

Dokuzuncu Mertebeden Projektif Düzlemde Ünitaller Üzerine

Hasbi Seçkin Akdemir

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2013

On Unitals in Projective Planes of Order Nine

Hasbi Seçkin Akdemir

MASTER OF SCIENCE THESIS
Department of Mathematics and Computer Sciences
January 2013

Dokuzuncu Mertebeden Projektif Düzlemde Ünitaller Üzerine

Hasbi Seçkin Akdemir

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ziya Akça

Ocak 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Hasbi Seçkin Akdemir' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı “**Dokuzuncu Mertebeden Projektif Düzlemde Ünitaller Üzerine**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ziya AKÇA

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonlu cisimler, sonlu yaklaşık cisimler, afin düzlemler, projektif düzlemler, bu iki düzlem arasındaki ilişkiler, miniquaternion sistemler ve dokuzuncu mertebeden projektif düzlemler tanıtılmıştır. İkinci bölümde quadrikler, kolonasyonlar, korelasyonlar, formlar, k-arc, oval, ovoid ve konik kavramları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde hermit eğrileri, dizayn ve ünital kavramları anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ise dokuzuncu mertebeden dezargsel bir düzlem üzerinde bir hermityen ünital elde edilmiş ve bu ünital üzerinden örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ünitaler, Hermit Eğrileri, Projektif Düzlem

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter finite fields, finite near fields, affine planes, projective planes, relations between these two planes, miniquaternion systems and projective planes of order 9 are given. In the second chapter we studied properties of quadrics, collinations, correlations, forms, k -arc, ovals, ovoids and conics. In the third chapter hermitian curve, designs and unitals are given. And the fourth chapter is about forming a hermitian unital in a desarguesian plane of order 9 and giving examples from this unital that has been established.

Keywords: Unitals, Hermitian Curves, Projective Planes

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Doç. Dr. Ziya Akça

başta olmak üzere

Doç. Dr. Ayşe Bayar ve Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi'ye;

çalışmalarımda bana yardımcı olan değerli arkadaşım,

Hakkı Keskin'e

ve beni her zaman destekleyen,

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
BÖLÜM 0. GİRİŞ	1
BÖLÜM 1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR	2
1.1 Sonlu Cisimler, Sol Yaklaşık Cisimler	2
1.1.1 Sonlu cisimler	2
1.1.1.1 Dokuzuncu mertebeden Galois cismi	3
1.1.2 Sonlu sol yaklaşık cisimler	4
1.2 Afın ve Projektif Düzlemler	5
1.2.1 Afın düzlemler	5
1.2.2 Projektif düzlemler	6
1.2.3 Afın ve projektif düzlem arasındaki ilişkiler	7
1.3 Dokuzuncu Mertebeden Yaklaşık Cisimler	8
1.4 Miniqaternion Sistemler	10
1.4.1 Miniqaternion sistem	10
1.4.2 \mathcal{L} nin grup otomorfizması	12
1.5 Dokuzuncu Mertebeden Projektif Düzlemler	13
1.5.1 Dezarg düzlemi	13
1.5.2 Sağ yaklaşık cisim ve sol yaklaşık cisim düzlemleri	15
1.5.3 Hughes düzlemi	16

BÖLÜM 2. ÜNİTALLER İÇİN ÖN HAZIRLIKLAR	18
2.1 Düşük Boyutlu Uzaylarda Quadrik	18
2.2 Kolinasyonlar, Korelasyonlar ve Formlar	20
2.2.1 Kolinasyonlar	20
2.2.1.1 Merkezsel kolinasyonlar	21
2.2.2 Korelasyonlar	21
2.2.3 Formlar	23
2.3 Konikler	24
2.4 k-arc, Oval ve Ovoid	25
BÖLÜM 3. ÜNİTALLER	27
3.1 Hermit Eğrileri	27
3.1.1 Dejenere olmayan Hermit eğrileri	27
3.1.2 Dejenere Hermit eğrileri	29
3.2 Ünitaller	30
3.2.1 Dokuzuncu mertebeden ünitaller	33
BÖLÜM 4. BİR ÜNİTAL UYGULAMASI	35
4.1 Dezarg Düzleminde Bir Hermityen Ünitale Örneği	35
KAYNAKLAR DİZİNİ	53

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Ana konusu dokuzuncu mertebeden projektif düzlemlerde ünitaler kavramı olan bu çalışmada, bir ünital $n \geq 3$ olmak üzere $2 - (n^3 + 1, n + 1, 1)$ dizayndır ve dokuzuncu mertebeden bir cisimden elde edilen dokuzuncu mertebeden dezargsel bir projektif düzlemdeki hermityen ünital, bilgisayar programı yardımıyla gösterilmiştir. n^2 mertebeli bir projektif düzlem üzerinde $n^3 + 1$ noktaya sahip olan bu kümeler, o düzlemin her doğrusunu *bir* ya da $n + 1$ noktada keserler. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Son bölümde dokuzuncu mertebeden dezargsel projektif düzlemden elde edilen bir hermityen ünital uygulaması verilmektedir.

Birinci bölümde, tez boyunca kullanacağımız bazı temel kavramlara yer verildi. Öncelikle sonlu cisimler ve yaklaşık cisimler tanımlandı. Daha sonra afin ve projektif düzlemlerin tanımları, özellikleri ve aralarındaki ilişkiler verilerek dokuzuncu mertebeden cisimler oluşturuldu. Miniquaternion sistemler adı verilen bu dokuzuncu mertebeden yaklaşık cisimlerin bazı özelliklerine bakılarak dokuzuncu mertebeden projektif düzlemlere bir geçiş sağlanıp dokuzuncu mertebeden bilinen dört tane düzlem olan Dezarg düzlemi, sağ yaklaşık düzlemi, sol yaklaşık düzlemi ve Hughes düzlemi tanıtıldı.

İkinci bölümde, bu projektif düzlemlerdeki ünital yapısını oluşturmak için kullanacağımız özelliklere yer verilerek birinci ve ikinci bölüm arasında bir bağlantı kuruldu. Düşük boyutlu uzaylarda quadrik, konik gibi kavramların yanı sıra projektif düzlemlerde kolinyasyonlar, korelasyonlar ve formlar gibi projektif düzlemin daha farklı özellikleri anlatıldı.

Üçüncü bölümde ise öncelikle hermityen eğriler ve dizayn kavramları üzerinde durulmuştur. Design kavramından sonra bir projektif düzlemdeki ünital kavramı açıklanıp bazı çeşitli ünital yapılarından bahsedilmiştir ve son bölüm olan dördüncü bölümde dokuzuncu mertebeden dezargsel bir düzlemdeki hermityen ünital hesaplanıp bazı örnekler verilerek bu çalışma tamamlanmıştır.

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Sonlu Cisimler, Sol Yaklaşık Cisimler

1.1.1 Sonlu cisimler

Tanım 1.1 $F \neq \emptyset$ olmak üzere;

- i. $(F, +)$ abel grup,
- ii. $F^* = F - \{0\}$ olmak üzere, (F^*, \cdot) abel grup,
- iii. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ise $(F, +, \cdot)$ sistemine **cisim** denir.

$(F, +, \cdot)$ birim elemanı “1” olan bir cisim olsun. Toplanan 1 lerin sayısı n olmak üzere $1 + 1 + \dots + 1 = 0$ özelliğinde bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa, bunların en küçüğüne *cismin karakteristiği* denir. Böyle sonlu bir n sayısı yoksa cismin karakteristiği *sıfır* olarak tanımlanır.

Bir cismin karakteristiği ya *sıfır* ya da bir *asal sayıdır*. Bütün sonlu cisimlerin karakteristikleri asaldır (Kaya, 2005).

Tanım 1.2 Verilen her p asal sayısı ve r pozitif tamsayısı için karakteristiği p olan p^r elemanlı bir tek **sonlu cisim** vardır. Bu cisme mertebesi p^r olan **Galois cismi** denir ve $q = p^r$ olmak üzere $GF(q)$ ile gösterilir.

$GF(p^r)$ cisminin her elemanı $x^{p^r} = x$ denklemini sağlar. Dolayısıyla, $F = GF(q)$ olmak üzere $(F - \{0\}, \cdot)$ çarpım grubunun tüm elemanları 1 in $p^r - 1$ inci dereceden kökleri olup devirli bir gruptur. Bu devirli grubun her üretecine bir *ilkel kök* denir. $GF(q)$ nun toplam grubu; q , asal bir p sayısının kuvveti olmak üzere elementer abel bir p -gruptur ve bundan dolayı karakteristiği p dir. Buradan görülür ki, herhangi bir $x, y \in GF(q)$ için $(x + y)^p = x^p + y^p$ dir. Dolayısıyla, $x \mapsto x^p$ dönüşümü $GF(q)$ nun bir cisim otomorfizmasıdır ve *Frobenius otomorfizması* olarak adlandırılır. Bu dönüşüm aynı zamanda $GF(q^2)$ nin involüt cisim otomorfizmasıdır. Sabit kalan cismi ise $GF(q^2)$ nin alt grubu olan $GF(q)$ cisimidir (Kaya, 2005).

Eğer $x \in GF(q^2)$ ise bu durumda $x^{q+1} \in GF(q)$ olur ve $x \mapsto x^{q+1}$ dönüşümü $GF(q^2)$ den $GF(q)$ ya *norm fonksiyonu* olarak adlandırılır. $GF(q^2)$ cisminde sıfır normunun tek elemanı sıfırdır. Eğer a , $GF(q)$ nun sıfırdan farklı bir elemanı ise bu durumda polinomsal argümandan görülebileceği gibi $GF(q^2)$ nin en fazla $q+1$ tane elemanı a normunu içerir. $GF(q^2)$ de sıfırdan farklı q^2-1 tane eleman olduğundan; $GF(q)$ altgrubunun sıfırdan farklı a elemanı için, $GF(q^2)$ de a normunun tam olarak $q+1$ tane elemanı olduğunu görürüz (Kaya, 2005).

1.1.1.1 Dokuzuncu mertebeden Galois cismi

9 elemanlı bir Galois Cismi olan $GF(9) = GF(3^2)$, $GF(3)$ cismi ve bu cisim üzerinde indirgenemez bir polinom yardımıyla elde edilebilir. Varsayalım ki bu polinom,

$$f(x) = x^2 + x + 2 \quad (1.1)$$

olsun. Görüldüğü üzere, $x \in GF(3)$ için $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$, $f(2) \neq 0$ olduğundan indirgenemez bir polinomdur. ε elemanını $GF(3^2)$ cisminin üretici olarak alırsak;

$$GF(3^2) = \{0, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7, \varepsilon^8\} \quad (1.2)$$

şeklinde (Daniel Marshall, 2010). $f(\varepsilon) = 0$ olduğundan, $\varepsilon^2 = 2\varepsilon + 1$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon, & \varepsilon^5 &= 2\varepsilon, \\ \varepsilon^2 &= 2\varepsilon + 1, & \varepsilon^6 &= 2\varepsilon^2 = \varepsilon + 2, \\ \varepsilon^3 &= \varepsilon(2\varepsilon + 1) = 2\varepsilon + 2, & \varepsilon^7 &= \varepsilon(\varepsilon + 2) = \varepsilon + 1, \\ \varepsilon^4 &= \varepsilon(2\varepsilon + 2) = 2, & \varepsilon^8 &= \varepsilon(\varepsilon + 1) = 1 \end{aligned}$$

olur.

Tablo 1.1. $GF(3)$ cisminden elde edilen $GF(3^2)$ cisminin toplam tablosu.

+	0	1	2	ε	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	2ε	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$
0	0	1	2	ε	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	2ε	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$
1	1	2	0	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	ε	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	2ε
2	2	0	1	$\varepsilon + 2$	ε	$\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	2ε	$2\varepsilon + 1$
ε	ε	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	2ε	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	0	1	2
$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	ε	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	2ε	1	2	0
$\varepsilon + 2$	$\varepsilon + 2$	ε	$\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	2ε	$2\varepsilon + 1$	2	0	1
2ε	2ε	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	0	1	2	ε	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$
$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 1$	$2\varepsilon + 2$	2ε	1	2	0	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	ε
$2\varepsilon + 2$	$2\varepsilon + 2$	2ε	$2\varepsilon + 1$	2	0	1	$\varepsilon + 2$	ε	$\varepsilon + 1$

Tablo 1.2. $GF(3)$ cisiminden elde edilen $GF(3^2)$ cisminin çarpım tablosu.

\times	0	1	2	ϵ	$\epsilon + 1$	$\epsilon + 2$	2ϵ	$2\epsilon + 1$	$2\epsilon + 2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	ϵ	$\epsilon + 1$	$\epsilon + 2$	2ϵ	$2\epsilon + 1$	$2\epsilon + 2$
2	0	2	1	2ϵ	$2\epsilon + 2$	$2\epsilon + 1$	ϵ	$\epsilon + 2$	$\epsilon + 1$
ϵ	0	ϵ	2ϵ	2	$\epsilon + 2$	$2\epsilon + 2$	1	$\epsilon + 1$	$2\epsilon + 1$
$\epsilon + 1$	0	$\epsilon + 1$	$2\epsilon + 2$	$\epsilon + 2$	2ϵ	1	$2\epsilon + 1$	2	ϵ
$\epsilon + 2$	0	$\epsilon + 2$	$2\epsilon + 1$	$2\epsilon + 2$	1	ϵ	$\epsilon + 1$	2ϵ	2
2ϵ	0	2ϵ	ϵ	1	$2\epsilon + 1$	$\epsilon + 1$	2	$2\epsilon + 2$	$\epsilon + 2$
$2\epsilon + 1$	0	$2\epsilon + 1$	$\epsilon + 2$	$\epsilon + 1$	2	2ϵ	$2\epsilon + 2$	ϵ	1
$2\epsilon + 2$	0	$2\epsilon + 2$	$\epsilon + 1$	$2\epsilon + 1$	ϵ	2	$\epsilon + 2$	1	2ϵ

Dolayısıyla, $GF(3^2)$ nin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$GF(3^2) = \{0, 1, 2, \epsilon, \epsilon + 1, \epsilon + 2, 2\epsilon, 2\epsilon + 1, 2\epsilon + 2\}. \quad (1.3)$$

1.1.2 Sonlu sol yaklaşık cisimler

Tanım 1.3 $(S, +, \otimes)$ sisteminde;

- i. S sonlu,
- ii. $(S, +)$ abel grup; birim elemanı 0,
- iii. $S^* = S - \{0\}$ olmak üzere, (S^*, \otimes) grup, birim elemanı 1,
- iv. $a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c$ (soldan dağılma özelliği),

v. $\xi \in S$ için $\xi \otimes 0 = 0$

şartlarını sağladığında, $(S, +, \otimes)$ sistemine **sol yaklaşık cisim** denir. Eğer bu $(S, +, \otimes)$ sistemi, sağdan dağılma özelliğine sahipse **sağ yaklaşık cisim** olarak adlandırılır (Room and Kirkpatrick, 2008).

1.2 Afın ve Projektif Düzlemler

1.2.1 Afın düzlemler

Tanım 1.4 \mathcal{N} ve \mathcal{D} , elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme, \circ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir ‘üzerinde bulunma bağıntısı’ (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını gerçekleyen $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine **afın düzlem** denir:

A1. $\forall M, N \in \mathcal{N}, M \neq N$, noktaları için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ vardır.

A2. $N \circ d$ olmak üzere $\forall N \in \mathcal{N}$ ve $\forall d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathcal{D}$

doğrusu vardır.

A3. Herhangi doğrudan olmayan üç nokta vardır.

Teorem 1.5 Her sonlu \mathbb{A} düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır: (Bu tam sayıya \mathbb{A} nın **mertebesi** denir.)

i. \mathbb{A} nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.

ii. \mathbb{A} nın her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.

iii. \mathbb{A} daki noktaların toplam sayısı, $|\mathcal{N}| = n^2$ dir.

iv. \mathbb{A} daki doğruların toplam sayısı, $|\mathcal{D}| = n^2 + n$ dir.

Yukarıda verilen teoremden anlaşıldığı üzere, $n + 1$ doğrunun paralel sınıfları vardır, bu sınıflar n elemanlıdır ve her doğru bir paralel sınıfta olup her nokta bir paralel sınıfının içerisindeki doğrulardan yalnız bir tanesinin üzerindedir. Sonlu ve sonlu olmayan afın düzlemler mevcuttur ve verilen her F cisim için noktaları ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak oluşturulabilen bir afın düzlem vardır. Dolayısıyla p bir asal sayı ve $q = p^f$ olmak üzere, $F = GF(q)$ sonlu cisimleri yardımıyla tanımlanan çok sayıda sonlu afın düzlem mevcuttur. Bu F cisim ile oluşturulan afın düzlem $AG(2, q)$ şeklinde gösterilir ve $AG(2, q)$ nun mertebesi q dur (Kaya, 2005).

1.2.2 Projektif düzlemler

Tanım 1.6 \mathcal{N} ve \mathcal{D} , elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme, \circ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir ‘üzerinde bulunma bağıntısı’ olmak üzere aşağıdaki P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine **projektif düzlem** denir:

P1. $\forall M, N \in \mathcal{N}, M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ vardır.

P2. $\forall c, d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

P3. Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

Teorem 1.7 Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir.

Teorem 1.8 Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tamsayısı vardır: (Bu sayıya \mathbb{P} nin **mertebesi** denir.)

i. \mathbb{P} nin her doğrusu üzerinde $n + 1$ tane nokta vardır.

ii. \mathbb{P} nin her noktasında $n + 1$ tane doğru geçer.

iii. \mathbb{P} deki noktaların toplam sayısı $|\mathcal{N}| = n^2 + n + 1$ dir.

iv. \mathbb{P} deki doğruların toplam sayısı $|\mathcal{D}| = n^2 + n + 1$ dir.

Afin düzlemlerde olduğu gibi, sonlu ve sonsuz projektif düzlemler mevcuttur ve verilen her F cisim için noktaları ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir projektif düzlem vardır. Dolayısıyla yine p bir asal sayı ve $q = p^r$ olmak üzere $F = GF(q)$ sonlu cisimleri yardımıyla tanımlanan çok sayıda projektif düzlem bulunabilir ve bu F cisim ile oluşturulan projektif düzlem $PG(2, q)$ şeklinde gösterilir ve $PG(2, q)$ nun mertebesi q dur (Kaya, 2005).

Tanım 1.9 S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S de ‘nokta’ sözcüğü yerine ‘doğru’ ve ‘doğru’ sözcüğü yerine ‘nokta’ koyarak bulunan yeni ifadeye S nin **dual ifadesi** denir ve S^* ile gösterilir.

Bu tanımdan yola çıkarak, birbirlerinin duali olan nokta ve doğru kavramlarından başka aşağıda yazılan kavramlar birbirlerinin duali olup, dual ifade bulunurken onların da yer değiştirmeleri gerekir (Kaya, 2005).

<i>noktadaş</i>	---	<i>doğrudaş</i>
\vee , <i>birleşme</i>	---	\wedge , <i>kesişme</i>
<i>... üzerinde bulunur</i>	---	<i>... dan geçer</i>

Teorem 1.10 Bir projektif düzleme ilişkin her teoremin ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir.

Sonuç 1.11 Eğer $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlem ise $\mathbb{P}^* = (\mathcal{D}, \mathcal{N}, \circ^{-1})$ de bir projektif düzlemdir. \mathbb{P}^* düzlemine \mathbb{P} nin **dual projektif düzlemi** denir.

Teorem 1.12 F , bir cisim olmak üzere; bu cismin elemanlarıyla koordinatlanan bir projektif düzlem vardır ve $\mathbb{P}_2 F$ ile gösterilir.

1.2.3 Afin ve projektif düzlem arasındaki ilişkiler

\mathbb{A} , bir afin düzlem olsun. Doğruların her bir L paralel sınıfı için L nin bütün doğrularına eklenmek üzere yeni bir nokta tanımlansın ve üstelik bu noktalar \mathbb{A} nın başka hiçbir doğrusuna eklenmesin. Böylece \mathbb{A} nın bir L paralel sınıfında bulunan doğrular, \mathbb{A} ya ait olmayan bir noktada kesişmiş olur. Bu noktalar *ideal nokta* isimlendirilir. Ek olarak bu eklenen yeni noktaları içerip \mathbb{A} nın başka hiçbir noktasını içermeyen bir l_∞ doğrusu tanımlansın. Açıkça görülür ki, bu yeni yapı bir projektif düzlemdir. Bu yolla; *ideal doğru* olarak adlandırılan l_∞ doğrusu eklenerek, verilen \mathbb{A} afin düzleminden yalnız bir tane projektif düzlem elde edilir. Elde edilen projektif düzlem, \mathbb{A} afin düzleminin **tamamlanmış**ı olarak adlandırılır (Kaya, 2005).

Teorem 1.13 Her afin düzlemin tamamlanmış bir projektif düzlemdir.

Π , bir projektif düzlem ve l , Π de bir doğru olsun. Π^l yi, Π projektif düzleminden l doğrusunu ve üzerindeki tüm noktaları çıkararak oluşturulan yapı şeklinde tanımlarsak, görürüz ki Π^l bir afin düzlemdir. $\pi = PG(2, q)$ ve π de seçilen herhangi bir l için, π^l yapısı $AG(2, q)$ ya izomorftur. Bu durumda, l doğrusu genellikle $x = 0$ ya da $z = 0$ olacak şekilde seçilir. Örneğin, $x = 0$ *ideal doğru* olduğunda π^l yapısı $x, y \in F$ için $(1, x, y)$ noktalarını içerir. π^l yapısının noktaları doğal olarak $(1, x, y) \longleftrightarrow (x, y)$ yoluyla $AG(2, q)$ nun standart modeline denktir. Bu denkliği kullanarak, her $x \in F$ için $(0, 0, 1)$ ve $(0, 1, x)$ noktası *ideal nokta* olarak adlandırılırken, π nin $(1, x, y)$ şeklindeki bir noktası *afin nokta* olarak adlandırılır. Klasik olmayan Π projektif düzlemler için, Π nin birbirinden farklı l_1 ve l_2 doğrularının ve üzerindeki noktaların Π

den çıkarılması ile elde edilen farklı Π^{l_1} ve Π^{l_2} yapıları birbirine izomorf olmayabilir (Wantz, 1995).

Teorem 1.14 Bir projektif düzlemden herhangi bir doğru tüm noktalarıyla atılırsa geriye kalan yapı bir afin düzlemdir.

1.3 Dokuzuncu Mertebeden Yaklaşık Cisimler

9. mertebeden \mathcal{F} yaklaşık cismini $\mathbf{D} = \{0, 1, -1\}$ altkümesini kullanarak oluşturalım. \mathcal{F} nin 9 elemanı (a, b) ; $a, b \in \mathbf{D}$ şeklindeki sıralı ikililerdir ve \mathcal{F} deki toplam ve çarpım işlemleri $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{D}$ olmak üzere şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} + : & (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ \times : & (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Kolayca görürüz ki $+$ işlemi \mathcal{F} de birim elemanı $0 = (0, 0)$ ve herhangi bir (a, b) için ters elemanı $-(a, b) = (-a, -b)$ olan değişmeli bir grup ikili işlemidir. \mathcal{F} deki diğer grup ikili işlemi olan \times işlemi de $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \{0\}$ üzerinde birim elemanı $1 = (1, 0)$ ve herhangi bir $(a, b) \neq (0, 0)$ için ters elemanı $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$ olan değişmeli bir grup ikili işlemidir (Room and Kirkpatrick, 2008).

Son olarak, \times ikili işlemi birleşmelidir:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \times [(a_2, b_2) \times (a_3, b_3)] &= (a_1, b_1) \times (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \times (a_3, b_3) \\ &= [(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)] \times (a_3, b_3). \end{aligned}$$

\times ikili işlemi için soldan dağılma özelliği:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \times [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] &= (a_1, b_1) \times (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) \\ &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \times (a_3, b_3) \end{aligned}$$

şeklinde. Dolayısıyla, \times ikili işleminin \mathcal{F}^* üzerinde bir grup ikili işlemi olduğu görülür. Yani \mathcal{F} , 9. mertebeden bir *sol yaklaşık cisimdir*; fakat \times ikili işlemi değişmeli olduğundan \mathcal{F} aynı zamanda sağdan dağılma özelliğine de sahiptir. Dolayısıyla \mathcal{F} değişmeli bir cisimdir (Room and Kirkpatrick, 2008).

Not 1.15 \times ikili işlemi yerine bundan sonra kolaylık olması açısından ‘ \cdot ’ yazacağız.

$a = (a, 0)$ ve $\epsilon = (0, 1)$ yazarsak görürüz ki, $(a, b) = a + b\epsilon$ ve $\epsilon^2 = -1$ dir.

\mathcal{F} nin çarpım grubunu inceleyelim. Aslında bu grup devirlidir ve $\epsilon^2 = -1$ olduğundan ϵ tarafından oluşturulamaz.

$\epsilon^4 = 1$; fakat $(1 - \epsilon)^2 = 1 + \epsilon + \epsilon^2 = \epsilon$ dir. Yani, $(1 - \epsilon)^4 = -1$ ve buradan $(1 - \epsilon)^8 = 1$ ve 1 e eşit olan $(1 - \epsilon)$ un daha küçük kuvveti yoktur.

$\epsilon^2 = -1, \epsilon^3 = -\epsilon, \epsilon^4 = 1, \dots, (1 - \epsilon)^8 = 1$ dir.

$\omega = (1 - \epsilon)$ olsun. ω nın kuvvetleri;

$$\begin{array}{ll} \omega^1 = 1 - \epsilon, & \omega^5 = -1 + \epsilon, \\ \omega^2 = \epsilon, & \omega^6 = -\epsilon, \\ \omega^3 = 1 + \epsilon, & \omega^7 = -1 - \epsilon, \\ \omega^4 = -1, & \omega^8 = 1 \end{array}$$

şeklindedir.

Toplama işlemini ise $\omega^2 = -\omega + 1$ eşitliğini kullanarak oluşturabiliriz (Room and Kirkpatrick, 2008).

Örnek 1.1 $\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = \omega \cdot (-\omega + 1) = -\omega^2 + \omega = -(-\omega + 1) + \omega = -\omega - 1$. Yani, $\omega^3 + 1 = -\omega$ ve

$$\omega^4 = (\omega^2)^2 = (1 - \omega)^2 = 1 + \omega + \omega^2 = 1 + \omega + 1 - \omega = -1$$

olduğundan $\omega^3 + 1 = -\omega = (-1) \cdot \omega = \omega^4 \cdot \omega = \omega^5$ şeklindedir.

Eğer $\omega^r = a + b\epsilon$ ise, $(\omega^r)^3 = a^3 + 3a^2b\epsilon + 3ab^2\epsilon + b^3\epsilon^3$ dir.

$$x \in \mathbf{D} \implies x^3 = x \text{ ve } 3x = 0$$

olmak üzere $\epsilon^2 = -1$ olduğundan,

$$\omega^r = a + b\epsilon \implies \omega^{3r} = a - b\epsilon$$

olur ve bunun için aşağıdaki terminoloji kullanılır (Room and Kirkpatrick, 2008).

Tanım 1.16 $a + b\epsilon$ ve $a - b\epsilon$, \mathcal{F} nin eşlenik elemanları olarak adlandırılır ve

$$(a + b\epsilon)^* = a - b\epsilon, \text{ yani } (\omega^r)^* = \omega^{3r}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$\omega^{r*} = \omega^{3r} = (\omega^3)^r = (\omega^*)^r$$

elde edilir.

ω yı kullanarak *toplama* için oluşturulan tablo aşağıdaki gibidir:

Tablo 1.3. \mathcal{F} nin ω yı kullanarak oluşturulan toplama tablosu.

+	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4	ω^5	ω^6	ω^7
1	ω^4	ω^7	ω^3	ω^5	0	ω^2	ω	ω^6
ω	ω^7	ω^5	1	ω^4	ω^6	0	ω^3	ω^2
ω^2	ω^3	1	ω^6	ω	ω^5	ω^7	0	ω^4
ω^3	ω^5	ω^4	ω	ω^7	ω^2	ω^6	1	0
ω^4	0	ω^6	ω^5	ω^2	1	ω^3	ω^7	ω
ω^5	ω^2	0	ω^7	ω^6	ω^3	ω	ω^4	1
ω^6	ω	ω^3	0	1	ω^7	ω^4	ω^2	ω^5
ω^7	ω^6	ω^2	ω^4	0	ω	1	ω^5	ω^3

1.4 Miniquaternion Sistemler

1.4.1 Miniquaternion sistem

9. mertebeden *soldan dağılma özelliği olmadan* kurduğumuz \mathcal{L} yaklaşık cismine **mini-quaternion sistem** denir. \mathcal{L} nin elemanları ile \mathcal{F} nin elemanları ve $+$ işlemi aynıdır. Yani $a, b \in \mathbf{D}$ olmak üzere dokuz tane (a, b) sıralı ikilisi için

$$+ : (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

dir. Çarpım işlemi farklı olmasına rağmen; \mathcal{F} deki çarpım işleminin kurallarıyla tanımlanabilir. ω nın $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7$ olan sekiz kuvvetinin kümesini \mathbf{E} ve \mathbf{Q} olmak üzere iki altgruba bölelim.

$$\mathbf{E} = \{\omega^0, \omega^2, \omega^4, \omega^6\} = \{\omega \text{ nin çift kuvvetleri}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{\omega^1, \omega^3, \omega^5, \omega^7\} = \{\omega \text{ nin tek kuvvetleri}\}$$

\mathcal{F} cisminde çarpım işlemi;

$$0 \cdot \xi = \xi \cdot 0; \text{ her } \xi \text{ için ve } \omega^r \cdot \omega^s = \omega^{r+s}$$

şeklindedir.

Buradan yeni \otimes çarpım işlemi şu şekilde tanımlanır (Room and Kirkpatrick, 2008):

$$\begin{aligned} 0 \otimes \xi &= 0, \xi \otimes 0 = 0 & \forall \xi \in \mathcal{L} \text{ için,} \\ \omega^r \otimes \omega^s &= \omega^r \cdot \omega^s = \omega^{r+s} & \text{eğer } \omega^s \in \mathbf{E} \text{ ise,} \\ \omega^r \otimes \omega^s &= \omega^{r*} \cdot \omega^s = \omega^{3r} \cdot \omega^s = \omega^{3r+s} & \text{eğer } \omega^s \in \mathbf{Q} \text{ ise.} \end{aligned}$$

Örnek 1.2 $\omega^2 \otimes \omega = \omega^2 \cdot \omega^3 = \omega^5$; fakat $\omega \otimes \omega^2 = \omega \cdot \omega^2 = \omega^3$.

Dolayısıyla, \otimes işlemi değişmeli değildir. Aynı zamanda $+$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği yoktur.

Örnek 1.3 $\omega \otimes (\omega + 1) = \omega \otimes \omega^7 = \omega^3 \cdot \omega^7 = \omega^2$. Oysa ki, $\omega \otimes (\omega + 1) = \omega \otimes \omega + \omega \otimes 1 = \omega^3 \cdot \omega + \omega = \omega^4 + \omega = \omega^6$.

\mathcal{L} miniquaternion sistemi (a, b) şeklinde 9 tane ikiliden oluşur, $+$ ve \otimes işlemleriyle tanımlıdır.

Teorem 1.17 $(\mathcal{L}, +, \otimes)$ miniquaternion sistemi, 9. mertebeden bir yaklaşık cisimdir.

\mathcal{F} yi açık bir şekilde gerektirmeden \mathcal{L} miniquaternion sistemin ne anlama geldiğini açıklığa kavuşturalım. Hatırlayalım ki, \mathcal{F} de $\varepsilon^2 = -1$ idi. Yani, -1 , \mathcal{F} de bir kareköktür. Mertebesi tek olan değişmeli bir cisimde seçilen sıfırdan farklı elemanın ya *karekökü yoktur* ya da *iki karekökü vardır* (\mathcal{F} de -1 in karekökleri $\pm\varepsilon$ dur).

Fakat \mathcal{L} de durum farklıdır:

$$\begin{aligned} 1 \otimes 1 &= 1, \omega \otimes \omega = \omega^2 \otimes \omega^2 = \omega^3 \otimes \omega^3 = \omega^4 (= -1), \\ \omega^4 \otimes \omega^4 &= 1, \omega^5 \otimes \omega^5 = \omega^6 \otimes \omega^6 = \omega^7 \otimes \omega^7 = \omega^4. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, -1 in \mathcal{L} de 6 tane karekökü vardır ve bunlar, $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^5, \omega^6, \omega^7$ olmak üzere;

$$\omega^4 = -1 \text{ olduğundan } \omega^5 = -\omega, \omega^6 = -\omega^2 \text{ ve } \omega^7 = -\omega^3 \text{ tür.}$$

Eğer, $\alpha = \omega, \beta = \omega^6, \gamma = \omega^7$ ise,

$$\alpha \otimes \beta = \gamma = -\beta \otimes \alpha,$$

$$\beta \otimes \gamma = \alpha = -\gamma \otimes \beta,$$

$$\gamma \otimes \alpha = \beta = -\alpha \otimes \gamma$$

ve

$$\alpha \otimes \alpha = \beta \otimes \beta = \gamma \otimes \gamma = -1$$

şeklindedir. Aslında, \mathcal{L} nin çarpım grubu standart quaternion sistemindeki $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ elemanlarına izomorftur. Buradan,

$$\omega^6 = \omega - 1, \omega^7 = \omega + 1 \text{ öyle ki, } \beta = \alpha - 1 \text{ ve } \gamma = \alpha + 1 \text{ olur.}$$

Bu nedenle \mathcal{L} nin 9 elemanı,

$$\mathcal{L} = \{0, 1, -1, \alpha, -\alpha, \beta = \alpha - 1, -\beta = -\alpha + 1, \gamma = \alpha + 1, -\gamma = -\alpha - 1\}$$

şeklindedir.

\mathcal{L} *miniquaternion sistemi*, elemanları $0, \pm 1, \pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma$ olan 9 elemanlı yaklaşık cisim olarak, aşağıdaki bağıntılarla tamamen tamamlanmış olur (Room and Kirkpatrick, 2008).

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - 1, \gamma = \alpha + 1, \alpha \otimes \alpha = \beta \otimes \beta = \gamma \otimes \gamma = -1 \\ \alpha \otimes \beta &= \gamma = -\beta \otimes \alpha, \beta \otimes \gamma = \alpha = -\gamma \otimes \beta, \gamma \otimes \alpha = \beta = -\alpha \otimes \gamma. \end{aligned}$$

Not 1.18 Bundan sonra, $\xi \otimes \mu$ yerine $\xi\mu$ ve $\xi \otimes \xi$ yerine ξ^2 yazacağız.

Teorem 1.19 Bir $\mathcal{L} = \{0, \pm 1, \pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma\}$ miniquaternion sistemde,

$$\mathcal{L}^* = \{\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma\} = \mathcal{L} - \mathbf{D} \text{ olsun. O halde,}$$

(i) Toplama altındaki bağıntılar;

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = 1, \alpha + \beta + \gamma = 0$$

(ii) Çarpma altındaki bağıntılar;

$$\begin{aligned} i) \quad & \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1. \text{ Yani, } \xi \in \mathcal{L}^* \implies \xi^2 = -1, \\ ii) \quad & \alpha\beta\gamma = -1 \text{ olduğundan } \beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha, \gamma\alpha = -\alpha\gamma = \beta, \alpha\beta = -\beta\alpha = \gamma. \\ & \text{Buradan, } \xi, \mu \in \mathcal{L}^* \text{ ve } \xi \neq \pm\mu \text{ olmak üzere } \xi\mu = -\mu\xi \end{aligned}$$

şeklindedir.

1.4.2 \mathcal{L} nin grup otomorfizması

$\sigma \in \mathcal{L}^* = \{\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma\}$ olsun ve \mathcal{L} nin her bir elemanı $a, b \in \mathbf{D}$ olmak üzere bir tek $a + b\sigma$ biçiminde yazılabilir. \mathcal{L}^* da 6 tane σ elemanı vardır ve \mathcal{L} de herhangi bir $a + b\alpha \longrightarrow a + b\sigma$ permütasyonu ile hesaplanır.

Eğer $\sigma = -\alpha$ ise,

$$(0, 1, -1, \alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \gamma, -\gamma) \longrightarrow (0, 1, -1, -\alpha, \alpha, -\gamma, \gamma, -\beta, \beta) \text{ şeklindedir.}$$

σ ya benzerliği olan permütasyonu,

$$\mathbf{P} : \xi \longrightarrow \mathbf{P}(\xi)$$

şeklinde yazarsak $\forall \xi, \mu \in \mathcal{L}$ için özellikleri şu şekilde kurulabilir:

$$\begin{aligned} i) \quad & \mathbf{P}(\xi + \mu) = \mathbf{P}(\xi) + \mathbf{P}(\mu) \\ ii) \quad & \mathbf{P}(\xi\mu) = \mathbf{P}(\xi)\mathbf{P}(\mu) \end{aligned}$$

Böyle bir permütasyon, \mathcal{L} *nin otomorfizmi* olarak adlandırılır (Room and Kirkpatrick, 2008).

1.5 Dokuzuncu Mertebeden Projektif Düzlemler

Bilinen dört farklı 9. mertebeden projektif düzlem vardır. Bunlar *Dezarg düzlemi*, *sol yaklaşık cisim düzlemi*, *sağ yaklaşık cisim düzlemi* ve *Hughes düzlemidir*. Burada, bu düzlemlerden biraz bahsedelim.

1.5.1 Dezarg düzlemi

Tanım 1.20 A, B, C, A', B', C' bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A, B, C doğruduş değilse $\{A, B, C\}$ kümesine bir **üçgen** denir. $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ iki üçgen olsun. A ve A', B ve B', C ve C' ye üçgenlerin **karşılıklı köşeleri** diyelim. Eğer $M, A, A'; M, B, B'; M, C, C'$ nokta üçlüleri doğruduş olacak biçimde bir M noktası varsa bu üçgenler **M den perspektiftir** denir. Ayrıca M noktasına **perspektiflik merkezi**; AB ve $A'B', AC$ ve $A'C', BC$ ve $B'C'$ doğru ikililerine bu üçgenlerin **karşılıklı kenarları** denir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının

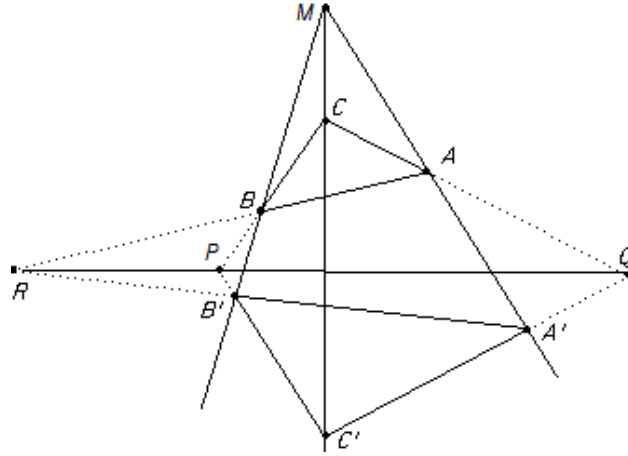
$$R = AB \wedge A'B', Q = AC \wedge A'C', P = BC \wedge B'C'$$

arakesit noktaları doğruduşsa, bunların üzerinde bulunan doğruya **perspektiflik eksen** denir. Perspektiflik eksen e doğrusu olan iki üçgene **e ekseninden perspektif üçgenler** denir.

Klasik Dezarg Teoremi şöyledir:

Teorem 1.21 İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşsa, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğruduştur. Bu teoreme **P4. Dezarg teoremi** denir.

Dezarg Teoremi, daha kısa bir şekilde, *bir noktadan perspektif olan iki üçgen bir doğrudan da perspektif olur* biçiminde ifade edilebilir ve Şekil 1.1. deki gibidir.



Şekil 1.1. P4. Dezarg Teoremi.

Şimdi Dezarg Teoreminin $P1$, $P2$ ve $P3$ aksiyomlarından elde edilemeyeceğini, yani bu aksiyomlardan bağımsız olduğunu ve dolayısıyla da herhangi bir projektif düzlemde geçerli olabileceğini gösteren bir teorem verelim.

Teorem 1.22 \mathbb{K}_0 farklı dört noktadan oluşan ve hiçbir doğrusu bulunmayan bir konfigürasyon, \mathbb{K} ise \mathbb{K}_0 dan üretilen serbest projektif düzlem olsun. \mathbb{K} düzlemi $P4$ ü sağlamaz.

Yukarıdaki teoremden; $P1$, $P2$ ve $P3$ aksiyomlarını sağlayan ama Dezarg teoremini sağlamayan projektif düzlemlerin var olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu nedenle de projektif düzlemler için $P4$ yeni bir aksiyom olarak alınmaktadır. Buna **Dezarg aksiyomu** denir. Aşağıdaki tanım bu aksiyomu sağlayan ve sağlamayan projektif düzlemleri ayırır (Kaya, 2005).

Tanım 1.23 $P4$ Dezarg aksiyomunu sağlayan bir projektif düzleme **Dezarg düzlemi** ya da **dezargsel düzlem** denir. Benzer olarak $P4$ aksiyomunu gerçeklemeyen bir projektif düzleme **dezargsel olmayan projektif düzlem** denir.

Teorem 1.24 F bir cisim olmak üzere \mathbb{P}_2F dezargseldir.

İspat. \mathbb{P}_2F projektif düzleminin dezargsel olması için $P4$ Dezarg aksiyomunu sağlaması gerekir. Şimdi bu aksiyomun sağladığını gösterelim.

$A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3)$ ve $A' = (a'_1, a'_2, a'_3), B' = (b'_1, b'_2, b'_3), C' = (c'_1, c'_2, c'_3)$ düzlemin noktaları, $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ üçgenler olmak üzere bu iki üçgen $M = (m_1, m_2, m_3)$ noktasında perspektif olsun.

$$\begin{aligned} M, A, A' \text{ doğruduş ise, } & a'_i = m_i + \lambda a_i; \lambda \in F^* = F - \{0\} \\ M, B, B' \text{ doğruduş ise, } & b'_i = m_i + \mu b_i; \mu \in F^* \\ M, C, C' \text{ doğruduş ise, } & c'_i = m_i + \gamma c_i; \gamma \in F^* \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} r_i &= b'_i - a'_i = \mu b_i - \lambda a_i \\ q_i &= c'_i - a'_i = \gamma c_i - \lambda a_i \\ q_i - r_i &= c'_i - b'_i = \gamma c_i - \mu b_i = p_i \end{aligned}$$

olduğundan $p_i = q_i - r_i$ olur. Buradan, $P \circ RQ$ dir. Dolayısıyla, P4 Dezarg aksiyomu sağlanır ve \mathbb{P}_2F projektif düzleminin dezargsel olduğu kanıtlanmış olur. \square

Daha önce bahsedilen 9. mertebeden $F = GF(3^2)$ cismi ile elde edilen ve \mathcal{N} noktalar kümesi, \mathcal{D} doğrular kümesi ve \circ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in F, (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0), \\ (x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda (x_1, x_2, x_3), \lambda \neq 0, \lambda \in F \end{array} \right\} \\ \mathcal{D} &= \left\{ \begin{array}{l} [a_1, a_2, a_3] : a_1, a_2, a_3 \in F, [a_1, a_2, a_3] \neq [0, 0, 0], \\ [a_1, a_2, a_3] \equiv \mu [a_1, a_2, a_3], \mu \neq 0, \mu \in F \end{array} \right\} \\ \circ &: (x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \iff a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan \mathbb{P}_2F projektif düzlemi, yukarıdaki teorem gereğince aynı zamanda dezargseldir.

1.5.2 Sağ yaklaşık cisim ve sol yaklaşık cisim düzlemleri

$\mathcal{L} = \{0, 1, -1, \alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \gamma, -\gamma\}$ ve \mathcal{L} üzerindeki \oplus işlemi \mathcal{F} cisminin $+$ işlemi olsun. Burada;

$$\beta = \alpha - 1, \gamma = \alpha + 1, \alpha + (-\alpha) = 0 \text{ dir.}$$

\mathcal{L} üzerindeki grup operasyonu \odot işlemi, $\alpha = \omega$ ve $\omega = 1 - \varepsilon$ olmak üzere aşağıdaki tablo ile tanımlansın:

Tablo 1.4. \mathcal{L} nin ε u kullanarak oluşturulan çarpım tablosu.

\odot	0	1	-1	$1 - \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-\varepsilon$	ε	$-1 - \varepsilon$	$1 + \varepsilon$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	$1 - \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-\varepsilon$	ε	$-1 - \varepsilon$	$1 + \varepsilon$
-1	0	-1	1	$-1 + \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	$1 + \varepsilon$	$-1 - \varepsilon$
$1 - \varepsilon$	0	$1 - \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	-1	1	$-1 - \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	ε	$-\varepsilon$
$-1 + \varepsilon$	0	$-1 + \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	1	-1	$1 + \varepsilon$	$-1 - \varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$-\varepsilon$	0	$-\varepsilon$	ε	$1 + \varepsilon$	$-1 - \varepsilon$	-1	1	$1 - \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$
ε	0	ε	$-\varepsilon$	$-1 - \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	1	-1	$-1 + \varepsilon$	$1 - \varepsilon$
$-1 - \varepsilon$	0	$-1 - \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	$-\varepsilon$	ε	$-1 + \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	-1	1
$1 + \varepsilon$	0	$1 + \varepsilon$	$-1 - \varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	1	-1

$(\mathcal{L}, \oplus, \odot)$ bir sağ yaklaşık cisimdir ve cebirsel yapısı 9. mertebeden bir sağ yaklaşık cisim olan projektif düzlem şu şekilde oluşturulur:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{(x, y, 1) : x, y \in \mathcal{L}\} \cup \{(1, x, 0) : x \in \mathcal{L}\} \cup \{(0, 1, 0)\} \text{ noktalar kümesi,} \\ \mathcal{D} &= \{[m, 1, k] : m, k \in \mathcal{L}\} \cup \{[1, 0, k] : k \in \mathcal{L}\} \cup \{[0, 0, 1]\} \text{ doğrular kümesi,} \\ \circ &: (x, y, z) \circ [m, n, k] \iff xm + yn + zk = 0 \text{ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere;} \end{aligned}$$

$\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ düzlemi bir *Projektif Düzlemdir* ve $\Pi_{\mathcal{L}}(9)$ ile gösterilir.

Her $x, y \in \mathcal{L}$ için \otimes işlemi $x \otimes y = y \odot x$ olarak tanımlanırsa, $(\mathcal{L}, \oplus, \otimes)$ bir *sol yaklaşık cisimdir* ve bu sol yaklaşık cisim üzerine kurulan projektif düzlem; $\Pi_{\mathcal{L}}(9)$ un dualı olup, farklı bir *projektif düzlemdir* ve $\Pi_{\mathcal{L}}^d(9)$ ile gösterilir (Akpınar, 2005).

Not 1.25 $\pi = PG(2, q)$ ve Π ise keyfi bir sonlu projektif düzlemdir.

1.5.3 Hughes düzlemi

9. mertebeden bir diğer düzlem ise düzlemsel halkası lineer olmayan, bu yüzden $\Pi_{\mathcal{L}}(9)$ ve $\Pi_{\mathcal{L}}^d(9)$ projektif düzlemlerinden farklı olan **Hughes düzlemidir** ve $\Pi_H(9)$ ile gösterilir. 9. mertebeden bir sağ yaklaşık cismin varlığı ile bu cismin üzerine kurulan Hughes düzlemi; \mathcal{N} noktalar kümesi ve \mathcal{D} doğrular kümesi olmak üzere, aşağıdaki şekilde oluşturulur

$\Pi_H(9)$ nin noktaları *reel noktalar* ve *kompleks noktalar* olmak üzere;

- | | |
|------------------------------|--|
| a) Reel noktalar: | $\lambda = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; λ vektörünün her bir bileşeni \mathcal{D} 'nin bir elemanı ve $\lambda k \equiv \lambda$ olmak üzere; $\{\lambda k : k \in \mathcal{L}, k \neq 0\}$ (13 nokta), |
| b) Kompleks noktalar: | Reel nokta olmayan herhangi bir nokta, $\{(\omega^r, \omega^s, 1), \dots\}$ (78 nokta) |

şeklindedir. $\Pi_H(9)$ üzerinde bir doğru ve *üzerinde bulunma bağıntısı*;

P , sabit bir reel nokta ve λ , P 'den farklı bir sabit nokta olmak üzere;
 $\langle P, \lambda \rangle = \{P\} \cup \{Pk + \lambda : k \in \mathcal{L}\}$ noktalar kümesidir.

Buradan $\Pi_H(9)$ nin doğruları, *reel doğrular* ve *kompleks doğrular* olmak üzere;

- a) **Reel doğrular:** *En az iki reel nokta kapsayan doğrudur.*
b) **Kompleks doğrular:** *Sadece bir tek reel nokta kapsayan doğrudur.*

şeklinde oluşturulur (Güney 2005; Room and Kirkpatrick, 2008; Akpınar, 2005).

BÖLÜM 2

ÜNİTALLER İÇİN ÖN HAZIRLIKLAR

2.1 Düşük Boyutlu Uzaylarda Quadrik

Tanım 2.1 $PG(d, F)$ uzayında, bazı sıfırdan farklı 2. dereceden homojen denklemleri sağlayan homojen koordinatların tüm noktalarını içeren kümeye bir **quadrik** denir. Eğer denklem taban değişimi ile $d + 1$ değişkenden daha aza indirgenebilirse bu quadrik ‘dejenere’ ya da ‘tekil’ quadriktir.

Eğer $d = 2$ ise bu quadriğe, **konik** denir. Aynı zamanda, dejenere olmayan bir konik **indirgenemez konik** olarak adlandırılır.

Örnek 2.1 $PG(2, 2)$ 'de $X = (X_0, X_1, X_2)$ noktası için quadrik denklem,

$$\sum_{0 \leq i < j} a_{ij} X_i X_j = a_{00} X_0^2 + \dots + a_{22} X_2^2 = 0 \quad (2.1)$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \frac{a_{02}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{02}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} X_0 + \frac{a_{01}}{2} X_1 + \frac{a_{02}}{2} X_2 \\ \frac{a_{01}}{2} X_0 + a_{11} X_1 + \frac{a_{12}}{2} X_2 \\ \frac{a_{02}}{2} X_0 + \frac{a_{12}}{2} X_1 + a_{22} X_2 \end{bmatrix} = 0$$

şeklindedir. Buradan,

$$a_{00} X_0^2 + \frac{a_{01}}{2} X_1 X_0 + \frac{a_{02}}{2} X_2 X_0 + \frac{a_{01}}{2} X_0 X_1 + a_{11} X_1^2 + \frac{a_{12}}{2} X_2 X_1 + \frac{a_{02}}{2} X_0 X_2 + \frac{a_{12}}{2} X_1 X_2 + a_{22} X_2^2 = 0$$

olur ve dolayısıyla quadrik denklem şu şekildedir:

$$a_{00} X_0^2 + a_{01} X_0 X_1 + a_{02} X_0 X_2 + a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 + a_{22} X_2^2 = 0. \quad (2.2)$$

Belirtmek gerekir ki $d = 2$ olduğundan, bu denklem aynı zamanda bir konik denklemdir.

$PG(2, q)$ da indirgenemez bir koniğin kanonik formu;

$$X_1^2 - X_0 X_2 = 0 \quad (2.3)$$

şeklindedir. Böylece indirgenemez C koniği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C = \{(0,0,1)\} \cup \{(1,y,y^2) : y \in GF(q)\} \quad (2.4)$$

Özel olarak, $PG(2,q)$ da dejenere olmayan her C koniği, *üçü doğrudan olmayan $q+1$ noktaya sahiptir* ve $PG(2,q)$ nun herhangi üçü doğrudan olmayan 5 noktasıyla, bir indirgenemez konik tek olarak elde edilebilir (Barwick and Ebert, 2008).

Eğer q tek ise,

- (i) Verilen bir koniğe ya teğet çizilemez ya da iki teğet çizilebilir.
- (ii) $P \in PG(2,q)$ da bir nokta olmak üzere, P den hiç teğet geçmiyorsa P ye **iç nokta**,
- (iii) $P \in PG(2,q)$ da bir nokta olmak üzere, P den iki teğet geçiyorsa P ye **dış nokta** denir.

Eğer q çift ise,

C nin $q+1$ tane teğeti bir noktada kesişir. Buna koniğin **nucleus**'u denir.

Tablo 2.1. $PG(2,q)$ da Dejenere koniğin tipleri (Hirschfeld,1998).

	Kanonik Form	Quadrik Tanımı	Eleman Sayısı
a)	$X_0^2 = 0$	<i>Doğru</i>	$q^2 + q + 1$
b)	$X_0X_1 = 0$	<i>Kesişen farklı bir çift doğru</i>	$\frac{q(q+1)(q^2+q+1)}{2}$
c)	$X_0^2 + bX_0X_1 + X_1^2 = 0$ <i>indirgenemez</i>	<i>Bir nokta</i> <i>($PG(2,q)$ da karşılık gelen doğrularla $PG(2,q^2)$ deki eşlenik doğruların bir çifti)</i>	$\frac{q(q-1)(q^2+q+1)}{2}$

$PG(d,q)$ 'da ϕ bir quadrik olsun.

- i) Uygun dönüşümlerle $d+1$ den daha az katsayıya indirgenebilen quadrik, *dejenere*dir. Aksi halde, *dejenere değildir*.
- ii) q tek ise; A, ϕ nin bir matrisi olsun.
 ϕ *dejenere bir quadriktir* $\iff \det(A) = 0$.

Bir quadriğin içinde bulunduğu maksimal boyutlu altuzaya onun **üretecisi** denir.

Dejenere olmayan bir quadriğin her P noktasında bir teğet **hiperdüzlem** vardır. Bu teğet hiperdüzlem quadrik ile ϕ nin P yi içeren üreteçleri P de kesişir.

Tablo 2.2. $PG(2, q)$ da bir konik ile bir doğrunun durumu.

i)	<i>Hiç kesişmezler</i>	<i>(Dış doğru)</i>
ii)	<i>Bir noktada kesişirler</i>	<i>(Teğet doğru)</i>
iii)	<i>İki noktada kesişirler</i>	<i>(Sekant doğru)</i>

2.2 Kolinasyonlar, Korelasyonlar ve Formlar

2.2.1 Kolinasyonlar

Tanım 2.2 $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ ve $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer

$$f : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$$

fonksiyonu,

- 1) $f(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$
- 2) $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$
- 3) $\forall N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}$ ve $N \circ d \implies f(N) \circ' f(d)$

koşullarını sağlıyorsa f ye $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ dan $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ ya bir **homomorfizm** denir. Birebir ve örten özelliği bulunun homomorfizme **izomorfizm** denir.

Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme de **kolinasyon** veya **otomorfizm** denir (Kaya, 2005).

Tanım 2.3 \mathbb{P} bir projektif düzlem ve f de \mathbb{P} nin bir kolinasyonu olsun. Eğer \mathbb{P} deki bir N noktası için $f(N) = N$ ise N için f **altında değişmeyen nokta** denir. Benzer biçimde eğer \mathbb{P} nin bir d doğrusu için $f(d) = d$ ise d için f **altında değişmez doğru** denir. Ayrıca, eğer bir d doğrusunun her X noktası için $f(X) = X$ ise yani d nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa, f kolinasyonu d **yi nokta-nokta değişmez bırakır** denir. \mathbb{P} nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa f ye **birim kolinasyon** ya da **özdeşlik kolinasyonu** denir (Kaya, 2005).

Teorem 2.4 Bir \mathbb{P} projektif düzleminin bütün otomorfizmleri fonksiyon bileşimi işlemine göre bir grup oluştururlar ve bu gruba **kolinasyonlar grubu** ya da **otomorfizmler grubu** denir ve $Aut(\mathbb{P})$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

Tanım 2.5 \mathbb{P} projektif düzleminde $\Phi(l) = l$ kolinasyonu l doğrusu üzerindeki bütün noktaları değişmez bırakıyor ise bu Φ kolinasyonuna **eksensel kolinasyon** ve l doğrusuna da bu kolinasyonun **ekseni** denir (Kaya, 2005).

2.2.1.1 Merkezsel kolinasyonlar

Tanım 2.6 f , bir \mathbb{P} projektif düzleminin bir otomorfizmi olsun. \mathbb{P} nin bir M noktasından geçen her x doğrusu için $f(x) = x$ ise M ye f **nin merkezi** denir. Benzer olarak \mathbb{P} nin bir e doğrusu üzerindeki her X noktası için $f(X) = X$ ise e ye f **nin eksteni** denir. Eğer f nin bir M merkezi ve bir e eksteni varsa f ye \mathbb{P} nin bir (M, e) **merkezsel kolinasyonu** ya da (M, e) **perspektifliği** denir. Ayrıca, eğer $M \circ e$ ise f ye **öteleme (translation ya da elation)**; $M \neq e$ ise f ye **homoloji** denir (Kaya, 2005).

*Homoloji ile öteleme arasındaki farkı grup teorisi yardımıyla kolayca görebiliriz. Özellikle; \mathbb{P} bir projektif düzlem olmak üzere, n bir projektif düzlemin mertebesi ve k bir $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{P})$ perspektifliğinin mertebesi ise, bu durumda $k \mid n$ ve α bir **ötelemedir** ya da $k \mid (n - 1)$ ve α bir **homolojidir** (Wantz, 1995).*

Varsayalım ki π bir afin düzlem, Π onun tamamlanmış olan bir projektif düzlem ve l ise *ideal doğrusu* olsun. π nin bir kolinasyonu, Π nin bir kolinasyonu olarak kabul edilen l ekstenli bir perspektiflik ise bu kolinasyon *genişleme* olarak adlandırılır. π nin bir *ötelemesi* ise Π nin bir kolinasyonu olarak kabul edilen l ekstenli öteleme olan bir genişlemedir. Dolayısıyla, birim olmayan bir öteleme paralel sınıflarını korur ve π nin tam olarak bir paralel sınıfının içindeki paralel doğruları sabit bırakır ve üstelik π nin hiçbir noktasını ise sabit bırakmaz. Eğer π nin tüm ötelemelerinin grubu π nin noktaları üzerinde geçişken ise bu π afin düzlemine *öteleme düzlemi* adı verilir. Eğer Π^l bir afin öteleme düzlemi ise bu durumda Π projektif düzlemi l doğrusuna göre bir *öteleme düzlemi* olarak adlandırılır. $AG(2, q)$ nun öteleme grubu, $\forall w \in W$ (iki boyutlu taban vektör uzayı) için $T_w : v \mapsto v + w$ formundaki q^2 tane dönüşümü içerir. Dolayısıyla, $PG(2, q)$ herhangi bir l doğrusuna göre bir öteleme düzlemidir (Wantz, 1995).

2.2.2 Korelasyonlar

Tanım 2.7 $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ herhangi bir projektif düzlem olsun. Bu düzlemde,

$$\sigma : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N} \cup \mathcal{D}$$

eşlemesi aşağıdaki özelliklere sahipse; σ ya, \mathbb{P} nin bir **korelasyonu** denir:

- $\sigma : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ ve $\sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}$,
- i) σ birebir ve örtendir,
 - ii) $N, N' \in \mathcal{N}$ ve $d, d' \in \mathcal{D}$ için eğer $N \circ d, \sigma(N) = d'$ ve $\sigma(d) = N'$ ise $N' \circ d'$.

Bu demek oluyor ki; σ , \mathbb{P} nin bir korelasyonu ise bu durumda P , \mathbb{P} nin bir noktası ve l , \mathbb{P} 'nin bir doğrusu olmak üzere $P \in l \iff l^\sigma \in P^\sigma$ dir. Eğer $P \in P^\sigma$ ise P noktası σ korelasyonunun *mutlak noktası*; $l^\sigma \in l$ ise l doğrusu σ korelasyonunun *mutlak doğrusu* olarak adlandırılır. Tanımdan anlaşıldığı gibi, bir projektif düzlemin herhangi bir korelasyonu yalnızca doğruları noktalara ve noktaları doğrulara birebir ve örten bir biçimde eşlemekle kalmaz; aynı zamanda üzerinde bulunma bağıntısını da korur. Bu nedenle bir korelasyon, doğruduş noktaları noktadaş doğrulara, tam dörtgenleri tam dörtkenarlara, tam dörtkenarları tam dörtgenlere vs. eşler. Dolayısıyla, korelasyon kavramının duali de bir korelasyondur. Kolinasyonların aksine, projektif düzlemin korelasyonları bir grup oluşturmaz. Çünkü iki korelasyonun birleşimi bir korelasyon değildir; ama bir kolinasyondur. Ayrıca, birim korelasyon yoktur. Buna karşın, bir korelasyonun tersi yine bir korelasyondur (Kaya, 2005).

Tanım 2.8 2. dereceden korelasyonlara **polarite** denir.

$PG(d, F)$ projektif düzlemini veren V vektör uzayındaki bir tabanı sabit bırakırsak, bu taban $\{b_0, b_1, \dots, b_d\}$ olsun, ve $(d+1) \times (d+1)$ tipinde girdileri $s(b_i, b_j)$ şeklindeki bir G matrisi oluşturursak, bu durumda bu sabit tabana bağlı koordinatları kullanarak, $s(v, w)$ yi, $xG(y^\alpha)^T$ şeklinde düşünebiliriz. Burada sırasıyla; x ve y , verilen tabana bağlı olarak v ve w nın koordinatlarının satır vektörleridir ve α cisim otomorfizmi satır ve sütun vektörlerinin her bir bileşenine uygulanır. Buradan, bu G matrisine, verilen tabana bağlı s nin **gram matrisi** adı verilir. Gram matrisi tekil değildir ve eğer cismin karakterisitigi 2 ise ortogonal polariteler için simetrik bir matristir. O halde, bu simetrik matrisin en az bir köşegen girdisi sıfırdan farklıdır. Birim polaritelerde Gram matrisi hermityendir öyleki; G^α ın α nın G nin bütün girdilerini temsil etmesi koşuluyla $G^T = G^\alpha$ dir. Yani, bir Hermit matrisinin köşegen girdileri, α tarafından sabit bırakılan altgruptan gelmelidir (Barwick and Ebert, 2008).

Bir sonlu cismin 2. dereceden bir otomorfizme sahip olması için gerek ve yeter koşul bu sonlu cismin kare mertebeli olmasıdır. Dolayısıyla, sonlu bir klasik projektif düzlemin birim polariteye sahip olması için gerek ve yeter koşul bazı q asal kuvvetleri için $F = GF(q^2)$ olmasıdır.

2.2.3 Formlar

Tanım 2.9 $V, F = GF(q)$ üzerindeki $PG(2, q)$ yu veren 3 boyutlu bir vektör uzayı ve Φ ise F nin bir cisim otomorfizmi olsun. $\forall u, v, w \in V, k \in F$ için $V \times V \longrightarrow F$ ye kurulan ve

- i) $s(u + v, w) = s(u, v) + s(v, w)$ ve $s(u, v + w) = s(u, v) + s(u, w)$,
- ii) $s(ku, v) = ks(u, v)$ ve $s(u, kv) = k^\Phi s(u, v)$

şartlarını sağlayan s dönüşümüne Φ cisim otomorfizması yardımıyla kurulan **sesquilinear form** denir.

Φ birim ise s ye *bilinear form* denir. Ek olarak, eğer $\forall u, v \in V$ için $s(u, v) = s(v, u)$ ise s 'ye *simetrik bilinear form* adı verilir. Eğer, Φ ikinci dereceden bir otomorfizma ve $\forall u, v \in V$ için $s(u, v) = s(v, u)^\Phi$ ise s ye *hermityen form* denir. Bir s sesquilinear formuna bağlı V nin *radikali*,

$$V^\perp = \{u \in V : s(u, v) = 0; \forall v \in V\} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $V^\perp = \{0\}$ ise bu sesquilinear form *dejenere değildir*.

Verilen bir s sesquilinear formu için $W < V$ ve $W \neq \{0\}$ iken

$$\delta : W \longrightarrow W^\perp = \{v \in V : s(v, w) = 0; \forall w \in W\}$$

dönüşümünün noktalar ile doğruları yer değiştirdiği ve kapsamayı tersine çevirdiği açıktır. Eğer s dejenere değilse δ nin birebir ve örten olduğu gösterilebilir ve bundan dolayı δ , $PG(2, q)$ nun bir korelasyonudur. Tersine eğer δ , $PG(2, q)$ nun herhangi bir korelasyonu ise bu durumda yukarıda verilen δ nin elde edilebildiği V üzerinde dejenere olmayan bir s sesquilinear formu vardır. Dahası bu sesquilinear form, polarite olan bir korelasyon ise bu durumda s , ya *simetrik bilinear* ya da *hermityendir*. Bu formlara karşılık gelen polaritelere sırasıyla *ortogonal* ve *birim polarite* denir. Belirtmeliyiz ki, birim polariteler sadece kare mertebeli cisimlerde mevcuttur ki bu duruma karşılık gelen Φ tek olarak hesaplanabilir.

Bir Q ile gösterilen **quadrik form**, aşağıdaki koşulları sağlayan $V \longrightarrow F$ ye bir dönüşümdür:

- i) $Q(ku) = k^2 Q(u), \forall u \in V$ ve $k \in F$
- ii) $Q(u + v) = Q(u) + Q(v)$ bir simetrik bilinear form

F nin karakteristiği tek olmak üzere eğer birleşmeli simetrik bilinear formu dejenere değilse bu quadrik forma *dejenere değildir* denir. Bu durumda bir s simetrik bilinear form $Q(v) = \frac{1}{2}s(u, v)$ yoluyla bir tek quadrik form oluşturur. F nin karakteristiği çift olmak üzere eğer her sıfırdan farklı $v \in V^\perp$ için $Q(v) \neq 0$ ise Q ya *dejenere değildir* denir (Wantz, 1995).

2.3 Konikler

$PG(2, q)$ uzayında, bazı sıfırdan farklı 2. dereceden homojen denklemleri sağlayan homojen koordinatların tüm noktalarını içeren kümeye bir **konik** dendiğini artık biliyoruz.

V, q bir asal kuvvet olmak üzere, $F = GF(q)$ cismi ile oluşan ve $\pi = PG(2, q)$ yu oluşturan vektör uzayı olsun. π deki herhangi iki koniğin projektif olarak birbirine denk olduğu kolayca görülebilir. Burada, her $(x, y, z) \in V$ için $Q(x, y, z) = xz - y^2$ şeklinde verilen Q quadrik formu ile alakalı matris,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

şeklindedir. Bu matris tekil olmadığından Q dejenere değildir ve buradan C bir koniği temsil etmek üzere,

$$C = \{(x, y, z) : xz - y^2 = 0\} \quad (2.7)$$

şeklindedir (Wantz, 1995).

Eğer $x = 0$ iken $(x, y, z) \in C$ ise $y = 0$ olmalıdır. Buradan $(0, 0, 1)$ noktasının $x = 0$ iken C nin tek noktası olduğu görülür. Eğer $x \neq 0$ iken $(x, y, z) \in C$ ise $x = 1$ alınarak düzenlenir. Buradan, $y \in F$ için $(1, y, y^2)$ formunun C de q tane noktasının var olduğu görülür. Bu nedenle *bir konik $q + 1$ nokta içerir.* Daha açık olarak,

$$C = \{(1, y, y^2) : y \in F\} \cup \{(0, 0, 1)\} \quad (2.8)$$

yazılabilir (Wantz, 1995).

π nin bir $[A, B, C]$ doğrusunun $(0, 0, 1)$ noktasını içermesi için gerek ve yeter koşulu $C = 0$ olmasıdır. Bir $[A, B, C]$ doğrusu, her $y \in F$ için $(1, y, y^2)$ noktasını içermesi için gerek ve yeter koşulu ise

$$A + By + Cy^2 = 0 \quad (2.9)$$

denklemini sağlamasıdır. Açıktır ki, C nin ikiden fazla noktası π nin bir doğrusu üzerinde olmayabilir. π nin C ile sıfır, bir ya da iki noktada kesişen doğruları sırası ile *dış doğru*, *teğet doğru* ya da *sekant doğru* olarak adlandırılır. Verilen bir $P \in C$ noktası için P den geçen $q + 1$ doğru olduğunu biliyoruz ve farklı bir doğru P ye ve C nin diğer q tane noktasına eklenirse P noktasında C ye teğet yalnız bir doğru olmak üzere, P den geçen q tane doğru C nin sekant doğrusudur. Kombinatoryal bakış açısı ile C nin $q + 1$ tane teğet doğrusu ve $\binom{q+1}{2}$ tane sekant doğrusu vardır ve dolayısıyla, π nin $q^2 + q + 1$ tane doğrusundan kalan $\binom{q}{2}$ tanesi C nin

dış doğrusu olmalıdır. Cebirsel olarak, $[A, B, C]$ nin belirli bir C koniğinin dış doğrusu, teğet doğrusu ya da sekant doğrusu olup olmadığını kontrol edilebilir (Wantz, 1995).

Şimdi q nun çift bir asal kuvvet olduğu kabul edilsin. Yine görülebilir ki, bütün konikler projektif olarak denktir ve $xz - y^2$ dejenere olmayan quadrik formdur. Dolayısıyla, bir C koniği aynı (2.8) de olduğu gibi tanımlanabilir. q nun tek olduğu durumdaki bütün dış doğrularının, teğet doğrularının ve sekant doğrularının sayısı; q nun çift olduğu durumda da sayılabilir. Yine de koniğin teğet doğruları için tek ve çift olma durumları farklılık gösterir. Eğer q tek ise C nin üzerinde olmayan her nokta tam olarak iki tane, C ye teğet doğru üzerinde bulunur. Eğer q çift ise C ye teğet doğruların tümü bir ortak noktadan geçer. Bu noktaya koniğin *nucleus*'u denir. C 'nin nucleus'u, $(0, 1, 0)$ noktasıdır (Wantz, 1995).

2.4 k-arc, Oval ve Ovoid

Tanım 2.10 q . mertebeden bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudan olmayan $q + 1$ tane noktanın oluşturduğu kümeye **oval** denir.

$q > 2$ olmak üzere $PG(3, q)$ da herhangi üçü doğrudan olmayan $q^2 + 1$ tane noktanın kümesine **ovoid** denir.

$PG(4, q)$ da köşe noktası P ve tabanı P yi içermeyen bir hiperdüzlemdeki ovoid olan koniye **ovoidal koni** adı verilir.

$PG(2, q)$ da *oval*, indirgenemez bir koniktir.

Eğer q tek ise, $PG(2, q)$ daki her oval, dejenere olmayan bir koniktir. Eğer q çift ise, $PG(2, q)$ da dejenere olmayan bir konik bir N *nucleus*'a sahiptir; fakat eklemek gerekir ki, $PG(2, q)$ da her oval bir konik değildir.

$PG(3, q)$ da *ovoid*, bir eliptik quadriktir.

Eğer q tek ise, bütün ovoidler eliptik quadriktir. Eğer q çift ise, eliptik quadrik olmadığı bilinen bir ovoid ailesi vardır.

$PG(4, q)$ da *ovoidal koni*, bir eliptik konidir (Barwick and Ebert, 2008).

Tanım 2.11 $PG(2, q)$ da herhangi üçü doğrudan olmayan k noktalı kümeye **k-arc** denir.

$PG(2, q)$ da $(q + 1) - arc$ bir oval belirtir ve noktaları bir oval oluşturan dejenere olmayan bir konik vardır.

BÖLÜM 3

ÜNİTALLER

3.1 Hermit Eğrileri

Tanım 3.1 ρ , $PG(2, F)$ nin bir birim polaritesi olsun. ρ nun mutlak noktalarının kümesine **dejenere olmayan hermit eğri** denir.

Hatırlayalım ki, birim polaritelerin var olması için F cisminin involüt otomorfizminin olması gerekir. Bundan dolayı; sonlu cisim durumunun, bazı asal q kuvvetleri için $F = GF(q^2)$ cismine ihtiyaç duyarız ve bu hermit eğrileri $H(2, q^2)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda, involüt otomorfizm $\sigma : x \mapsto x^q$ şeklindedir (Barwick and Ebert, 2008).

3.1.1 Dejenere olmayan Hermit eğrileri

$H(2, q^2)$, bazı q asal kuvvetleri için q^2 mertebeli $PG(2, q^2)$ klasik projektif düzleminin Hermit eğrisi olsun.

Teorem 3.2 $PG(2, q^2)$ deki bir dejenere olmayan H hermit eğrisi tam olarak $q^3 + 1$ tane noktaya sahiptir.

Dejenere olmayan hermit formunu oluşturan bir vektör uzayından elde edilen kare mertebeli bir projektif düzlem $PG(2, q^2)$ deki bir birim polarite, bir düzlem polaritesinin mutlak noktalarının olası sayıları için bir üst sınır oluşturur. Dolayısıyla, bu mutlak noktaların kümesi yani H hermit eğrisi, $PG(2, q^2)$ deki bütün doğrulara ilişkin kesişim özelliklerine sahiptir. Yine de, bu kesişim özelliklerini direkt olarak klasik düzende geliştirmeyi tercih edersek, Hermit eğrileri daha kolay anlaşılabilir olur (Barwick and Ebert, 2008).

l , $PG(2, q^2)$ 'nin bir doğrusu olsun. O halde l 'nin kutbu $P = l^\perp$ ya $H = H(2, q^2)$ 'nin bir noktasıdır ya da değildir ve H 'nin *kanonik denklemi* aşağıdaki gibidir:

$$X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1} = 0. \quad (3.1)$$

Öncelikle varsayalım ki $P = (0, 0, 1)$ ve $P \notin H$ olsun. Buradan, P aynı zamanda $P^\perp = l$, mutlak değildir. Birim matrisimiz olan Gram matrisi kullanarak görürüz ki l nin $(0, 0, 1)^T$ dual koordinatına sahip olduğunu görürüz ve bundan dolayı $X_2 = 0$ dır. Dolayısıyla, $l \cap H$ nin herhangi bir noktası için, $y^{q+1} = -1$ iken homojen koordinatlar $(1, y, 0)$ şeklindedir. Bundan dolayı, tekrar norm fonksiyonu özellikleri kullanılarak, her mutlak olmayan doğrunun $q + 1$ noktada H ile kesiştiği görülür. Bu doğrulara genel olarak H 'nin *sekant doğruları* denir ve bunların H ile kesişimlerine ise *kiriş* adı verilir (Barwick and Ebert, 2008).

Şimdi $z^{q+1} = -1$ olmak üzere bazı $z \in GF(q^2)$ elemanları için $P = (0, 1, z)$ olduğunu varsayalım. Buradan, $P \in H$ dir ve dolayısıyla P (aynı şekilde $l = P^\perp$) mutlakdır. Bu sefer, l nin dual koordinatları $(0, 1, z^q)^T$ dir ve dolayısıyla, l nin denklemi $X_1 + z^q X_2 = 0$ olur. Buradan, ya l üzerindeki bütün noktalar H de bulunur ya da l doğrusu H ile yalnızca P noktasında kesişir. $(1, 0, 0)$ noktası l nin bir noktası; fakat H nin bir noktası olmadığından, l doğrusu H ile yalnız P noktasında kesişir. Yani, her mutlak doğru ile H tam olarak bir noktada kesişir ve bu nokta kutuptur (Barwick and Ebert, 2008).

Teorem 3.3 $H, PG(2, q^2)$ de dejenere olmayan bir hermit eğrisi olsun. O halde $PG(2, q^2)$ deki her doğru H ile 1 ya da $q + 1$ noktada kesişir.

Genelde, boyutu $d \geq 2$ olan $H = H(2, q^2)$ hermit değişkeni için bir doğru H ile yalnız bir noktada kesişir ve bu doğruya *teğet* doğru; $q + 1$ noktada kesişiyorsa bu doğruya *sekant (hiperbolik)* doğru denir. Dolayısıyla, dejenere olmayan bir H hermit eğrisi $PG(2, q^2)$ ye gömülüdür. $PG(2, q^2)$ nin her doğrusu, H 'nin bir teğet doğrusu ya da sekant doğrusudur. $PG(2, q^2)$ nin hiçbir doğrusu, H den ayrık olamaz ve $PG(2, q^2)$ nin hiçbir doğrusu, tam olarak H nin üzerinde değildir (Barwick and Ebert, 2008).

Teorem 3.4 $H, PG(2, q^2)$ de dejenere olmayan bir hermit eğrisi olsun. O halde, H nin $PG(2, q^2)$ de $q^3 + 1$ tane teğet doğrusu ve $q^4 - q^3 + q^2$ tane sekant doğrusu vardır. Yani, $PG(2, q^2) \setminus H$ nin her noktasından $q + 1$ tane teğet doğru ve $q^2 - q$ tane sekant doğru geçerken, H nin her noktasından q^2 tane sekant doğru ve 1 tane teğet doğru geçer.

İspat. H nin iki farklı noktasından geçen doğru, yukarıdaki teoremden, bir sekant doğrusu olmalıdır ve yine yukarıdaki diğer teoremden H nin $q^3 + 1$ noktası vardır. Bundan dolayı, H deki farklı sekant doğrularının sayısı (her sekant doğrusu $\binom{q+1}{2}$ defa sayıldığından);

$$\binom{q^3 + 1}{2} / \binom{q + 1}{2} = q^2 (q^2 - q + 1) = q^4 - q^3 + q^2, \text{dir.}$$

$PG(2, q^2)$ de $q^4 + q^2 + 1$ tane doğru olduğundan, hepsi ya teğet doğrusu ya da sekant doğrusudur, H de $q^3 + 1$ tane teğet doğru olduğunu görürüz. Özellikle, her $P \in H$ den geçen yalnız bir teğet doğru vardır ve o doğru P^\perp dir ve bundan dolayı q^2 tane sekant doğru vardır.

$Q, PG(2, q^2) \setminus H$ de herhangi bir nokta ise; t , Q dan geçen teğet doğruların sayısı ve h , Q dan geçen sekant doğruların sayısı olsun. O halde,

$$t + h = q^2 + 1 \text{ ve } t \cdot 1 + h \cdot (q + 1) = q^3 + 1$$

olup $h = q^2 - q$ ve $t = q + 1$ dir. \square

Herhangi bir $Q \notin H$ için, Q dan geçen $q + 1$ tane teğet doğrusu üzerinde bulunan H nin $q + 1$ tane noktası Q nun ayakları olarak adlandırılır (Barwick and Ebert, 2008).

Sonuç 3.5 $H, PG(2, q^2)$ 'de dejenere olmayan bir hermit eğrisi olsun. Eğer $Q, PG(2, q^2) \setminus H$ de bir nokta ise, bu durumda Q 'nun ayakları doğrudadır ve Q^\perp doğrusu üzerindedir.

3.1.2 Dejenere Hermit eğrileri

Bazı dejenere hermit formlarıyla alakalı olarak kendine ortogonal vektör uzayında bulunan sıfırdan farklı vektörler tarafından belirlenen projektif noktalar incelensin. Vektör uzayına uygun bir baz seçerek, Gram matrisinin köşegensel olduğunu ve sıfırdan farklı girdilerinin 1'e eşit olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, projektif eşitliğe bağlı olarak $PG(2, q^2)$ de iki tane dejenere hermit eğrisi vardır. Bu dejenere eğriler için kanonik formlar şu şekildedir:

$$\begin{aligned} i) \quad & X_0^{q+1} = 0 \\ ii) \quad & X_0^{q+1} + X_1^{q+1} = 0 \end{aligned}$$

Birinci dejenere hermit eğrisi bir doğrudur ve denklemleri $X_0 = 0$ dır. İkinci dejenere hermit eğrisi, köşesi $P(0, 0, 1)$ ve $X_2 = 0$ denklemleri doğru üzerindeki noktalar kümesi $B = \{(1, y, 0) : y^{q+1} = -1\}$ olan bir konidir. B konisi, $GF(q^2)$ den elde edilen iki boyutlu vektör uzayı ile oluşturulan $PG(1, q^2)$ projektif doğrusunun dejenere olmayan bir Hermit değişkeni şeklinde düşünülebilir (Barwick and Ebert, 2008).

Teorem 3.6 $H(1, q^2), PG(1, q^2)$ projektif doğrusunun dejenere olmayan bir hermit değişkeni olsun. Bu durumda, $H(1, q^2), GF(q^2)$ nin $GF(q)$ altcismi üzerindeki $PG(1, q)$ projektif doğrusuna izomorfudur.

Bu noktada klasik projektif doğru için alınan model daha dikkatli incelenirse; soldan düzenlenen koordinatlar kullanılarak, $\{(0, 1)\} \cup \{(1, y) : y \in GF(q^2)\}$ ile $L = PG(1, q^2)$ nin noktaları belirlenebilir. $GF(q^2)$ nin $GF(q)$ altcismi kullanıldığında; $B = \{(0, 1)\} \cup \{(1, y) : y \in GF(q)\}$ noktalarının kümesi, L doğrusu üzerindeki standart pozisyondaki $PG(1, q)$ altdoğrusunun bir kopyasıdır.

3.2 Ünitaller

q^2 mertebeli bir $PG(2, q^2)$ projektif düzleminde; bir *hermityen eğri*, dejenere olmayan bir hermityen formun mutlak noktalarının kümesidir. Herhangi iki hermityen eğrinin projektif olarak denk olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla birleşimli hermityen matris, birim matris olarak alınabilir. Bir (x, y, z) noktasının mutlak nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul $x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} = 0$ denklemini sağlamalıdır. Bundan dolayı, $PG(2, q^2)$ deki her hermityen eğri projektif olarak aşağıdaki forma denktir:

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z) : x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} = 0\} \quad (3.2)$$

Belirtmek gerekir ki; eğer δ bu formun bir polaritesi ise, o halde $(x, y, z)^\delta = [x^\delta, y^\delta, z^\delta]$ ve $[x, y, z]^\delta = (x^\delta, y^\delta, z^\delta)$ 'dir (Wantz, 1995).

\mathbb{U} da bulunan $PG(2, q^2)$ nin noktalarını sayalım. Eğer, $x = 0$ olmak üzere $(x, y, z) \in \mathbb{U}$ ise, $y^{q+1} + z^{q+1} = 0$ dir. Belirtmek gerekir ki; $y \neq 0$, değilse $x = y = z = 0$ dir. Dolayısıyla, soldan düzenlenip $y = 1$ alınabilir. Bu demektir ki, $F = GF(q^2)$ deki z için $q + 1$ tane çözüm olan $z^{q+1} = -1$ denklemini verir. Dolayısıyla, $x = 0$ iken \mathbb{U} nun $q + 1$ noktası vardır. Benzer olarak, $y = 0$ ve $z = 0$ iken de \mathbb{U} nun $q + 1$ noktası vardır. Bundan dolayı, eğer sıfırdan farklı olmak üzere $(x, y, z) \in \mathbb{U}$ ise, $z^{q+1} = -1 - y^{q+1}$ i veren $x = 1$ alınabilir. $y^{q+1} \neq -1$ iken $-1 - y^{q+1} \in F^* = F - \{0\}$ dir. Dolayısıyla, y ler sabit olmak üzere z için $q + 1$ tane seçenek vardır. y^{q+1} , $q - 2$ değişkene sahip olabilir ve y^{q+1} sabit olmak üzere y için $q + 1$ seçenek vardır. Bu nedenle, \mathbb{U} nun sıfırdan farklı koordinatlarının sayısı $(q - 2)(q + 1)^2$ olmak üzere, eleman sayısının $(q - 2)(q + 1)^2 + 3(q + 1) = q^3 + 1$ olduğu görülür (Wantz, 1995).

$PG(2, q^2)$ nin doğrularının \mathbb{U} ile nasıl kesiştiğini anlamak adına; l , birleşimli hermityen formun mutlak bir doğrusu olsun. Bu durumda $l^\delta \in \mathbb{U}$ olmak üzere $l^\delta \in l$ dir. Olmayana ergi yönteminden varsayalım ki, $l \cap \mathbb{U}$ ya ait bir $P \neq l^\delta$ noktası var olsun. P mutlak iken, $P \in P^\delta \cap l$ yi veren $P \in P^\delta$ vardır. Fakat $P \in l$ olması, $l^\delta \in P^\delta$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $l^\delta \in P^\delta \cap l$ dir.

P^δ ve l iki farklı noktayı içerdiğinden, $P^\delta = l$ olmalıdır. Bu nedenle, $P = l^\delta$ olması bir çelişkidir ve bundan dolayı; her mutlak doğru, \mathbb{U} ile yalnız bir noktada kesişir. Bu doğrulara *teğet doğru* denir.

Bir $[x, y, z]$ doğrusu ancak ve ancak $x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} = 0$ olduğunda mutlak bir doğru olduğundan, görülür ki $[0, 0, 1]$ noktası, hermityen formun mutlak noktasıdır. Ayrıca bu doğru, \mathbb{U} nun $q+1$ noktasını içerir. Daha açık olmak gerekirse, formun $y^{q+1} = -1$ eşitliğini sağlayan noktaları $(1, y, 0)$ şeklindeki noktalarıdır ve \mathbb{U} nun birden fazla noktasını içeren herhangi bir nokta, \mathbb{U} nun tam olarak $q+1$ noktasını içerir. Böyle doğrulara *sekant doğru* denir. \mathbb{U} nun farklı sekant doğrularının sayısı;

$$\frac{\binom{q^3+1}{2}}{\binom{q+1}{2}} = q^4 - q^3 + q^2 \quad (3.3)$$

şeklinindedir. Dolayısıyla, $PG(2, q^2)$ nin tüm $q^4 + q^2 + 1$ doğrularından $q^4 - q^3 + q^2$ tanesi \mathbb{U} nun *sekant doğruları*, $q^3 + 1$ tanesi \mathbb{U} nun *teğet doğrularıdır*. $q^4 - q^3 + q^2$ tane doğru, hermityen formun mutlak olmayan doğruları ve $q^3 + 1$ tane doğru ise hermityen formun mutlak doğrularıdır (Wantz, 1995).

Burada design teorisi ile sonlu geometri arasında karşılıklı etkileşimin olduğu çok önemli bir örnek verilmektedir.

Tanım 3.7 $t < k < v$ olmak üzere $t, v, k, \lambda \in \mathbb{Z}^+$ olsun. V **noktalar** olarak adlandırılan v elemanlı bir küme, B **bloklar** olarak adlandırılan V nin k elemanlı altkümelerinden oluşan bir küme ve V nin t elemanlı her altkümesi tam olarak λ tane blok üzerinde olan bir (V, B) sıralı ikilisine, $t - (v, k, \lambda)$ **dizayn** denir.

Tanım 3.8 Bir dizaynın bloklarından ve noktalarından diğer bir dizaynın bloklarına ve noktalarına, üzerinde bulunma bağıntısını koruyan birebir ve örten bir dönüşüm varsa; bu iki dizayn **izomorf** olarak adlandırılır.

Bir $t - (v, k, \lambda)$ dizaynın mertbesi n olmak üzere $n = k - \lambda$ şeklinde tanımlanır. \mathbb{U} nun her elemanı $PG(2, q^2)$ nin doğrularının üzerindeki noktalar ile 1 ya da $q+1$ noktada kesiştiğinden ve \mathbb{U} kümesi $q^3 + 1$ nokta içerdiğinden bir $2 - (q^3 + 1, q + 1, 1)$ dizayndır. \mathbb{U} nun noktalarını *noktalar* ve mutlak olmayan doğruların kesişimlerini *bloklar* olarak almak suretiyle, bu dizaynın mertbesi q olduğu görülebilir (Barwick and Ebert, 2008).

n . mertebeden sonlu bir projektif düzlem, blokları projektif düzlemin doğruları olan bir $2 - (n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ dizayndır. Aslında basit bir sayım ile bu parametrelere sahip herhangi bir

dizayn, doğruları dizaynın blokları olan n . mertebeden bir projektif düzlem olmalıdır. Benzer olarak; n . mertebeden bir afin düzlem $2 - (n^2, n, 1)$ dizayndır ve bu parametrelere sahip herhangi bir dizayn, n . mertebeden bir afin düzlemdir (Barwick and Ebert, 2008).

Tanım 3.9 n bir tamsayı ve $n \geq 3$ olmak üzere $2 - (n^3 + 1, n + 1, 1)$ dizayn, **n. dereceden bir ünital** olarak adlandırılır.

$\pi = PG(2, q)$ ya gömülü, mertebesi q olan keyfi bir ünital **hermitiyen arc** denir.

Belirtmek gerekir ki; $n = 2$ ise, $2 - (9, 3, 1)$ dizayn 3. mertebeden bir afin düzlemdir. Bundan dolayı ünital tanımında, $n \geq 3$ koşuluna ihtiyaç duyulmasına rağmen; n nin asal olması ya da *derecesi* n olan bir ünitalin n^2 mertebeli bir projektif düzlem içine gömülü olması gerekmez. Böyle bir gömülme varsa, bu durumda \mathbb{U} ünitalinin blokları noktalar kümesi ile doğrudadır ve bu yüzden, içinde bulunduğu düzlemin her doğrusu, \mathbb{U} ile 1 ya da $n + 1$ noktada kesişir. Bu durumda \mathbb{U} ünitaline **gömülü ünital** denir ve bundan sonra, örneğin \mathbb{U} gibi bir hermitiyen eğri **klasik ünital** olarak ifade edilecektir. Not düşmek adına, q^2 mertebeli herhangi bir klasik olmayan projektif düzleme gömülemeyen, asal q mertebeli ünitaler olabileceği gibi, klasik olmayan projektif düzlemlere gömülebilen ünitaler vardır. Ek olarak; bu söylenenlere örnek olması açısından, herhangi iki izomorf olmayan projektif düzleme gömülebilen aynı bir ünital oluşturulabilir (Barwick and Ebert, 2008).

n^2 mertebeli herhangi bir Π sonlu projektif düzlemine gömülü, mertebesi n olan keyfi bir \mathbb{U} ünitali için bazı kombinatoryal gerçekler kolaylıkla görülebilir. Elemanter dizayn teoremi gösterir ki; herhangi bir $2 - (n^3 + 1, n + 1, 1)$ dizayn, $n^4 - n^3 + n^2$ blok içerir ve her noktası n^2 tane blok üzerinde bulunur. Bundan dolayı; Π 'nin herhangi bir $P \in \mathbb{U}$ noktasından \mathbb{U} ya sekant olan n^2 tane doğrusu geçer. Varsayalım ki, bir $P \notin \mathbb{U}$ ve t, s sırasıyla P den geçen teğet ve sekant doğruların sayısı olsun. P den geçen doğruların \mathbb{U} nun bütün noktalarını içermesi gerektiğinden, $t + s(n + 1) = n^3 + 1$ dir. P den geçen Π nin $n^2 + 1$ doğrusu olduğundan, $t + s = n^2 + 1$ dir. Bu denklemler çözüldüğünde, herhangi bir $P \notin \mathbb{U}$ noktasından geçen $n + 1$ tane teğet doğru olduğu görülür. \mathbb{U} nun bu teğet doğruları üzerinde bulunan $n + 1$ tane noktası P nin *ayakları* olarak adlandırılır. Belirtmek gerekir ki, bu ayaklar birleşimli birim polarite altındaki P nin resmi üzerindeyken bir klasik \mathbb{U} ünitali üzerinde bulunan herhangi bir P noktasının ayakları doğrudadır (Wantz, 1995).

3.2.1 Dokuzuncu mertebeden ünitaller

Tanım 3.10 Bir \mathbb{P} projektif düzleminin ünitali \mathbb{U} olsun. Bir $P \in \mathbb{P} - \mathbb{U}$ ve $F \in \mathbb{U}$ noktaları için FP , \mathbb{U} ya teğet ise bu noktalar P nin **ayakları** olarak adlandırılır ve bu noktaların kümesine P nin **pedal seti (kümesi)** denir.

Yukarıda bahsettiğimiz gibi, *Dezarg düzlemi*, *sağ yaklaşık cisim düzlemi*, *sol yaklaşık cisim düzlemi* ve *Hughes düzlemi* olmak üzere 9. mertebeden tam olarak dört tane projektif düzlem mevcuttur. *Penttila* ve *Royle* bu düzlemlerdeki bütün ünitalleri sınıflandırmıştır. Bunlara eşdeğer olarak, Dezarg düzleminde *iki*, sağ yaklaşık cisim ve sol yaklaşık cisim düzleminde *dört* ve Hughes düzleminde *sekiz* tane *ünital* mevcuttur. Eğer ünitaller elde edildikleri düzlemin bir kolinasyonu yardımıyla birbirlerine dönüştürebiliyorsa denktir (Krcadinac and Smoljak, 2011).

9. mertebeden bir projektif düzlemde pedal setler \mathbb{U} nun *dört noktasını* içerir ve bu dört noktanın üç farklı durumu vardır:

- i) *Doğrudadır.*
- ii) *3 nokta bir doğru üzerinde ve dördüncü nokta bu doğru üzerinde değildir.*
- iii) *Herhangi üçü doğrudan değildir. Yani bir arc'tır.*

Bu üç durumun hepsi birer pedal settir. Bu bilgiler üzerinden yapılan araştırmalar sonucunda görülmüştür ki, Dezarg düzleminin iki farklı ünitalinden bir tanesi *hermityen ünital*, diğeri (*klasik olmayan*) *ortogonal Buekenhout-Metz ünitalidir*. Sağ yaklaşık cisim ve sol yaklaşık cisim düzlemlerinin dört farklı ünitali için (aynı pedal setlere sahip olduğundan ünitalleri aynıdır) bir tanesinin *hiperbolik Buekenhout ünital*, diğerrinin *parabolik Buekenhout ünital* ve kalan ikisinin ise *Buekenhout ünitali* olmadığı bulunmuştur (Krcadinac and Smoljak, 2011).

Bilgisayar yardımıyla Brouwer, 28 nokta üzerindeki ünitaller ve 9. mertebeden çeşitli projektif düzlemlerde bazı ünitallerin gömülümü üzerinde çalışmıştır. Bulguları, birden fazla projektif düzleme gömülebilen ünitaller ve aynı zamanda 9. mertebeden herhangi bir düzleme gömülemeyen ünital örneklerini ortaya çıkarmıştır. Birincisi, her asal q kuvveti için q . mertebeden hem Hall hem de Dual Hall düzlemine gömülebilen bir ünital inşa eden *Grüning* tarafından genelleştirilmiştir. *Grüning*, Buekenhout'un hiperbolik yapısını kullanmıştır ve burada Hall düzleminin türetilen bir öteleme düzlemi olduğunu belirtmekte fayda vardır (Wantz, 1995).

Genellikle, sonlu projektif düzlemlere gömülü ünitaller hakkında çok şey bilinmemektedir. Klasik projektif düzlem ile ilgili çalışma sayısı oldukça fazladır. Görüldüğü üzere her q asal

kuvveti için klasik ünital $PG(2, q^2)$ ye gömülebilir. Ek olarak *Buekenhout*, ünitallerin inşası için iki metod açıklamıştır. İlk metod, herhangi bir ‘iki boyutlu’ öteleme düzleminde başarı ile uygulanabilir ve ideal doğru ile bir noktada kesişen ünitali üretir. Bu ünitallere **parabolik ünital** adı verilir. İkinci metod için türetilen öteleme düzlemine ihtiyaç vardır ve ideal doğru ile $q + 1$ noktada kesişen ünitali üretir. Bu ünitallere **hiperbolik ünital** adı verilir. *Metz* daha sonra, *Buekenhout*’un parabolik metodunu $PG(2, q^2)$ de klasik olmayan ünitali oluşturmak için kullanmıştır. Bu ünitaller, ***Buekenhout-Metz ünitalleri*** olarak adlandırıldılar. *Barwick*, $PG(2, q^2)$ de *Buekenhout*’un hiperbolik metodundan elde edilen herhangi bir ünitalin bir klasik ünital olması gerektiğini göstermiştir. $PG(2, q^2)$ ye gömülebilir her bilinen ünital *Buekenhout* yapılarından elde edilebilir (*Barwick and Ebert, 2008*).

Rosati, herhangi bir tek q kuvveti için q . mertebeden Hughes düzleminde bir ünital inşa etmiştir. *Kestenband* ise bu yapıya ait ünitallerin bir sınıfını genelleştirmiş ki bunların hepsi verilen bir q için *Rosati*’nin ünitaline projektif olarak denktir. Hughes düzlemi öteleme düzlemi olmadığından, bu ünitaller *Buekenhout* yapılarından elde edilemezler. *Kestenband* aynı zamanda *Rosati* ünitalinin -bir dizayn olarak- klasik ünitalle izomorf olmadığını göstermiştir. Bu ünitalin lineer otomorfizm grubu *Abatangelo* ve *Larato* tarafından bulunmuştur. Ek olarak, türetilen Hughes düzlemine (*Hughes-Rosati Düzlemi*) ünitali gömmüşler ve $q \equiv 3 \pmod{4}$ e göre otomorfizm grubunu oluşturmuşlardır (*Wantz, 1995*).

Diğer bilinen ünitaller ise şu şekilde özetlenebilir. Birim polariteden elde edilen bir ünital; q herhangi bir tek kuvvet olmak üzere q^6 mertebeli *Figueroa düzleminde*, *de Resmini* ve *Hamilton* tarafından bulunmuştur. *Barlotti* ve *Lunardon*, *Bose-Barlotti Δ -Düzlemlerinde* bir ünitalin varlığını bulmuştur. Son olarak *Lüneberg*, q^2 mertebeli herhangi bir projektif düzleme gömülemeyen *Ree gruplarından* elde edilen $q = 3^{2r+1}$ mertebeli ünitalleri göstermiştir (*Wantz, 1995*).

BÖLÜM 4

BİR ÜNİTAL UYGULAMASI

4.1 Dezarg Düzleminde Bir Hermityen Ünital Örneği

$PG(2, F)$ projektif düzleminde noktalar kümesi \mathcal{N} olmak üzere;

$$\mathcal{N} = \{(0, 0, 1)\} \cup \{(0, 1, z) : z \in F\} \cup \{(1, y, z) : y, z \in F\} \quad (4.1)$$

ile temsil edilebilir.

Aşağıda verilen kodlar yardımıyla $GF(3^2)$ cisiminden elde edilen 9. mertebeden $PG(2, 3^2)$ projektif düzleminin doğruları, doğruların üzerinde bulunan noktaları ve $PG(2, 3^2)$ nin bir ünitali elde edilmiştir. Bu projektif düzlemi oluşturmak için kullanılan yapı bir *cisim* olduğundan bu düzlem *dezargseldir* ve $q = 3$ için $X^{q+1} + Y^{q+1} + Z^{q+1} = 0$ denklemi kullanılarak bulunan ünital **hermityen ünital** olarak adlandırılır ve 28 noktadan oluşan bu ünitalin noktaları şu şekildedir:

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{cccc} (0, 1, \varepsilon + 1), & (0, 1, \varepsilon + 2), & (0, 1, 2\varepsilon + 1), & (0, 1, 2\varepsilon + 2), \\ (1, 0, \varepsilon + 1), & (1, 0, \varepsilon + 2), & (1, 0, 2\varepsilon + 1), & (1, 0, 2\varepsilon + 2), \\ (1, 1, 1), & (1, 1, 2), & (1, 1, \varepsilon), & (1, 1, 2\varepsilon), \\ (1, 2, 1), & (1, 2, 2), & (1, 2, \varepsilon), & (1, 2, 2\varepsilon), \\ (1, \varepsilon, 1), & (1, \varepsilon, 2), & (1, \varepsilon, \varepsilon), & (1, \varepsilon, 2\varepsilon), \\ (1, \varepsilon + 1, 0), & (1, \varepsilon + 2, 0), & (1, 2\varepsilon, 1), & (1, 2\varepsilon, 2), \\ (1, 2\varepsilon, \varepsilon), & (1, 2\varepsilon, 2\varepsilon), & (1, 2\varepsilon + 1, 0), & (1, 2\varepsilon + 2, 0) \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

```
using System;  
using System.Collections.Generic;  
using System.ComponentModel;  
using System.Data;  
using System.Drawing;  
using System.Linq;  
using System.Text;  
using System.Windows.Forms;
```

```
namespace WindowsFormsApplication1
```

```
{
```

```
public partial class Form1 : Form
{
    public int[,] point1_buffer = new int[100, 2];
    public int point1_bufferEndPoint = 0;

    public int[,] point2_buffer = new int[100, 3];
    public int point2_bufferEndPoint = 0;

    public int[,] pointReelValues_buffer = new int[100, 3];
    public int pointReelValues_bufferEndPoint = 0;

    public int[,] pointImaginaryValues_buffer = new int[100, 3];
    public int pointImaginaryValues_bufferEndPoint = 0;

    public int[,] pointIntersectionsValues_buffer = new int[500, 6];
    public int pointIntersectionsValues_bufferEndPoint = 0;

    public int[,] pointHermitianValues_buffer = new int[100, 6];
    public int pointHermitianValues_bufferEndPoint = 0;

    public string[,] point3_buffer = new string[100, 1];
    public int point3_bufferEndPoint = 0;

    public string[,] point_buffer = new string[100, 3];
    public int point_bufferEndPoint = 0;

    public Form1()
    {
        InitializeComponent();
    }

    private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
    {
        point1_bufferEndPoint = 0;
        listBox1.Items.Clear();

        for (int a = 0; a <= 2; a++)
        {
```

```
for (int b = 0; b <= 2; b++)
{
point1_buffer[point1_bufferEndPoint, 0] = a;
point1_buffer[point1_bufferEndPoint, 1] = b;
point1_bufferEndPoint++;
}
}

point2_buffer[0, 0] = point1_buffer[0, 0];
point2_buffer[0, 1] = point1_buffer[0, 1];
point2_buffer[1, 0] = point1_buffer[3, 0];
point2_buffer[1, 1] = point1_buffer[3, 1];
point2_buffer[2, 0] = point1_buffer[5, 0];
point2_buffer[2, 1] = point1_buffer[5, 1];
point2_buffer[3, 0] = point1_buffer[1, 0];
point2_buffer[3, 1] = point1_buffer[1, 1];
point2_buffer[4, 0] = point1_buffer[4, 0];
point2_buffer[4, 1] = point1_buffer[4, 1];
point2_buffer[5, 0] = point1_buffer[6, 0];
point2_buffer[5, 1] = point1_buffer[6, 1];
point2_buffer[6, 0] = point1_buffer[7, 0];
point2_buffer[6, 1] = point1_buffer[7, 1];
point2_buffer[7, 0] = point1_buffer[2, 0];
point2_buffer[7, 1] = point1_buffer[2, 1];
point2_buffer[8, 0] = point1_buffer[8, 0];
point2_buffer[8, 1] = point1_buffer[8, 1];

point2_bufferEndPoint = 10;
point_bufferEndPoint = 0;
point3_bufferEndPoint = 0;

for (int c = 0; c < point2_bufferEndPoint; c++)
{
point3_buffer[c, 0] = point2_buffer[c, 0] + "+" + point2_buffer[c, 1] + "e";
point3_bufferEndPoint++;
}
```

```
point_buffer[0, 0] = "0+0e";
point_buffer[0, 1] = "0+0e";
point_buffer[0, 2] = "1+0e";

point_bufferEndPoint++;
point3_bufferEndPoint = 0;

for (int k = 0; k <= 8; k++)
{
point_buffer[point_bufferEndPoint, 0] = "0+0e";
point_buffer[point_bufferEndPoint, 1] = "1+0e";
point_buffer[point_bufferEndPoint, 2] = point3_buffer[point3_bufferEndPoint, 0];

point3_bufferEndPoint++;
point_bufferEndPoint++;
}

for (int l = 0; l <= 8; l++)
{
string secondValue = point3_buffer[l, 0];

for (int m = 0; m <= 8; m++)
{
point_buffer[point_bufferEndPoint, 0] = "1+0e";
point_buffer[point_bufferEndPoint, 1] = point3_buffer[l, 0];
point_buffer[point_bufferEndPoint, 2] = point3_buffer[m, 0];

point3_bufferEndPoint++;
point_bufferEndPoint++;
}
}

for (int n = 0; n <= point_bufferEndPoint - 1; n++)
{
listBox1.Items.Add("[ " + point_buffer[n, 0] + " , " + point_buffer[n, 1] + " , " + point_buffer[n, 2]
+ " ]");
```

```

}
}

```

```

private void button2_Click(object sender, EventArgs e)
{
    pointImaginaryValues_bufferEndPoint = 0;
    pointReelValues_bufferEndPoint = 0;

    for (int x = 0; x < point_bufferEndPoint; x++)
    {
        string firstPointsStr = point_buffer[x, 0];
        string secondPointsStr = point_buffer[x, 1];
        string thirdPointsStr = point_buffer[x, 2];

        int firstPointsFirstValue = Convert.ToInt16(firstPointsStr.Substring(0, 1));
        int firstPointsSecondValue = Convert.ToInt16(firstPointsStr.Substring(2, 1));

        int secondPointsFirstValue = Convert.ToInt16(secondPointsStr.Substring(0, 1));
        int secondPointsSecondValue = Convert.ToInt16(secondPointsStr.Substring(2, 1));

        int thirdPointsFirstValue = Convert.ToInt16(thirdPointsStr.Substring(0, 1));
        int thirdPointsSecondValue = Convert.ToInt16(thirdPointsStr.Substring(2, 1));

        pointReelValues_buffer[x, 0] = firstPointsFirstValue;
        pointReelValues_buffer[x, 1] = secondPointsFirstValue;
        pointReelValues_buffer[x, 2] = thirdPointsFirstValue;

        pointImaginaryValues_buffer[x, 0] = firstPointsSecondValue;
        pointImaginaryValues_buffer[x, 1] = secondPointsSecondValue;
        pointImaginaryValues_buffer[x, 2] = thirdPointsSecondValue;

        pointReelValues_bufferEndPoint++;
        pointImaginaryValues_bufferEndPoint++;
    }

    for (int h = 0; h < pointImaginaryValues_bufferEndPoint; h++)
    {

```



```
int firstReelValue = pointReelValues_buffer[h, 0];
int secondReelValue = pointReelValues_buffer[h, 1];
int thirdReelValue = pointReelValues_buffer[h, 2];

int firstImaginaryValue = pointImaginaryValues_buffer[h, 0];
int secondImaginaryValue = pointImaginaryValues_buffer[h, 1];
int thirdImaginaryValue = pointImaginaryValues_buffer[h, 2];

int firstReelXfour = 1;
int secondReelXfour = 1;
int thirdReelXfour = 1;

int firstImaginaryXfour = 1;
int secondImaginaryXfour = 1;
int thirdImaginaryXfour = 1;

if (firstReelValue == 0 & firstImaginaryValue == 0)
{
firstReelXfour = 0;
firstImaginaryXfour = 0;
}

if (firstReelValue == 0 & firstImaginaryValue == 1)
{
firstReelXfour = 1;
firstImaginaryXfour = 0;
}

if (firstReelValue == 0 & firstImaginaryValue == 2)
{
firstReelXfour = 1;
firstImaginaryXfour = 0;
}

if (firstReelValue == 1 & firstImaginaryValue == 0)
```

```
firstImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (firstReelValue == 1 & firstImaginaryValue == 1)  
{  
firstReelXfour = 2;  
firstImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (firstReelValue == 1 & firstImaginaryValue == 2)  
{  
firstReelXfour = 2;  
firstImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (firstReelValue == 2 & firstImaginaryValue == 0)  
{  
firstReelXfour = 1;  
firstImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (firstReelValue == 2 & firstImaginaryValue == 1)  
{  
firstReelXfour = 2;  
firstImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (firstReelValue == 2 & firstImaginaryValue == 2)  
{  
firstReelXfour = 2;  
firstImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 0 & secondImaginaryValue == 0)  
{  
secondReelXfour = 0;
```

```
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 0 & secondImaginaryValue == 1)  
{  
secondReelXfour = 1;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 0 & secondImaginaryValue == 2)  
{  
secondReelXfour = 1;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 1 & secondImaginaryValue == 0)  
{  
secondReelXfour = 1;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 1 & secondImaginaryValue == 1)  
{  
secondReelXfour = 2;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 1 & secondImaginaryValue == 2)  
{  
secondReelXfour = 2;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 2 & secondImaginaryValue == 0)  
{  
secondReelXfour = 1;
```

```
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 2 & secondImaginaryValue == 1)  
{  
secondReelXfour = 2;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (secondReelValue == 2 & secondImaginaryValue == 2)  
{  
secondReelXfour = 2;  
secondImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 0 & thirdImaginaryValue == 0)  
{  
thirdReelXfour = 0;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 0 & thirdImaginaryValue == 1)  
{  
thirdReelXfour = 1;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 0 & thirdImaginaryValue == 2)  
{  
thirdReelXfour = 1;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 1 & thirdImaginaryValue == 0)  
{  
thirdReelXfour = 1;
```

```
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 1 & thirdImaginaryValue == 1)  
{  
thirdReelXfour = 2;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 1 & thirdImaginaryValue == 2)  
{  
thirdReelXfour = 2;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 2 & thirdImaginaryValue == 0)  
{  
thirdReelXfour = 1;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 2 & thirdImaginaryValue == 1)  
{  
thirdReelXfour = 2;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
if (thirdReelValue == 2 & thirdImaginaryValue == 2)  
{  
  
thirdReelXfour = 2;  
thirdImaginaryXfour = 0;  
}
```

```
int reelHermitian = firstReelXfour + secondReelXfour + thirdReelXfour;  
int imaginaryHermitian = firstImaginaryXfour + secondImaginaryXfour + thirdImaginaryX-  
four;
```

```

checkHermitian:
if (reelHermitian >= 3) reelHermitian = reelHermitian - 3;
if (reelHermitian >= 3) goto checkHermitian;

if (imaginaryHermitian >= 3) imaginaryHermitian = imaginaryHermitian - 3;
if (imaginaryHermitian >= 3) goto checkHermitian;

if (reelHermitian == 0 & imaginaryHermitian == 0)
{
pointHermitianValues_buffer[pointHermitianValues_bufferEndPoint, 0] = firstReelValue;
pointHermitianValues_buffer[pointHermitianValues_bufferEndPoint, 1] = firstImaginaryValue;

pointHermitianValues_buffer[pointHermitianValues_bufferEndPoint, 2] = secondReelValue;
pointHermitianValues_buffer[pointHermitianValues_bufferEndPoint, 3] = secondImaginary-
Value;

pointHermitianValues_buffer[pointHermitianValues_bufferEndPoint, 4] = thirdReelValue;
pointHermitianValues_buffer[pointHermitianValues_bufferEndPoint, 5] = thirdImaginaryValue;

pointHermitianValues_bufferEndPoint++;

listBox2.Items.Add("<<" + firstReelValue + "+" + firstImaginaryValue + "e" + "," + second-
dReelValue + "+" + secondImaginaryValue + "e" + "," + thirdReelValue + "+" + thirdImagi-
naryValue + "e" + ">>");
}
}
}

private void listBox1_SelectedIndexChanged(object sender, EventArgs e)
{
listBox4.Items.Clear();

int mySelectedFirstReelPoint = Convert.ToInt16(listBox1.Text.Substring(1, 1));
int mySelectedFirstImaginaryPoint = Convert.ToInt16(listBox1.Text.Substring(3, 1));

int mySelectedSecondReelPoint = Convert.ToInt16(listBox1.Text.Substring(6, 1));
int mySelectedSecondImaginaryPoint = Convert.ToInt16(listBox1.Text.Substring(8, 1));

```

```

int mySelectedThirdReelPoint = Convert.ToInt16(listBox1.Text.Substring(11, 1));
int mySelectedThirdImaginaryPoint = Convert.ToInt16(listBox1.Text.Substring(13, 1));

for (int y = 0; y < point_bufferEndPoint; y++)
{
string firstPointsStr = point_buffer[y, 0];
string secondPointsStr = point_buffer[y, 1];
string thirdPointsStr = point_buffer[y, 2];

int firstReelValue;
int secondReelValue;
int thirdReelValue;

int firstPointsReelValue = Convert.ToInt16(firstPointsStr.Substring(0, 1));
int firstPointsImaginaryValue = Convert.ToInt16(firstPointsStr.Substring(2, 1));

int secondPointsReelValue = Convert.ToInt16(secondPointsStr.Substring(0, 1));
int secondPointsImaginaryValue = Convert.ToInt16(secondPointsStr.Substring(2, 1));

int thirdPointsReelValue = Convert.ToInt16(thirdPointsStr.Substring(0, 1));
int thirdPointsImaginaryValue = Convert.ToInt16(thirdPointsStr.Substring(2, 1));

if ((firstPointsImaginaryValue == 1 & mySelectedFirstImaginaryPoint == 1) | (firstPointsImaginaryValue == 2 & mySelectedFirstImaginaryPoint == 2))
{
firstReelValue = firstPointsReelValue * mySelectedFirstReelPoint + 2;
}
else if ((firstPointsImaginaryValue == 1 & mySelectedFirstImaginaryPoint == 2) | (firstPointsImaginaryValue == 2 & mySelectedFirstImaginaryPoint == 1))
{
firstReelValue = firstPointsReelValue * mySelectedFirstReelPoint + 1;
}
else
{
firstReelValue = firstPointsReelValue * mySelectedFirstReelPoint;
}
}

```

```
int firstImaginaryValue = firstPointsImaginaryValue * mySelectedFirstReelPoint + mySelectedFirstImaginaryPoint * firstPointsReelValue;
```

```
if ((secondPointsImaginaryValue == 1 & mySelectedSecondImaginaryPoint == 1) | (secondPointsImaginaryValue == 2 & mySelectedSecondImaginaryPoint == 2))
```

```
{
```

```
secondReelValue = secondPointsReelValue * mySelectedSecondReelPoint + 2;
```

```
}
```

```
else if ((secondPointsImaginaryValue == 1 & mySelectedSecondImaginaryPoint == 2) | (secondPointsImaginaryValue == 2 & mySelectedSecondImaginaryPoint == 1))
```

```
{
```

```
secondReelValue = secondPointsReelValue * mySelectedSecondReelPoint + 1;
```

```
}
```

```
else
```

```
{
```

```
secondReelValue = secondPointsReelValue * mySelectedSecondReelPoint;
```

```
}
```

```
int secondImaginaryValue = secondPointsImaginaryValue * mySelectedSecondReelPoint + mySelectedSecondImaginaryPoint * secondPointsReelValue;
```

```
if ((thirdPointsImaginaryValue == 1 & mySelectedThirdImaginaryPoint == 1) | (thirdPointsImaginaryValue == 2 & mySelectedThirdImaginaryPoint == 2))
```

```
{
```

```
thirdReelValue = thirdPointsReelValue * mySelectedThirdReelPoint + 2;
```

```
}
```

```
else if ((thirdPointsImaginaryValue == 1 & mySelectedThirdImaginaryPoint == 2) | (thirdPointsImaginaryValue == 2 & mySelectedThirdImaginaryPoint == 1))
```

```
{
```

```
thirdReelValue = thirdPointsReelValue * mySelectedThirdReelPoint + 1;
```

```
}
```

```
else
```

```
{
```

```
thirdReelValue = thirdPointsReelValue * mySelectedThirdReelPoint;
```

```
}
```



```

int thirdImaginaryValue = thirdPointsImaginaryValue * mySelectedThirdReelPoint + mySelectedThirdImaginaryPoint * thirdPointsReelValue;

int sigmaReel = firstReelValue + secondReelValue + thirdReelValue;
int sigmaImaginary = firstImaginaryValue + secondImaginaryValue + thirdImaginaryValue;

checkSigmaReel:
if (sigmaReel >= 3) sigmaReel = sigmaReel - 3;
if (sigmaReel >= 3) goto checkSigmaReel;

checkSigmaImaginary:
if (sigmaImaginary >= 3) sigmaImaginary = sigmaImaginary - 3;
if (sigmaImaginary >= 3) goto checkSigmaImaginary;

if (sigmaReel == 0 & sigmaImaginary == 0)
{
pointIntersectionsValues_buffer[pointIntersectionsValues_bufferEndPoint, 0] = firstPointsReelValue;
pointIntersectionsValues_buffer[pointIntersectionsValues_bufferEndPoint, 1] = firstPointsImaginaryValue;

pointIntersectionsValues_buffer[pointIntersectionsValues_bufferEndPoint, 2] = secondPointsReelValue;
pointIntersectionsValues_buffer[pointIntersectionsValues_bufferEndPoint, 3] = secondPointsImaginaryValue;

pointIntersectionsValues_buffer[pointIntersectionsValues_bufferEndPoint, 4] = thirdPointsReelValue;
pointIntersectionsValues_buffer[pointIntersectionsValues_bufferEndPoint, 5] = thirdPointsImaginaryValue;

pointIntersectionsValues_bufferEndPoint++;

listBox4.Items.Add("(" + firstPointsReelValue + "+" + firstPointsImaginaryValue + "e" + "," +
+ secondPointsReelValue + "+" + secondPointsImaginaryValue + "e" + "," + thirdPointsReelValue + "+" + thirdPointsImaginaryValue + "e" + ")");
}

```

```
}  
}
```

```
private void button4.Click(object sender, EventArgs e)
```

```
{
```

```
    this.Close();
```

```
}
```

```
}
```

```
}
```

Şimdi $PG(2, 3^2)$ Desarg düzleminin doğrularının üzerindeki noktaların, \mathbb{U} kümesinin hangi noktaları ile kesiştiklerini gösteren tabloları verelim.

Tablo 4.1. $PG(2, 3^2)$ düzleminin doğruları üzerinde bulunan ünital noktaları.

$d_1 = [0, 0, 1]$ $\{U_{21}, U_{22}, U_{27}, U_{28}\}$	$d_2 = [0, 1, 0]$ $\{U_5, U_6, U_7, U_8\}$	$d_3 = [0, 1, 1]$ $\{U_{10}, U_{13}, U_{20}, U_{25}\}$
$d_4 = [0, 1, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_1\}$	$d_5 = [0, 1, \varepsilon]$ $\{U_{11}, U_{16}, U_{18}, U_{23}\}$	$d_6 = [0, 1, \varepsilon + 1]$ $\{U_3\}$
$d_7 = [0, 1, 2]$ $\{U_9, U_{14}, U_{19}, U_{26}\}$	$d_8 = [0, 1, \varepsilon + 2]$ $\{U_4\}$	$d_9 = [0, 1, 2\varepsilon]$ $\{U_{12}, U_{15}, U_{17}, U_{24}\}$
$d_{10} = [0, 1, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_2\}$	$d_{11} = [1, 0, 0]$ $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$	$d_{12} = [1, 0, 1]$ $\{U_{10}, U_{14}, U_{18}, U_{24}\}$
$d_{13} = [1, 0, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_5\}$	$d_{14} = [1, 0, \varepsilon]$ $\{U_{11}, U_{15}, U_{19}, U_{25}\}$	$d_{15} = [1, 0, \varepsilon + 1]$ $\{U_7\}$
$d_{16} = [1, 0, 2]$ $\{U_9, U_{13}, U_{17}, U_{23}\}$	$d_{17} = [1, 0, \varepsilon + 2]$ $\{U_8\}$	$d_{18} = [1, 0, 2\varepsilon]$ $\{U_{12}, U_{16}, U_{20}, U_{26}\}$
$d_{19} = [1, 0, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_6\}$	$d_{20} = [1, 1, 0]$ $\{U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}\}$	$d_{21} = [1, 1, 1]$ $\{U_9\}$
$d_{22} = [1, 1, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_1, U_5, U_{20}, U_{24}\}$	$d_{23} = [1, 1, \varepsilon]$ $\{U_{12}\}$	$d_{24} = [1, 1, \varepsilon + 1]$ $\{U_3, U_7, U_{18}, U_{25}\}$
$d_{25} = [1, 1, 2]$ $\{U_{10}\}$	$d_{26} = [1, 1, \varepsilon + 2]$ $\{U_4, U_8, U_{19}, U_{23}\}$	$d_{27} = [1, 1, 2\varepsilon]$ $\{U_{11}\}$
$d_{28} = [1, 1, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_2, U_6, U_{17}, U_{26}\}$	$d_{29} = [1, 2\varepsilon + 1, 0]$ $\{U_{21}\}$	$d_{30} = [1, 2\varepsilon + 1, 1]$ $\{U_2, U_{16}, U_{21}, U_{25}\}$
$d_{31} = [1, 2\varepsilon + 1, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_5, U_{11}, U_{17}, U_{21}\}$	$d_{32} = [1, 2\varepsilon + 1, \varepsilon]$ $\{U_1, U_{14}, U_{21}, U_{23}\}$	$d_{33} = [1, 2\varepsilon + 1, \varepsilon + 1]$ $\{U_7, U_9, U_{20}, U_{21}\}$
$d_{34} = [1, 2\varepsilon + 1, 2]$ $\{U_3, U_{15}, U_{21}, U_{26}\}$	$d_{35} = [1, 2\varepsilon + 1, \varepsilon + 2]$ $\{U_4, U_{12}, U_{18}, U_{21}\}$	$d_{36} = [1, 2\varepsilon + 1, 2\varepsilon]$ $\{U_4, U_{13}, U_{21}, U_{24}\}$
$d_{37} = [1, 2\varepsilon + 1, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_2, U_{10}, U_{19}, U_{21}\}$	$d_{38} = [1, \varepsilon, 0]$ $\{U_{17}, U_{18}, U_{19}, U_{20}\}$	$d_{39} = [1, \varepsilon, 1]$ $\{U_{23}\}$
$d_{40} = [1, \varepsilon, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_2, U_5, U_{12}, U_{14}\}$	$d_{41} = [1, \varepsilon, \varepsilon]$ $\{U_{26}\}$	$d_{42} = [1, \varepsilon, \varepsilon + 1]$ $\{U_1, U_7, U_{10}, U_{15}\}$
$d_{43} = [1, \varepsilon, 2]$ $\{U_{24}\}$	$d_{44} = [1, \varepsilon, \varepsilon + 2]$ $\{U_3, U_8, U_{11}, U_{13}\}$	$d_{45} = [1, \varepsilon, 2\varepsilon]$ $\{U_{25}\}$
$d_{46} = [1, \varepsilon, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_4, U_6, U_9, U_{16}\}$	$d_{47} = [1, \varepsilon + 1, 0]$ $\{U_{27}\}$...

Tablo 4.1. $PG(2, 3^2)$ düzleminin doğruları üzerinde bulunan ünital noktaları (devamı).

$d_{48} = [1, \varepsilon + 1, 1]$ $\{U_4, U_{15}, U_{20}, U_{27}\}$	$d_{49} = [1, \varepsilon + 1, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_5, U_9, U_{25}, U_{27}\}$	$d_{50} = [1, \varepsilon + 1, \varepsilon]$ $\{U_2, U_{13}, U_{18}, U_{27}\}$
$d_{51} = [1, \varepsilon + 1, \varepsilon + 1]$ $\{U_3, U_{12}, U_{23}, U_{27}\}$	$d_{52} = [1, \varepsilon + 1, 2]$ $\{U_1, U_{16}, U_{19}, U_{27}\}$	$d_{53} = [1, \varepsilon + 1, \varepsilon + 2]$ $\{U_8, U_{10}, U_{26}, U_{27}\}$
$d_{54} = [1, \varepsilon + 1, 2\varepsilon]$ $\{U_3, U_{14}, U_{17}, U_{27}\}$	$d_{55} = [1, \varepsilon + 1, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_6, U_{11}, U_{24}, U_{27}\}$	$d_{56} = [1, 2, 0]$ $\{U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}\}$
$d_{57} = [1, 2, 1]$ $\{U_{13}\}$	$d_{58} = [1, 2, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_4, U_5, U_{18}, U_{26}\}$	$d_{59} = [1, 2, \varepsilon]$ $\{U_{16}\}$
$d_{60} = [1, 2, \varepsilon + 1]$ $\{U_2, U_7, U_{19}, U_{24}\}$	$d_{61} = [1, 2, 2]$ $\{U_{14}\}$	$d_{62} = [1, 2, \varepsilon + 2]$ $\{U_1, U_8, U_{17}, U_{25}\}$
$d_{63} = [1, 2, 2\varepsilon]$ $\{U_{15}\}$	$d_{64} = [1, 2, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_3, U_6, U_{20}, U_{23}\}$	$d_{65} = [1, \varepsilon + 2, 0]$ $\{U_{28}\}$
$d_{66} = [1, \varepsilon + 2, 1]$ $\{U_3, U_{12}, U_{19}, U_{28}\}$	$d_{67} = [1, \varepsilon + 2, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_5, U_{15}, U_{23}, U_{28}\}$	$d_{68} = [1, \varepsilon + 2, \varepsilon]$ $\{U_4, U_{10}, U_{17}, U_{28}\}$
$d_{69} = [1, \varepsilon + 2, \varepsilon + 1]$ $\{U_7, U_{13}, U_{26}, U_{28}\}$	$d_{70} = [1, \varepsilon + 2, 2]$ $\{U_2, U_{11}, U_{20}, U_{28}\}$	$d_{71} = [1, \varepsilon + 2, \varepsilon + 2]$ $\{U_8, U_{16}, U_{24}, U_{28}\}$
$d_{72} = [1, \varepsilon + 2, 2\varepsilon]$ $\{U_1, U_9, U_{18}, U_{28}\}$	$d_{73} = [1, \varepsilon + 2, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_6, U_{14}, U_{25}, U_{28}\}$	$d_{74} = [1, 2\varepsilon, 0]$ $\{U_{23}, U_{24}, U_{25}, U_{26}\}$
$d_{75} = [1, 2\varepsilon, 1]$ $\{U_{17}\}$	$d_{76} = [1, 2\varepsilon, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_3, U_5, U_{10}, U_{16}\}$	$d_{77} = [1, 2\varepsilon, \varepsilon]$ $\{U_{20}\}$
$d_{78} = [1, 2\varepsilon, \varepsilon + 1]$ $\{U_4, U_7, U_{11}, U_{14}\}$	$d_{79} = [1, 2\varepsilon, 2]$ $\{U_{18}\}$	$d_{80} = [1, 2\varepsilon, \varepsilon + 2]$ $\{U_2, U_8, U_9, U_{15}\}$
$d_{81} = [1, 2\varepsilon, 2\varepsilon]$ $\{U_{19}\}$	$d_{82} = [1, 2\varepsilon, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_1, U_6, U_{12}, U_{13}\}$	$d_{83} = [1, 2\varepsilon + 2, 0]$ $\{U_{22}\}$
$d_{84} = [1, 2\varepsilon + 2, 1]$ $\{U_1, U_{11}, U_{22}, U_{26}\}$	$d_{85} = [1, 2\varepsilon + 2, 2\varepsilon + 1]$ $\{U_5, U_{13}, U_{19}, U_{22}\}$	$d_{86} = [1, 2\varepsilon + 2, \varepsilon]$ $\{U_3, U_9, U_{22}, U_{24}\}$
$d_{87} = [1, 2\varepsilon + 2, \varepsilon + 1]$ $\{U_7, U_{16}, U_{17}, U_{22}\}$	$d_{88} = [1, 2\varepsilon + 2, 2]$ $\{U_4, U_{12}, U_{22}, U_{25}\}$	$d_{89} = [1, 2\varepsilon + 2, \varepsilon + 2]$ $\{U_8, U_{14}, U_{20}, U_{22}\}$
$d_{90} = [1, 2\varepsilon + 2, 2\varepsilon]$ $\{U_2, U_{10}, U_{22}, U_{23}\}$	$d_{91} = [1, 2\varepsilon + 2, 2\varepsilon + 2]$ $\{U_6, U_{15}, U_{18}, U_{22}\}$	

$\mathbb{P} = PG(2, q^2)$ düzleminde bir ünitalın noktaları, bu düzlemin doğrularınının üzerindeki noktalar ile 1 ya da $q + 1$ noktada kesişirler. Daha açıklayıcı olması açısından, herhangi bir $d \in \mathbb{P} - \mathbb{U}$ doğrusunun üzerinde bulunan noktalar \mathbb{U} kümesi ile $q + 1$ noktada kesişirken, herhangi bir $P \in \mathbb{U}$ noktası projektif düzlemin her doğrusunun üzerinde bulunan noktalar ile sadece 1 noktada kesişir. Bu bilgiler ışığında, $\mathbb{P} = PG(2, 3^2)$ 'nin doğruları d_i , $i = 1, \dots, 91$ ve \mathbb{U} 'nun noktaları U_j , $j = 1, \dots, 28$ için

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{llll} U_1=(0, 1, \varepsilon + 1), & U_2=(0, 1, \varepsilon + 2), & U_3=(0, 1, 2\varepsilon + 1), & U_4=(0, 1, 2\varepsilon + 2), \\ U_5=(1, 0, \varepsilon + 1), & U_6=(1, 0, \varepsilon + 2), & U_7=(1, 0, 2\varepsilon + 1), & U_8=(1, 0, 2\varepsilon + 2), \\ U_9=(1, 1, 1), & U_{10}=(1, 1, 2), & U_{11}=(1, 1, \varepsilon), & U_{12}=(1, 1, 2\varepsilon), \\ U_{13}=(1, 2, 1), & U_{14}=(1, 2, 2), & U_{15}=(1, 2, \varepsilon), & U_{16}=(1, 2, 2\varepsilon), \\ U_{17}=(1, \varepsilon, 1), & U_{18}=(1, \varepsilon, 2), & U_{19}=(1, \varepsilon, \varepsilon), & U_{20}=(1, \varepsilon, 2\varepsilon), \\ U_{21}=(1, \varepsilon + 1, 0), & U_{22}=(1, \varepsilon + 2, 0), & U_{23}=(1, 2\varepsilon, 1), & U_{24}=(1, 2\varepsilon, 2), \\ U_{25}=(1, 2\varepsilon, \varepsilon), & U_{26}=(1, 2\varepsilon, 2\varepsilon), & U_{27}=(1, 2\varepsilon + 1, 0), & U_{28}=(1, 2\varepsilon + 2, 0) \end{array} \right\}$$

olmak üzere yukarıdaki **Tablo 4.1.** bize 9. mertebeden dezargsel bir $\mathbb{P} = PG(2, 3^2)$ düzleminin doğruları üzerindeki noktaların \mathbb{U} ünital kümesi ile hangi noktalarda kesiştiklerini verir ve birkaç örnek verilerek bu çalışma tamamlanmış olur.

Örnek 4.1 Verilen kodlarla elde ettiğimiz $PG(2, 3^2)$ düzleminin doğruları üzerindeki noktalar yardımıyla, $d = [1, 1, 2\varepsilon + 1]$ doğrusunun üzerindeki noktalar şu şekildedir:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{ll} (0, 1, \varepsilon + 1), & (1, \varepsilon + 1, 1), \\ (1, 0, \varepsilon + 1), & (1, 2, 0), \\ (1, 1, 2\varepsilon + 2), & (1, 2\varepsilon + 1, 2\varepsilon + 1), \\ (1, 2\varepsilon + 1, \varepsilon), & (1, 2\varepsilon, 2), \\ (1, \varepsilon, 2\varepsilon), & (1, 2\varepsilon + 2, 2\varepsilon + 1) \end{array} \right\}$$

Dolayısıyla, $d = [1, 1, 2\varepsilon + 1]$ doğrusunun üzerindeki noktalar ile \mathbb{U} kümesi kesiştirildiğinde $d \in \mathbb{P} - \mathbb{U}$ olduğundan kesişim kümesi *dört elemanlıdır* ve bu küme

$$\mathbf{N} \cap \mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{ll} U_1 = (0, 1, \varepsilon + 1), & U_{20} = (1, \varepsilon, 2\varepsilon), \\ U_5 = (1, 0, \varepsilon + 1), & U_{24} = (1, 2\varepsilon, 2) \end{array} \right\}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde,

Örnek 4.2 $PG(2, 3^2)$ düzleminde, $d = [0, 1, \varepsilon + 2]$ doğrusunun üzerindeki noktalar şu şekildedir:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{ll} (0, 1, 2\varepsilon + 2), & (1, \varepsilon + 1, \varepsilon), \\ (1, 0, 0), & (1, 2, \varepsilon + 1), \\ (1, 1, 2\varepsilon + 2), & (1, \varepsilon + 2, 2), \\ (1, 2\varepsilon + 1, 1), & (1, 2\varepsilon, \varepsilon + 2), \\ (1, \varepsilon, 2\varepsilon + 1), & (1, 2\varepsilon + 2, 2\varepsilon) \end{array} \right\}$$

Dolayısıyla, $d = [0, 1, \varepsilon + 2]$ doğrusunun üzerindeki noktalar ile \mathbb{U} kümesi kesiştirildiğinde $d \in \mathbb{U}$ olduğundan kesişim kümesi *tek bir noktaya sahiptir* ve bu küme

$$\mathbf{N} \cap \mathbb{U} = \{U_4 = (0, 1, 2\varepsilon + 2)\}$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Barwick, S. and Ebert, G., 2008, Unitals in Projective Planes, Springer, 193 p.

Room, T.G. and Kirkpatrick, P.B., 2008, Miniqaternion Geometry: An Introduction to the Study of Projective Planes, Cambridge University Press, 174 p.

Hirschfeld, J.W.P., 1979, Projective Geometries Over Finite Fields, Clarendon Press, 474 p.

Kaya, R., 2005, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 392 s.

Wantz, K.L., 1995, Unitals Embedded in Finite Projective Planes, Ph.D. Thesis, The University of Delaware, 98 p.

Akpınar, A., 2005, On Some Projective Planes of Finite Order, G.U. Journal of Science, 322-323 p.

Krcadinac, V. and Smoljak, K., 2011, Pedal Sets of Unitals in Projective Planes of Order 9 and 16, Sarajevo Journal of Mathematics, 256-258 p.

Marshall, D., 2010, Conics, Unitals and Net Replacement, Ph.D. Thesis, The University of Adelaide, 158 p.

<http://mathworld.wolfram.com>