1 tane ve $(n-1)$. dereceden n tane doğru geçer. Özel olarak, $n-$doğrular karşılıklı paraleldir ve her $n-$doğru herhangi bir $(n-1)-$doğru ile kesişir.

L, $n-1$ dereceli herhangi bir doğru olsun. H, L ye paralel bir doğru olsun ve L ye paralel olup H ile kesişen doğruların kümesi M olsun. M kümesinin doğrularının karşılıklı paralel olduğu gösterilebilir. H_2 ve H_3, M de kesişen iki doğru olsun. O zaman H, H_2 ve H_3 birbiriyle karşılıklı olarak kesişir ve bu durumda Önerme 3.2.1 kullanılabilir.

$d_1 = d_2 = d_3 = 2$ ve $z = 2$ olduğundan,

$$n \leq 3.2.2 - 3.2 - 2 = 4$$

elde edilir. Bu ise $n \geq 5$ olduğundan çelişkidir. Bu yüzden M kümesinin doğruları karşılıklı olarak paraleldir.

Sonuç olarak, $\Pi = M \cup \{L\}$, karşılıklı olarak paralel n adet $n-1$ dereceli doğru kümesidir. S deki nokta sayısı $v = n(n-1)$ olduğundan Π bir paralel sınıftır. L nin dışındaki her nokta L ye paralel iki tane doğrunun üzerindedir. Π de olmayan ve L ye paralel olan doğrulardan ve L den oluşan küme Π' olsun. Π' bir paralel sınıftır. Böylece $|\Pi'| = n$ ve $\Pi \cap \Pi' = \{L\}$ dir.

Π ve Π' paralel sınıfının doğrularının sırasıyla ∞ ve ∞' yeni noktasında kesiştiğini kabul edelim. Ayrıca S ye 1 dereceli iki yeni $\{\infty\}$ ve $\{\infty'\}$ doğruları ilave edilsin. Son yapı, $v+2 = n^2-n+2$, $v = n^2-n$ noktalı ve $b+2 = n^2+n+1$, $b = n^2+n-1$ doğrulu bir D, $(n+1,1)-$dizayndır. ∞ noktası, D nin n dereceli n tane doğrusunun üzerinde bulunduğundan Önerme 3.1.4 den D, $v = n^2+2$ tane noktaya sahip bir D', $(n+1,1)-$dizaynına gömülebilir.

O zaman Önerme 3.1.6 dan D', n. mertebeden bir P projektif düzlemine gömülebilir ve S, P ye gömülebilir. Açıkça, S iki doğrunun gerçek komplementidir. $\square$

Sonuç 3.2.3. Eğer S, $n \geq 3$, n. mertebeden bir projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementi ise, o zaman S iki doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış n. mertebeden bir projektif düzlem veya Nwankpa-Shrinkhande düzlemidir.

Teorem 3.2.4. (Ralston, 1981) $n > 6$, n. mertebeden bir projektif düzlemde herhangi bir üçgenin pseudo-komplementi olan S bir gerçek komplementtir.

İspat. S nin n. mertebeden bir projektif düzlemde bir üçgenin pseudo-komplementi olduğunu kabul edelim. O zaman, S, $v = (n-1)^2$ noktalı ve $b = n^2 + n - 2$ doğrulu bir $(n+1, 1)-$dizayndır. Ayrıca S nin her doğrusu $n-2$ veya $n-1$ derecelidir. $(n-1)$. dereceden doğruları uzun doğru ve $(n-2)$. dereceden doğruları kısa doğru olarak adlandıralım. Aşağıdaki 4 maddenin doğruluğu gösterilebilir:

(1) Her noktadan 3 tane uzun, $n-2$ tane kısa doğru geçer ve

(2) S de $3(n-1)$ tane uzun ve $(n-1)^2$ tane kısa doğru vardır. Ayrıca,

(3) Herhangi bir uzun doğru $n-2$ tane uzun doğruya ve $n-1$ tane kısa doğruya paraleldir ve

(4) Kesişen iki uzun doğruya paralel bir tek doğru vardır.

L uzun bir doğru olsun. L ye paralel uzun doğruların karşılıklı olarak paralel olduğu iddia edilebilir. Aksi kabul edilsin. L, kesişen L_1 ve L_2 uzun doğrularına paralel bir doğru olsun. O zaman, (4). maddeden L ye paralel her doğru L_1 ve L_2 ile kesişir. L_1 ve L_2, L ye paralel olan $n-1$ tane doğru ile kesişir ve L sadece $2n-3$ tane doğruya paraleldir. Bu yüzden, L_1 ve L_2 ile kesişen ve L ye paralel olan bir tek L_3 doğrusunun olduğu gösterilebilir.

L_3, $n-1$ veya $n-2$ dereceli olduğundan, Önerme 3.2.1 den $n \leq 6$ dır; bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, L ye paralel olan uzun doğrular karşılıklı olarak paraleldir. L ye paralel uzun doğrularla birlikte L, karşılıklı olarak paralel olan $n-1$ adet uzun doğrular kümesi olan Π yi oluşturur. $v = (n-1)^2$ olduğundan, Π bir paralel sınıftır.

L', Π nin herhangi bir doğrusu olsun. $|\Pi| = n-1$ olduğundan, Π de bulunmayan ve L' ye paralel olan her doğru $n-2$ derecelidir ve $\Pi - \{L'\}$ nün her doğrusuyla kesişir. L' nün dışındaki her nokta, bir tanesi Π de olan, L' ye paralel olan iki doğru üzerinde bulunur. Bu durum, L' nün dışındaki her noktadan L' ye paralel bir tek kısa doğru geçtiğini gösterir. L' kendisine paralel kısa doğrularla birlikte bir paralel sınıf oluşturur. Ayrıca, bu paralel sınıfın L' den farklı her doğrusu $\Pi - \{L'\}$ nün herhangi bir doğrusuyla kesişir.

Sonuç olarak, herbiri Π nin bir uzun doğrusundan ve bu uzun doğruya paralel olan $n-1$ tane kısa doğrusundan oluşan ve karşılıklı olarak kesişmeyen $n-1$ adet $\Pi_1, ..., \Pi_{n-1}$ paralel sınıfı vardır. Her kısa doğru, Π nin bir tek doğrusuyla paralel olduğundan Π_j paralel sınıflarının tam olarak birindedir.

Π_j nin doğrularının yeni bir ∞_j noktasında kesiştiği kabul edilsin. Ayrıca S ye yeni $\{\infty_1, ..., \infty_{n-1}\}$ doğrusu ilave edilsin. Π_j ler karşılıklı olarak kesişmediğinden, bu yolla elde edilen S' yapısı da bir lineer uzaydır. S' nün n. mertebeden bir projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementi olduğu iddia edilebilir. Buradan S, Π_j kümelerinin birinde bulunduğundan, S nin herbir kısa doğrusunun S' de $n-1$ dereceli olduğu görülür. Π nin herbir doğrusu S' de n derecelidir ve S nin her uzun doğrusu da S' de $n-1$ derecelidir. Aynı zamanda yeni doğru olan $\{\infty_1, ..., \infty_{n-1}\}$ doğrusu $n-1$ derecelidir. Bu durum, S' nün n. mertebeden bir projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementi olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.3, S' nün gerçek bir komplement olduğunu gösterir. Dolayısıyla S, n. mertebeden bir projektif düzleme gömülebilir ve bir üçgenin komplementidir.

n. mertebeden bir projektif düzlemde bir $(n+2)-$ yay aynı zamanda **hiperoval** olarak adlandırılır. Bir hiperovalin her doğrusu hiperovali hiç kesmez veya 2 noktada keser. Bu yüzden, n. mertebeden bir projektif düzlemde bir hiperovalin pseudo-komplementi $v = n^2 - 1$ noktalı ve $b = n^2 + n + 1$ doğrulu ve $(n+1)$. dereceden nokta, $(n+1)$. ve $(n-1)$. dereceden doğru içeren bir lineer uzaydır.

Teorem 3.2.5. $n > 6$, n. mertebeden bir projektif düzlemde bir hiperovalin pseudo-komplementi olan S bir gerçek komplementtir.

İspat. S nin n. mertebeden bir projektif düzlemde bir hiperovalin pseudo-komplementi olduğu kabul edilsin. $(n+1)$. dereceden doğrular uzun doğru ve diğer doğrular kısa doğru olarak adlandırılsın. Her noktadan $(n+2)/2$ tane kısa ve $n/2$ tane uzun doğru geçer. Kısa doğruların sayısı $(n+2)(n+1)/2$ ve uzun doğruların sayısı $n(n-1)/2$ dir. Ayrıca, bir kısa doğru kendisi hariç $2n$ tane diğer kısa doğruya paraleldir ve bir uzun doğru her doğru ile kesişir.

H bir kısa doğru olsun. M, H ya paralel olan $2n$ elemanlı doğru kümesi olsun. M bir üçgen içerseydi o zaman Önerme 3.2.1 den $n \leq 6$ olurdu. Bu yüzden M kümesi üçgen içermez.

L_1 ve L_2, M nin kesişen doğruları olsun. L_2 ile kesişen M nin doğrularının kümesi M_1 ve L_1 ile kesişen M nin doğrularının kümesi M_2 ile gösterilsin. M üçgen içermediğinden, M_1 ve M_2 kümeleri karşılıklı olarak paralel doğrulardan oluşur. $|M_j| = n - 1$ ve $L_j \in M_j$ dir. Ayrıca, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ (M üçgen içermediğinden).

G_1 ve G_2, $M - (M_1 \cup M_2)$ nin iki doğrusu olsun. M_1 in her doğrusunun M_2 nin en çok iki tane doğrusuna paralel olduğu gösterilebilir. Çünkü M nin her doğrusu M nin diğer $n-1$ tane doğrusuyla kesişir. O zaman M_1 in her doğrusu M_2 nin en az $n-3$ tane doğrusuyla kesişir, $M = M_1 \cup M_2 \cup \{G_1, G_2\}$ ve M_1 karşılıklı olarak paralel doğrulardan oluşur.

G_1 doğrusu M nin kendisi hariç $n-1$ tane doğrusuyla kesişir. Kesiştiği doğruların biri G_2 olabilir. Fakat doğruların en az $n-2$ tanesi $M_1 \cup M_2$ dedir. Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın G_1 in, M_2 nin en az $(n-2)/2 > 2$, $(n-2)/2$ tane doğrusuyla kesiştiği söylenebilir. Buradan eğer L; M_1 in herhangi bir doğrusu ise, o zaman, M_2 nin bir doğrusuyla kesişir; aynı zamanda G_1 ile de kesişir. M üçgen içermediğinden, bu durum G_1 in L ye paralel olduğunu gösterir. Bu yüzden G_1, M_1 in her doğrusuna paraleldir.

Sonuç olarak, $\Pi = M_1 \cup \{H, G_1\}$, $|\Pi| = n + 1$ ve Π karşılıklı olarak paralel doğrular kümesidir. S de nokta sayısı $v = n^2 - 1 = |\Pi|\,(n-1)$ den, Π bir paralel sınıftır. Dolayısıyla, eğer Π nin doğrularının yeni bir noktada kesiştiği kabul edilirse tekrar bir $(n+1, 1)-$dizayn elde edilir. Önerme 3.1.6 den bu dizayn ve aynı zamanda S, n. mertebeden bir projektif düzleme gömülebilir. $\square$

Bu sonuç ilk olarak Bose ve Shrikhande tarafından 1973'de ispatlandı ve sonra de Witte tarafından 1977'de $n \geq 2$ ye izin verilerek genelleştirildi.

Bu bölüm diğer gömme sonuçlarıyla tamamlanacaktır. Paralel sınıflar inşasında $n-$doğrular tekrar kullanılacaktır. P, n. mertebeden bir projektif düzlem olsun. P nin bir **altdüzlemi**, noktaları P nin noktaları, doğruları P nin doğruları olan ve üzerinde bulunma yapısı P nin üzerinde bulunma yapısı olan bir B projektif düzlemidir. B, P nin altdüzlemi olsun ve B nin mertebesi m ile gösterilsin. R. H. Bruck un bir teoreminden , eğer $m < n$ ise bu durumda $m \leq \sqrt{n}$ dir (Hughes and Piper, 1973). $\sqrt{n}$. mertebeden bir altdüzlem P nin bir **Baer altdüzlemi** olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.6. Bir Baer altdüzlemi olan S nin pseudo-komplementi bir Baer altdüzlemin komplementi olarak bir projektif düzleme gömülebilir.

İspat. S, Baer altdüzlemi olsun. Baer altdüzlemi tanımından S, $v = n^2 - \sqrt{n}$ noktaya, $b = n^2 + n + 1$ doğruya sahiptir ve $n \geq 2$ için, noktalar $n + 1$ ve uzun doğrular n, kısa doğrular $n - \sqrt{n}$ derecelidir.

S nin her p noktası için $r_p = n + 1$ olduğundan, her L uzun doğrusu bir tek paralel sınıf $\Pi(L)$ dedir. L diğer n^2 doğru ile kesiştiğinden, $|\Pi(L)| = b - n^2 = n + 1$ dir.

Her noktadan tam olarak bir tek kısa doğru geçtiği kolayca gösterilebilir. Buradan, tüm kısa doğruların sayısı $b_s = v/(n - \sqrt{n}) = n + \sqrt{n} + 1$ dir. $b - b_s = n^2 - n$ tane uzun doğru olduğundan ve her $\Pi(L)$ paralel sınıfı $n - \sqrt{n}$ tane uzun doğruya sahip olduğundan, S de $(n^2 - \sqrt{n})/(n - \sqrt{n}) = n + \sqrt{n} + 1$ adet paralel sınıf vardır. □

S ye yeni noktalar olarak paralel sınıflar eklenecektir. Herhangi iki paralel sınıf tam olarak bir doğru üzerinde kesiştiğinden, bir S' lineer uzayı mevcuttur. Bu lineer uzay $n^2 - \sqrt{n} + n + \sqrt{n} + 1 = n^2 + n + 1$ noktalı ve $n^2 + n + 1$ doğruludur; dolayısıyla S', n. mertebeden bir projektif düzlemdir.

Özel olarak, her kısa doğru $n + 1$ tane noktaya sahiptir. Bu yüzden bu doğrular $\sqrt{n} + 1$ tane yeni noktaya sahiptir. Benzer şekilde, herhangi uzun doğru henüz yeni bir noktadan geçer. Tam olarak $n + \sqrt{n} + 1$ yeni nokta olduğundan, kısa doğrularla birlikte yeni noktalar $\sqrt{n}$. mertebeden bir projektif düzlemi oluşturur. □

Teorem 3.2.7. S, v noktalı, b doğrulu ve aşağıdaki özelliklerde bir lineer uzay olsun:

1. $v = m^4 - m^2 - 2m - 1$, $12 < m < \infty$,

2. Her noktadan $m^2 + 1$ tane doğru geçer,

3. $b = m^4 + m^2 + 1$,

4. Her doğru $m^2 - 1$ veya $m^2 - m - 1$ tane noktaya sahiptir,

5. Paralel herhangi L, L' çifti için $m^2 - 1$ noktalı ve her $p \notin L \cup L'$ noktası için L ve L' ye paralel olan p den geçen bir doğru vardır; fakat $m^2 - 1$ noktaya sahip olan bu şekilde birden fazla doğru olamaz.

O zaman S; m^2. mertebeden bir P projektif düzleme tek olarak gömülebilir ve P nin iki ayrık Baer altdüzleminin birleşiminin komplementidir.

Bu sonucun $m = 8$ için doğru olmadığı gösterilmiştir (de Resmini, 1985).

BÖLÜM 4

SONLU LİNEER UZAYLARIN DOĞRU DERECELERİ

4.1. Giriş

Bu bölüm L. M. Batten ve A. Beutelspacher'ın The theory of finite linear spaces adlı kitabının üçüncü bölümü esas alınarak hazırlanmıştır.

Bir S lineer uzayının tüm doğru dereceleri biliniyorsa bu durumda bu lineer uzay hakkında neler söylenebilir? S nin doğru dereceleri kümesi küçük sayılardan oluşan bir küme ise bu problem makul bir cevaba sahiptir. S nin yalnızca bir doğru derecesi varsa, o zaman S bir dizayndır.

S de b_k ve v_r sırasıyla $k-$doğru ve $r-$nokta sayısı olarak gösterilecektir.

Önerme 4.1.1. Bir S lineer uzayında eğer her $r-$noktadan a_r tane $k-$doğru geçiyorsa $kb_k = \sum\limits_r v_r a_r$ dir.

İspat. S nin r dereceli her noktasından a_r adet $k-$doğru geçsin. S deki toplam $r-$nokta sayısı v_r olmak üzere tüm $r-$noktalardan geçen $k-$doğru sayısı $a_r v_r/k$ dır. O halde; S deki toplam $k-$doğru sayısı $b_k = \frac{1}{k}\sum\limits_r v_r a_r$ dir. $\square$

4.2. Ardışık İki Doğru Dereceli Lineer Uzaylar

Aksi belirtilene kadar, S nin, her doğrusu n veya $n+1$ noktaya sahip aşikar olmayan bir lineer uzay olduğu kabul edilsin.

Önerme 4.2.1. S, v noktalı bir lineer uzay olsun.

(i) $v \geq n^2 - n + 1$

(ii) S nin her p noktası için $(v-1)/n \leq r_p \leq (v-1)/(n-1)$

(iii) S nin her p noktasından $nr_p - v + 1$ tane $n-$doğru ve $(1-n)r_p + v - 1$ tane $(n+1)-$doğru geçer.

İspat. S, v noktalı bir lineer uzay ve S nin bir noktası p olsun.

(i) S nin her doğrusu n veya $n+1$ dereceli olduğundan $r_p \geq n$ dir. Bu durumda $v \geq n(n-1) + 1$ dir.

(ii) $v \leq r_p n + 1$ ve $v \geq r_p(n-1) + 1$ olduğundan $(v-1)/n \leq r_p \leq (v-1)/(n-1)$ dir.

(iii) a ve c sırasıyla bir p noktasından geçen $n-$ ve $(n+1)-$doğru sayısı olsun. Bu durumda $a + c = r_p$ ve $a(n-1) + cn = v - 1$ dir. Bu yüzden

$$(a+c)n - a = nr_p - a = v - 1$$

$a = nr_p - v + 1$ ve $c = (1-n)r_p + v - 1$ dir. $\square$

Teorem 4.2.2. S, v noktalı, b doğrulu $v \leq n^2 + 2n + 3$, $n \geq 3$ ve her doğrusu n noktalı olan sonlu bir lineer uzay ise, bu durumda S, $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlem, n. mertebeden bir afin düzlem ya da bir $2-(13,3,1)$, $2-(15,3,1)$, $2-(25,4,1)$, $2-(46,6,1)$, $2-(51,6,1)$ dizayndır.

İspat. S, v noktalı, b doğrulu $v \leq n^2 + 2n + 3$, $n \geq 3$ ve her doğrusu n noktalı olan sonlu bir lineer uzay olsun. Eğer S de her doğru n noktalı ise, bu durumda S nin tüm p noktaları için $r_p = (v-1)/(n-1)$ dir.

$$n \leq r_p = (v-1)/(n-1) \leq n + 3 + (5/(n-1))$$

dir. Bu yüzden $n \leq r_p \leq n + 5$ dir.

Eğer $r_p = n$ veya $n+1$ ise, bu durumda $v = r_p(n-1) + 1$ den; S, Önerme 2.3.5 den sırasıyla $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlem veya Önerme 2.2.3 den n. mertebeden bir afin düzlemdir.

Eğer $r_p = n + 2$ ise $nb = (n+2)v = (n+2)\left[r_p(n-1) + 1\right]$ dir; buradan $n \mid 2$ çelişkisi elde edilir.

Eğer $r_p = n+3$ ise, o zaman $nb = (n+3)v$ dir; buradan $n \mid 6$ dır.

$n = 6$ ise, bu durumda S varlığı henüz bilinmeyen bir $2-(46,6,1)$ dizayndır (Hall, 1986).

$n = 3$ ise S bir $2-(13,3,1)$ Steiner üçlü sistemdir.

Eğer $r_p = n+4$ ise, bu durumda $n \mid 12$ dir. Buradan;

$n = 3$ için $r_p = 7$ dir ve buradan S bir $2-(15,3,1)$ Steiner üçlü sistemdir.

$n = 4$ için $r_p = 8$ dir ve S bir $2-(25,4,1)$ dizayndır.

$n = 6$ için $r_p = 10$ dur ve S bir $2-(51,6,1)$ dizayndır.

$n = 12$ için $r_p = 16$ ve $v = 177$ dir. Fakat $v \leq n^2+2n+3$ den $v \leq 161$ olmalıdır. Bu ise çelişkidir. O halde $n \neq 12$ dir.

Eğer $r_p = n+5$ ise, bu durumda $n \mid 20$ dir. Buradan;

$n = 4$ için $r_p = 9$ ve $v = 28$ dir. $v \leq n^2+2n+3$ olduğundan $v \leq 27$ çelişkisi elde edilir.

$n = 5$ için $r_p = 10$ ve $v = 41$ dir. $v \leq n^2+2n+3$ olduğundan $v \leq 38$ çelişkisi oluşur.

$n = 10$ için $r_p = 15$ ve $v = 136$ dır. Bu ise $v \leq 123$ olmasıyla çelişir.

$n = 20$ için $r_p = 25$ ve $v = 476$ dır. $v \leq 443$ olduğundan çelişki oluşur. $n \mid 20$ için hiçbir n tamsayısı şartları sağlamaz. Sonuç olarak istenenler elde edilmiş oldu. $\square$

Teorem 4.2.3. S, $v \leq (n+1)^2$ noktalı, $n \geq 7$ ve her doğrusu n veya $n+1$ tane noktaya sahip aşikar olmayan bir lineer uzay ise, bu durumda S aşağıdakilerden birisidir:

(i) $(n-1)$. veya n. mertebeden bir projektif düzlem, n. veya $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem

(ii) n. mertebeden delinmiş bir projektif düzlem veya $(n+1)$. mertebeden delinmiş bir afin düzlem,

(iii) Sonsuzdaki bir nokta ilaveli n. mertebeden bir afin düzlem,

(iv) Bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem,

(v) Bir üçgen atılmış $(n+2)$. mertebeden bir afin düzlemdir.

Ayrıca, eğer $v < (n+1)^2$, $n \geq 3$ ve $v \neq 15$ ise:

(vi) Nwankpa-Shrikhande düzlemi,

(vii) Bir $2-(13,3,1)$ dizayn,

$(viii)$ 1 tane $6-$nokta ve 6 tane $4-$doğrusu olan, 20 doğru ve 13 noktalı bir lineer uzaydır.

Bu teoremin ispatı birkaç önermenin içine dağıtılacaktır. Herbir önerme v nin bazı değerleriyle ilgilidir. Burada $n \geq 3$ olduğu kabul edilsin.

Eğer tüm doğrular n noktalı ise, Teorem 4.2.2 kullanılabilir. Eğer tüm doğrular $n+1$ noktalı ise, Teorem 4.2.2 tekrar kullanılabilir. Bu durumda, $n+1 \leq r_p \leq n+2$ ve $r_p = (v-1)/n$ dir. Böylece, S n. mertebeden bir projektif düzlem veya $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlemdir.

Bu yüzden Bölüm 4.2 nin kalanı için S hem $n-$doğru hem $(n+1)-$doğru içerecektir. Bu durumda $v \geq n^2$ olduğu gösterilebilir.

Önerme 4.2.4. S, v noktalı bir lineer uzay olsun. Eğer $v \leq n^2+n-1$ ise, bu durumda S bir nokta ilaveli n. mertebeden bir afin düzlemdir.

İspat. S, v noktalı bir lineer uzay olsun.

$v = n^2$ veya n^2+1 olsun. Bu durumda Önerme 4.2.1 den, S nin her p noktası için; $(v-1)/n \leq r_p \leq (v-1)/(n-1)$ ve $r_p \in \{n, n+1\}$ dir.

$v = n^2$ ve L bir $(n+1)-$doğru olsun. L doğrusu üzerinde olmayan her nokta $(n+1)-$derecelidir ve böyle bir noktadan geçen her doğru $n-$doğrudur. Dolayısıyla L bir tek $(n+1)-$doğrudur. L üzerindeki bir p noktası için

$$n^2 = v = k_L + (r_p-1)(n-1) = n+1+(r_p-1)(n-1)$$

dir. Buradan $(n-1) \mid (n^2-n-1)$ çelişkisine ulaşılır. Bu yüzden $v \neq n^2$ dir.

$v = n^2+1$ ise, bir $(n+1)-$doğru üzerinde olmayan her nokta $n+1$ dereceli olduğundan, herhangi iki $(n+1)-$doğru kesişir. Fakat bir $(n+1)-$noktadan tam olarak 1 tane $(n+1)-$doğru geçer ve bu yüzden tüm $(n+1)-$doğrular aynı bir q noktasından geçer. Her nokta en az 1 tane $(n+1)-$doğru üzerinde olduğundan, $(n+1)-$doğruların hepsi q noktasından geçmek zorundadır. Bu yüzden $S-q$, n. mertebeden bir afin düzlemdir.

$n^2+2 \leq v \leq n^2+n-2$ olsun. $v = n^2+n-d$, $2 \leq d \leq n-2$ olsun. Önerme 4.2.1 den, $n+1-(d+1)/n \leq r_p \leq n+2-(d-1)/(n-1)$ ve buradan her p için $r_p = n+1$ dir. L bir $n-$doğru olsun. L üzerinde olmayan herhangi bir noktadan L ye paralel bir tek doğru geçer; bu doğru $n-$doğrudur. Çünkü tüm $(n+1)-$doğrular L ile kesişir. L ye paralel $n-$doğruların herhangi ikisi kesişmez; aksi taktirde en az $n+2$ tane doğru üzerinde bulunan bazı noktalara sahip olunurdu. Bu yüzden bu $n-$doğrular kümesi noktalara parçalanır. Bu ise $n \mid (n^2+n-d)$ çelişkisine sebep olur. Dolayısıyla $n^2+2 \leq v \leq n^2+n-2$ şartı sağlanmaz.

Son olarak, $v = n^2+n-1$ olsun. Tekrar Önerme 4.2.1 kullanılırsa, tüm p ler için $r_p \in \{n+1, n+2\}$ dir ve herbir $(n+1)-$noktadan 2 tane $n-$doğru ve herbir $(n+2)-$noktadan $n+2$ tane $n-$doğru geçer. Önerme 4.1.1 den,

$$nb_n = 2v_{n+1} + (n+2)v_{n+2} = 2v + nv_{n+2}$$

dir. Dolayısıyla $n \mid 2v$ ve $n \mid (2n^2+2n-2)$ dir. Buradan $n \mid 2$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $v \neq n^2+n-1$ dir. $\square$

Önerme 4.2.5. S, v noktalı bir lineer uzay olsun. Eğer $v = n^2+n$ ise, o zaman S, n. mertebeden delinmiş bir projektif düzlem, bir doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem veya Nwankpa-Shrikhande düzlemidir.

İspat. S, v noktalı bir lineer uzay, $v = n^2+n$ olsun. Önerme 4.2.1 den S nin tüm p noktaları için $r_p \in \{n+1, n+2\}$ ve herbir noktadan 1 tane $n-$doğru ve n tane $(n+1)-$doğru geçer veya $n+1$ tane $n-$doğru ve 1 tane $(n+1)-$doğru geçer. Eğer tüm p ler için $r_p = n+1$ ise, S nin $n-$doğrularının kümesinin bir paralel sınıf olduğu açıktır; bu yüzden S, n. mertebeden delinmiş bir projektif düzlemdir.

p bir $(n+2)-$nokta ise, her $(n+1)-$noktadan $n \geq 3$, n tane $(n+1)-$doğru geçtiğinden, S nin p noktasından geçmeyen bir L, $(n+1)-$doğrusu vardır. p den geçen $(n+1)-$doğru L' olsun. L ve L' nün q noktasında kesiştiği kabul edilsin. Bu durumda q noktası $n+1$ dereceli olmalıdır. L ye paralel olan ve p noktasından geçen bir $n-$doğru M olsun. Bu durumda M nin her noktası $n+2$ derecelidir.

L üzerindeki bir $q' \neq q$ noktası düşünülsün. p, $n+2$ dereceli olduğundan, pq' bir $n-$doğrudur. q' bir $(n+1)-$nokta olsun. O zaman $q'p$ dogrusu q' den geçen bir tek $n-$doğrudur. q dan geçen bir $(n+1)-$doğru, q' den geçen bir $(n+1)-$doğruyu M nin bir p' noktasında keser. p' bir $(n+2)-$nokta olduğundan çelişkidir. Dolayısıyla q' bir $(n+2)-$nokta olmalıdır ve L, q' den geçen bir tek $(n+1)-$doğrudur.

q dan geçmeyen bir $(n+1)-$doğru olsaydı, bu doğru q dan geçen L' den farklı n tane $(n+1)-$doğrunun tümüyle paralel olacaktı. Bu durum olamayacağından, tüm $(n+1)-$doğrular q dan geçer. Ayrıca, q dan geçen $n-$doğru üzerindeki q dan farklı her nokta bir $(n+1)-$doğru üzerindedir. Bu çelişki $L \cap L' = \varnothing$ sonucunu verir. Bu yüzden L veya L' üzerindeki her nokta $n+2$ derecelidir. Dolayısıyla bu doğrulardan farklı olan ve L veya L' yü kesen her doğru bir $n-$doğrudur. S nin her noktasının en az 2 tane $n-$doğru üzerinde olduğuna ve $n+2$ dereceli olduğuna karar verilsin. S deki doğru sayısı $b = (n+1)^2 + n$ dir. Sonuç 3.2.3 den S, bir doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem veya Nwankpa-Shrikhande düzlemidir. $\square$

Önerme 4.2.6. S, v noktalı bir lineer uzay olsun. Eğer $v = n^2 + n + 1$ ise, bu durumda S bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem veya 1 tane $6-$nokta ve 6 tane $4-$doğru içeren, 13 nokta ve 20 doğrulu bir tek lineer uzaydır.

İspat. S, v noktalı bir lineer uzay ve $v = n^2 + n + 1$ olsun. Önerme 4.2.1 den S nin her p noktası için $r_p = n+1$ ve her noktadan sadece $(n+1)-$doğrular geçer veya $r_p = n+2$ ve her noktadan 2 tane $(n+1)-$doğru ve n tane $n-$doğru geçer veya $r_p = n+3$, $n = 3$ ve her noktadan sadece $3-$doğru geçer.

Eğer tüm noktalar $n+1$ dereceli ise bu durumda S, n. mertebeden bir projektif düzlemdir. Bu durum çelişkidir. Çünkü her doğru $n+1$ dereceli olmak zorunda kalır. Bu yüzden $n+2$ veya $n+3$ dereceli noktaların varlığı kabul edilebilir.

$n+3$ dereceli nokta olmadığı kabul edilsin. Aynı zamanda p bir $(n+1)-$nokta ve q bir $(n+2)-$nokta olsun. L doğrusu; S nin pq dan farklı olan ve q dan geçen bir $(n+1)-$doğrusu olsun. O zaman pq veya L üzerinde olmayan her nokta; bir $n-$doğru tarafından q ile birleşmiştir; dolayısıyla $(n+2)-$noktadır. L nin en çok 2 tane $(n+1)-$nokta içerdiği gösterilebilir ve bu yüzden L üzerinde en az 1 tane $q' \neq q$, $(n+2)-$noktasına sahip olunmalıdır. Yalnızca L ve $q'p$ doğruları; q' noktasından geçen $(n+1)-$doğrular olduğundan p noktası, pq üzerindeki bir tek $(n+1)-$noktadır.

p' nün pq üzerindeki ikinci bir $(n+1)-$nokta olduğu varsayılsın. Bu durumda $p' \in L$ dir ve pp' bir $(n+1)-$doğrudur.

s noktası; pp' nün L veya pq doğrusu üzerinde olmayan bir noktası olsun. L üzerinde olmayan ve ss' doğrusu pp' den farklı bir $(n+1)-$doğru olacak şekilde, bir s' noktasının olduğu varsayılsın. O zaman s', $n+2$ derecelidir; fakat s' den 3 tane $(n+1)-$doğru geçer ve bunlar ps', $p's'$ ve ss' dür. Bu çelişkidir. Bu yüzden p, S deki bir tek $(n+1)-$noktadır.

$r_p = n+1$ olduğundan, p den geçen herhangi bir $(n+1)-$doğru p den geçmeyen her $(n+1)-$doğruyla kesişir. Bu durumda p den geçen bir L', $(n+1)-$doğrusu olsun; böylelikle L' üzerinde olmayan her noktadan L' ye paralel bir tek doğru geçer ve bu doğru $n-$doğru olmak zorundadır. Dolayısıyla p den geçen her $(n+1)-$doğruya karşılık gelecek şekilde S nin noktalarının bir parçalanması mevcuttur ve $r_p = n+1$ olduğundan parçalanmalar kesişmez. Bu yüzden her parçalanmaya karşılık gelecek şekilde sonsuzda olan toplam $n+1$ nokta ilave edilebilir. İdeal doğru olan M, yeni lineer uzay olan S' yü elde etmek için gerekli olan ideal noktaları tam olarak içerir. S', $(n+1)^2+1$ noktalıdır ve S' nün tüm doğruları $n+1$ veya $n+2$ derecelidir. $S'-p$ açıkça $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlemdir ve S'', $(n+1)$. mertebeden projektif düzlemine tamamlanabilir. Bu durumda S, $(n+1)$. mertebeden afin düzlemi, S''den M'nün (S nin M doğrusuna karşılık gelen S''nün doğrusu) ve herhangi bir doğrusunun bir noktasının atılmasıyla oluşur.

Tüm noktalar $n+2$ dereceli olsun. Önerme 4.1.1 den

$$(n+1)b_{n+1} = 2(n^2+n+1)$$

$\frac{n+1}{2}(n^2+n-1) = 2((n+1)^2-n)$ ve $(n+1) \mid 2n$ dir ve bu çelişkidir.

Sonuç olarak bazı p noktaları için $r_p = n+3$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n=3$ ve $r_p = 6$ dır. Aynı zamanda, tüm noktalar 5 veya 6 derecelidir. Eğer tüm noktalar 6 dereceli ise, o zaman S, 13 noktalı bir Steiner üçlü sistemdir. Bu durum ise S nin iki doğru dereceli olmasıyla çelişir. Bu durumda en az 1 tane $5-$nokta olduğu kabul edilebilir. Her $5-$noktadan 2 tane $4-$doğru ve 3 tane $3-$doğru geçtiğinden, $4-$doğruların varlığı kabul edilebilir.

İlk olarak tüm $4-$doğruların birbiriyle kesiştiği kabul edilsin. O zaman 5 tane

$4-$doğru vardır ve bu doğrular toplamda tümü 5 dereceli olan 10 nokta içerir. 3 tane $6-$nokta ve 16 tane $3-$doğrunun var olduğu gösterilebilir. Verilen bir 5 nokta ile bir 4 doğrunun birleşimi olan doğru üzerinde olmayan 3 tane $5-$nokta kendiliğinden $4-$doğruya katılmıştır. Dolayısıyla, iki tane $5-$noktayı birleştiren herhangi bir $3-$doğru 1 tane $6-$nokta içerir ve 3 tane $6-$nokta doğrusaldır.

$a, b, ..., j$ noktaları $5-$nokta ve p, q, s noktaları $6-$nokta olsun. O zaman şu doğrular mevcuttur; $\{a, b, c, d\}$, $\{a, e, f, g\}$, $\{b, e, h, i\}$, $\{c, f, h, j\}$, $\{d, g, i, j\}$, $\{p, q, s\}$. Genelliği bozmaksızın, şu doğruların olduğu da varsayılabilir; $\{a, h, p\}$, $\{a, i, q\}$, $\{a, j, s\}$. ej doğrusu göz önüne alılsın. Açıkça $s \notin ej$ dir. $q \in ej$ olsun. O zaman $q \notin ce$ ve $q \notin ci$ olduğundan, $q \in cg$ dir. Aynı zamanda, $q \notin bj$, bg olduğundan, $q \in bf$ dir. $s \notin bf$, bj olduğundan, $s \in bg$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak $s \notin gh$ dır. Fakat $p \notin gh$ dır. Dolayısıyla $q \in gh$ dır. Fakat bu durum $q \in cg$ çelişkisini verir. Dolayısıyla $q \notin ej$ dir. Bu yüzden $p \in ej$ dir. O zaman $p \notin de$ ve $p \notin dh$ olduğundan $p \in df$ dir. Aynı zamanda, $p \notin bf$, bj olduğundan, $p \in bg$ dir. Sonuç olarak $s \notin bq$ ve $s \notin bj$ ve buradan $s \in bf$ dir. Dolayısıyla $s \notin fi$ ve aynı zamanda $q \notin fi$ dir. Bu yüzden $p \in fi$ dir. Bu ise $p \in df$ çelişkisini verir.

Dolayısıyla, iki tane paralel L_1 ve L_2, $4-$doğrusu vardır. Bu durumda L_1 ve L_2 ile kesişen 4 tane $4-$doğru vardır ve bu doğruların herbiri L_1 ve L_2 nin herhangi bir noktasından geçer. Bu doğrular L_3, L_4, L_5, L_6 olarak adlandırılsın. Açıkça L_3; L_4, L_5 veya L_6 nın herhangi biriyle paralel olmalıdır. L_3; L_4 ile paralel olsun. O zaman L_1, L_2, L_3, L_4 doğrularının birleşimi 12 noktadır, bu noktaların hepsi 5 derecelidir ve bu yüzden bu noktalardan 2 tane $4-$doğru geçer. L_5 ve L_6 doğruları; paralel doğrular olan L_3 ve L_4 doğrularının her ikisiyle de kesişmek zorundadır. $a = L_1 \cap L_3$, $b = L_1 \cap L_4$, $c = L_1 \cap L_5$, $d = L_1 \cap L_6$, $e = L_2 \cap L_3$, $f = L_2 \cap L_4$, $g = L_2 \cap L_5$, $h = L_2 \cap L_6$, $i = L_3 \cap L_5$, $j = L_3 \cap L_6$, $k = L_4 \cap L_5$, $l = L_4 \cap L_6$ olsun. a ile doğrudaş olmayan noktaları inceleyelim. f, p hariç diğer tüm noktalarla doğru oluşturur. Bu yüzden $\{a, f, p\}$ bir doğrudur. Kalan g, h, k, l noktalar yardımıyla, a noktasından geçen 2 tane $3-$doğru oluşturulmalıdır. Bu doğruların $\{a, g, l\}$ ve $\{a, h, k\}$ olmak zorunda olduğunun görülmesi zor değildir. Benzer olarak, kalan doğrular elde edilebilir: $\{b, e, p\}$, $\{b, g, j\}$, $\{b, h, i\}$, $\{c, h, p\}$, $\{c, e, l\}$, $\{c, f, j\}$,

$\{d,g,p\}$, $\{d,e,k\}$, $\{d,f,i\}$, $\{i,l,p\}$, $\{j,k,p\}$. $\square$

Önerme 4.2.7. S, v noktalı, b doğrulu lineer uzayında

$$n^2+n+2 \le v \le n^2+2n-1$$

eşitsizliği v için sağlanmaz.

İspat. S, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. Eğer

$$n^2+n+2 \le v \le n^2+2n-3$$

ise, $v = n^2+n+k$, $2 \le k \le n-3$ denildiğinde Önerme 4.2.1 kullanılarak S nin tüm p noktaları için

$$n+1+(k-1)/n \le r_p \le n+2+(k+1)/(n-1)$$

dir. $n \ge 3$ olduğundan tüm p ler için $r_p = n+2$ dir.

Önerme 4.1.1 kullanılarak

$$b_{n+1} = \frac{(k+1)v}{(n+1)} \text{ ve } b_n = \frac{(n+1-k)v}{n}$$

$$b = b_n + b_{n+1} = n^2+3n+1+k\frac{(2n+1-k)}{n(n+1)}$$

bulunur.

L, S nin bir $(n+1)-$doğrusu olsun. L nin dışındaki her noktadan L ye paralel bir tek doğru geçtiğinden, L ye paralel en az $(v/(n+1))-1$ veya $n-1+(k/(n+1))$ tane doğru vardır. L ile kesişen doğrular sayılarak

$$b \ge (n+1)(n+1)+n+1 = n^2+3n+2$$

bulunur. $k(2n+1-k)/n(n+1) \ge 1$, buradan $0 \ge (n-k)(n-(k-1))$ ve bu yüzden $k-1 \le n \le k$ olur; bu çelişkidir. $n^2+n+2 \le v \le n^2+2n-3$ olamaz.

$v = n^2+2n-2$ olsun. $v \ge n^2+n+2$ olduğundan, $n \ge 4$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda $r_p \in \{n+2, n+3\}$ ve bir $(n+2)-$noktadan, 3 tane $n-$doğru ve $n-1$ tane $(n+1)-$doğru geçerken, bir $(n+3)-$noktadan, $n+3$ tane $n-$doğru geçer ve hiç $(n+1)-$doğru geçmez.

Önerme 4.1.1 kullanılarak

$$b_n = 3(n+2) - \frac{6}{n} + v_{n+3}$$

ve $n = 6$ bulunur.

Aynı zamanda, $b_{n+1} = v_{n+2}(n-1)/(n+1)$ dir.

$v_{n+3} = 0,\ 1,\ 2$ veya 3 ise sırasıyla $v_{n+2} = v,\ v-1,\ v-2$ veya $v-3$ dür ve bu durumlar $7 \mid 230,\ 7 \mid 225,\ 7 \mid 220,\ 7 \mid 215$ çelişkilerine sebep olur. Dolayısıyla $v_{n+3} \geq 4$ dür.

$v_{n+2} \neq 0$ olsun; buradan $b_{n+1} \geq 5$ dir. $v_{n+2} = b_{n+1}\frac{7}{5}$ olduğundan $v_{n+2} \geq 7$ dir.

L bir $n-$doğru olsun. $v_{n+2} \geq 7$ olduğundan bir $p \notin L$, $(n+2)-$noktası vardır ve bu yüzden L üçten fazla $(n+3)-$nokta içeremez.

L nin 3 tane $(n+3)-$noktaya sahip olduğu kabul edilsin. q, L üzerinde bir $(n+2)-$nokta ve M, q dan geçen L den farklı bir $n-$doğru olsun. p; M nin q dan farklı bir $(n+2)-$noktası olsun. Bu durumda p den en az 4 tane $n-$doğru geçer ve bu çelişkidir. Dolayısıyla her $n-$doğru en çok 2 tane $(n+3)-$nokta içerir.

p bir $(n+2)-$nokta ve bu noktadan geçen $n-$doğrular L_1, L_2, L_3 olsun. Tüm $(n+3)-$noktalar bu doğrular üzerinde olmak zorundadır. Dolayısıyla $4 \leq v_{n+3} \leq 6$ ve $40 \leq v_{n+2} \leq 42$ dir. Önerme 4.1.1 kullanılarak, $(n+1)b_{n+1} = (n-1)v_{n+2}$ yazılır ve $v_{n+2} = 42$ dir. Bu eşitlik $v_{n+3} = 4$ olmadıkça çelişkidir. Dolayısıyla L_1, L_2, L_3 doğruları üzerindeki $(n+3)-$noktaların dağılımı $2-2-0$ veya $2-1-1$ dir. L_1 in 2 tane ve L_2 nin de en az 1 tane $(n+3)-$noktaya sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda 4 tane $(n+3)-$nokta tarafından oluşturulmuş doğruları kesen L_3 doğrusu üzerindeki noktaların sayısı en fazla 4 dür. Bu durum ise L_3 ün bu $(n+3)-$noktalardan oluşturulmuş doğrular üzerinde olmayacak şekilde $(n+2)-$noktalarını ayırır. Bu durumda bu $(n+2)-$nokta en az 4 tane $n-$doğru üzerindedir; bu bir çelişkidir. Buradan $v_{n+2} = 0$ dır. Dolayısıyla, hiç $(n+1)-$doğru yoktur ve bu da çelişkidir. Dolayısıyla $v \neq n^2 + 2n - 2$ dir.

Son olarak $v = n^2 + 2n - 1$ durumu incelendiğinde, Önerme 4.1.1 den dolayı, $nb_n = 2v_{n+2} + (n+2)v_{n+3} = 2(n^2+2n-1) + nv_{n+3}$ ve bu yüzden $b_n = 2n+4-\frac{2}{n}+v_{n+3}$ dür. Buradan $n \mid 2$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $v \neq n^2 + 2n - 1$ dir. $\square$

Önerme 4.2.8. S, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. $v = n^2 + 2n$, $n \geq 4$ ise, bu durumda S, $(n+1)$. mertebeden delinmiş bir afin düzlemdir.

İspat. S, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay, $v = n^2 + n$, $n \geq 4$ olsun. Önerme 4.2.1 den S nin tüm p noktaları için $r_p \in \{n+2, n+3\}$ dür. Bir $(n+2)-$noktadan 1 tane $n-$doğru ve $n+1$ tane $(n+1)-$doğru geçerken, herhangi bir $(n+3)-$noktadan $n+1$ tane $n-$doğru ve 2 tane $(n+1)-$doğru geçer. Ayrıca Önerme 4.1.1 den

$$b_n = n + 2 + v_{n+3}, \quad b_{n+1} = v_{n+2} + \frac{2v_{n+3}}{n+1}$$

$$b = n^2 + 3n + 2 + \frac{2v_{n+3}}{n+1}$$

dir.

$v_{n+3} \neq 0$ olsun.

Adım 1. Tüm $(n+3)-$noktaların S nin bir L, $n-$doğrusu üzerinde olduğunu kabul edelim. p böyle bir nokta olsun. M, p den geçen ikinci bir $n-$doğru olsun ve p_1, p_2, p_3; M nin $(n+2)-$noktaları olsun. $q \neq p$ ise, L nin ikinci bir $(n+3)-$noktası olsun. Bu durumda q ile p_i leri birleştirilmesiyle oluşan tüm doğrular $(n+1)-$doğru olmak zorundadır ve q, 3 tane $(n+1)-$doğru üzerinde olamaz. Dolayısıyla bazı $n-$doğrular bazı $(n+3)-$noktalardan geçmez.

Adım 2. L bir $n-$doğru ve p, q; L nin üzerindeki $(n+2)-$noktalar olsun. s, L nin üzerinde olmayan bir $(n+3)-$nokta olsun. ps ve qs doğruları $(n+1)-$doğru olmak zorundadır. Dolayısıyla L doğrusu üzerindeki noktalar ile s noktasının birleştirilmesiyle oluşan her doğru $n-$doğru olmalıdır. Bu durumda L nin p ve q dan farklı her noktasından en az 2 tane $n-$doğru geçer ve L nin p ve q dışındaki her noktası bir $(n+3)-$noktadır. Dolayısıyla her $n-$doğru en çok 2 tane $(n+2)-$nokta içerir.

Adım 3. İki tane kesişmeyen L ve M, $n-$doğrusunun her ikisinin de 2 tane $(n+2)-$noktaya sahip olamayacağı gösterilecektir. v_{n+3} hesaplansın. L ve M doğrularının üzerinde olmayan $(n+3)-$nokta sayısı d olsun. L ve M sırasıyla p, p' ve q, q' gibi 2 tane $(n+2)-$noktaya sahip olsun. Bu durumda $v_{n+3} = 2(n-2) + d$ dir. s, L nin üzerindeki bir $(n+3)-$nokta olsun. qs ve $q's$ doğruları $(n+1)-$doğru olmak zorundadır ve bu yüzden $d \geq 2(n-4)$ dür. Diğer taraftan s, $L \cup M$ nin üzerinde olmayan bir nokta ise ve s noktası $pq \cap p'q'$ veya $pq' \cap p'q$ üzerinde değilse, bu durumda ps, $p's$, qs, $q's$; $(n+1)-$doğrularının en az üçü farklıdır. Bu yüzden s bir $(n+2)-$nokta olmalıdır. Dolayısıyla $d \leq 2$ dir. Eşitsizliklerin birleşiminden $n = 4$, $d = 2$, $v_{n+3} = 6$ bulunur. Yukarıda b_{n+1} in hesaplanması ile $5 \mid 12$ çelişkisiyle karşılaşılır. Bu yüzden 2 tane kesişmeyen $n-$doğrunun ikisi de 2 tane $(n+2)-$nokta içeremez.

Adım 4. L; p, q, $(n+2)-$noktalarını içeren $n-$doğru ve s, L nin üzerinde olmayan bir $(n+3)-$nokta olsun. Buradan ps, qs, $(n+1)-$doğrulardır. L ye paralel olan ve s den geçen 3 tane $n-$doğru vardır. M bu üç $n-$doğrudan biri olsun. L ve M kesişmeyen $n-$doğrulardır ve L, 2 tane $(n+2)-$noktaya sahiptir. Bu yüzden M, Adım 3 den dolayı en çok 1 tane $(n+2)-$noktaya sahiptir. Buradan M en az 3 tane s, t, u, $(n+3)-$noktasına sahiptir. Bu durumda qs doğrusu bir $(n+1)-$doğrudur. qs; tp ve up ile kesişebilir. Fakat $n \geq 4$ olduğundan, qs; q ve s den farklı ve tp, up üzerinde olmayan bir w noktası içerir. pt, pu, qt, qu farklı $(n+1)-$doğrular olmalıdır; buradan tw ve uw farklı $n-$doğrular olur. Bu yüzden w bir $(n+3)-$noktadır. Sonuç olarak, w' nün L nin bir $(n+3)-$noktası olduğu kabul edilsin. L', w' den geçen bir $(n+1)-$doğru olsun. L'; ps, qs, pw doğruları ile kesişebilir; fakat $n \geq 4$ olduğundan L' bu üç doğrunun herhangi birisinin üzerinde olmayan ve s den farklı olan bir x noktası içerir. sx ve wx doğruları $n-$doğrulardır. Bu yüzden x noktası bir $(n+3)-$nokta olmalıdır. Fakat x, 3 tane farklı L', xp ve xq, $(n+1)-$doğruları üzerindedir; bu yüzden çelişki ortaya çıkar. Dolayısıyla her $n-$doğru en çok 1 tane $(n+2)-$nokta içerir.

Adım 5. Bir $(n+3)-$noktadan geçen $n+1$ tane $n-$doğrunun herbiri Adım 4 den dolayı en çok 1 tane $(n+2)-$noktaya sahiptir. Bu yüzden $v_{n+2} \leq 2n+n+1$ dir. Diğer taraftan, eğer L, $(n+1)-$doğrusu p, p', p''; $(n+2)-$noktalarını kapsıyorsa, bu noktaların herbirinden geçen bir tek $n-$doğru vardır. Yukarıdaki dört doğrudan herhangi birinin üzerinde olmayan her nokta; p, p' ve p'' ile 3 tane farklı $(n+1)-$doğru tarafından birleştirilmiştir; dolayısıyla bir $(n+2)-$noktadır. Bu dört doğru üzerinde olmayan en az $v-(4n-2)$ tane nokta vardır. Dolayısıyla $v_{n+2} \geq n^2-2n+2$ dir. İki eşitsizliğin birleşiminden $n = 4$, $v_{n+2} = 13$, $v_{n+3} = 11$ elde edilir. Bu $(n+1) \mid 2v_{n+3}$

çelişkisine sebep olur. Dolayısıyla her $(n+1)-$doğru en çok 2 tane $(n+2)-$noktaya sahiptir.

Adım 6. Bir p, $(n+3)-$noktasından geçen $n+1$ tane $n-$doğrunun toplamda en fazla 1 tane $(n+2)-$nokta içerdiği ispatlanacaktır. Aksi halde herbiri q ve q', $(n+2)-$noktalarını içeren farklı $n-$doğrular üzerinde olan bir $(n+3)-$noktaya sahip olurduk. L, p den geçen bir $(n+1)-$doğru olsun. L nin, $s = qq' \cap L$ olacak şekilde p den farklı s noktası en az 3 tane $(n+1)-$doğru üzerindedir; çünkü qs ve $q's$ farklı $(n+1)-$doğrulardır. Dolayısıyla s bir $(n+2)-$noktadır. $n \geq 4$ olduğundan, en az 3 tane böyle s noktası vardır ve bu Adım 5 den dolayı çelişkidir. Bu durumda bir $(n+3)-$noktadan geçen $n+1$ tane $n-$doğru en fazla 1 tane $(n+2)-$nokta içerir.

Adım 7. Bir $(n+3)-$noktaya Adım 5 ve Adım 6 nın sonuçları uygulanarak, S de en çok 5 tane $(n+2)-$noktanın olduğu görülür. p, p', p''; $(n+2)-$nokta olsun. Adım 4 ve Adım 5 den bu noktalar doğrusal değildir ve bu noktalar tarafından oluşturulan doğrular $(n+1)-$doğrudur. p, p', p'' den geçen $n-$doğruların herhangi birisinin üzerinde olmayan ve aynı zamanda pp', pp'', $p'p''$ nün üzerinde olmayan her nokta; p, p' ve p'' ile 3 tane farklı $(n+1)-$doğru tarafından birleştirilmiştir. Dolayısıyla böyle noktalar $(n+2)-$noktadır. Yukarıdaki 6 doğrunun üzerinde en çok $6n-3$ tane nokta vardır. Bu yüzden $v_{n+2} = v-(6n-3)+3 = n^2-4n+6 \geq 6$ dır ve $v_{n+2} \leq 5$ olduğundan, S de en çok 2 tane $(n+2)-$nokta olduğu sonucuna varılır.

Adım 8. $(n+1) \mid 2v_{n+3}$ olduğundan, $v_{n+3} \neq n^2+2n$ veya $v_{n+3} \neq n^2+2n-1$ dir. Dolayısıyla $v_{n+2} \geq 2$ dir. Adım 7 den dolayı $v_{n+2} = 2$ $(n=5)$ dir. p ve p', $(n+2)-$nokta olsun. $q \in pp' - \{p, p'\}$ olduğu kabul edilsin. Buradan q bir $(n+3)-$noktadır. L; q dan geçen pp' den farklı bir $(n+1)-$doğru olsun. p ve p' den geçen $n-$doğrular, L ile en çok 2 noktada kesişir. Dolayısıyla $n \geq 4$ olduğundan, p ve p' den geçen $n-$doğrular üzerinde olmayan ve L üzerinde olan q dan farklı bir s noktası vardır. Fakat ps ve $p's$ bir $(n+1)-$doğru olduğundan, s üçüncü bir $(n+2)-$nokta olur. Bu durum Adım 7 den dolayı çelişkiye sebep olur. Bu durumda $v_{n+3} = 0$ dır. $n-$doğruların S nin noktalarının parçalanması olduğu gösterilebilir. Bu doğruların tamamına sonsuzda bir nokta ilave edilsin. Son yapı

$(n+1)$. mertebeden bir afin düzlemdir. □

Önerme 4.2.9. S, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. Eğer $n \geq 7$ ve $v = (n+1)^2$ ise, bu durumda S lineer uzayı, noktadaş olmayan herhangi üç doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+2)$. mertebeden bir projektif düzlemdir.

İspat. S, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay, $v = (n+1)^2$, $n \geq 7$ olsun. Önerme 4.2.1 den ve $n \geq 5$ olduğundan S nin her p noktası için $r_p = n+2$ ise p den sadece $(n+1)-$doğrular geçer veya $r_p = n+3$ ise p den 3 tane $(n+1)-$doğru ve n tane $n-$doğru geçer. Eğer tüm noktalar $n+2$ dereceli ise açıkça S, $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlemdir, bu çelişkidir. Çünkü tüm doğrular aynı dereceli olur. O zaman $(n+3)$. dereceden noktaların varlığı varsayılsın. Dolayısıyla, en az 1 tane $n-$doğru vardır ve böyle bir doğru yalnızca $(n+3)-$noktalar içerir. Bu yüzden her $(n+1)-$doğru için, bu doğru üzerinde olmayan en az 1 tane $(n+3)-$nokta vardır. Her $(n+1)-$doğrunun $(n+3)$. dereceden en az $n-2$ tane noktaya sahip olduğu kolayca gösterilebilir.

p, q ve s gibi en az 3 tane $(n+2)-$noktanın olduğu varsayılsın. pq doğrusu ile p, q ve s den farklı bir noktada kesişen herhangi bir $(n+1)-$doğru L olsun. pq üzerinde olup L üzerinde olmayan en az bir $(n+3)-$nokta olduğundan pq üzerinde olmayan, L üzerinde olan en çok 2 tane $(n+2)-$nokta olabilir. $n \geq 5$ olduğundan L üzerinde $t \notin ps$, qs, pq olacak şekilde bir t, $(n+3)-$noktası vardır. Bu durum ise; t noktasından L, pt, qt ve st, $(n+1)-$doğrularının geçtiğini gösterir, bu ise çelişkidir. Çünkü bir $(n+3)-$noktadan en fazla 3 tane $(n+1)-$doğru geçer.

Sonuç olarak S de $(n+2)$. dereceden en çok 2 tane nokta vardır. Önerme 4.1.1 iki kez uygulandığında

$$2v_{n+3} = b(n+1) - (n+1)^2(n+2)$$

bulunur. Dolayısıyla $(n+1) \mid 2v_{n+3}$ dür. $(n+2)^2 - 2 \leq v_{n+3} \leq (n+1)^2$ olduğundan $v_{n+3} = (n+1)^2 = v$ dir.

Teorem 3.2.4 den ve $n > 6$ olduğundan sonuç olarak S; herhangi noktadaş olmayan üç doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+2)$. mertebeden bir projektif düzlemdir. □

4.3. Ardışık Üç Doğru Dereceli Lineer Uzaylar

Bu kısımda doğru dereceleri ardışık olan en fazla üç doğrulu lineer uzaylar sınıflandırılacaktır. Bu bölümün temel sonucu aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

Teorem 4.3.1. S, v noktalı, $v \leq n^2$ aşikar olmayan bir lineer uzay ve S nin doğru dereceleri kümesi $\{n-1, n, n+1\}$ olsun. Eğer $n \geq 23$ ise, S

(i) $(n-1)$. veya n. mertebeden bir afin düzlem,

(ii) Bir noktası atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem, bir doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem veya bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir afin düzlem,

(iii) Sonsuzdaki bir nokta ilaveli $(n-1)$. mertebeden bir afin düzlem,

(iv) $(n-2)$. mertebeden bir projektif düzlem, $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlem veya bir noktası atılmış $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlem,

(v) Üç doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlem veya eğer seçilen herhangi üç doğru noktadaşsa, bu doğruların kesişim noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlem,

(vi) Bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış ve geriye bırakılan bu noktadan geçen ikinci bir doğrunun bir, iki veya n tane noktası atılmış n. mertebeden bir projektif düzlem,

(vii) Bir $(n+1)-$yayı atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlem veya n tam sayısı eğer çiftse bir $(n+2)-$yayı atılmış n. mertebeden bir projektif düzlem,

$(viii)$ Atılan nokta kesişim noktası da olabilecek şekilde, herhangi iki doğrusu herbirinin birer noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış n. mertebeden bir projektif düzlemdir.

Ayrıca, eğer $v = n^2$, $n \geq 8$ ise veya $v < n^2 - 1$, $n \geq 4$ ise, aşağıdaki durumlar geçerlidir:

(ix) $v = 11$ ve S, Nwankpa düzlemi,

(x) $v = 12$ ve S, Nwankpa-Shrikhande düzlemi,

(xi) $v = 13$ ve S, genişletilmiş Nwankpa-Shrikhande düzlemi, 13 noktalı bir

Steiner üçlü sistem veya 1 tane 6−nokta ve 6 tane 4−doğru içeren 13 nokta ve 20 doğrulu bir tek lineer uzay,

(xii) $v = 46$ ve S, bir $2-(46, 6, 1)$ dizayndır.

Teoremin ispatı, n nin birçok düşük değeri için dahil olmasına rağmen yalnızca $n \geq 23$ için verilsin. Bölüm 4.2 deki gibi, ispat birkaç önermenin içine dağıtılmıştır.

Önerme 4.3.2. S, v noktalı bir lineer uzay olsun. $v \geq n^2 - n - 1$ ve S nin her p noktası için $(v-1)/n \leq r_p \leq (v-1)/(n-2)$ dir.

İspat. S, v noktalı bir lineer uzay olsun. S de her doğru derecesinden bulunduğu için, S de üzerinden $n+1$ tane doğru geçen en az bir nokta vardır. Böyle bir noktadan geçen doğruların hepsinin $(n-1)$−doğru olduğu varsayılarak $v \geq (n+1)(n-2)+1 = n^2 - n - 1$ bulunur. Ayrıca S nin bir p noktasından geçen tüm doğruların $(n-1)$−doğru olduğu varsayılarak $v \geq r_p(n-2)+1$ bulunur. Eğer bu noktadan geçen tüm doğruların $(n+1)$−doğru olduğu düşünülürse $v \leq r_p n + 1$ dir. Buradan $(v-1)/n \leq r_p \leq (v-1)/(n-2)$ dir. □

Önerme 4.3.3. S, v noktalı $v \leq n^2$, $n \geq 4$ ve aşikar olmayan bir lineer uzay ve S nin doğru dereceleri kümesi $\{n-1, n+1\}$ ve $v \neq n^2 - 1$ ise, bu durumda S aşağıdakilerden birisidir:

(i) $(n-1)$. mertebeden bir afin düzlem,

(ii) İki doğrusu, kesişim noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış n. mertebeden bir projektif düzlem,

(iii) $(n-2)$. mertebeden bir projektif düzlem,

(iv) $2-(46, 6, 1)$ problemli dizaynlardan herhangi biri,

(v) Genişletilmiş Nwankpa-Shrikhande düzlemi,

(vi) 13 noktalı Steiner üçlü sistem veya

(vii) Nwankpa düzlemidir.

Eğer $v = n^2 - 1$, $n \geq 23$ ise bu durumda S;

$(viii)$ Noktadaş üç doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlem,

(ix) Bir $(n+2)$−yayı atılmış n. (n çift) mertebeden bir projektif düzlemdir.

İspat. S, v noktalı ve önermedeki şartları gerçekleyen bir lineer uzay olsun.

Teorem 4.2.2, $(n+1)-$doğruların varlığına olanak sağlar.

Önerme 4.3.2 kullanıldığında tüm doğruların bir $(n+1)-$doğru olamayacağı ve aynı zamanda $v \geq (n+1)(n-2)+1 = n^2-n-1$ olduğu görülür.

Durum 1. $v < n^2-3$ olsun. Bu durumda S nin tüm p noktaları için $r_p \leq n+1$ dir. Bazı p noktaları için $r_p = n+1$ olduğundan, bir $(n+1)-$noktadan geçen $(n+1)-$doğruların sayısına m denildiğinde $0 \leq 2m < n-2$, $v = n^2-n-1+2m$ bulunur. L, bir $(n+1)-$doğru olsun. Bu durumda $p \notin L$ için $r_p = n+1$ ve p den geçen doğruların m tanesi $(n+1)-$doğru ve $(n+1-m)$ tanesi $(n-1)-$doğrudur. Eğer $m = 0$ ise, bu durumda L den farklı tüm doğrular; bir $(n-1)-$doğrudur ve L ile kesişir.

$q \in L$ olsun. Bu durumda $(r_q-1)(n-2)+n = v-1 = (n+1)(n-2)$ ve $(n-2) \mid n$ dir. Bu yüzden $n = 4$ dür. Dolayısıyla $S-L$ bir $6-$yaydır ve $\forall p \in L$ için $r_p = 4$ dür. Bu yüzden S, Nwankpa düzlemidir. Eğer $m = 1$ ise, bu durumda bir $(n+1)-$doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan geçen tam olarak 1 tane $(n+1)-$doğru vardır. Bu yüzden $(n+1)-$doğrular kümesi herhangi bir s noktasından geçen doğrular kümesidir. Bu durumda $S-s$, tüm p ler için $r_p = n+1$ olan n^2-n noktalı ve doğrularından 1 tanesi $n-$doğru ve n tanesi $(n-1)-$doğru olan bir lineer uzaydır. Teorem 4.2.3 den S; iki doğrusu, kesişim noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $n > 4$, n. mertebeden bir projektif düzlemdir.

Bu yüzden $m \geq 2$ ve tüm p noktaları için $r_p = n+1$ olduğu varsayılabilir. Bu durumda açıkça, tüm $(n+1)-$doğrular verilen herhangi bir doğruyla kesişir. L bir $(n+1)-$doğru ve M bir $(n-1)-$doğru olsun. M ile kesişen $(n+1)-$doğruların sayısı $(n-1)m = mn-m$ dir. L ile kesişen $(n+1)-$doğruların sayısı

$$(m-1)(n+1)+1 = mn-n+m$$

dir. Buradan $2m = n \not< n-2$ olduğundan çelişki oluşur.

Durum 2. $v = n^2-3$ olsun. $n \geq 6$ olduğu varsayılsın. Önerme 4.3.2 kullanıldığında $r_p = n+2$ için, p noktasından geçen tüm doğrular $(n-1)-$doğru, $r_p = n+1$ için, p den geçen doğruların $(n-2)\frac{1}{2}$ tanesi $(n+1)-$doğru, $(n+4)\frac{1}{2}$ tanesi $(n-1)-$doğru veya $r_p = n$ için, p den geçen doğruların $n-2$ tanesi $(n+1)-$doğru, 2 tanesi $(n-1)-$doğrudur.

Herhangi bir p, $n-$noktası tüm $(n+1)-$doğruların üzerinde olmalıdır; dolayısıyla bir tektir. q herhangi bir $(n+1)-$nokta olsun. Bu durumda q noktasından en çok 1 tane $(n+1)-$doğru geçer. Buradan $(n-2)\frac{1}{2} \leq 1$ veya $n \leq 4$ ve bu yüzden bir çelişki oluşur. Dolayısıyla hiç $n-$nokta yoktur.

Eğer tüm noktalar $n+1$ dereceli ise, Önerme 4.1.1 den,

$$(n+1) \mid (n^2-3)\frac{1}{2}(n-2) = n^2(n+1)\frac{1}{2} - n(n+1)\frac{3}{2} + 3$$

eşitliğine ve $(n+1) \mid 3$ sonucuna ulaşılır; bu ise $n \geq 4$ olduğundan çelişkidir. L bir $(n+1)-$doğru olsun ve p, L üzerinde olmayan bir $(n+2)-$nokta olsun. O zaman p; L ye paralel bir M, $(n-1)-$doğrusu üzerindedir ve M nin her noktası bir $(n+2)-$noktadır.

Eğer M üzerinde olmayan bir q, $(n+2)-$noktası varsa, bu durumda yukarıdaki gibi, q; L ye paralel bir M', $(n-1)-$doğrusu üzerindedir. M den farklı kesişen tüm doğrular L ile de kesişir; bu kesişen doğrular $(n+1)(n-1) = n^2-1$ adettir. Kesişen bu doğruların yalnızca $(n-1)^2$ tanesi M' ile kesişir; $n^2-1-(n-1)^2 = 2n-2$ tane doğru L ile kesişir fakat M' ile kesişmez. Fakat L yi kesen doğruların sayısı en az $n^2-1+2n-2+1 = n^2+2n-2$ olduğundan M' ve L yi kesen n^2-1 tane doğru vardır. L ile kesişen doğruların sayısı $n(n+1)+1 = n^2+n+1$ ve bu yüzden

$$n^2+2n-2 \leq n^2+n+1 \text{ veya } n \leq 3$$

dür. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir q noktası mevcut değildir ve $S-M$ nin tüm noktaları bir $(n+1)-$noktadır.

Hiçbir $(n+1)-$doğru M ile kesişmediğinden, her $(n+1)-$nokta en çok 2 tane $(n+1)-$doğru üzerindedir ve buradan $(n-2)\frac{1}{2} \leq 2$ veya $n \leq 6$ dır.

Eğer $n=6$ ve $|S-M| = 28$ ise her noktadan 2 tane $7-$doğru ve 5 tane $4-$doğru geçer. Aynı zamanda tüm $7-$doğrular birbiriyle kesişir. Bu doğrular aşağıdaki şekilde sınıflandırılsın:

$$\{1,2,3,4,5,6,7\}, \ \{1,8,9,10,11,12,13\}$$

$$\{2,8,14,15,16,17,18\}, \ \{3,9,14,19,20,21,22\}$$

$$\{4,10,15,19,23,24,25\}, \ \{5,11,16,20,23,26,27\}$$

$$\{6,12,17,21,24,26,28\}, \ \{7,13,18,22,25,27,28\}$$

M nin noktaları herbiri $4-$noktalı 7 tane doğru içeren paralel sınıflara karşılık gelir. Genelliği bozmaksızın, doğrusal olmayan 1, 14 ve 23 noktaları seçilebilir; buradan $\{1, 14, 23, 28\}$ doğrusu oluşur. 2, 9 ve 24 noktaları seçilirse $\{2, 9, 24, 27\}$ doğrusu elde edilir. 3 ve 10 noktaları seçilerek $\{3, 10, 18, 26\}$ doğrusu elde edilir. Sıradaki üç doğrunun ilk iki noktası kalan noktalardan oluşturulur: $\{4, 11, 17, 22\}$, $\{5, 12, 15, 25\}$, $\{6, 13, 16, 19\}$.

Bu seçim 20 ve 21 ile 7 ve 8 noktalarını ayırır ve 20 ve 21 noktaları $7-$noktalı bir doğru üzerindedir. Buradan bir S lineer uzayının mevcut olmama çelişkisi ortaya çıkar.

Dolayısıyla $n = 4$ olduğunu kabul edelim. r_p nin yukarıdaki olasılıklarına ek olarak, tüm doğrular $(n+1)-$doğru ve $r_p = n - 1$ olsun.

Eğer S bir tek $5-$doğru kapsar ve L bir $5-$doğru ise bu durumda L üzerinde olmayan her noktadan L ye paralel bir tek $3-$doğru geçer. Böylece S; 3. mertebeden bir altküme ile 5. mertebeden bir altkümeye parçalanır. $v = 13$ olduğundan bu çelişkidir. S nin en az 2 tane $5-$doğruya sahip olduğu kabul edilsin. Bir $6-$nokta sadece $3-$doğrular üzerinde olduğundan, herhangi 2 tane $5-$doğru birbiriyle kesişir.

Sonuç olarak bu şekildeki p noktasının en az 2 tane olduğu kabul edilsin; dolayısıyla p den geçen $5-$doğru sayısı 2 veya 3 olur. Eğer p den geçen, 3 tane $5-$doğru varsa, bu durumda diğer her nokta 4 tane $3-$doğru ve 1 tane $5-$doğru üzerindeki $5-$noktadır. Dolayısıyla $S-p$; $N-S$ düzlemi veya bir doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış 4. mertebeden bir afin düzlemdir.

Hiç $3-$nokta olmadığı kabul edilsin ve p, 2 tane L ve M, $5-$doğrusu üzerindeki bir $4-$nokta olsun. p den geçmeyen $5-$doğru yoktur ve bu yüzden L veya M üzerinde olmayan noktalar $6-$noktadır. L ve M nin $L \cap M$ den farklı noktaları $5-$noktadır. $L \cap M$ noktası 1 ile ve L veya M üzerinde olmayan noktalar 2, 3, 4, 5 ile gösterilsin. $\{1, 2, 3\}$ ve $\{1, 4, 5\}$ in 1 noktasından geçen $3-$doğrular olduğu kabul edilsin. Bu durumda diğer noktaların hangileri 2 ve 4 ile birlikte bir doğru üzerindedir? Cevap olarak 1, 3 ve 5 noktalarından herhangi biri değildir. 24 noktasından geçen üçüncü nokta 6 ile gösterilsin. Bu durumda 6 noktası L veya M doğrusu üzerindedir. Fakat bu durumda 6 noktasından geçen her doğru L ve M nin her ikisiyle de kesişir ve bu yüzden 24 doğrusu dört noktalıdır, bu ise bir çelişkidir.

Durum 3. $v = n^2 - 2$ olsun. Bu durumda, Önerme 4.3.2 den tüm p noktaları için $r_p = n+1$ olmakla birlikte p noktasından geçen doğruların $(n-1)/2$ tanesi $(n+1)-$doğru ve $(n+3)/2$ tanesi $(n-1)-$doğrudur. Önerme 4.1.1 den,

$$(n+1) \mid \frac{1}{2}(n-1)(n^2-2) = \frac{1}{2}n^2(n+1) - (n+1)n + 1$$

bulunur ve bu ise $(n+1) \mid 1$ çelişkisine sebep olur.

Durum 4. $v = n^2 - 1$ ve $n \geq 23$ olsun. Önerme 4.3.2 den, $r_p = n$ ise p den geçen $n-1$ tane $(n+1)-$doğru ve 1 tane $(n-1)-$doğru, $r_p = n+1$ ise p den geçen $n/2$ tane $(n+1)-$doğru ve $n/2+1$ tane $(n-1)-$doğru veya $r_p = n+2$ ise p den geçen 1 tane $(n+1)-$doğru ve $n+1$ tane $(n-1)-$doğru vardır.

p noktası tüm $(n+1)-$doğruların üzerinde olsun. L, p den geçmeyen bir $(n-1)-$doğru olarak kabul edilsin. L nin herbir noktası p ile bir $(n+1)-$doğru tarafından birleştirilmiştir. Dolayısıyla p den geçen tam olarak 1 tane bir M, $(n-1)-$doğrusu vardır ve $M - p$ nin her noktası p den geçmeyen bir $(n+1)-$doğru üzerindedir, bu ise çelişkidir. Bu yüzden hiç $n-$nokta yoktur.

Bir M, $(n+1)-$doğrusunun bir L, $(n-1)-$doğrusu ile paralel olduğu kabul edilsin. Bu durumda tüm $p \in L$ ler için $r_p = n+2$ ve bu yüzden M ile kesişen ve L nin herhangi bir noktası üzerinden geçen toplam n tane $(n-1)-$doğru vardır. s; M nin $n+1$ dereceli noktalarının sayısı olsun. Bu durumda L ile kesişen, M nin noktalarından geçen $(n-1)-$doğru sayısı a ise

$$\frac{ns}{2} + (n+1-s)(n-1) \leq a \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)s + (n+1-s)(n-1)$$

dir. Bu yüzden

$$s + ns/2 + n^2 - 1 - sn + s \geq n^2 - n \geq ns/2 + n^2 - 1 - sn + s$$

dir; buradan $s+1 \geq (n/2-1)(s-2) \geq 1$ ve $n \leq 10$ dur. Bu durumun çelişki olduğu açıktır. Dolayısıyla herhangi bir $(n+1)-$doğru her $(n-1)-$doğruyla kesişir.

Tüm $(n+1)-$doğruların birbiriyle kesiştiği varsayılsın. O zaman tüm p ler için $r_p = n+1$ dir. Tüm doğrular bir $(n+1)-$doğru ile kesiştiğinden, p den geçen doğruların $(n+2)(n+1)/2$ sinin $n-1$ dereceli ve $n(n-1)/2$ sinin $n+1$ dereceli olmasıyla birlikte S nin doğru sayısı $b = n^2 + n + 1$ dir. Teorem 3.3.5 den, S bir $(n+2)-$yayı atılmış $n.(n$ çift) mertebeden bir projektif düzlemdir.

L ve M nin kesişmeyen $(n+1)-$doğrular olduğu kabul edilsin. Bu durumda L ve M üzerindeki tüm noktalar için $r_p = n+2$ dir. $p \notin L, M$ olsun. Bu durumda p, en az $n+1$ tane $(n-1)-$doğru üzerindedir ve bu yüzden $r_p = n+2$ dir. Bu durumda tüm p ler için $r_p = n+2$ ve herhangi 2 tane $(n+1)-$doğru kesişmez. Dolayısıyla $(n^2-1)/(n+1) = n-1$ tane $(n+1)-$doğru vardır ve $b = (n+1)(n+1)+n-1 = n^2+3n$ dir. S, noktadaş üç doğrusu kesişim noktasıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlemdir. (de Witte, 1983)

Durum 5. $v = n^2$ olsun. Önerme 4.3.2 den dolayı, tüm p noktaları için $r_p = n+1$ ve p den geçen doğruların $(n+1)/2$ tanesi $(n+1)-$doğru ve $(n+1)/2$ tanesi $(n-1)-$doğrudur. Önerme 4.1.1 uygulandığında eğer $n \geq 2$ ise $(n, n-1) = 1$ ve $n \geq 4$ ise $\left(\frac{1}{2}(n+1), n-1\right) = 1$ iken $(n-1) \mid n^2(n+1)/2$ çelişkisi elde edilir.

Bundan sonraki kısımda $b_{n-1} \geq 1$, $b_n \geq 1$ ve $b_{n+1} \geq 1$ olduğu kabul edilecektir. Önerme 4.3.2 den $v \geq n^2 - n - 1$ dir. $\square$

Önerme 4.3.4. S, v noktalı $v \leq n^2$, $n \geq 23$ ve S nin her dereceden en az bir tane doğrusu var olmasıyla birlikte doğru dereceleri kümesi $\{n-1, n, n+1\}$ ve S, $(n+2)-$nokta içeren bir lineer uzay ise, bu durumda $v = n^2 - 1$ ve S, noktadaş herhangi üç doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlem veya $v = n^2$ ve S, noktadaş üç doğrusu, kesişim noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlemdir.

İspat. S önermedeki şartları taşıyan bir lineer uzay olsun. Açıkça, $(n+2)$. dereceden daha büyük dereceli bir nokta yoktur. S de eğer bir $(n+2)-$nokta varsa, bu durumda Önerme 4.3.2 den $v \geq n^2 - 3$ dür.

Eğer $v = n^2 - 3$ ise bir p, $(n+2)-$noktasından geçen tüm doğruların $n-1$ dereceli olduğu gösterilebilir.

Herhangi bir L, $(n+1)-$doğrusu için, L ye paralel olan ve p den geçen bir M doğrusu vardır ve bu M doğrusu sadece $(n+2)-$nokta içerir. M üzerinde olmayan bir q, $(n+2)-$noktasının olduğu varsayılsın. Bu durumda q, L ye paralel bir M' doğrusu üzerindedir. M' doğrusunun noktalarının tümü bir $(n+2)-$noktadır; ayrıca

$M \cap M' = \varnothing$ dir; aksi taktirde en az $n+3$ tane doğru üzerinde olan bir nokta olurdu. M den farklı ve M ile kesişen doğruların tümü L ile de kesişir ve bu doğrular $(n-1)(n+1) = n^2-1$ tanedir. Bu doğruların yalnızca $(n-1)(n-1)$ tanesi M' ile kesişir ve bu doğrulardan M' ye paralel olan ve L yi kesen $2n-2$ tane doğru vardır. Fakat, L en çok $n(n+1)+1 = n^2+n+1$ tane doğru ile kesiştiğinden ve L ile kesişen doğruların sayısı en az $n^2-1+2n-2+1 = n^2+2n-2$ olduğundan, L ve M' ile kesişen n^2-1 tane doğru vardır. Buradan $n^2+2n-2 \leq n^2+n+1$ veya $n \leq 3$ dür. Bu çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir q, $(n+2)-$noktası yoktur.

s, M nin üzerinde olmayan herhangi bir nokta olsun. Bu durumda s den en az 3 tane $(n-1)-$doğru geçer, buradan $r_s = n+1$ dir.

$S-M$ lineer uzayı bir N, $n-$doğrusu içerir. $S-M$ nin tüm s noktaları için, $r_s = n+1$ olduğundan, N ile kesişen tüm $(n+1)-$doğrular belirlenerek, $S-M$ nin $(n-2)$, $(n-1)$ ve $(n+1)-$doğrularla parçalanması oluşturulur. $(n+1)-$doğrular var olduğu için parçalanma en az $n+1$ tane doğru içerir ve bu yüzden $S-M$ nin noktalarının sayısı en az $n+n(n-2) = n^2-n$ dir. Fakat $S-M$ lineer uzayında tam olarak $n^2-3-(n-1) = n^2-n-2$ tane nokta olduğundan, bu bir çelişkidir.

$v = n^2-2$ olsun. Önerme 4.3.2 den, $r_p = n$ ise p den, $n+1$ dereceli $n-2$ tane doğru, n dereceli 1 doğru ve $n-1$ dereceli 1 doğru geçer; $r_p = n$ ise p den, $n-3$ tane $n+1$ dereceli doğru, 3 tane n dereceli doğru geçer; $r_p = n+1$ ise p den, (s_p negatif olmayan bir tam sayı ise), s_p tane n dereceli doğru, $(n-s_p-1)/2$ tane $n+1$ dereceli doğru ve $(n-s_p+3)/2$ tane $n-1$ dereceli doğru geçer veya $r_p = n+2$ ise p den, 1 tane n dereceli doğru ve $n+1$ tane $n-1$ dereceli doğru geçer.

L bir $(n+1)-$doğru olsun. p; L üzerinde olmayan bir $(n+2)-$nokta olsun ve M; p den geçen ve L ye paralel olan bir doğru olsun. Eğer M bir $n-$doğru ise, bu durumda M ve L doğrularını kesen $n(n+1)$ tane $(n-1)-$doğru vardır. Buradan x, L nin $(n+1)-$noktaları üzerinde bir değişken olsun. s' ise, bir x, $(n+1)-$noktasından geçen $(n-1)-$doğru sayısı olan s_x in minimum değeri olsun. Bu durumda

$$n(n+1) \leq (n+1)\max\left\{1, \frac{1}{2}(n-s'+3)\right\}$$

dür. Dolayısıyla açıkça, $2n \leq n-s'+3$ veya $n-3 \leq -s'$ dir. $n \geq 4$ olduğundan bu durum çelişkidir. Dolayısıyla M aslında bir $(n-1)-$doğrudur.

M üzerinde olmayan bir s, $n-$noktası var olsun. Bu durumda s noktasından geçen en çok 1 tane doğru M ye paraleldir ve hiçbir $(n+1)-$doğru M yi kesmediğinden, $n \leq 4$ olmalıdır; bu ise çelişkidir. Böylelikle M doğrusu üzerinde olmayan $n-$nokta yoktur.

Yukarıdaki gibi L ve M olarak harflendirerek, L ve M doğrularının her ikisini de kesen $(n-1)-$doğruların sayısı hesaplansın. L ve M yi kesen $(n-1)-$doğruların sayısı tam olarak $n(n-1)$ dir. Dolayısıyla x, L nin noktaları üzerindeki değişken olmak üzere s' yukarıdaki gibi s_x in minimum değeri iken,

$$n^2 - n \leq (n+1)\frac{1}{2}(n - s' + 3)$$

dür. Bu yüzden

$$2n^2 - 2n \leq n^2 + 4n + 3 - s'(n+1)$$

veya

$$n^2 - 6n - 3 \leq -s'(n+1)$$

dir.

$n > 6$ için, bu ifade çelişki oluşturur. Dolayısıyla $v \neq n^2 - 2$ dir.

Bu durumda $v = n^2 - 1$ olduğu varsayılsın. Önerme 4.3.2 kullanıldığında, her p noktası için şu seçeneklerden birisinin sağlandığı görülür;

(1) $r_p = n$ ise p den, $n-2$ tane $(n+1)$. dereceden doğru ve 2 tane n. dereceden doğru geçer; (2) $r_p = n$ ise p den, $n-1$ tane $(n+1)$. dereceden ve 1 tane $(n-1)$. dereceden doğru geçer; (3) $r_p = n+1$ ise p den, s_p tane n. dereceden, $(n-s_p)/2$ tane $(n+1)$. dereceden ve $(n-s_p+2)/2$ tane $(n-1)$. dereceden doğru geçer;

(4) $r_p = n+2$ ise p den, 1 tane $(n+1)$. dereceden ve $n+1$ tane $(n-1)$. dereceden doğru geçer;

(5) $r_p = n+2$ ise p den, 2 tane n. dereceden ve n tane $(n-1)$. dereceden doğru geçer.

İki tane kesişmeyen L ve M, $(n+1)-$doğru olduğu varsayılsın. Bu durumda L ve M nin tüm noktaları $n+2$ derecelidir ve bu noktalar için (4). madde geçerlidir. $p \notin L, M$ olsun. Bu durumda p noktasından $(n-1)$. dereceden en az $n+1$ tane doğru geçtiği için, p için de (4). madde geçerlidir.

Dolayısıyla S lineer uzayının $n-1$ tane $(n+1)-$doğru tarafından bir parçalanması mevcuttur ve diğer tüm doğrular $(n-1)-$doğrudur. Önerme 4.3.3 den, S noktadaş üç doğrusu tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlemdir. Bu yüzden tüm $(n+1)-$doğruların birbiriyle kesiştiği kabul edilebilir.

Tüm doğruların herhangi bir $(n+1)-$doğru ile kesiştiği ispatlanacaktır.

İlk olarak N, $n-$doğrusuna paralel bir L, $(n+1)-$doğrusu olduğu kabul edilsin. L nin herhangi bir p noktası en çok 2 tane $(n+1)-$doğru üzerinde olduğundan, N nin noktaları için (5). madde geçerlidir. p; bir $(n+1)-$nokta ise tümü N ile kesişen en az $n-4$ ve en çok $n-2$ tane n dereceli doğru üzerinde olmalıdır. N ve L doğrusu ile kesişen tam olarak n tane n dereceli doğru vardır ve L nin $n-$doğrular üzerinde olan hiçbir $(n+2)-$noktası yoktur. Buradan aynı zamanda N ile kesişen ve en az $n-4$ tane $n-$doğru üzerinde olan, L nin ikinci bir $(n+1)-$noktası vardır. Buradan $2(n-4) \leq n$ veya $n \leq 8$ dir ve bu bir çelişkidir. Bu yüzden L nin tüm noktaları için (4). madde geçerlidir; fakat ifade edildiği gibi bu durum ise, hiçbir $n-$doğrunun L ile kesişmediği anlamına gelir ve bu da çelişkiye sebeptir. Buradan tüm doğrular $(n+1)-$doğru ile kesişir.

N doğrusunun L, $(n+1)-$doğrusuna paralel olan bir $(n-1)-$doğru olduğu varsayılsın. a, N doğrusunun (4). maddeyi sağlayan noktalarının sayısı ve c, L nin $(n+1)-$noktalarının sayısı olsun. Dolayısıyla L nin $(n+1)-$noktalarından geçen $(n+1)-$doğruların sayısı en az $a+1$ ve en çok $a+c+1$ dir. Bu yüzden bu $(n+1)-$noktalardan geçen $(n-1)-$doğruların sayısı en az $a+2c$ ve en çok $a+3c$ dir. Dolayısıyla, bu noktalardan geçen $n-$doğruların sayısı en çok

$$cn+1-[a+1+(a+2c)] = cn-2a-2c$$

dir.

N doğrusu ile kesişen $n-$doğruların sayısı (bu $n-$doğruların tümü L ile kesişir) $2(n-1-a)$ ve dolayısıyla

$$cn-2a-2c \geq 2n-2-2a$$

$$c(n-2) \geq 2n-2 = 2(n-2)+2$$

$$c > 2$$

dir.

Buradan, aynı zamanda L doğrusunu kesen $(n-1)-$doğruların sayısı en çok $(n+1-c)(n+1)+a+3c$ tanedir. L ve N doğrularını kesen doğruların sayısı $an+(n-1-a)(n-1)$ dir. Dolayısıyla,

$$n^2+2n+1-cn+a+2c \geq n^2-2n+1+a,\ 4n \geq c(n-2),$$

ve bu durumda $c \leq 4$ dür. Buradan $c=3$ veya 4 dür.

L ve N ile kesişen $n-$doğruların sayısı $2(n-1-a)$ dir. N ile kesişmeyen, L nin $(n+1)-$noktalarından geçen $n-$doğruların sayısı d olsun. Bu durumda L doğrusunun $(n+1)-$noktalarından geçen $cn-2(n-1-a)-d$ tane doğru; L den farklı $(n+1)-$doğru veya $(n-1)-$doğrudur. Bu yüzden bu doğruların $\frac{1}{2}(cn+1-2(n-1-a)-d-2c)$ tanesi $(n+1)-$doğrudur ve bunların en az

$$\frac{1}{2}(cn+1-2(n-1-a)-d-2c)-c$$

tanesi N ile kesişir. Bu yüzden

$$cn+3-2n+2a-d-4c \leq 2a$$

$$n(c-2) < 4c+d-3$$

$$n \leq 4+(d+5)/(c-2) \leq 12$$

dir; bu bir çelişkidir. Dolayısıyla tüm doğrular herhangi bir $(n+1)-$doğruyla kesişir.

Bir p, $n-$noktası olduğunu varsayılsın; bu durumda p bir tektir. p için eğer (1). madde geçerliyse, bu durumda $n=m+1$ olmakla birlikte $S-p$, m^2+m-1 noktalı ve doğru dereceleri m ve $m+1$ olan bir lineer uzaydır. Önerme 4.2.7 den, $S-p$ nin mevcut olmama çelişkisiyle karşılaşılır. Bu yüzden p noktası (1). maddeyi sağlayan bir nokta olamaz. p nin (2). maddeyi sağlayan bir nokta olduğu varsayılsın. N, p den geçen $(n-1)-$doğru olsun ve $q \in N-p$ olsun. q dan geçen herhangi bir ikinci doğru; p den geçen tüm $(n+1)-$doğrularla kesişir ve dolayısıyla sadece $n-$doğru olabilir. $S-N$ nin her noktasından en az $n-2$ tane $n-$doğru geçer ve bu yüzden $s_p=n-2$ olmakla birlikte $S-N$ nin her noktası (2). maddeyi sağlar. Teorem 4.2.3

den $S-N$; bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış n. mertebeden bir afin düzlem ve dolayısıyla S; bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış ve bu atılmayan noktadan geçen bir doğrunun iki noktası atılmış n. mertebeden bir projektif düzlemdir; fakat böyle bir S lineer uzayı $(n+2)-$nokta içeremez.

Hiç $n-$nokta olmasın. Açıkça, bir $(n+1)-$doğru üzerinde olmayan her nokta $n+1$ derecelidir. Herhangi bir q noktasının tüm $(n+1)-$doğrular üzerinde olduğu varsayılsın. Eğer $(n+1)-$doğruların sayısı birden fazla ise, $r_q = n+1$ dir. q nun bir tek L, $(n+1)-$doğrusu üzerinde olduğunu varsayılsın. Eğer $r_q = n+2$ ise, q dan geçen L hariç diğer tüm doğrular $(n-1)-$doğrudur ve her $p \notin L$ için, p bir tek $(n-1)-$doğru üzerinde olduğundan, bu doğru pq dur. Bu yüzden L nin q hariç diğer tüm noktaları yalnızca $n-$doğrular üzerindedir ve bu durum çelişki oluşturur. Dolayısıyla tüm noktalar $n+1$ derecelidir.

Sonuç olarak, N, $n-$doğru olsun. S nin a tane $n-$doğru ve c tane $(n-1)-$doğru ile bir parçalanmasını oluşturulur; $an + c(n-1) = n^2 - 1$, $n \mid (c-1)$, $\frac{n-1}{a} > 0$ dır. Bu yüzden $a = n-1$ ve $c = 1$ ve $a + c = n$ dir, hiç $(n+1)-$doğru yoktur; bu ise çelişkidir. $v \neq n^2 - 1$ dir.

Son olarak $v = n^2$ olduğu varsayılsın. Önerme 4.3.2 den, her p noktası için aşağıdakilerden birisi geçerlidir:

(1) $r_p = n$ ise p den, $n+1$ dereceli $n-1$ tane doğru ve 1 tane n dereceli doğru geçer;

(2) $r_p = n+1$ ise p den, s_p tane n dereceli doğru, $(n+1-s_p)/2$ tane $n+1$ dereceli doğru ve $(n+1-s_p)/2$ tane $n-1$ dereceli doğru geçer (s_p negatif olmayan bir tam sayı);

(3) $r_p = n+2$ ise p den, 3 tane n dereceli doğru ve $n-1$ tane $n-1$ dereceli doğru geçer;

(4) $r_p = n+2$ ise p den, 1 tane $n+1$ dereceli doğru, 1 tane n dereceli doğru ve n tane $n-1$ dereceli doğru geçer.

Eğer bir p, $n-$noktası mevcutsa, bu durumda $S-p$ sadece n veya $n-1$ dereceli doğruya sahiptir. Teorem 4.2.3 den, $S-p$; n. mertebeden delinmiş bir afin düzlemdir. Dolayısıyla S; bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış ve ilave edilen noktası atılmış n. mertebeden bir projektif düzlemdir. Bu yüzden hiç $n-$noktanın olmadığı varsayılabilir.

İki tane paralel L ve M, $(n+1)-$doğrusunun olduğu varsayılsın; bu durumda L ve M nin tüm noktaları için (4). madde geçerlidir. p; L veya M nin üzerinde olmayan bir nokta olsun. p; $n+1$ dereceli ise yalnızca $n-$doğrular üzerindedir. L nin herbir noktasından tam olarak bir tane $n-$doğru geçtiğinden, p tek $(n+1)-$noktadır. Dolayısıyla diğer her nokta; $(n+2)-$noktadır ve en çok 2 tane $n-$doğru üzerinde olabileceğinden bu noktalar için (4). madde geçerlidir. Bu yüzden p tüm $n-$doğrular üzerindedir ve $S-p$ yalnızca $(n+1)-$ ve $(n-1)-$doğrulara sahiptir. Önerme 4.3.3 den S; noktadaş üç doğrusu, kesişim noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış $(n+1)$. mertebeden bir projektif düzlemdir.

Tüm noktaların $n+2$ dereceli olduğu varsayılsın. Eğer bazı noktalar için (3). madde geçerliyse, L ye paralel bir N, $n-$ veya $(n-1)-$doğru mevcuttur. L tam olarak $n+1$ tane n dereceli doğru ile kesişir ve L ve N yi kesen $2n$ veya $3(n-1)$ tane n dereceli doğru vardır. Buradan $n \leq 2$ dir ve bu çelişkidir. Bu yüzden tüm noktalar için (4). madde geçerlidir ve S nin $(n+1)-$doğrular tarafından parçalanması mevcuttur; fakat buradan da $(n+1) \mid n$ çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla, tüm $(n+1)-$doğruların birbiriyle kesiştiği varsayılabilir.

Bir L, $(n+1)-$doğrusu üzerinde olmayan bir $(n+2)-$noktanın olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla bu nokta L ye paralel bir $n-$ veya $(n-1)-$doğru üzerindedir. N üzerindeki (4). maddeyi sağlayan noktaların sayısı a ve L üzerindeki $(n+1)-$noktaların sayısı da c olsun. L nin $(n+1)-$noktalarından geçen $n+1$ dereceli $a+1$ tane doğru vardır. Bu doğrular L yi içerdiğinden, bu $(n+1)-$noktaların tümünden geçen $n-1$ dereceli olan tam olarak $a+c$ tane doğru vardır. Dolayısıyla L nin $(n+1)-$noktalarından geçen $n-$doğruların sayısı $cn+1-(a+1+a+c) = cn-2a-c$ dir. N hariç N yi kesen $n-$doğruların sayısı $2(n-a)$ veya $a+3(n-1-a)$ dır, bu sayıların küçüğü $2(n-a)$ dır. Bu $n-$doğruların tümü L ile kesişir. Dolayısıyla,

$$2(n-a) \leq cn-2a-c+(n+1-c)$$

$$n-1 \leq c(n-2)$$

$$1 < (n-1)/(n-2) \leq c$$

dir. Bu yüzden $c \geq 2$ dir.

Aynı zamanda, N hariç N yi kesen $(n-1)-$doğruların sayısı $na + (n-a)(n-1)$ veya $a(n-1)+(n-1-a)(n-2)$ dir, bu sayıların küçük olanı $a(n-1)+(n-1-a)(n-2)$ dir. Bu $(n+1)-$doğruların tümü L ile kesişir. L yi kesen $(n-1)-$doğruların sayısı $a + c + (n+1-c)n$ dir. Bu yüzden

$$n^2 - 3n + 2 + a \leq n^2 + n + a + c - cn$$

$$c(n-1) \leq 4n - 2 = 4(n-1) + 8$$

dir ve $c \leq 4$ dür.

En az 2 tane q, $q' \notin L$, $(n+1)-$noktası olsun. L nin $(n+2)-$noktaları q ve q' ile birleştirildiğinde en az $2(n+1-c)-1$ tane farklı doğru oluşur. Bu doğruların en çok $n+1-c$ tanesi $n-$doğru ve kalanının en az

$$2(n+1-c) - 1 - (n+1-c) = n - c$$

tanesi $(n-1)-$doğrudur. Her $(n+1)-$noktadan aynı sayıda $(n+1)$ ve $(n-1)-$doğru geçtiğinden, q ve q' den en az $n-c-1$ tane $(n+1)-$doğru geçer. Bu yüzden q ve q' den en az $2(n+1-c)-1+n-c-1 = 3(n-c)$ tane, en çok da $(n+1)+ n = 2n+1$ tane $(n+1)-$doğru geçer. Dolayısıyla $3(n-c) \leq 2n+1$ veya $n \leq 3c+1 \leq 13$ dür ve bu çelişkidir. L nin üzerinde olmayan en çok 1 tane $(n+1)-$noktanın olduğu gösterilebilir.

Kabul edelim ki s, L nin üzerinde olmayan bir $(n+1)-$nokta olsun. p ve q; L nin $(n+1)-$noktalarıdır. Eğer s yalnızca $n-$doğrular üzerinde ise, bu durumda $S-s$; n^2-1 tane noktaya ve $(n-1)-$, $n-$ ve $(n+1)-$doğrulara sahiptir ve $(n+1)-$doğrulardan yola çıkılabilir. L nin c tane $(n+1)-$noktası olduğundan, s en çok c tane $(n+1)-$doğru üzerindedir. $S-s$ nin herbir noktası L ye paralel bir tek doğru üzerindedir ve bu durum $(S-L) \cup \{s\}$ nin $n-$ ve $(n-1)-$doğrular tarafından bir P parçalanmasını verir. (Tüm $(n+1)-$doğruların birbiriyle kesiştiği tekrar hatırlansın). P deki $n-$doğruların sayısı a ve $(n-1)-$doğruların sayısı d kabul edildiğinde,

$$n + 1 + an + d(n-1) = n^2 - 1, \; an + d(n-1) = n^2 - n - 2$$

dir; bu yüzden $n \mid (d-2)$, $\frac{n-1}{a+2} > 0$ dır. Dolayısıyla $a = n-3$ ve $d = 2$ dir. Buradan P de L yi kesen $n-$doğrular mevcuttur. Bu durum, L hariç tüm $(n+1)-$doğruların s noktasında kesiştiği anlamına gelir.

L ile kesişen $n-$doğruların sayısı aşağıda gösterildiği gibi $(n+1)-$doğruların sayısına bağlıdır:

s den geçen 1 tane $(n+1)-$doğru varsa; $c(n-1)-2+(n+1-c) = (c+1)n-2c-1$

s den geçen 2 tane $(n+1)-$doğru varsa; $c(n-1)-2.2+(n+1-c) = (c+1)n-2c-3$

s den geçen 3 tane $(n+1)-$doğru varsa; $c(n-1)-2.3+(n+1-c) = (c+1)n-2c-5$

s den geçen 4 tane $(n+1)-$doğru varsa; $c(n-1)-2.4+(n+1-c) = (c+1)n-2c-7$

s noktasından geçen tüm doğrular L ile kesişir. Bu yüzden L, s den geçmeyen $c(n-2)$ tane $n-$doğruyu keser ve dolayısıyla kesişen tüm doğrular P nin bir parçalanmasını oluşturur. N doğrusu, P nin bir $n-$doğrusu ve c', s den geçen $(n+1)-$doğru sayısı olsun. N hariç $2(n-c')$ tane $n-$doğru vardır ve bu doğruların en az $n+1-2c'-1 = n-2c'$ tanesi s den geçer. Bu yüzden en çok n tane $n-$doğru N doğrusu ile kesişir; $c(n-2) = n + [(c-1)n-2] > n$, çelişki verir. Dolayısıyla böyle bir s noktası mevcut değildir.

Bu durumda, L üzerindeki p ve q noktalarının yalnızca $(n+1)-$nokta olduğu varsayılsın.

$$n+1+an+d(n-1) = n^2, \;\; an+d(n-1) = n^2-n-1$$

dir ve $n \mid (d-1)$, $\frac{n-1}{a+1} > 0$ olduğu için, P nin a tane $n-$doğru ve d tane $(n-1)-$doğru tarafından bir parçalanması mevcuttur. Dolayısıyla $a = n-2$ ve $d = 1$ dir. Bu yüzden P nin bu parçalanmasında da $n-$doğrular mevcuttur. Dolayısıyla L doğrusu bir tek $(n+1)-$doğrudur ve P de olmayan herhangi bir $n-$doğru P nin her doğrusuyla kesişir. L doğrusu ile kesişen $n-$doğruların sayısı

$$c(n-1)+n+1-c = (c+1)n-2c+1$$

dir. P nin bir $n-$doğrusuyla kesişen doğruların sayısı L hariç $2n$ dir. Bu yüzden $n \leq 7$ dir ve bu çelişkidir.

L üzerinde olmayan hiçbir noktanın $(n+2)-$nokta olmadığı varsayılabilir. L nin bazı p noktalarının (4). maddeyi sağladığı varsayılsın. N, p den geçen bir $(n-$

$1)-$doğru ve q, $N-p$ nin bir noktası olsun. Bu durumda q noktası; $p \notin M$ ve $M \neq L$ olan bir M, $(n+1)-$doğrusu üzerindedir. $r_p = n+2$ olduğundan, M ye paralel olan ve p noktasından geçen ve $N' \neq L$ olacak şekilde bir N' doğrusu vardır. Fakat N' nün herbir noktasından tam olarak $n+2$ tane doğru geçtiğinden bu durum çelişkidir. $\square$

Önerme 4.3.5. S, v noktalı $v \leq n^2$, $n \geq 23$ ve tüm noktalar $n+1$ dereceli, üç doğru derecesi de var olmakla birlikte doğru dereceleri kümesi $\{n-1, n, n+1\}$ olan bir lineer uzay olsun. Bu durumda S, bir $(n+1)-$yayı atılmış n. mertebeden bir projektif düzlemdir.

İspat. S önermedeki şartları sağlasın. Açıkça S deki doğru sayısı $b = n^2+n+1$ dir.

N bir $n-$doğru olsun. N üzerinde olmayan her noktadan N ye paralel bir tek doğru geçer. Dolayısıyla buradan $n+1$ doğrulu bir paralel sınıf elde edilir. Bu paralel sınıfta 1 tane $n-$doğru, n tane $n-1$ doğru vardır. Buradan $v = n^2$ dir. S ye yeni p noktasını ekleyerek, n^2+1 noktalı ve n^2+n+1 doğrulu, nokta derecesi $n+1$ ve doğru dereceleri kümesi $\{n-1, n, n+1\}$ olan bir lineer uzay elde edilir. p noktasından herbiri yukarıdaki gibi farklı bir 'yeni nokta' inşası olarak kullanılabilecek n tane $n-$doğru geçer. Bu durum ise n^2+n+1 noktalı ve n^2+n+1 doğrulu bir lineer uzay üretir; dolayısıyla bu lineer uzay n. mertebeden bir projektif düzlem olmalıdır. S nin önermedeki gibi olmak zorunda olduğu gösterilebilir. $\square$

4.4. Ardışık Olmayan İki Doğru Dereceli Lineer Uzaylar

Teorem 3.2.7 de doğru dereceleri m^2-1 ve m^2-m-1 olan bir lineer uzayın bazı koşullar altında m^2. mertebeden bir P projektif düzlemine gömülebildiği görüldü. Aslında bu durum, P nin iki ayrık Baer altdüzleminin birleşiminin komplementidir.

$n \geq 2k+3$, $(k, n-1) = (k+1, n) = 1$, $b \leq n^2+n+1$ ve n dereceli en az bir doğru var olduğu durumda n ve $n-k$ doğru dereceli bir lineer uzay incelenmiştir (Beutelspacher, 1986). (Özel olarak eğer $(k+1, a) = 1$ için $n = ak$ ise ve daha özel durumda; eğer n, k nın bir kuvveti ise, o zaman $(k, n-1) = (k+1, n) = 1$ dir). Aksi belirtilene kadar, S nin, her doğrusu n veya $n-k$ noktaya sahip aşikar olmayan bir lineer uzay olduğu kabul edelim.

Teorem 4.4.1. S, v noktalı $n \geq 2k+3$ ve $(k, n-1) = (k+1, n) = 1$, $k \geq 1$ ve doğru derecesi n veya $n-k$ olan sonlu aşikar olmayan bir lineer uzay olsun. Ayrıca, $b \leq n^2+n+1$ ve en az bir $n-$doğru var olsun. Bu durumda S aşağıdakilerden birisidir:

(i) $(n-1)$. mertebeden delinmiş bir projektif düzlem,

(ii) n. mertebeden bir afin düzlem,

(iii) Herhangi bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış n. mertebeden bir afin düzlem,

(iv) S nin herbir doğrusunun kümedeki 1 veya $n+1$ tane nokta ile kesiştiği, noktalardan oluşan bir kümenin n. mertebeden bir projektif düzlemde komplementi,

(v) $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlemde bir $k-$demetin pseudo-komplementi,

(vi) n. mertebeden bir projektif düzlemde bir $(k+1)-$demetin pseudo-komplementi,

(vii) Bir $(n+1)-$doğrusu atılmış n. mertebeden bir projektif düzlemde bir maksimal $k-$yayın pseudo-komplementidir.

Önerme 4.4.2. S bir lineer uzay ve S nin tüm doğruları $n-$doğru ise, bu durumda S; $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlem veya n. mertebeden bir afin düzlemdir.

İspat. Bu önermenin ispatı Teorem 4.2.2 den dolayı açıktır. □

Önerme 4.4.3. S, v noktalı bir lineer uzay ve S de eğer $r_p < n$ olacak şekilde bir p noktası varsa, bu durumda $S - p$; $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlemde bir $k-$demetin pseudo-komplementidir.

İspat. S önermedeki koşulları sağlasın. Tüm $n-$doğruların p noktasından geçtiği açıktır. p noktasından geçen bir $(n-k)-$doğru var olsun. q bir $n-$doğrunun bir noktası olsun ve s, $n-$doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda

$$v - 1 = n - 1 + (r_q - 1)(n - k - 1)$$

ve $v - 1 = r_s(n - k - 1)$ dir.

Dolayısıyla $(n-k-1) \mid (n-1)$ ifadesi ortaya çıkar. Bu ise $(k, n-1) = 1$ olduğundan bir çelişkidir.

Dolayısıyla p den geçen her doğru bir $n-$doğrudur. Bu yüzden $v-1=r_p(n-1)$ dir ve yukarıda bulunan $v-1$ ile ilgili ilk denklemle birlikte $(n-k-1) \mid (r_p-1)$ sonucuna varılır. $r_p-1=a(n-k-1)<n-1$ dir. Dolayısıyla $(a-1)n<a(k+1)-1$ ve $n \geq 2k+1$ olduğundan $a=1$ ve $r_p-1=n-k-1$ dir.

Sonuç olarak $v=(n-k)(n-1)+1$ dir.

$v-1=n-1+(r_q-1)(n-k-1)=(n-k)(n-1)$ ve tüm $q \neq p$ noktaları için $r_q=n$ dir. S nin doğru sayısının $b=r_p+(n-1)^2=(n-1)^2+(n-1)+1-k$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $S-p$, $(n-1)$. mertebeden bir projektif düzlemde bir $k-$demetin pseudo-komplementidir. $\square$

Önerme 4.4.4. Eğer S lineer uzayının tüm noktaları birden aynı dereceye sahip değilse, bu durumda S, Teorem 4.4.1 de (iii) veya (v) deki gibi bir lineer uzaydır.

İspat. S lineer uzayının tüm noktaları aynı dereceli olmasın ve S, v noktalı, b doğrulu olsun. Önerme 4.4.3 den, S nin tüm p noktaları için $r_p \geq n$ olduğu varsayılabilir.

Adım 1. İlk olarak, herhangi bir $n-$doğrunun en çok $n+1$ dereceli olan en az bir tane noktaya sahip olduğu ispatlanacaktır. L, her noktası en az $n+2$ dereceli olan bir $n-$doğru olsun. Böylece, tüm $p \in L$ noktaları için $r_p \geq n+2$ dir. Bu durumda

$$n^2+n+1 \geq b \geq (n+1)n+1$$

dir. Bu durum ise tüm doğruların L ile kesiştiğini, L nin tüm p noktaları için $r_p=n+2$ olduğunu ve L nin üzerinde olmayan tüm p noktalar için $r_p=n$ olduğunu gösterir. L' nün ikinci bir $n-$doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda $S-(L \cup L')$ nün hiçbir noktası L' ye paralel bir doğru üzerinde değildir. $L-L'$ nün her noktası L' ye paralel iki doğru üzerindedir. Bu ise çelişkidir. Buradan L bir tektir. Sonuç olarak L nin dışındaki bir q ve L nin bir p noktasını kullanıp $v-1$ sayılarak,

$$\begin{aligned} n-1+(n+1)(n-k-1) &= n-1+(r_p-1)(n-k-1) \\ &= v-1=r_q(n-k-1)=n(n-k-1) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $2n=k+2$ çelişkisi ortaya çıkar.

Adım 2. Tüm p noktaları için $r_p \in \{n, n+k\}$ olduğu gösterilecektir.

r_p minimum olacak şekilde bir p noktası seçelim. Adım 1 den, $r_p = n$ veya $n+1$ dir. Genelliği bozmaksızın, $r_q > r_p$ olacak şekilde bir q noktasının var olduğu kabul edilebilir. a ve c sırasıyla p ve q dan geçen $n-$doğru sayısı olsun.

$$ak + r_p(n-k-1) = v - 1 = ck + r_q(n-k-1)$$

$$(r_p - r_q)(n-k-1) = (c-a)k \qquad (1)$$

ve bu yüzden $(n-k-1) \mid (a-c)$ dir.

Bu durumda $a - c = n - k - 1$ veya $2(n-k-1) \leq a - c$ dir. Eğer eşitsizlik sağlanırsa, o zaman $2(n-k-1) \leq a - c \leq a \leq r_p \leq n+1$ eşitsizliğinden $n \leq 2k+3$, dolayısıyla $n = 2k+3$ dür. $c = 0$ ve $a = n+1 = r_p$ olduğu gösterilebilir. Fakat, pq doğrusunun hem $n-$doğru hem de $n-$doğrudan farklı bir doğru olma çelişkisi mevcuttur. Dolayısıyla $a - c = n - k - 1$ dir. (1) denkleminde bu eşitlik yerine koyulduğunda $r_q = r_p + k$ olur. $r_q > r_p$ olmakla birlikte bu ifade her q noktası için doğru olduğundan, tüm p noktaları için $r_p \in \{n, n+k\}$ veya $r_p \in \{n+1, n+k+1\}$ dir. Yalnızca iki nokta derecesinin mevcut olduğu gösterilebilir.

Tüm p noktaları için $r_p \in \{n+1, n+k+1\}$ olduğu varsayılsın.

L bir $n-$doğru ve L üzerindeki $(n+k+1)-$nokta sayısı a olsun. Bu durumda L hariç L ile kesişen doğruların sayısı $a(n+k) + (n-a)n = n^2 + ak$ dır. Adım 1 den, $a < n$ dir. p, L nin üzerindeki bir $(n+1)-$nokta ve c, p den geçen $n-$doğruların sayısı olsun. $n+k+1$ dereceli bir q noktası seçilirse ve q dan geçen $n-$doğruların sayısına d denilirse, Adım 2 nin $c - d = n - k - 1$ sonucu kullanılarak

$$c = n - k - 1 + d \geq n - k - 1 \geq k + 2 \geq 2$$

bulunur. Bu yüzden p den geçen $L' \neq L$ olacak şekilde bir L', $n-$doğrusu vardır. L' nün herhangi bir noktasından geçen ve L ye paralel olan en az bir doğru vardır. Dolayısıyla $b \geq n^2 + ak + n$ dir. $ak \leq 1$ dir ve bu yüzden $a = 0$ veya $a = 1$ olduğu gösterilebilir. Eğer $a = 1$ ise, bu durumda $k = 1$ dir. Bu ise çelişkiye sebep olur. Bu yüzden $a = 0$ dır. Dolayısıyla bir $n-$doğrunun tüm noktaları bir $(n+1)-$noktadır.

$d = 0$ ve

$$v = (n + k + 1)(n - k - 1) + 1 = n^2 - k^2 - 2k$$

olduğu gösterilebilir.

Önerme 4.1.1 kullanılarak

$$nb_n = cv_{n+1} + dv_{n+1+k} = cv_{n+1} = (n - k - 1)v_{n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(n - k - 1) \mid b_n$ dir.

L ile bir noktada kesişen $n-$doğruların sayısı $n(n - k - 2)$ dir. Diğer taraftan, L ye paralel olan her $n-$doğru L' ile kesişir; bu yüzden L ye paralel olan en çok n tane $n-$doğru vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(n-2)(n-k-1) &< n(n-k-2) + 1 \leq b_n \\ &\leq n(n-k-2) + n = n(n-k-1)\end{aligned}$$

dir. Buradan $b_n = (n - 1)(n - k - 1)$ veya $b_n = n(n - k - 1)$ olduğu gösterilebilir.

Eğer $b_n = n(n - k - 1)$ ise, b_n yukarıda yerine koyulduğunda $v_{n+1} = n^2 > v$ çelişkisi oluşur. Dolayısıyla $b_n = (n - 1)(n - k - 1)$ dir. Buradan $v_{n+1} = n(n - 1)$ ve $v_{n+k+1} = n - k^2 - 2k$ olduğu gösterilebilir.

L ile kesişen $(n - k)-$doğruların sayısı $n(n + 1 - (n - k - 1)) = n(k + 2)$ dır. Bu yüzden L doğrusuna paralel $(n - k)-$doğruların sayısına s denildiğinde,

$$s \leq n^2 + n + 1 - (n - 1)(n - k - 1) - n(k + 2) = n - k$$

dır. Diğer taraftan, L ye paralel tam olarak $b_n - n(n-k-2) - 1 = k$ tane $n-$doğru vardır. Bu $n-$doğrular kesişmediğinden, $L' - L$ nin tam olarak k tane noktasını kapsarlar. Dolayısıyla kalan $n-(k+1)$ tane noktanın birinden geçen ve L ye paralel olan her doğru bir $(n - k)-$doğrudur. Özel olarak, L ye paralel en az $n - k - 1$ tane $(n - k)-$doğru vardır.

Yukarıda $n-$dereceli $k+1$ tane doğru tarafından S nin kısmi parelel sınıfı oluşturulmuştur; bu sınıf $(k+1)n$ tane nokta kapsar ve bu noktalar $(n+1)-$noktadır. Sonuç olarak, L ye paralel olan ve $n-$doğru olmayan doğrular üzerindeki $(n+1)-$noktaların sayısı

$$v' = v_{n+1} - (k + 1)n = n(n - 1) - n(k + 1) = n(n - k - 2)$$

dir.

Herhangi bir $(n+k+1)-$noktadan geçen, L ye paralel olan ve $n-k$ dereceli olan $k+1$ tane doğru vardır. Bu v' tane noktanın herbirinden geçen, L ye paralel olan ve $n-k$ dereceli olan tam olarak 1 tane doğru vardır. Dolayısıyla

$$s(n-k) = n(n-k-2) + (n-k^2-2k)(k+1)$$

dir. Buradan

$$s = n-k-1 \text{ ise } 2n = k^2+4k+3$$

ve

$$s = n-k \text{ ise } n(2k-1) = k^3+4k^2+2k$$

dır.

Yukarıdaki ifadeden, $v_{n+k+1} = n-k^2-2k \geq 0$, $n \geq k^2+2k$ dır. Dolayısıyla $s = n-k-1$, $k=1$ ve $n=4$ dür; ama bu durum $n \geq 2k+3$ olduğundan çelişkidir. Diğer taraftan, eğer $s = n-k$ ise, $n \geq k^2+2k$ dan $k \leq 2$ dir. $k=2$ olsaydı $3n = 8+16+4 = 28$ çelişkisine sahip olunurdu. Dolayısıyla $k=1$ ve $n=7$, $v=46$ dır. Bu ise Teorem 4.2.1 den dolayı mümkün değildir. Dolayısıyla tüm p noktaları için $r_p \in \{n, n+k\}$ dir.

Adım 3. k nın 1 olması gerektiği gösterilecektir.

$k \geq 2$ olduğu varsayılsın. Adım 2 den, her nokta n veya $n+k$ derecelidir. Bir $n-$noktadan geçen her doğru herhangi bir $n-$doğru ile kesişir. Adım 1 den, her $n-$doğru en az bir $n-$nokta içerir. Dolayısıyla herhangi iki $n-$doğru birbiriyle kesişir.

Bir L, $n-$doğrusu üzerindeki $(n+k)-$nokta sayısı a olsun. p ve q sırasıyla, herbiri c ve d tane $n-$doğru üzerinde bulunan $n-$ ve $(n+k)-$nokta olsun. Bu durumda

$$b_n = 1 + a(d-1) + (n-a)(c-1) = 1 + n(c-1) - a(n-k-1)$$

dir. a nın L nin seçiminden bağımsız olduğu gösterilebilir. L ile kesişmeyen her doğrunun; aynı zamanda $(n-k)-$doğru olduğu ve yalnızca $(n+k)-$noktalar içerdiği not edilsin.

Herhangi bir $n-$doğrunun bir M, $(n-k)-$doğrusu ile kesiştiği durum düşünülsün. e; M nin üzerindeki $(n+k)-$noktaların sayısı olsun. Bu durumda

$$b_n = ed + (n-k-e)c = (n-k)c - e(n-k-1)$$

dir. b_n yukarıdaki denklemde yerine koyulduğunda,

$$k(c-1) = (a-e+1)(n-k-1)$$

eşitliği elde edilir.

$(k, n-1) = 1$ olduğundan, $(n-k-1) \mid (c-1)$ olduğu gösterilebilir. Adım 2 nin verileri yardımıyla $c-d = n-k-1$ bulunur. Bu yüzden $(n-k-1) \mid (d-1)$ dir. $d-1 > 0$ varsayımıyla

$$n-k-1 \leq d-1 = c-1-(n-k-1) \leq r_p - 1 - (n-k-1) = k$$

dır; bu ifade ise $n \geq 2k+3$ ile çelişir. Dolayısıyla $d = 1$ ve bu yüzden $c = n-k$ ve

$$\begin{aligned} v &= 1 + r_q(n-k-1) + dk \\ &= 1 + (n+k)(n-k-1) + k = n^2 - k^2 - n + 1 \end{aligned}$$

dir. Aynı zamanda

$$b_n = 1 + (n-a)(n-k-1)$$

dir. Her $n-$doğru $n+k$ dereceli a tane noktaya sahip olduğundan ve böyle $n+k$ dereceli bir noktadan geçen tam olarak bir tane $n-$doğru olduğundan,

$$v_{n+k} = b_n a = [1 + (n-a)(n-k-1)]\, a$$

dır. Dolayısıyla $a \geq 1$ olduğundan,

$$n^2 - k^2 - n + 1 = v \geq v_{n+k} = [1 + (n-a)(n-k-1)]\, a \geq 1 + a(n-a)(n-k-1)$$

dir.

Adım 1 den, $a \leq n-1$ dir. Eğer $a = n-1$ ise bu durumda her L, $n-$doğrusu tam olarak 1 tane $n-$noktaya sahiptir ve L yi kesen her $n-$doğru bu $n-$noktada L ile kesişir. s; bu $n-$noktadan geçen $(n-k)-$doğru üzerindeki bir nokta olsun.

Bu durumda s noktası L ile kesişmeyen bir $n-$doğru üzerindedir, bu durum Önerme 4.2.1 den çelişkidir. Bu yüzden $a \leq n-2$ dir.

Eğer $a \geq 2$ ise, bu durumda $2 \leq a \leq n-2$, $[a-(n-2)]\,(a-2) \leq 0$ dır, buradan $a(n-a) \geq 2(n-2)$ dir. Yukarıdaki gibi aynı zamanda

$$\begin{aligned} n^2-k^2-n+1 &\geq a+a(n-a)(n-k-1) \\ &> 1+2(n-2)(n-k-1) \end{aligned}$$

$$k^2+4k+4 < n(2k+5-n)$$

dir. Hipotez tarafından $n = 2k+3$ veya $2k+4$ olduğu gösterilebilir. İlki $k=1$ ile, son durum $k(k+2) < 0$ ile sonuçlanır. Her iki durumun da çelişki ile sonuçlandığı görülebilir. Dolayısıyla $a = 1$ dir.

$2 \leq k+(a-e+1)(n-k-1)/(e-1) = a-e+1 = 2-e$, buradan $e = 0$ dır. Fakat Önerme 4.2.1 den, $e = n-k$ ve bu yüzden $n = k$ dır. Bunun ise çelişki olduğu açıktır.

Bir $(n-k)-$doğrunun herhangi bir $n-$doğru ile her zaman paralel olduğu sonucuna varılabilir. Bu durum, bir $(n-k)-$doğrunun her noktasının bir $(n+k)-$nokta olduğunu ve bir $n-$noktadan geçen her doğrunun bir $n-$doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla $c = n$, $d = k+1$ ve b_n li ilk denklemden

$$b_n = 1+n(n-1)-a(n-k-1)$$

bulunur. Her $n-$nokta bir q, $(n+k)-$noktasından geçen $k+1$ tane $n-$doğrunun bir tanesinin üzerindedir. Bu doğruların herbiri n dereceli tam olarak $n-a$ tane noktanın üzerinde bulunduğundan $v_n = (k+1)(n-a)$ dır. Dolayısıyla

$$v_n n = v_n c = b_n(n-a), b_n = n(k+1)$$

ve bu yüzden,

$$a(n-k-1) = n(n-k-1)-(n-1)$$

dir. Buradan; $(n-k-1) \mid (n-1)$ çelişkisi elde edilir.

Adım 4. $k = 1$ dir ve bu yüzden doğru dereceleri n ve $n-1$ ve nokta dereceleri n ve $n+1$ dir. Bir q, $n-$noktası ve bir p, $(n+1)-$noktası göz önüne alındığında,

$$(n+1)(n-2) = r_p(n-2) \leq v-1 \leq r_q(n-1) = n(n-1)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(n-1)^2 + (n-1) - 1 \leq v \leq (n-1)^2 + (n-1) + 1$$

dir. $n \geq 2k+3$ olduğundan $n \geq 5$ dir. Teorem 4.2.3 den; S, bir doğrusu, bir noktası hariç diğer tüm noktalarıyla birlikte atılmış n. mertebeden bir afin düzlemdir. □

Önerme 4.4.5. S lineer uzayının tüm noktaları r derecesine sahip olsun. Bu durumda $r = n$ ve S, $(n-1)$. mertebeden delinmiş bir projektif düzlem veya $r = n+1$ ve S, Teorem 4.4.1 deki $(ii), (iv), (vi)$ veya (vii) deki gibi bir lineer uzaydır.

İspat. S nin tüm noktaları r dereceli olsun. S, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. Önerme 4.4.3 den, $r \geq n$ dir. Önerme 4.4.4 Adım 1 den, $r \leq n+1$ dir.

Adım 1. Her noktadan tam olarak n tane doğru geçtiği varsayılsın. Dolayısıyla her doğru bir $n-$doğruyla kesişir. Bu yüzden S deki doğru sayısı

$$b = 1 + n(n-1) = n^2 - n - 1$$

dir. a; herhangi bir noktadan geçen $n-$doğruların sayısı olsun. Bu durumda

$$v = 1 + ak + n(n-k-1) \text{ ve } b_n = 1 + n(a-1)$$

dir. Bu yüzden

$$[1 + ak + n(n-k-1)]\, a = va = nb_n = [1 + n(a-1)]\, n$$

dir. a için bu denklemin sonuçları $a = n$ ve $a = \frac{n-1}{k}$ dır. Eğer $a = n$ ise, bu durumda tüm doğrular $n-$doğrudur; bu çelişkidir. $(n-1, k) = 1$ olduğundan, $k = 1$ ve $v = n(n-1)$ dir. Dolayısıyla S; $(n-1)$. mertebeden delinmiş bir projektif düzlemdir.

Adım 2. Her noktadan tam olarak $n+1$ tane doğru geçtiği varsayılsın. Açıkça bir L, $n-$doğrusu için L ye paralel doğruların kümesi L ile birlikte bir paralel sınıf belirtir.

a herhangi bir noktadan geçen $n-$doğru sayısı olsun. Bu durumda

$$v = 1 + ak + (n+1)(n-k-1)$$

dir.

İlk olarak $a = 1$ olduğu düşünülsün. Dolayısıyla $v = n(n-k)$ dir. Ayrıca, $nb_n = an(n-k)$, $b_n = n-k$ dır. Herhangi bir $(n-k)-$doğrunun herhangi bir $n-$doğruyla kesiştiği ve bir $n-$doğruyu kesen $(n-k)-$doğruların sayısının $b_{n-k} = n^2$ olduğu gösterilebilir. Bu yüzden $b = n^2 + n + 1 - (k+1)$ ve S; n. mertebeden bir projektif düzlemde bir $(k+1)-$demetin pseudo-komplementidir.

$a > 1$ olduğu varsayılsın. Dolayısıyla kesişen L ve L', $n-$doğrular çifti mevcuttur. Bu doğrulardan biri veya ikisiyle kesişen doğruların sayısı en az $n^2 + n$ ve $b \geq n^2 + n$ dir.

Adım 3. $b = n^2 + n$ ve $a > 1$ olsun. Adım 2 deki verilerden, L nin bir paralel sınıfında n tane doğru olduğu görülebilir. Ayrıca, iki farklı paralel sınıf ortak bir doğruya sahip değildir.

Bir paralel sınıftaki $n-$doğruların sayısı c olsun. Bu durumda

$$1 + ak + (n+1)(n-k-1) = v = cn + (n-c)(n-k) = ck + n(n-k)$$

ve bu yüzden $c = a - 1$ dir. Sonuç olarak

$$b_n = n(a-1) + c = (n+1)(a-1)$$

dir. S deki tüm paralel sınıfların sayısı $b_n/c = n+1$ dir. İki paralel sınıf kesişmediği için, $b = (n+1)n$ den S nin bir paralelizm olduğu gösterilebilir. $n+1$ tane sınıfa onlara karşılık gelen sonsuzdaki $n+1$ tane nokta karşılık getirilip ve bu $n+1$ tane noktadan geçen sonsuzdaki doğru ilave edilince, $b = n^2 + n + 1$ doğrulu, her noktası $n+1$, her doğrusu $n-k+1$ veya $n+1$ dereceli olan bir S' lineer uzayı elde edilir.

Sonuç olarak, $[1 + ak + (n+1)(n-k-1)]\, a = va = nb_n = (n+1)(a-1)n$, $a^2k - a(kn+n+k) + n(n+1) = 0$ dır; buradan $a = n+1$ veya $a = n/k$ dır. $a = n+1$ olamayacağı açıktır. Dolayısıyla $v = (n+1)(n-k)$ ve S', $(n+1)(n+1-k)$ tane noktaya sahiptir. Dolayısıyla S', n. mertebeden bir projektif düzlemde bir maksimal $k-$yayın pseudo-komplementidir.

Adım 4. Son olarak, $b = n^2 + n + 1$ ve $a > 1$ olduğu varsayılsın. Adım 2 den herbir paralel sınıfın tam olarak $n + 1$ tane elemana sahip olduğu gösterilebilir ve iki farklı paralel sınıf tam olarak bir doğruda kesişir.

M bir $(n - k)-$doğru olsun. M ile kesişmeyen $b_n - (n - k)a$ tane $n-$doğru vardır. Bu şekildeki her $n-$doğru M üzerinde bir paralel sınıf belirler ve bu yüzden bu paralel sınıfın hiçbir $n-$doğrusu M ile kesişmez. Dolayısıyla M üzerindeki paralel sınıfların sayısı

$$\frac{b_n - (n-k)a}{c} = \frac{n(a-1) + c - (n-k)a}{c} = 1 + k$$

dır. $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{S$ nin tüm paralel sınıfları$\}$ ve $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ nin doğrularına sonsuzdaki noktaların eklenmesine karşılık gelsin. $S' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ üzerinde bulunma yapısı tanımlansın. Herhangi iki paralel sınıf tam olarak bir tane ortak doğruya sahip olduğundan, S' bir lineer uzaydır. Aynı zamanda, S' de herbir doğru ve nokta $n + 1$ derecelidir. Bu durumda S', Önerme 2.3.6 den n. mertebeden bir projektif düzlemdir. S, Teorem 4.4.1 in (iv) şartındaki gibi bir lineer uzaydır. $\square$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sonlu lineer uzaylar doğru derecelerine göre sınıflandırılmıştır. Ardışık iki doğru dereceli lineer uzaylar L. M. Batten ve J. Totten tarafından 1980'de sınıflandırılmıştır. Ardışık üç doğru dereceli lineer uzaylar L. M. Batten tarafından incelenmiştir. Ardışık olmayan iki doğru dereceli lineer uzaylar ise A. Beutelspacher tarafından 1986'da incelenmiştir. Bu çalışmada, bu makaleler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Ardışık iki doğru dereceli lineer uzaylar toplam nokta sayısı üzerindeki kısıtlamalara göre, delinmiş afin ya da projektif düzlem, sonsuzdaki bir nokta ilaveli bir afin düzlem, bir afin düzlemin bir doğrusunun bir noktası hariç tüm noktalarıyla atılmasıyla elde edilen lineer uzay, bir afin düzlemden bir üçgenin atılmasıyla elde edilen lineer uzay, Nwankpa-Shrikhande düzlemi veya projektif düzlemde iki doğrunun pseudo-komplementidir.

Ardışık üç doğru dereceli $v \leq n^2$ noktalı, $n \geq 23$, lineer uzaylardan bazıları n. mertebeden bir projektif düzlemde $(n+1)-$yayın komplementi ve Nwankpa-Shrikhande düzlemidir.

Ardışık olmayan iki doğru dereceli lineer uzaylar doğru sayısı üzerindeki kısıtlanmaya bağlı olarak n. mertebeden bir projektif düzlemde $k \geq 2$, $(k+1)-$demetin pseudo-komplementi ya da bir $(n+1)-$doğrusu atılmış n. mertebeden bir projektif düzlemde bir maksimal $k-$yayın pseudo-komplementidir.

Sonlu lineer uzaylar doğru derecelerine göre sınıflandırılırken toplam nokta ve doğru sayısı üzerindeki kısıtlamalar değiştikçe daha farklı sonuçlar elde edilebilir. Ardışık olmayan üç ve daha fazla doğru dereceli lineer uzaylar ile ardışık olan dört ve daha fazla doğru dereceli lineer uzaylar araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Batten, L. M. (1980), Linear spaces with line range $\{n-1, n, n+1\}$ and at most n^2 points. J. Austral. Math. Soc. (A) 30, 215-228.

Batten, L. M. (1986), Combinatoricsof Finite Geometries. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne.

Batten, L. M and Beutelspacher A. (1993) The theory of finite linear spaces, Canbrige University Press, New-York, Melbourn,

Batten, L. M. and Totten, J. (1980), On a class of linear spaces with two consecutive line degrees. Ars Comb. 10, 107-114.

Batten, L. M. (1991), A dual approach to embedding the complement of two lines in a finite projective plane. J. Austral. Math. Soc. (a) 51, 426-435.

Beutelspacher, A. (1986), Embedding linear spaces with two line degrees in finite projective planes. J. Geometry 26, 43-61.

Bose, R. C. and Shrikhande, S. S. (1973), Embedding the complement of an oval in a projective plane of even order. Discrete Math. 6, 305-312.

de Bruijn, N. G. and Erdös, P. (1948), On a combinatorial problem. Indag. Math. 10, 421-423, and Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 51, 1277-1279.

Buekenhout, F. (1969), Une caracterisation des espaces affins basee sur la notion de droite. Math. Z. 111,367-361.

Fowler, J. C. (1984), A short proof of Totten's classification of restricted linear spaces. Geom. Ded. 15, 413-422.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam ediyor)

Hall Jr. , M. (1960). Automorphisms of Steiner triple systems, IBM J. Res. Develop. 4, 460-472.

Hall Jr., M.(1967,revised 1986). Combinatorial Theory, Blaisdell, Waltham, Mass.

Hughes, D.R. and Piper, F.C.(1973). Projective Planes, Springer-Verlag, New York.

Kaya, R. (1992). Projektif Geometri, Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Yayınları

Oehler, M. (1975). Endliche biaffine Inzidenzebenen, Geom. Ded. 4, 419-436.

Ralston, T. (1981). On the embeddability of the complement of a complete triangle in a finite projective plane, Ars Combinatoria 11, 271-274.

de Resmini, M. J. (1985). On $2-$blocking sets in projective planes, Ars Combinatoria 20, 59-69.

Totten, J. (1976). Embedding the complement of two lines in a finite projective plane, J. Austral. Math. Soc. 22, 27-34.

Vanstone, S. A. (1973). The extendibility of $(r, l)-$designs, Proc. Third Southeastern Conf. on Num. Math. , Utilitas Math. , 409-418.

de Witte, P. (1975). On the embeddability of linear spaces in projective planes of order n (unpublished)

de Witte, P. (1977). The exceptional case of a theorem of Bose and Shrikhande, J. Austral. Math. Soc. (A) 24, 64-78.

de Witte, P. (1983). Variations on a theorem of Kuiper and Dembowski, Simon Stevin 57, 47-59.

de Witte, P. and Batten, L. M. (1983). Finite linear spaces with two consecutive line degrees, Geom. Ded. 14, 225-235.