Üçgensel Normlar Üzerine

Hacer Hancı

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Ocak 2013

On The Triangular Norms

Hacer Hancı

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

January 2013

Üçgensel Normlar Üzerine

Hacer Hancı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ziya Akça

Ocak 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Hacer Hancı' nın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Üçgensel Normlar Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ziya AKÇA

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, üçgensel normlardan; minimum t-norm, product t-norm, Lukasiewicz t-norm ve drastic product t-norm kavramları ve bu t-normların duali olan t-conormlar incelenerek minimum t-normun bir uygulaması olan fiber projektif düzlem örneği sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Üçgensel Normlar, Fiber Projektif Düzlem

SUMMARY

In this thesis; minimum t-norm, product t-norm, Lukasiewicz t-norm, drastic product t-norm and their dual t-conorms have been examined. Then the fiber projective plane which is the application example of minimum t-norm has been presented.

Keywords: Triangular Norms, Fiber Projective Plane

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Doç. Dr. Ziya Akça

başta olmak üzere

Doç. Dr. Ayşe Bayar ve **Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi**'ye;

ve beni her zaman destekleyen,

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Üçgensel normlar, $[0,1]$ aralığı üzerindeki ikili işlemlerin özel bir türüdür. Özellikle mühendislik uygulamaları ve bulanık mantıkta kullanılır.

Bu çalışmada, birinci bölümde gerekli olan bazı temel kavramlar verildi.

İkinci bölümde üçgensel normun tanımı verilip dört temel üçgensel norm olan T_M; minimum , T_P; product, T_L; Lukasiewicz ve T_D; drastic product üçgensel normları incelendi. Üçgensel normla ilgili teorem, sonuç ve örnekler verildi. Daha sonra dört temel üçgensel normun duali olan üçgensel conormlar verilip üçgensel conormlarla ilgili teorem, sonuç ve örnekler incelendi.

Son bölümde önce fuzzy küme teorilerinden bazı temel kavramlar verildi. Daha sonra ise fiber noktalar, fiber doğrular ve fiber projektif düzlem kavramları tanımlandı. İkinci bölümde tanımlanan üçgensel normlardan minimum üçgensel norm kullanılarak L. Kuijken' in çalışmalarında verilen fiber projektif düzlem örneği incelendi.

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1 İşlemler ve Cebirsel Yapılar

Tanım 1.1 A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ nın boş olmayan bir alt kümesi α olsun. α dan A kümesine herhangi bir fonksiyona A da bir **ikili işlem** ya da kısaca bir **işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A \times A$ nın herhangi bir (a,b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a+b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.1 En çok bilinen ikili işlem örnekleri tamsayıların (ve gerçel sayıların) toplama, çıkarma ve çarpma işlemleridir. Bölme işlemi tamsayılar içinde bir ikili işlem değildir.

Örnek 1.2 Gerçel girdili 2×2 matrislerden oluşan $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (daha genel olarak n×n matrislerden oluşan $\mathbb{R}^{n\times n}$) kümesi içinde matris toplamı ve matris çarpımı ilginç ikili işlem örnekleridir.

Tanım 1.2 Bir A kümesinde tanımlı bir $\circ$ işlemi verilmiş olsun. $x \circ y$ nin tanımlı olduğu her (x,y) için $y \circ x$ de tanımlı ve

$$x \circ y = y \circ x$$

önermesi doğru ise $\circ$ işleminin **değişme özelliği vardır**, denir. Değişme özelliği bulunan bir işleme değişmeli işlem denir (Karakaş, 1998).

Tanım 1.3 Bir A kümesinde tanımlı bir $\circ$ işlemi verilmiş olsun. $(x \circ y) \circ z$ nin tanımlı olduğu her x, y, z için $x \circ (y \circ z)$ de tanımlı ve

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

önermesi doğru ise $\circ$ işleminin **birleşme özelliği vardır**, denir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.3 Gerçel sayıların toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliğine sahip oldukları bilinmektedir. Çıkarma işleminin birleşme özelliği yoktur. Matris toplamı ve matris çarpımı, gerçel girdili matrisler üzerinde birleşme özelliğine sahiptirler. Gerçel sayıların toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği vardır. Çıkarma işleminin değişme özelliği yoktur. Gerçel girdili matrisler için matris toplamı işleminin değişme özelliği vardır, ancak matris çarpımı işleminin değişme özelliği yoktur.

Tanım 1.4 F boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+$ ve $\cdot$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F,+,\cdot)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu üçlüye **cisim** adı verilir.

C1) Her $a,b \in F$ için $a+b=b+a$ ve $a\cdot b=b\cdot a$ dır.

C2) Her $a,b,c \in F$ için $(a+b)+c=a+(b+c)$ ve $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ dır.

C3) Her $a,b,c \in F$ için $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(b\cdot c)$ dır.

C4) F kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki, her $a\in F$ için $a+0=a$ eşitliğini sağlar.

C5) F kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı her $a\in F$ için $a\cdot 1=a$ eşitliğini sağlar.

C6) Her $a\in F$ elemanı için, F kümesinde öyle bir $-a$ elemanı vardır ki, $a+(-a)=0$ eşitliğini sağlar.

C7) Her $0\neq a\in F$ için, F kümesinde öyle bir a^{-1} elemanı vardır ki, $a\cdot a^{-1}=1$ eşitliğini sağlar.

Örnek 1.4 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ birer cisim iken $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Tanım 1.5 $V\neq\varnothing$ bir küme ve F bir cisim olsun. $+:V\times V\to V$ ve $\cdot:F\times V\to V$ iki fonksiyon olmak üzere $(V,F,+,\cdot)$ dörtlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dörtlüye bir **vektör uzayı** adı verilir.

V1) Her $x,y\in V$ için $x+y=y+x$ dir.

V2) Her $x,y,z\in V$ için $(x+y)+z=x+(y+z)$ dir.

V3) Her $x\in V$ için $x+\theta=x$ olacak şekilde V de en az bir θ elemanı vardır.

V4) Her $x\in V$ elemanı için, $x+y=\theta$ eşitliğini sağlayan V de en az bir y elemanı vardır.

V5) Her $a,b \in F$ ve her $x\in V$ için $a\cdot(b\cdot x)=(a\cdot b)\cdot x$ dir.

V6) Her $a,b\in F$ ve her $x\in V$ için $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$ dir.

V7) Her $a \in F$ ve her $x, y \in V$ için $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$ dir.

V8) Her $x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir.

Örnek 1.5 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer vektör uzayıdır. n$\in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.6 V bir vektör uzayı ve U bunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa U kümesine V nin bir **lineer alt uzayı** denir.

1) $x \in U$ ve $y \in U$ iken $x + y \in U$ dır.

2) $x \in U$ ve $r \in \mathbb{R}$ iken $rx \in U$ dır.

Bu iki işlemden anlaşıldığı gibi U nun elemanlarına iki temel işlem uygulandığında yine U nun elemanları elde edilir. Eğer V bir kompleks vektör uzayı ise (2) koşulu, $x \in U$ ve $r \in \mathbb{C}$ iken $rx \in U$ şeklinde değiştirilir (Smith, 1977).

Örnek 1.6 (1) V daima kendisinin bir alt uzayıdır.

(2) Yalnız sıfır vektöründen oluşan $\{0\}$ kümesi, her zaman V nin bir alt uzayıdır.

1.2 Çeşitli Geometrik Yapılar

Tanım 1.7 Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ üzerinde bir $\circ$ bağıntısından meydana gelen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ üçlüsüne bir **geometrik yapı** denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ gibi büyük harflerle, $\mathcal{D}$ nin elemanları a, b, $c, \ldots$, x, y, $z, \ldots$ gibi küçük harflerle gösterilir.

$\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3, \ldots \in \mathcal{N}$ noktaları için $\mathcal{N}_i \circ d$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara **doğrudaş noktalar** denir.

$d_1, d_2, d_3, \ldots \in \mathcal{D}$ doğruları için $\mathcal{N} \circ d_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ varsa, yani bu doğruların hepsi aynı noktadan geçerlerse bunlara **noktadaş doğrular** denir.

$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $\mathcal{N} \circ d_1$ ve $\mathcal{N} \circ d_2$ olacak şekilde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yoksa $d_1$ve d_2 ye **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir. Buna karşın $d_1 \parallel d_2$ değilse $d_1 \nparallel d_2$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

Tanım 1.8 (Afin Düzlem) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir **afin düzlem** denir (Kaya, 2005).

A1) Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Teorem 1.9 Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır (Kaya, 2005). (Bu düzlem $\mathbb{A}_2F$ ile gösterilir.)

Örnek 1.7 Öklid düzlemi bir afin düzlemdir. Çünkü ”Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır.” teoreminde F cismi yerine gerçel sayılar cismi $\mathbb{R}$ alındığında öklid düzleminin analitik gösterimi bulunmaktadır. Gerçek afin düzlem adıyla da anılan bu düzlem $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

Teorem 1.10 Her sonlu $\mathbb{A}$ düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan $n \geq 2$ tamsayısı vardır (Kaya, 2005).(Bu tamsayıya $\mathbb{A}$ nın mertebesi denir.)

(1) $\mathbb{A}$ nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{A}$ nın her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{A}$ daki noktaların toplam sayısı n^2 dir.

(4) $\mathbb{A}$ daki doğruların tam sayısı n^2+n dir.

Örnek 1.8 $\mathcal{N} = \{A,B,C,D\}$, $\mathcal{D} = \{AB,AC,AD,BC,BD,CD\}$ve $\circ = \in$ olmak üzere $(\mathcal{N}\ ,\mathcal{D},\circ)$ sistemi bir afin düzlemdir. Bu en küçük afin düzlemdir (Kaya, 2005).

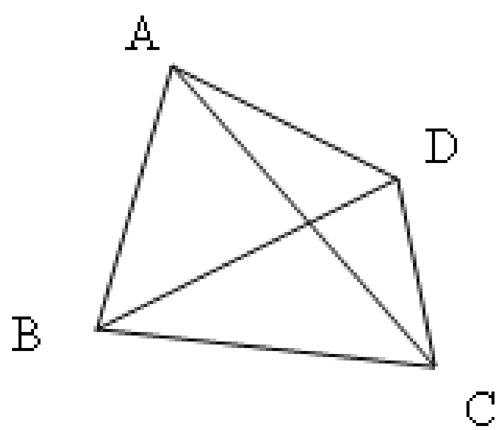
A1) A ve D farklı iki nokta çiftini ele alalım. A ve D noktalarından geçen bir tek AD doğrusu vardır. A ve D noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) D noktası ve BC doğrusunu ele alalım. D noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan AD doğrusundan başka bir doğru çizilemez. Diğer nokta ve doğrular içinde bu durum geçerlidir. O halde bu düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilir. Diğer yandan bu düzlemde $AC \parallel BD$ dir.

A3) B, D ve C noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır.

Buradan şu sonuçlara varılır:

Dört noktalı bir afin düzlem vardır ve bu en küçük afin düzlemdir. En küçük afin düzlemin mertebesi 2 dir. Bir afin düzlemde bir nokta en az üç doğru üzerinde bulunur.



Şekil 1.1. Afin Düzlem

Teorem 1.11 F herhangi bir cisim olsun. Bu F cismi yardımıyla analitik olarak tanımlanan

$$\mathcal{N} = F \times F = \{(x,y) : x,y \in F\}$$

$$\mathcal{D} = \{[m,b] : m,b \in F\} \cup \{[a] : a \in F\}$$

ve üzerinde bulunma bağıntısı

$$(x,y) \circ [m,b] \Leftrightarrow y = mx + b$$

$$(x,y) \circ [a] \Leftrightarrow x = a$$

ile verilen ($\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$,$\circ$) sistemi bir afin düzlemdir (Kaya, 2005).

$F = GF(p^r)$ sonlu cisimleri yardımıyla tanımlanan sonlu afin düzlemler vardır (Kaya, 2005).

Örnek 1.9 $F = GF(3)$ olmak üzere $\mathbb{A}_2F$ düzleminin noktaları (karşılarında da üzerinde bulundukları doğrular gösterilmiş biçimde) şunlardır (Kaya, 2005).

$$\begin{array}{lcl}
(0,0) & : & [0,0],[1,0],[2,0],[0] \\
(0,1) & : & [0,1],[1,1],[2,1],[0] \\
(0,2) & : & [0,2],[1,2],[2,2],[0] \\
(1,0) & : & [0,0],[1,2],[2,1],[1] \\
(1,1) & : & [0,1],[1,0],[2,2],[1] \\
(1,2) & : & [0,2],[1,1],[2,0],[1] \\
(2,0) & : & [0,0],[1,1],[2,2],[2] \\
(2,1) & : & [0,1],[1,2],[2,0],[2] \\
(2,2) & : & [0,2],[1,0],[2,1],[2]
\end{array}$$

A1) $(0,0)$ ve $(0,1)$ farklı iki nokta çiftini ele alalım. $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçen bir tek [0] doğrusu vardır. $(0,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) $(0,0)$ noktası ve $[1,1]$ doğrusunu ele alalım. $(0,0)$ noktasından geçen ve $[1,1]$ doğrusuna paralel olan $[1,2]$ doğrusundan başka bir doğru çizilemez. Diğer nokta ve doğrular içinde bu durum geçerlidir. O halde bu düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilir.

A3) $(0,0),(0,1)$ ve $(1,0)$ noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır.

Tanım 1.12 **(Projektif Düzlem)** $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir **projektif düzlem** denir (Kaya, 2005).

P1: Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: İki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 1.13 Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).

Teorem 1.14 Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır (Kaya, 2005). (Bu tamsayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.)

(1) $\mathbb{P}$ nın her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{P}$ nın her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{P}$ deki noktaların toplam sayısı n^2+n+1 dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki doğruların tam sayısı n^2+n+1 dir.

Tanım 1.15 S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S de "nokta" yerine "doğru" ve "doğru" yerine "nokta" koyarak bılunan yeni ifadeye S nin **dual ifadesi** denir ve bu S^* ile gösterilir.

Bu tanımdan hemen şu çıkar: birbirlerinin duali olan nokta ve doğru kavramlarından başka aşağıda yanyana yazılan kavramlar birbirlerinin duali olup dual ifade bulunurken onlarında yer değiştirmeleri gerekir (Kaya, 2005).

noktadaş	–	doğrudaş
$\vee$, birleşme	–	$\wedge$, kesişme
...üzerinde bulunur	–	...dan geçer

Teorem 1.16 (Projektif düzlemlerde duallik ilkesi) Bir projektif düzleme ilişkin her teoremin ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir (Kaya, 2005).

Sonuç 1.17 Eğer $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlemse $\mathbb{P}^* = (\mathcal{D}, \mathcal{N}, \circ^{-1})$ de bir projektif düzlemdir. $\mathbb{P}^*$ a, $\mathbb{P}$ nin **dual projektif düzlemi** denir (Kaya, 2005).

Teorem 1.18 Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır.

F herhangi bir cisim olsun.

$\mathcal{N} = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3 \in F, (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0),\ (x_1,x_2,x_3) \equiv \lambda(x_1,x_2,x_3),$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$\mathcal{D} = \{[a_1,a_2,a_3] : a_1,a_2,a_3 \in F, (a_1,a_2,a_3) \neq (0,0,0), (a_1,a_2,a_3) \equiv \lambda(a_1,a_2,a_3),$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}\}$

$(x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir projektif düzlemdir. F cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak $\mathbb{P}_2F$ ile gösterilir. Özel olarak $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{Q}$ cisimleri için $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ kompleks projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ rasyonel projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005).

Yukarıdaki teoremlerden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.

Sonuç 1.19 r pozitif bir tam sayı p de bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $GF(p^r)$ cismi var olduğu için bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde

$$\frac{(p^r)^3 - 1}{p^r - 1} = (p^r)^2 + p^r + 1 \tag{1.1}$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin p^r olduğunu gösterir. Yani her r pozitif tam sayısı ve her p asal sayısı için mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşın cisimler yardımıyla elde edilen bir çok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri p^r biçiminde yazılabilen pozitif tam sayılardır (Kaya, 2005).

Örnek 1.10 En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.

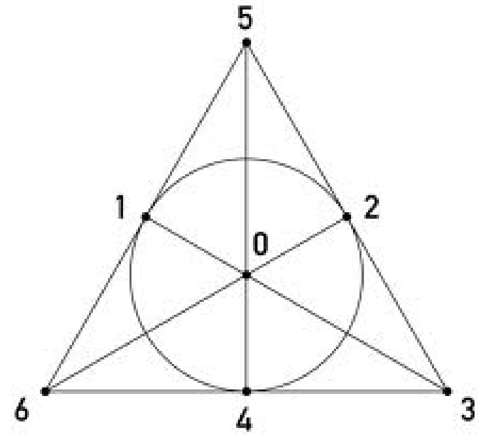
$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$$

ve

$$\begin{array}{lllllll} d_1 = \{3,4,6\} & , & d_2 = \{1,5,6\} & , & d_3 = \{0,6,2\} & , & d_4 = \{0,4,5\} \\ d_5 = \{0,1,3\} & , & d_6 = \{2,3,5\} & , & d_7 = \{1,2,4\} & & \end{array}$$

olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemi bir projektif düzlemdir. Yedi noktalı bu projektif düzleme **Fano Düzlemi** denir (Kaya, 2005).



Şekil 1.2. Fano Düzlemi

P1) 4 ve 6 farklı iki nokta çiftini ele alalım. 4 ve 6 dan geçen bir tek d_1 doğrusu vardır. 4 ve 6 noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

P2) d_1 ve d_2 doğrularını ele alalım. Bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 6 dır. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

P3) $1,2,3$ ve 6 noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.

Örnek 1.11 $F = GF(2)$ olmak üzere $\mathbb{P}_2F$ düzleminin noktaları $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ üçlülerinden oluşur. Doğruları da aynı üçlülerden ibarettir. Aşağıda her doğrunun üzerinde bulunan noktalar yanında gösterilmektedir.

$$\begin{array}{lcl}
[0,0,1] & : & (0,1,0),(1,0,0),(1,1,0) \\
[0,1,0] & : & (0,0,1),(1,0,0),(1,0,1) \\
[1,0,0] & : & (0,0,1),(0,1,0),(0,1,1) \\
[0,1,1] & : & (0,1,1),(1,0,0),(1,1,1) \\
[1,0,1] & : & (0,1,0),(1,0,1),(1,1,1) \\
[1,1,0] & : & (0,0,1),(1,1,0),(1,1,1) \\
[1,1,1] & : & (0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)
\end{array}$$

$\mathbb{P}_2F$ bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

Teorem 1.20 K bir cisim ve V, K üzerinde üç boyutlu bir vektör uzayı olsun. V nin tüm bir ve iki boyutlu alt uzaylarını içeren $PG\ (\ V\ )$ bir projektif düzlemdir.

$PG\ (\ V\ )$, iki boyutlu olduğundan aynı zamanda $PG\ (\ 2,K\ )$ ile gösterilir. Boyuttan dolayı bir boyutlu alt uzaylara noktalar, iki boyutlu alt uzaylara ise doğrular diyeceğiz. Şimdi $PG\ (V\ )$ nin özelliklerini inceleyelim.

Birbirinden farklı A ve B noktaları için bu iki noktayı içeren tek bir L doğrusu vardır. Gerçektende A ve B, V nin birbirinden farklı bir boyutlu iki altuzayıdır ve bunlar tarafından gerilen tek bir iki boyutlu L alt uzayı vardır.

Aynı zamanda L ve M doğruları için bu doğrular üzerinde bulunan tek bir A noktası vardır. Gerçektende L ve M, V nin birbirinden farklı iki boyutlu iki altuzayıdır ve bunlar tek bir, bir boyutlu A altuzayında kesişirler.

Son olarak altı farklı doğru belirten dört nokta vardır. Gerçektende sırasıyla $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ vektörleri tarafından üretilen vektör doğrularını alabiliriz (Akça, Bayar, Ekmekçi, Maldeghem, 2006). (V deki koordinatları belirledikten sonra)

Bir afin düzleme bir takım yeni noktalar ve bütün bu yeni noktaları üzerinde bulunduran tek bir doğru katarak bir projektif düzlemin nasıl elde edildiğini görelim. Afin düzleme katılacak doğruya **ideal doğru** ya da **sonsuzdaki doğru**, yeni noktaların her birine de **ideal nokta** ya da **sonsuzdaki nokta** denir. Buradaki sonsuz deyimi biraz sonra anlaşılacağı gibi (gerçel düzlem ve bir kaç hal hariç) uzaklıkla ilgili değildir. $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir afin düzlem olsun. Bu düzlemde birbirine paralel olan bütün doğrular kümesine bir **paralel doğru demeti** denir. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularının üzerinde bulunan ama $\mathcal{N}$ de bulunmayan yeni bir nokta göz önüne alalım. Böylece düzleme her doğrultuda yeni bir (ideal) nokta katılmış olur. Afin düzleme ideal noktalar katılırken $\mathbb{A}$ nın her d doğrusu bir nokta ile genişletildi. d doğrusu ve d ye paralel tüm doğrular üzerine koyulan bu ideal nokta D_∞ ile gösterilir. Tüm ideal noktaların üzerinde bulunduğu ideal doğruyu da d_∞ ile göstererek $\mathbb{A}$ ya katalım. Böylece $\mathbb{A}$ daki $\circ$ bağıntısıda biraz genişletilerek (ki bu şimdilik $\circ$ ile gösterilir) bir $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ)$ sistemi elde edilir. Buna A **nın tamamlanmışı** denir (Kaya, 2005).

Teorem 1.21 Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

Teorem 1.22 Bir projektif düzlemden herhangi bir doğru ve üzerinde bulunan tüm noktalar çıkarılırsa geriye kalan geometrik yapı bir afin düzlemdir (Kaya, 2005).

Tanım 1.23 $\mathbb{P}$ ve $\mathbb{P}'$ herhangi iki projektif düzlem olsun. $\mathbb{P}$ den $\mathbb{P}'$ ye $\mathbb{P}$ nin noktalarını $\mathbb{P}'$ nin noktalarına, $\mathbb{P}$ nin doğrularını $\mathbb{P}'$ nin doğrularına dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa bu **projektif (afin) düzlemler izomorftur** denir; bu fonksiyona da $\mathbb{P}$ den $\mathbb{P}'$ ye giden bir **izomorfizm** denir (Kaya, 2005).

Teorem 1.24 $\mathbb{A}_2F$ afin düzleminin tamamlanmışı $\mathbb{P}_2F$ projektif düzlemine izomorftur (Kaya, 2005).

Sonuç 1.25 $\mathbb{A}_2F$ afin düzlemi $\mathbb{P}_2F$ projektif düzleminden $[0,0,1]$ doğrusu ve $(x_1,x_2,0)$ noktalarının çıkarılmasıyla elde edilen yapıya izomorftur (Kaya, 2005).

Özel olarak $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ den $x_3 = 0$ özelliğine sahip noktalar ve $[0,0,1]$ doğrusu atılarak $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ öklid düzlemi (gerçel afin düzlem) bulunur veya $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzlemine ideal doğru ve noktalarının katılmasıyla $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlemi elde edilir. Dolayısıyla Öklid düzlemin noktaları $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x_1,x_2,1)$ biçiminde homogen koordinatlarla belirtilebilir. Öklid düzlemin doğruları da $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ denklemiyle belirtilebilir.

$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ projektif düzlemi, Öklid düzleminin genişletilmesidir (Kaya, 2005).

BÖLÜM 2

ÜÇGENSEL NORMLAR

2.1 Üçgensel Normlar

Tanım 2.1 Bir $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ikili işlemi, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa T işlemine bir **üçgensel norm** veya kısaca t-**norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(T1) Her $x,\, y \in [0,1]$ için $T\ (x,y) = T\ (y,x)$

(T2) Her $x,\, y,\, z \in [0,1]$ için $T\ (x, T\ (y,z)) = T\ (T\ (x,y)\,, z)$

(T3) $y \leq z$ olmak üzere $T\ (x,y) \leq T\ (x,z)$

(T4) Her $x \in [0,1]$ için $T\ (x,1) = x$

Örnek 2.1 Dört temel t-norm vardır. Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanan T_M, T_P, T_L ve T_D dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

1) $T_M : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T_M\ (x,y) = \min\{x,y\}$

şeklinde tanımlanan T_M işlemi bir $t-$normdur. Buna **minimum t-norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(T1) $\forall\, x,\, y \in [0,1]$ için

$$T_M\ (x,y) = \min\{x,y\} = \min\{y,x\} = T_M\ (y,x)$$

dir.

(T2) $\forall\, x,\, y,\, z \in [0,1]$ için

$$y \leq z \text{ ise} \begin{cases} x \leq y \leq z ....(1) \\ y \leq x \leq z ....(2) \\ y \leq z \leq x ....(3) \end{cases}$$

$$y \geq z \text{ ise} \begin{cases} x \leq z \leq y ....(4) \\ z \leq x \leq y ....(5) \\ z \leq y \leq x ....(6) \end{cases}$$

olabilir. (1). durum için

$$T_M\ (x, T_M\ (y,z)) = T_M\ (x, \min\{y,z\}) = T_M\ (x,y) = \min\{x,y\} = x$$

$$T_M\ (T_M\ (x,y), z) = T_M\ (\min\{x,y\}, z) = T_M\ (x,z) = \min\{x,z\} = x$$

olup

$$T_M\ (x, T_M\ (y,z)) = T_M\ (T_M\ (x,y), z)$$

dir. Benzer şekilde diğer durumlar içinde $T_M\ (x, T_M\ (y,z)) = T_M\ (T_M\ (x,y), z)$ olduğu gösterilebilir.

(T3) $y \leq z$ olmak üzere $T_M\ (x,y) = \min\{x,y\} \leq \min\{x,z\} = T_M\ (x,z)$ dir.

(T4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

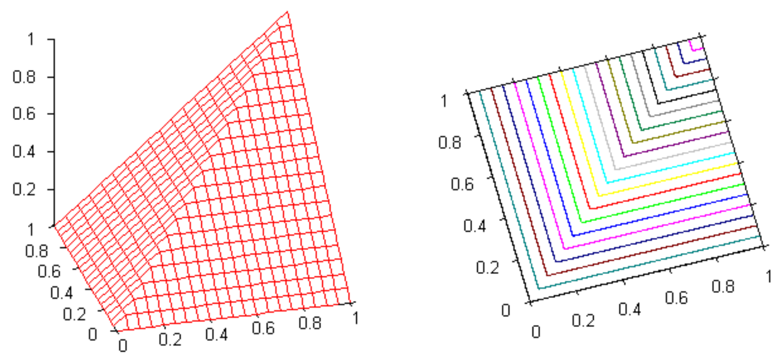
$$T_M\ (x,1) = \min\{x,1\} = x$$

dir.

T_M ; T1, T2, T3 ve T4 aksiyomlarını sağladığından bir $t-$normdur. Bazı noktaların T_M t-normu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
T_M(0,0) &= 0 \\
T_M(0,1) = T_M(1,0) &= 0 \\
T_M(1,1) &= 1 \\
T_M(1,\tfrac{1}{2}) = T_M(\tfrac{1}{2},1) &= \tfrac{1}{2} \\
T_M(1,\tfrac{1}{3}) = T_M(\tfrac{1}{3},1) &= \tfrac{1}{3} \\
T_M(\tfrac{1}{2},0) = T_M(0,\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_M(\tfrac{1}{3},0) = T_M(0,\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_M(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = T_M(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{3} \\
T_M(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = T_M(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\
T_M(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\
T_M(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\
T_M(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{5}{6}
\end{aligned}$$

T_M minimum $t-$normunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.1. T_M minimum t-normunun grafiği

2) $T_P : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T_P\ (x,y) = x \cdot y$

şeklinde tanımlanan T_P işlemi bir t-normdur. Buna **product t-norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(T1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için ($[0,1]$ aralığında çarpmanın değişme özelliği olduğundan)

$$\begin{aligned} T_P\ (x,y) &= x \cdot y \\ &= y \cdot x \\ &= T_P\ (y,x) \end{aligned}$$

dir.

(T2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için ($[0,1]$aralığında çarpmanın birleşme özelliği olduğundan)

$$\begin{aligned} T_P\ (x, T_P\ (y,z)) &= T_P\ (x, y \cdot z) \\ &= x \cdot (y \cdot z) \\ &= (x \cdot y) \cdot z \\ &= T_P\ (x,y) \cdot z \\ &= T_P\ (T_P\ (x,y), z) \end{aligned}$$

dir.

(T3) $y \leq z$ olmak üzere

$$T_P\ (x,y) = x \cdot y \leq x \cdot z = T_P\ (x,z)$$

dir.

(T4) $\forall\ x \in [0,1]$ için

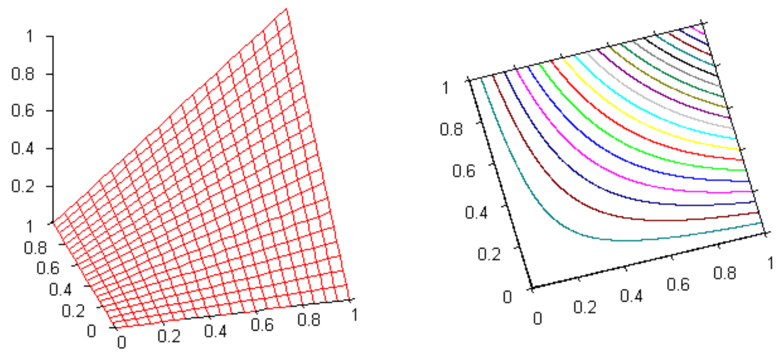
$$T_P\ (x,1) = x \cdot 1 = x$$

dir.

T_P ; T1, T2, T3 ve T4 aksiyomlarını sağlandığından bir t-normdur. Bazı noktaların T_P t-normu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
T_P(0,0) &= 0 \\
T_P(0,1) = T_P(1,0) &= 0 \\
T_P(1,1) &= 1 \\
T_P(1,\tfrac{1}{2}) = T_P(\tfrac{1}{2},1) &= \tfrac{1}{2} \\
T_P(1,\tfrac{1}{3}) = T_P(\tfrac{1}{3},1) &= \tfrac{1}{3} \\
T_P(\tfrac{1}{2},0) = T_P(0,\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_P(\tfrac{1}{3},0) = T_P(0,\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_P(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = T_P(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{6} \\
T_P(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = T_P(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{5}{12} \\
T_P(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{9} \\
T_P(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{4} \\
T_P(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{25}{36}
\end{aligned}$$

T_P t-normunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.2. T_P product t-normunun grafiği

3) $T_L : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T_L\ (x,y) = \max\{x+y-1,0\}$

şeklinde tanımlanan T_L işlemi bir t-normdur. Buna **Lukasiewicz t-norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(T1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için

$$T_L\ (x,y) \quad = \quad \max\{x+y-1,0\} \quad = \quad \max\{y+x-1,0\} \quad = \quad T_L\ (y,x)$$

dir.

(T2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için

$$T_L\ (x, T_L\ (y,z)) \quad = \quad \max\{x+y+z-2,0\} \quad = \quad T_L\ (T_L\ (x,y)\ ,z)$$

dir.

(T3) $y \leq z$ olmak üzere

$$T_L\ (x,y) \quad = \quad \max\{x+y-1,0\} \quad \leq \quad \max\{x+z-1,0\} \quad = \quad T_L\ (x,z)$$

dir.

(T4) $\forall\ x \in [0,1]$ için

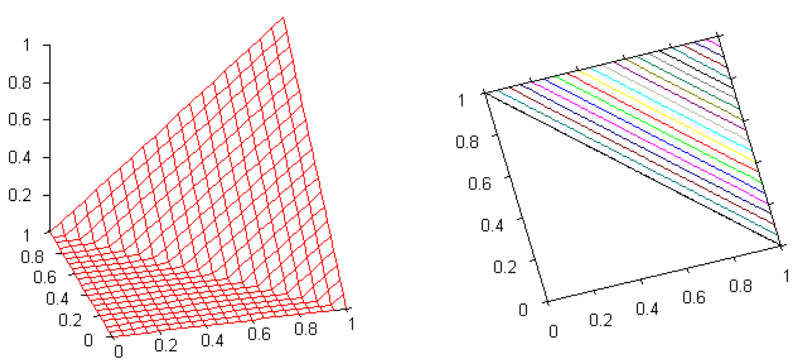
$T_L\ (x,1) = \max\{x+1-1,0\} = \max\{x,0\} = x$

dir.

T_L ; T1, T2, T3 ve T4 aksiyomlarını sağlandığından bir t-normdur. Bazı noktaların T_L t-normu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
T_L(0,0) &= 0 \\
T_L(0,1) = T_L(1,0) &= 0 \\
T_L(1,1) &= 1 \\
T_L(1,\tfrac{1}{2}) = T_L(\tfrac{1}{2},1) &= \tfrac{1}{2} \\
T_L(1,\tfrac{1}{3}) = T_L(\tfrac{1}{3},1) &= \tfrac{1}{3} \\
T_L(\tfrac{1}{2},0) = T_L(0,\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_L(\tfrac{1}{3},0) = T_L(0,\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = T_L(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_L(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = T_L(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{3} \\
T_L(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_L(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

T_L t-normunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.3. T_L Lukasiewicz t-normunun grafiği

4) $T_D : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$T_D\ (x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{eğer } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min\{x,y\} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T_D işlemi bir t-normdur. Buna **drastic product t-norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(T1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} T_D\ (x,y) &= \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min\{x,y\} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } (y,x) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min\{y,x\} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= T_D\ (y,x) \end{aligned}$$

dir.

(T2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için x,y,z değerlerinden en az ikisi 1 ise

$$T_D\ (x, T_D\ (y,z)) \ = \ T_D\ (T_D\ (x,y)\,,z) \ = \ \min\{x,y,z\}$$

dir. Diğer durumlarda

$$T_D\ (x, T_D\ (y,z)) \ = \ T_D\ (T_D\ (x,y)\,,z) \ = 0$$

dır.

(T3) $y \le z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_D\ (x,y) &= \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min\{x,y\} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &\le \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } (x,z) \in [0,1) \times [0,1) \\ \min\{x,z\} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= T_D\ (x,z) \end{aligned}$$

dir.

(T4) $\forall\ x \in [0,1]$ için

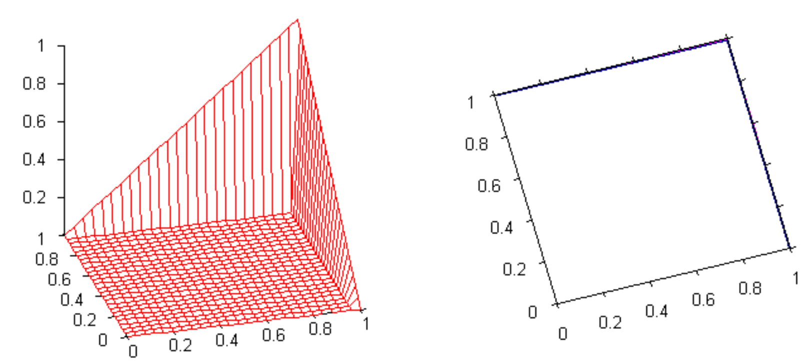
$$T_D\ (x,1) = \min\{x,1\} = x$$

dir.

T_D ;T1, T2, T3 ve T4 aksiyomlarını sağladığından bir t-normdur. Bazı noktaların T_D t-normu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
T_D(0,0) &= 0 \\
T_D(0,1) = T_D(1,0) &= 0 \\
T_D(1,1) &= 1 \\
T_D(1,\tfrac{1}{2}) = T_D(\tfrac{1}{2},1) &= \tfrac{1}{2} \\
T_D(1,\tfrac{1}{3}) = T_D(\tfrac{1}{3},1) &= \tfrac{1}{3} \\
T_D(\tfrac{1}{2},0) = T_D(0,\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_D(\tfrac{1}{3},0) = T_D(0,\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = T_D(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_D(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = T_D(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_D(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_D(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= 0
\end{aligned}$$

T_D t-normunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.4. T_D drastic product t-normunun grafiği

Dört temel t-norm dışındaki diğer bazı t-norm örnekleri aşağıda verilmektedir. Bunlar nilpotent minimum t-norm ve Hamacher product t-normdur.

Örnek 2.2 $T_{nM} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$T_{nM}\ (x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\} & , \text{ eğer } x+y>1 \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T_{nM} işlemi bir t-normdur. Buna **nilpotent minimum t-norm** denir.

(T1) $\forall x,y \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} T_{nM}\ (x,y) &= \begin{cases} \min\{x,y\} & , \text{ eğer x+y>1 ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{y,x\} & , \text{ eğer y+x>1 ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= T_{nM}\ (y,x) \end{aligned}$$

dir.

(T2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için x,y,z değerlerinden üçü de $\frac{1}{2}$ den büyük ise

$$T_{nM}\ (x, T_{nM}\ (y,z)) = T_{nM}\ (T_{nM}\ (x,y), z) = \min\{x,y,z\}$$

dir. Diğer durumlarda

$$T_{nM}\ (x, T_{nM}\ (y,z)) = T_{nM}\ (T_{nM}\ (x,y), z) = 0$$

dır.

(T3) $y \leq z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{nM}(x,y) &= \begin{cases} \min\{x,y\} & , \text{ eğer } x+y>1 \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \min\{x,z\} & , \text{ eğer } x+z>1 \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= T_{nM}\ (x,z) \end{aligned}$$

dir.

(T4) $\forall\ x \in (0,1]$ için $x+1>1$ olduğundan

$$T_{nM}\ (x,1) = \min\{x,1\} = x$$

dir. x=0 için ise

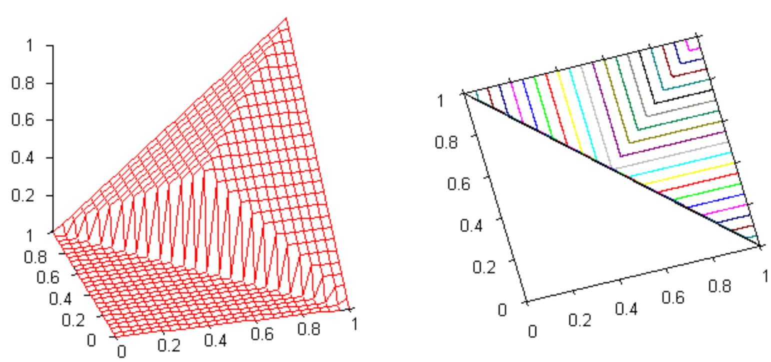
$$T_{nM}\ (x,1) = 0 = x$$

dir.

T_{nM}; T1, T2, T3 ve T4 aksiyomlarını sağladığından bir t-normdur. Bazı noktaların T_{nM} t-normu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
T_{nM}(0,0) &= 0 \\
T_{nM}(0,1) = T_{nM}(1,0) &= 0 \\
T_{nM}(1,1) &= 1 \\
T_{nM}(1,\tfrac{1}{2}) = T_{nM}(\tfrac{1}{2},1) &= \tfrac{1}{2} \\
T_{nM}(1,\tfrac{1}{3}) = T_{nM}(\tfrac{1}{3},1) &= \tfrac{1}{3} \\
T_{nM}(\tfrac{1}{2},0) = T_{nM}(0,\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_{nM}(\tfrac{1}{3},0) = T_{nM}(0,\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_{nM}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = T_{nM}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_{nM}(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = T_{nM}(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\
T_{nM}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_{nM}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_{nM}(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{5}{6}
\end{aligned}$$

T_{nM} t-normunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.5. T_{nM} nilpotent minimum t-normunun grafiği

Örnek 2.3 $T_{H_0} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$T_{H_0}\ (x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } x = y = 0 \text{ ise} \\ \frac{xy}{x+y-xy} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T_{H_0} işlemi bir t-normdur. Buna **Hamacher product t-norm** denir.

(T1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için $[0,1]$ aralığında toplamanın ve çarpmanın değişme özelliği olduğundan

$$\begin{aligned} T_{H_0}(x,y) &= \tfrac{xy}{x+y-xy} \\ &= \tfrac{yx}{y+x-yx} \\ &= T_{H_0}(y,x) \end{aligned}$$

dir.

(T2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için $x = y = z = 0$ ise

$$T_{H_0}(x, T_{H_0}(y,z)) = T_{H_0}(T_{H_0}(x,y), z) = 0$$

dır. Diğer durumlarda $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için $[0,1]$ aralığında toplamanın ve çarpmanın birleşme özelliği olduğundan

$$\begin{aligned} T_{H_0}(x, T_{H_0}(y,z)) &= T_{H_0}\left(x, \tfrac{yz}{y+z-yz}\right) \\ &= \tfrac{xyz}{xy+yz+xz-2xyz} \\ T_{H_0}(T_{H_0}(x,y), z) &= T_{H_0}\left(\tfrac{xy}{x+y-xy}, z\right) \\ &= \tfrac{xyz}{xy+yz+xz-2xyz} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$T_{H_0}(x, T_{H_0}(y,z)) = T_{H_0}(T_{H_0}(x,y), z)$$

dir.

(T3) $y \leq z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{H_0}(x,y) &= \tfrac{xy}{x+y-xy} \\ &\leq \tfrac{xz}{x+z-xz} \\ &= T_{H_0}(x,z) \end{aligned}$$

dir.

(T4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

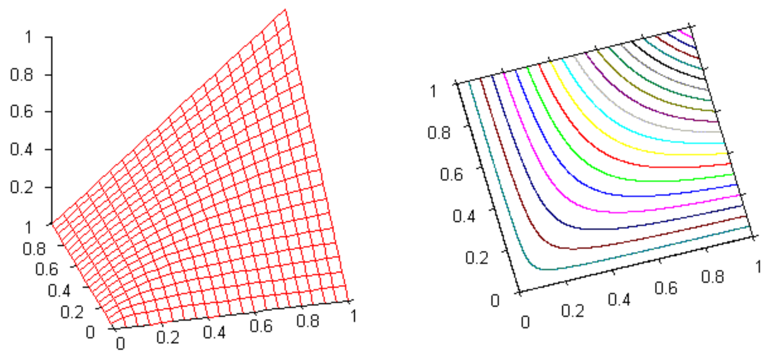
$$
\begin{aligned}
T_{H_0}(x,1) &= \tfrac{x}{x+1-x} \\
&= \tfrac{x}{1} \\
&= x
\end{aligned}
$$

dir.

T_{H_0}; T1, T2, T3 ve T4 aksiyomlarını sağlandığından bir t-normdur. Bazı noktaların T_{H_0} t-normu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
T_{H_0}(0,0) &= 0 \\
T_{H_0}(0,1) = T_{H_0}(1,0) &= 0 \\
T_{H_0}(1,1) &= 1 \\
T_{H_0}(1,\tfrac{1}{2}) = T_{H_0}(\tfrac{1}{2},1) &= \tfrac{1}{2} \\
T_{H_0}(1,\tfrac{1}{3}) = T_{H_0}(\tfrac{1}{3},1) &= \tfrac{1}{3} \\
T_{H_0}(\tfrac{1}{2},0) = T_{H_0}(0,\tfrac{1}{2}) &= 0 \\
T_{H_0}(\tfrac{1}{3},0) = T_{H_0}(0,\tfrac{1}{3}) &= 0 \\
T_{H_0}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = T_{H_0}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{4} \\
T_{H_0}(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = T_{H_0}(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{5}{11} \\
T_{H_0}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{5} \\
T_{H_0}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{3} \\
T_{H_0}(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{5}{7}
\end{aligned}
$$

T_{H_0} t-normunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.6. T_{H_0} Hamacher product t-normunun grafiği

Örnek 2.4 $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T(x,y) = \max\{x,y\}$ şeklinde tanımlanan T işlemi bir t-norm değildir.

(T4) $\forall x \in [0,1)$ için

$$T(x,1) = \max\{x,1\} = 1 \neq x$$

dir.

T; T4 aksiyomunu sağlamaz.

Not 2.2 **i)** Her $x \in [0,1]$ için her T t-normu

$$\begin{aligned} T(0,x) &= T(x,0) = 0 \\ T(1,x) &= x \end{aligned}$$

koşullarını sağlar (Peter, Radko, Endre, 2000). Gerçekten de $\forall x \in [0,1]$ için $x \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(x,0) &\leq T(1,0) = 0 \\ T(0,x) &\leq T(0,1) = 0 \end{aligned}$$

olup $T(x,0) = T(0,x) = 0$ dır. $\forall x \in [0,1]$ için

$$T(1,x) = T(x,1) = x$$

dir.

ii) Her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ olmak üzere her T t-normu

$$T(x_1,y_1) \leq T(x_2,y_2)$$

koşulunu sağlar. Gerçekten de $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise

$$T(x_1,y_1) \leq T(x_1,y_2) = T(y_2,x_1) \leq T(y_2,x_2) = T(x_2,y_2)$$

dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

Tanım 2.3 T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ ise T_1 , T_2 den **daha zayıftır** ya da T_2, T_1 den **daha güçlüdür** denir ve $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir (Peter, Radko, Endre, 2000).

Not 2.4 Her $(x,y) \in [0,1]^2$ ve her T t-normu için

$$\begin{array}{lclcl} y \leq 1 \quad , & T(x,y) & \leq & T(x,1) & = & x \\ x \leq 1 \quad , & T(x,y) & \leq & T(1,y) & = & y \end{array}$$

dir. Her $(x,y) \in (0,1)^2$ ve her T t-normu için

$$T(x,y) \quad \geq \quad 0 \quad = \quad T_D(x,y)$$

dir. Bu durumda

$$T_D \quad \leq \quad T \quad \leq \quad T_M$$

dir. T_D en zayıf, T_M ise en güçlü t-normdur. Dört temel t- norm arasında aşağıdaki gibi bir sıralama vardır (Peter, Radko, Endre, 2000).

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M$$

Diğer yandan bu t-normlara T_{nM} ve T_{H_0} normlarını da dahil edersek sıralama

$$T_D \leq T_L \leq T_{nM} \leq T_P \leq T_{H_0} \leq T_M$$

şeklinde olur.

Önerme 2.5 $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ ve $* : A \times A \to A$ bir ikili işlem olmak üzere her $x,y,z \in A$ için $*$ işlemi (T1), (T2), (T3) ve

$$x * y \quad \leq \quad \min\{x,y\}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda $T : [0,1] \times [0,1]$

$$T(x,y) \quad = \quad \begin{cases} x * y & , \quad \text{eğer } (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2 \\ \\ \min\{x,y\} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T fonksiyonu bir t-normdur (Peter, Radko, Endre, 2000).

İspat T fonksiyonu tanım gereğince (T1) ve (T4) aksiyomlarını sağlar. $x,y,z \in A \setminus \{0,1\}$ için $*$ işlemi birleşme özelliğine sahip olduğundan

$$T(x, T\ (y,z)) = T(T\ (x,y), z)$$

dir. $0 \in \{x,y,z\}$ ise

$$T(x,T(y,z)) = 0 = T(T(x,y),z)$$

dir. $1 \in \{x,y,z\}$ ise (T4) gereğince

$$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$$

dir. Dolayısıyla (T2) aksiyomu sağlanır. $y \leq z$ olsun. $x,y,z \in A \setminus \{0,1\}$, $x \in \{0,1\}$ ya da $y = 0$ ise $*$ işlemi ve min (T3) aksiyomunu sağladığından

$$T(x,y) \leq T(x,z)$$

dir. $x,y \in A \setminus \{1\}$ ve $z = 1$ ise $x * y \leq \min\{x,y\}$ olduğundan

$$T(x,y) \leq T(x,z)$$

dir. Dolayısıyla (T3) aksiyomu sağlanır (Peter, Radko, Endre, 2000). □

2.2 Üçgensel Altnormlar

Tanım 2.6 $F : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu her $x,y,z \in [0,1]$ için (T1), (T2), (T3) ve

$$F(x,y) \leq \min\{x,y\}$$

özelliklerini sağlıyorsa F fonksiyonuna bir **üçgensel altnorm** veya kısaca **t-altnorm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

Her t-norm bir t-altnormdur. Fakat tersi doğru değildir. $F : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $F(x,y) = 0$ şeklinde tanımlanan sıfır fonksiyonu bir t-altnormdur. Fakat t-norm değildir. Çünkü $\forall x \in [0,1]$ için $F(x,1) = 0 \neq x$ olup (T4) aksiyomunu sağlamaz (Peter, Radko, Endre, 2000).

Sonuç 2.7 F bir t-altnorm olsun. Bu durumda $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & , \text{ eğer } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \\ \min\{x,y\} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklide tanımlanan T fonksiyonu bir t-normdur (Peter, Radko, Endre, 2000).

Önerme 2.8 **(i)** Her $x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ şartını sağlayan tek t-norm T_M (minimum) dir.

(ii) Her $x \in [0,1)$ için $T(x,x) = 0$ şartını sağlayan tek t-norm T_D (drastic product) dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

İspat (i) $x\in[0,1]$ ve T t-normu için $T(x,x)=x$ olsun. Bu durumda $\forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ için $y\le x$ olmak üzere (T3) gereğince

$$y\le T\,(y,y)\le T\,(x,y)\le T_M\,(x,y)=\min\{x,y\}=y$$

dir. Bu durumda (T1) ile birlikte $T=T_M$ dir. $\square$

İspat (ii) $x\in[0,1)$ ve T t-normu için $T(x,x)=0$ olsun. Bu durumda $\forall(x,y)\in[0,1)\times[0,1)$ için $y\le x$ olmak üzere

$$0\le T\,(x,y)\le T\,(x,x)=0$$

dir. Bu durumda (T1) ve (T4) ile birlikte $T=T_D$ dir (Peter, Radko, Endre, 2000). $\square$

Not 2.9 Her T t-normu (T2) gereğince genişletilebilir. Her $(x_1,x_2,...,x_n)\in[0,1]^n$ için

$$\mathop{T}_{i=1}^{n}x_i \quad=\quad T(\mathop{T}_{i=1}^{n-1}x_i,x_n)\quad=T(x_1,x_2,...,x_n)$$

dir. Özel olarak $x_1=x_2=...=x_n=x$ ise

$$T(x,x,...,x)=x_T^{(n)}$$

ile gösterilir. Her $x\in[0,1]$ için $x_T^{(0)}=1$, $x_T^{(1)}=x$ dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

Örnek 2.5 Her $(x_1,x_2,...,x_n)\in[0,1]^n$ için T_M ,T_P,T_L ve T_D t-normlarının genişletilmişleri aşağıdaki gibidir (Peter, Radko, Endre, 2000).

$$\begin{aligned}
T_M(x_1,x_2,...,x_n) &= \min\{x_1,x_2,...,x_n\}\\
T_P(x_1,x_2,...,x_n) &= x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n\\
T_L(x_1,x_2,...,x_n) &= \max\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i-(n-1),0\right\}\\
T_D(x_1,x_2,...,x_n) &= \begin{cases} x_i & , \quad \text{her } j\neq i \text{ için } x_j=1 \text{ ise}\\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}\end{cases}
\end{aligned}$$

Tanım 2.10 Bir $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ ikili işlemi her $x,y,z\in[0,1]$ için (T1), (T2), (T3) ve

$$\text{(S4) } S(x,0)=x$$

aksiyomlarını sağlıyorsa S işlemine bir **üçgensel conorm** veya kısaca **t-conorm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

Örnek 2.6 Dört temel t-conorm vardır. Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanan S_M, S_p, S_L ve S_D dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(1) $S_M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$ şeklinde tanımlanan S_M işlemi bir t-conormdur. Buna **maksimum t-conorm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(S1) $\forall\, x,\, y \in [0,1]$ için

$$S_M\ (x,y) = \max\{x,y\} = \max\{y,x\} = S_M\ (y,x)$$

dir.

(S2) $\forall\, x,\, y,\, z \in [0,1]$ için

$$y \leq z \; ise \begin{cases} x \leq y \leq z ....(1) \\ y \leq x \leq z ....(2) \\ y \leq z \leq x ....(3) \end{cases}$$

$$y \geq z \; ise \begin{cases} x \leq z \leq y ....(4) \\ z \leq x \leq y ....(5) \\ z \leq y \leq x ....(6) \end{cases}$$

olabilir. (1). durum için

$$S_M\ (x, S_M\ (y,z)) = S_M\ (x, \max\{y,z\}) = S_M\ (x,z) = \max\{x,z\} = z$$

$$S_M\ (S_M\ (x,y)\,, z) = S_M\ (\max\{x,y\}\,, z) = S_M\ (y,z) = \max\{y,z\} = z$$

olup

$$S_M\ (x, S_M\ (y,z)) = S_M\ (S_M\ (x,y)\,, z)$$

dir. Benzer şekilde diğer durumlar içinde

$$S_M\ (x, S_M\ (y,z)) = S_M\ (S_M\ (x,y)\,, z)$$

olduğu gösterilebilir.

(S3) $y \leq z$ olmak üzere

$$S_M\ (x,y) = \max\{x,y\} \leq \max\{x,z\} = S_M\ (x,z)$$

dir.

(S4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

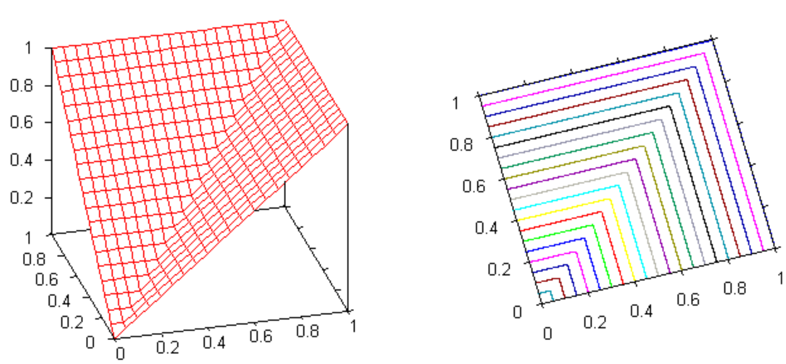
$$S_M\ (x,0) = \max\{x,0\} = x$$

dir.

S_M; S1, S2 ,S3 ve S4 aksiyomlarını sağladığından bir t-conormdur. Bazı noktaların S_M t-conormu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
S_M(0,0) &= 0\\
S_M(0,1) = S_M(1,0) &= 1\\
S_M(1,1) &= 1\\
S_M(1,\tfrac{1}{2}) = S_M(\tfrac{1}{2},1) &= 1\\
S_M(1,\tfrac{1}{3}) = S_M(\tfrac{1}{3},1) &= 1\\
S_M(\tfrac{1}{2},0) = S_M(0,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\\
S_M(\tfrac{1}{3},0) = S_M(0,\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3}\\
S_M(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = S_M(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\\
S_M(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = S_M(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{5}{6}\\
S_M(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3}\\
S_M(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\\
S_M(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{5}{6}
\end{aligned}$$

S_M maksimum t-conormunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.7. S_M maksimum t-conormunun grafiği

(2) $S_P : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$, $S_P(x,y) = x+y-x\cdot y$ şeklinde tanımlanan S_P işlemi bir t-conormdur. Buna **probabilistic sum t-conorm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(S1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için $[0,1]$aralığında toplamanın ve çarpmanın değişme özelliği olduğundan

$$\begin{aligned} S_P\ (x,y) &= x+y-x\cdot y \\ &= y+x-y\cdot x \\ &= S_P\ (y,x) \end{aligned}$$

dir.

(S2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için $[0,1]$ aralığında toplamanın ve çarpmanın birleşme özelliği olduğundan

$$\begin{aligned} S_P\ (x,S_P\ (y,z)) &= S_P\ (x,y+z-y\cdot z) \\ &= x+y+z-y\cdot z-x\cdot(y+z-y\cdot z) \\ &= x+y+z-y\cdot z-x\cdot y-x\cdot z+x\cdot y\cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_P\ (S_P\ (x,y)\,,z) &= S_P\ (x+y-x\cdot y,z) \\ &= x+y-x\cdot y+z-(x+y-x\cdot y)\cdot z \\ &= x+y-x\cdot y+z-x\cdot z-y\cdot z+x\cdot y\cdot z \end{aligned}$$

olup

$$S_P\ (x,S_P\ (y,z)) = S_P\ (S_P\ (x,y)\,,z)$$

dir.

(S3) $y \leq z$ olmak üzere

$$S_P\ (x,y) = x+y-x\cdot y \leq x+z-x\cdot z = S_P\ (x,z)$$

dir.

(S4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

$$S_P\ (x,0) = x+0-x\cdot 0 = x$$

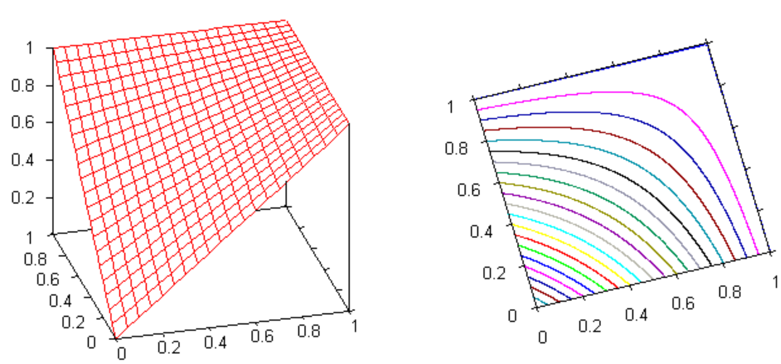
dir.

S_P ; S1, S2, S3 ve S4 aksiyomlarını sağladığından bir t-conormdur. Bazı noktaların S_P

t-conormu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
S_P(0,0) &= 0 \\
S_P(0,1) = S_P(1,0) &= 1 \\
S_P(1,1) &= 1 \\
S_P(1,\tfrac{1}{2}) = S_P(\tfrac{1}{2},1) &= 1 \\
S_P(1,\tfrac{1}{3}) = S_P(\tfrac{1}{3},1) &= 1 \\
S_P(\tfrac{1}{2},0) = S_P(0,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\
S_P(\tfrac{1}{3},0) = S_P(0,\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\
S_P(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = S_P(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{2}{3} \\
S_P(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = S_P(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{11}{12} \\
S_P(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{5}{9} \\
S_P(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{3}{4} \\
S_P(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{35}{36}
\end{aligned}$$

S_P t-conormunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.8. S_P probabilistic sum t-conormunun grafiği

(3) $S_L : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $S_L(x,y) = \min\{x+y,1\}$ şeklinde tanımlanan S_L işlemi bir t-conormdur. Buna **Lukasiewicz t-conorm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(S1) $\forall\, x,\, y \in [0,1]$ için

$$S_L\,(x,y) \;=\; \min\{x+y,1\} \;=\; \min\{y+x,1\} \;=\; S_L\,(y,x)$$

dir.

(S2) $\forall\, x,\, y,\, z \in [0,1]$ için

$$S_L\ (x, S_L\ (y,z)) = S_L\ (x, \min\{y+z,1\}) = \min\{x+y+z,1\} = S_L\ (S_L\ (x,y)\,, z)$$

dir.

(S3) $y \leq z$ olmak üzere

$$S_L\ (x,y) = \min\{x+y,1\} \leq \min\{x+z,1\} = S_L\ (x,z)$$

dir.

(S4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

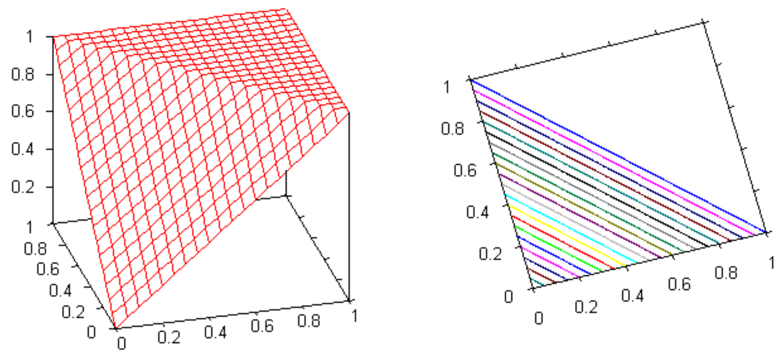
$$S_L\ (x,0) = \min\{x+0,1\} = \min\{x,1\} = x$$

dir.

S_L; S1, S2, S3 ve S4 aksiyomları sağlandığından bir t-conormdur. Bazı noktaların S_L t-conormu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
S_L(0,0) &= 0\\
S_L(0,1) = S_L(1,0) &= 1\\
S_L(1,1) &= 1\\
S_L(1,\tfrac{1}{2}) = S_L(\tfrac{1}{2},1) &= 1\\
S_L(1,\tfrac{1}{3}) = S_L(\tfrac{1}{3},1) &= 1\\
S_L(\tfrac{1}{2},0) = S_L(0,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\\
S_L(\tfrac{1}{3},0) = S_L(0,\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3}\\
S_L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = S_L(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{5}{6}\\
S_L(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = S_L(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= 1\\
S_L(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{2}{3}\\
S_L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 1\\
S_L(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= 1
\end{aligned}$$

S_L t-conormunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.9. S_L Lukasiewicz t-conormunun grafiği

(4) $S_D : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$,

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ eğer (x,y) \in (0,1]^2 \\ \max\{x,y\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_D işlemi bir t-conormdur. Buna **drastic t-conorm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(S1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} S_D\ (x,y) &= \begin{cases} 1 & , \ \text{eğer } (x,y) \in (0,1]^2 \\ \max\{x,y\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \ \text{eğer } (y,x) \in (0,1]^2 \\ \max\{y,x\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= S_D\ (y,x) \end{aligned}$$

dir.

(S2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için x,y,z değerlerinden en az ikisi 0 ise

$$S_D\ (x, S_D\ (y,z)) = S_D\ (S_D\ (x,y), z) = \max\{x,y,z\}$$

dir. Diğer durumlarda

$$S_D\ (x, S_D\ (y,z)) \ = \ S_D\ (S_D\ (x,y)\,, z) \ = 1$$

dır.

(S3) $y \leq z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S_D\ (x,y) &= \begin{cases} 1 & , \ \text{eğer } (x,y) \in (0,1]^2 \\ \max\{x,y\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} 1 & , \ \text{eğer } (x,z) \in (0,1]^2 \\ \max\{x,z\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= S_D\ (x,z) \end{aligned}$$

dir.

(S4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

$$S_D\ (x,0) = \max\{x,0\} = x$$

dir.

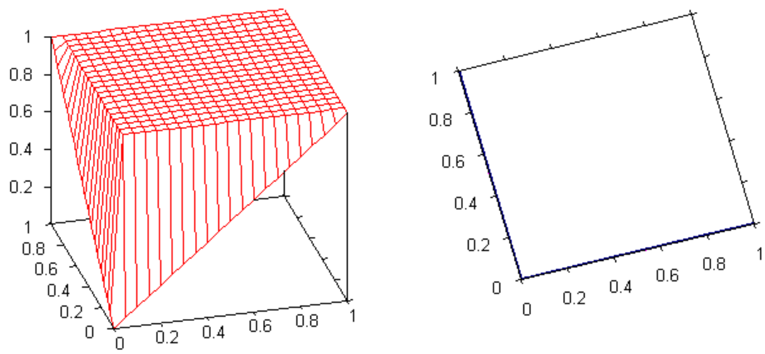
S_D; S1, S2, S3 ve S4 aksiyomlarını sağladığından bir t-conormdur. Bazı noktaların S_D t-conormu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} S_D(0,0) &= 0 \\ S_D(0,1) = S_D(1,0) &= 1 \\ S_D(1,1) &= 1 \\ S_D(1,\tfrac{1}{2}) = S_D(\tfrac{1}{2},1) &= 1 \\ S_D(1,\tfrac{1}{3}) = S_D(\tfrac{1}{3},1) &= 1 \\ S_D(\tfrac{1}{2},0) = S_D(0,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\ S_D(\tfrac{1}{3},0) = S_D(0,\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\ S_D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = S_D(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= 1 \\ S_D(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = S_D(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= 1 \\ S_D(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= 1 \end{aligned}$$

$$S_D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 1$$

$$S_D(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) = 1$$

S_D t-conormunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.10. S_D drastic t-conormunun grafiği

Dört temel t-conorm dışındaki diğer bazı t-conorm örnekleri aşağıda verilmektedir. Bunlar nilpotent maksimum t-conorm ve Einsten sum t-conormdur.

Örnek 2.7 $S_{nM} : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$S_{nM}\ (x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & , \text{ eğer } x+y<1 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_{nM} işlemi bir t-conormdur. Buna **nilpotent maksimum t-conorm** denir.

(S1) $\forall x,y \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} S_{nM}\ (x,y) &= \begin{cases} \max\{x,y\} & , \text{ eğer } x+y<1 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \max\{y,x\} & , \text{ eğer } y+x<1 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= S_{nM}\ (y,x) \end{aligned}$$

dir.

(S2) $\forall\, x,\, y,\, z \in [0,1]$ için x,y,z değerlerinden üçü de $\frac{1}{2}$ den küçük ise

$$S_{nM}\ (x, S_{nM}\ (y,z)) \;=\; S_{nM}\ (S_{nM}\ (x,y)\,, z) \;=\; \max\{x,y,z\}$$

dir. Diğer durumlarda

$$S_{nM}\ (x, S_{nM}\ (y,z)) \;=\; S_{nM}\ (S_{nM}\ (x,y)\,, z) \;=1$$

dır.

(S3) $y \leq z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S_{nM}(x,y) &= \begin{cases} \max\{x,y\} & , \text{ eğer } x+y<1 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \max\{x,z\} & , \text{ eğer } x+z<1 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\ &= S_{nM}\ (x,z) \end{aligned}$$

dir.

(S4) $\forall\, x \in [0,1)$ için $x+0<1$ olduğundan

$$S_{nM}\ (x,0) = \max\{x,0\} = x$$

dir. $x=1$ için ise

$$S_{nM}\ (x,0) = 1 = x$$

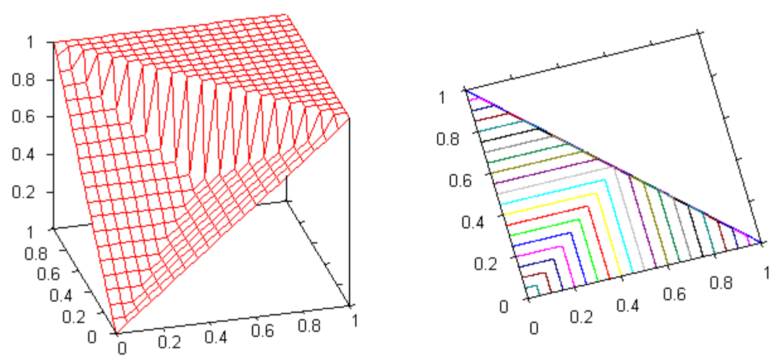
dir.

S_{nM}; S1, S2, S3 ve S4 aksiyomlarını sağladığından bir t-conormdur. Bazı noktaların S_{nM} t-conormu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} S_{nM}(0,0) &= 0 \\ S_{nM}(0,1) = S_{nM}(1,0) &= 1 \\ S_{nM}(1,1) &= 1 \\ S_{nM}(1,\tfrac{1}{2}) = S_{nM}(\tfrac{1}{2},1) &= 1 \\ S_{nM}(1,\tfrac{1}{3}) = S_{nM}(\tfrac{1}{3},1) &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{nM}(\tfrac{1}{2},0) = S_{nM}(0,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\
S_{nM}(\tfrac{1}{3},0) = S_{nM}(0,\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\
S_{nM}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = S_{nM}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} \\
S_{nM}(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = S_{nM}(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= 1 \\
S_{nM}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\
S_{nM}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= 1 \\
S_{nM}(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= 1
\end{aligned}
$$

S_{nM} t-conormunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.



Şekil 2.11. S_{nM} nilpotent maksimum t-conormunun grafiği

Örnek 2.8 $S_{H_2} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $S_{H_2}(x,y) = \frac{x+y}{1+xy}$ şeklinde tanımlanan S_{H_2} işlemi bir t-conormdur. Buna **Einsten sum t-conormu** denir.

(S1) $\forall\ x,\ y \in [0,1]$ için $[0,1]$ aralığında toplamanın ve çarpmanın değişme özelliği olduğundan

$$
\begin{aligned}
S_{H_2}(x,y) &= \tfrac{x+y}{1+xy} \\
&= \tfrac{y+x}{1+yx} \\
&= S_{H_2}(y,x)
\end{aligned}
$$

dir.

(S2) $\forall\ x,\ y,\ z \in [0,1]$ için $[0,1]$ aralığında toplamanın ve çarpmanın birleşme özelliği olduğundan

$$\begin{aligned} S_{H_2}(x, S_{H_2}(y,z)) &= S_{H_2}\left(x, \tfrac{y+z}{1+yz}\right) \\ &= \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \\ S_{H_2}(S_{H_2}(x,y), z) &= S_{H_2}\left(\tfrac{x+y}{1+xy}, z\right) \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \end{aligned}$$

olduğundan

$$S_{H_2}(x, S_{H_2}(y,z)) = S_{H_2}(S_{H_2}(x,y), z)$$

dir.

(S3) $y \le z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S_{H_2}(x,y) &= \frac{x+y}{1+xy} \\ &\le \frac{x+z}{1+xz} \\ &= S_{H_2}(x,z) \end{aligned}$$

dir.

(S4) $\forall\, x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} S_{H_2}(x,0) &= \frac{x+0}{1+x0} \\ &= \frac{x}{1} \\ &= x \end{aligned}$$

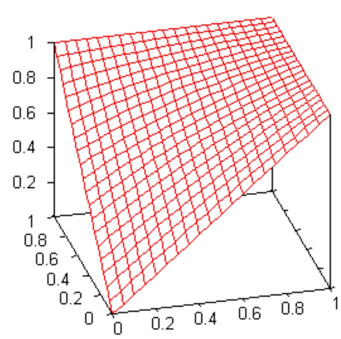
dir.

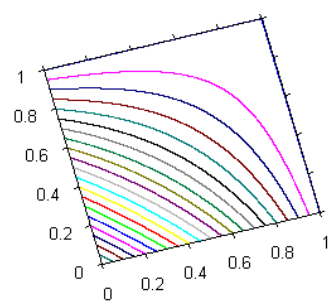
S_{H_2}; S1, S2, S3 ve S4 aksiyomlarını sağlandığından bir t-normdur. Bazı noktaların S_{H_2} t-conormu altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} S_{H_2}(0,0) &= 0 \\ S_{H_2}(0,1) = S_{H_2}(1,0) &= 1 \\ S_{H_2}(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{H_2}(1,\tfrac{1}{2}) = S_{H_2}(\tfrac{1}{2},1) &= 1\\
S_{H_2}(1,\tfrac{1}{3}) = S_{H_2}(\tfrac{1}{3},1) &= 1\\
S_{H_2}(\tfrac{1}{2},0) = S_{H_2}(0,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\\
S_{H_2}(\tfrac{1}{3},0) = S_{H_2}(0,\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3}\\
S_{H_2}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) = S_{H_2}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{5}{7}\\
S_{H_2}(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{6}) = S_{H_2}(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{16}{17}\\
S_{H_2}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{3}{5}\\
S_{H_2}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{4}{5}\\
S_{H_2}(\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{6}) &= \tfrac{60}{61}
\end{aligned}$$

S_{H_2} t-conormunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir. Birinci grafik üç boyutlu, ikinci grafik iki boyutludur.





Şekil 2.12. S_{H_2} Einsten sum t-conormunun grafiği

Örnek 2.9 $S : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$, $S(x,y) = \min\{x,y\}$ şeklinde tanımlanan S işlemi bir t-conorm değildir. Çünkü $\forall x \in (0,1]$ için $S(x,0) = \min\{x,0\} = 0 \neq x$ dir. Dolayısıyla (S4) sağlanmaz.

Önerme 2.11 $S : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ fonksiyonun bir t-conorm olması için gerekli ve yeterli koşul her $(x,y) \in [0,1]^2$ için

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) \qquad (2.1)$$

olacak şekilde bir T t-normu var olmasıdır. (Peter, Radko, Endre, 2000).

İspat Eğer T bir t-norm ise bu durumda S işlemi, (T1), (T2), (T3) ve (S4) aksiyomlarını sağlar. Bu nedenle S bir t-conormdur. Diğer yandan S bir t-conorm ise

$$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]\,,\ T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan T fonksiyonu bir t-normdur (Peter, Radko, Endre, 2000). □

Not 2.12 **(i)** T_M, T_P, T_L ve T_D t-normlarına karşılık gelen t-conormlar sırası ile S_M, S_P, S_L ve S_D dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

$$\begin{aligned}
1)S_M(x,y) &= 1 - T_M(1-x, 1-y) \\
&= 1 - \min\{1-x, 1-y\} \\
&= \max\{x,y\} \\
2)S_P(x,y) &= 1 - T_P(1-x, 1-y) \\
&= 1 - (1-x)(1-y) \\
&= 1 - [1 - y - x + xy] \\
&= y + x - xy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)S_L(x,y) &= 1 - T_L(1-x, 1-y) \\
&= 1 - \max\{(1-x) + (1-y) - 1, 0\} \\
&= 1 - \max\{1 - (x+y), 0\} \\
&= \min\{x+y, 1\} \\
4)S_D(x,y) &= 1 - T_D(1-x, 1-y) \\
&= 1 - \begin{cases} 0 & , \ eğer (1-x, 1-y) \in [0,1)^2 \\ \min\{1-x, 1-y\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & , \ eğer (x,y) \in (0,1]^2 \\ \max\{x,y\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) (S4) koşuluna ek olarak $\forall x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
S(1,x) &= S(x,1) = 1 \\
S(0,x) &= x
\end{aligned}$$

dir (Peter, Radko, Endre, 2000). Gerçekten de

$$\left.\begin{array}{lllllllll} S(1,x) & = & 1-T(1-1,1-x) & = & 1-T(0,1-x) & = & 1-0 & = & 1 \\ S(x,1) & = & 1-T(1-x,1-1) & = & 1-T(1-x,0) & = & 1-0 & = & 1 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow S(1,x) = S(x,1) = 1$$

$$\begin{array}{lllllll} S(0,x) & = & 1-T(1-0,1-x) & = & 1-T(1,1-x) & = & 1-(1-x) \\ & = & 1-1+x & & & & \\ & = & x & & & & \end{array}$$

dir.

(iii) $T_1 \leq T_2$ olmak üzere T_1 ve T_2 t-normlar ve S_1 ve S_2 de sırası ile bunların dual t-conormları ise $S_1 \geq S_2$ dir. Sonuç olarak her S t-conormu için $S_M \leq S \leq S_D$ dir. Yani S_M en zayıf, S_D en güçlü t- conormdur. Dört temel t-conorm için ise $S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_D$ dir (Peter, Radko, Endre, 2000). Diğer yandan bu t-conormlara S_{nM} ve S_{H_2} t-conormlarını da dahil edersek sıralama

$$S_M \leq S_{H_2} \leq S_P \leq S_{nM} \leq S_L \leq S_D$$

şeklinde olur.

(iv) $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ ve $S : A^2 \to A$ bir ikili işlem olmak üzere her $x,y,z \in A$ için $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$ dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

(v) Her S t-conormu (S2) gereğince genişletilebilir. Her $(x_1,x_2,...,x_n) \in [0,1]^n$ için

$$\underset{i=1}{\overset{n}{S}} x_i \quad = \quad S(\underset{i=1}{\overset{n-1}{S}} x_i, x_n) \quad = S(x_1,x_2,...,x_n)$$

dir. Özel olarak $x_1 = x_2 = ... = x_n$ ise

$$S(x,x,...,x) = x_s^{(n)}$$

ile gösterilir. Her $x \in [0,1]$ için $x_s^{(0)} = 0$, $x_s^{(1)} = x$ dir (Peter, Radko, Endre, 2000).

Örnek 2.10 Her $(x_1,x_2,...,x_n) \in [0,1]^n$ için S_M ,S_P, S_L ve S_D t-conormlarının genişletilmişleri aşağıdaki gibidir (Peter, Radko, Endre, 2000).

$$\begin{array}{lll} 1)S_M(x_1,x_2,...,x_n) & = & 1-T_M(1-x_1,1-x_2,...,1-x_n) \\ & = & 1-\min\{1-x_1,1-x_2,...,1-x_n\} \\ & = & \max\{x_1,x_2,...,x_n\} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
2)S_P(x_1,x_2,...,x_n) &= 1-T_P(1-x_1,1-x_2,...,1-x_n) \\
&= 1-(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) \\
&= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)S_L(x_1,x_2,...,x_n) &= 1-T_L(1-x_1,1-x_2,...,1-x_n) \\
&= 1-\max\left\{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)-(n-1),0\right\} \\
&= \min\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i,1\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)S_D(x_1,x_2,...,x_n) &= 1-T_D(1-x_1,1-x_2,...,1-x_n) \\
&= 1-\begin{cases} 1-x_i & , \text{ eğer } \forall j\neq i \text{ için } x_j=1 \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \\
&= \begin{cases} x_i & , \text{ eğer } \forall j\neq i \text{ için } x_j=0 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}
$$

BÖLÜM 3

FİBER PROJEKTİF DÜZLEMLER

Tanım 3.1 λ **fuzzy kümesi** , X kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} \lambda: \quad & X \to [0,1] \\ & x \to \lambda(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşümdür. $\lambda(x)$ sayısı , λ daki x noktasının **üyelik derecesi** şeklinde adlandırılır (Kuijken). X kümesi üzerindeki λ ve μ gibi *iki fuzzy kümelerinin arakesiti*

$$\begin{aligned} \lambda \wedge \mu: \quad & X \to [0,1] \\ & x \to \lambda(x) \wedge \mu(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda \wedge \mu$ fuzzy kümesidir. Burada, $\wedge$ **minimum operatörünü** ifade eder (Kuijken).

Tanım 3.2 Bir X kümesi üzerinde μ ve λ fuzzy kümeleri verilsin. Bu iki fuzzy kümenin $\lambda \times \mu$ **kartezyen çarpımı** aşağıdaki gibi tanımlanır (Kuijken):

$$\begin{aligned} \lambda \times \mu: \quad & X \times X \to [0,1] \\ & (x,y) \to \lambda(x) \wedge \mu(y) \end{aligned}$$

3.1 Fiber Noktalar ve Fiber Doğrular

Nokta kümesi P, doğru kümesi B olan nokta-doğru geometrisi $\mathcal{P} = (P,B,I)$ olsun. $\mathcal{P}$, kısmi lineer uzay olsun. Yani $\mathcal{P}$ de farklı iki nokta en fazla bir doğru belirtir. p ve q noktalarının üzerinde bulunduğu ortak doğru $\langle p,q \rangle$ ile gösterilip p ve q *doğrudaş*tır. L ve M ortak bir noktada kesişen doğrular ise bu nokta $L \cap M$ ile gösterilip L ve M nin **kesişimi** olarak adlandırılır. Aşağıda f-nokta ve f-doğru şeklinde kısaca adlandırdığımız fiber doğruları ve fiber noktaları tanımlanmaktadır (Kuijken).

Tanım 3.3 $a \in P$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. (a,α) f**-noktası**

$$\begin{aligned} (a,\alpha): \quad & P && \to && [0,1] \\ & a && \to && \alpha \\ & x && \to && 0,\ x \in P \setminus \{a\} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ nin P nokta kümesi üzerinde bir fuzzy kümesidir.

Dual olarak , $L \in B$ ve $\beta \in (0,1]$ için (L,β) f**-doğrusu**

$$\begin{array}{rccl} (L,\beta): & B & \rightarrow & [0,1] \\ & L & \rightarrow & \beta \\ & x & \rightarrow & 0,\ x \in B \setminus \{\beta\} \end{array}$$

biçiminde tanımlanır (Kuijken).

Bu tanımlamayla herhangi bir (a,α) f-noktası, $\mathcal{P}$ nin a noktasının sıfırdan farklı bir α üyelik derecesi almış bir noktasıdır. a, (a,α) f-noktasının taban noktası olarak adlandırılır. Farklı f-noktaları aynı taban noktasına sahip olabilir.

Dual olarak bir (L,β) f-doğrusu, $\mathcal{P}$ nin L doğrusunun sıfırdan farklı bir β üyelik derecesi almış bir doğrusudur. L ye (L,β) f-doğrusunun taban doğrusu denir. Benzer olarak farklı f-doğruları aynı taban doğrusuna sahip olabilir.

Tanım 3.4 (L,α) ve (M,β) f**-doğrularının arakesit noktası** $(L\cap M, \alpha\wedge\beta)$ şeklinde tanımlı bir tek f-noktasıdır (Kuijken).

(a,λ) ve (b,β) f**-noktalarının gerdiği** f**-doğrusu** $(\langle a,b\rangle, \lambda\wedge\beta)$ şeklinde tanımlanır ve bu bir tektir (Kuijken).

3.2 Fiber Projektif Düzlemler

Tanım 3.5 $\mathcal{P} = (P,B,I)$ bir projektif düzlem olsun. $\mathcal{F}P$, $\mathcal{P}$ nin sıfırdan farklı en az bir taban noktasına sahip olan noktalar kümesi, $\mathcal{F}B$, $\mathcal{P}$ nin sıfırdan farklı en az bir taban doğrusuna sahip olan doğrular kümesi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanırsa $(\mathcal{F}P, \mathcal{F}B)$ yapısına bir **fiber projektif düzlem** denir (Kuijken).

F1) Farklı taban noktalarından oluşan her f-nokta çifti yalnız bir f-doğrusu tarafından gerilir.

F2) Farklı taban doğrularından oluşan her f-doğru çifti yalnız bir f-noktasında kesişir.

3.2.1 Doğrudaş f-noktalar ve kesişen f-doğrular

Tanım 3.6 f- noktalarının her bir çifti aynı f- doğrusunu gererse bu f-noktalar kümesine **doğrudaş fiber noktalar** denir (Kuijken).

Tanım 3.7 İkişer ikişer aynı bir f-noktada kesişen f-doğrulara noktadaş f-doğrular yada **kesişen f-doğrular** denir (Kuijken).

$\mathcal{P}$ projektif düzlemi, $\mathcal{FP}$ nin **taban düzlemi** olarak adlandırılır. Aşağıdaki yolla bir fiber projektif düzlem üretilir. $P' \subseteq P$ ve $B' \subseteq B$ olsun. Öyleki $P' \cup B'$ içeren tek kapalı konfigürasyon $P \cup B$ dir. $P' \cup B'$ nin her bir x elemanı için $]0,1]$ in bir keyfi $\sum_x$ boş olmayan alt kümesini seçelim bu alt kümenin elemanlarına x in *başlangıç değerleri* denir. $\mathcal{FP}$ aşağıdaki gibi bir fiber projektif düzlem olarak tanımlanır. Her bir $x \in P' \cup B'$ ve her bir $\alpha \in \sum_x$ için (x, α) elemanı $\mathcal{FP}$ ye aittir. Bu oluşumun ilk adımıdır. Şimdi i adımını tanımlayalım, $i > 1$. Elde ettiğimiz f-noktalarının herhangi bir çifti bu çiftle gerilmiş f-doğrusu da tanımla $\mathcal{FP}$ ye aittir. Dual olarak , f-doğrularının herhangi bir çifti için kesişim $\mathcal{FP}$ ye aittir. Sonlu sayıda adımla bu yolla oluşturulmuş bütün f doğruların ve noktaların kümesi, bir fiber projektif düzlem oluşturmak için kullanılır. Anlaşılıyor ki her fiber projektif düzlemi yukarıda olduğu gibi inşa edilebilir. Aslında, herbir elaman için onun bütün denk değerleri başlangıç değerleri olarak her zaman alınabilir. Şimdi her $x \in P \cup B$ için $\sum_x$ tek bir küme olsun. Eğer $P' = P$ ve $B' = \varnothing$ ise fiber projektif düzlem *mono-point-generated* olarak adlandırılır. Eğer $P' = P$ ve $B' = B$ ise o zaman fiber projektif düzlem *mono-generated* olarak adlandırılır. $\mathcal{FP}$ yi sıradan bir projektif düzlem olarak düşünebiliriz. Bu düzlemin her nokta ve doğrusuna $]0,1]$ değerler kümesinden değer verildi (Kuijken).

Örnek 3.1 $\mathcal{F} = GF(2,2)$ Fano düzlemi klasik projektif düzlem olsun. $\mathcal{F}$ taban düzlemi ile bir mono-point-generated fiber projektif düzlemi inşa edilecektir. $\mathcal{F}$ nin yedi noktası ve yedi doğrusu sırasıyla $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ve $\{A,B,C,D,E,F,G\}$ ile gösterilmektedir. Burada $A = \{a,b,c\}$, $B = \{c,d,e\}$, $C = \{e,f,a\}$, $D = \{a,g,d\}$, $E = \{b,g,e\}$, $F = \{c,g,f\}$ $G = \{b,d,f\}$ dir. 1. adımda P nin noktaları üzerinde $(a,0.9)$, $(b,0.8)$, $(c,0.7)$, $(d,0.6)$, $(e,0.3)$, $(f,0.4)$ ve $(g,0.5)$ f-noktalarını alalım. Böylece 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.3, 0.4 ve 0.5, sırasıyla a,b,c,d,e,f ve g taban noktalarının başlangıç değerleridir. İlk oluşumda A doğrusu üzerindeki $(a,0.9)$, $(b,0.8)$, $(c,0.7)$ fiber noktaları taban doğrusu A olan ikişer ikişer farklı fiber doğrular oluşturur. Bu fiber doğruların üyelik dereceleri minimum operatörü kullanılarak $\{0.7, 0.8\}$ olarak bulunur. Benzer şekilde tabanı B doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri $\{0.3,\ 0.6\}$, tabanı C doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri $\{0.3,\ 0.4\}$, tabanı D doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri $\{0.5,\ 0.6\}$, tabanı E doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri $\{0.3,\ 0.5\}$, tabanı F doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri $\{0.4,\ 0.5\}$,tabanı G doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri $\{0.4,\ 0.6\}$ dır. 2. aşamada tabanı a,b,c,d,e,f,g noktaları olan fiber noktaların aldığı üyelik dereceleri sırasıyla $\{0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6\}$, $\{0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6\}$,

$\{0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6\}$, $\{0.3,\ 0{,}4,\ 0.5{,}0.6\}$, $\{0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$, $\{0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$, $\{0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$ kümeleriyle verilebilir. Bunlar kullanılarak A,B,C,D,E,F,G tabanlı fiber doğruların aldığı üyelik dereceleri sırasıyla $\{0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8\}$, $\{0.3,0.4,0.5,0.6\}$, $\{0.3,0.4,0.5\}$, $\{0.3,0.4,0.5,0.6\}$, $\{0.3,0.4,0.5\}$, $\{0.3,0.4,0.5\}$, $\{0.3,0.4,0.5,0.6\}$ kümeleriyle verilebilir. 3. aşamada yeni fiber nokta ve doğru oluşmaz. Böylece nokta ve doğruları aşağıda verilen fiber projektif düzlemi oluşturulmuş olur (Kuijken).

$\sum_a = \{0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.9\}$

$\sum_b = \{0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.8\}$

$\sum_c = \{0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7\}$

$\sum_d = \{0.3,\ 0{,}4,\ 0.5,\ 0{,}6\}$

$\sum_e = \{0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$

$\sum_f = \{0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$

$\sum_g = \{0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$, ve

$\sum_A = \{0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8\}$

$\sum_B = \{0.3,0.4,0.5,0.6\}$

$\sum_C = \{0.3,0.4,0.5\}$

$\sum_D = \{0.3,0.4,0.5,0.6\}$

$\sum_E = \{0.3,0.4,0.5\}$

$\sum_F = \{0.3,0.4,0.5\}$

$\sum_G = \{0.3,0.4,0.5,0.6\}$

KAYNAKLAR DİZİNİ

Karakaş H. İbrahim, 1998, Soyut Cebire Giriş, 1-6, 140-143.

Smith L., 1977, Lineer cebir, 17-35.

Kaya, R., 2005, Projektif geometri, 21-59.

Akça Z., Bayar A., Ekmekçi S., Maldeghem H. Van, 2006, Fuzzy projective speads of fuzzy projective spaces, Fuzzy sets & Systems, 157, 3237-3247.

Klement E. Peter, Mesiar Radko ve Pap Endre, 2000, Triangular norms, 3-14.

Kuijken L., Fuzzy projective geometries, Projektif Geometri ders notları.