Distant Uzaylar ve Halkalar Üzerinde Projektif Doğrular Üzerine

Adnan Pekzorlu

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2013

On Distant Spaces and Projective Lines Over Rings

Adnan Pekzorlu

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

June 2013

Distant Uzaylar ve Halkalar Üzerinde Projektif Doğrular Üzerine

Adnan Pekzorlu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Münevver Özcan

Haziran 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Adnan Pekzorlu'nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Distant Uzaylar ve Halkalar Üzerinde Projektif Doğrular Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Münevver Özcan

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver Özcan

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Üye : Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Doç. Dr. Ayşe Bayar Korkmazoğlu

Üye : Doç.Dr. Aytaç Kurtuluş

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve ....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde bazı sonlu halkalar üzerinde projektif doğrular ayrıntılı olarak incelenmiştir. 63. mertebeye kadar olan, değişmeli ve birimsele sahip olan halkalar üzerinde projektif doğruların tablosu verilmiştir. Bunlardan $GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$, $GF(2)[x]/\langle x^2 - x\rangle$, $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 3x - 3\rangle$ bölüm halkaları, $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$, $GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$ direkt çarpım halkaları ve $GF(17)$ halkası gözönüne alınarak bunlar üzerindeki projektif doğrular incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif doğru, bölüm halkası, direkt çarpım halkası

SUMMARY

In this thesis some projective lines over finite rings are examine. Projective lines over commutative rings with units up to order 63 are given as a table. The projective line over the factor rings $GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$, $GF(2)[x]/\langle x^2 - x\rangle$, $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 3x - 3\rangle$, the projective lines over the product rings $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$, $GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$ and $GF(17)$ are examine in details.

Keywords: Projective line, factor ring, product ring

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, akademik anlamda bilgi ve fikirleriyle bana yön vererek çalışmalarımda yardımcı olan danışmanım

Sayın Prof. Dr. Münevver Özcan

hocama ve her türlü desteği esirgemeden fedakarlıkta bulunan aileme teşekkür ederim.

Eskişehir 2013 Adnan Pekzorlu

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Sonlu projektif halka geometrisi özellikleri, doğruları açısından ele alındığında önemli bir cebirsel geometri dalıdır.

63. mertebeye kadar olan, değişmeli ve birimsele sahip olan halkalar üzerindeki projektif doğruların tablosu verilmiş ve bunlardan bazı incelenmiştir.

Bu tezde $GF(2)[x]/\langle x^3-x\rangle$ bölüm halkası öncelikle incelenmekte ve elemanları ile ilgili projektif doğrunun noktaları bulunmaktadır. Halkanın ikişer ikişer distant üç noktasının komşuluğunda 18 nokta bulunmaktadır. Herhangi bir doğru üzerindeki noktanın komşuluğunda dokuz eleman vardır. Halkanın iki maksimal idealinin her ikisi altında üç aykırı aile oluşur. Her ailede bulunan noktaların rolleri diğer bir ideale geçince değişir. Diğer taraftan $R_\Diamond/J_\Diamond$ ile $GF(2)\otimes GF(2)$ nin izomorfik olduğu görülmektedir. $R_\Diamond/J_\Diamond$ üzerindeki projektif doğru dokuz nokta içerir. Onların herbiri dört komşu ve dört distant nokta içerir ve herhangi iki distant noktanın iki komşusu ortaktır.

$GF(2)\otimes GF(2)\otimes GF(2)$ direkt çarpım halkasının birimsel elemanı dışındaki tüm elemanları sıfır bölendir ve aşikar olmayan (ikişer ikişer distant üç nokta dışında) iki farklı nokta kümesi daha vardır: Zayıf ve kuvvetli noktalar. Bundan dolayı yapı biraz daha karmaşık bir hal alır. 27 nokta içeren halkanın herbir komşuluğunda 18 nokta vardır. İkişer ikişer distant noktaların komşuluğunda ortak 12 nokta vardır ve ikişer ikişer distant üç noktanın komşuluğunda 6 ortak nokta vardır. Doğru üzerindeki noktalar üç gruba ayrılır:

a) İkişer ikişer distant üç ayırt edici nokta (çekirdek),

b) Koordinatlarından biri birimsel biri sıfır bölen olan 12 iç kabuk noktası,

c) Koordinatlarının ikisi de sıfır bölen olan 12 dış kabuk noktası.

$GF(2)[x]/\langle x^3-x\rangle$ ve $GF(2)\otimes GF(2)\otimes GF(2)$ halkalarına ek olarak sırasıyla $\mathbb{Z}_4\otimes\mathbb{Z}_4$ ve $GF(3)\otimes GF(2)\otimes GF(4)$ direkt çarpım halkaları, $GF(17)$ halkası ile $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2-3x-3\rangle$ bölüm halkası gözönüne alınarak bunlar
üzerindeki projektif doğrular da incelenmiştir.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: G , boş olmayan bir küme ve $\circ$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu taktirde aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa, $(G, \circ)$ ikilisine (sistemine) bir *grup* adı verilir.

G1. $\forall\ a, b \in G$ için, $a \circ b \in G$ dir. (Kapalılık özelliği)

G2. $\forall\ a, b, c \in G$ için, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \in G$ dir. (Birleşme özelliği)

G3. $\forall\ a \in G$ için $\exists\ e \in G$ öyle ki, $a \circ e = e \circ a = a$ dır. (Birim eleman özelliği)

G4. $\forall\ a \in G$ için, $\exists\ b \in G$ öyle ki, $a \circ b = b \circ a = e$ dir. (Ters eleman özelliği)

Eğer $(G, \circ)$ grubu değişimli ise,

G5. $\forall\ a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ aksiyomu da sağlanıyorsa, $(G, \circ)$ grubuna *değişimli bir grup* veya bir *Abel grubu* denir. (Gruba Abel sıfatının eklenmesi, Norveçli bir matematikçi olan Niels Henrik Abel (1802-1829) in adına izafetendir.).

Buradan sonra, aksi söylenmedikçe, grup işlemi $(\circ)$ çarpımsal işlem olarak alınacak ve $a \circ b$ yerine ab yazılacaktır (Olgun, 2003).

Teorem 2.2: Her $(G, \cdot)$ grubu için,

(a) G nin birim elemanı tektir.

(b) G nin her bir elemanının tersi tektir.

(c) $\forall\ a, b, c \in G$ için $ab = ac \Longrightarrow b = c$ dir. (Sol sadeleştirme özelliği).

(d) $\forall\ a, b, c \in G$ için $ba = ca \Longrightarrow b = c$ dir. (Sağ sadeleştirme özelliği).

İspat:

(a) Eğer $e_1, e_2 \in G$ iki birim eleman ise, $e_1 = e_1 e_2 = e_2$ olacağından, $e_1 = e_2$ olur.

(b) $a \in\ G$ ve b, c de, a nın iki tersi olsun. Bu durumda,

$b = be = b(ac) = (ba)c = ec = c$ olduğundan $b = c$ bulunur.

(c) $\forall\ a, b, c \in G$ için $ab = ac \Longrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Longrightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$

$\Longrightarrow b = c$ olur.

(d) $\forall\ a, b, c \in G$ için $ba = ca \Longrightarrow (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1}$

$\Longrightarrow b(aa^{-1}) = c(aa^{-1}) \Longrightarrow b = c$ olur (Olgun, 2003).

Tanım 2.3: G bir grup, $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. Eğer A, G nin işlemine göre bir grup teşkil ediyorsa, A ya G nin bir *alt grubu* denir (Olgun, 2003).

Teorem 2.4: G bir grup, $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun.
Bu taktirde A, G nin bir alt grubudur $\Longleftrightarrow \forall\, a, b \in A$ için $ab^{-1} \in A$ dır.

İspat:

($\Longrightarrow$) A, G nin bir alt grubu olsun.

$\forall\, a, b \in A \Longrightarrow a, b^{-1} \in A$ (b nin b^{-1} tersi var olduğundan)

$\Longrightarrow ab^{-1} \in A$ (işlem kapalı olduğundan)

($\Longleftarrow$) Tersine, $\forall\, a, b \in A$ için $ab^{-1} \in A$ olsun.

• $\forall\, a, b \in A$ için ($a = b$ alınırsa), $bb^{-1} \in A \Longrightarrow e \in A$ yani G nin birim elemanı A nın da birim elemanıdır.

• $e, b \in A \Longrightarrow eb^{-1} = b^{-1} \in A$ dır. Yani, G nin her elemanının tersi mevcuttur.

• $\forall\, a, b \in A \Longrightarrow a, b^{-1} \in A$

$\Longrightarrow a(b^{-1})^{-1} \in A$

$\Longrightarrow ab \in A$

olur. Yani A da işlem kapalıdır.

G de birleşme özelliğine sahip olan grup işleminin $A \subseteq G$ de de aynı özelliğe sahip olacağı aşikardır.

O halde A, G nin bir alt grubudur (Olgun, 2003).

Tanım 2.5: $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilmiş olsun. Aşağıdaki dört koşul sağlanırsa, $(H, +, \cdot)$ ya bir *halka* denir.

H1. $(H, +)$ bir değişmeli gruptur.

H2. $(H, \cdot)$ kapalıdır.

H3. $(H, \cdot)$ nın birleşme özelliği vardır.

H4. $(H, +, \cdot)$ da sol ve sağ dağılma özellikleri vardır (Olgun, 2003).

Tanım 2.6: $(H, +, \cdot)$ herhangi bir halka olsun. Eğer $(H, \cdot)$ nın değişme özelliği varsa, H halkasına *değişmeli halka* denir. Benzer şekilde, eğer $(H, \cdot)$ nın birim elemanı varsa, H halkasına *birimli halka* denir (Olgun, 2003).

Tanım 2.7: H bir halka, $A \neq \varnothing$ ve $A \subseteq H$ olsun. Eğer H üzerindeki ikili işlemlere göre A bir halka oluşturuyor ise, A ya H nin bir *alt halkası* denir (Olgun, 2003).

Teorem 2.8: H bir halka, $A \subseteq H$ bir özalt küme olsun. A nın, H nin bir althalkası olması için gerek ve yeter şartlar,

(**i**) A, H nin ikili işlemleri altında kapalı olması

(**ii**) $x \in A \Longrightarrow -x \in A$ olmasıdır.

İspat:

($\Longrightarrow$) Eğer A, H nin althalkası ise A, H nin ikili işlemleri altında halka olma aksiyomlarını sağlayacağından (i) ve (ii) nin sağlanacağı açıktır.

($\Longleftarrow$) Tersine, şimdi, (i) ve (ii) nin sağlandığını varsayalım. (i) şartından H2 nin sağlandığı görülür. $\forall\ x, y \in A$ için, (ii) den $x, -y \in A$ yazılabilir. (i) şartı gereği de $x - y \in A$ olacağından A, H nin toplamsal bir alt grubudur. Dolayısıyla H1 sağlanır. $A \subseteq H$ olduğundan diğer halka olma aksiyomları da sağlanır. Bundan dolayı A, H nin bir althalkasıdır (Olgun, 2003).

Tanım 2.9: H herhangi bir birimli halka olsun. Bir $r \in H$ elemanının çarpımsal tersi varsa r ye, H nin bir *birimsel (tersinir) elemanı* denir (Olgun, 2003).

Tanım 2.10: H nin sıfırdan farklı her elemanı birimsel ise, H ye bir *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Değişimli olan bir bölümlü halkaya da bir *cisim* denir (Olgun, 2003).

Örnek 2.11: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir bölümlü halka değildir. Çünkü, 1 ve -1 hariç, sıfırdan farklı hiçbir elemanın çarpımsal tersi yoktur. Dolayısıyla bu halka bir cisim de değildir. Buna karşılık $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nin ikisinin de sıfırdan farklı her elemanı birimsel olduğundan birer bölümlü halkadırlar. Ayrıca her ikisinde de çarpma işlemi değişimli olduğundan, bunlar cisimdirler.

Tanım 2.12: H bir halka olsun. Bu taktirde $\forall\ a \in H$ için $na = a + a + ... + a = 0$ (n kez) olacak şekilde bir en küçük n pozitif tam sayısı varsa, H nin *karakteristiği* n dir denir. Eğer böyle hiçbir n tam sayısı mevcut değilse, H nin *karakteristiği sıfırdır* denir (Olgun, 2003).

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nin herbirinin karakteristiği sıfırdır. Her $n > 1$ için katsayıları $\mathbb{Z}_n$

içinde olan polinomların oluşturduğu $\mathbb{Z}_n[x]$ halkasının karakteristiği ise n dir.

Tanım 2.13: H bir halka ve $a, b \in H$, sıfırdan farklı iki eleman olmak üzere eğer, $ab = 0$ ise a ve b elemanlarına H nin *sıfır bölenleri* adı verilir (Olgun, 2003).

Tanım 2.14: Bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı birimsel ise bu halka bir cisimdir, buna *sonlu cisim* yada *Galois cismi* denir ve $GF(q)$ ile gösterilir. Burada q eleman sayısını gösterir ve p asal sayı olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $q = p^n$ dir (Olgun, 2003).

Tanım 2.15: H bir halka ve I, H nin bir alt halkası olsun. Eğer her $x \in H$ ve $a \in I$ için $ax \in I$ ve $xa \in I$ ise, I ya H nin bir *ideali* denir (Karakaş, 1998).

Tanım 2.16: Bir H halkası için $I \neq H$ koşulunu sağlayan bir I idealine, H nin *özideali* denir. Eğer her $x, y \in H$ için $xy \in I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ oluyorsa, I ideali H nin bir *asal idealidir* denir. Eğer H nin I yı kapsayan, I dan başka, hiç bir özideali yoksa, I ya H nin bir *maksimal ideali* denir (Karakaş, 1998).

Tek maksimal ideali bulunan halkaya *lokal halka* denir (Saniga and Planat, 2006).

Tanım 2.17: H bir halka olsun. $a \in H$ için Ha ya *temel ideal* denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir (Karakaş, 1998).

Tanım 2.18: H bir halka ve I onun bir ideali ise

$\bar{H} \equiv H/I = \{a + I \mid a \in H\}$ H nin I idealine göre *bölüm halkası* olarak isimlendirilir.

$(a + I) + (b + I) = a + b + I$

$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$

işlemleri altında $\bar{H}$ bir halkadır. Eğer I maksimal ideal ise $\bar{H}$ bir cisimdir. Maksimal ideallerin kesişimine *Jacobson radikal* denir (Saniga and Planat, 2006).

Örnek 2.19: $H = \mathbb{Z}$ halkasında $I = 4\mathbb{Z}$ idealini ele alınırsa, $H/I = \{I+0, I+1, I+2, I+3\}$ bölüm halkası elde edilir. Bu halkanın işlem tabloları Tablo 2.1 de verilmiştir:

$+$	$I+0$	$I+1$	$I+2$	$I+3$
$I+0$	$I+0$	$I+1$	$I+2$	$I+3$
$I+1$	$I+1$	$I+2$	$I+3$	$I+0$
$I+2$	$I+2$	$I+3$	$I+0$	$I+1$
$I+3$	$I+3$	$I+0$	$I+1$	$I+2$

$\cdot$	$I+0$	$I+1$	$I+2$	$I+3$
$I+0$	$I+0$	$I+0$	$I+0$	$I+0$
$I+1$	$I+0$	$I+1$	$I+2$	$I+3$
$I+2$	$I+0$	$I+2$	$I+0$	$I+2$
$I+3$	$I+0$	$I+3$	$I+2$	$I+1$

Tablo 2.1 : *$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

Tanım 2.20: X ile Y iki küme olsun. Eğer X den Y üzerine birebir bir fonksiyon varsa X ile Y *aynı sayıda elemana sahiptir* veya *aynı kardinaliteye sahiptir* denir. Diğer bir deyişle, X in elemanları Y nin bütün elemanları ile birebir eşlenebiliyor ise X ile Y aynı kardinaliteye sahiptir denir (Olgun, 2003).

Tanım 2.21: $(G, \circ)$ ve $(G', \star)$ herhangi iki grup, $f : G \to G'$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\ a, b \in G$ için,

$$f(a \circ b) = f(a) \star f(b)$$

ise f ye bir *grup homomorfizmi* adı verilir. Verilen yapıların grup olduğu bilindiği taktirde f ye yalnızca *homomorfizm* denir (Olgun, 2003).

Tanım 2.22: $(G, \circ)$ ve $(G', \star)$ herhangi iki grup, $f : G \to G'$ bir homomorfizm olsun. Eğer f, birebir ve örten fonksiyon ise, f ye bir *izomorfizm* denir ve G ile G' gruplarına *izomorf gruplar* adı verilir (Olgun, 2003).

Tanım 2.23: $(H, +, \cdot)$ ve $(H', \oplus, \odot)$ herhangi iki halka, $f : H \to H'$ bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b \in H$ için,

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b) \text{ ve } f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$$

ise, f dönüşümüne H den H' ye bir *homomorfizm* denir. Bu taktirde H ve H' halkaları, *homomorf halkalar* adını alır. Birebir ve örten özelliği bulunan f homomorfizmine ise *izomorfizm*, H ve H' halkalarına *izomorf halkalar* denir (Olgun, 2003).

Bu tanımdan dolayı $f(0) = 0$ ve $f(-a) = -f(a)$ olduğundan H nin birimsel elemanının H' nin birimsel elemanına dönüştüğü görülebilir.

Tanım 2.24: $(H,+,\cdot)$ ve $(H',\oplus,\odot)$ herhangi iki halka, $f : H \to H'$ bir halka homomorfizmi olmak üzere $\{a \in H \mid f(a) = 0\}$ kümesine f nin *çekirdeği* denir ve çekirdek, H nin bir idealidir (Olgun, 2003).

Tanım 2.25: $(H,+,\cdot)$ ve $(H',\oplus,\odot)$ herhangi iki halka, $f\colon\ H \to H'$ dönüşümünün bir kanonik homomorfizm olabilmesi için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekir.

i) f bir halka homomorfizmidir, yani her $a, b \in H$ için,

- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$
- $f(1) = 1$

dir.

ii) f nin çekirdeği halkanın idealidir (Saniga and Planat, 2006).

Örnek 2.26: $GF(2)$ halkasının karakteristiği 2 dir ve elemanları 0 ile 1 dir. $1+1 \equiv 0$ olduğundan $+1 \equiv -1$ dir. $GF(2)$ nin toplama ve çarpma işlemi tabloları Tablo 2.2 de verilmiştir:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tablo 2.2 : *$GF(2)$ de Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

$\mathbb{Z}_4$ halkasının karakteristiği 4 tür. Elemanları da $\{0, 1, 2, 3\}$ tür. Toplama ve çarpma tabloları ise Tablo 2.3 teki gibidir:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tablo 2.3 : *$\mathbb{Z}_4$ de Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

$GF(4)$ halkasının ise karakteristiği 2 dir ve elemanları şunlardır:
$GF(4) = GF(2^2) \cong GF(2)[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$, $GF(2)$ nin 2. dereceden bir genişleme-

sidir. x^2+x+1 polinomu $GF(2)[x]$ de indirgenemez polinomdur. x^2+x+1 polinomunun bir kökü α olmak üzere

$$\begin{aligned} GF(4) &= \{a_0+a_1\alpha+\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle | a_0,a_1\in GF(2)\}. \\ &= \{\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle, 1+\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle, \alpha+\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle, \alpha+1+\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{array}{rlcl} f: & GF(2)[\alpha]/\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle & \rightarrow & GF(2)[\alpha] \\ & a_0+a_1\alpha+\langle\alpha^2+\alpha+1\rangle & \rightarrow & a_0+a_1\alpha \end{array}$$

izomorfizmi tanımlanabilir.

Böylece $GF(4)$ ün elemanları $\{0,1,\alpha,\alpha+1\}$ bulunur. $GF(4)$ te $1\equiv -1$ ve $\alpha^2+\alpha+1\equiv 0$ olduğundan toplama ve çarpma işlemi tabloları Tablo 2.4 te verilmiştir:

$\oplus$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

$\otimes$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	1	α

Tablo 2.4 : $GF(4)$ *te Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

Karakteristiği 3 olan $GF(27)$ nin elemanları da şunlardır:

$GF(3^3)$, $GF(3)$ ün kübik bir genişlemesidir ve $\mathbb{Z}_3[x]$ de x^3+x^2+x+2 bir indirgenemez polinomdur. Böylece α bu polinomun bir kökü olmak üzere,

$$GF(27)=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 | a_0,a_1,a_2\in GF(3)=\mathbb{Z}_3\}$$

olduğundan yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak $GF(27)$ nin elemanları

$$\begin{aligned} &\{0,1,2,\alpha,\alpha+1,\alpha+2,2\alpha,2\alpha+1,2\alpha+2,,\alpha^2,\alpha^2+1,\alpha^2+2,\alpha^2+\alpha, \\ &\alpha^2+\alpha+1,\alpha^2+\alpha+2,\alpha^2+2\alpha,\alpha^2+2\alpha+1,\alpha^2+2\alpha+2,2\alpha^2,2\alpha^2+1, \\ &2\alpha^2+2,2\alpha^2+\alpha,2\alpha^2+\alpha+1,2\alpha^2+\alpha+2,2\alpha^2+2\alpha,2\alpha^2+2\alpha+1, \\ &2\alpha^2+2\alpha+2\} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

İleride işlem kolaylığı açısından α yerine x kullanılacaktır.

Tanım 2.27: $P\neq\varnothing$ bir küme ve $\Delta\subseteq P\times P$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan (P,Δ) çiftine bir *distant uzay* denir.

i) Δ simetriktir, yani $p\ \Delta\ q \Longrightarrow q\ \Delta\ p$ dir.

ii) Δ yansımalı değildir, yani her $p \in P$ için $p\acute{\Delta}p$ dir.($\acute{\Delta}$, Δ nın olumsuzudur)

P nin elemanlarına *noktalar*, Δ bağıntısına *distantlık bağıntısı* denir ve $p\ \Delta\ q$ ise $p, q \in P$ noktalarına "*(biribirine) distanttır*" denir (Bluck and Herzer, 2005).

Tanım 2.28: (P, Δ) bir distant uzay olsun. (P, Δ) aşağıdaki gibi isimlendirilir.

i) Eğer P de ikişer ikişer distant üç nokta varsa *aşikar (trivial) olmayan distant uzay*,

ii) Eğer keyfi $p, q \in P$ noktaları için $p\ \Delta\ r\ \Delta\ q$ özelliğinde bir $r \in P$ noktası varsa *stabil distant uzay*,

iii) Eğer keyfi $p, q \in P$ noktaları için, $p_0 = p, p_n = q$ ve $p_{i-1}\ \Delta\ p_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ ve $p_0, p_1, ..., p_n \in P$ noktaları varsa *bağlantılı distant uzaydır* (Bluck and Herzer, 2005).

Örnek 2.29: P doğruların kümesi ve Δ bağıntısı "aykırı" (doğruların aykırılığı) olsun. Bu durumda (P, Δ) distant uzayı incelenirse;

• Uzayda ikişer ikişer aykırı olmayan üç doğru olduğundan bu distant uzay aşikar (trivial) olmayan distant uzaydır.

• Uzayda (aykırı olan yada olmayan) hangi doğru çifti alınırsa alınsın her ikisine de aykırı olan üçüncü bir doğru her zaman bulunabileceğinden dolayı bu distant uzay stabil distant uzaydır.

• Bağlantılı distantlık özelliği stabil olmanın bir genelleştirilmesi olduğundan dolayı bu distant uzay bağlantılı distant uzaydır,

olduğu görülmektedir.

Tanım 2.30: Grafta herbir düğüm bir nokta ile temsil edilir. Ayrıt ise iki düğümüne karşılık gelen noktaları birleştiren doğru parçası ya da basit eğridir. D ve A iki ayrık küme ve $D \neq \varnothing$ olsun. $d_i \in D$ $(i = 1, 2, ..., n)$ düğümler ve $a_k \in A$ $(k = 1, 2, ..., m)$ ayrıtlar olmak üzere herbir a_k ayrıtını bir $\{d_i, d_j\}$ düğüm çiftine eşleyen bir g bağıntısı var ise (D, A) ikilisine *graf* denir (Bluck and Herzer, 2005).

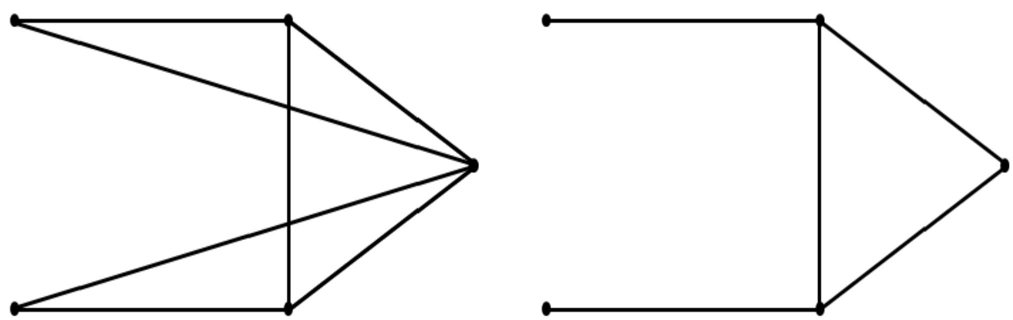
Tanım 2.31: Bir a_k ayrıtında $a_k = \{d_i, d_j\}$ olacak şekildeki d_i ve d_j düğümlerine "*bitişiktir*" denir. a_k ile d_i ya da a_k ile d_j ye ise "*çakışıktır*" denir (Bluck and Herzer, 2005).

Tanım 2.32: (P, Δ) ve (P', Δ') distant uzaylar olsun. $\varphi : P \to P'$ dönüşümü verilsin. Eğer $p, q \in P$ için $p \; \Delta \; q \Rightarrow p^{\varphi} \; \Delta \; q^{\varphi}$ gerektirmesi sağlanıyor ise φ ye *distant uzayların morfizmi* denir (Bluck and Herzer, 2005).

Tanım 2.33: $G_1 = \{D_1, A_1\}$ ve $G_2 = \{D_2, A_2\}$ grafları için ; D_1 den D_2 ye bitişikliği koruyan, birebir, örten bir dönüşüm var ise G_1 grafı G_2 grafına "*izomorftur*" denir (Bluck and Herzer, 2005).

Tanım 2.34: Bir grafta, eğer biribirinden farklı düğümleri bağlayan bir yol varsa "*düğümler biribiriyle bağlantılıdır*" denir (Bluck and Herzer, 2005).

Örnek 2.35: Bir (P, Δ) distant uzayının bağlantılı olabilmesi için gerek ve yeter koşul ilgili $G(P, \Delta)$ grafının grafteori anlamında bağlantılı olmasıdır. Şekil 2.1 de bağlantılı iki distant uzayın grafları çizilmiştir. Birincisi stabil distant uzaydır, ikincisi değildir. (Bluck and Herzer, 2005)



Şekil 2.1 : *Birinci graf (G_1) stabil distant uzaydır, ikincisi (G_2) değildir*

Şekil 2.1 deki graflarda $P_1 = P_2 = P$ yani nokta kümeleri eşit alınabilir. Böylece $\varphi = id_p : (P, \Delta_2) \to (P, \Delta_1)$ bir morfizmdir. Çünkü ikinci grafta bir ayrıt ile birleştirilen düğümler, birinci grafta da birleştirilmiştir. Bu morfizm elbette ki bijektiftir fakat bir izomorfizm değildir. Çünkü

$$\varphi^{-1} = id_p : (P, \Delta_1) \to (P, \Delta_2)$$

bir morfizm değildir. O halde bu iki distant uzay biribirine izomorf değildir.

Bu durum ayrıca şöyle de görülebilir: Distant uzaylardan biri stabil distant uzay olduğundan ve diğeri stabil olmadığından bu iki uzay biribirine izomorf değildir. Morfizmler, "stabil", "aşikar olmama" ve "bağlantılı" özelliklerini korurlar.

BÖLÜM 3

BAZI KÜÇÜK MERTEBELİ HALKALAR ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU ÖRNEKLERİ

Tablo 3.1 ve devamındaki tablolarda 63. mertebeye kadar olan, değişmeli ve birimsele sahip olan halkalar üzerindeki projektif doğruların özellikleri incelenmiştir. Doğru tipi "x/y" formunda verilmiştir ki "x" ilgili *halkadaki toplam eleman sayısını* ve "y" ise *sıfır bölenlerin toplam sayısını* göstermektedir. "Toplam", *ilgili doğru üzerindeki toplam nokta sayısını*; "I.Tip", *I.Tip nokta sayısını (Nokta koordinatlarından en az biri birimsel olan nokta)*; "1Komş", *herhangi bir noktanın komşuluğundaki nokta sayısını*; "2Komş", *herhangi iki distant noktada bulunan ortak nokta sayısını*; "3Komş", *üç distant noktanın ortak nokta sayısını* göstermektedir. "Jcb", *Jacobson nokta sayısını* göstermektedir. Ayrıca *kalın harfle* belirtilenler *incelenen halkaları* göstermektedir (Saniga, et al., 2007).

Doğru Tipi	Noktaların özellikleri						Temsil Edilen Halka
	Toplam	I.Tip	1Komş	2Komş	3Komş	Jcb	
63/15	80	78	16	2	0	2	$GF(7) \otimes GF(9)$
63/27	96	90	32	6	0	14	$GF(7) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
63/39	128	102	64	26	6	4	$GF(7) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
63/32	96	94	33	2	0	29	$GF(2) \otimes GF(31)$
61/1	62	62	0	0	0	0	$GF(61)$
60/36	120	96	59	24	6	5	$GF(3) \otimes GF(5) \otimes GF(4)$
60/44	144	104	83	40	12	15	$GF(3) \otimes GF(5) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
60/52	216	112	155	104	60	7	$GF(3) \otimes GF(5) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
59/1	60	60	0	0	0	0	$GF(59)$
58/30	90	88	31	2	0	27	$GF(2) \otimes GF(29)$
57/21	80	78	22	2	0	16	$GF(3) \otimes GF(19)$
56/14	72	70	15	2	0	1	$GF(7) \otimes GF(8)$
56/32	96	88	39	8	0	23	$GF(7) \otimes \mathbb{Z}_8$, $GF(7) \otimes GF(2)[x]/\langle x^3\rangle$
56/38	120	94	63	26	6	17	$GF(7) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$
56/44	144	100	87	44	12	11	$GF(7) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
56/50	216	106	159	110	66	5	$GF(7) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
55/15	72	70	16	2	0	6	$GF(5) \otimes GF(11)$
54/28	84	82	29	2	0	25	$GF(2) \otimes GF(27)$
54/36	108	90	53	18	0	17	$GF(2) \otimes \mathbb{Z}_{27}$, $GF(2) \otimes GF(3)[x]/\langle x^3\rangle$
54/38	120	92	65	28	6	15	$GF(2) \otimes GF(3) \otimes GF(9)$
54/42	144	96	89	48	18	11	$GF(2) \otimes GF(3) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
54/46	192	100	137	92	54	7	$GF(2) \otimes GF(3) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
53/1	54	54	0	0	0	0	$GF(53)$
52/16	70	68	17	2	0	9	$GF(13) \otimes GF(4)$
52/28	84	80	31	4	0	23	$GF(13) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
52/40	126	92	73	34	6	11	$GF(13) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
51/19	72	70	20	2	0	14	$GF(3) \otimes GF(17)$
50/26	78	76	27	2	0	23	$GF(2 \otimes GF(25)$

Tablo 3.1 : *63.mertebeye kadar, değişmeli ve birimsele sahip olan halkalar üzerindeki projektif doğruların özellikleri*

Doğru Tipi	Noktaların özellikleri						Temsil Edilen Halka
	Toplam	I.Tip	1Komş	2Komş	3Komş	Jcb	
50/30	90	80	39	10	0	19	$GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_{25}$ yada $GF(5)[x]/\langle x^2\rangle]$
50/34	108	84	57	24	6	15	$GF(2) \otimes GF(5) \otimes GF(5)$
49/1	50	50	0	0	0	0	$GF(49)$
49/7	56	56	6	0	0	6	$\mathbb{Z}_{49},\ GF(5)[x]/\langle x^2\rangle$
49/13	64	62	14	2	0	0	$GF(7) \otimes GF(7)$
48/18	68	66	19	2	0	13	$GF(3) \otimes GF(16)$
48/24	80	72	31	8	0	7	$GF(3) \otimes [GF(4)[x]/\langle x^2\rangle$ yada $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2-3x-3\rangle]$
48/30	10	78	51	22	6	3	$GF(3) \otimes GF(4) \otimes GF(4)$
48/32	96	80	47	16	0	15	$GF(3) \otimes \mathbb{Z}_{16},\ GF(3) \otimes \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2\rangle, \ldots$
48/34	108	82	59	26	6	13	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(8)$
48/36	120	84	71	36	12	11	$GF(3) \otimes GF(4) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
48/40	144	88	95	56	24	7	$GF(3) \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4,\ GF(3) \otimes GF(2) \otimes \mathbb{Z}_8$
48/42	180	90	131	90	54	5	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$
48/44	216	92	167	124	84	3	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
48/46	324	94	275	230	186	1	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
47/1	48	48	0	0	0	0	$GF(47)$
46/24	72	70	25	2	0	21	$GF(2) \otimes GF(23)$
45/13	60	58	14	2	0	4	$GF(5) \otimes GF(9)$
45/21	72	66	26	6	0	8	$GF(5) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
45/29	96	74	50	22	6	2	$GF(5) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
44/14	60	58	15	2	0	7	$GF(11) \otimes GF(4)$
44/24	72	68	27	4	0	19	$GF(11) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
44/34	108	78	63	30	6	9	$GF(11) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
43/1	44	44	0	0	0	0	$GF(43)$
42/30	96	72	57	24	6	11	$GF(2) \otimes GF(3) \otimes GF(7)$
41/1	42	42	0	0	0	0	$GF(41)$
40/12	54	52	13	2	0	3	$GF(5) \otimes GF(8)$
40/24	72	64	31	8	0	15	$GF(5) \otimes \mathbb{Z}_8,\ GF(5) \otimes GF(2)[x]/\langle x^3\rangle$

Tablo 3.1 : *(devamı)*

Doğru Tipi	Noktaların özellikleri						Temsil Edilen Halka
	Toplam	I.Tip	1Komş	2Komş	3Komş	Jcb	
40/28	90	68	49	22	6	11	$GF(5) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$
40/32	108	72	67	36	12	7	$GF(5) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
40/36	162	76	121	86	54	3	$GF(5) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
39/15	56	54	16	2	0	10	$GF(3) \otimes GF(13)$
38/20	60	58	21	2	0	17	$GF(2) \otimes GF(19)$
37/1	38	38	0	0	0	0	$GF(37)$
36/12	50	48	13	2	0	5	$GF(4) \otimes GF(9)$
36/18	60	54	23	6	0	5	$GF(4) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
36/24a	80	60	43	20	6	1	$GF(4) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
36/20	60	56	23	4	0	15	$[\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle] \otimes GF(9)$
36/24b	72	60	35	12	0	11	$[\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle] \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
36/28a	90	64	53	26	6	7	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(9)$
36/28b	96	64	59	32	12	7	$[\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle] \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
36/30	108	66	71	42	18	5	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
36/32	144	68	107	76	48	3	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
35/11	48	46	12	2	0	2	$GF(5) \otimes GF(7)$
34/18	54	52	19	2	0	15	$GF(2) \otimes GF(17)$
33/13	48	46	14	2	0	8	$GF(3) \otimes GF(11)$
32/1	33	33	0	0	0	0	$GF(32)$
32/11	45	43	12	2	0	0	$GF(4) \otimes GF(8)$
32/16	48	48	15	0	0	15	$\mathbb{Z}_{32}, GF(2)[x]/\langle x^5\rangle$
32/17	51	49	18	2	0	14	$GF(2) \otimes GF(16)$
32/18	54	50	21	4	0	13	$GF(8) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
32/20	60	52	27	8	0	11	$GF(8) \otimes \mathbb{Z}_8,\ GF(2) \otimes GF(4)[x]/\langle x^2\rangle$
32/23	75	55	42	20	6	8	$GF(2) \otimes GF(4) \otimes GF(4)$
32/24	72	56	39	16	0	7	$GF(2) \otimes \mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_8$
32/25	81	57	48	24	6	6	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(8)$
32/26	90	58	57	32	12	5	$GF(2) \otimes GF(4) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$

Tablo 3.1 : *(devamı)*

Doğru Tipi	Noktaların özellikleri						Temsil Edilen Halka
	Toplam	I.Tip	1Komş	2Komş	3Komş	Jcb	
32/28	108	60	75	48	24	3	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes \mathbb{Z}_8$, $GF(2) \otimes \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$
32/29	135	61	102	74	48	2	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$
32/30	162	62	129	100	72	1	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
32/31	243	63	210	180	150	0	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
31/1	32	32	0	0	0	0	$GF(31)$
30/22	72	52	41	20	6	7	$GF(2) \otimes GF(3) \otimes GF(5)$
29/1	30	30	0	0	0	0	$GF(29)$
28/10	40	38	11	2	0	3	$GF(7) \otimes GF(4)$
28/16	48	44	19	4	0	11	$GF(7) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
28/22	72	50	43	22	6	5	$GF(7) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
27/1	28	28	0	0	0	0	$GF(27)$
27/9	36	36	8	0	0	8	$\mathbb{Z}_{27}$, $GF(3)[x]/\langle x^3\rangle$
27/11	40	38	12	2	0	6	$GF(3) \otimes GF(9)$
27/15	48	42	20	6	0	2	$GF(3) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2\rangle]$
27/19	64	46	36	18	6	0	$GF(3) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
26/14	42	40	15	2	0	11	$GF(2) \otimes GF(13)$
25/1	26	26	0	0	0	0	$GF(25)$
25/5	30	30	4	0	0	4	$\mathbb{Z}_{25}$, $GF(5)[x]/\langle x^2\rangle$
25/9	36	34	10	2	0	0	$GF(5) \otimes GF(5)$
24/10	36	34	11	2	0	5	$GF(3) \otimes GF(8)$
24/16	48	40	23	8	0	7	$GF(3) \otimes \mathbb{Z}_8$, $GF(3) \otimes GF(2)[x]/\langle x^3\rangle]$
24/18	60	42	35	18	6	5	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$
24/20	72	44	47	28	12	3	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2\rangle]$
24/22	108	46	83	62	42	1	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
23/1	24	24	0	0	0	0	$GF(23)$
22/12	36	34	13	2	0	9	$GF(2) \otimes GF(11)$
21/9	32	30	10	2	0	4	$GF(3) \otimes GF(7)$

Tablo 3.1 : *(devamı)*

Doğru Tipi	Noktaların özellikleri						Temsil Edilen Halka
	Toplam	I.Tip	1Komş	2Komş	3Komş	Jcb	
20/8	30	28	9	2	0	1	$GF(5) \otimes GF(4)$
20/12	36	32	15	4	0	7	$GF(5) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2 \rangle]$
20/16	54	36	33	18	6	3	$GF(5) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
19/1	20	20	0	0	0	0	$GF(19)$
18/10	30	28	11	2	0	7	$GF(2) \otimes GF(9)$
18/12	36	30	17	6	0	5	$GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_9$ yada $GF(3)[x]/\langle x^2 \rangle]$
18/14	48	32	29	16	6	3	$GF(2) \otimes GF(3) \otimes GF(3)$
17/1	18	18	0	0	0	0	$GF(17)$
16/1	17	17	0	0	0	0	$GF(16)$
16/4	20	20	3	0	0	3	$\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 3x - 3 \rangle$, $GF(4)[x]/\langle x^2 \rangle$
16/7	25	23	8	2	0	0	$GF(4) \otimes GF(4)$
16/8	24	24	7	0	0	7	$\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 \rangle$, $GF(2)[x]/\langle x^4 \rangle$
16/9	27	25	10	2	0	6	$GF(2) \otimes GF(8)$
16/10	30	26	13	4	0	5	$GF(4) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2 \rangle]$
16/12	36	28	19	8	0	3	$GF(2) \otimes \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$
16/13	45	29	28	16	6	2	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$
16/14	54	30	37	24	12	1	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2 \rangle]$
16/15	81	31	64	50	36	0	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
15/7	24	22	8	2	0	2	$GF(3) \otimes GF(5)$
14/8	24	22	9	2	0	5	$GF(2) \otimes GF(7)$
13/1	14	14	0	0	0	0	$GF(13)$
12/6	20	18	7	2	0	1	$GF(3) \otimes GF(4)$
12/8	24	20	11	4	0	3	$GF(3) \otimes [\mathbb{Z}_4$ yada $GF(2)[x]/\langle x^2 \rangle]$
12/10	36	22	23	14	6	1	$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
11/1	12	12	0	0	0	0	$GF(11)$
10/6	18	16	7	2	0	3	$GF(2) \otimes GF(5)$
9/1	10	10	0	0	0	0	$GF(9)$
9/3	12	12	2	0	0	2	$\mathbb{Z}_9$, $GF(3)[x]/\langle x^2 \rangle$

Tablo 3.1 : *(devamı)*

Doğru Tipi	Noktaların özellikleri						Temsil Edilen Halka
	Toplam	1.Tip	1Komş	2Komş	3Komş	Jcb	
9/5	16	14	6	2	0	0	$GF(3) \otimes GF(3)$
8/1	9	9	0	0	0	0	$GF(8)$
8/4	12	12	3	0	0	3	$\mathbb{Z}_8,\ GF(2)[x]/\langle x^3 \rangle$
8/5	15	13	6	2	0	2	$GF(2) \otimes GF(4)$
8/6	18	14	9	4	0	1	$GF(2)[x]/\langle x^3 - x \rangle]$
8/7	27	15	18	12	6	0	$GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$
7/1	8	8	0	0	0	0	$GF(7)$
6/4	12	10	5	2	0	1	$GF(2) \otimes GF(3)$
5/1	6	6	0	0	0	0	$GF(5)$
4/1	5	5	0	0	0	0	$GF(4)$
4/2	6	6	1	0	0	1	$\mathbb{Z}_4,\ GF(2)[x]/\langle x^2 \rangle$
4/3	9	7	4	2	0	0	$GF(2) \otimes GF(2)$
3/1	4	4	0	0	0	0	$GF(3)$
2/1	3	3	0	0	0	0	$GF(2)$

Tablo 3.1 : *(devamı)*

Tablo 3.1 dikkatlice incelendiğinde ayrıca bazı ilginç özelliklerin olduğu söylenebilir. Bunlardan en belirgin olanı, ilgili projektif doğru üzerinde bulunan toplam nokta sayısı ile ve bundan dolayı I.Tip ve sıfır bölen nokta sayısındaki artış görülebilir. Ayrıca tablo halkadaki toplam eleman sayısına göre sınıflara ayrılmıştır. Buna ilave olarak örneğin 16/15 doğru tipi için diğerlerinden farklı olarak ikişer ikişer distant üç noktanın kesişiminde bulunan nokta sayısının I.Tip nokta sayısından fazla olduğu söylenebilir.

Küçük mertebeli halkalar üzerinde projektif doğruların nasıl belirlendiğinin ve inşaasının nasıl yapıldığının daha iyi anlaşılır olması için Tablo 3.1 de bulunan bazı bölüm halkaları ve direkt çarpım halkaları üzerinde projektif doğrular ayrıntılı olarak incelenmektedir. Bunlar sırasıyla, $GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$, $GF(2)[x]/\langle x^2 - x\rangle$, $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$, $GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$, $GF(17)$ ve $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 3x - 3\rangle$ halkaları üzerindeki projektif doğrulardır.

BÖLÜM 4

SONLU $GF(2)[x]/\langle x^3-x\rangle$ BÖLÜM HALKASI ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU

Bu bölümde halka H yerine R ile gösterilmektedir. Bir R halkası üzerinde projektif doğru inşa edilirken verilmesi gereken bazı tanım ve bilgilere gereksinim duyulmaktadır. Çalışma boyunca tekrardan kaçınılmak istendiğinden bunlar öncelikle burada verilmekte ve gerekli yerlerde hatırlatılmaktadır.

Tanım 4.1: R birimi olan bir halka ve $GL(2,R)$ elemanları R de olan tersi mevcut(determinantı sıfırdan farklı olan) 2×2 lik matrislerin genel lineer grubu olmak üzere, $(\alpha,\beta) \in R^2$ için

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \in GL(2,R) \tag{4.1}$$

özelliğinde $\gamma,\zeta \in R$ mevcut ise $(\alpha,\beta) \in R^2$ çiftine R üzerinde *kabul edilebilirdir (admissible)* denir.

R bir halka, $\rho \in R$ bir birimsel eleman ve $(\alpha,\beta) \in R^2$ üzerinde kabul edilebilir olsun. $(\rho\alpha,\rho\beta)$ sıralı çiftlerinin sınıflarından oluşan kümeye R üzerinde *projektif doğru* denir ve $PR(1)$ ile gösterilir. $PR(1)$ in noktaları arasında iki tür önemli bağıntı vardır: Bunlar *komşuluk ve distantlıktır*.

Eğer farklı $X=(\rho\alpha,\rho\beta)$ ve $Y=(\rho\gamma,\rho\zeta)$ noktaları için

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \notin GL(2,R) \tag{4.2}$$

ise X,Y *noktaları komşudur(veya paraleldir)* denir. Aksi taktirde X,Y *noktaları distanttır* denir. Yani bu durum (4.1) ifadesinin geçerli olması halidir.

Eğer R sonlu, değişmeli bir halka ise 4.1 (distantlık bağıntısı)

$$det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \zeta\end{pmatrix} \in R^* \tag{4.3}$$

a ve (4.2) (komşuluk bağıntısı) ise

$$det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \zeta\end{pmatrix} \in R \backslash R^* \tag{4.4}$$

a indirgenebilir(R^* birimsel elemanların kümesi ve $R\backslash R^*$ R nin sıfır bölenlerinin kümesidir) (Saniga, et al., 2007).

Tanım 4.2: $PR(1)$ projektif doğrusu üzerindeki bir noktaya komşu olan tüm noktaların kümesine o noktanın *komşuluğu* denir.

Eğer R bir cisim ise komşuluğun "eş olmaya", distantlık bağıntısının ise "farklı olma" bağıntısına indirgenebileceği açıktır. Bu durumda (4.4) ifadesi

$$\alpha\zeta - \beta\gamma = 0 \tag{4.5}$$

olması anlamına gelir ve böylece

$$\gamma = \rho\alpha \text{ ve } \zeta = \rho\beta \tag{4.6}$$

olur (Saniga, et al., 2007).

$PR(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar ikili koordinatlarla gösterilirler ve cebirsel olarak iki farklı tiptedirler.

I) *Nokta koordinatlarından en az biri birimseldir.*

Herhangi bir sonlu değişmeli halka için bu sayının, halkanın tüm elemanlarının ve sıfır bölenlerinin toplamına eşit olduğunu doğrulamak basittir; aslında, eğer α birimsel eleman ise, $\beta^{'} \in R$ olmak üzere $(\rho\alpha, \rho\beta)$ yı $(1, \beta^{'})$ ye indirgeyecek bir ρ her zaman seçilebilir. Ayrıca eğer sadece β birimsel eleman ise bu taktirde, $\alpha^{'} \in R\backslash R^*$ olmak üzere $(\rho\alpha, \rho\beta)$, $(\alpha^{'}, 1)$ e denktir.

II) *Nokta koordinatlarının ikisi de sıfır bölendir.*

Bu noktalar, ancak halkanın iki ya da daha fazla sayıda maksimal idealinin mevcut olması halinde söz konusudur (yani halkanın lokal halka olmaması hali).

α, β R nin sıfır bölenleri olmak üzere, $(\rho\alpha, \rho\beta)$ nın $PR(1)$ projektif doğrusu üzerinde bir nokta olması için (4.3) eşitliğinden

$$\alpha\zeta - \gamma\beta \in R^* \tag{4.7}$$

elde edilir.

Eğer R tek bir I maksimal idealine sahip olsa idi (4.7) sağlanmazdı. Çünkü $\alpha \in I$, $\beta \in I$ olması sırasıyla $\alpha\zeta \in I$ ve $\gamma\beta \in I$ olmasını gerektirir. Bu durumda $\alpha\zeta - \gamma\beta \in I$ olmalıdır, oysa bir uygun(proper) ideal bir birimsel elemana sahip olamaz.

Doğrunun yapısını daha ayrıntılı incelemek için, $GL(2, R)$ nin ikişer ikişer distant üç nokta ile çalışılmaktadır. Bu noktalar $U := (1, 0)$, $V := (0, 1)$, $W := (1, 1)$ dır. (4.4) ifadesinden, U ve V nin komşuluklarının sırasıyla ikinci ve birinci koordinatlarının sıfır bölen olduğu sonucu ortaya çıkar. Üstelik bu iki komşuluğun kesişiminde sadece II.tip noktaların bulunduğu görülebilir. İkişer ikişer distant üç noktanın komşulukları arasında boş kümeden farklı bir kesişim elde edilebilmesi için, halkanın sıfır bölenleri farklı en az üç maksimal ideal oluşturmalıdır. Ayrıca α, β nın her ikisi de R nin sıfır böleni olmak üzere $(\rho\alpha, \rho\beta)$ noktasının W nın komşuluğunda olması için, $\beta - \alpha \in R \backslash R^*$ olmalıdır.

4.1 $GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$ Halkası ve Kanonik Homomorfizmleri

$R_\Diamond \equiv GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$ bölüm halkası göz önüne alınmaktadır (Saniga and Planat, 2006). $R_\Diamond$ nin elemanları şöyle belirlenir:

$$\begin{aligned} R_\Diamond &\equiv \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \langle x^3 - x\rangle \mid a_0, a_1, a_2 \in GF(2)\} \\ &= \{\langle x^3 - x\rangle, 1 + \langle x^3 - x\rangle, x + \langle x^3 - x\rangle, x + 1 + \langle x^3 - x\rangle, \\ &\qquad x^2 + \langle x^3 - x\rangle, x^2 + 1 + \langle x^3 - x\rangle, x^2 + x + \langle x^3 - x\rangle, x^2 + x + 1 + \langle x^3 - x\rangle\} \end{aligned}$$

ve burada

$$\begin{aligned} f :\ R_\Diamond &\to GF(2)[x] \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \langle x^3 - x\rangle &\longmapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 \end{aligned}$$

bir izomorfizm olduğundan

$$R_\Diamond \equiv \{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1 = (x + 1)^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$$

elde edilir. $R_\Diamond$ halkasının eleman sayısı $|R_\Diamond| = 8$ dir ve karakteristiği $GF(2)$ halkasında olduğu gibi 2 dir.

$GF(2)$ de $2 \equiv 0$, $+1 \equiv -1$ ve $x^3 - x = 0$ polinomundan $x^3 \equiv x$ olduğundan dolayı Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 de sırasıyla toplama ve çarpma işlemi tabloları verilmiştir:

$\oplus$	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2	x^2+x+1	x^2+x
x	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2+x+1	x^2	x^2+1
x^2	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	1	x	$x+1$
$x+1$	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+x	x^2+1	x^2
x^2+1	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	0	$x+1$	x
x^2+x	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	$x+1$	0	1
x^2+x+1	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	x	1	0

Tablo 4.1 : $R_\Diamond$ *de Toplama İşlemi Tablosu*

$\otimes$	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	0	x	x^2	x	x^2+x	0	x^2+x	x^2
x^2	0	x^2	x	x^2	x^2+x	0	x^2+x	x
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+x	x^2+1	x^2+1	0	$x+1$
x^2+1	0	x^2+1	0	0	x^2+1	x^2+1	0	x^2+1
x^2+x	0	x^2+x	x^2+x	x^2+x	0	0	0	x^2+x
x^2+x+1	0	x^2+x+1	x^2	x	$x+1$	x^2+1	x^2+x	1

Tablo 4.2 : $R_\Diamond$ *de Çarpma İşlemi Tablosu*

Tablolardan aşağıdakiler görülür:

$R_\Diamond$ nin birimsel elemanlarının kümesi $R_\Diamond^* = \{1, x^2+x+1\}$ olup $|R_\Diamond^*| = 2$ dir.

$R_\Diamond$ nin $R_\Diamond^*$ dışındaki diğer elemanları ise sıfır bölendir:

$R_\Diamond \setminus R_\Diamond^* = \{0, x, x+1, x^2, x^2+1 = (x+1)^2, x^2+x\}$ olup $|R_\Diamond \backslash R_\Diamond^*| = |R_\Diamond| - |R_\Diamond^*| = 6$ dır.

$R_\Diamond$ nin temel idealleri,

$\langle 0\rangle = \{0\}, \langle 1\rangle = \langle x^2+x+1\rangle = R_\Diamond, \langle x\rangle = \langle x^2\rangle = \{0, x, x^2, x^2+x\}$,

$\langle x+1\rangle = \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\}, \langle x^2+1\rangle = \{0, x^2+1\}$,

$\langle x^2+x\rangle = \{0, x^2+x\}$

dir. $\langle 1\rangle = \langle x^2+x+1\rangle$ dışındaki tüm temel idealler özideal olduğundan $R_\Diamond$ nin iki temel ve aynı zamanda maksimal ideali ;

$I_{\langle x\rangle} \equiv I_{\langle x^2\rangle} = \langle x\rangle = \langle x^2\rangle = \{0, x, x^2, x^2+x\}$

$I_{\langle x+1\rangle} \equiv \langle x+1\rangle = \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\}$

dir ve bunlardan başka maksimal ideal olmadığından Jacobson radikali

$J_\Diamond = \langle x\rangle \cap \langle x+1\rangle = \{0, x^2+x\}$

dir ve bu da bir idealdir. $J_\Diamond$ nin bir ideal olduğu şöyle gösterilir:

$0 \in J_\Diamond$ ve $0 \in R_\Diamond$ için $0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $1 \in R_\Diamond$ için $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $x \in R_\Diamond$ için $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $x+1 \in R_\Diamond$ için $0 \cdot (x+1) = (x+1) \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $x^2 \in R_\Diamond$ için $0 \cdot x^2 = x^2 \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $x^2+1 \in R_\Diamond$ için $0 \cdot (x^2+1) = (x^2+1) \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $x^2+x \in R_\Diamond$ için $0 \cdot (x^2+x) = (x^2+x) \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$0 \in J_\Diamond$ ve $x^2+x+1 \in R_\Diamond$ için $0 \cdot (x^2+x+1) = (x^2+x+1) \cdot 0 = 0 \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $0 \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot 0 = 0 \cdot (x^2+x) = 0 \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $1 \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot 1 = 1 \cdot (x^2+x) = x^2+x \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $x \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot x = x \cdot (x^2+x) = x^2+x \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $x+1 \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot (x+1) = (x+1) \cdot (x^2+x) = x^2+x \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $x^2 \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot x^2 = x^2 \cdot (x^2+x) = 0 \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $x^2+1 \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot (x^2+1) = (x^2+1) \cdot (x^2+x) = 0 \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $x^2+x \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot (x^2+x) = (x^2+x) \cdot (x^2+x) = 0 \in J_\Diamond$

$x^2+x \in J_\Diamond$ ve $x^2+x+1 \in R_\Diamond$ için $(x^2+x) \cdot (x^2+x+1) = (x^2+x+1) \cdot (x^2+x)$
$$= x^2+x \in J_\Diamond$$

dolayısıyla $J_\Diamond$, $R_\Diamond$ nin bir idealidir

$I_{\langle x \rangle}$, $I_{\langle x+1 \rangle}$, $J_\Diamond$ ile $R_\Diamond$karakteristiği 2 olan üç temel bölüm halkası oluşturur, bunlar;

$\hat{R}_\Diamond \equiv R_\Diamond / I_{\langle x \rangle} = \{0, 1\}$, $\bar{R}_\Diamond \equiv R_\Diamond / I_{\langle x+1 \rangle} = \{0, 1\}$ ve

$\tilde{R}_\Diamond \equiv R_\Diamond / J_\Diamond = \{0, 1, x, x+1\}$

dir.

Bunlar sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$R_\Diamond / I_{\langle x \rangle} = \{a + \langle x \rangle \mid a \in GF(2)\} = \{\langle x \rangle, 1 + \langle x \rangle\}$ olduğundan,

$$\begin{array}{rccc} f: & R_\Diamond / I_{\langle x \rangle} & \rightarrow & GF(2) \\ & a + \langle x \rangle & \longmapsto & a \end{array}$$

bir izomorfizmdir. Dolayısıyla $\hat{R}_\Diamond \equiv R_\Diamond / I_{\langle x \rangle} \cong GF(2) = \{0, 1\}$ yazılabilir. Benzer olarak,

$R_\Diamond / I_{\langle x+1 \rangle} = \{a + \langle x+1 \rangle \mid a \in GF(2)\} = \{\langle x+1 \rangle, 1 + \langle x+1 \rangle\}$

dir. Buradan,

$$\begin{array}{rccc} f: & R_\Diamond / I_{\langle x+1 \rangle} & \rightarrow & GF(2) \\ & a + \langle x+1 \rangle & \longmapsto & a \end{array}$$

bir izomorfizm olduğundan $\bar{R}_\Diamond \equiv R_\Diamond / I_{\langle x+1 \rangle} \cong GF(2) = \{0, 1\}$ yazılabilir.

Benzer şekilde,

$R_\lozenge/J_\lozenge = \{ax+b+J_\lozenge \mid a,b \in GF(2)\} = \{J_\lozenge, 1+J_\lozenge, x+J_\lozenge, x+1+J_\lozenge\}$

$$\begin{array}{llll} f: & R_\lozenge/J_\lozenge & \to & GF(2)\otimes GF(2) \\ & ax+b+J_\lozenge & \longmapsto & (a,b) \end{array}$$

bir izomorfizm olduğundan $\tilde{R}_\lozenge \equiv R_\lozenge/J_\lozenge \cong GF(2)\otimes GF(2)$ dir.

Böylece $\hat{R}_\lozenge$ ve $\bar{R}_\lozenge$ halkaları $GF(2)$ ye izomorftur. $\tilde{R}_\lozenge$ nin de, $GF(2)\otimes GF(2)$ ye izomorf olduğu görüldü. Burada $GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle$ halkası gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle &= \{ax+b+\langle x^2-x\rangle \mid a,b \in GF(2)\} \\ &= \{\langle x^2-x\rangle, 1+\langle x^2-x\rangle, x+\langle x^2-x\rangle, x+1+\langle x^2-x\rangle\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{array}{llll} f: & GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle & \to & GF(2)\otimes GF(2) \\ & ax+b+\langle x^2-x\rangle & \to & (a,b) \end{array}$$

izomorfizmi tanımlanabilir. Şöyleki,

$GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle = \{0,1,x,x+1\}$ olduğundan dolayı $\tilde{R}_\lozenge$ $GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle$ ye izomorftur.

$GF(2)\otimes GF(2) = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ olduğu da göz önüne alınırsa $GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle \cong GF(2)\otimes GF(2)$ olduğu görülür.

$GF(2)[x]/\langle x^2-x\rangle$ nin toplama ve çarpma işlemlerinin $R_\lozenge$ deki ile benzer olacağı açıktır ve işlem tabloları Tablo 4.3 ile Tablo 4.4 te verilmiştir:

$\oplus$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

Tablo 4.3 : $\tilde{R}_\lozenge$ *de Toplama İşlemi Tablosu*

$\odot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	x	0
$x+1$	0	$x+1$	0	$x+1$

Tablo 4.4 : $\tilde{R}_\lozenge$ *de Çarpma İşlemi Tablosu*

$R_\lozenge$ halkası ile $\hat{R}_\lozenge$, $\bar{R}_\lozenge$, $\tilde{R}_\lozenge$ bölüm halkaları arasında aşağıdaki kanonik homomorfizmler oluşturulabilir:

$\hat{\pi}:\ R_\Diamond \to \hat{R}_\Diamond$

$\hat{\pi}:\ \{0, x, x^2, x^2+x\} \to \{0\}\ ,\ \ \{1, x+1, x^2+1, x^2+x+1\} \to \{1\}$

$\bar{\pi}:\ R_\Diamond \to \bar{R}_\Diamond$

$\bar{\pi}:\ \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\} \to \{0\}\ ,\ \ \{1, x, x^2, x^2+x+1\} \to \{1\}$

$\tilde{\pi}:\ R_\Diamond \to \tilde{R}_\Diamond$

$\tilde{\pi}:\ \{0, x^2+x\} \to \{0\}\ ,\ \ \{x, x^2\} \to \{x\}\ ,\ \ \{x+1, x^2+1\} \to \{x+1\}\ ,$

$\{1, x^2+x+1\} \to \{1\}.$

Bunlardan $\tilde{\pi}$ nın bir kanonik homomorfizm olduğu gösterilmektedir. Diğerleri için benzer yöntem uygulanabilir.

$\tilde{\pi}:\ R_\Diamond \to \tilde{R}_\Diamond$ dönüşümünün bir kanonik homomorfizm olabilmesi için aşağıdaki iki koşulun sağlandığı gösterilmelidir.

i) $\tilde{\pi}$ bir halka homomorfizmidir, yani her $a, b \in R_\Diamond$ için,

- $\tilde{\pi}(a \oplus b) = \tilde{\pi}(a) \oplus \tilde{\pi}(b)$ $\quad$ ($R_\Diamond$ ve $\tilde{R}_\Diamond$ de toplama işlemi aynı)
- $\tilde{\pi}(a \otimes b) = \tilde{\pi}(a) \odot \tilde{\pi}(b)$
- $\tilde{\pi}(1) = 1$

dir.

ii) $\tilde{\pi}$ nin çekirdeği $J_\Diamond$ dir.

$\tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(x^2+x) = 0$ şeklinde tanımlandığı için ve bunlardan başka sıfıra dönüşen eleman olmadığından dolayı $J_\Diamond = \{0, x^2+x\}$ in $\tilde{\pi}$ nin çekirdeği olduğu açıktır. Ayrıca her $a, b \in R_\Diamond$ için $\tilde{\pi}(a \oplus b) = \tilde{\pi}(a) \oplus \tilde{\pi}(b)$ dir, çünkü toplama işlemleri aynı tanımlanmıştır (Tablo 4.1 ve Tablo 4.3). Üstelik $\tilde{\pi}(1) = 1$ dir.

Dolayısıyla her $a, b \in R_\Diamond$ için $\tilde{\pi}(a \otimes b) = \tilde{\pi}(a) \odot \tilde{\pi}(b)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\tilde{R}_\Diamond \equiv R_\Diamond / J_\Diamond = \{0, 1, x, x+1\}$ olduğundan Tablo 4.2 ve Tablo 4.4 yardımıyla aşağıdaki eşitlikler hesaplanmıştır.

Her $a \in R_\Diamond$ için $\tilde{\pi}(a \otimes 0) = \tilde{\pi}(0) = 0$ ve $\tilde{\pi}(a) \odot \tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(a) \odot 0 = 0$ dır.

Her $a \in R_\Diamond$ için $\tilde{\pi}(a \otimes 1) = \tilde{\pi}(a)$ ve $\tilde{\pi}(a) \odot \tilde{\pi}(1) = \tilde{\pi}(a) \odot 1 = \tilde{\pi}(a)$ dır.

$R_\Diamond$ ve $\tilde{R}_\Diamond$ da, sırasıyla $\otimes$ ve $\odot$ işlemlerinin değişme özelliği olduğundan aşağıdaki hesaplamaları yapmak yeterlidir.

$\tilde{\pi}(x \otimes x) = \tilde{\pi}(x^2) = x$ ve $\tilde{\pi}(x) \odot \tilde{\pi}(x) = x \odot x = x$

$\tilde{\pi}(x \otimes (x+1)) = \tilde{\pi}(x^2 + x) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x) \odot \tilde{\pi}(x+1) = x \odot x + 1 = 0$

$\tilde{\pi}(x \otimes x^2) = \tilde{\pi}(x) = x$ ve $\tilde{\pi}(x) \odot \tilde{\pi}(x^2) = x \odot x = x$

$\tilde{\pi}(x \otimes (x^2+1)) = \tilde{\pi}(0) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x) \odot \tilde{\pi}(x^2+1) = x \odot (x+1) = 0$

$\tilde{\pi}(x \otimes (x^2+x)) = \tilde{\pi}(x^2+x) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x) \odot \tilde{\pi}(x^2+x) = x \odot 0 = 0$

$\tilde{\pi}(x \otimes (x^2+x+1)) = \tilde{\pi}(x^2) = x$ ve $\tilde{\pi}(x) \odot \tilde{\pi}(x^2+x+1) = x \odot 1 = x$

$\tilde{\pi}(x^2 \otimes x^2) = \tilde{\pi}(x^2) = x$ ve $\tilde{\pi}(x^2) \odot \tilde{\pi}(x^2) = x \odot x = x$

$\tilde{\pi}(x^2 \otimes (x+1)) = \tilde{\pi}(x^2+x) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x^2) \odot \tilde{\pi}(x+1) = x \odot (x+1) = 0$

$\tilde{\pi}(x^2 \otimes (x^2+1)) = \tilde{\pi}(0) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x^2) \odot \tilde{\pi}(x^2+1) = x \odot (x+1) = 0$

$\tilde{\pi}(x^2 \otimes (x^2+x)) = \tilde{\pi}(x^2+x) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x^2) \odot \tilde{\pi}(x^2+x) = x \odot 0 = 0$

$\tilde{\pi}(x^2 \otimes (x^2+x+1)) = \tilde{\pi}(x) = x$ ve $\tilde{\pi}(x^2) \odot \tilde{\pi}(x^2+x+1) = x \odot 1 = x$

$\tilde{\pi}((x+1) \otimes (x+1)) = \tilde{\pi}(x^2+1) = x+1$ ve $\tilde{\pi}(x+1) \odot \tilde{\pi}(x+1) = (x+1) \odot (x+1) = x+1$

$\tilde{\pi}((x+1) \otimes (x^2+1)) = \tilde{\pi}(x^2+1) = x+1$ ve $\tilde{\pi}(x+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+1) = (x+1) \odot (x+1) = x+1$

$\tilde{\pi}((x+1) \otimes (x^2+x)) = \tilde{\pi}(0) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+x) = (x+1) \odot 0 = 0$

$\tilde{\pi}((x+1) \otimes (x^2+x+1)) = \tilde{\pi}(x+1) = x+1$ ve $\tilde{\pi}(x+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+x+1) = (x+1) \odot 1 = x+1$

$\tilde{\pi}((x^2+1) \otimes (x^2+1)) = \tilde{\pi}(x^2+1) = x+1$ ve $\tilde{\pi}(x^2+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+1) = (x+1) \odot (x+1) = x+1$

$\tilde{\pi}((x^2+1) \otimes (x^2+x)) = \tilde{\pi}(0) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x^2+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+x) = (x+1) \odot 0 = 0$

$\tilde{\pi}((x^2+1) \otimes (x^2+x+1)) = \tilde{\pi}(x^2+1) = x+1$ ve $\tilde{\pi}(x^2+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+x+1) = (x+1) \odot 1 = x+1$

$\tilde{\pi}((x^2+x) \otimes (x^2+x)) = \tilde{\pi}(0) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x^2+x) \odot \tilde{\pi}(x^2+x) = 0 \odot 0 = 0$

$\tilde{\pi}((x^2+x) \otimes (x^2+x+1)) = \tilde{\pi}(x^2+x) = 0$ ve $\tilde{\pi}(x^2+x) \odot \tilde{\pi}(x^2+x+1) = 0 \odot 1 = 0$

$\tilde{\pi}((x^2+x+1) \otimes (x^2+x+1)) = \tilde{\pi}(1) = 1$ ve $\tilde{\pi}(x^2+x+1) \odot \tilde{\pi}(x^2+x+1) = 1 \odot 1 = 1$

4.2 $GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$ Üzerinde Projektif Doğru ve İndirgenmiş Halka Homomorfizmiyle İlgisi

$R_\Diamond$ halkası üzerinde inşa edilen $PR_\Diamond(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar ikili koordinatlarla gösterilir ve cebirsel olarak iki farklı tiptedirler:

I) Nokta koordinatlarından en az biri birimseldir.

II) Nokta koordinatlarının ikisi de farklı maksimal idealde bulunan sıfır bölenlerdir.

(I) tipindeki noktaların kümesini N_b gösterirsek;

$|R_\Diamond| = 8$, $|R_\Diamond^*| = 2$, $|R_\Diamond \backslash R_\Diamond^*| = 6$ olmak üzere N_b deki nokta sayısı:

$$|N_b| = \frac{|R_\Diamond|^2 - |R_\Diamond \backslash R_\Diamond^*|^2}{|R_\Diamond^*|} = |R_\Diamond| + |R_\Diamond \backslash R_\Diamond^*| = 8 + 6 = 14 \tag{4.8}$$

tür. Yukarıdaki eşitliği şöyle de ifade edebiliriz. Noktalar ikili koordinatlarla gösterildiğinden $|R_\Diamond|^2$ farklı nokta vardır. $|R_\Diamond|^2$ den koordinatlarının ikisi de sıfır bölen olan noktaları çıkarıp birimsellerin sayısına böldüğümüzde $|N_b| = 14$ bulunmuş olur.

N_b noktalar kümesine ait tüm noktalar aşağıdaki gibidir:

Burada $R_\Diamond$ nin birimsel elemanlarının oluşturduğu kümenin $R_\Diamond^* = \{1, x^2+x+1\}$ olduğu hatırlanır ve $\rho \in R_\Diamond^*$ için $(\rho a, \rho b)$ ile (a, b) nin aynı sınıfa ait olduğu düşünülürse, örneğin $(1, 0)$ ve $(x^2+x+1, 0)$ noktalarının aynı sınıfta oldukları görülür. Dolayısıyla ikisi de aynı bir noktayı temsil eder. Buna göre aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{array}{lcl}
(1,0) \sim (x^2+x+1,0) & , & (1,x) \sim (x^2+x+1,x^2) \\
(1,x^2) \sim (x^2+x+1,x) & , & (1,x+1) \sim (x^2+x+1,x+1) \\
(1,x^2+1) \sim (x^2+x+1,x^2+1) & , & (1,x^2+x) \sim (x^2+x+1,x^2+x) \\
(1,1) \sim (x^2+x+1,x^2+x+1) & , & (0,1) \sim (0,x^2+x+1) \\
(x,1) \sim (x^2,x^2+x+1) & , & (x^2,1) \sim (x,x^2+x+1) \\
(x+1,1) \sim (x+1,x^2+x+1) & , & (x^2+1,1) \sim (x^2+1,x^2+x+1) \\
(x^2+x,1) \sim (x^2+x,x^2+x+1) & , & (1,x^2+x+1) \sim (x^2+x+1,1)
\end{array} \tag{4.9}$$

(II) tipindeki noktaların kümesi N_s olsun. Koordinatlarının ikisinin de aynı ideale ait sıfır bölenler olması halindeki farklı çiftlerin kümesi C_s ile gösterilsin. Buna göre

$$\begin{aligned} C_s = \{&(0,0),(0,x),(0,x+1),(0,x^2),(0,x^2+1),(0,x^2+x),(x,0),(x,x),(x,x^2),\\ &(x,x^2+x),(x+1,0),(x+1,x+1),(x+1,x^2+1),(x+1,x^2+x),(x^2,0),\\ &(x^2,x),(x^2,x^2),(x^2,x^2+x),(x^2+1,0),(x^2+1,x+1),(x^2+1,x^2+1),\\ &(x^2+1,x^2+x),(x^2+x,0),(x^2+x,x),(x^2+x,x+1),(x^2+x,x^2),\\ &(x^2+x,x^2+1),(x^2+x,x^2+x)\} \end{aligned}$$

dir ve $|C_s| = 2 \cdot 4^2 - 2^2$ dir. Çünkü bir idealdeki 4 eleman 4^2 farklı nokta oluşturur ve iki ayrı ideal olduğundan $2 \cdot 4^2$ dir ama iki ayrı idealde 2 eleman aynı olduğundan 2^2 çıkartılır. Burada N_s deki nokta sayısı,

$$|N_s| = \frac{|R_\Diamond \backslash R_\Diamond^*|^2 - |C_s|}{|R_\Diamond^*|} = \frac{6^2 - (2 \cdot 4^2\text{-}2^2)}{2} = 4 \tag{4.10}$$

olarak bulunur. N_s noktalar kümesine ait tüm noktalar aşağıdaki gibi belirlenebilir:

Sıfır bölenlerin kümesi

$R_\Diamond \setminus R_\Diamond^* \equiv \{0, x, x+1, x^2, x^2+1 = (x+1)^2, x^2+x\}$,

ve idealler ise

$I_{\langle x \rangle} \equiv \langle x \rangle = \{0, x, x^2, x^2+x\}$, $I_{\langle x+1 \rangle} \equiv \langle x+1 \rangle = \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\}$

ve $J_\Diamond = \{0, x^2+x\}$ idi. N_b noktalar kümesinde olduğu gibi yine,

$\rho \in \{1, x^2+x+1\}$ birimsel elemanları için $(\rho a, \rho b)$ ve (a,b) nin aynı sınıfa ait olduğu gözönüne alınırsa, örneğin $(x, x+1)$ ile $(x^2, x+1)$ ikililerinin aynı sınıfta olduğu ve böylece aynı noktayı temsil ettiği görülebilir. Dolayısıyla aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned} (x, x+1) \sim (x^2, x+1) \quad &, \quad (x, x^2+1) \sim (x^2, x^2+1) \\ (x+1, x) \sim (x+1, x^2) \quad &, \quad (x^2+1, x) \sim (x^2+1, x^2) \end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.9) ve (4.11) eşitliklerinden, $PR_\Diamond(1)$ projektif doğrusu üzerinde toplam $|N_b| + |N_s| = 14 + 4 = 18$ nokta olduğu görülür.

$PR_\Diamond(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar arasında da yine önemli olan iki tür bağıntı komşuluk ve distantlık bağıntısıdır.

$PR_{\Diamond}(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar için önem arz eden komşuluk kümesinin kardinalite ve kesişim özellikleri belirlenebilir. Bunun için doğru üzerindeki ikişer ikişer distant ve farklı olan $U:(1,0), V:(0,1), W:(1,1)$ noktaları alınarak bunların yukarıda bulunan 18 noktadan hangileriyle komşu, hangileriyle distant olduğu bulunabilir. Burada $U=(1,0)$ noktası için durum ayrıntılı olarak hesaplanmıştır:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix} = x^2 \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = x+1 \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x^2+1 \end{pmatrix} = x^2+1 \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x^2+x \end{pmatrix} = x^2+x \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2+1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2+x & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & x^2+x+1 \end{pmatrix} = x^2+x+1 \in R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & x+1 \end{pmatrix} = x+1 \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*} \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & x^2+1 \end{pmatrix} = x^2+1 \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+1 & x \end{pmatrix} = x \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*} \qquad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^2+1 & x \end{pmatrix} = x \in R_{\Diamond}\backslash R_{\Diamond}^{*}$$

olduğundan U ya komşu olan noktalar;

$$U = \begin{cases} U_1 = (1,x) & , U_2 = (1,x^2) & , U_3 = (1,x+1) \\ U_4 = (1,x^2+1) & , U_0 = (1,x^2+x) & , U_5 = (x,x+1) \\ U_6 = (x,x^2+1) & , U_7 = (x+1,x) & , U_8 = (x^2+1,x) \end{cases} \tag{4.12}$$

U ya distant olan noktalar;

$(1,1), (0,1), (x,1), (x^2,1), (x+1,1), (x^2+1,1), (x^2+x,1), (x^2+x+1,1)$

dir.

Benzer şekilde $V = (0,1)$ e komşu ve distant olan noktalar sırasıyla şunlardır:

V ye komşu olan noktalar;

$$V = \begin{cases} V_1 = (x,1) & , V_2 = (x^2,1) & , V_3 = (x+1,1) \\ V_4 = (x^2+1,1) & , V_0 = (x^2+x,1) & , V_5 = (x,x+1) \\ V_6 = (x,x^2+1) & , V_7 = (x+1,x) & , V_8 = (x^2+1,x) \end{cases} \tag{4.13}$$

ve V ye distant olan noktalar;

$(1,0), (1,x), (1,x^2), (1,x+1), (1,x^2+1), (1,x^2+x), (1,1), (1,x^2+x+1)$

dir.

Benzer şekilde $W = (1,1)$ e komşu ve distant olan noktalar sırasıyla şunlardır:

W ya komşu olan noktalar;

$$W = \begin{cases} W_1 = (1,x) & , W_2 = (1,x^2) & , W_3 = (1,x+1) \\ W_4 = (1,x^2+1) & , W_0 = (1,x^2+x+1) & , W_5 = (x,1) \\ W_6 = (x^2,1) & , W_7 = (x+1,1) & , W_8 = (x^2+1,1) \end{cases} \tag{4.14}$$

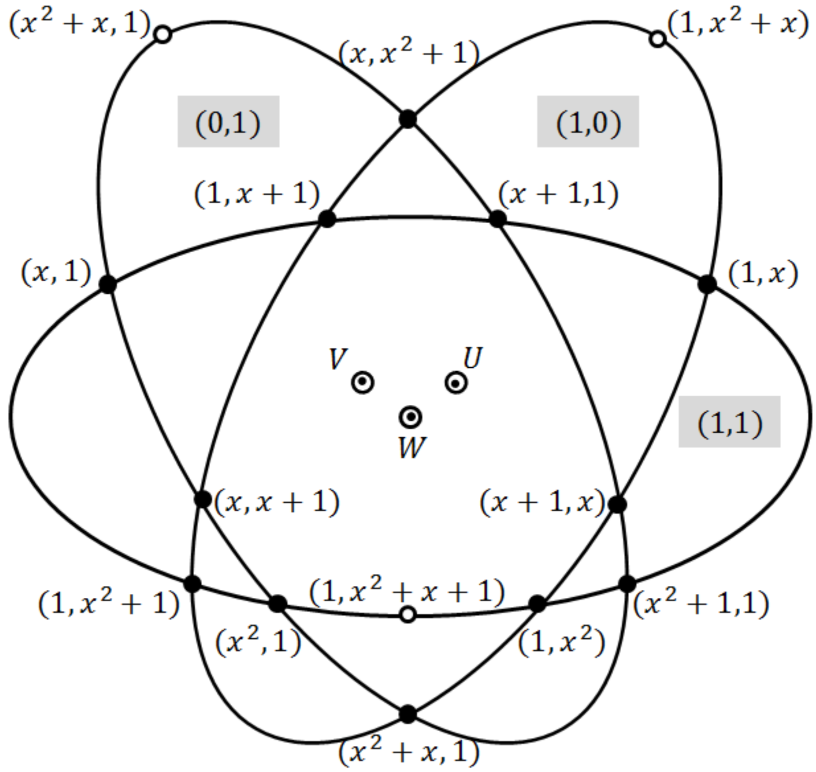
olmak üzere W ya distant olan noktalar;

$(1,0), (1,x^2+x), (0,1), (x^2+x,1), (x,x+1), (x,x^2+1), (x+1,x), (x^2+1,x)$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadelerden görülüyor ki komşuluk bağıntısı refleksiftir, simetriktir ancak geçişken değildir. Örneğin $U_1 = (1,x)$ noktası refleksiftir(her nokta kendisine komşudur), $U_1 = (1, x)$, $U_2 = (1, x^2)$ ile komşu iken $U_2 = (1, x^2)$ de $U_1 = (1, x)$ ile komşu olduğundan simetriktir ancak $U_1 = (1, x)$, $U_2 = (1, x^2)$ ile komşu ve $U_2 = (1, x^2)$ ile $W_6 = (x^2, 1)$ komşu iken $U_1 = (1, x)$ ile $W_6 = (x^2, 1)$ komşu değildir.

Ayrıca burada U_0, V_0, W_0 noktalarının diğer noktalara göre bir özelliği vardır. Bu noktalar sadece ilgili noktanın sırasıyla U, V, W komşuluğu içindedir. Bu noktalara da özel olarak Jacobson noktası denilebilir.

Bulunan komşuluklarda kolayca görülebilir ki $U_i \equiv W_i \quad i = 1, 2, 3, 4$, $U_j \equiv V_j \quad j = 5, 6, 7, 8$ ve $V_k \equiv W_{k+4} \quad k = 1, 2, 3, 4$ tür. Bu doğru üzerindeki koordinat sistemi her zaman, ikişer ikişer distant üç noktanın koordinatları U, V, W nun koordinatlarına özdeş olacak şekilde seçilebilir. Bu nedenle (4.12), (4.13) ve (4.14) ifadelerinden, doğru üzerindeki herhangi bir noktanın komşuluğunda dokuz farklı noktanın olduğu söylenebilir. Distant herhangi iki noktanın komşuluklarında dört ortak nokta vardır. İkişer ikişer distant herhangi üç noktanın komşuluklarında ortak eleman yoktur.(Şekil 4.1)



Şekil 4.1 : $PR_{\Diamond}(1)$ *projektif doğrusunun şekli üzerindeki noktalar ile çizilmiştir. İkişer ikişer distant üç nokta içi noktalı olan üç küçük yuvarlak ile gösterilmiş , komşuluklarını belirten noktaların oluşturduğu elipslerin merkezine yerleştirilmiş. Herhangi iki komşuluktaki dört nokta ortaktır , ancak üç komşuluğun bir kesişim noktası yoktur. Toplam on iki nokta vardır ve içi boş olan noktalar* $R_{\Diamond}$ *halkasındaki aşikar olmayan Jacobson noktalarıdır.*

Komşuluğun yapısını ve özelliklerini daha yakından incelemek için daha önce bulunan üç kanonik homomorfizm göz önüne alınmaktadır:

$\hat{\pi}: \ R_{\Diamond} \rightarrow \hat{R}_{\Diamond}$

$\hat{\pi}: \ \{0, x, x^2, x^2+x\} \rightarrow \{0\} \ , \ \ \{1, x+1, x^2+1, x^2+x+1\} \rightarrow \{1\}$

$\bar{\pi}: \ R_{\Diamond} \rightarrow \bar{R}_{\Diamond}$

$\bar{\pi}: \ \{0, x+1, x^2+1, x^2+x\} \rightarrow \{0\} \ , \ \ \{1, x, x^2, x^2+x+1\} \rightarrow \{1\}$

$\tilde{\pi}: \ R_\Diamond \to \tilde{R}_\Diamond$

$\tilde{\pi}: \ \{0, x^2+x\} \to \{0\} \ , \ \{x, x^2\} \to \{x\} \ , \ \{x+1, x^2+1\} \to \{x+1\} \ ,$

$\{1, x^2+x+1\} \to \{1\}$

$PG(1,2)$ 2.mertebeden projektif doğruyu göstermek üzere, $\hat{\pi}$ ve $\bar{\pi}$, $PR_\Diamond(1)$ den $PG(1,2)$ ye homomorfizmdirler. $\tilde{\pi}$ ise $PR_\Diamond(1) \to P\tilde{R}_\Diamond(1)$ e bir homomorfizmdir. $PG(1,2)$ doğrusu $U = (1,0)$, $V = (0,1)$, $W = (1,1)$ noktalarını kapsadığından, $\hat{\pi} : PR_\Diamond(1) \to P\hat{R}_\Diamond(1)$ homomorfizminin komşuluk üzerindeki etkisi belirlenebilir ve genelliği bozmaksızın U nun komşuluğu alınabilir. Böylece,

$$\begin{array}{lll} U_1 = (1,x) \to (1,0) & , \ U_2 = (1,x^2) \to (1,0) & , \ U_3 = (1,x+1) \to (1,1) \\ U_4 = (1,x^2+1) \to (1,1) & , \ U_0 = (1,x^2+x) \to (1,0) & , \ U_5 = (x,x+1) \to (0,1) \\ U_6 = (x,x^2+1) \to (0,1) & , \ U_7 = (x+1,x) \to (1,0) & , \ U_8 = (x^2+1,x) \to (1,0) \end{array}$$

$$U = (1,0) \to (1,0) = \hat{U} \ , \ V = (0,1) \to (0,1) = \hat{V} \ , \ W = (1,1) \to (1,1) = \hat{W}$$

olur.Yukarıda bulunan ifadelerden,

$$U_1, U_2, U_7, U_8, U_0 \to \hat{U} \quad , \quad U_5, U_6 \to \hat{V} \quad , \quad U_3, U_4 \to \hat{W}$$

elde edilir. Benzer durum $\bar{\pi} : PR_\Diamond(1) \to P\bar{R}_\Diamond(1)$ homomorfizmi için söz konusudur. Şöyle ki,

$$\begin{array}{lll} U_1 = (1,x) \to (1,1) & , \ U_2 = (1,x^2) \to (1,1) & , \ U_3 = (1,x+1) \to (1,0) \\ U_4 = (1,x^2+1) \to (1,0) & , \ U_0 = (1,x^2+x) \to (1,0) & , \ U_5 = (x,x+1) \to (1,0) \\ U_6 = (x,x^2+1) \to (1,0) & , \ U_7 = (x+1,x) \to (0,1) & , \ U_8 = (x^2+1,x) \to (0,1) \end{array}$$

$$U = (1,0) \to (1,0) = \bar{U} \ , \ V = (0,1) \to (0,1) = \bar{V} \ , \ W = (1,1) \to (1,1) = \bar{W}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan ifadelerden,

$$U_3, U_4, U_5, U_6, U_0 \to \bar{U} \quad , \quad U_7, U_8 \to \bar{V} \quad , \quad U_1, U_2 \to \bar{W}$$

elde edilir. Biraz karmaşık olan üçüncü homomorfizm $\tilde{\pi} : PR_\Diamond(1) \to P\tilde{R}_\Diamond(1)$ için öncelikle $P\tilde{R}_\Diamond(1)$ doğrusunun yapısı incelenmelidir. $\tilde{R}_\Diamond$ in elemanları ve işlem tablosu daha önce bulunmuştu(Tablo 4.3, Tablo 4.4). Buradan $P\tilde{R}_\Diamond(1)$ in noktaları $PR_\Diamond(1)$ deki gibi belirlenebilir:

Yedi nokta **I**. tip $\{(1,0), (1,x), (1,x+1), (1,1), (0,1), (x,1), (x+1,1)\}$

İki nokta **II**. tip $\{(x,x+1), (x+1,x)\}$ olmak üzere toplam dokuz nokta vardır.

Şimdi $\tilde{U} = (1,0)$ noktasının komşuluk ve distantlığına bakılırsa,

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x \in R_\diamond \backslash R_\diamond^* \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = x+1 \in R_\diamond \backslash R_\diamond^*$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_\diamond^* \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R_\diamond^*$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & x+1 \end{pmatrix} = x+1 \in R_\diamond \backslash R_\diamond^* \quad , \quad det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+1 & x \end{pmatrix} = x \in R_\diamond \backslash R_\diamond^*$$

Benzer şekilde $\tilde{V} = (0,1)$, $\tilde{W} = (1,1)$ noktalarının komşulukları bulunursa ;

$$\begin{array}{llllllll} \tilde{U}: & \tilde{U}_1 = (1,x) & , & \tilde{U}_2 = (1,x+1) & , & \tilde{U}_3 = (x,x+1) & , & \tilde{U}_4 = (x+1,x) \\ \tilde{V}: & \tilde{V}_1 = (x,1) & , & \tilde{V}_2 = (x+1,1) & , & \tilde{V}_3 = (x,x+1) & , & \tilde{V}_4 = (x+1,x) \\ \tilde{W}: & \tilde{W}_1 = (1,x) & , & \tilde{W}_2 = (1,x+1) & , & \tilde{W}_3 = (x,1) & , & \tilde{W}_4 = (x+1,1) \end{array}$$

olur.

Bu ifadelerden, ikişer ikişer distant herhangi üç noktanın koordinatları $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$ ya tekrar özdeş yapılabileceğinden dolayı, doğru üzerindeki herhangi bir noktanın komşuluğu dört farklı nokta içerir ve herhangi iki distant noktanın komşuluklarında iki ortak nokta vardır. Ayrıca ikişer ikişer distant üç noktanın komşuluklarının bir ortak noktası yoktur. Tek bir komşuluğa ait olan bir nokta bulunmadığından dolayı Jacobson radikal aşikardır ve $\tilde{J}_\Diamond = \{0\}$ dır.

$PR_\Diamond(1) \to P\tilde{R}_\Diamond(1)$ ifadesi $\tilde{\pi}$ kullanılarak açıkça yazılırsa:

$$
\begin{array}{llll}
U_1 = (1,x) = W_1 \to (1,x) & , & U_2 = (1,x^2) = W_2 \to (1,x) \\
U_3 = (1,x+1) = W_3 \to (1,x+1) & , & U_4 = (1,x^2+1) = W_4 \to (1,x+1) \\
U_5 = (x,x+1) = V_5 \to (x,x+1) & , & U_6 = (x,x^2+1) = V_6 \to (x,x+1) \\
U_7 = (x+1,x) = V_7 \to (x+1,x) & , & U_8 = (x^2+1,x) = V_8 \to (x+1,x) \\
V_1 = (x,1) = W_5 \to (x,1) & , & V_2 = (x^2,1) = W_6 \to (x,1) \\
V_3 = (x+1,1) = W_7 \to (x+1,1) & , & V_4 = (x^2+1,1) = W_8 \to (x+1,1) \\
U_0 = (1,x^2+x) \to (1,0) & , & V_0 = (x^2+x,1) \to (0,1) \\
W_0 = (1,x^2+x+1) \to (1,1) & &
\end{array}
$$

elde edilir. Diğer taraftan ikişer ikişer distant U, V, W noktaları için,

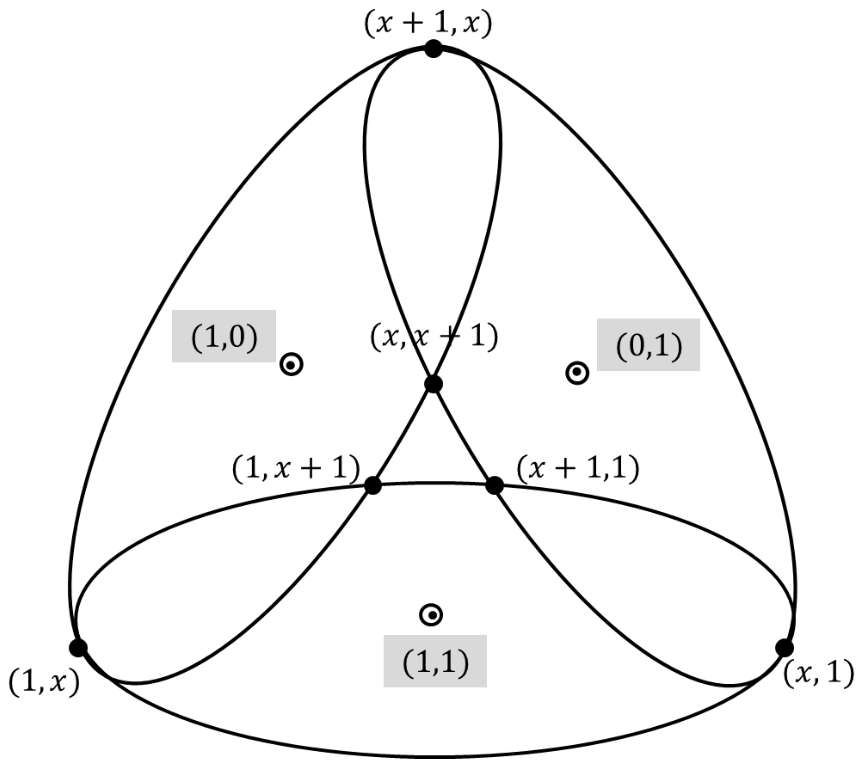
$$
U : (1,0) \to (1,0) = \tilde{U} \;\; , \;\; V : (0,1) \to (0,1) = \tilde{V} \;\; , \;\; W : (1,1) \to (1,1) = \tilde{W}
$$

bulunur. Yukarıdaki görüntü noktalarının $P\tilde{R}_{\Diamond}(1)$ deki karşılıkları yazılırsa

$$
\begin{array}{llll}
U_1 = W_1, U_2 = W_2 \;\to\; \tilde{U}_1 = \tilde{W}_1 & , & U_3 = W_3, U_4 = W_4 \;\to\; \tilde{U}_2 = \tilde{W}_2 \\
U_5 = V_5, U_6 = W_6 \;\to\; \tilde{U}_3 = \tilde{V}_3 & , & U_7 = V_7, U_8 = V_8 \;\to\; \tilde{U}_4 = \tilde{V}_4 \\
V_1 = W_5, V_2 = W_6 \;\to\; \tilde{V}_1 = \tilde{W}_3 & , & V_3 = W_7, V_4 = W_8 \;\to\; \tilde{V}_2 = \tilde{W}_4
\end{array}
$$

$$
U, U_0 \to \tilde{U} \;\; , \;\; V, V_0 \to \tilde{V} \;\; , \;\; W, W_0 \to \tilde{W}
$$

olur.



Şekil 4.2 : $P\tilde{R}_{\Diamond}(1)$ *projektif doğrusu üzerindeki noktalar ile birlikte çizilmiştir. İkişer ikişer distant üç nokta* $\odot$ *(içi noktalı olan üç küçük yuvarlak) ile gösterilmiş ve doğrunun diğer noktaları bu üç noktanın komşulukları içindedir. Bu üç noktadan herbiri ilgili komşuluğu belirten noktaların oluşturduğu elipsin merkezine yerleştirilmiştir.*

BÖLÜM 5

SONLU $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$ HALKASI ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU

5.1 $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$ Halkası ve Kanonik Homomorfizmleri

$R_\triangle \equiv GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$ direkt çarpım halkası incelenecektir (Saniga and Planat, 2008). Öncelikle halkanın elemanları verilmiştir:

$R_\triangle = \{[0,0,0] \equiv a, [1,0,0] \equiv b, [0,1,0] \equiv c, [0,0,1] \equiv d,$
$[1,1,0] \equiv e, [1,0,1] \equiv f, [0,1,1] \equiv g, [1,1,1] \equiv h\}$

Dolayısıyla $R_\triangle$ halkasının eleman sayısı $|R_\triangle|$=8 dir ve $R_\triangle$ nin karakteristiği 2 dir.

$R_\triangle$ nin toplam ve çarpım tabloları Tablo 5.1 de verilmiştir:

$\oplus$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	a	e	f	c	d	h	g
c	c	e	a	g	b	h	d	f
d	d	f	g	a	h	b	c	e
e	e	c	b	h	a	g	f	d
f	f	d	h	b	g	a	e	c
g	g	h	d	c	f	e	a	b
h	h	g	f	e	d	c	b	a

$\otimes$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b	b	a	b
c	a	a	c	a	c	a	c	c
d	a	a	a	d	a	d	d	d
e	a	b	c	a	e	b	c	e
f	a	b	a	d	b	f	d	f
g	a	a	c	d	c	d	g	g
h	a	b	c	d	e	f	g	h

Tablo 5.1 : $R_\triangle$ *de Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

Tablolardan görüldüğü üzere $R_\triangle$ halkasının toplama $\oplus$ işlemine göre etkisiz elemanı $a \equiv \mathbf{0}$ ve çarpma $\otimes$ işlemine göre $h \equiv \mathbf{1}$ dir.

$R_\triangle$ nin bir tane birimsel elemanı vardır:

$R_\triangle^* = \{h = b + c + d\}$

$R_\triangle$ nin $R_\triangle^*$ dışındaki diğer elemanları ise sıfır bölendir:

$R_\triangle \backslash R_\triangle^* = \{a, b, c, d, e = b + c, f = b + d, g = c + d\}$

Halkanın temel idealleri şunlardır:

$\langle a \rangle = \{a\}$, $\langle h \rangle = R_\triangle$

$\delta_e \equiv \langle e \rangle = \{a, b, c, e\}$

$\delta_f \equiv \langle f \rangle = \{a, b, d, f\}$

$\delta_g \equiv \langle g \rangle = \{a, c, d, g\}$

$\delta_b \equiv \langle b \rangle = \{a, b\} = \delta_e \cap \delta_f,$

$\delta_c \equiv \langle c \rangle = \{a, c\} = \delta_e \cap \delta_g,$

$\delta_d \equiv \langle d \rangle = \{a, d\} = \delta_f \cap \delta_g$

dir. Böylece maksimal idealleri $\delta_e \equiv \langle e \rangle$, $\delta_f \equiv \langle f \rangle$, $\delta_g \equiv \langle g \rangle$ dir.

$R_\triangle/\delta_e = \{a + \langle e \rangle |\ a \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{rccc} f: & R_\triangle/\delta_e & \rightarrow & GF(2) \\ & a + \langle e \rangle & \longmapsto & a \end{array}$$

ve benzer şekilde

$R_\triangle/\delta_f = \{a + \langle f \rangle |\ a \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{rccc} f: & R_\triangle/\delta_f & \rightarrow & GF(2) \\ & a + \langle f \rangle & \longmapsto & a \end{array}$$

$R_\triangle/\delta_g = \{a + \langle g \rangle |\ a \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{rccc} f: & R_\triangle/\delta_g & \rightarrow & GF(2) \\ & a + \langle g \rangle & \longmapsto & a \end{array}$$

izomorfizmleri ve

$R_\triangle/\delta_b = \{kx + m + \langle b \rangle |\ k, m \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{rccc} f: & R_\triangle/\delta_b & \rightarrow & GF(2) \otimes GF(2) \\ & kx + m + \langle b \rangle & \longmapsto & (k, m) \end{array}$$

ve benzer şekilde

$R_\triangle/\delta_c = \{kx + m + \langle c \rangle |\ k, m \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{llll} f: & R_\triangle/\delta_c & \rightarrow & GF(2)\otimes GF(2) \\ & kx+m+\langle c\rangle & \longmapsto & (k,m) \end{array}$$

$R_\triangle/\delta_d = \{kx+m+\langle d\rangle |\ k,m \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{llll} f: & R_\triangle/\delta_d & \rightarrow & GF(2)\otimes GF(2) \\ & kx+m+\langle d\rangle & \longmapsto & (k,m) \end{array}$$

izomorfizmleri tanımlanarak

$R_\triangle/\delta_e \cong R_\triangle/\delta_f \cong R_\triangle/\delta_g \cong GF(2)$

$R_\triangle/\delta_b \cong R_\triangle/\delta_c \cong R_\triangle/\delta_d \cong GF(2)\otimes GF(2)$

karakteristiği iki olan temel bölüm halkalarını oluştururlar ve böylece

$R_\triangle \rightarrow GF(2)$

$R_\triangle \rightarrow GF(2)\otimes GF(2)$

kanonik homomorfizmleri ortaya çıkar.

Şimdi de $R_\triangle$ nin iki tür althalkası gözönüne alınarak, bunların birim elemanlarının $R_\triangle$ nin birim elemanıyla aynı olup olmadığı incelenmektedir. $R_\triangle$ nin bir alt kümesi olan $R_o \equiv \{a,b,g,h\}$ da toplama ve çarpma işlemleri $R_\triangle$ halkasındaki işlemlerle aynı tanımlanmaktadır. Dolayısıyla Tablo 5.1 gözönüne alınarak R_o nın toplama ve çarpma tablosu Tablo 5.2 de verilmiştir:

$\oplus$	a	b	g	h
a	a	b	g	h
b	b	a	h	g
g	g	h	a	b
h	h	g	b	a

$\otimes$	a	b	g	h
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
g	a	a	g	g
h	a	b	g	h

Tablo 5.2 : *R_o de Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

Burada, $a=[0,0]$, $b=[1,0]$, $g=[0,1]$, $h=[1,1]$ eşlemeleri yapılırsa

$GF(2)\otimes GF(2) = \{(x,y)|\ x,y \in GF(2)\}$

$$\begin{array}{llll} f: & R_o & \rightarrow & GF(2)\otimes GF(2) \\ & a,b,g,h & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

bir izomorfizm olduğundan $R_o \cong GF(2)\otimes GF(2)$ olduğu görülür. Böylece $h \equiv [1,1]$ nin hem $R_\triangle$ de hem de R_o da birim eleman olduğu görülür.

$R_\triangle$ nin başka bir alt kümesi olan $R_\bullet \equiv \{a, b, c, e\}$ nin toplama ve çarpım tablolarının oluşturulmasında yine Tablo 5.1 gözönüne alınırsa

$\oplus$	a	b	c	e
a	a	b	c	e
b	b	a	e	c
c	c	e	a	b
e	e	c	b	a

$\otimes$	a	b	c	e
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
e	a	b	c	e

Tablo 5.3 : $R_\bullet$ *de Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

elde edilir. Burada ise, $a = [0, 0]$, $b = [1, 0]$, $c = [0, 1]$, $e = [1, 1]$ eşlemeleri yapılırsa $R_\bullet \cong GF(2) \otimes GF(2)$ olduğu görülür. Dikkat edilirse $e \equiv [1, 1]$ R_o de birim eleman olduğu halde $R_\triangle$ de sıfır bölendi.

5.2 $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$ Halkası Üzerinde Projektif Doğru

$PR_{\triangle}(1)$ projektif doğrusunun toplam 27 noktası vardır ve bu noktalar üç farklı gruba ayrılmaktadır. Bunlar sırasıyla aşağıdaki gibidir:

1) ‘Ayırt edici noktalar (çekirdek nokta)’ üç tanedir:

$U = (1,0), V = (0,1), W = (1,1)$

dir. Bu üç nokta aynı zamanda $PR_{\triangle}(1)$ e gömülmüş ikinci mertebeden projektif doğru olan $PG(1,2)$ yi temsil eder.

2) ‘İç kabuk’ nokta, koordinatlarının biri birimsel ve diğeri sıfır bölen olan noktadır.

$$\begin{array}{llllll} I_1^S = (1,b) & I_2^S = (1,c) & I_3^S = (1,d) & I_1^F = (1,e) & I_2^F = (1,f) & I_3^F = (1,g) \\ J_1^S = (b,1) & J_2^S = (c,1) & J_3^S = (d,1) & J_1^F = (e,1) & J_2^F = (f,1) & J_3^F = (g,1) \end{array}$$

dir. Burada herbiri altı noktadan oluşan iki simetrik küme söz konusudur. Ve herbir küme içinde sıfır bölenler zayıf (slim, "S") ve kuvvetli (fat, "F") olarak sınıflandırılmış ve buna göre isimlendirmiştir.

3) ‘Dış kabuk’ nokta, koordinatları farklı maksimal idealde bulunan ikisi de sıfır bölen olan noktadır.

$$\begin{array}{llllll} S_1^+ = (e,d) & S_2^+ = (f,c) & S_3^+ = (g,b) & S_1^- = (d,e) & S_2^- = (c,f) & S_3^- = (b,g) \\ F_1^+ = (e,f) & F_2^+ = (e,g) & F_3^+ = (f,g) & F_1^- = (f,e) & F_2^- = (g,e) & F_3^- = (g,f) \end{array}$$

dir.. Bu grupta bulunan on iki noktadan bazıları biribirinin simetriğidir. Burada koordinatlar ayrıca + ve - olarak ikiye ayrılmıştır.

$det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \in R_{\triangle} \backslash R_{\triangle}^*$ den elemanları noktalar olan ve biribiriyle bağlantılı üç küme oluşturulabilir: $U = (1,0), V = (0,1), W = (1,1)$.

Şimdi doğrunun genel yapısı incelenmektedir. Önce çekirdek noktaları gözönüne alınmaktadır. Aşağıda $U = (1,0)$ noktasının komşu ve distant olduğu noktalar incelenmiştir:

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & b\end{pmatrix} = b \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & c\end{pmatrix} = c \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & d\end{pmatrix} = d \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & e\end{pmatrix} = e \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & f\end{pmatrix} = f \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & g\end{pmatrix} = g \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & d\end{pmatrix} = d \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ f & c\end{pmatrix} = c \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ g & b\end{pmatrix} = b \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ d & e\end{pmatrix} = e \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & f\end{pmatrix} = f \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & g\end{pmatrix} = g \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & f\end{pmatrix} = f \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & g\end{pmatrix} = g \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ f & g\end{pmatrix} = g \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ f & e\end{pmatrix} = e \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ g & e\end{pmatrix} = e \in R_\triangle \backslash R_\triangle^* \qquad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ g & f\end{pmatrix} = f \in R_\triangle \backslash R_\triangle^*$$

olduğundan $U = (1,0)$ a komşu olan noktalar $I_i^S, I_i^F, S_i^+, S_i^-, F_i^+, F_i^-$ $(i = 1,2,3)$ ve

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_\triangle \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_\triangle$$

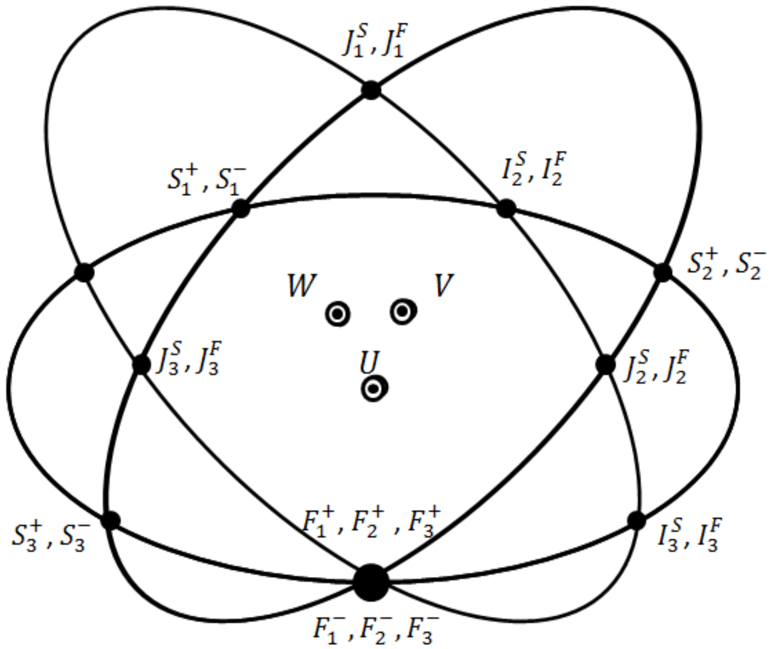
$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_\triangle \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_\triangle$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_\triangle \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_\triangle$$

olduğundan $U = (1, 0)$ a distant olan noktalar ise J_i^S, J_i^F $(i = 1, 2, 3)$ tür. Benzer şekilde $V = (0, 1)$ ve $W = (1, 1)$ noktarının komşu ve distant olduğu noktalar incelendiğinde ikişer ikişer distant üç noktanın komşulukları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$U : \{I_i^S, I_i^F, S_i^+, S_i^-, F_i^+, F_i^-\}$
$V : \{J_i^S, J_i^F, S_i^+, S_i^-, F_i^+, F_i^-\}$
$W : \{I_i^S, I_i^F, J_i^S, J_i^F, F_i^+, F_i^-\}$.

Bu doğru üzerindeki koordinat sistemi her zaman, ikişer ikişer distant üç noktanın koordinatları U, V, W nun koordinatlarına özdeş olacak şekilde seçilebilir. Bu nedenle son üç ifadeden, doğru üzerindeki herhangi bir noktanın komşuluğunda on sekiz farklı noktanın olduğu söylenebilir. Distant herhangi iki noktanın komşuluklarında on iki ortak nokta vardır ve ikişer ikişer distant herhangi üç noktanın komşuluklarında ortak altı nokta vardır. (Şekil 5.1)



Şekil 5.1 : $PR_\triangle(1)$ *projektif doğrusunun şekli, üzerindeki noktalar ile birlikte çizilmiştir. İkişer ikişer distant üç nokta, içi noktalı olan üç küçük yuvarlak*($\odot$) *ile gösterilmiş ve komşuluklarını belirten noktaların oluşturduğu elipslerin merkezine yerleştirilmiş. Her küçük yuvarlak doğrudaki iki farklı noktayı temsil eder, ancak büyük yuvarlak ise diğer altı noktayı göstermektedir.*

$GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$ ve $GF(2)[x]/\langle x^2 - x\rangle$ üzerinde tanımlı doğrularda olduğu gibi, komşuluk bağıntısı geçişken değildir. Ancak, daha önceki durumlarda rastlanmayan yeni bir özellik, burada ikişer ikişer distant üç noktanın komşuluklarının sıfırdan farklı olmasıdır ve bu $R_\triangle$ nin üç maksimal idealinin varlığına dayanır.

Şimdi bu durumlar biraz daha ayrıntılı incelenmektedir:

I_1^S noktası ile komşu ve distant olan iç kabuk noktalarına bakılırsa,

$$det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & b\end{pmatrix}=0 \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & c\end{pmatrix}=c-b=e$$

$$det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & d\end{pmatrix}=d-b=f \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & e\end{pmatrix}=e-b=c$$

$$det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & f\end{pmatrix}=f-b=d \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & g\end{pmatrix}=g-b=h$$

$$det\begin{pmatrix}1 & b\\ b & 1\end{pmatrix}=b-1=g \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}=a-1=h$$

$$det\begin{pmatrix}1 & b\\ d & 1\end{pmatrix}=a-1=h \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & b\\ e & 1\end{pmatrix}=e-b=c$$

$$det\begin{pmatrix}1 & b\\ f & 1\end{pmatrix}=b-1=g \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & b\\ g & 1\end{pmatrix}=a-1=h$$

olduğundan I_1^S noktasının $I_1^S, I_2^S, I_3^S, I_1^F, I_2^F, J_1^S, J_1^F, J_2^F$ noktaları ile komşu olduğu $I_3^F, J_2^S, J_3^S, J_3^F$ noktaları ile distant olduğu görülmektedir.

Benzer işlem $PR_{\triangle}(1)$ doğrusunun diğer "iç kabuk" noktaları için de yapılırsa ("+" distantlığı, "-" komşuluğu göstermek üzere) Tablo 5.4 ortaya çıkar:

	I_1^S	I_2^S	I_3^S	I_1^F	I_2^F	I_3^F	J_1^S	J_2^S	J_3^S	J_1^F	J_2^F	J_3^F
I_1^S	−	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	+
I_2^S	−	−	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−
I_3^S	−	−	−	+	−	−	+	+	−	+	−	−
I_1^F	−	−	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−
I_2^F	−	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−
I_3^F	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−
J_1^S	−	+	+	−	−	+	−	−	−	−	−	+
J_2^S	+	−	+	−	+	−	−	−	−	−	+	−
J_3^S	+	+	−	+	−	−	−	−	−	+	−	−
J_1^F	−	−	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−
J_2^F	−	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−
J_3^F	+	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−

Tablo 5.4 : $PR_{\triangle}(1)$ *doğrusunun "iç kabuk" noktalarının distantlığı ve komşuluğu*

F_1^+ ile komşu ve distant olan dış kabuk noktalarına bakılırsa,

$$det\begin{pmatrix} e & f \\ e & f \end{pmatrix} = 0 \qquad , \quad det\begin{pmatrix} e & f \\ e & g \end{pmatrix} = c - b = e$$

$$det\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = c - f = h \quad , \quad det\begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix} = e - f = g$$

$$det\begin{pmatrix} e & f \\ g & e \end{pmatrix} = e - d = h \quad , \quad det\begin{pmatrix} e & f \\ g & f \end{pmatrix} = b - d = f$$

$$det\begin{pmatrix} e & f \\ e & d \end{pmatrix} = a - b = b \quad , \quad det\begin{pmatrix} e & f \\ f & c \end{pmatrix} = c - f = h$$

$$det\begin{pmatrix} e & f \\ g & b \end{pmatrix} = b - d = f \quad , \quad det\begin{pmatrix} e & f \\ d & e \end{pmatrix} = e - d = h$$

$$det\begin{pmatrix} e & f \\ c & f \end{pmatrix} = b - a = b \quad , \quad det\begin{pmatrix} e & f \\ b & g \end{pmatrix} = c - b = e$$

olduğundan F_1^+ noktasına komşu olan noktaların $F_1^+, F_2^+, F_1^-, F_3^-, S_1^+, S_3^+, S_2^-, S_3^-$ noktaları olduğu ve $F_3^+, F_2^-, S_2^+, S_1^-$ noktaları ile distant olduğu görülür.

Benzer işlem $PR_{\triangle}(1)$ doğrusunun diğer "dış kabuk" noktaları için de yapılırsa ("+" distantlığı, "-" komşuluğu göstermek üzere) Tablo 5.5 elde edilir:

	F_1^+	F_2^+	F_3^+	F_1^-	F_2^-	F_3^-	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_1^-	S_2^-	S_3^-
F_1^+	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
F_2^+	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
F_3^+	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
F_1^-	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
F_2^-	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
F_3^-	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
S_1^+	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
S_2^+	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
S_3^+	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
S_1^-	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
S_2^-	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
S_3^-	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Tablo 5.5 : $PR_{\triangle}(1)$ *doğrusunun "dış kabuk" noktalarının distantlığı ve komşuluğu*

Yukarıda yapılan benzer işlemler $PR_{\triangle}(1)$ doğrusunun her iki kabuğundaki noktalar için de yapılırsa Tablo 5.6 ortaya çıkar:

	I_1^S	I_2^S	I_3^S	I_1^F	I_2^F	I_3^F	J_1^S	J_2^S	J_3^S	J_1^F	J_2^F	J_3^F
F_1^+	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
F_2^+	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
F_3^+	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
F_1^-	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
F_2^-	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
F_3^-	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
S_1^+	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
S_2^+	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
S_3^+	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
S_1^-	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
S_2^-	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
S_3^-	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

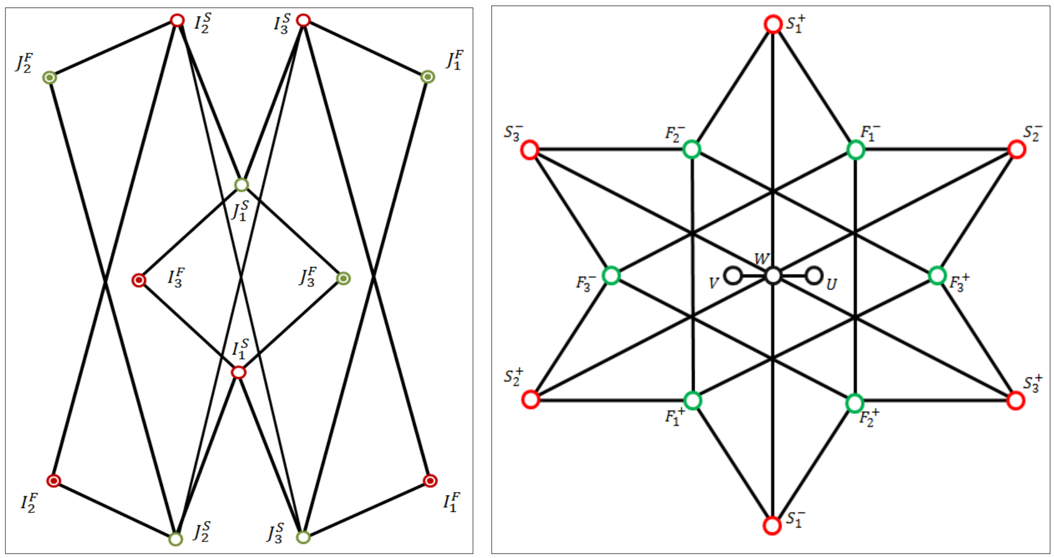
Tablo 5.6 : $PR_{\triangle}(1)$ *doğrusunun "hem iç ve hem dış kabuk" noktalarının distantlığı ve komşuluğu*

Tablo 5.4, 5.5 ve 5.6 dan kabuklardaki noktalar arasındaki komşuluk yada distantlık ilişkisinin bulunmasıyla geometrik incelikleri tamamen ortaya çıkar. Burada, Tablo 5.6 da $+$ ve $-$ nin anlamı yine sırasıyla distantlık ve komşuluktur. Örneğin S_2^- ve I_1^F distanttırlar ve F_2^+ ve J_2^S noktaları komşudurlar.

Çekirdek ve kabuklar arasında da benzer işlemler yapılırsa Tablo 5.7 elde edilir.

	I_1^S	I_2^S	I_3^S	I_1^F	I_2^F	I_3^F	J_1^S	J_2^S	J_3^S	J_1^F	J_2^F	J_3^F
U	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
V	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
W	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	F_1^+	F_2^+	F_3^+	F_1^-	F_2^-	F_3^-	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_1^-	S_2^-	S_3^-
U	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
V	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
W	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Tablo 5.7 : *Çekirdek ile kabukların distanlık ve komşuluğu*



Şekil 5.2 : *Yukarıdaki gösterim $PR_{\triangle}(1)$ doğrusunun iç(sol) ve dış(sağ) kabuklarını temsil etmektedir, burada herhangi iki distant nokta bir doğru parçası ile birleştirilmiştir. Her iki durumda da, noktaların iki kümesi farklı renk ile gösterilmiştir; ilk şekilde içi noktalı daireler($\odot$) kuvvetli(fat) noktaları temsil ederler ve ikinci durumda çekirdek (ortada W olmak üzere üç nokta) ve söz konusu kabuk ile ilişkisi gösterilmiştir.*

BÖLÜM 6

$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ DİREKT HALKA ÇARPIMI ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU

Projektif doğru üzerindeki halka kavramının daha iyi anlaşılması için, $R_{\blacksquare} \equiv \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ direkt halka çarpımı üzerinde tanımlı projektif doğrunun yapısını incelenmektedir (Saniga, et al., 2007).

Öncelikle kolaylık sağlaması için $\mathbb{Z}_4$ te toplama ve çarpma tabloları yapılırsa;

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tablo 6.1 : $\mathbb{Z}_4$ *te Toplama ve Çarpma İşlemi Tabloları*

Tablo 6.1 ortaya çıkmış olur.

$\mathbb{Z}_4$ te olduğu gibi $R_{\blacksquare} \equiv \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4$ halkasının da karakteristiği 4 tür ve dolayısıyla 16 elemanı vardır:

$$\begin{aligned} R_{\blacksquare} = \{ & a \equiv [0,0], b \equiv [0,1], c \equiv [0,2], d \equiv [0,3], e \equiv [1,0], h \equiv [1,1], \\ & i \equiv [1,2], j \equiv [1,3], f \equiv [2,0], k \equiv [2,1], l \equiv [2,2], m \equiv [2,3], \\ & g \equiv [3,0], n \equiv [3,1], p \equiv [3,2], q \equiv [3,3]\} \end{aligned}$$

dir.

$R_{\blacksquare}$ nin temel idealleri;

$$\begin{array}{lcl}
\langle a\rangle=\{a\} & , & \langle g\rangle=\{a,e,f,g\} \\
\langle b\rangle=\{a,b,c,d\} & , & \langle i\rangle=\{a,c,e,f,g,i,l,p\} \\
\langle c\rangle=\{a,c\} & , & \langle k\rangle=\{a,b,c,d,f,k,l,m\} \\
\langle d\rangle=\{a,b,c,d\} & , & \langle l\rangle=\{a,c,f,l\} \\
\langle e\rangle=\{a,e,f,g\} & , & \langle m\rangle=\{a,b,c,d,f,k,l,m\} \\
\langle f\rangle=\{a,f\} & , & \langle p\rangle=\{a,c,e,f,g,i,l,p\}
\end{array}$$

$$\langle h\rangle=\langle j\rangle=\langle n\rangle=\langle q\rangle=\{a,b,c,d,e,h,i,j,f,k,l,m,g,n,p,q\}=R_{\blacksquare}$$

dir.

Böylece $R_{\blacksquare}$ nin maksimal idealleri

$\delta_1=\langle i\rangle=\langle p\rangle=\{a,c,e,f,g,i,l,p\}$

ve

$\delta_2=\langle k\rangle=\langle m\rangle=\{a,b,c,d,f,k,l,m\}$

dir.

Aşikar(trivial) olmayan Jacobson radikali ise $\delta=\delta_1\cap\delta_2=\{a,c,f,l\}$

dir.

Birimsel elemanların kümesi $R^*_{\blacksquare}=\{h\equiv 1,j,n,q\}$ ve

Sıfır bölenlerin kümesi $R\backslash R^*_{\blacksquare}=\{a\equiv 0,b,c,d,e,f,g,i,k,l,m,p\}$ olur.

$R_{\blacksquare}$ de toplam ve çarpım tabloları sırasıyla Tablo 6.2, Tablo 6.3 te verilmiştir:

$\oplus$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
b	b	c	d	a	h	k	n	i	j	e	l	m	f	p	q	g
c	c	d	a	b	i	l	p	j	e	h	m	f	k	q	g	n
d	d	a	b	c	j	m	q	e	h	i	f	k	l	g	n	p
e	e	h	i	j	f	g	a	k	l	m	n	p	q	b	c	d
f	f	k	l	m	g	a	e	n	p	q	b	c	d	h	i	j
g	g	n	p	q	a	e	f	b	c	d	h	i	j	k	l	m
h	h	i	j	e	k	n	b	l	m	f	p	q	g	c	d	a
i	i	j	e	h	l	p	c	m	f	k	q	g	n	d	a	b
j	j	e	h	i	m	q	d	f	k	l	g	n	p	a	b	c
k	k	l	m	f	n	b	h	p	q	g	c	d	a	i	j	e
l	l	m	f	k	p	c	i	q	g	n	d	a	b	j	e	h
m	m	f	k	l	q	d	j	g	n	p	a	b	c	e	h	i
n	n	p	q	g	b	h	k	c	d	a	i	j	e	l	m	f
p	p	q	g	n	c	i	l	d	a	b	j	e	h	m	f	k
q	q	g	n	p	d	j	m	a	b	c	e	h	i	f	k	l

Tablo 6.2 : $R_{\blacksquare}$ *de Toplam Tablosu*

$\otimes$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	a	a	a	b	c	d	b	c	d	b	c	d
c	a	c	a	c	a	a	a	c	a	c	c	a	c	c	a	c
d	a	d	c	b	a	a	a	d	c	b	d	c	b	d	c	b
e	a	a	a	a	e	f	g	e	e	e	f	f	f	g	g	g
f	a	a	a	a	f	a	f	f	f	f	a	a	a	f	f	f
g	a	a	a	a	g	f	e	g	g	g	f	f	f	e	e	e
h	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
i	a	c	a	c	e	f	g	i	e	i	l	f	l	p	g	p
j	a	d	c	b	e	f	g	j	i	h	m	l	k	q	p	n
k	a	b	c	d	f	a	f	k	l	m	b	c	d	k	l	m
l	a	c	a	c	f	a	f	l	f	l	c	a	c	l	f	l
m	a	d	c	b	f	a	f	m	l	k	d	c	b	m	l	k
n	a	b	c	d	g	f	e	n	p	q	k	l	m	h	i	j
p	a	c	a	c	g	f	e	p	g	p	l	f	l	i	e	i
q	a	d	c	b	g	f	e	q	p	n	m	l	k	j	i	h

Tablo 6.3 : $R_\blacksquare$ *de Çarpım Tablosu*

Kabul edilebilirlik durumu göz önüne alındığında $PR_\blacksquare(1)$ projektif doğrusu üzerindeki tüm noktalar aşağıdaki gibi belirlenir. Toplam 36 nokta vardır, bunlardan 28 tanesi I.tip nokta ve kalan 8 nokta ise II. tip noktalardır.

$\rho \in \{h, n, j, q\}$ birimsel elemanları için $(\rho x, \rho y)$ ve (x, y) nin aynı sınıfa ait oldukları gözönüne alınırsa $((\rho x, \rho y), (x, y))$ noktaları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{array}{ccc}
(1,0)\sim(j,0)\sim(n,0)\sim(q,0) & , & (0,1)\sim(0,j)\sim(0,n)\sim(0,q)\\
(1,b)\sim(j,d)\sim(n,b)\sim(q,d) & , & (b,1)\sim(d,j)\sim(b,n)\sim(d,q)\\
(1,c)\sim(j,c)\sim(n,c)\sim(q,c) & , & (c,1)\sim(c,j)\sim(c,n)\sim(c,q)\\
(1,d)\sim(j,b)\sim(n,d)\sim(q,b) & , & (d,1)\sim(b,j)\sim(d,n)\sim(b,q)\\
(1,e)\sim(j,e)\sim(n,g)\sim(q,g) & , & (e,1)\sim(e,j)\sim(g,n)\sim(g,q)\\
(1,f)\sim(j,f)\sim(n,f)\sim(q,f) & , & (f,1)\sim(f,j)\sim(f,n)\sim(f,q)\\
(1,g)\sim(j,g)\sim(n,e)\sim(q,e) & , & (g,1)\sim(g,j)\sim(e,n)\sim(e,q)\\
(1,i)\sim(j,i)\sim(n,p)\sim(q,p) & , & (i,1)\sim(i,j)\sim(p,n)\sim(p,q)\\
(1,k)\sim(j,m)\sim(n,k)\sim(q,m) & , & (k,1)\sim(m,j)\sim(k,n)\sim(m,q)\\
(1,l)\sim(j,l)\sim(n,l)\sim(q,l) & , & (l,1)\sim(l,j)\sim(l,n)\sim(l,q)\\
(1,m)\sim(j,k)\sim(n,m)\sim(q,k) & , & (m,1)\sim(k,j)\sim(m,n)\sim(k,q)\\
(1,p)\sim(j,p)\sim(n,i)\sim(q,i) & , & (p,1)\sim(p,j)\sim(i,n)\sim(i,q)\\
(1,1)\sim(j,j)\sim(n,n)\sim(q,q) & , & (1,j)\sim(j,1)\sim(n,q)\sim(q,n)\\
(1,n)\sim(j,q)\sim(n,1)\sim(q,j) & , & (1,q)\sim(j,n)\sim(n,j)\sim(q,1)
\end{array}
$$

I. tip noktalardır ve

$$
\begin{array}{ccc}
(e,b)\sim(e,d)\sim(g,b)\sim(g,d) & , & (b,e)\sim(d,e)\sim(b,g)\sim(d,g)\\
(e,k)\sim(e,m)\sim(g,k)\sim(g,m) & , & (k,e)\sim(m,e)\sim(k,g)\sim(m,g)\\
(i,b)\sim(i,d)\sim(p,b)\sim(p,d) & , & (b,i)\sim(d,i)\sim(b,p)\sim(d,p)\\
(i,k)\sim(i,m)\sim(p,k)\sim(p,m) & , & (k,i)\sim(m,i)\sim(k,p)\sim(m,p)
\end{array}
$$

II. tip noktalardır.

Doğrunun tüm yapısını ortaya koymak için komşuluk/distantlık yapısının da incelenmesi gerekmektedir. Genelliği bozmaksızın, ikişer ikişer distant üç nokta olan $U=(1,0)$, $V=(0,1)$, $W=(1,1)$ ele alınarak, bunların yukarıda bulunan noktalardan hangileriyle komşu, hangileriyle distant olduğu bulunabilir.

$U=(1,0)$ noktasının $PR_{\blacksquare}(1)$ in 36 noktasıyla komşuluk ve distantlığına bakılırsa;

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = b \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix} = c \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix} = d \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix} = e \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & f \end{pmatrix} = f \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & g \end{pmatrix} = g \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = i \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} = k \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{pmatrix} = l \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix} = p \in R_{\blacksquare} \backslash R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\blacksquare}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}=1\in R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}=1\in R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & 1\end{pmatrix}=1\in R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1\end{pmatrix}=1\in R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=1\in R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & j\end{pmatrix}=j\in R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & n\end{pmatrix}=n\in R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & q\end{pmatrix}=q\in R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & b\end{pmatrix}=b\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & k\end{pmatrix}=k\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & b\end{pmatrix}=b\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & k\end{pmatrix}=k\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & e\end{pmatrix}=e\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & e\end{pmatrix}=e\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & i\end{pmatrix}=i\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}\quad,\quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & i\end{pmatrix}=i\in R_{\blacksquare}\backslash R_{\blacksquare}^{*}$$

yazılabilir.

Böylece $U=(1,0)$ noktasına komşu olan noktalar ve benzer şekilde distant olan noktalar belirlenmiş olur.

U ya komşu olan noktalar;

$(1,b),(1,c),(1,d),(1,e),(1,f),(1,g),(1,i),(1,k),(1,l),(1,m),(1,p),$

$(e,b),(e,k),(i,b),(i,k),(b,e),(k,e),(b,i),(k,i)$

dir.

U ya distant olan noktalar;

$(b,1),(c,1),(d,1),(e,1),(f,1),(g,1),(i,1),(k,1),(l,1),(m,1),(p,1),$

$(1,j),(1,n),(1,q)$

olarak yazılabilir.

V, W için de benzer işlemler yapılarak, bu noktalara komşu olan noktalar ile distant olan noktalar aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

V ye komşu olan noktalar;

$(b,1),(c,1),(d,1),(e,1),(f,1),(g,1),(i,1),(k,1),(l,1),(m,1),(p,1),$

$(e,b),(e,k),(i,b),(i,k),(b,e),(k,e),(b,i),(k,i)$

dir.

V ye distant olan noktalar;

$(1,b),(1,c),(1,d),(1,e),(1,f),(1,g),(1,i),(1,k),(1,l),(1,m),(1,p),$

$(1,j),(1,n),(1,q)$

şeklindedir.

W ya komşu olan noktalar;

$(1,b),(1,d),(1,e),(1,g),(1,i),(1,k),(1,m),(1,p),(b,1),(d,1),(e,1),$

$(g,1),(i,1),(k,1),(m,1),(p,1),(1,j),(1,n),(1,q)$

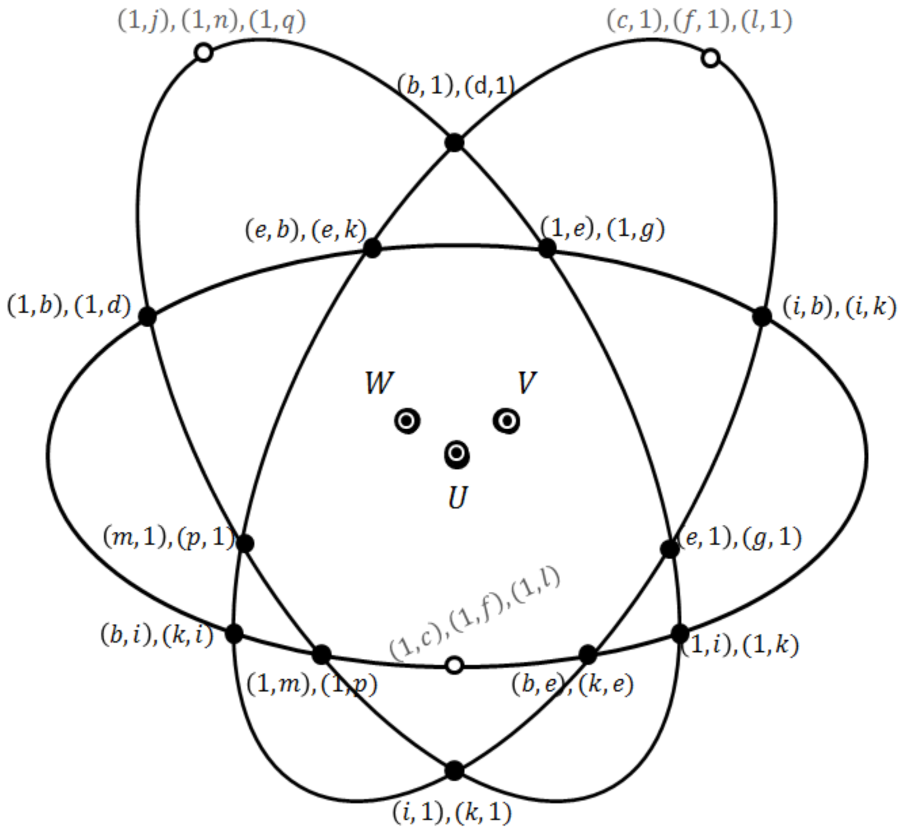
dir.

W ya distant olan noktalar;

$(1,c),(1,f),(1,l),(c,1),(f,1),(l,1),(e,b),(e,k),(i,b),(i,k),(b,e),(k,e),(b,i),(k,i)$

olarak belirlenmiştir.

Görüldüğü üzere herbir komşulukta on dokuz adet nokta bulunur ve $(1,c),(1,f),(1,l)$ U ya; $(c,1),(f,1),(l,1)$ V ye; $(1,j),(1,n),(1,q)$ W noktasına özgü Jacobson noktalarıdır. Ayırt edici U,V,W noktalarının üçünün ortak bir kesişim noktası yoktur ancak bu ayırt edici nokta çiftlerinin(ikişer ikişer) ortak sekiz noktası vardır (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 : $PR_{\blacksquare}(1)$ *projektif doğrusunun şekli üzerindeki noktalar ile birlikte çizilmiştir. İkişer ikişer distant üç nokta, içi noktalı olan üç küçük yuvarlak ile gösterilmiş ve komşuluklarını belirten noktaların oluşturduğu elipslerin merkezine yerleştirilmiştir. Herbir nokta iki farklı noktayı temsil eder. İçi boş olan üç nokta ise Jacobson noktalarıdır ki herbiri üç noktayı temsil eder.*

BÖLÜM 7

$GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$ HALKASI ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU

$R_\bigtriangledown = GF(3) \otimes GF(2) \otimes GF(4)$ halkasının $|R_\bigtriangledown| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ elemanı vardır.

$GF(3)$ ve $GF(2)$ nin elemanları sırasıyla $\{0, 1, 2\}$ ve $\{0, 1\}$ dir. $GF(4)$ ise $GF(2)$ nin 2. dereceden bir cisim genişlemesidir ve $\alpha^2 + \alpha + 1 \in GF(2)$ indirgenemez polinomu ve x bu polinomun bir kökü olmak üzere $GF(4)$ ün elemanları aşağıdaki gibidir:

$GF(4) = GF(2^2) = \{b_0 + b_1 x | b_0, b_1 \in GF(2)\} = \{0, 1, x, 1 + x\}$.

Dolayısıyla $R_\bigtriangledown$ halkasının elemanlarının oluşturduğu küme,

$$\begin{aligned} R_\bigtriangledown = \{ & a_0 \equiv [0,0,0],\ a_1 \equiv [0,0,1],\ a_2 \equiv [0,0,x],\ a_3 \equiv [0,0,1+x], \\ & a_4 \equiv [0,1,0],\ a_5 \equiv [0,1,1],\ a_6 \equiv [0,1,x],\ a_7 \equiv [0,1,1+x], \\ & a_8 \equiv [1,0,0],\ a_9 \equiv [1,0,1],\ a_{10} \equiv [1,0,x],\ a_{11} \equiv [1,0,1+x], \\ & a_{12} \equiv [1,1,0],\ a_{13} \equiv [1,1,1],\ a_{14} \equiv [1,1,x],\ a_{15} \equiv [1,1,1+x], \\ & a_{16} \equiv [2,0,0],\ a_{17} \equiv [2,0,1],\ a_{18} \equiv [2,0,x],\ a_{19} \equiv [2,0,1+x], \\ & a_{20} \equiv [2,1,0],\ a_{21} \equiv [2,1,1],\ a_{22} \equiv [2,1,x],\ a_{23} \equiv [2,1,1+x]\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$R_\bigtriangledown$ nin birinci koordinatında $3 \equiv 0$, ikinci koordinatında $2 \equiv 0$, üçüncü koordinatında $x^2 + x + 1 \equiv 0$ olduğundan dolayı toplam ve çarpım tabloları sırasıyla Tablo 7.1 ve Tablo 7.2 de verilebilir:

$\oplus$	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{0}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{1}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}
a_{2}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{21}
a_{3}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{22}
a_{4}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}
a_{5}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}
a_{6}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}
a_{7}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
a_{8}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}
a_{9}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{4}
a_{10}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{5}
a_{11}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{6}
a_{12}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}
a_{13}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{0}
a_{14}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{1}
a_{15}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{2}
a_{16}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{17}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{12}
a_{18}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{13}
a_{19}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{20}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{8}	a_{9}	a_{10}	a_{11}
a_{21}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{5}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{1}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{9}	a_{10}	a_{11}	a_{8}
a_{22}	a_{22}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{6}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{2}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{14}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{10}	a_{11}	a_{8}	a_{9}
a_{23}	a_{23}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{7}	a_{4}	a_{5}	a_{6}	a_{3}	a_{0}	a_{1}	a_{2}	a_{15}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{8}	a_{9}	a_{10}

Tablo 7.1 : $R_{\bigtriangledown}$ *de Toplama İşlemi Tablosu*

$\otimes$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
a_1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3
a_2	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1
a_3	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2
a_4	a_0	a_0	a_0	a_0	a_4	a_4	a_4	a_4	a_0	a_0	a_0	a_0	a_4	a_4	a_4	a_4	a_0	a_0	a_0	a_0	a_4	a_4	a_4	a_4
a_5	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_6	a_0	a_2	a_3	a_1	a_4	a_6	a_7	a_5	a_0	a_2	a_3	a_1	a_4	a_6	a_7	a_5	a_0	a_2	a_3	a_1	a_4	a_6	a_7	a_5
a_7	a_0	a_3	a_1	a_2	a_4	a_7	a_5	a_6	a_0	a_3	a_1	a_2	a_4	a_7	a_5	a_6	a_0	a_3	a_1	a_2	a_4	a_7	a_5	a_6
a_8	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}
a_9	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}
a_{10}	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_8	a_{10}	a_{11}	a_9	a_8	a_{10}	a_{11}	a_9	a_{16}	a_{18}	a_{19}	a_{17}	a_{16}	a_{18}	a_{19}	a_{17}
a_{11}	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2	a_8	a_{11}	a_9	a_{10}	a_8	a_{11}	a_9	a_{10}	a_{16}	a_{19}	a_{17}	a_{18}	a_{16}	a_{19}	a_{17}	a_{18}
a_{12}	a_0	a_0	a_0	a_0	a_4	a_4	a_4	a_4	a_8	a_8	a_8	a_8	a_{12}	a_{12}	a_{12}	a_{12}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}
a_{13}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{14}	a_0	a_2	a_3	a_1	a_4	a_6	a_7	a_5	a_8	a_{10}	a_{11}	a_9	a_{12}	a_{14}	a_{15}	a_{13}	a_{16}	a_{18}	a_{19}	a_{17}	a_{20}	a_{22}	a_{23}	a_{21}
a_{15}	a_0	a_3	a_1	a_2	a_4	a_7	a_5	a_6	a_8	a_{11}	a_9	a_{10}	a_{12}	a_{15}	a_{13}	a_{14}	a_{16}	a_{19}	a_{17}	a_{18}	a_{20}	a_{23}	a_{21}	a_{22}
a_{16}	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8
a_{17}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
a_{18}	a_0	a_2	a_3	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_{16}	a_{18}	a_{19}	a_{17}	a_{16}	a_{18}	a_{19}	a_{17}	a_8	a_{10}	a_{11}	a_9	a_8	a_{10}	a_{11}	a_9
a_{19}	a_0	a_3	a_1	a_2	a_0	a_3	a_1	a_2	a_{16}	a_{19}	a_{17}	a_{18}	a_{16}	a_{19}	a_{17}	a_{18}	a_8	a_{11}	a_9	a_{10}	a_8	a_{11}	a_9	a_{10}
a_{20}	a_0	a_0	a_0	a_0	a_4	a_4	a_4	a_4	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{16}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	a_8	a_8	a_8	a_8	a_{12}	a_{12}	a_{12}	a_{12}
a_{21}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{22}	a_0	a_2	a_3	a_1	a_4	a_6	a_7	a_5	a_{16}	a_{18}	a_{19}	a_{17}	a_{20}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	a_8	a_{10}	a_{11}	a_9	a_{12}	a_{14}	a_{15}	a_{13}
a_{23}	a_0	a_3	a_1	a_2	a_4	a_7	a_5	a_6	a_{16}	a_{19}	a_{17}	a_{18}	a_{20}	a_{23}	a_{21}	a_{22}	a_8	a_{11}	a_9	a_{10}	a_{12}	a_{15}	a_{13}	a_{14}

Tablo 7.2 : $R_{\bigtriangledown}$ *de Çarpma İşlemi Tablosu*

Tablo 7.1 ve Tablo 7.2 yardımıyla aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$R_{\bigtriangledown}$ nin birimsel elemanlarının kümesi

$R^*_{\bigtriangledown} = \{a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$ olup $|R^*_{\bigtriangledown}| = 6$ dır.

$R_{\bigtriangledown}$ nin $R^*_{\bigtriangledown}$ dışındaki diğer elemanları ise sıfır bölendir:

$R \backslash R^*_{\bigtriangledown} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}\}$

ve

$|R_{\bigtriangledown} \backslash R^*_{\bigtriangledown}| = 18$ dir.

$R_{\bigtriangledown}$ nin temel idealleri

$< a_0 >= \{a_0\}$, $< a_1 >=< a_2 >=< a_3 >= \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$,

$< a_4 >= \{a_0, a_4\}$, $< a_5 >=< a_6 >=< a_7 >= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$,

$< a_8 >=< a_{16} >= \{a_0, a_8, a_{16}\}$,

$< a_9 >=< a_{10} >=< a_{11} >=< a_{17} >=< a_{18} >$

$=< a_{19} >= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}\}$,

$< a_{12} >=< a_{20} >= \{a_0, a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, a_{20}\},$

$< a_{13} >=< a_{14} >=< a_{15} >=< a_{21} >=< a_{22} >=< a_{23} >= R_{\bigtriangledown}$

olup maksimal idealleri;

$< a_5 >=< a_6 >=< a_7 >,$

$< a_9 >=< a_{10} >=< a_{11} >=< a_{17} >=< a_{18} >=< a_{19} >$ ve

$< a_{12} >=< a_{20} >$

dir.

$PR_{\bigtriangledown}(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar sıralı ikili koordinatlarla gösterilir ve cebirsel olarak iki farklı tiptedirler:

I.tip ve II. tip noktalar tekrar hatırlanırsa;

I) Nokta koordinatlarından en az biri birimseldir.

II) Noktaların koordinatlarının ikisi de farklı idealde bulunan sıfır bölenlerdir.

I. tipteki noktalar toplam 42 tanedir ve noktalar kümesinde $\rho \in \{a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$ birimsel elemanları için $(\rho a, \rho b)$ ve (a, b) nin aynı sınıfa ait oldukları gözönüne alınırsa $((\rho a, \rho b), (a, b))$ noktaları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(a_{13},a_0) \sim (a_{14},a_0) \sim (a_{15},a_0) \sim (a_{21},a_0) \sim (a_{22},a_0) \sim (a_{23},a_0)$$
$$(a_{13},a_1) \sim (a_{14},a_2) \sim (a_{15},a_3) \sim (a_{21},a_1) \sim (a_{22},a_2) \sim (a_{23},a_3)$$
$$(a_{13},a_2) \sim (a_{14},a_3) \sim (a_{15},a_1) \sim (a_{21},a_2) \sim (a_{22},a_3) \sim (a_{23},a_1)$$
$$(a_{13},a_3) \sim (a_{14},a_1) \sim (a_{15},a_2) \sim (a_{21},a_3) \sim (a_{22},a_1) \sim (a_{23},a_2)$$
$$(a_{13},a_4) \sim (a_{14},a_4) \sim (a_{15},a_4) \sim (a_{21},a_4) \sim (a_{22},a_4) \sim (a_{23},a_4)$$
$$(a_{13},a_5) \sim (a_{14},a_6) \sim (a_{15},a_7) \sim (a_{21},a_5) \sim (a_{22},a_6) \sim (a_{23},a_7)$$
$$(a_{13},a_6) \sim (a_{14},a_7) \sim (a_{15},a_5) \sim (a_{21},a_6) \sim (a_{22},a_7) \sim (a_{23},a_5)$$
$$(a_{13},a_7) \sim (a_{14},a_5) \sim (a_{15},a_6) \sim (a_{21},a_7) \sim (a_{22},a_5) \sim (a_{23},a_6)$$
$$(a_{13},a_8) \sim (a_{14},a_8) \sim (a_{15},a_8) \sim (a_{21},a_{16}) \sim (a_{22},a_{16}) \sim (a_{23},a_{16})$$
$$(a_{13},a_9) \sim (a_{14},a_{10}) \sim (a_{15},a_{11}) \sim (a_{21},a_{17}) \sim (a_{22},a_{18}) \sim (a_{23},a_{19})$$
$$(a_{13},a_{10}) \sim (a_{14},a_{11}) \sim (a_{15},a_9) \sim (a_{21},a_{18}) \sim (a_{22},a_{19}) \sim (a_{23},a_{17})$$
$$(a_{13},a_{11}) \sim (a_{14},a_9) \sim (a_{15},a_{10}) \sim (a_{21},a_{19}) \sim (a_{22},a_{17}) \sim (a_{23},a_{18})$$
$$(a_{13},a_{12}) \sim (a_{14},a_{12}) \sim (a_{15},a_{12}) \sim (a_{21},a_{20}) \sim (a_{22},a_{20}) \sim (a_{23},a_{20})$$
$$(a_{13},a_{13}) \sim (a_{14},a_{14}) \sim (a_{15},a_{15}) \sim (a_{21},a_{21}) \sim (a_{22},a_{22}) \sim (a_{23},a_{23})$$
$$(a_{13},a_{14}) \sim (a_{14},a_{15}) \sim (a_{15},a_{13}) \sim (a_{21},a_{22}) \sim (a_{22},a_{23}) \sim (a_{23},a_{21})$$
$$(a_{13},a_{15}) \sim (a_{14},a_{13}) \sim (a_{15},a_{14}) \sim (a_{21},a_{23}) \sim (a_{22},a_{21}) \sim (a_{23},a_{22})$$
$$(a_{13},a_{16}) \sim (a_{14},a_{16}) \sim (a_{15},a_{16}) \sim (a_{21},a_8) \sim (a_{22},a_8) \sim (a_{23},a_8)$$
$$(a_{13},a_{17}) \sim (a_{14},a_{18}) \sim (a_{15},a_{19}) \sim (a_{21},a_9) \sim (a_{22},a_{10}) \sim (a_{23},a_{11})$$
$$(a_{13},a_{18}) \sim (a_{14},a_{19}) \sim (a_{15},a_{17}) \sim (a_{21},a_{10}) \sim (a_{22},a_{11}) \sim (a_{23},a_9)$$
$$(a_{13},a_{19}) \sim (a_{14},a_{17}) \sim (a_{15},a_{18}) \sim (a_{21},a_{11}) \sim (a_{22},a_9) \sim (a_{23},a_{10})$$
$$(a_{13},a_{20}) \sim (a_{14},a_{20}) \sim (a_{15},a_{20}) \sim (a_{21},a_{12}) \sim (a_{22},a_{12}) \sim (a_{23},a_{12})$$

$(a_{13},a_{21}) \sim (a_{14},a_{22}) \sim (a_{15},a_{23}) \sim (a_{21},a_{13}) \sim (a_{22},a_{14}) \sim (a_{23},a_{15})$

$(a_{13},a_{22}) \sim (a_{14},a_{23}) \sim (a_{15},a_{21}) \sim (a_{21},a_{14}) \sim (a_{22},a_{15}) \sim (a_{23},a_{13})$

$(a_{13},a_{23}) \sim (a_{14},a_{21}) \sim (a_{15},a_{22}) \sim (a_{21},a_{15}) \sim (a_{22},a_{13}) \sim (a_{23},a_{14})$

$(a_{0},a_{13}) \sim (a_{0},a_{14}) \sim (a_{0},a_{15}) \sim (a_{0},a_{21}) \sim (a_{0},a_{22}) \sim (a_{0},a_{23})$

$(a_{1},a_{13}) \sim (a_{2},a_{14}) \sim (a_{3},a_{15}) \sim (a_{1},a_{21}) \sim (a_{2},a_{22}) \sim (a_{3},a_{23})$

$(a_{2},a_{13}) \sim (a_{3},a_{14}) \sim (a_{1},a_{15}) \sim (a_{2},a_{21}) \sim (a_{3},a_{22}) \sim (a_{1},a_{23})$

$(a_{3},a_{13}) \sim (a_{1},a_{14}) \sim (a_{2},a_{15}) \sim (a_{3},a_{21}) \sim (a_{1},a_{22}) \sim (a_{2},a_{23})$

$(a_{4},a_{13}) \sim (a_{4},a_{14}) \sim (a_{4},a_{15}) \sim (a_{4},a_{21}) \sim (a_{4},a_{22}) \sim (a_{4},a_{23})$

$(a_{5},a_{13}) \sim (a_{6},a_{14}) \sim (a_{7},a_{15}) \sim (a_{5},a_{21}) \sim (a_{6},a_{22}) \sim (a_{7},a_{23})$

$(a_{6},a_{13}) \sim (a_{7},a_{14}) \sim (a_{5},a_{15}) \sim (a_{6},a_{21}) \sim (a_{7},a_{22}) \sim (a_{5},a_{23})$

$(a_{7},a_{13}) \sim (a_{5},a_{14}) \sim (a_{6},a_{15}) \sim (a_{7},a_{21}) \sim (a_{5},a_{22}) \sim (a_{6},a_{23})$

$(a_{8},a_{13}) \sim (a_{8},a_{14}) \sim (a_{8},a_{15}) \sim (a_{16},a_{21}) \sim (a_{16},a_{22}) \sim (a_{16},a_{23})$

$(a_{9},a_{13}) \sim (a_{10},a_{14}) \sim (a_{11},a_{15}) \sim (a_{17},a_{21}) \sim (a_{18},a_{22}) \sim (a_{19},a_{23})$

$(a_{10},a_{13}) \sim (a_{11},a_{14}) \sim (a_{9},a_{15}) \sim (a_{18},a_{21}) \sim (a_{19},a_{22}) \sim (a_{17},a_{23})$

$(a_{11},a_{13}) \sim (a_{9},a_{14}) \sim (a_{10},a_{15}) \sim (a_{19},a_{21}) \sim (a_{17},a_{22}) \sim (a_{18},a_{23})$

$(a_{12},a_{13}) \sim (a_{12},a_{14}) \sim (a_{12},a_{15}) \sim (a_{20},a_{21}) \sim (a_{20},a_{22}) \sim (a_{20},a_{23})$

$(a_{16},a_{13}) \sim (a_{16},a_{14}) \sim (a_{16},a_{15}) \sim (a_{8},a_{21}) \sim (a_{8},a_{22}) \sim (a_{8},a_{23})$

$(a_{17},a_{13}) \sim (a_{18},a_{14}) \sim (a_{19},a_{15}) \sim (a_{9},a_{21}) \sim (a_{10},a_{22}) \sim (a_{11},a_{23})$

$(a_{18},a_{13}) \sim (a_{19},a_{14}) \sim (a_{17},a_{15}) \sim (a_{10},a_{21}) \sim (a_{11},a_{22}) \sim (a_{9},a_{23})$

$(a_{19},a_{13}) \sim (a_{17},a_{14}) \sim (a_{18},a_{15}) \sim (a_{11},a_{21}) \sim (a_{9},a_{22}) \sim (a_{10},a_{23})$

$(a_{20},a_{13}) \sim (a_{20},a_{14}) \sim (a_{20},a_{15}) \sim (a_{12},a_{21}) \sim (a_{12},a_{22}) \sim (a_{12},a_{23})$

II. tipteki noktalar ise 18 tanedir:

$$(a_1,a_{12}) \sim (a_2,a_{12}) \sim (a_3,a_{12}) \sim (a_1,a_{20}) \sim (a_2,a_{20}) \sim (a_3,a_{20})$$
$$(a_4,a_9) \sim (a_4,a_{10}) \sim (a_4,a_{11}) \sim (a_4,a_{17}) \sim (a_4,a_{18}) \sim (a_4,a_{19})$$
$$(a_5,a_8) \sim (a_6,a_8) \sim (a_7,a_8) \sim (a_5,a_{16}) \sim (a_6,a_{16}) \sim (a_7,a_{16})$$
$$(a_5,a_9) \sim (a_6,a_{10}) \sim (a_7,a_{11}) \sim (a_5,a_{17}) \sim (a_6,a_{18}) \sim (a_7,a_{19})$$
$$(a_5,a_{10}) \sim (a_6,a_{11}) \sim (a_7,a_9) \sim (a_5,a_{18}) \sim (a_6,a_{19}) \sim (a_7,a_{17})$$
$$(a_5,a_{12}) \sim (a_6,a_{12}) \sim (a_7,a_{12}) \sim (a_5,a_{20}) \sim (a_6,a_{20}) \sim (a_7,a_{20})$$
$$(a_6,a_9) \sim (a_7,a_{10}) \sim (a_5,a_{11}) \sim (a_6,a_{17}) \sim (a_7,a_{18}) \sim (a_5,a_{19})$$
$$(a_8,a_5) \sim (a_8,a_6) \sim (a_8,a_7) \sim (a_{16},a_5) \sim (a_{16},a_6) \sim (a_{16},a_7)$$
$$(a_9,a_4) \sim (a_{10},a_4) \sim (a_{11},a_4) \sim (a_{17},a_4) \sim (a_{18},a_4) \sim (a_{19},a_4)$$
$$(a_9,a_5) \sim (a_{10},a_6) \sim (a_{11},a_7) \sim (a_{17},a_5) \sim (a_{18},a_6) \sim (a_{19},a_7)$$
$$(a_9,a_6) \sim (a_{10},a_7) \sim (a_{11},a_5) \sim (a_{17},a_6) \sim (a_{18},a_7) \sim (a_{19},a_5)$$
$$(a_9,a_{12}) \sim (a_{10},a_{12}) \sim (a_{11},a_{12}) \sim (a_{17},a_{20}) \sim (a_{18},a_{20}) \sim (a_{19},a_{20})$$
$$(a_9,a_{20}) \sim (a_{10},a_{20}) \sim (a_{11},a_{20}) \sim (a_{17},a_{12}) \sim (a_{18},a_{12}) \sim (a_{19},a_{12})$$
$$(a_{10},a_5) \sim (a_{11},a_6) \sim (a_9,a_7) \sim (a_{18},a_5) \sim (a_{19},a_6) \sim (a_{17},a_7)$$
$$(a_{12},a_1) \sim (a_{12},a_2) \sim (a_{12},a_3) \sim (a_{20},a_1) \sim (a_{20},a_2) \sim (a_{20},a_3)$$
$$(a_{12},a_5) \sim (a_{12},a_6) \sim (a_{12},a_7) \sim (a_{20},a_5) \sim (a_{20},a_6) \sim (a_{20},a_7)$$
$$(a_{12},a_9) \sim (a_{12},a_{10}) \sim (a_{12},a_{11}) \sim (a_{20},a_{17}) \sim (a_{20},a_{18}) \sim (a_{20},a_{19})$$
$$(a_{12},a_{17}) \sim (a_{12},a_{18}) \sim (a_{12},a_{19}) \sim (a_{20},a_9) \sim (a_{20},a_{10}) \sim (a_{20},a_{11})$$

olarak elde edilir. Doğru üzerindeki ikişer ikişer distant ve farklı olan $U:(1,0)$, $V:(0,1), W:(1,1)$ noktaları alınarak bunların komşulukları ve distant oldukları noktalar bulunabilir. Burada $U=(1,0)$ noktası için durum ayrıntılı olarak hesaplanmıştır.

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_0\end{pmatrix} = a_0 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_1\end{pmatrix} = a_1 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_2\end{pmatrix} = a_2 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_3\end{pmatrix} = a_3 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_4\end{pmatrix} = a_4 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_5\end{pmatrix} = a_5 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_6\end{pmatrix} = a_6 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_7\end{pmatrix} = a_7 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_8\end{pmatrix} = a_8 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_9\end{pmatrix} = a_9 \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{10}\end{pmatrix} = a_{10} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{11}\end{pmatrix} = a_{11} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{12}\end{pmatrix} = a_{12} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{14}\end{pmatrix} = a_{14} \in R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{15}\end{pmatrix} = a_{15} \in R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{16}\end{pmatrix} = a_{16} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{17}\end{pmatrix} = a_{17} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{18}\end{pmatrix} = a_{18} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{19}\end{pmatrix} = a_{19} \in R_{\triangledown}\backslash R^*_{\triangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{20}\end{pmatrix} = a_{20} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{21}\end{pmatrix} = a_{21} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{22} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{13} & a_{23}\end{pmatrix} = a_{23} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{0} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{1} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{2} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{3} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{4} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{5} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{6} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{7} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{8} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{9} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{10} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{11} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{12} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{16} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{17} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{18} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^{*}_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{19} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{20} & a_{13}\end{pmatrix} = a_{13} \in R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{1} & a_{12}\end{pmatrix} = a_{12} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{4} & a_{9}\end{pmatrix} = a_{9} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{5} & a_{8}\end{pmatrix} = a_{8} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{5} & a_{9}\end{pmatrix} = a_{9} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{5} & a_{10}\end{pmatrix} = a_{10} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{5} & a_{12}\end{pmatrix} = a_{12} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{6} & a_{9}\end{pmatrix} = a_{9} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{8} & a_{5}\end{pmatrix} = a_{5} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{9} & a_{4}\end{pmatrix} = a_{4} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{9} & a_{5}\end{pmatrix} = a_{5} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{9} & a_{6}\end{pmatrix} = a_{6} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{9} & a_{12}\end{pmatrix} = a_{12} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{9} & a_{20}\end{pmatrix} = a_{20} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{10} & a_{5}\end{pmatrix} = a_{5} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{12} & a_{1}\end{pmatrix} = a_{1} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{12} & a_{5}\end{pmatrix} = a_{5} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{12} & a_{9}\end{pmatrix} = a_{9} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown} \quad , \quad det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{12} & a_{17}\end{pmatrix} = a_{17} \in R_{\bigtriangledown}\backslash R^*_{\bigtriangledown}$$

Böylece $U=(1,0)$ a komşu olan noktalar

$(a_{13},a_1),(a_{13},a_2),(a_{13},a_3),(a_{13},a_4),(a_{13},a_5),(a_{13},a_6),$

$(a_{13},a_7),(a_{13},a_8),(a_{13},a_9),(a_{13},a_{10}),(a_{13},a_{11}),(a_{13},a_{12}),(a_{13},a_{16}),$

$(a_{13},a_{17}),(a_{13},a_{18}),(a_{13},a_{19}),(a_{13},a_{20}),(a_1,a_{12}),(a_4,a_9),(a_5,a_8),$

$(a_5,a_9),(a_5,a_{10}),(a_5,a_{12}),(a_6,a_9),(a_8,a_5),(a_9,a_4),(a_9,a_5),(a_9,a_6),$

$(a_9,a_{12}),(a_9,a_{20}),(a_{10},a_5),(a_{12},a_1),(a_{12},a_5),(a_{12},a_9),(a_{12},a_{17})$

şeklindedir.

$U=(1,0)$ a distant olan noktalar

$(a_{13},a_{13}),(a_{13},a_{14}),(a_{13},a_{15}),(a_{13},a_{21}),(a_{13},a_{22}),(a_{13},a_{23})$

$(a_0,a_{13}),(a_1,a_{13}),(a_2,a_{13}),(a_3,a_{13}),(a_4,a_{13}),(a_5,a_{13}),(a_6,a_{13}),$

$(a_7,a_{13}),(a_8,a_{13}),(a_9,a_{13}),(a_{10},a_{13}),(a_{11},a_{13}),(a_{12},a_{13}),(a_{16},a_{13})$

$(a_{17},a_{13}),(a_{18},a_{13}),(a_{19},a_{13}),(a_{20},a_{13})$

olur.

Benzer şekilde $V=(0,1)$ e komşu olan noktalar

$(a_1,a_{13}),(a_2,a_{13}),(a_3,a_{13}),(a_4,a_{13}),(a_5,a_{13}),(a_6,a_{13}),(a_7,a_{13}),$

$(a_8,a_{13}),(a_9,a_{13}),(a_{10},a_{13}),(a_{11},a_{13}),(a_{12},a_{13}),(a_{16},a_{13}),(a_{17},a_{13}),$

$(a_{18},a_{13}),(a_{19},a_{13}),(a_{20},a_{13}),(a_1,a_{12}),(a_4,a_9),(a_5,a_8),(a_5,a_9),$

$(a_5,a_{10}),(a_5,a_{12}),(a_6,a_9),(a_8,a_5),(a_9,a_4),(a_9,a_5),(a_9,a_6),(a_9,a_{12}),$

$(a_9,a_{20}),(a_{10},a_5),(a_{12},a_1),(a_{12},a_5),(a_{12},a_9),(a_{12},a_{17})$

olur.

$V=(0,1)$ e distant olan noktalar

$(a_{13},a_{13}),(a_{13},a_{14}),(a_{13},a_{15}),(a_{13},a_{21}),(a_{13},a_{22}),(a_{13},a_{23}),(a_{13},a_0),$

$(a_{13},a_1),(a_{13},a_2),(a_{13},a_3),(a_{13},a_4),(a_{13},a_5),(a_{13},a_6),(a_{13},a_7),$

$(a_{13},a_8),(a_{13},a_9),(a_{13},a_{10}),(a_{13},a_{11}),(a_{13},a_{12}),(a_{13},a_{16}),(a_{13},a_{17}),$

$(a_{13},a_{18}),(a_{13},a_{19}),(a_{13},a_{20})$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $W=(1,1)$ e komşu olan noktalar

$(a_{13},a_1),(a_{13},a_4),(a_{13},a_5),(a_{13},a_6),(a_{13},a_7),(a_{13},a_8),(a_{13},a_9),(a_{13},a_{10}),$

$(a_{13},a_{11}),(a_{13},a_{12}),(a_{13},a_{14}),(a_{13},a_{15}),(a_{13},a_{17}),(a_{13},a_{20}),(a_{13},a_{21}),$

$(a_{13},a_{22}),(a_{13},a_{23}),(a_1,a_{13}),(a_4,a_{13}),(a_5,a_{13}),(a_6,a_{13}),(a_7,a_{13}),$
$(a_8,a_{13}),(a_9,a_{13}),(a_{10},a_{13}),(a_{11},a_{13}),(a_{12},a_{13}),(a_{17},a_{13}),(a_{20},a_{13}),$
$(a_5,a_9),(a_5,a_{12}),(a_9,a_5),(a_9,a_{12}),(a_{12},a_5),(a_{12},a_9)$
dir.

$W=(1,1)$ e distant olan noktalar
$(a_{13},a_0),(a_{13},a_2),(a_{13},a_3),(a_{13},a_{16}),(a_{13},a_{18}),(a_{13},a_{19}),(a_0,a_{13}),$
$(a_2,a_{13}),(a_3,a_{13}),(a_{16},a_{13}),(a_{18},a_{13}),(a_{19},a_{13}),(a_1,a_{12}),(a_4,a_9),$
$(a_5,a_8),(a_5,a_{10}),(a_6,a_9),(a_8,a_5),(a_9,a_4),(a_9,a_6),(a_9,a_{20}),(a_{10},a_5),$
$(a_{12},a_1),(a_{12},a_{17})$
şeklinde bulunur.

Görüldüğü gibi herbir komşulukta 35 adet nokta bulunur ve ayırt edici U,V,W nokta çiftlerinin ortak 18 noktası vardır. Üç komşulukta da olan nokta sayısı ise 6 dır. Buna ek olarak $(a_{13},a_2),(a_{13},a_3),(a_{13},a_{16}),(a_{13},a_{17}),(a_{13},a_{18}),(a_{13},a_{19})$ noktaları U ya; $(a_2,a_{13}),(a_3,a_{13}),(a_{16},a_{13}),(a_{18},a_{13}),(a_{19},a_{13})$ noktaları V ye; $(a_{13},a_{14}),$ $(a_{13},a_{15}),(a_{13},a_{21}),(a_{13},a_{22}),(a_{13},a_{23})$ noktaları W ya özgü Jacobson noktalarıdır.

BÖLÜM 8

$GF(17)$ HALKASI ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU

$R_{\boxdot} = GF(17)$ halkasının karakteristiği 17 dir ve $|R_{\boxdot}| = 17$ elemanı vardır. $R_{\boxdot}$ nin elemanları şunlardır:

$R_{\boxdot} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

$GF(17)$ de $17 \equiv 0$ olduğundan dolayı Tablo 8.1 ve Tablo 8.2 de sırasıyla toplam ve çarpım tabloları verilmiştir:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Tablo 8.1 : $R_{\boxdot}$ *de Toplama İşlemi Tablosu*

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	13	15
3	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14
4	0	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	14	1	5	9	13
5	0	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6	0	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	15	4	10	16	5	11
7	0	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8	0	8	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9
9	0	9	1	10	2	11	3	12	4	13	5	14	6	15	7	16	8
10	0	10	3	13	6	16	9	2	12	5	15	8	1	11	4	14	7
11	0	11	5	16	10	4	15	9	3	14	8	2	13	7	1	12	6
12	0	12	7	2	14	9	4	16	11	6	1	13	8	3	15	10	5
13	0	13	9	5	1	14	10	6	2	15	11	7	3	16	12	8	4
14	0	14	11	8	5	2	16	13	10	7	4	1	15	12	9	6	3
15	0	15	13	11	9	7	5	3	1	16	14	12	10	8	6	4	2
16	0	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tablo 8.2 : $R_{\boxdot}$ *de Çarpma İşlemi Tablosu*

Tablo 8.1 ve Tablo 8.2 yardımıyla aşağıdakiler görülür:

$R_{\boxdot}$ nin birimsel elemanlarının kümesi

$R^*_{\boxdot} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ olup $|R^*_{\boxdot}| = 16$ dır.

$R_{\boxdot}$ nin $R^*_{\boxdot}$ dışındaki kalan diğer elemanı ise sıfır bölendir:

$R_{\boxdot} \backslash R^*_{\boxdot} = \{0\}$ ve $|R_{\boxdot} \backslash R^*_{\boxdot}| = 1$ dir.

$R_{\boxdot}$ nin temel idealleri

$$\begin{aligned} < 0 > &= \{0\}, < 1 > = < 2 > = < 3 > = < 4 > = < 5 > = < 6 > = < 7 > \\ &= < 8 > = < 9 > = < 10 > = < 11 > = < 12 > \\ &= < 13 > = < 14 > = < 15 > = < 16 > = R_{\boxdot} \end{aligned}$$

olup tek maksimal ideali

$< 0 >$ dır.

$PR_{\boxdot}(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar sıralı ikili koordinatlarla gösterilir ve cebirsel olarak I. ve II. tip noktalar aşağıda gösterilmiştir:

I.tip noktalar toplam 18 tanedir ve noktalar kümesinde $\rho \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ birimsel elemanları için $(\rho a, \rho b)$ ve (a, b) nin aynı sınıfa ait oldukları gözönüne alınırsa $((\rho a, \rho b) \sim (a, b))$ noktaları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$(0,1) \sim (0,2) \sim (0,3) \sim (0,4) \sim (0,5) \sim (0,6) \sim (0,7) \sim (0,8)$
$\sim (0,9) \sim (0,10) \sim (0,11) \sim (0,12) \sim (0,13) \sim (0,14) \sim (0,15) \sim (0,16)$

$(1,0) \sim (2,0) \sim (3,0) \sim (4,0) \sim (5,0) \sim (6,0) \sim (7,0) \sim (8,0)$
$\sim (9,0) \sim (10,0) \sim (11,0) \sim (12,0) \sim (13,0) \sim (14,0) \sim (15,0) \sim (16,0)$

$(1,1) \sim (2,2) \sim (3,3) \sim (4,4) \sim (5,5) \sim (6,6) \sim (7,7) \sim (8,8)$
$\sim (9,9) \sim (10,10) \sim (11,11) \sim (12,12) \sim (13,13) \sim (14,14) \sim (15,15)$
$\sim (16,16)$

$(1,2) \sim (2,4) \sim (3,6) \sim (4,8) \sim (5,10) \sim (6,12) \sim (7,14) \sim (8,16)$
$\sim (9,1) \sim (10,3) \sim (11,5) \sim (12,7) \sim (13,9) \sim (14,11) \sim (15,13) \sim (16,15)$

$(1,3) \sim (2,6) \sim (3,9) \sim (4,12) \sim (5,15) \sim (6,1) \sim (7,4) \sim (8,7)$
$\sim (9,10) \sim (10,13) \sim (11,16) \sim (12,2) \sim (13,5) \sim (14,8) \sim (15,11)$
$\sim (16,14)$

$(1,4) \sim (2,8) \sim (3,12) \sim (4,16) \sim (5,3) \sim (6,7) \sim (7,11) \sim (8,15)$
$\sim (9,2) \sim (10,6) \sim (11,10) \sim (12,14) \sim (13,1) \sim (14,5) \sim (15,9) \sim (16,13)$

$(1,5) \sim (2,10) \sim (3,15) \sim (4,3) \sim (5,8) \sim (6,13) \sim (7,1) \sim (8,6)$
$\sim (9,11) \sim (10,16) \sim (11,4) \sim (12,9) \sim (13,14) \sim (14,2) \sim (15,7)$
$\sim (16,12)$

$(1,6) \sim (2,12) \sim (3,1) \sim (4,7) \sim (5,13) \sim (6,2) \sim (7,8) \sim (8,14)$
$\sim (9,3) \sim (10,9) \sim (11,15) \sim (12,4) \sim (13,10) \sim (14,16) \sim (15,5)$
$\sim (16,11)$

$(1,7) \sim (2,14) \sim (3,4) \sim (4,11) \sim (5,1) \sim (6,8) \sim (7,15) \sim (8,5)$
$\sim (9,12) \sim (10,2) \sim (11,9) \sim (12,16) \sim (13,6) \sim (14,13) \sim (15,3)$
$\sim (16,10)$

$(1,8) \sim (2,16) \sim (3,7) \sim (4,15) \sim (5,6) \sim (6,14) \sim (7,5) \sim (8,13)$
$\sim (9,4) \sim (10,12) \sim (11,3) \sim (12,11) \sim (13,2) \sim (14,10) \sim (15,1) \sim (16,9)$

$(1,9) \sim (2,1) \sim (3,10) \sim (4,2) \sim (5,11) \sim (6,3) \sim (7,12) \sim (8,4)$
$\sim (9,13) \sim (10,5) \sim (11,14) \sim (12,6) \sim (13,15) \sim (14,7) \sim (15,16)$
$\sim (16,8)$

$(1,10) \sim (2,3) \sim (3,13) \sim (4,6) \sim (5,16) \sim (6,9) \sim (7,2) \sim (8,12)$
$\sim (9,5) \sim (10,15) \sim (11,8) \sim (12,1) \sim (13,11) \sim (14,4) \sim (15,14) \sim (16,7)$

$(1,11) \sim (2,5) \sim (3,16) \sim (4,10) \sim (5,4) \sim (6,15) \sim (7,9) \sim (8,3)$
$\sim (9,14) \sim (10,8) \sim (11,2) \sim (12,13) \sim (13,7) \sim (14,1) \sim (15,12) \sim (16,6)$

$(1,12) \sim (2,7) \sim (3,2) \sim (4,14) \sim (5,9) \sim (6,4) \sim (7,16) \sim (8,11)$
$\sim (9,6) \sim (10,1) \sim (11,13) \sim (12,8) \sim (13,3) \sim (14,15) \sim (15,10) \sim (16,5)$

$(1,13) \sim (2,9) \sim (3,5) \sim (4,1) \sim (5,14) \sim (6,10) \sim (7,6) \sim (8,2)$
$\sim (9,15) \sim (10,11) \sim (11,7) \sim (12,3) \sim (13,16) \sim (14,12) \sim (15,8)$
$\sim (16,4)$

$(1,14) \sim (2,11) \sim (3,8) \sim (4,5) \sim (5,2) \sim (6,16) \sim (7,13) \sim (8,10)$
$\sim (9,7) \sim (10,4) \sim (11,1) \sim (12,15) \sim (13,12) \sim (14,9) \sim (15,6) \sim (16,3)$

$(1,15) \sim (2,13) \sim (3,11) \sim (4,9) \sim (5,7) \sim (6,5) \sim (7,3) \sim (8,1)$
$\sim (9,16) \sim (10,14) \sim (11,12) \sim (12,10) \sim (13,8) \sim (14,6) \sim (15,4)$
$\sim (16,2)$

$(1,16) \sim (2,15) \sim (3,14) \sim (4,13) \sim (5,12) \sim (6,11) \sim (7,10) \sim (8,9)$
$\sim (9,8) \sim (10,7) \sim (11,6) \sim (12,5) \sim (13,4) \sim (14,3) \sim (15,2) \sim (16,1)$

$R_{\boxdot}$ halkasının tek sıfır böleni maksimal ideal olduğundan II.tipte hiç bir nokta yoktur.

Doğru üzerinde ikişer ikişer distant ve farklı olan $U:(1,0), V:(0,1), W:(1,1)$ noktaları alınarak bunların komşulukları ve distant oldukları noktalar bulunabilir.

Burada $U = (1, 0)$ noktası için durum ayrıntılı olarak hesaplanmıştır. $V : (0, 1)$, $W : (1, 1)$ noktaları için ilgili hesaplamalar yapılmış ve sonuçlar yazılmıştır.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 4 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 5 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 6 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 7 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 8 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = 9 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = 10 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} = 11 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = 12 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} = 13 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = 14 \in R^*_{\boxdot} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = 15 \in R^*_{\boxdot}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} = 16 \in R^*_{\boxdot}$$

$U = (1, 0)$ a komşu olan nokta yoktur.

U ya distant olan noktalar

$(0,1),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10),$

$(1,11),(1,12),(1,13),(1,14),(1,15),(1,16)$

dır.

Benzer şekilde $V=(0,1)$ için yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa $V=(0,1)$ e komşu olan noktanın olmadığı görülebilir.

V ye distant olan noktalar

$(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10),$

$(1,11),(1,12),(1,13),(1,14),(1,15),(1,16)$

dır.

$W=(1,1)$ için de yapılan hesaplamalar $W=(1,1)$ e komşu olan noktanın bulunmadığını göstermiştir.

W ya distant olan noktalar

$(0,1),(1,0),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10),$

$(1,11),(1,12),(1,13),(1,14),(1,15),(1,16)$

dır.

Görüldüğü üzere U,V,W nun komşuluklarında nokta olmadığından dolayı Jacobson noktası da yoktur.

BÖLÜM 9

$\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 3x - 3\rangle$ HALKASI ÜZERİNDE PROJEKTİF DOĞRU

$\mathbb{Z}_4$ halkasında olduğu gibi $R_{\bowtie} = \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2-3x-3\rangle \equiv \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2+x+1\rangle$ halkasının karakteristiği 4 tür ve $|R_{\bowtie}| = 16$ elemanı vardır. $R_{\bowtie}$ nin elemanları şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} R_{\bowtie} &\equiv \{a_0 + a_1x + \langle x^2 - 3x - 3\rangle \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_4\} \\ &= \{\langle x^2 - 3x - 3\rangle, 1 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, 2 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, \\ &\quad 3 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, x + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, x + 1 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, \\ &\quad x + 2 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, x + 3 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, 2x + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, \\ &\quad 2x + 1 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, 2x + 2 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, \\ &\quad 2x + 3 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, 3x + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, \\ &\quad 3x + 1 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, 3x + 2 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle, \\ &\quad 3x + 3 + \langle x^2 - 3x - 3\rangle\} \text{ ve buradan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : R_{\bowtie} \quad &\rightarrow \quad \mathbb{Z}_4[x] \\ a_0 + a_1x + \langle x^2 - 3x - 3\rangle \quad &\longmapsto \quad a_0 + a_1x \end{aligned}$$

bir izomorfizm olduğundan

$$\begin{aligned} R_{\bowtie} = \{&0, 1, 2, 3, x, x + 1, x + 2, x + 3, 2x, 2x + 1, 2x + 2, 2x + 3, 3x, \\ &3x + 1, 3x + 2, 3x + 3\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbb{Z}_4$ de $4 \equiv 0$, $+2 \equiv -2$, $-3 \equiv +1$ olduğundan ve $x^2 - 3x - 3 = 0$ indirgenemez polinomundan dolayı halkanın toplam ve çarpım tabloları sırasıyla Tablo 9.1 ve Tablo 9.2 de verilmiştir::

$\oplus$	0	1	2	3	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$
0	0	1	2	3	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$
1	1	2	3	0	$x+1$	$x+2$	$x+3$	x	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$
2	2	3	0	1	$x+2$	$x+3$	x	$x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$
3	3	0	1	2	$x+3$	x	$x+1$	$x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$
x	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	0	1	2	3
$x+1$	$x+1$	$x+2$	$x+3$	x	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	1	2	3	0
$x+2$	$x+2$	$x+3$	x	$x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	2	3	0	1
$x+3$	$x+3$	x	$x+1$	$x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	3	0	1	2
$2x$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	0	1	2	3	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$
$2x+1$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	1	2	3	0	$x+1$	$x+2$	$x+3$	x
$2x+2$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	2	3	0	1	$x+2$	$x+3$	x	$x+1$
$2x+3$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	3	0	1	2	$x+3$	x	$x+1$	$x+2$
$3x$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	0	1	2	3	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$
$3x+1$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	1	2	3	0	$x+1$	$x+2$	$x+3$	x	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$
$3x+2$	$3x+2$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	2	3	0	1	$x+2$	$x+3$	x	$x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$
$3x+3$	$3x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	3	0	1	2	$x+3$	x	$x+1$	$x+2$	$2x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$

Tablo 9.1 : $R_{\bowtie}$ *da Toplama İşlemi Tablosu*

$\otimes$	0	1	2	3	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$3x$	$3x+1$	$3x+2$	$3x+3$
2	0	2	0	2	$2x$	$2x+2$	$2x$	$2x+2$	0	2	0	2	$2x$	$2x+2$	$2x$	$2x+2$
3	0	3	2	1	$3x$	$3x+3$	$3x+2$	$3x+1$	$2x$	$2x+3$	$2x+2$	$2x+1$	x	$x+3$	$x+2$	$x+1$
x	0	x	$2x$	$3x$	$3x+3$	3	$x+3$	$2x+3$	$2x+2$	$3x+2$	2	$x+2$	$x+1$	$2x+1$	$3x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	$2x+2$	$3x+3$	3	x	$2x+1$	$3x+2$	2	$x+3$	$2x$	$3x+1$	1	$x+2$	$2x+3$	$3x$
$x+2$	0	$x+2$	$2x$	$3x+2$	$x+3$	$2x+1$	$3x+3$	1	$2x+2$	$3x$	2	x	$3x+1$	3	$x+1$	$2x+3$
$x+3$	0	$x+3$	$2x+2$	$3x+1$	$2x+3$	$3x+2$	1	x	2	$x+1$	$2x$	$3x+3$	$2x+1$	$3x$	3	$x+2$
$2x$	0	$2x$	0	$2x$	$2x+2$	2	$2x+2$	2	0	$2x$	0	$2x$	$2x+2$	2	$2x+2$	2
$2x+1$	0	$2x+1$	2	$2x+3$	$3x+2$	$x+3$	$3x$	$x+1$	$2x$	1	$2x+2$	3	$x+2$	$3x+3$	x	$3x+1$
$2x+2$	0	$2x+2$	0	$2x+2$	2	$2x$	2	$2x$	0	$2x+2$	0	$2x+2$	2	$2x$	2	$2x$
$2x+3$	0	$2x+3$	2	$2x+1$	$x+2$	$3x+1$	x	$3x+3$	$2x$	3	$2x+2$	1	$3x+2$	$x+1$	$3x$	$x+3$
$3x$	0	$3x$	$2x$	x	$x+1$	1	$3x+1$	$2x+1$	$2x+2$	$x+2$	2	$3x+2$	$3x+3$	$2x+3$	$x+3$	3
$3x+1$	0	$3x+1$	$2x+2$	$x+3$	$2x+1$	$x+2$	3	$3x$	2	$3x+3$	$2x$	$x+1$	$2x+3$	x	1	$3x+2$
$3x+2$	0	$3x+2$	$2x$	$x+2$	$3x+1$	$2x+3$	$x+1$	3	$2x+2$	x	2	$3x$	$x+3$	1	$3x+3$	$2x+1$
$3x+3$	0	$3x+3$	$2x+2$	$x+1$	1	$3x$	$2x+3$	$x+2$	2	$3x+1$	$2x$	$x+3$	3	$3x+2$	$2x+1$	x

Tablo 9.2 : $R_{\bowtie}$ *da Çarpma İşlemi Tablosu*

Tablo 9.1 ve Tablo 9.2 yardımıyla aşağıdakiler görülür:

$R_{\bowtie}$ nin birimsel elemanlarının kümesi

$R_{\bowtie}^{*} = \{1, 3, x, x+1, x+2, x+3, 2x+1, 2x+3, 3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3\}$

olup $|R_{\bowtie}^{*}| = 12$ dir.

$R_{\bowtie}$ nin $R_{\bowtie}^{*}$ dışındaki diğer elemanları ise sıfır bölendir:

$R_{\bowtie} \backslash R_{\bowtie}^{*} = \{0, 2, 2x, 2x+2\}$ ve $|R_{\bowtie} \backslash R_{\bowtie}^{*}| = 4$ tür.

$R_{\bowtie}$ nin temel idealleri

$< 0 >= \{0\}$

$$< 1 >=< 3 >=< x >=< x+1 >=< x+2 >=< x+3 >$$
$$=< 2x+1 >=< 2x+3 >=< 3x >=< 3x+1 >$$
$$=< 3x+2 >=< 3x+3 >= R_{\bowtie}$$

$< 2 >=< 2x >=< 2x+2 >= \{0, 2, 2x, 2x+2\}$

dir. Böylece $R_{\bowtie}$ nin tek maksimal ideali $< 2 >=< 2x >=< 2x+2 >$ dir.

$PR_{\bowtie}(1)$ projektif doğrusu üzerindeki noktalar sıralı ikili koordinatlarla gösterilir ve cebirsel olarak yine iki farklı tiptedirler, I.tip noktalar ve II.tip noktalar:

I. tipteki noktalar toplam 20 tanedir ve noktalar kümesinde $\rho \in \{1, 3, x, x+1, x+2, x+3, 2x+1, 2x+3, 3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3\}$ birimsel elemanları için $(\rho a, \rho b)$ ve (a, b) nin aynı sınıfa ait oldukları gözönüne alınırsa $((\rho a, \rho b) \sim (a, b))$ noktaları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(1,0) \sim (3,0) \sim (x,0) \sim (x+1,0) \sim (x+2,0) \sim (x+3,0) \sim (2x+1,0)$$
$$\sim (2x+3,0) \sim (3x,0) \sim (3x+1,0) \sim (3x+2,0) \sim (3x+3,0)$$

$$(1,1) \sim (3,3) \sim (x,x) \sim (x+1,x+1) \sim (x+2,x+2) \sim (x+3,x+3)$$
$$\sim (2x+1,2x+1) \sim (2x+3,2x+3) \sim (3x,3x) \sim (3x+1,3x+1)$$
$$\sim (3x+2,3x+2) \sim (3x+3,3x+3)$$

$$(1,2) \sim (3,2) \sim (x,2x) \sim (x+1,2x+2) \sim (x+2,2x) \sim (x+3,2x+2)$$
$$\sim (2x+1,2) \sim (2x+3,2) \sim (3x,2x) \sim (3x+1,2x+2) \sim (3x+2,2x)$$
$$\sim (3x+3,2x+2)$$

$$(1,3) \sim (3,1) \sim (x,3x) \sim (x+1,3x+3) \sim (x+2,3x+2) \sim (x+3,3x+1)$$

$$\sim (2x+1, 2x+3) \sim (2x+3, 2x+1) \sim (3x, x) \sim (3x+1, x+3)$$
$$\sim (3x+2, x+2) \sim (3x+3, x+1)$$

$$(1, x) \sim (3, 3x) \sim (x, 3x+3) \sim (x+1, 3) \sim (x+2, x+3) \sim (x+3, 2x+3)$$
$$\sim (2x+1, 3x+2) \sim (2x+3, x+2) \sim (3x, x+1) \sim (3x+1, 2x+1)$$
$$\sim (3x+2, 3x+1) \sim (3x+3, 1)$$

$$(1, x+1) \sim (3, 3x+3) \sim (x, 3) \sim (x+1, x) \sim (x+2, 2x+1) \sim (x+3, 3x+2)$$
$$\sim (2x+1, x+3) \sim (2x+3, 3x+1) \sim (3x, 1) \sim (3x+1, x+2)$$
$$\sim (3x+2, 2x+3) \sim (3x+3, 3x)$$

$$(1, x+2) \sim (3, 3x+2) \sim (x, x+3) \sim (x+1, 2x+1) \sim (x+2, 3x+3)$$
$$\sim (x+3, 1) \sim (2x+1, 3x) \sim (2x+3, x) \sim (3x, 3x+1) \sim (3x+1, 3)$$
$$\sim (3x+2, x+1) \sim (3x+3, 2x+3)$$

$$(1, x+3) \sim (3, 3x+1) \sim (x, 2x+3) \sim (x+1, 3x+2) \sim (x+2, 1) \sim (x+3, x)$$
$$\sim (2x+1, x+1) \sim (2x+3, 3x+3) \sim (3x, 2x+1) \sim (3x+1, 3x) \sim (3x+2, 3)$$
$$\sim (3x+3, x+2)$$

$$(1, 2x) \sim (3, 2x) \sim (x, 2x+2) \sim (x+1, 2) \sim (x+2, 2x+2) \sim (x+3, 2)$$
$$\sim (2x+1, 2x) \sim (2x+3, 2x) \sim (3x, 2x+2) \sim (3x+1, 2) \sim (3x+2, 2x+2)$$
$$\sim (3x+3, 2)$$

$$(1, 2x+1) \sim (3, 2x+3) \sim (x, 3x+2) \sim (x+1, x+3) \sim (x+2, 3x)$$
$$\sim (x+3, x+1) \sim (2x+1, 1) \sim (2x+3, 3) \sim (3x, x+2) \sim (3x+1, 3x+3)$$
$$\sim (3x+2, x) \sim (3x+3, 3x+1)$$

$$(1, 2x+2) \sim (3, 2x+2) \sim (x, 2) \sim (x+1, 2x) \sim (x+2, 2) \sim (x+3, 2x)$$
$$\sim (2x+1, 2x+2) \sim (2x+3, 2x+2) \sim (3x, 2) \sim (3x+1, 2x) \sim (3x+2, 2)$$
$$\sim (3x+3, 2x)$$

$$(1, 2x+3) \sim (3, 2x+1) \sim (x, x+2) \sim (x+1, 3x+1) \sim (x+2, x)$$
$$\sim (x+3, 3x+3) \sim (2x+1, 3) \sim (2x+3, 1) \sim (3x, 3x+2) \sim (3x+1, x+1)$$
$$\sim (3x+2, 3x) \sim (3x+3, x+3)$$

$(1, 3x) \sim (3, x) \sim (x, x+1) \sim (x+1, 1) \sim (x+2, 3x+1) \sim (x+3, 2x+1)$
$\sim (2x+1, x+2) \sim (2x+3, 3x+2) \sim (3x, 3x+3) \sim (3x+1, 2x+3)$
$\sim (3x+2, x+3) \sim (3x+3, 3)$

$(1, 3x+1) \sim (3, x+3) \sim (x, 2x+1) \sim (x+1, x+2) \sim (x+2, 3)$
$\sim (x+3, 3x) \sim (2x+1, 3x+3) \sim (2x+3, x+1) \sim (3x, 2x+3) \sim (3x+1, x)$
$\sim (3x+2, 1) \sim (3x+3, 3x+2)$

$(1, 3x+2) \sim (3, x+2) \sim (x, 3x+1) \sim (x+1, 2x+3) \sim (x+2, x+1)$
$\sim (x+3, 3) \sim (2x+1, x) \sim (2x+3, 3x) \sim (3x, x+3) \sim (3x+1, 1)$
$\sim (3x+2, 3x+3) \sim (3x+3, 2x+1)$

$(1, 3x+3) \sim (3, x+1) \sim (x, 1) \sim (x+1, 3x) \sim (x+2, 2x+3) \sim (x+3, x+2)$
$\sim (2x+1, 3x+1) \sim (2x+3, x+3) \sim (3x, 3) \sim (3x+1, 3x+2)$
$\sim (3x+2, 2x+1) \sim (3x+3, x)$

$(0, 1) \sim (0, 3) \sim (0, x) \sim (0, x+1) \sim (0, x+2) \sim (0, x+3) \sim (0, 2x+1)$
$\sim (0, 2x+3) \sim (0, 3x) \sim (0, 3x+1) \sim (0, 3x+2) \sim (0, 3x+3)$

$(2, 1) \sim (2, 3) \sim (2x, x) \sim (2x+2, x+1) \sim (2x, x+2) \sim (2x+2, x+3)$
$\sim (2x, 2+1) \sim (2x, 2+3) \sim (2x, 3x) \sim (2x+2, 3x+1) \sim (2x, 3x+2)$
$\sim (2x+2, 3x+3)$

$(2x, 1) \sim (2x, 3) \sim (2x+2, x) \sim (2, x+1) \sim (2x+2, x+2) \sim (2, x+3)$
$\sim (2x, 2x+1) \sim (2x, 2x+3) \sim (2x+2, 3x) \sim (2, 3x+1) \sim (2x+2, 3x+2)$
$\sim (2, 3x+3)$

$(2x+2, 1) \sim (2x+2, 3) \sim (2, x) \sim (2x, x+1) \sim (2, x+2) \sim (2x, x+3)$
$\sim (2x+2, 2x+1) \sim (2x+2, 2x+3) \sim (2, 3x) \sim (2x, 3x+1) \sim (2, 3x+2)$
$\sim (2x, 3x+3)$

Tek maksimal ideal olduğundan dolayı II. tipte nokta bulunmamaktadır.

Doğru üzerinde ikişer ikişer distant ve farklı olan $U : (1, 0), V : (0, 1)$, $W : (1, 1)$ noktaları alınarak bunların komşulukları ve distant oldukları noktalar bulunabilir. Burada $U = (1,0)$ noktası için durum ayrıntılı olarak hesaplanmıştır. $V : (0,1), W : (1,1)$ noktaları için, hesaplamalar yapılarak buraya sadece sonuçları yazılmıştır.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \in R_{\bowtie} \backslash R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = x+1 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix} = x+2 \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+3 \end{pmatrix} = x+3 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = 2x \in R_{\bowtie} \backslash R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2x+1 \end{pmatrix} = 2x+1 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x+2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2x+2 \end{pmatrix} = 2x + 2 \in R_{\bowtie} \backslash R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2x+3 \end{pmatrix} = 2x+3 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3x \end{pmatrix} = 3x \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3x+1 \end{pmatrix} = 3x+1 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3x+2 \end{pmatrix} = 3x+2 \in R^*_{\bowtie} \quad , \quad det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} = 1 \in R^*_{\bowtie}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3x+3 \end{pmatrix} = 3x+3 \in R^*_{\bowtie}$$

$U = (1,0)$ a komşu olan noktalar
$(1,2), (1,2x), (1,2x+2)$

U ya distant olan noktalar
$(1,1), (1,3), (1,x), (1,x+1), (1,x+2), (1,x+3), (1,2x+1), (1,2x+3), (1,3x),$
$(1,3x+1), (1,3x+2), (1,3x+3), (0,1), (2,1), (2x,1), (2x+2,1)$
dir.

Benzer şekilde $V = (0,1)$ e komşu ve distant olan noktalar sırasıyla şunlardır:

$V = (0,1)$ e komşu olan noktalar
$(2,1), (2x,1), (2x+2,1)$

V ye distant olan noktalar
$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,x), (1,x+1), (1,x+2), (1,x+3), (1,2x),$
$(1,2x+1), (1,2x+2), (1,2x+3), (1,3x), (1,3x+1), (1,3x+2), (1,3x+3),$

$W = (1,1)$ e komşu ve distant olan noktalar sırasıyla şunlardır:

$W = (1,1)$ e komşu olan noktalar
$(1,3), (1,2x+1), (1,2x+3)$

W ya distant olan noktalar
$(1,0), (1,2), (1,x), (1,x+1), (1,x+2), (1,x+3), (1,2x), (1,2x+2),$
$(1,3x), (1,3x+1), (1,3x+2), (1,3x+3), (0,1), (2,1), (2x,1), (2x+2,1)$
dır.

Görüldüğü gibi herbir komşulukta 3 adet nokta bulunur. Ayrıca ayırt edici U, V, W nokta çiftlerinin ortak noktası yoktur ve her komşulukta bulunan noktalar ilgili ayırt edici noktaya özgü Jacobson noktalarıdır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Olgun, Ş., 2003. Soyut Matematik, Osmangazi Üniversitesi.

Karakaş, H. İ., 1998. Soyut Cebire Giriş, Matematik Vakfı.

Bluck, A., Herzer, A., 2005. Kettengeometrien, Shaker Verlag, Aachen.

Saniga, M., Planat, M., 2006. The Projective Line over the Finite Quotient Ring $GF(2)[x]/\langle x^3 - x\rangle$ and Quantum Entanglement I. Theoretical Background, Theoretical and Mathematical Physics, 151(1): 474–481p.

Saniga, M., Planat, M., 2008. On the Fine Structure of the Projective Line over $GF(2) \otimes GF(2) \otimes GF(2)$, Chaos, Solitons and Fractals 37 337-345p.

Saniga, M., Planat, M., Kibler, M. R., and Pracna, P., 2007. A Classification of the Projective Lines over Small Rings, Chaos, Solitons and Fractals 33 1095–1102p.