

Genelleştirilmiş Bir Bose Gazı Modelinin Bazı İstatistik Mekaniksel Özelliklerinin
İncelenmesi

Erkan İlik

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Haziran 2013

An Investigation on Some Statistical Mechanical Properties of a Generalized Bose Gas
Model

Erkan Ilik

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Physics

June 2013

Genelleştirilmiş Bir Bose Gazı Modelinin Bazı İstatistik Mekaniksel Özelliklerinin
İncelenmesi

Erkan İlik

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Fizik Anabilim Dalı
Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Abdullah ALĞIN

Haziran 2013

ONAY

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Erkan İlik'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Genelleştirilmiş Bir Bose Gazı Modelinin Bazı İstatistik Mekaniksel Özelliklerinin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Abdullah ALĞIN

İkinci Danışman :-

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: (Danışman) Prof. Dr. Abdullah ALĞIN

Üye: Prof. Dr. M. Celalettin BAYKUL

Üye: Doç. Dr. Cem Yüce

Üye: Yrd. Doç. Dr. Dursun İRİK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sertaç EROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27.06.2013. tarih ve 2013-15/4. sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle kuantum özdeş parçacık sistemlerinden bozonların genel kuantum mekaniksel özellikleri ele alındı. Özel olarak, bir-boyutlu standart bozon salıncıları sistemini tanımlayan operatör bağıntıları ve sistemin Hamiltoniyeni incelendi. Daha sonra Bose sistemlerinin istatistiksel dağılım fonksiyonunun nasıl elde edilebileceği araştırıldı.

İkinci olarak, ideal Bose gazının genel istatistik mekaniksel özellikleri incelendi. Özellikle ideal Bose gazının hal denklemi, öz ısısı, entropisi gibi fonksiyonlarının düşük ve yüksek sıcaklıklarda değişimlerine yoğunlaşıldı. Buradan standart Bose sistemlerinde, Bose-Einstein yoğunlaşmasının hangi koşullarda gerçekleşebileceği teorik olarak araştırıldı.

Üçüncü olarak, bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturan ve Bose sistemlerine de bir örnek uygulama olabilecek genelleştirilmiş bir bozon gazı modeli ele alındı. Tamm-Dancoff (TD) bozon gazı modeli olarak adlandırılan bu sistemi tanımlayan bazı kuantum mekaniksel özellikler incelenerek, modelin bazı istatistik mekaniksel yönleri üzerinde çalışıldı. Özel olarak, bu genelleştirilmiş bozon gazı modelinin deformasyon parametresinin sistemin genelleştirilmiş dağılım fonksiyonu, iç enerjisi, entropisi gibi fonksiyonlarına etkileri araştırıldı. Ayrıca bu yolla, sistemin genelleştirilmiş Bose-Einstein fonksiyonları $(g_n(z, q))$ elde edilerek, $0 \leq z \leq 1$ ve $q \geq 1$ bölgelerinde bu fonksiyonların değişimleri incelendi. Bu bağlamda elde edilen önemli sonuçlardan birisi, düşük sıcaklıklarda sistemin entropisinin deformasyon parametresi q arttıkça azalış göstermesidir. Son olarak, elde edilen diğer sonuçların yanı sıra TD-bozon gazı modeline uygulama alanı teşkil edebilecek fiziksel problemlerden bazıları tartışıldı.

Anahtar Kelimeler: Bozon, Bose sistemleri, Bose-Einstein dağılımı, deforme Bose gazı modeli, deforme bozonlar, kuantum simetrisi, kuantum istatistiği, istatistiksel termodinamik.

SUMMARY

In this study, general quantum mechanical properties of bosons which are one of the quantum identical particle systems are primarily studied. In particular, the operator relations and the Hamiltonian of the one-dimensional standard boson oscillators system are examined. How one can obtain the statistical distribution function of Bose systems is then investigated.

Secondly, general statistical mechanical properties of an ideal Bose gas are reviewed. Especially, for low and high temperatures, it is focused on variations of some functions of an ideal Bose gas such as the equation of state, the specific heat and the entropy. Hence, in the standard Bose systems, the conditions under which the Bose-Einstein condensation would occur are theoretically investigated.

Thirdly, a generalized Bose gas model called Tamm-Dancoff (TD) boson gas constituting both an original part of this study and an example for applications of Bose systems is considered. Some statistical mechanical aspects of this system are studied by means of some quantum mechanical properties of the model. In particular, effects of the deformation parameter q on some functions of this generalized boson gas model such as the generalized distribution function, the internal energy and the entropy are investigated. In this way, variations of these functions in the intervals $0 \leq z \leq 1$ and $q \geq 1$ are also examined. In this regard, one of the important results obtained in this study is that for low temperatures, the entropy of the system decreases when the deformation parameter q is increased. Finally, in addition to other obtained results in this study, some physical problems which may provide application fields for the TD-boson gas model are discussed.

Keywords: Boson, Bose systems, Bose-Einstein distribution, deformed Bose gas model, deformed bosons, quantum symmetries, quantum statistics, statistical thermodynamics.

TEŞEKKÜR

Gerek lisans gerekse yüksek lisans öğrenimim süresince; çalışkanlığı ve dürüstlüğü ile örnek olan, öğretmeyi seven, öğüt ve tavsiyeleriyle yol gösteren, danışman hocam, Prof. Dr. Abdullah ALĞIN'a göstermiş olduğu sabır, anlayış ve yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ders ve tez aşamam boyunca Nükleer Fizik Araştırma Laboratuvarı'nda sağladıkları sakin ve güzel çalışma ortamı için değerli hocam Prof. Dr. Emel ALĞIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans ders ve tez aşamamda kullandığım programlarda yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Dursun IRK ve Arş. Gör. Celal AŞICI'ya ayrı ayrı teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince manevi açıdan destek ve yardımlarını esirgemeyen Doç Dr. Ceyda Sibel KILIÇ (Ankara Üniversitesi), Arş. Gör. Dr. Gökhan KILIÇ ve Arş. Gör. Dr. U. Gökhan İŞSEVER'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans tez aşaması araştırmalarım sırasındaki yardımlarından dolayı Mustafa ŞENAY, M. Berkin DÜNDAR, Engin ÖZAYDIN ve Buse ÖZEN'e teşekkür ederim.

Eğitim ve öğretim hayatımın her döneminde yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. BOSE SİSTEMLERİNİN GENEL KUANTUM MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ	4
2.1. Özdeş Parçacıklar	4
2.1.1. Simetrik ve antisimetrik dalga fonksiyonları.....	4
2.1.2. Etkileşmeyen iki parçacıklı sistemler	6
2.2. Bir-Boyutlu Standart Bozon Salıncıları Sistemi.....	9
2.3. Bose Sistemlerinin Dağılım Fonksiyonu	12
3. İDEAL BOSE GAZININ TERMO-İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ	16
3.1. İdeal Bose Gazının Genel Termo-İstatistiksel Özellikleri.....	16
3.1.1. Yüksek sıcaklıklarda ideal Bose gazının davranışı.....	21
3.1.2. Düşük sıcaklıklarda ideal Bose gazının davranışı	23
3.2. Bose-Einstein Yoğunlaşması	27
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR BOSE GAZI MODELİNİN BAZI İSTATİSTİK MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ	29
4.1. TD-Bozon Gazı Modeli	29
4.2. TD-Bozon Gazı Modelinin Bazı İstatistik Mekaniksel Özellikleri	32
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	42
KAYNAKLAR DİZİNİ	45

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)**Sayfa****EKLER** 52

- EK-1. Standart $n = n(x)$ Bose-Einstein dağılım fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK-2. Standart $g = g_{3/2}(z)$ Bose-Einstein fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK-3. Standart $g = g_{5/2}(z)$ Bose-Einstein fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK-4. Genelleştirilmiş $n = n(\eta, q)$ Bose-Einstein dağılım fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK-5. Genelleştirilmiş $g = g_{3/2}(z, q)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK-6. Genelleştirilmiş $g = g_{5/2}(z, q)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK-7. Genelleştirilmiş $(S^q \lambda^3 / k_B V)$ fonksiyonunun deformasyon parametresi q 'ya göre değişimini veren Fortran yazılımı.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 \hat{a} ve \hat{a}^+ operatörlerinin ψ_n özfonksiyonlarına etkilerini gösteren basit bir diyagram.....	10
2.2 Standart $n = n(x)$ Bose-Einstein dağılım fonksiyonu ($x = \beta(\varepsilon - \mu)$)	14
3.1 Standart $g = g_n(z)$ fonksiyonlarının fugasiteye göre değişim grafiği.....	19
3.2 $(V/N\lambda^3)$ parametresinin bir fonksiyonu olarak ideal Bose gazının fugasite grafiği.....	20
3.3 (T/T_c) 'nin bir fonksiyonu olarak normal faz (N_e/N) ve yoğun faz (N_0/N) kesirlerinin değişim grafiği.....	25
3.4 (T/T_c) 'nin fonksiyonu olarak ideal Bose gazının öz ısı grafiği	26
4.1 Genelleştirilmiş $n = n(\eta, q)$ Bose-Einstein dağılım fonksiyonunun $0 < \eta \leq 3$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralıkları için grafiği	34
4.2 Genelleştirilmiş $g = g_{3/2}(z, q)$ Bose-Einstein fonksiyonunun $0 \leq z \leq 1$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralıkları için grafiği	37
4.3 Genelleştirilmiş $g = g_{5/2}(z, q)$ Bose-Einstein fonksiyonunun $0 \leq z \leq 1$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralıkları için grafiği	38
4.4 Düşük sıcaklıklarda genelleştirilmiş $(S^q \lambda^3 / k_B V)$ entropi fonksiyonunun deformasyon parametresi q 'ya göre değişim grafiği	40

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
h	Planck sabiti
\hbar	$h/2\pi$
m	Kütle
k_B	Boltzmann sabiti
\vec{p}	Momentum
P	Basınç
S	Entropi
T	Sıcaklık
T_c	Kritik sıcaklık
U	İç enerji
V	Hacim
z	Fugasite
μ	Kimyasal potansiyel
β	$1/k_B T$
λ	Termal dalga boyu
ω	Açısal hız
φ_n	n kuantum durumundaki özfonksiyon
ε_n	Enerji özdeğerleri
N	Toplam parçacık sayısı
$Q_N(V, T)$	Kanonik bölüşüm fonksiyonu
$Z(z, V, T)$	Büyük kanonik bölüşüm fonksiyonu
N_0	Taban durumundaki parçacık sayısı
N_e	Uyarılmış durumundaki parçacık sayısı
C_V	Öz ısı
E	Toplam enerji
\hat{H}	Hamilton operatörü

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\hat{a}	Bozonik yok etme operatörü
\hat{a}^+	Bozonik yaratma operatörü
\hat{N}	Bozonik sayı operatörü
$g_n(z)$	Standart Bose-Einstein fonksiyonları
$\hat{\tilde{a}}$	Genelleştirilmiş bozonik yok etme operatörü
$\hat{\tilde{a}}^+$	Genelleştirilmiş bozonik yaratma operatörü
q	Reel bir deformasyon parametresi
$[\hat{N}]$	Genelleştirilmiş bozonik sayı operatörü
$g_n(z, q)$	Genelleştirilmiş Bose-Einstein fonksiyonları
S^q	Genelleştirilmiş entropi fonksiyonu

Kısaltmalar **Açıklama**

TD	Tamm-Dancoff
----	--------------

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Evrende varolan tüm fiziksel olaylar, 19. yüzyıla kadar klasik fiziğin öngördüğü yasa ve kavramlarla açıklanmaya çalışılmıştır. Makroskopik fiziksel sistemler için, Newton'un hareket yasaları mekanik olayların, Maxwell denklemleri ise elektrik ve optik olaylarının açıklanmasında kullanılmıştır. 20. yüzyılın başlarında yapılan çalışmalar sonucunda klasik fiziğin yanıtlayamadığı soruların cevapları kuantum teorisi denilen yeni bir teori ile incelenmeye başlanmış, makroskopik sistemlerde olduğu gibi mikroskopik sistemlerin incelemelerinde de başarılı sonuçlar elde edilmiştir (Griffiths, 1995; Apaydın, 2004 a; Karaoğlu, 2008; Zettili, 2009).

Mikroskopik fiziksel sistemler, temel olarak kuantum özdeş parçacıklardan fermiyonlar ve bozonlar olarak iki sınıfta incelenirler. Fermiyonlar \hbar birimlerinde yarı tamsayı spinlere sahip olup, Fermi-Dirac istatistiği ile incelenirler. Proton, nötron ve elektronlar fermiyonlara örnek olarak verilebilir. Öte yandan, bozonlar \hbar birimlerinde tamsayı spinlere sahip olup, Bose-Einstein istatistiği ile incelenirler. Fotonlar, fononlar ve parçacık fiziğinin standart modelinde yer alan kuvvet taşıyıcıları (W^+ , W^- ve Z^0 gibi) bozonlara verilebilecek örneklerdendir.

Güncel olarak çalışılan Bose sistemlerini oluşturan fiziksel uygulamalar içerisinde; etkileşimsiz, zayıf ya da güçlü etkileşimli sistemlerin gerek kuantum mekaniksel gerekse termo-istatistiksel incelemelerine rastlamak mümkündür (Corgini and Sankovich, 1999, 2002; Walser, et al., 1999; Kirson, 2000; Jackeli and Ranninger, 2001; Shimizu and Miyadera, 2001; Günay, 2002; Ketterle, 2002; Rombouts, et al., 2002; Schmidh and Schnack, 2002; Carusotto and Castin, 2003; Sitko, 2003; Yan, 2003; Zoido, 2003; Crisan and Grosu, 2005; Blakie, et al., 2007; Ford and O'Connell, 2007; Combescot and Betbeder-Matibet, 2008; Dede, 2008; Gernoth, et al., 2008; Moseley, et al., 2008; Kuzemsky, 2009; Deeney and O'Leary, 2011; Dupuis and Rancon, 2011; Li, et al., 2012; Mullin and Sakhel, 2012; Shi-Jie, et al., 2012). Yine standart bozonlar yerine deforme bozon sistemleri göz önüne alınarak, doğada çok parçacık kuantum etkileşimleri sergileyen karmaşık sistemlerin davranışlarının analiz edilmesinde, yeni kuantum simetrik modeller de geliştirilmiştir (Martin-Delgado, 1991;

Johal and Gupta, 1998; Ubriaco, 1998; Lavagno and Narayana Swamy, 2000, 2010; Márkus and Gambár, 2001; Chang and Chen, 2002; Shu, et al., 2002; Ou and Chen, 2003; Deviren, 2005; Yukalov, 2006; Camacho and Macías, 2007; Zeng, et al., 2011, 2012; Gavrilik and Rebesh, 2007, 2012; Şenay, 2012).

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, Bose sistemlerinin çok genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri ele alınacaktır. Bose sistemlerinin kuantum mekaniksel incelemelerinde, öncelikle N tane özdeş kuantum parçacığın oluşturduğu sistemlerin simetristirme özellikleri incelenecektir (Griffiths, 1995; Apaydın, 2004 a; Karaoğlu, 2008, 2012; Zettili, 2009). Bu sayede fermiyonların antisimetrik, bozonların ise simetrik dalga fonksiyonlarına sahip oldukları gösterilecektir. Daha sonra, bir-boyutlu standart bozon salınıcıları sistemini tanımlayan operatör bağıntıları ve sistemin Hamiltoniyeni incelenecektir (Merzbacher, 1970; Sakurai, 1994; Tang, 2005; Atkins and Friedman, 2008; Zettili, 2009). Son olarak, Bose sistemlerinin büyük kanonik kümede büyük bölüşüm fonksiyonu ve Bose-Einstein dağılım fonksiyonu elde edilecektir.

Tezin üçüncü bölümünde, ideal Bose gazının termo-istatistiksel özellikleri incelenecektir (Greiner, et al., 1995; Pathria, 1996; Apaydın, 2004 b; Karaoğlu, 2012). Bu incelemeler için ilk olarak, ideal Bose gazının genel termo-istatistiksel eşitliklerinden bazıları elde edilerek, yüksek ve düşük sıcaklıklardaki davranışı detaylı bir biçimde ele alınacaktır. Düşük sıcaklıklardaki incelemeler sırasında ideal Bose gazının yapısının bir sonucu olarak ortaya çıkan Bose-Einstein yoğunlaşması olayının hem teorik hem de bazı deneysel sonuçları üzerinde kısaca durulacaktır.

Tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümde, genelleştirilmiş bir Bose gazı modeli ele alınacaktır. Bu modele Tamm-Dancoff (TD) bozon gazı modeli adı verilmiştir (Odaka, et al., 1991; Chaturvedi, et al., 1993). TD-bozon gazı modelini tanımlayan kuantum mekaniksel özellikler ana hatlarıyla incelenerek, modelin bazı istatistik mekaniksel özellikleri elde edilmeye çalışılacaktır. Özel olarak TD-bozon gazı modelinin düşük sıcaklıklarda genelleştirilmiş entropi fonksiyonu üzerinde yoğunlaşılacaktır. Bununla birlikte, deformasyon parametresi q 'nin sistemin basıncı, iç enerjisi gibi bazı önemli istatistik mekaniksel özelliklerine olası etkileri üzerinde araştırmalar yapılacaktır.

Tezin son bölümünde ise dördüncü bölümde incelenen model Bose gazı yardımıyla elde edilen sonuçlar tartışılacak ve modelin muhtemel uygulama alanları üzerinde durulacaktır.

BÖLÜM 2

BOSE SİSTEMLERİNİN GENEL KUANTUM MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ

Bose sistemlerinin genel kuantum mekaniksel özelliklerinin inceleneceği bu bölümde, öncelikle özdeş parçacıklar konusu ele alınacaktır. Birbirleri ile etkileşmeyen çok sayıda özdeş parçacığın oluşturduğu sistemlerle ilgili kuantum mekaniksel özellikler ile simetrileştirme ilkesi konuları incelenecektir. Özel bir uygulama olarak, iki özdeş parçacıklı bir kuantum sisteminin sahip olabileceği dalga fonksiyonunun özellikleri incelenecektir. Son olarak, Bose sistemlerinin büyük bölüşüm fonksiyonu, dağılım fonksiyonu gibi önemli kuantum istatistiksel özellikleri ele alınacaktır.

2.1. Özdeş Parçacıklar

İki özdeş parçacığın tüm yapısal özellikleri (kütle, elektrik yükü, spin, ...) aynı ise bu iki parçacık özdeştir. Başka bir deyişle, hiçbir deneysel yöntemle ya da fiziksel bir ölçümle ayırt edilebilmeleri mümkün değildir (Karaoğlu, 2008). Burada özellikle kuantum özdeş parçacık sistemleri ele alınacaktır. Özdeş olan çok sayıda parçacığın oluşturduğu bir sistem göz önüne alınarak, sistemi oluşturan parçacıkların dalga fonksiyonlarının yapısı incelenecektir.

2.1.1. Simetrik ve antisimetrik dalga fonksiyonları

N tane parçacıktan oluşan bir sistem için, sistemi niteleyen dalga fonksiyonu,

$$\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N) \quad (2.1)$$

dir. Burada χ , her bir parçacığın konumunu ve spinini, α_N 'ler ise parçacıkların bulunabileceği kuantum durumlarını temsil etmektedirler (Karaoğlu, 2012). Öte yandan deneysel olarak gözlenen büyüklük, olasılık yoğunluğudur:

$$|\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)|^2 \quad (2.2)$$

Kuantum mekaniğinde parçacıkların ayırt edilemez oluşu şöyle ifade edilir (Karaoğlu, 2012): Herhangi iki parçacık tüm özellikleriyle (konum+spin birlikte) yer değiştirdiğinde, bu olasılık yoğunluğu değişmemelidir. Yani,

$$\left| \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_i, \dots, \chi_j, \dots) \right|^2 = \left| \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_j, \dots, \chi_i, \dots) \right|^2 \quad (2.3)$$

koşulunun sağlanabilmesi için

$$\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_i, \dots, \chi_j, \dots) = a \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_j, \dots, \chi_i, \dots) \quad (2.4)$$

olmalıdır. (2.3) ve (2.4) eşitliklerinden yararlanarak parçacıkların yer değiştirmeleri altında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$\underbrace{|a|^2 = 1 \quad \text{ve de} \quad a^2 = 1}_{\Downarrow} \quad (2.5)$$

$$a = \pm 1$$

olacaktır. Her iki durum için (2.5) eşitliği şu anlama gelmektedir: Parçacıkların yer değiştirmesi sırasında, sistemi niteleyen Ψ dalga fonksiyonu ya aynı kalır ya da işaret değiştirir (Karaoğlu, 2012). O halde,

$$\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_i, \dots, \chi_j, \dots) = +\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_j, \dots, \chi_i, \dots) \quad (2.6)$$

$$\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_i, \dots, \chi_j, \dots) = -\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} (\dots, \chi_j, \dots, \chi_i, \dots) \quad (2.7)$$

olmak üzere (2.6) eşitliğindeki dalga fonksiyonlarına simetrik, (2.7) eşitliğindeki dalga fonksiyonlarına ise antisimetrik dalga fonksiyonu adı verilir.

1940 yılında Pauli, görelilik teorisine dayanarak spin ile simetri arasındaki ilişkiyi buldu. Buna göre simetrileştirme ilkesi (Griffiths, 1995; Apaydın, 2004 a; Karaoğlu, 2008, 2012; Zettili, 2009):

- (a) Spinleri \hbar 'nin tamsayı katları olan parçacıklar simetrik dalga fonksiyonlarına sahip olup, bozonlar olarak adlandırılırlar. Örneğin pion, foton, graviton gibi parçacıklar bozon sınıfındadırlar.

- (b) Spinleri \hbar 'nin yarım tamsayı katları olan parçacıklar antisimetrik dalga fonksiyonlarına sahip olup, fermiyonlar olarak adlandırılırlar. Örneğin elektron, proton, nötron gibi parçacıklar fermiyon sınıfındadırlar.

Burada belirtilen simetristirme prensibinin somut sonuçlarını özel olarak, iki özdeş parçacıklı sistem için incelemek mümkündür.

2.1.2. Etkileşmeyen iki parçacıklı sistemler

İki parçacıklı, etkileşmeyen bir kuantum sistemi ele alınırsa, sistemi niteleyen zamandan bağımsız Schrödinger denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)-\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)+U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \quad (2.8)$$

şeklinindedir (Apaydın, 2004 a). Parçacıklar arasında etkileşme olmadığı için, her bir parçacık birbirinden bağımsız olarak davranır. O halde sistemin toplam potansiyel enerjisi $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$, iki parçacığın potansiyel enerjilerinin toplamıdır:

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=U(\vec{r}_1)+U(\vec{r}_2) \quad (2.9)$$

sistemi niteleyen dalga fonksiyonu da

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2) \quad (2.10)$$

dir. Burada $\psi(\vec{r}_1)$ ve $\psi(\vec{r}_2)$ sırasıyla, konumları \vec{r}_1 ve \vec{r}_2 olan parçacıkların dalga fonksiyonlarıdır. Eğer birinci parçacığın $\psi_a(\vec{r}_1)$ ve ikinci parçacığın $\psi_b(\vec{r}_2)$ kuantum durumlarında buldukları varsayılırsa,

$$\Psi_I(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \quad (2.11)$$

bulunur (Griffiths, 1995; Apaydın, 2004 a). Parçacıklar kendi aralarında yer değiştirilirse,

$$\Psi_{II}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) \quad (2.12)$$

olacaktır. Parçacıklar özdeş (aynı zamanda $m_1 = m_2$), yani birbirinden ayırt edilemeyen parçacıklar olduğu için hangi parçacığın hangi kuantum durumunda olduğu bilinemez. Ölçülebilen bir fiziksel niceliği temsil eden olasılık yoğunluğu, parçacıkların yer değiştirmesinden etkilenmeyeceği için (2.11) ve (2.12) eşitlikleri incelenen kuantum sisteminin kabul edilebilir özfonksiyonları olamazlar (Apaydın, 2004 a).

Öte yandan, hem Ψ_I hem de Ψ_{II} , Schrödinger denkleminin çözümleri oldukları için onların,

$$\Psi^S = \Psi_I + \Psi_{II} \quad (2.13)$$

$$\Psi^A = \Psi_I - \Psi_{II} \quad (2.14)$$

ifadeleri de aynı Schrödinger denkleminin çözümleridir (Apaydın, 2004 a). Buradaki Ψ^S , bozonları temsil eden simetrik dalga fonksiyonunu, Ψ^A ise fermiyonları temsil eden antisimetrik dalga fonksiyonunu göstermektedir. (2.13) ve (2.14) eşitlikleri

$$\Psi^S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) + \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) \right] \quad (2.15)$$

$$\Psi^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) - \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) \right] \quad (2.16)$$

olarak elde edilebilir (Apaydın, 2004 a). (2.15) ve (2.16) eşitliklerindeki parçacıklar tekrar yer değiştirecek olurlarsa,

$$\Psi^S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) + \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \right] \quad (2.17)$$

ve

$$-\Psi^A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) - \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2)] \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.17) ve (2.18) eşitliklerinden görüleceği üzere, Ψ^S parçacıkların yer değiştirmesinden etkilenmezken, Ψ^A parçacıkların yer değiştirmesi sonucunda işaret değiştirmiştir (Apaydın, 2004 a).

Ψ^S ve Ψ^A dalga fonksiyonlarının olasılık yoğunluklarına bakılacak olursa, Ψ^S için olasılık yoğunluğu

$$P_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\Psi^S)^* (\Psi^S) \quad (2.19)$$

dir. Parçacıklar kendi aralarında yer değiştirdiğinde Ψ^S değişmeyeceği için,

$$P_S(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = (\Psi^S)^* (\Psi^S) \quad (2.20)$$

olur. Yani olasılık yoğunluğu değişmez. O halde, Ψ^S özdeş iki parçacıklı bir kuantum sisteminin kabul edilebilir bir dalga fonksiyonudur. Yukarıdaki işlem Ψ^A için de yapılırsa, özdeş iki parçacıklı kuantum sisteminin kabul edilebilir bir dalga fonksiyonu olabileceği görülebilir (Apaydın, 2004 a).

Kuantum özdeş parçacıklar sistemleri olan bozon ve fermiyonlar için normalize edilmiş özfonksiyonlar, yukarıdakilere benzer özelliklere sahiptirler. Bu tez çalışmasında özel olarak Bose sistemleri ele alınacağından aşağıda standart bozonların diğer kuantum özelliklerinden bazıları kısaca ele alınacaktır.

2.2. Bir-Boyutlu Standart Bozon Salıncıları Sistemi

Bir-boyutlu standart bozon salıncıları sistemini tanımlayan kuantum mekaniksel operatör bağıntıları,

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (2.21)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0 \quad (2.22)$$

ile ifade edilirler (Merzbacher, 1970; Sakurai, 1994; Tang, 2005; Atkins and Friedman, 2008; Zettili, 2009). Bu sistemin \hat{N} ile verilen bozonik sayı operatörü,

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad (2.23)$$

ile tanımlanır. Sayı operatörünün \hat{a} ve \hat{a}^+ operatörleri ile ilişkisi

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad (2.24)$$

bağıntılarıyla verilir. Sayı operatörünün herhangi bir ψ_n özfonksiyonuna etkisi

$$\hat{N}\psi_n = n\psi_n \quad (2.25)$$

şeklindedir. Sayı operatörünün $(\hat{a}\psi_n)$ ve $(\hat{a}^+\psi_n)$ dalga fonksiyonları üzerine etkisi incelenirse,

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}\psi_n) &= \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \psi_n = (\hat{a} \hat{a}^+ - 1) \hat{a} \psi_n = \hat{a} (\hat{a}^+ \hat{a} - 1) \psi_n \\ &= \hat{a} (\hat{N} - 1) \psi_n = \hat{a} (n - 1) \psi_n = (n - 1) (\hat{a} \psi_n) \end{aligned} \quad (2.26)$$

elde edilir (Atkins and Friedman, 2008). Yani,

$$\hat{a}\psi_n \propto \psi_{n-1} \quad (2.27)$$

$$\hat{a}\psi_{n-1} \propto \psi_{n-2} \quad (2.28)$$

olduğu gözlenebilir. Bu özellikten dolayı, \hat{a} operatörü alçaltma ya da yok etme operatörü olarak adlandırılır. Benzer şekilde \hat{N} sayı operatörü ($\hat{a}^+\psi_n$) dalga fonksiyonu üzerine etki ederse,

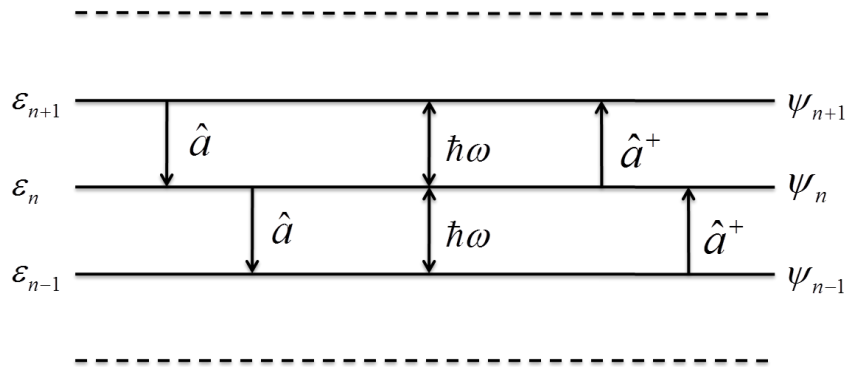
$$\hat{N}(\hat{a}^+\psi_n) = (n+1)(\hat{a}^+\psi_n) \quad (2.29)$$

sonucuna ulaşılır (Atkins and Friedman, 2008). Dolayısıyla

$$\hat{a}^+\psi_n \propto \psi_{n+1} \quad (2.30)$$

$$\hat{a}^+\psi_{n+1} \propto \psi_{n+2} \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu yüzden \hat{a}^+ operatörü yükseltme ya da yaratma operatörü olarak adlandırılır. Bu operatörlerin ψ_n özfonksiyonlarına etkileri aşağıdaki gibi verilebilecek basit şematik bir enerji diyagramı üzerinde de gösterilebilir:



Şekil 2.1 \hat{a} ve \hat{a}^+ operatörlerinin ψ_n özfonksiyonlarına etkilerini gösteren basit şematik bir diyagram.

Burada görüldüğü gibi \hat{a} ve \hat{a}^+ operatörleri kuantum fiziğindeki diğer operatörlerden farklı, ilginç fiziksel özelliklere sahiptirler. Öyle ki bu operatörler, bir salıncıyı belirli bir enerji düzeyinden hemen bir alttakine ya da hemen bir üstteki kuantum düzeyine çıkarabilmektedirler. Bu yüzden bir kuantum düzeyinde $\hbar\omega$ miktarı kadar bir enerjiyi oluşturabilen \hat{a}^+ 'ya yaratma operatörü, $\hbar\omega$ miktarları kadarlık bir

enerjiyi yok edebilen \hat{a} operatörüne de yok etme operatörü adı verilir. Sonuç olarak bunlar, bir titreşimi hemen altındaki veya üstündeki komşu bir enerji seviyesine geçirebilme özelliklerine sahiptirler.

(2.21), (2.22), (2.24) eşitliklerinden yararlanarak bir-boyutlu standart bozon salıncıları sisteminin Hamiltoniyeni,

$$\hat{H} = \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.32)$$

şeklindedir (Merzbacher, 1970; Sakurai, 1994; Tang, 2005; Atkins and Friedman, 2008; Zettili, 2009). Buradan sistemin Hamiltoniyenin ψ_n özfonksiyonlarına etkisi de

$$\hat{H}\psi_n = \varepsilon_n \psi_n \quad (2.33)$$

şeklindedir. (2.33) eşitliği, bir-boyutlu bozon salıncıları sisteminin zamandan bağımsız Schrödinger denklemi olup, ε_n enerji özdeğerleri ise,

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

ile verilir. Ayrıca (2.33) eşitliğindeki ψ_n özfonksiyonları, Kesim (2.1)'de verilen özelliklere sahip simetrik dalga fonksiyonlarıdır. (2.34) ile verilen enerji spektrumu; alttan sınırlı, yarı-sonsuz, ardışık düzeyler arası eşit $\hbar \omega$ aralıklı fiziksel özelliklere sahip bir özdeğer spektrumudur. Bu sonuç, enerjinin $\varepsilon \geq 0$ şeklinde sürekli her değeri alabileceğini öngören klasik yaklaşımın aksine (Dereli ve Verçin, 2009), (2.34) eşitliği bir-boyutlu standart bozon salıncılarının kuantumlu enerji durumlarına sahip olduğunu gösterir.

Yukarıda öz ve kısa olarak bir-boyutlu bozon salıncıları sisteminin kuantumsal özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca bozon salıncıları sisteminin üç-boyutlu hale genelleştirilmesi de mümkündür (Karaoğlu, 2008; Zettili, 2009). Genel olarak bozon salıncıları sisteminin kuantumsal özellikleri; katıhal fiziğinde kristal örgü titreşimlerinde, atom ve molekül fiziğinde moleküllerin titreşim tayflarının incelenmesinde ve modellenmesinde sıkça başvurulan ve kullanılan temel araçlardır.

Dolayısıyla bozon salınıcıları sistemleri, parçacık fiziği de dahil olmak üzere fiziğin pek çok araştırma alanında uygulamalar bulabilen çok önemli fiziksel konulardan biridir. Tezin bundan sonraki kısımlarında bozon salınıcıları sistemlerinin diğer kuantum istatistiksel özellikleri yoğun olarak incelenecektir.

2.3. Bose Sistemlerinin Dağılım Fonksiyonu

İdeal Bose gazı için kanonik kümede bölüşüm fonksiyonu

$$Q_N(V, T) = \sum_{\varepsilon} e^{-\beta \varepsilon} \quad (2.35)$$

olarak verilir (Pathria, 1996; Abers, 2004). Burada $\beta = 1/k_B T$, k_B Boltzmann sabiti ve ε sistemin enerji özdeğerlerini temsil etmektedir. Ayrıca toplam enerji $E = \sum_{\varepsilon} n_{\varepsilon} \varepsilon$ ile toplam parçacık sayısı da $N = \sum_{\varepsilon} n_{\varepsilon}$ ile verilir. (2.34) eşitliği verilen koşullara göre yazıldığında,

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_{\varepsilon}\}} g\{n_{\varepsilon}\} e^{-\beta \sum_{\varepsilon} n_{\varepsilon} \varepsilon} \quad (2.36)$$

olur. Burada $g\{n_{\varepsilon}\}$ istatistiksel ağırlık faktörü olup, ideal Bose gazı için $g\{n_{\varepsilon}\} = 1$ 'dir (Pathria, 1996).

Öte yandan, bir Bose sisteminin büyük bölüşüm fonksiyonu

$$Z(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanır (Pathria, 1996). Burada z , ideal Bose gazının fugasitesi olup, bir sonraki bölümde detaylıca ele alınacaktır. (2.37) eşitliği, (2.36)'dan yararlanarak aşağıdaki formda hesaplanabilir:

$$Z(z, V, T) = \prod_{\varepsilon} \frac{1}{(1 - ze^{-\beta\varepsilon})} \quad (2.38)$$

ile büyük kanonik kümede bölüşüm fonksiyonu elde edilir. Buradan

$$\ln Z(z, V, T) = - \sum_{\varepsilon} \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon}) \quad (2.39)$$

olur. Bose sistemlerinde dağılım fonksiyonunu elde edebilmek için, $\bar{N} = \sum_{\varepsilon} \langle n_{\varepsilon} \rangle$

olduğundan sistemin Bose-Einstein dağılım fonksiyonu

$$\langle n_{\varepsilon} \rangle = - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon} \right) \quad (2.40)$$

bağıntısından elde edilebilir (Pathria, 1996). Buradan ortalama parçacık sayısı

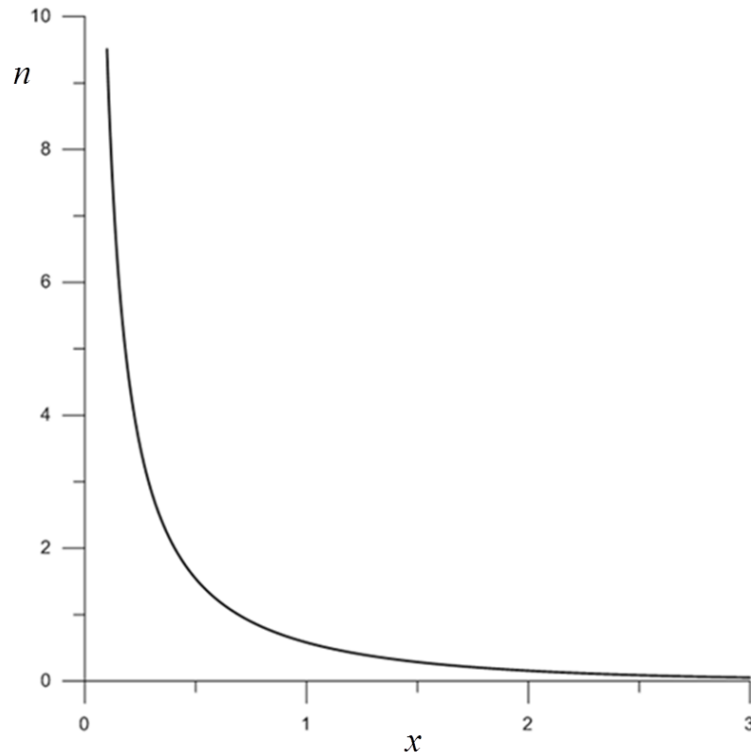
$$\langle n_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1} \quad (2.41)$$

olarak bulunur (Pathria, 1996). Burada μ kimyasal potansiyel olmak üzere fugasite $z = e^{\beta\mu}$ olduğundan,

$$\langle n_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad (2.42)$$

yazılabilir. $x = \beta(\varepsilon - \mu)$ alınırsa Bose sistemlerinin dağılım fonksiyonunun x parametresine göre değişimi sonlu sıcaklıklar için Şekil 2.2'deki gibi olur (Grafik için gerekli olan Fortran yazılımı Ek-1'dedir). (2.42)'de verilen standart Bose-Einstein dağılım fonksiyonu negatif olamayacağı için, $\langle n_{\varepsilon} \rangle \geq 0$ koşulu sağlanmalıdır. Dolayısıyla tüm $\varepsilon \geq 0$ kuantum durumları için sistemin kimyasal potansiyeli hiçbir zaman pozitif olamaz. Yani standart Bose sistemlerinde $\mu \leq 0$ olmalıdır. Bu gerçekten ve de (2.41)'den yararlanarak fugasitenin standart Bose sistemlerinde 0 ile 1 aralığında değerler alabileceği görülür.

Şekil 2.2’de, $x \rightarrow 0$ ’a yaklaştığı durumlarda Bose-Einstein dağılım fonksiyonu sonsuza gitmektedir. Bu durumun sonucunda, bozonik bir sistemin kimyasal potansiyelinin daima en düşük tek parçacıklı durumun enerjisinden daha küçük olacağı anlaşılmaktadır. O halde, Bose parçacıklarının oluşturduğu sistemlerde her zaman $\mu < \varepsilon$ koşulunun sağlanacağı açıktır (Greiner, et al., 1995).



Şekil 2.2 Standart $n = n(x)$ Bose-Einstein dağılım fonksiyonu ($x = \beta(\varepsilon - \mu)$).

Yukarıda bazı temel kuantum mekaniksel özellikleri incelenen Bose sistemlerine örnek olarak, özdeş bağımsız parçacıkların oluşturduğu fotonlar topluluğu verilebilir. Örneğin, T sıcaklığında bulunan bir oyuğun duvarları ile ısı dengede olan elektromanyetik ışınım da bir foton gazı olarak düşünülebilir (Apaydın, 2004 b; Dereli ve Verçin, 2009). Foton gazının diğer bir uygulaması olan kara cisim ışıması problemi Bose sistemlerinin incelenmesinde önemli bir rol oynar. Kara cisim ışıması problemi çalışmaları sayesinde, foton gazının kuantum mekaniksel yönlerinden bazıları ortaya çıkarılabildiği görülmüştür. Foton gazının enerjisinin kuantumlu (ya da kesikli) olduğu ilk kez M. Planck tarafından teorik olarak ortaya konmuştur (Karaoğlu, 2008). Böylece daha önce

klasik fizik yöntemlerle (örneğin Rayleigh-Jeans ve Wien tarafından yapılan incelemelerde olduğu gibi) kara cisim ışıması problemi çözümündeki eksiklikler, Planck'ın hipotezi sonucunda deneylerle uyumlu bir şekilde açıklanabilmiştir. Kara cisim ışımasında, bir oyuk içerisindeki elektromanyetik alan salınımlarının kuantum mekaniksel incelemelerinde bir model olarak kuantum harmonik salınıcı sistemleri de kullanılmıştır. Diğer yandan, kristal örgü yapılarında tek tek atomların denge konumları civarındaki titreşim hareketleri de kuantum harmonik salınıcı modeli ile incelenebilen diğer Bose sistemlerine örneklerdendir (Karaoğlu, 2008, 2012; Dereli ve Verçin, 2009).

Yukarıdaki bilgiler ışığında üçüncü bölümde, ideal Bose gazının diğer termostatistiksel özellikleri detaylı olarak ele alınacaktır.

BÖLÜM 3

İDEAL BOSE GAZININ TERMO-İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Klasik istatistiksel yaklaşım, birçok fiziksel sistemin makroskopik yapısını iyi bir yaklaşıklıkla verebilmektedir. Fakat maddenin kuantum yapısının öne çıktığı birçok fiziksel olay, klasik istatistik mekanikle açıklanamamaktadır (Karaoğlu, 2012).

Kuantum sistemleri için, ilgilenilen parçacıkların daha önceki bölümde belirtildiği gibi ayırt edilemez oluşu ve enerjinin kuantumlanması sebebiyle Bose sistemleri için yapılacak incelemelerde kuantum istatistik mekaniği kullanılmaktadır. Bu sebeple Kesim (2.3)'de yapılan incelemelerde büyük kanonik küme tanımlanmış ve Bose sistemleri için gerekli bazı temel kuantum mekaniksel özellikler incelenmiştir.

Bu bölümde, ideal bir Bose gazının oluşturduğu sistemin, öncelikle genel termostatistiksel özellikleri incelenecek, sonrasında ise yüksek ve düşük sıcaklıklarda ideal Bose gazının davranışı ile ilgili termostatistiksel eşitlikler elde edilecektir. Son olarak, ideal Bose gazının düşük sıcaklıklarda ortaya çıkan ilginç bir özelliği olarak Bose-Einstein yoğunlaşması olayı kısaca ele alınacaktır.

3.1. İdeal Bose Gazının Genel Termo-İstatistiksel Özellikleri

İkinci bölümde (2.38) eşitliği ile verilen büyük kanonik kümede bölüşüm fonksiyonu ve Bose sistemlerinin dağılım fonksiyonu ((2.42) eşitliği) kullanılırsa,

$$\frac{PV}{k_B T} \equiv \ln Z(z, V, T) = - \sum_{\varepsilon} \ln(1 - z e^{-\beta \varepsilon}) \quad (3.1)$$

$$N = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} \quad (3.2)$$

olur (Pathria, 1996). N toplam parçacık sayısının ve V hacminin çok büyük olduğu hallerde tek-parçacık kuantum durumlarının spektrumu neredeyse sürekli hale gelir. Bu yüzden (3.1) ve (3.2) eşitliklerindeki toplam, integral ile yer değiştirebilir (Huang, 1987;

Greiner, et al., 1995; Pathria, 1996). Bu dönüşümün sağlanabilmesi için ε ile $\varepsilon + d\varepsilon$ arasında bulunan durum yoğunluğu,

$$a(\varepsilon)d\varepsilon = (2\pi V / h^3)(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (3.3)$$

dir (Pathria, 1996). (3.3) eşitliği, (3.1) ve (3.2) eşitliklerinde kullanıldığında toplam integrale dönüştürülebilir. Ancak bu eşitliklerdeki toplamın integrale dönüştürülmesi sırasında $\varepsilon = 0$ taban enerji düzeyindeki ağırlığı istemeden sıfır alıyoruz. Bu yanlıştır çünkü kuantum mekaniksel bu düzeltmede, sistemdeki dejenere olmamış tek parçacıklı durumun istatistiksel ağırlığının 1 alınması gerekmektedir. O halde, (3.1) ve (3.2) eşitlikleri (3.3) eşitliği kullanılarak integrale dönüştürülmeden önce, bu temel durumun toplam içerisinden çıkarılması gerekir (Pathria, 1996). Böylece,

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon - \frac{1}{V} \ln(1 - z) \quad (3.4)$$

ve

$$\frac{N}{V} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1} + \frac{1}{V} \frac{z}{(1 - z)} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinin integral dışında kalan kısımları $\varepsilon = 0$ taban enerji düzeyinden gelen katılardır. Bu katıların önemi hakkında daha fazla açıklama yapılacak olursa, $z \ll 1$ olduğunda ilgilenilen durumlar klasik limitteki incelemelerden çok farklı olmayacaktır. Yani bu terimlerin her biri $(1/N)$ 'nin yanında katkı sağlamayacağından ihmal edilebilirler. Ancak z artarak maksimum değeri olan 1'e yaklaştığı varsayılırsa, (3.5) eşitliğinde bulunan $z/(1-z)V$ terimi (N_0/V) 'ye (N_0 , $\varepsilon = 0$ taban durumunda bulunan parçacık sayısı) özdeş olacaktır ve (N_0/V) , (N/V) kesri yanında önemli hale gelecektir. $\varepsilon = 0$ taban enerji durumu üzerinde verilen parçacıkların makroskopik kesrindeki bu birikim incelemeyi Bose-Einstein yoğunlaşması olayına götürür (Pathria, 1996). (3.4) ve (3.5) eşitliklerinde

$\beta\varepsilon = \beta(p^2/2m) = x$ değişken değiştirmesi ile birlikte kısmi integrasyon uygulanırsa, gerekli ara işlemlerden sonra

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{2\pi(2mk_B T)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty x^{1/2} \ln(1 - ze^{-x}) dx = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (3.6)$$

elde edilebilir (Pathria, 1996). Bir not olarak ifade edilmelidir ki, (3.6)'nın elde edilmesinde $z/(1-z) = N_0$ ve böylece $z = N_0/(N_0 + 1)$ olduğundan dolayı (3.4) eşitliğindeki $\{V^{-1} \ln(1-z)\}$ terimi $\{-V^{-1} \ln(N_0 + 1)\}$ 'e eşit olacaktır. (3.4) eşitliğinde taban durumu enerjisinden gelen terim integrale herhangi bir katkı sağlamayacağı için (3.6) eşitliğinde z 'nin tüm değerlerinde ihmal edilebilir ve eşitlikten tamamen atılabilir. Diğer taraftan benzer dönüşümler (3.5) eşitliğinde de düşünülürse, gerekli ara işlemlerden sonra

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{2\pi(2mk_B T)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{z^{-1} e^x - 1} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad (3.7)$$

formu elde edilebilir (Pathria, 1996). (3.6) ve (3.7) eşitliklerindeki integrallerin çözümlerinden elde edilen, $g_{5/2}(z)$ ve $g_{3/2}(z)$ olarak verilen standart Bose-Einstein fonksiyonları

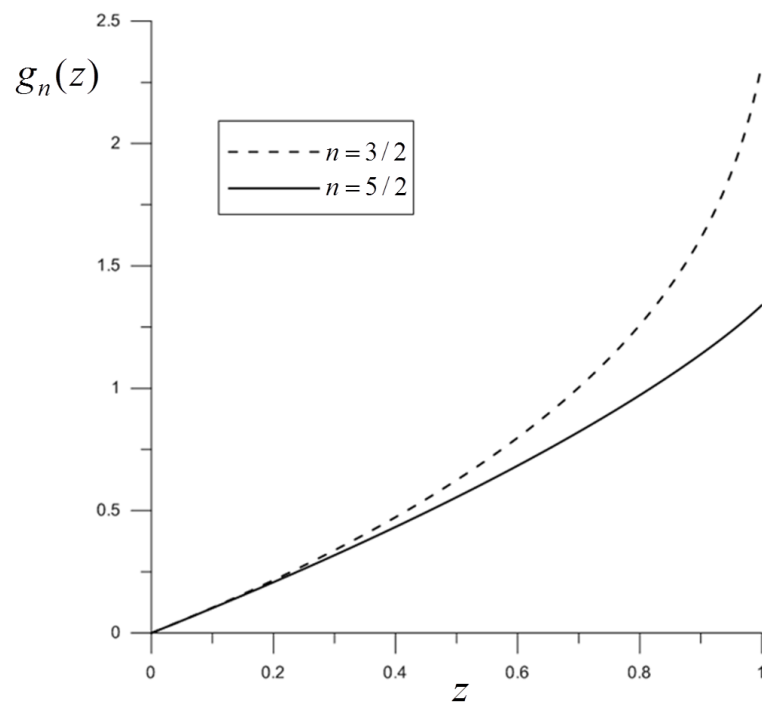
$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x - 1} = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^n}, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanırlar (Pathria, 1996). Özel olarak $n = 5/2$ ve $n = 3/2$ alınırsa,

$$g_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{5/2}} \quad (3.9)$$

$$g_{3/2}(z) = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{3/2}} \quad (3.10)$$

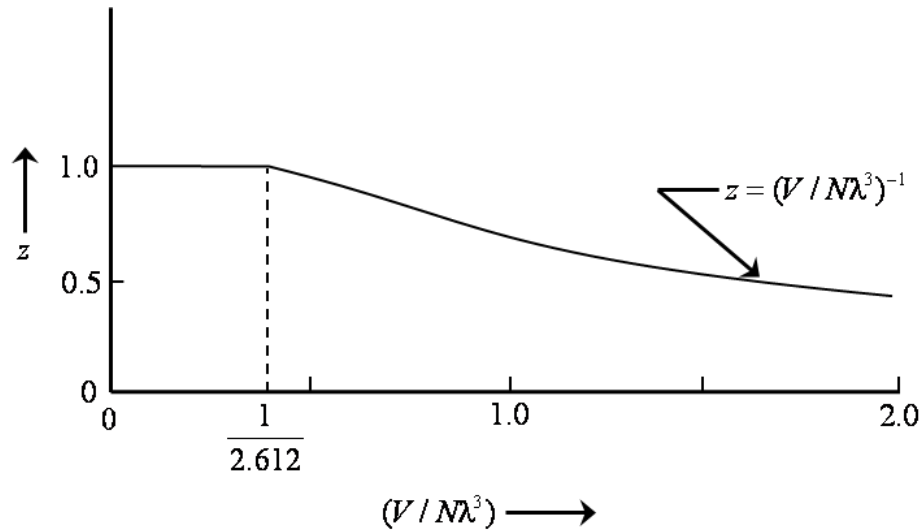
olurlar. Standart $g_{5/2}(z)$ ve $g_{3/2}(z)$ fonksiyonlarının z ile değişimi Şekil 3.1'dedir (Ek-2 ve Ek-3'de bu fonksiyonların grafiği ile ilgili Fortran yazılımı verilmiştir). $g_{5/2}(z)$ ve $g_{3/2}(z)$; $0 \leq z \leq 1$ değerlerinde değişebilen, pozitif değerlere sahip olan ve z 'nin artışına göre monoton olarak artan fonksiyonlardır (Huang, 1987; Pathria, 1996). Şekil 3.1'deki grafiğe göre, z 'nin ok kucuk değerlerinde $g_{5/2}(z) \approx g_{3/2}(z)$ olmaktadır. Ayrıca genel olarak $g_{3/2}(z) > g_{5/2}(z)$ olduğu da gorulmektedir.



Şekil 3.1 Standart $g = g_n(z)$ fonksiyonlarının fugasiteye göre değişimi.

Ayrıca Şekil 3.2'de de gorulduğu gibi ideal Bose gazı iin fugasite $0 \leq z \leq 1$ aralığındadır (Greiner, et al., 1995; Pathria, 1996). Bose sistemlerinde fugasitenin alabileceği en buyuk değer 1'dir. Aşağıda z 'nin $(V/N\lambda^3)$ 'un bir fonksiyonu olarak değişimi gösterilmektedir. Burada $\lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$ ile tanımlı olup, termal dalgaboyu olarak adlandırılırlar (Pathria, 1996). Şekil 3.2'de z , $(V/N\lambda^3)$ ile ilişkili olduğundan, daha basit olarak $T^{3/2}$ ile değişiminin tanımlanması da olasıdır.

$0 \leq (V/N\lambda^3) \leq (2.612)^{-1}$ aralığında iken, $0 \leq T \leq T_c$ ve $z \cong 1$ olduğu Şekil 3.2'de görülmektedir. $(V/N\lambda^3) \gg 1$ olduğunda, $g_{3/2}(z) \leq 1$ ve böylece $z \ll 1$ 'dir. Bu koşullar altında $g_{3/2}(z) \cong z$ olduğu da incelemeler sonucunda görülebilir. Böylece bu bölgede klasik durumla uyumlu olarak $z \cong (V/N\lambda^3)^{-1}$ 'dir (Pathria, 1996).



Şekil 3.2 $(V/N\lambda^3)$ parametresinin bir fonksiyonu olarak ideal Bose gazının fugasitesi (Pathria, 1996).

Diğer yandan ideal Bose gazı için iç enerji, (3.1) ve (3.6) eşitlikleri yardımıyla

$$U = - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right)_{z,V} = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (3.11)$$

şeklinde bulunur (Pathria, 1996). Dolayısıyla (3.6) eşitliğinden tekrar yararlanılırsa basınç ile iç enerji arasında

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{U}{V} \right) \quad (3.12)$$

ilişkinin olduğu görülebilir. Böylece yukarıda, görelî olmayan hızlarda Bose parçacıklarının oluşturduğu ideal varsayılan bir Bose gazının ortalama parçacık sayısını, basıncını, iç enerjisini veren ifadeler incelenmiştir.

3.1.1. Yüksek sıcaklıklarda ideal Bose gazının davranışı

Yukarıda verilen Şekil 3.2'den de gözlenebileceği üzere, kimyasal potansiyel ve sistemin sıcaklığına bağlı olan fugasitenin ($V/N\lambda^3$) ile değişimi incelendiğinde yüksek sıcaklıklarda giderek azalan değerlere sahip olduğu ortaya çıkar. Yani fiziksel olarak $z \ll 1$ değerlerinde, sistemin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri ele alınacağı anlaşılır. Bu gerçekten hareketle $z \ll 1$ için (3.7) eşitliğinde N_0 , N 'nin yanında ihmal edilebilir. Buradan (3.7) eşitliği, sistemin hal denklemini belirlemek üzere (3.6) eşitliği ile beraber kullanılabilir. Yüksek sıcaklıklarda Bose gazının oluşturduğu sistemin durum ya da hal denkleminin virial açılımı,

$$\frac{PV}{Nk_B T} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^{l-1} \quad (3.13)$$

formundadır (Greiner, et al., 1995; Pathria, 1996). Burada $\nu = V/N$ öz hacim, a_l 'ler ise virial katsayılarıdır. Buna göre ilk dört virial katsayısı,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \\ a_3 &= -\left(\frac{2}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \right) \\ a_4 &= -\left(\frac{3}{32} + \frac{5}{32\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklindedir (Pathria, 1996). Bu katsayılarından birincisi klasik durumları yani ideal gaz sonucunu vermektedir. İkinci ve daha sonraki tüm virial katsayıları ise ideal gaz yasasına düzeltme terimleri olarak yorumlanabilir. Örneğin ideal gaz yasasına ilk düzeltme terimi olan a_2 katsayısı fiziksel olarak sistemdeki parçacıklar arasında birinci mertebeden etkileşme terimi olarak göz önüne alınır. Bu bakımlardan virial katsayılarının hesaplanması sistemin fiziksel yapısını anlamada çok önemli ipuçları verir. Benzer şekilde sabit hacimdeki öz ısı,

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{1}{Nk_B} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = \frac{3}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{5-3l}{2} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1} \quad (3.15)$$

dir (Pathria, 1996). $T \rightarrow \infty$ 'a gittiğinde (ya da $\lambda \rightarrow 0$ 'a gittiğinde) hem basınç hem de gazın öz ısısı sırasıyla $\frac{N}{V} k_B T$ ve $\frac{3}{2} Nk_B$ olan klasik değerlerine yaklaşır.

Yüksek sıcaklıklarda sabit hacimdeki öz ısıyı elde edebilmek için (3.7), (3.11) ve (3.15) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{3}{2} T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \right) \right]_V \quad (3.16)$$

elde edilir (Greiner, et al., 1995; Pathria, 1996). Bu eşitliğin çözümünde Bose-Einstein fonksiyonları için tanımlı

$$\frac{\partial}{\partial z} g_{3/2}(z) = \frac{1}{z} g_{1/2}(z) \quad (3.17)$$

tekrarlama bağıntısı (Huang, 1987; Pathria, 1996) kullanıldığında,

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad (3.18)$$

elde edilir.

Yüksek sıcaklıklarda son olarak ideal Bose gazının entropisi incelenirse

$$U - TS + PV = N\mu \quad (3.19)$$

termodinamik bağıntısından ve (3.12), (3.13) eşitliklerinden yararlanılırsa sistemin entropisi,

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir (Apaydın, 2004 b; Pathria, 1996).

3.1.2. Düşük sıcaklıklarda ideal Bose gazının davranışı

İdeal olduğu varsayılan bir Bose gazında, sistemin sıcaklığı düştüğünde (λ^3/ν) değeri artacağından (3.13) ve (3.15) eşitlikleri kullanılamaz. Bu durumda uyarılmış enerji düzeyindeki parçacık sayısı N_e , (3.7) eşitliğinden yararlanarak

$$N_e = V \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} g_{3/2}(z) \quad (3.21)$$

olarak elde edilir (Pathria, 1996). (3.10) eşitliğinde verilen $g_{3/2}(z)$ tanımından yararlanarak $z = 1$ alınırsa,

$$g_{3/2}(1) = 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \dots \equiv \xi\left(\frac{3}{2}\right) \cong 2.612 \quad (3.22)$$

olur ki bu da, $\xi(3/2)$ Riemann zeta fonksiyonuna denktir (Pathria, 1996). Aynı zamanda Şekil 3.2'den de çıkarılabilecek olan bu sonuç, ideal olduğu varsayılan bir Bose gazında fugasite (z)'nin daima birden küçük değerler aldığını ve $g_{3/2}(z)$ 'nin de $z = 1$ 'de üstten sınırlı olduğunu, sonlu bir değere yakınsadığını gösterir. Dolayısıyla fiziksel olarak sistemde z 'nin bir ve bire yakın değerlerinde düşük sıcaklıklar göz önüne alınmıyor demektir. Böylece aşağıda verilen (3.23) ve (3.25) eşitliklerinden de anlaşılacağı üzere (N_0/N) kesri büyüyeceğinden parçacıklar arası ortalama uzaklık görece giderek azalacaktır. Sistem bu noktadan itibaren yoğun faza doğru (yani Bose-Einstein yoğunlaşmasına doğru) ilerleyecektir.

Öte yandan (3.21) eşitliğinde $z = 1$ alınırsa,

$$N_e = V \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \xi\left(\frac{3}{2}\right) \quad (3.23)$$

olur. Bu durumda taban enerji düzeyindeki parçacık sayısı, ($N = N_0 + N_e$) eşitliği gereği

$$N_0 = N - \left\{ V \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \xi\left(\frac{3}{2}\right) \right\} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. (3.7) ve (3.22) eşitliklerinden

$$T < T_c = \frac{h}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{V \xi(3/2)} \right)^{2/3} \quad (3.25)$$

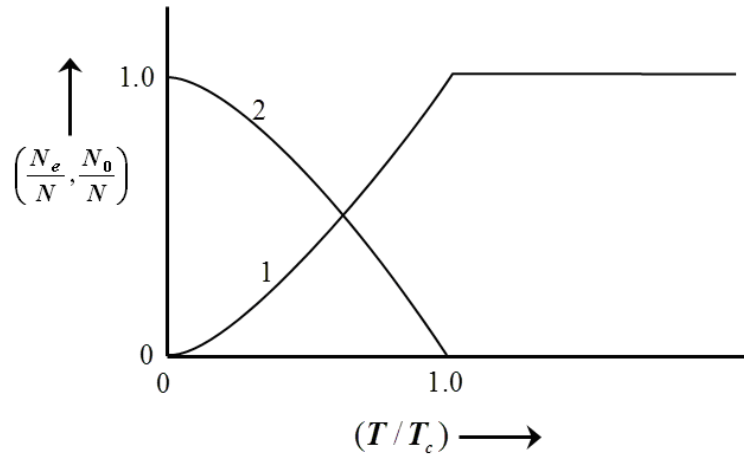
olduğu görülebilir (Pathria, 1996). Burada T_c , kritik sıcaklık olarak adlandırılır. İdeal Bose gazı için T_c kritik sıcaklığı önemlidir. $T < T_c$ olduğu durumlarda, ideal Bose gazı sistemi iki farklı fazın bir karışımı olarak düşünülebilir (Pathria, 1996):

- (i) Normal faz; uyarılmış durumlar ($\varepsilon \neq 0$) üzerine dağılmış N_e $\{= N(T/T_c)^{3/2}\}$ parçacıklarını içeren bir fazdır.
- (ii) Yoğun faz; taban durumunda ($\varepsilon = 0$) biriken N_0 $\{= N - N_e\}$ parçacıklarını içeren bir fazdır.

Şekil 3.3'de, birbirlerini bütünleyici (N_e/N) ve (N_0/N) kesirlerinin (T/T_c) ile değişimi gösterilmektedir. $T > T_c$ için, sadece normal fazın olduğu, taban durumundaki parçacık sayısının toplam parçacık sayısı N 'ye kıyasla ihmal edilebileceği görülebilir. Açık bir biçimde, bu durum $T = T_c$ noktasında tekildir. $T \rightarrow T_c$ 'ye doğru giderken yoğun fazı ifade eden kesir aşağıdaki gibi sıfırlanır (Pathria, 1996):

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \approx \frac{3}{2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \quad (3.26)$$

Ayrıca Şekil 3.2'de de verildiği üzere, $z = 1$ durumuna karşılık gelen sıcaklığa bazen Bose sıcaklığı ya da kritik sıcaklık (T_c) adları da verilir. Sistem bu ve bundan daha küçük sıcaklıklarda yoğunlaşma fazında kalacak demektir.



Şekil 3.3 (T/T_c) 'nin bir fonksiyonu olarak normal faz (N_e/N) ve yoğun faz (N_0/N) kesirlerinin değişimi (Burada (N_e/N) kesri 1 eğrisi ile verilen normal faz kesirini, (N_0/N) ise 2 eğrisi ile verilen yoğun faz kesirini göstermektedir.) (Pathria, 1996).

Öte yandan, ideal Bose gazının düşük sıcaklıklarda basıncının belirlenebilmesi için (3.6) ve (3.25) eşitlikleri ile

$$P(T_c) = \frac{\xi(5/2)}{\xi(3/2)} \left(\frac{N}{V} k_B T_c \right) \cong 0.5134 \left(\frac{N}{V} k_B T_c \right) \quad (3.27)$$

olarak elde edilir (Pathria, 1996).

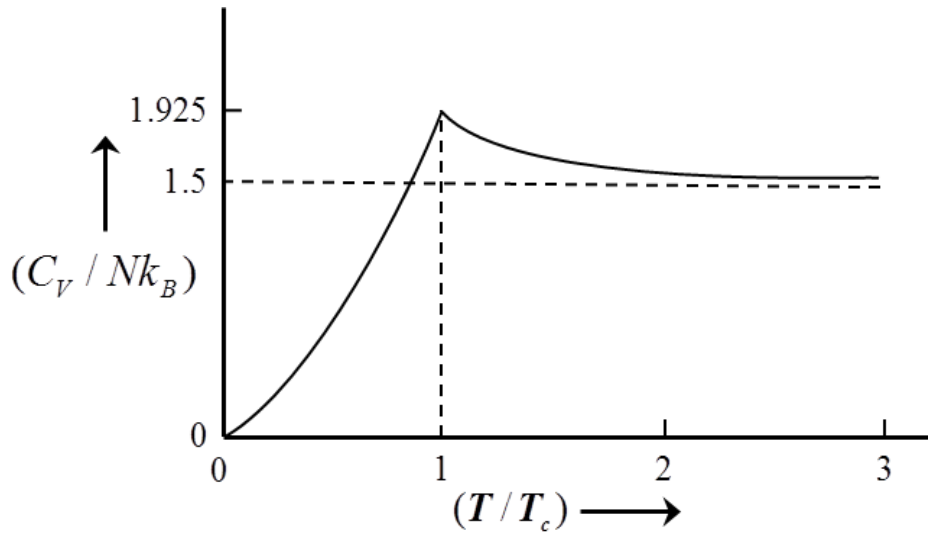
İdeal Bose gazının düşük sıcaklıklarda öz ısısı ise, (3.15) ve (3.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{15}{4} \xi \left(\frac{5}{2} \right) \frac{v}{\lambda^3} \quad (3.28)$$

dir ve burada öz ısının $T^{3/2}$ ile orantılı olduğu açıkça görülebilir (Pathria, 1996). $T = T_c$ olduğunda bu eşitlik (3.25) eşitliğinden de yararlanarak

$$\frac{C_V(T_c)}{Nk_B} = \frac{15}{4} \frac{\xi(5/2)}{\xi(3/2)} \cong 1.925 \quad (3.29)$$

değerini almaktadır (Pathria, 1996). (3.18) ve (3.28)'de verilen, sırasıyla yüksek ve düşük sıcaklıklardaki öz ısı ifadeleri birlikte düşünülürse, bunların sıcaklıkla değişimleri Şekil 3.4'deki gibidir. $T < T_c$ durumunda öz ısı $T^{3/2}$ ile orantılı olarak maksimum değerine kadar artış göstermekte, $T = T_c$ kritik sıcaklığına ulaştığında maksimum değeri olan 1.925 değerini almaktadır. $T \rightarrow \infty$ 'a gittiğinde ise ideal bir gazın klasik öz ısı değerine yaklaşmaktadır (Greiner, et al., 1995). Ayrıca sıvı helyumun faz geçişlerinin incelemeleri sırasında $C_V = f(T)$ değişiminin şeklinden dolayı λ -geçiş tanımlanmış, bu geçişin meydana geldiği sıcaklığa da λ -noktası adı verilmiştir (Pathria, 1996). Bu sonuç da Şekil 3.4'e deneysel açıdan bir katkı olarak algılanabilir.



Şekil 3.4 (T/T_c) 'nin fonksiyonu olarak ideal Bose gazının öz ısı (Pathria, 1996).

Son olarak düşük sıcaklıklarda sistemin entropisi (3.19)'dan da yararlanarak,

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} \xi(5/2) \quad (3.30)$$

şeklinde $\xi(5/2)$ Riemann zeta fonksiyonları cinsinden elde edilebilir (Pathria, 1996).

3.2. Bose-Einstein Yoğunlaşması

Bose sistemlerinin sergilediği ilginç istatistik mekaniksel olaylardan biri olarak Bose-Einstein yoğunlaşması gösterilebilir. Bose-Einstein yoğunlaşması olayının temel fiziksel dayanakları ve Bose sistemlerinin diğer bazı uygulamaları aşağıdaki gibi özetlenebilir: Klasik istatistik mekaniğin açıklamakta yetersiz kaldığı Bose-Einstein yoğunlaşması olayını kuantum istatistiksel açıdan inceleyebilmek adına, Kesim (2.3)'de elde edilen (2.42) eşitliği ile Kesim (3.1)'de elde edilen (3.5) eşitliklerinden yararlanılabilir. Buradan

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (3.31)$$

ile verilen standart Bose-Einstein dağılım fonksiyonunda $z = 1$ (veya $\mu = 0$) alınırsa,

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \quad (3.32)$$

elde edilir. Yine $\varepsilon = 0$ durumunda (3.31) eşitliği

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (3.33)$$

formunu alır. O halde (3.32) eşitliğinden görüleceği üzere $\varepsilon = 0$ enerjili taban durumu için $\langle n_\varepsilon \rangle \rightarrow \infty$ 'a gitmektedir. Dolayısıyla bozonlar için Pauli dışarlama ilkesinin geçerli olmadığı açıktır. Yani herhangi bir enerji durumunda keyfi sayıda bozon bulunabilir. Düşük sıcaklıklarda tutulan bir bozon sisteminin tüm parçacıklarının aynı taban enerji durumunda bulunma olasılıkları daha yüksektir (Dereli ve Verçin, 2009). Bu durum fiziksel açıdan yorumlanacak olursa, bozonların hep birlikte sıfır enerji ve momentumlu taban durumuna inme eğilimleri var demektir. Bose-Einstein yoğunlaşması olarak bilinen bu olay, kuantumsal bir etkinin makroskopik olarak gözlenebileceği ender olaylardan biridir (Karaoğlu, 2012).

Diğer yandan, Kesim (3.1)'de elde edilen (3.2) eşitliği, (3.5) eşitliğine dönüştürülürken toplam parçacık sayısı

$$N = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \sum_{\varepsilon \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (3.34)$$

olarak düşünölmüştür. Bu eşitlikte de var olan ve (3.33) ile de verilen ilk terim, taban durumundaki ortalama bozon sayısını temsil etmektedir. O halde (3.5) eşitliği, tüm sıcaklıklar için geçerlidir. Öte yandan, Kesim (3.1.2)'de elde edilen (3.26) eşitliği ele alındığında, $T < T_c$ durumunda taban enerji düzeyinde bulunan toplam parçacık sayısı N_0 giderek artmakta ve $T = 0$ olduğunda ise, tüm parçacıklar taban durumunda bulunmaktadırlar. Bu durum Şekil 3.4'de $T < T_c$ durumunda 2 eğrisi ile $N_0 \rightarrow N$ 'ye gideceği açıkça gösterilmiştir.

Bose-Einstein yoğunlaşması fikri, teorik olarak Bose istatistiğinin atomik gazlara uygulanması ile Einstein tarafından 1925 yılında öngörölmüştür (Helrich, 2009). Ancak Bose-Einstein yoğunlaşmasının deneysel olarak gözlenebilmesi uzun zaman almıştır. Öyle ki bu çalışmalardan en göze çarpan deneysel başarı, ^{87}Rb atomları üzerindeki Bose-Einstein yoğunlaşması araştırmalarında ortaya konmuştur (Basdevant and Dalibard, 2002; Schwabl, 2006). Bu konu, günümüzde halen aktif olarak çalışılmaya devam edilen, önemli kuantum istatistiksel olaylardan biridir.

Bu bölümde incelenen ideal Bose gazının termo-istatistiksel fonksiyonları, bir sonraki bölümde incelenecek olan özel genelleştirilmiş bir Bose gazı modelinin araştırılmasında yardımcı olacaktır.

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR BOSE GAZI MODELİNİN BAZI İSTATİSTİK MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Bose sistemlerinin istatistik mekaniksel uygulamalarına bir örnek olarak, özel bir genelleştirilmiş Bose gazı modeli ele alınacaktır. Esasen bu model, daha önce Kesim (2.2)'de incelenen standart bozon salımcıları sisteminin bir deformasyonundan ibarettir. Burada söz konusu modelin tanımlayıcı kuantum özelliklerinden başlayarak, bazı genel istatistik mekaniksel özellikleri modele özel deformasyon parametresi cinsinden incelenecektir. Modele ait genelleştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonu çıkartılarak, V hacminde N tane deforme bozon parçacığından oluşan sistemin basıncı, iç enerjisi, entropisi gibi bazı önemli istatistik mekaniksel özellikleri üzerinde incelemeler yapılacaktır. Son olarak, modelin düşük sıcaklıklar limitinde genelleştirilmiş entropi fonksiyonunun davranışı incelenecektir.

4.1. TD-Bozon Gazı Modeli

Bir boyutlu Tamm-Dancoff (TD) bozon salımcıları modeli aşağıdaki kuantum cebirsel özelliklerle tanımlanır (Odaka, et al., 1991; Chaturvedi, et al., 1993):

$$\hat{a}\hat{a}^+ - q^{-1}\hat{a}^+\hat{a} = q^{-\hat{N}}\hat{\mathcal{H}} \quad (4.1)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad (4.2)$$

Burada \hat{a} ve \hat{a}^+ , modelin genelleştirilmiş bozonik yok etme ve yaratma operatörlerini temsil etmektedirler. \hat{N} bozonik sayı operatörünü, $\hat{\mathcal{H}}$ 'de söz konusu operatör cebirinin merkezsiz elemanını göstermektedir. Öte yandan q parametresi reel ve pozitif bir parametre olup bu tezde bundan sonra $q > 1$ olan bölgelerdeki değerleri alınacaktır. (4.1) ve (4.2) eşitliklerinde özel olarak $q = 1$ limiti ele alındığında, standart bozon salımcıları sistemine ait (2.21)-(2.24) eşitliklerine ulaşılır. Böylece TD-bozon modelinin, standart bozon operatörlerini genelleştiren bir yapıya sahip olduğu görülebilir. Literatürde çalışılan diğer genelleştirilmiş Bose gazı modelleri (Martin-

Delgado, 1991; Johal and Gupta, 1998; Ubriaco, 1998; Lavagno and Narayana Swamy, 2000, 2010; Márkus and Gambár, 2001; Chang and Chen, 2002; Shu, et al., 2002; Ou and Chen, 2003; Deviren, 2005; Yukalov, 2006; Camacho and Macías, 2007; Algin and Arslan, 2008; Zeng, et al., 2011, 2012; Gavrilik and Rebesh, 2012; Şenay, 2012) göz önüne alındığında, (4.1) ve (4.2)'deki TD-bozon gazı modelinin istatistik mekaniksel yönleriyle daha az çalışıldığı görülmektedir. İşte bu noktadan hareketle bu tezin orijinal kısmını oluşturan bu kesimde, modelin mümkün olan diğer bazı istatistik mekaniksel özelliklerini ortaya çıkarmak ve ideal Bose gazından farklarını bulmak amaçlanmaktadır.

(4.1) ve (4.2) eşitliklerinde verilen TD-bozon salınıcıları modelinin genelleştirilmiş bozonik sayı operatörü

$$\hat{a}^+ \hat{a} = [\hat{N}] = \hat{N} \mathcal{H} q^{-(\hat{N}-1)} \quad (4.3)$$

ile tanımlıdır (Odaka, et al., 1991; Chaturvedi, et al., 1993). Bunun spektrumu da

$$[n] = n h q^{-(n-1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

şeklinindedir. Burada h , reel pozitif bir sabittir. Öte yandan, TD-bozon salınıcıları sisteminin özel olarak Hamiltoniyeni ile ilgilenirse, sistemin

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}) \quad (4.5)$$

şeklinde Hamiltoniyeni seçilebilir. Gerek bu Hamiltoniyenin gerekse $\{\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{N}, \mathcal{H}\}$ operatörlerinin Fock uzayındaki kuantum mekaniksel temsilleri, $|n, h\rangle$ ortonormal özfonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki gibidir (Odaka, et al., 1991; Chaturvedi, et al., 1993; Algin and Ilik, 2013):

$$\hat{a} |n, h\rangle = \sqrt{nhq^{-(n-1)}} |n-1, h\rangle \quad \hat{a} |0, h\rangle = 0 \quad (4.6)$$

$$\hat{a}^+ |n, h\rangle = \sqrt{(n+1)hq^{-n}} |n+1, h\rangle \quad (4.7)$$

$$\hat{H} |n, h\rangle = h |n, h\rangle \quad \hat{N} |n, h\rangle = n |n, h\rangle \quad (4.8)$$

$$\hat{H} |n, h\rangle = \varepsilon_n |n, h\rangle$$

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2} q^{-n} [n(q+1) + 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Yukarıda (4.9) eşitliğinden de görüleceği üzere TD-Bozon gazı modelinin enerji spektrumu Kesim (2.2)'de verilen standart bozonların enerji spektrumlarından çok daha farklıdır. Özel olarak (4.6)-(4.9) eşitliklerinde $q=1$ limiti alınır, Kesim (2.2)'de verilen standart bozon salıncıları sistemine karşılık gelen operatör temsilleri elde edilebilir. TD-bozon salıncıları modeli için bir başka önemli kuantum özelliği de, (4.9) eşitliğinde $n \rightarrow \infty$ limiti göz önüne alınır, yüksek enerjilerde modelin aniden sıfıra giden bir spektrum özelliği sergilemiş olmasıdır. Modelin (4.9) ile verilen enerji spektrumu üzerine diğer bazı kuantum özellikler de daha önce çalışılmıştır (Gavrilik and Rebish, 2007).

(4.1)-(4.9) eşitlikleriyle verilen TD-bozon gazı modeli özellikle $q > 1$ bölgesinde gerek ideal Bose gazından gerekse literatürde çalışılan diğer genelleştirilmiş Bose gazı modellerinden farklı kuantum istatistiksel özellikler sergilemektedir (Algin and Ilik, 2013). Ne var ki, istatistik mekaniksel olarak yukarıdaki TD-bozon salıncılarının oluşturduğu genelleştirilmiş Bose gazı modeli tüm yönleriyle derinlemesine çalışılmamıştır.

Bundan sonra (4.1)-(4.4) eşitlikleriyle tanımlanan TD-bozon gazı modelinin bazı önemli istatistik mekaniksel özellikleri elde edilecek ve bulunan sonuçlar hem ideal Bose gazı hem de literatürdeki diğer genelleştirilmiş bozon gazı modelleriyle kıyaslanacaktır.

4.2. TD-Bozon Gazı Modelinin Bazı İstatistik Mekaniksel Özellikleri

Bu kesimde TD-bozon gazı modelinin istatistiksel dağılım fonksiyonundan başlayarak bazı genel istatistik mekaniksel fonksiyonları, modele ait deformasyon parametresi cinsinden çıkarılacaktır. Böylece incelenen Bose gazı modeline ait olası yeni fiziksel sonuçlar bulunmaya çalışılacaktır. Literatürde daha önce aynı modelin kısmen de olsa bazı istatistik mekaniksel özellikleri incelenmiştir (Gavrilik and Rebish, 2012). Ne yazık ki modelle ilgili olarak dağılım fonksiyonu da dahil olmak üzere derinlemesine, hem düşük hem de yüksek sıcaklıklarda termo-istatistiksel bakımdan incelemeleri henüz yapılmamıştır. İşte bu tezde modelle ilgili bu açık noktalara bazı katkılar yapabilmek amaçlanmaktadır. Bunun için öncelikle birbirleriyle etkileşmeyen, (4.1)-(4.4) bağıntılarını sağlayan genelleştirilmiş bozon salıncılar sisteminin Hamiltoniyenin

$$\hat{H}_B = \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{N}_i \quad (4.10)$$

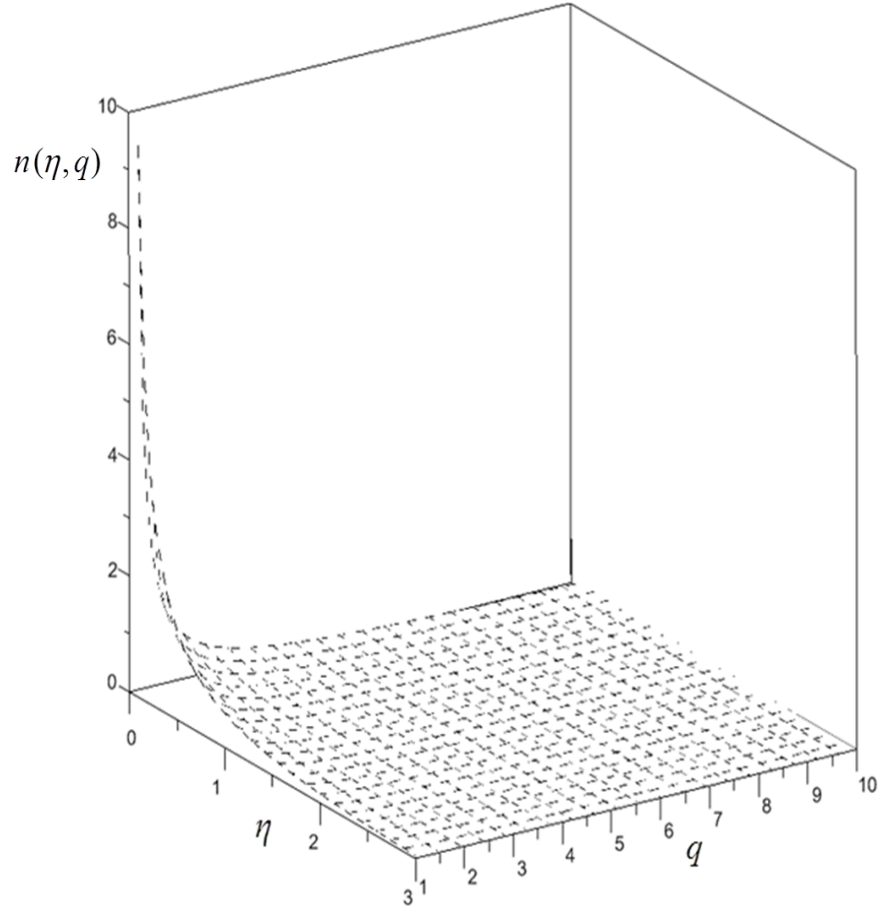
şeklinde olduğunu kabul edilebilir (Algin and Ilik, 2013). Bu eşitlikte i . kuantum durumundaki parçacığın kinetik enerjisi ε_i 'dir. μ ise sistemin kimyasal potansiyelidir. Dikkat edilirse (4.10) eşitliğindeki Hamiltoniyen, modele ait (4.3) eşitliğinde verilen genelleştirilmiş sayı operatörünün formu nedeniyle özünde, deforme bir Hamiltoniyendir. TD-bozon gazı modelinin istatistiksel dağılım fonksiyonunu bulmak için, $n_{i,q}$ ile modelin genelleştirilmiş ortalama işgal sayısı gösterilirse

$$[n_{i,q}] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H}_B} [\hat{N}_i] \} = \frac{1}{Z} \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H}_B} \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \} \quad (4.11)$$

bağıntısından elde edilebilir (Lee and Yu, 1992; Tuszynski, et al., 1992). Burada $Z = \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}_B})$ ile tanımlıdır. (4.1)-(4.4), (4.10), (4.11) eşitliklerinde verilen ifadeler kullanılırsa TD-bozon gazı modeline ait genelleştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonu aşağıdaki formda elde edilebilir (Algin and Ilik, 2013):

$$n = n(\eta, q) = \frac{q^{-1}}{e^{\eta} - q^{-1}} \quad (4.12)$$

Burada $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ ile tanımlı olup, i kuantum indisi kolaylık olsun diye göz önüne alınmamıştır. (4.12) eşitliği esasen, TD-bozon gazı modeline ait genelleştirilmiş Bose-Einstein dağılım fonksiyonudur. (4.12)'de özel olarak $q=1$ limiti alındığında ideal Bose gazının dağılım fonksiyonu elde edilebilir. Ne var ki bu tez çalışmasında $q > 1$ bölgesindeki değerleri göz önüne alınacaktır. Böylece (4.12) eşitliği ile verilen dağılım fonksiyonuna sahip model, gerek ideal Bose gazından gerekse genelleştirilmiş diğer Bose gazı modellerinden farklı istatistik mekaniksel özellikler ortaya koyacağı beklenebilir. Bu bağlamda, Şekil 4.1'de (4.12) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonunun η ve q parametrelerinin fonksiyonu olarak değişimi gösterilmiştir (Grafik için gerekli Fortran yazılımı Ek-4 ile verilmektedir).



Şekil 4.1 Genelleştirilmiş $n = n(\eta, q)$ Bose-Einstein dağılım fonksiyonunun $0 < \eta \leq 3$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralığında sonlu sıcaklıklar için değişimi.

Öte yandan (4.12) eşitliğinden yararlanarak, sistemin büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması

$$\ln Z = - \sum_i \ln(1 - q^{-1} z e^{-\beta \varepsilon_i}) \quad (4.13)$$

şeklinde bir forma sahip olacağı bulunabilir (Algin and Ilik, 2013). Bu bağıntıdan yararlanarak TD-bozon gazı modelinin diğer termo-istatistiksel özellikleri de çıkartılabilir. Örneğin sistemin hal denklemi aşağıdaki formda elde edilebilir:

$$\frac{P}{k_B T} = - \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \ln(1 - q^{-1} z e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}) - \frac{1}{V} \ln(1 - q^{-1} z) \quad (4.14)$$

(4.14) eşitliğinde sağdan ikinci terim ideal Bose gazı için $\vec{p} = \vec{0}$ 'a karşılık gelen özel bir terimdir. Benzer şekilde TD-bozon gazı modelinin $\nu = (V/N)$ ifadesi,

$$\frac{1}{\nu} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{q^{-1}}{z^{-1} e^{\beta \frac{p^2}{2m}} - q^{-1}} + \frac{1}{V} \left(\frac{q^{-1}}{z^{-1} - q^{-1}} \right) \quad (4.15)$$

şeklinde elde edilebilir. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri gerekli ara işlemlerden sonra aşağıdaki gibi yeniden bulunabilir (Algin and Ilik, 2013):

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z, q) - \frac{1}{V} \ln(1 - q^{-1} z) \quad (4.16)$$

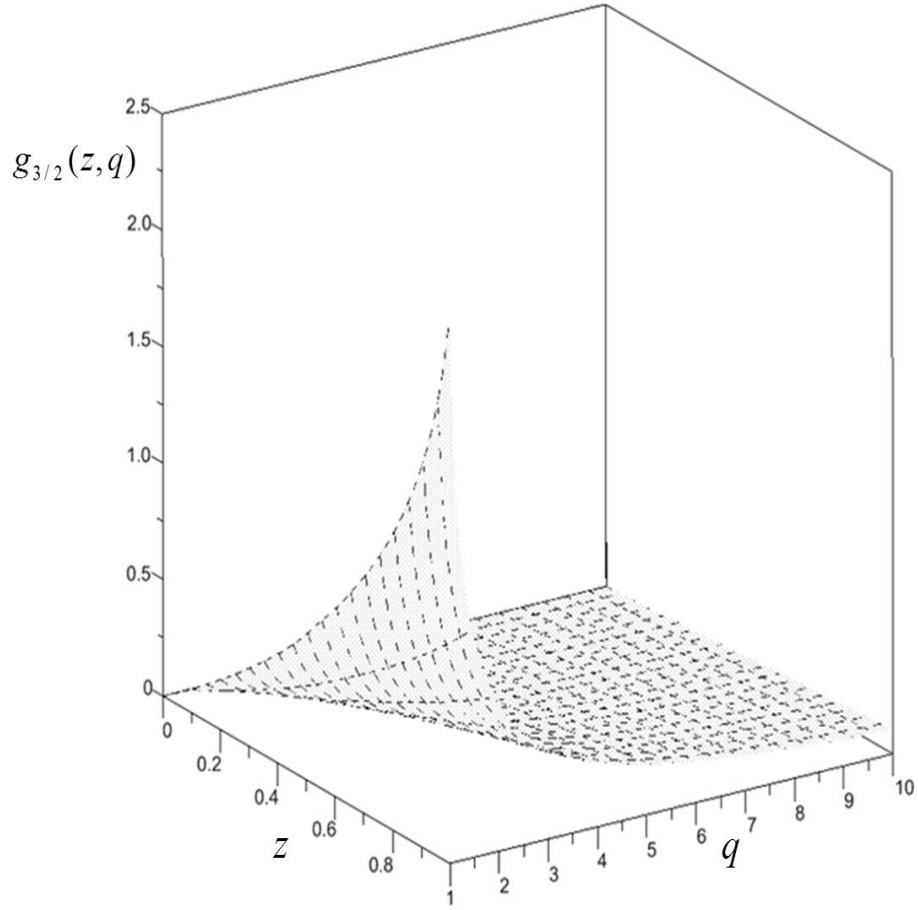
$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z, q) + \frac{1}{V} \frac{q^{-1}}{z^{-1} - q^{-1}} \quad (4.17)$$

Eşitlik (4.16) ve (4.17)'deki $g_{3/2}(z, q)$ ve $g_{5/2}(z, q)$ ile verilen genelleştirilmiş Bose-Einstein fonksiyonları,

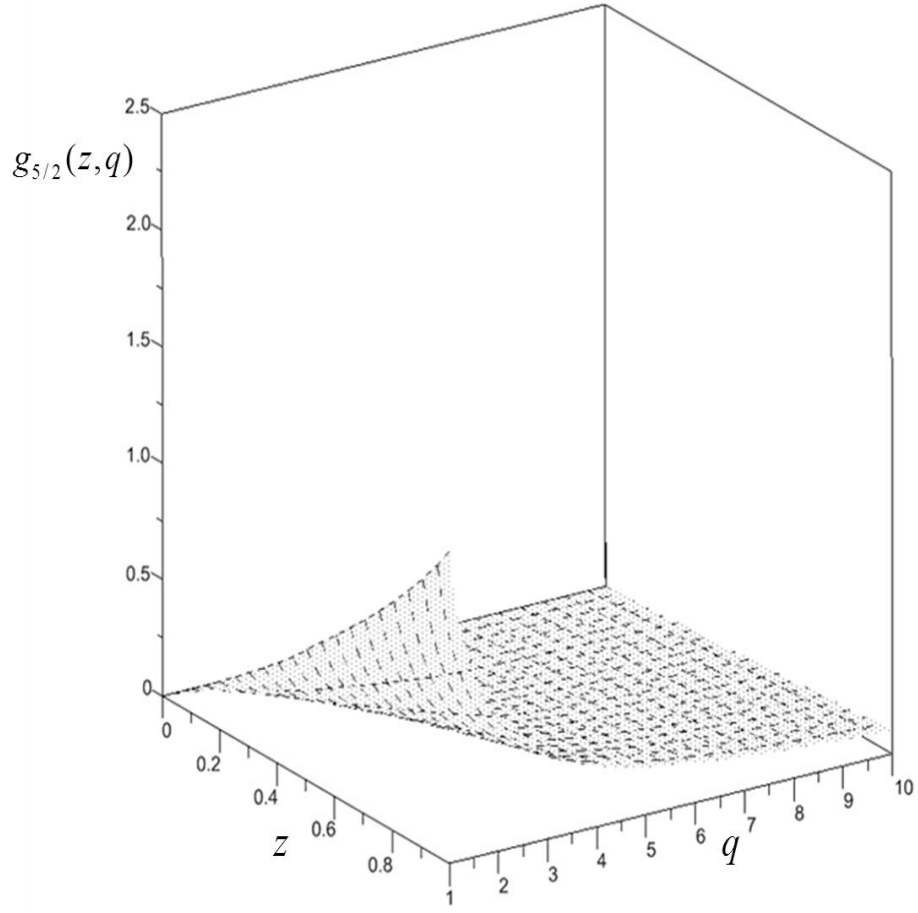
$$g_{3/2}(z, q) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(q^{-1}z)^l}{l^{3/2}} \quad (4.18)$$

$$g_{5/2}(z, q) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(q^{-1}z)^l}{l^{5/2}} \quad (4.19)$$

ile tanımlıdır (Algin and Ilik, 2013). Esasen bu fonksiyonlar üçüncü bölümde incelenen ideal Bose gazına ait standart $g_n(z)$ Bose-Einstein fonksiyonlarının bir parametre ile genişletilmiş halleridir. Özel olarak $q=1$ limiti alındığında eşitlik (3.9) ve (3.10)'da verilen standart Bose-Einstein fonksiyonlarına indirgenirler. Şekil 4.2 ve 4.3'de, (4.18) ve (4.19)'da verilen genelleştirilmiş Bose-Einstein fonksiyonlarının z 'nin bir fonksiyonu olarak $q > 1$ bölgesindeki değerleri için değişimleri verilmiştir (Grafikler için gerekli Fortran yazılımları Ek-5 ve Ek-6'dadır).



Şekil 4.2 Genelleştirilmiş $g = g_{3/2}(z, q)$ Bose-Einstein fonksiyonunun $0 \leq z \leq 1$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralıklarındaki değişimi.



Şekil 4.3 Genelleştirilmiş $g = g_{5/2}(z, q)$ Bose-Einstein fonksiyonunun $0 \leq z \leq 1$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralıklarındaki değişimi.

Buradaki grafiklerden görüleceği üzere $g_{3/2}(z, q)$ ve $g_{5/2}(z, q)$ fonksiyonları q parametresi arttıkça azalan değerlere sahip olmaktadır. Aynı zamanda aynı bir fugasite değeri ile kıyaslandığında ideal Bose gazındakine benzer olarak $g_{3/2}(z, q) > g_{5/2}(z, q)$ olmaktadır. Hem $g_{3/2}(z, q)$ hem de $g_{5/2}(z, q)$, $1 \leq q \leq 1.24$ aralığında iken maksimum azalış göstermektedir. Ne var ki bu genelleştirilmiş fonksiyonların değerleri, aynı z değerleri alınarak kıyaslandığında ideal Bose gazındakinden daha küçük değerlere sahip olmaktadır.

TD-bozon gazı modelinin diğer termo-istatistiksel fonksiyonları (4.12), (4.18), (4.19) eşitliklerinden yararlanarak istenirse elde edilebilir (Algin and Ilik, 2013). Burada özel olarak sistemin iç enerji fonksiyonu üzerinde durulursa $[-(\partial \ln Z / \partial \beta)]$ bağıntısından ve yukarıdaki bilgilerden yararlanarak sistemin iç enerjisi,

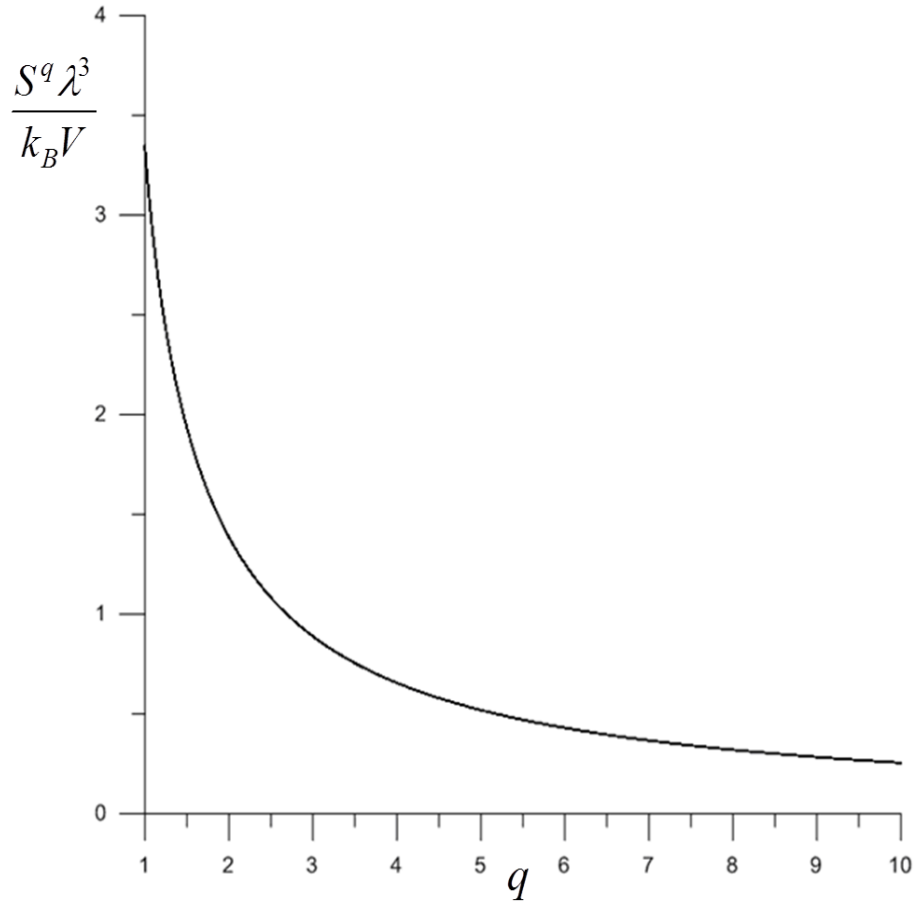
$$U = \frac{3 V k_B T}{2 \lambda^3} g_{5/2}(z, q) \quad (4.20)$$

elde edilebilir. Burada $g_{5/2}(z, q)$, (4.19) eşitliği ile belirlidir.

Öte yandan, TD-bozon gazı modelinin entropi fonksiyonu da yine q deformasyon parametresine bağlılık gösterecektir. Bunu incelemek için modele ait genelleştirilmiş entropi fonksiyonu örneğin düşük sıcaklıklarda incelenebilir. (4.13), (4.17), (4.20) eşitliklerinden yararlanılırsa düşük sıcaklıklar (ya da $T < T_c$)'da sistemin genelleştirilmiş entropi fonksiyonu,

$$\left. \frac{S^q \lambda^3}{k_B V} \right|_{T < T_c} = \frac{5}{2} g_{5/2}(z, q) \quad (4.21)$$

olarak bulunur (Algin and Ilik, 2013). Yine bu fonksiyonun $q=1$ limiti alındığında eşitlik (3.30)'da verilen ideal Bose gazı entropi sonucuna indirgeneceği görülebilir. Şekil 4.4'de (4.21) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş entropi fonksiyonunun $q > 1$ bölgesindeki farklı değerleri için değişimleri gösterilmiştir (Grafik için gerekli Fortran yazılımı Ek-7 dedir).



Şekil 4.4 Düşük sıcaklıklarda genelleştirilmiş ($S^q \lambda^3 / k_B V$) entropi fonksiyonunun deformasyon parametresi q 'ya göre değişimi.

Bu grafikten de görüleceği üzere TD-bozon gazı modelinin entropisi q parametresi arttıkça azalmaktadır. Bu da sistemin düşük sıcaklıklarda bozonlara özel daha düzenli bir kuantum yapıya doğru yönelme eğilimi gösterdiğinin bir ipucudur. Ayrıca, (3.31) eşitliği ile verilen ideal Bose gazının entropi değerleriyle kıyaslandığında (4.21)'de verilen modelin entropisinin her zaman daha düşük değerlere sahip olduğu görülebilir.

TD-bozon gazı modeline ait yukarıda incelenen fonksiyonlardan elde edilen sonuçlar ve modelin olası uygulama alanları tezin son bölümü olan sonuç ve tartışma kısmında ele alınacaktır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ilk olarak, Bose sistemlerinin kuantum mekaniksel özellikleri ana hatları ile ele alındı. Kuantum özdeş parçacık sistemlerinden bozonlar ve fermiyonları birbirinden ayıran bazı özellikler incelendi. Özel olarak, etkileşmeyen iki kuantum parçacığının oluşturduğu bir sistem ele alınarak simetrileştirme ilkesinin sonuçlarının geçerliliği görüldü. Daha sonra bir boyutlu standart bozon salıncıları sistemi ele alınarak, sistemin Hamiltoniyeninin bozon sayı operatörü cinsinden nasıl ifade edildiği incelendi. Bose sistemlerinin istatistiksel dağılım fonksiyonunun büyük kanonik kümede bölüşüm fonksiyonu aracılığıyla nasıl elde edilebileceği çalışıldı. Standart Bose-Einstein dağılım fonksiyonunun hangi fiziksel parametrelere göre değişim gösterdiği araştırıldı.

Tezin üçüncü bölümünde, ideal Bose gazının genel termo-istatistiksel özellikleri üzerinde duruldu. Özel olarak yüksek ve düşük sıcaklıklar limitlerinde bu termo-istatistiksel özelliklerin değişimleri incelendi (Pathria, 1996). Sistemin ortalama parçacık sayısı, basıncı, iç enerjisi, entropisi gibi önemli termo-istatistiksel fonksiyonları Bose gazının standart $g_n(z)$ Bose-Einstein fonksiyonları cinsinden ifade edildi (Pathria, 1996). Özellikle bu fonksiyonlar için $0 \leq z \leq 1$ aralığında $g_{3/2}(z) > g_{5/2}(z)$ olduğu, z 'nin çok küçük değerlerinde de $g_{3/2}(z) \approx g_{5/2}(z)$ olabildiği görüldü. Öte yandan ideal Bose gazında $(N = N_o + N_e)$ 'nin sıcaklığa göre değişimi Şekil 3.3'te incelendi. Buradan $T < T_c$ 'de sistemde her iki fazın (hem normal faz hem de yoğun faz) karışımı olduğu, $T > T_c$ için de sadece normal fazın gözlenebildiği görüldü. Yine $T < T_c$ 'de ideal Bose sistemi için (3.27) eşitliğinde Bose-Einstein yoğunlaşmasının gözlenebileceği teorik olarak anlaşıldı. Daha sonra, ideal Bose gazının öz ısısının yüksek ve düşük sıcaklıklarda birlikte incelenebilmesi adına Şekil 3.4 ile öz ısının (T/T_c) parametresine bağlı değişimi verildi. $T < T_c$ olduğu durumlar için öz ısının maksimum değerini alana kadar $T^{3/2}$ ile doğru orantılı olarak değiştiği,

çok yüksek sıcaklıklarda ise azalarak klasik öz ısı değerine yaklaştığı gözlemlendi (Greiner, et al., 1995; Pathria, 1996).

Tezin dördüncü bölümünde, özel bir Bose gazı modeli incelendi. Bu model, TD-bozon gazı olarak adlandırılan geliştirilmiş bozonik salımcıların oluşturduğu bir sistemdir (Odaka, et al., 1991; Chaturvedi, et al., 1993). Modeli tanımlayan genel bazı kuantum mekaniksel özellikler incelenerek, özellikle istatistik mekaniksel yönleri üzerine yoğunlaşıldı. Bu sayede TD-bozon gazına ait geliştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonu elde edildi (Algin and Ilik, 2013). Oluşan bu dağılım fonksiyonu standart bozonlar için tanımlanan Bose-Einstein dağılım fonksiyonu (Eşitlik (2.42)) ile karşılaştırıldığında farklı sonuçların ortaya çıktığı görüldü. TD-bozon gazı modeline ait geliştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonu $n(\eta, q)$ 'nin $0 < \eta \leq 3$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralığındaki değişimleri incelendi. Buna göre deformasyon parametresinin $1 \leq q \leq 1.24$ aralığında η sabit iken $n(\eta, q)$ fonksiyonunun maksimum azalış sergilediği görüldü. Oysa deformasyon parametresi q sabit iken $n(\eta, q)$ fonksiyonu $0 < \eta \leq 0.34$ aralığında maksimum azalış gösterdiği bulundu. Yine bu incelemeler sırasında standart Bose-Einstein dağılım fonksiyonunun aynı η değerleri için geliştirilmiş $n(\eta, q)$ fonksiyonundan daha büyük değerler aldığı da bulundu. $q = 1$ limitinde ise, geliştirilmiş istatistiksel dağılım fonksiyonu, standart Bose-Einstein dağılım fonksiyonuna eşit olmaktadır. Daha sonra, TD-bozon gazı modeline ait geliştirilmiş $g_{3/2}(z, q)$ ve $g_{5/2}(z, q)$ Bose-Einstein fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ ve $1 \leq q \leq 10$ aralığında değişimleri incelendi. $g_{3/2}(z, q)$ ve $g_{5/2}(z, q)$ fonksiyonları sabit z değerlerinde q parametresinin artışı ile azalmakta, özellikle $1 \leq q \leq 1.24$ aralığında maksimum azalış sergilemektedir. Ayrıca TD-bozon gazı modeli için $g_{3/2}(z, q) > g_{5/2}(z, q)$ olmaktadır. Daha sonra modelin geliştirilmiş basınç, öz hacim, iç enerji fonksiyonları deformasyon parametresi q cinsinden elde edildi. Özellikle bu bulgular ışığında sistemin geliştirilmiş entropi fonksiyonu üzerinde incelemeler yapıldı. Örneğin, düşük sıcaklıklarda TD-bozon gazı modelinin entropisi için elde edilen Şekil 4.4 incelendiğinde, q parametresinin artarken entropinin azaldığı görüldü. Özel olarak $1 \leq q \leq 1.30$ değer aralığında sistemin entropisi maksimum azalış sergilemektedir. Diğer yandan TD-bozon gazı modeli için bu tezde incelenen tüm

istatistik mekaniksel fonksiyonların $q = 1$ limit durumunda, ideal Bose gazının üçüncü bölümde de verilen sonuçlarına indirgendiği görülmektedir.

Bu tez çalışmasında bazı istatistik mekaniksel özellikleri incelenen TD-bozon gazı modeli, genel olarak, Bose sistemlerinin rol oynadığı tüm fiziksel süreçlerdeki uygulama alanlarında kullanım potansiyeline sahiptir. Dolayısıyla modelle ilgili bu tez çalışmasında elde edilen bazı sonuçlar, gerçek fiziksel sistemlerin doğrusal olmayan davranışlarının incelenmesinde bir takım kolaylıklar sağlayabilir. Örneğin katıların örgü titreşimlerinde fononların düşük sıcaklıklarda kuantumsal özellikleriyle ilgili problemlerin yaklaşık çözümlerinde, yine Bose gazlarının düşük sıcaklıklarda sergileyebildikleri Bose-Einstein yoğunlaşması olayı ile ilgili kuantum istatistiksel problemlerde TD-bozon gazı modelinin özellikleri yoluyla alternatif çözümler elde edilebilir. Ayrıca, TD-bozon gazı modelinin kuantum özelliklerine sahip deforme bozonlar kullanılarak, kara cisim ışıması problemine bir uygulama yapılabilir. Böylece deforme radyasyon alanları bağlamında kozmolojik evren modellerine yeni ve alternatif yaklaşımlar geliştirilebilir. Hatta bu modelle birlikte (görelî hızlarda bile) söz konusu deforme foton gazlarının, yıldızların fiziksel olarak iç yapılarının anlaşılmasında da yeni yaklaşımlar oluşturabilir. Sonuç olarak, bu tez çalışmasının bu tür açık problemlerin çözümlerine de az ya da çok katkılar sağlayabileceği umulmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abers, E.S., 2004, Quantum Mechanics, Prentice Hall, New Jersey, 444 p.
- Algin, A. and Arslan, E., 2008, Bose-Einstein condensation in a gas of the bosonic Newton oscillators, *Journal of Physics A: Math. Theor.*, 41, 365006-1-365006-13.
- Algin, A. and Ilik, E., 2013, Low-temperature thermostatics of Tamm-Dancoff deformed boson oscillators, *Physics Letters A*, 377, 1797-1803.
- Apaydın, F., 2004 a, Kuantum Fiziği, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, 353, 355 s.
- Apaydın, F., 2004 b, İstatistik Fizik, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, 347, 435 s.
- Atkins, P. and Friedman, R.S., 2008, Molecular Quantum Mechanics, Oxford University Press, Oxford, 184 p.
- Basdevant, J.L. and Dalibard, J., 2002, Quantum Mechanics, Springer-Verlag, New York, 321 p.
- Blakie, P.A., Rey, A.-M. and Bezett, A., 2007, Thermodynamics of quantum degenerate gases in optical lattices, *Laser Physics*, 17, 198-204.
- Camacho, A. and Macías, A., 2007, Thermodynamics of a photon gas and deformed dispersion relations, *General Relativity and Gravitation*, 39, 1175-1183.
- Carusotto, I. and Castin, Y., 2003, Condensate statistics in one-dimensional interacting Bose gases: Exact results, *Physical Review Letters*, 90, 030401-1-030401-4.
- Chang, Z. and Chen, S.X., 2002, Thermodynamics of a deformed Bose gas, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35, 9731-9743.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Chaturvedi, S., Srinivasan, V. and Jagannathan, R., 1993, Tamm-Dancoff deformation of bosonic oscillator algebras, *Modern Physics Letters A*, 8, 3727-3734.
- Combescot, M. and Betbeder-Matibet, O., 2008, Interacting excitons described by an infinite series of composite-exciton operators, *Physical Review B*, 78, 125206-1-125206-11.
- Corgini, M. and Sankovich, D.P., 1999, Gaussian domination and Bose-Einstein condensation in the interacting boson gas, *International Journal of Modern Physics B*, 13, 3235-3243.
- Corgini, M. and Sankovich, D.P., 2002, Study of non-interacting boson gas, *International Journal of Modern Physics B*, 16, 497-509.
- Crisan, M. and Grosu, I., 2005, Bose-Einstein quasicondensation in 2D systems, *Modern Physics Letters B*, 19, 821-827.
- Dede, C., 2008, Bose-Einstein yoğunlaşmasına bir yoğunluk fonksiyoneller kuramı yaklaşımı, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Deeney, F.A. and O'Leary, J.P., 2011, The internal energy and thermodynamic behaviour of a boson gas below the Bose-Einstein temperature, *Physics Letters A*, 375, 1637-1639.
- Dereli, T. ve Verçin, A., 2009, Kuantum Mekaniği: Temel kavramlar ve uygulamaları, Türkiye Bilimler Akademisi Yayınları, Ankara, 126, 132, 138, 280 s.
- Deviren, B., 2005, İki-parametre ile deforme kuantum grup bozon gazının düşük sıcaklıklardaki termodinamiği, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Dupuis, N. and Rancon, A.N., 2011, Infrared behavior of interacting bosons at zero temperature, *Laser Physics*, 21, 1470-1479.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Ford, G.W. and O'Connell, R.F., 2007, Quantum thermodynamic functions for an oscillator coupled to a heat bath, *Physical Review B*, 75, 134301-1-134301-6.
- Gavrilik, A.M. and Rebish, A.P., 2007, A q -oscillator with "accidental" degeneracy of energy levels, *Modern Physics Letters A*, 22, 949-960.
- Gavrilik, A.M. and Rebish, A.P., 2012, Deformed gas of p , q -bosons: virial expansion and virial coefficients, *Modern Physics Letters B*, 25, 1150030-1-1150030-13.
- Gernoth, K.A., Serhan, M. and Ristig, M.L., 2008, Strongly correlated bosons at nonzero temperatures, *International Journal of Modern Physics B*, 22, 4315-4326.
- Greiner, W., Neise, L. and Stöcker, L., 1995, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 306, 316, 320, 323 p.
- Griffiths, D.J., 1995, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New York, 179 p.
- Günay, S.D., 2002, Bose-Einstein yoğunlaşması ve bazı uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Helrich, C.S., 2009, *Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 213 p.
- Huang, K., 1987, *Statistical Mechanics*, John Wiley&Sons, New York, 287, 289 p.
- Jackeli, G. and Ranninger, J., 2001, Ground state properties and excitation spectra of non-Galilean-invariant interacting Bose systems, *Physical Review B*, 64, 104513-1-104513-5.
- Johal, R.S. and Gupta, R.K., 1998, Comment on Planck distribution of complex- q boson gas, *Modern Physics Letters A*, 13, 1729-1735.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Karaoğlu, B., 2008, Kuantum Mekaniğine Giriş, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 79, 237 s.
- Karaoğlu, B., 2012, İstatistik Mekaniğe Giriş, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 113, 115, 151 s.
- Ketterle, W., 2002, Superfluidity and coherence in Bose-Einstein condensation, *Physica Scripta*, T102, 36-38.
- Kirson, M.W., 2000, Bose-Einstein condensation in an exactly solvable model of strongly interacting bosons, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33, 731-740.
- Kuzemsky, A.L., 2009, Statistical mechanics and the physics of many-particle model systems, *Physics of Particle and Nuclei*, 40, 949-997.
- Lavagno, A. and Narayana Swamy, P., 2000, Thermostatistics of a q -deformed boson gas, *Physical Review E*, 61, 1218-1226.
- Lavagno, A. and Narayana Swamy, P., 2010, Thermostatistics of deformed bosons and fermions, *Foundations of Physics*, 40, 814-828.
- Lee, C.R. and Yu, J.P., 1992, On q -deformed free electron gases, *Physics Letters A*, 164, 164-166.
- Li, H., Wang, Y., Kong, X.M. and Lin, Z.Q., 2012, Bose-Einstein condensation of a relativistic ideal Bose gas in random box, *Modern Physics Letters B*, 26, 1250075-1-1250075-10.
- Márkus, F. and Gambár, K., 2001, Q-boson system below critical temperature, *Physica A*, 293, 533-539.
- Martin-Delgado, M.A., 1991, Planck distribution for a q -boson gas, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24, L1285-L1291.
- Merzbacher, E., 1970, *Quantum Mechanics*, John Wiley&Sons, New York, 515 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Moseley, C., Fialko, O. and Ziegler, K., 2008, Interacting bosons in an optical lattice, *Annalen der Physik*, 17, 561-608.
- Mullin, W.J. and Sakhel, A.R., 2012, Generalized Bose-Einstein condensation, *Journal of Low Temperature Physics*, 166, 125-150.
- Odaka, K., Kishi, T. and Kamefuchi, S., 1991, On quantization of simple harmonic oscillators, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24, L591-L596.
- Ou, C. and Chen, J., 2003, Thermostatistic properties of a q -generalized Bose system trapped in an n -dimensional harmonic oscillator potential, *Physical Review E*, 68, 026123-1-026123-7.
- Pathria, R.K., 1996, *Statistical Mechanics*, Butterworth-Heinemann, New York, 131, 157-168 p.
- Rombouts, S., Van Neck, D., Peirs, K. and Pollet, L., 2002, Maximum occupation number for composite boson states, *Modern Physics Letters A*, 17, 1899-1907.
- Sakurai, J.J., 1994, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, New York, 90 p.
- Schmidth, H.J. and Schnack, J., 2002, Partition functions and symmetric polynomials, *American Journal of Physics*, 70, 53-57.
- Schwabl, F., 2006, *Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 196, 236 p.
- Shi-Jie, Y., Yuechan, L. and Shiping, F., 2012, Thermodynamical properties of a trapped interacting Bose gas, *Modern Physics Letters B*, 26, 1250053-1-1250053-9.
- Shimizu, A. and Miyadera, T., 2001, Energies and collapse times of symmetric and symmetry-breaking states of finite systems with a U(1) symmetry, *Physical Review E*, 64, 056121-1-056121-4.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Shu, Y., Chen, J. and Chen, L., 2002, Bose-Einstein condensation of a q -deformed ideal Bose gas, *Physics Letters A*, 292, 309-314.
- Sitko, P., 2003, Exclusion statistics of quasiparticles in condensed states of composite fermion excitations, *Physical Review B*, 68, 153309-1-153309-4.
- Şenay, M., 2012, Deforme bir Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklarda termostatistiksel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Tang, C.L., 2005, *Fundamentals of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 66 p.
- Tuszynski, J.A., Rubin, J.L., Meyer, J. and Kibler, M., 1993, Statistical mechanics of a q -deformed boson gas, *Physics Letters A*, 175, 173-177.
- Ubriaco, M.R., 1998, Bose-Einstein condensation of a quantum group boson gas, *Physical Review E*, 67, 179-183.
- Walser, R., Williams, J., Cooper, J. and Holland, M., 1999, Quantum kinetic theory for a condensed bosonic gas, *Physical Review A*, 59, 3878-3888.
- Yan, J., 2003, Harmonic interaction model and its applications in Bose-Einstein condensation, *Journal of Statistical Physics*, 113, 623-633.
- Yukalov, V.I., 2006, Non-equivalent operator representations for Bose condensed systems, *Laser Physics*, 16, 511-525.
- Zeng, Q.J., Cheng, Z. and Yuan, J.H., 2011, Thermostatistical properties of a q -deformed bosonic exciton gas, *The European Physical Journal B*, 81, 275-281.
- Zeng, Q.J., Cheng, Z. and Yuan, J.H., 2012, Bose-Einstein condensation of a q -deformed boson system in a harmonic potential trap, *Pyhsica A*, 391, 563-571.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Zettili, N., 2009, Quantum Mechanics concepts and applications, John Wiley&Sons, New York, 463 p.
- Zoido, J., 2003, Counting statistics and fluctuations in Bose-Einstein condensation, Physics Letters A, 309, 225-233.

EKLER**EK-1**

(Standart $n = n(x)$ Bose-Einstein dağılımı Fortran kodu yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION n, X
OPEN(8,FILE='DAGILIM.DAT')
DO 1 X=0.1,3.001,0.001
n=1./(EXP(X)-1)
WRITE(8,144)X, n
1  CONTINUE
144 FORMAT(8(F14.7,4X))
END
```


EKLER (devam)**EK-2**

(Standart $g = g_{3/2}(z)$ Bose-Einstein fonksiyonunun Fortran kodu yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION g3bolu2z, z
OPEN(8,FILE='g3bolu2z.DAT')
DO 1 z=0,1.001,0.001
  g3bolu2z=0
  DO 10 i=1,49
    g3bolu2z=g3bolu2z+(z**i)/(i**(3./2.))
10  CONTINUE
  WRITE(8,144)z, g3bolu2z
1  CONTINUE
144 FORMAT(8(F14.7,4X))
END
```

EKLER (devam)**EK-3**

(Standart $g = g_{5/2}(z)$ Bose-Einstein fonksiyonunun Fortran kodu yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION g5bolu2z, z
OPEN(8,FILE='g5bolu2z.DAT')
DO 1 z=0,1.001,0.001
  g5bolu2z=0
  DO 10 i=1,49
    g5bolu2z=g5bolu2z+(z**i)/(i**(5./2.))
10  CONTINUE
  WRITE(8,144)z, g5bolu2z
1  CONTINUE
144 FORMAT(8(F14.7,4X))
END
```

EKLER (devam)**EK-4**

(Genelleştirilmiş $n = n(\eta, q)$ Bose-Einstein dağılımının Fortran kodu yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION n, e, q
OPEN(8,FILE='DEN1.DAT')
DO 1 q=1.,10,0.01
DO 10 e=0.1,3.0,0.01
n=(q**(-1))/(EXP(e)-(q**(-1)))
WRITE(8,144)q, e, n
10 CONTINUE
1 CONTINUE
144 FORMAT(8(F14.7,4X))
END
```

EKLER (devam)**EK-5**

(Genelleştirilmiş $g = g_{3/2}(z, q)$ fonksiyonunun Fortran kodu yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION g3bolu2zq, z, q
OPEN(8,FILE='DEN2.DAT')
DO 1 q=1.,10,0.01
DO 10 z=0,1.0,0.01
g3bolu2zq=0
DO 100 i=1,49
g3bolu2zq=g3bolu2zq+((z/q)**i)/(i**(3./2.))
100 CONTINUE
WRITE(8,144)q, z, g3bolu2zq
10 CONTINUE
1 CONTINUE
144 FORMAT(3(F14.7,4X))
END
```

EKLER (devam)**EK-6**

(Genelleştirilmiş $g = g_{5/2}(z, q)$ fonksiyonunun Fortran kodu yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION g5bolu2zq, z, q
OPEN(8,FILE='DEN3.DAT')
DO 1 q=1,10,0.01
DO 10 z=0,1.0,0.01
g5bolu2zq=0
DO 100 i=1,49
g5bolu2zq=g5bolu2zq+((q**(-i))*(z**i))/(i**(5./2.))
100 CONTINUE
WRITE(8,144)q, z, g5bolu2zq
10 CONTINUE
1 CONTINUE
144 FORMAT(3(F14.7,4X))
END
```

EKLER (devam)**EK-7**

(($S^q \lambda^3 / k_B V$) fonksiyonunun q 'ya göre değişimi için Fortran kodunun yazılımı.)

```
DOUBLE PRECISION a, s, q
OPEN(8,FILE='DEN4.DAT')
DO 1 q=1.,10.001,0.001
a=0
DO 10 i=1,49
a=a+(1/((q**i)*(i**(5./2.))))
s=(5./2.)*a
10 CONTINUE
WRITE(8,144)q,s
1 CONTINUE
144 FORMAT(2(F14.7,4X))
END
```