Yarı-Riemann Uzaylarda Bazı Eğrilik Koşullarına Sahip Lightlike Hiperyüzeyler

Süleyman Cengiz

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2013

Lightlike Hypersurfaces With Some Curvature Conditions
in Semi-Riemannian Spaces

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

June 2013

Yarı-Riemann Uzaylarda Bazı Eğrilik
Koşullarına Sahip Lightlike Hiperyüzeyler

Süleyman Cengiz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışmanlar:
Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ
Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Haziran 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Süleyman Cengiz'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Yarı-Riemann Uzaylarda Bazı Eğrilik Koşullarına Sahip Lightlike Hiperyüzeyler" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

İkinci Danışman **:** Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Doç. Dr. Nesip AKTAN

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda, ele alınacak konuların tarihsel gelişimlerinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde çalışma için gerekli kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde semi-Riemann uzay formlarda lightlike hiperyüzeylerin Riemann eğrilik tensörlerinin, Ricci eğrilik tensörlerinin ve ikinci temel formlarının simetri ve yarı-simetri tip eğrilik koşulları araştırılmıştır. Ayrıca bu eğrilik koşulları arasındaki bazı ilişkilere ait sonuçlar bulunmuştur. Dördüncü bölümde ise Robertson-Walker uzay zamanında tanımlı lightlike hiperyüzeylerin bazı simetri tip eğrilik koşulları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Semi-Riemann Uzay Formu, Lightlike Hiperyüzeyler, Simetri Tip Eğrilik Koşulları, Robertson-Walker Uzay-zamanı

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction part. In this part, the historical advance of the study is mentioned. The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems. In the third chapter, symmetry and semi-symmetry type curvature conditions of the Riemann curvature tensors, Ricci curvature tensors and second fundamental forms of lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian space forms are investigated. Furthermore, some results on the interrelations of these curvature conditions are found. In the fourth chapter, some symmetry type curvature conditions of lightlike hypersurfaces of Robertson-Walker spacetimes are examined.

Keywords: Semi-Riemannian Space Forms, Lightlike Hypersurfaces, Symmetry Type Curvature Conditions, Robertson-Walker Spacetime

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım boyunca bana danışmanlık ederek yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanlarım Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ ve Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ'e, çalışma hayatımın her aşamasında benden desteklerini esirgemeyen Doç. Dr. Cumali EKİCİ ve Doç. Dr. Nesip AKTAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen ve anlayışla davranan aile fertlerime, kardeşlerime, dostlarım ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	Anlamı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	$3-$ boyutlu Öklidiyen uzay
$\mathbb{R}_1^m$	Minkowski uzayı
$\mathbb{R}_p^m$	p indisli yarı-Öklidiyen uzay
TM	Tanjant uzayı
T_xM	x noktasındaki tanjant uzayı
$TM^\perp$	Normal uzayı
$T_xM^\perp$	x noktasındaki normal uzayı
$\Gamma(TM)$	M manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı
Exp	M manifoldunun üstel dönüşümü
$RadTM$	M manifoldunun radikal (null) dağılımı
$RadT_xM$	x noktasında M manifoldunun radikal dağılımı
$S(TM)$	M manifoldunun ekran dağılımı
$S(TM)^\perp$	M manifoldunun ekran dağılımının dik komplemanı
$tr(TM)$	Lightlike transversal vektör demeti
A_N	Lightlike hiperyüzeyin şekil operatörü
A_ξ^*	Ekran dağılımının şekil operatörü
$\oplus$	Direkt toplam
$\perp$	Ortogonal direkt toplam
R	Riemann eğrilik tensörü
$K(\Pi)$	Π düzleminin kesitsel eğriliği
Ric	Simetrik Ricci tensörü
$R^{(0,2)}$	İndirgenmiş Ricci tensörü

H_ξ	Lightlike ortalama eğrilik
$B \times_f F$	Katlı çarpım uzayı
H^f	f fonksiyonunun Hessianı
$\operatorname{grad} f$	f fonksiyonunun gradyanı
$\operatorname{div} T$	T tensörünün diverjansı
∇R	R tensörünün kovaryant türevi
$\nabla^k R$	R tensörünün k. mertebeden kovaryant türevi
$h\,(X,Y)$	İkinci temel form
$B\,(X,Y)$	Yerel ikinci temel form
$h^*\,(X,PY)$	Ekran dağılımının ikinci temel formu
$C\,(X,PY)$	Ekran dağılımının yerel ikinci temel formu
$\wedge$	Işık konisi
$T\wedge$	Işık konisinin tanjant uzayı
$S\,(T\wedge)$	Işık konisinin ekran dağılımı
$tr\,(A_N)$	A_N şekil operatörünün izi
$\mathcal{R}\,(X,Y)$	Riemann operatörü
$M_1^n\,(k,f)$	Robertson-Walker uzay zamanı
∂_t^{tr}	∂_t vektör alanının transversal izdüşümü

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Eğrilik kavramı diferensiyel geometride ve özellikle Riemann geometrisinde, konunun geometrik içeriğinin analitik, cebirsel veya topolojik açılardan farklılaşmasında rol oynayan merkezi kavramdır. Bir manifoldun eğriliği, metriği yardımıyla belirlenebildiği gibi, eğriliğin bazı özelliklerini kullanarak metrik hakkında bilgiye ulaşmak mümkündür. Paralel eğriliğe sahip yerel simetrik uzaylarda olduğu gibi, bazen eğrilik sayesinde manifoldu ve metriği yeniden inşa etmek mümkün olabilir.

Eğrilik ile ilgili bilgi Riemann eğilik tensöründe saklıdır. Analitik bir nesne olan bu tensörün, simetrilerine rağmen genel anlamda kullanılması kolay değildir. İçerisinde barındırdığı geometrik bilginin çıkarılması genelde zordur. Bu nedenle doğrudan eğrilik tensörü ile uğraşmak yerine, onun bazı başka formlarını veya ilgili operatörlerini ele almak daha akılcıdır. Bu manada kesitsel eğrilik, Ricci eğriliği, skaler eğrilik ve Jakobi operatörü gibi nesneleri kullanmak daha kolay olsa da eğrilik tensörüne göre daha az bilgi içerirler (Boeckx, 2005).

Yarı-Riemann uzaylardaki altmanifoldlar ile Riemann uzaylardaki altmanifoldların yerel ve global geometrileri arasında büyük benzerlikler bulunmasına karşın, bazı konularda çok farklı yaklaşımlar ve çözümler gerektirmektedir. Örneğin, Riemann uzaylarda yerel olarak simetriklik ile genelleştirilmiş simetriklik arasında fark bulunmazken; yarı-Riemann uzaylarda bu iki kavram farklılık gösterir. Bunun sebebi, Riemann uzaylarda metriğin holonomik olarak indirgenebilir ya da ayrışabilir olup olmaması, yerel olarak eşdeğer olmasına rağmen, yarı-Riemann uzaylarda bu özellikler arasında farklılıklar bulunmasıdır. Holonominin indirgenemez olduğu durumlar genel anlamda bilinmesine karşın, indirgenebilir olduğu konusundaki çalışmalar hala devam etmektedir.

Öklid uzayında simetrik altmanifoldlar ve bunlarla yakından ilgili olan paralel ikinci temel tensöre sahip altmanifoldlar konularındaki ilk çalışmalar 1970 yıllarına dayanır. Bu çalışmaların başlangıcı (Chern, et al., 1970) çalışmasına kadar gider.

Bunları (Vilms, 1972) ve (Walden, 1973) çalışmaları takip etti. D. Ferus (1974 a; 1974 b; 1974 c) çalışmalarında, sistematik olarak paralel ikinci temel forma sahip Öklid altmanifoldları üzerinde incelemeler yaptı. Bu altmanifoldların tam bir sınıflandırmasını yapmayı başardı ve bunun sonucunda böylesi altmanifoldların yerel olarak dış simetrik olduklarını gördü. Bunun doğrudan ispatını sonraları Strübing (Strübing, 1979) yaptı.

Sonraki yıllarda simetrik altmanifoldlar konusu simetrik uzayların, altmanifoldlarda bir uygulaması şeklinde ele alındı. Simetrik altmanifoldlar, ilk olarak D. Ferus tarafından, bir Öklid uzayının altmanifoldları için tanıtıldı (Ferus, 1980) ve daha sonraki yıllarda konu diğer uzaylara genişletildi (Takeuchi, 1981), (Backes and Reckziegel, 1983). Burada üzerinde durulan esas problem bu tür uzayların sınıflandırılmasıydı. Birçok matematikçi tarafından ele alınan konu Öklid uzaylarından sonra, Riemann simetrik uzaylarında, 1 ranklı simetrik uzaylarda, birden büyük ranklı ve kompakt olmayan simetrik Riemann uzaylarında ele alındı (Naitoh, 1981), (Naitoh, 1983 a; Naitoh, 1983 b), (Naitoh, 1986), (Naitoh and Takeuchi, 1989), (Nakagawa and Takagi, 1976), (Nikolaevskij, 1994), (Onishchik, 1980), (Tsukada, 1985), (Tsukada, 2005), (Tsukada and Naitoh, 2007). Son olarak ortak yürütülen bir çalışmada (Berndt, et al., 2005) bu sınıflandırma problemi tamamiyle çözümlendi.

Öklid uzaylarında simetrik altmanifoldların bir genellemesi olarak k-simetrik altmanifoldlar kavramının tanımı, (Sánchez, 1985) ve (Kowalski and Kulich, 1987) çalışmalarında Öklid uzayının uygun izometrilerinden faydalanılarak yapıldı. Daha özel bir durum olarak (Carfagna D'Andrea, et al., 1994) ve (Carfagna D'Andrea and Console, 1999) çalışmalarında 2-simetrik altmanifoldların karakterizasyonu verildi. Fakat 2-simetrik altmanifoldlar paralel ikinci temel forma sahip olmalarına karşın (Ferus, 1980), k-simetrik uzaylar paralel ikinci temel forma sahip olmak zorunda değillerdir (Vilms, 1972). Dolayısıyla çok farklı yöntemler gerektirmektedirler. Ardından 2008 yılında 2-simetrik Lorentzian uzay zamanları (Senovilla, 2008) çalışmasında ele alındı ve izleyen yıllarda bu tür uzayların özellikleri ve sınıflandırmasına dair incelemeler yapıldı (Blanco, et al., 2010), (Blanco, et al., 2011 a;

Blanco, et al., 2011 b), (Alekseevsky and Galaev, 2011).

Yerel simetrik uzayların diğer bir genellemesi olarak yarı-simetrik uzaylara, ilk olarak (Cartan, 1946) çalışmasında rastlıyoruz. Daha sonraki yıllarda (Lichnerowicz, 1952), (Sinjukov, 1956), (Sinjukov, 1961), (Sinjukov, 1962), (Couty, 1957) ve (Couty, 1959) çalışmalarında yarı-simetrik uzaylarla ilgili kayda değer sonuçlar bulunur. Benzer çalışmalar çoğu araştırmacı tarafından ilerleyen yıllarda üzerinde çalışılan alanlar çeşitlendirilerek devam ettirildi (Sekigawa, 1969), (Tanno, 1971), (Kovaljev, 1973), (Sekigawa, 1975). Yarı-simetrik Riemann uzaylarının lokal ve global sınıflandırılması Szabo tarafından yapıldı (Szabo, 1982, 1983, 1984). K. Nomizu Öklidiyen uzayda yarı-simetrik hiperyüzeyleri sınıflandırdı (Nomizu, 1968). Riemann uzay formlarında yarı-simetrik altmanifoldların incelenmesi ve sınıflandırılması ise (Lumiste, 1994) çalışmasında ele alındı. Bu çalışmada Lumiste, o zamana kadar bu alanda yapılan çalışmaların bir özetini de verdi. I. Van de Woestijne ve L. Verstraelen ise yarı-simetrik hiperyüzeylerin sınıflandırmasını Lorentz uzayında yaptılar (Van de Woestijne and Verstraelen, 1987). Daha özel durumlardaki çalışmalara örnek olarak, 3-boyutlu yarı-simetrik uzayların sınıflandırılması (Kowalski, 1996) ve Ricci tensörü üzerinde bazı ilave koşulları sağlayan yarı-simetrik uzayların incelenmesi (Boeckx, 1993) gösterilebilir.

Riemann eğrilik tensörü ile ilgili bütün bu simetrik uzay genellemelerini hiyerarşik olarak şu şekilde gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} & \text{Sabit Eğrilikli } \ (R = sabit) \\ \Longrightarrow\ & \text{Yerel Simetrik } \ (\nabla R = 0) \\ \Longrightarrow\ & \text{2-Simetrik } \ \left(\nabla^2 R = 0\right) \\ \Longrightarrow\ & \text{Yarı-Simetrik } \ (R \cdot R = 0) \end{aligned}$$

Bu gösterime göre, simetri koşullarında en özel hal sabit eğrilik olup, daha genel hal yarı-simetri durumudur. Mesela sabit eğrilikli bir uzay diğer bütün simetri koşullarını da sağlar. Yerel simetrik bir uzay 2-simetrik ve yarı-simetrik olup, sabit eğrilikli olmak zorunda değildir. Yarı-simetrik bir uzay ise diğer tüm simetri koşullarını sağlamak zorunda değildir.

Riemann eğrilik tensörü ile ilgili bu simetri koşulları haricinde, eğrilik tensörünün kovaryant türevi ile ilgili olduğundan simetri koşulu olarak düşünülebilecek olan harmonik eğrilik konusu vardır. Bu konuyla alakalı olarak (Besse, 1987) kitabında detaylı açıklamalar ve sınıflandırmalar bulunmaktadır. Harmonik eğriliğe sahip Riemann uzayları üzerine çalışmalar, Ricci paralel uzayların eğriliklerinin harmonik olması ve ek olarak Yang-Mills koneksiyonlarıyla olan ilişkileri sebebiyle başlamıştır. Bu tip uzaylar Einstein uzayları ve sabit skalar eğrilikli konformal düz manifoldların doğal genellemeleri olarak karşımıza çıkarlar. Riemann uzaylarda harmonik eğrilikle alakalı doğrudan çalışmalar A. Derdziński ile başlar (Derdziński, 1980), (Derdziński, 1982). Bu çalışmalarda harmonik eğrilikli Riemann manifoldlarının örnekleri verilmiş ve sınıflandırılması yapılmıştır. Ardından harmonik eğrilikli hiperyüzeyler ve altmanifoldlar üzerine incelemeler yapılmıştır (Umehara, 1986), (Omachi, 1986), (Ki and Nakagawa, 1986), (Ki, et al., 1987). Yarı-Riemann uzaylarda ise harmonik eğrilik, skalar eğriliğin sabit olması durumunda Ricci tensörünün parallel olmasıyla karakterize edilmiştir (Kwon, et al., 2003).

Yerçekimsel dalgaların matematiksel çözümleri için gerekli olan sadeleştirmelerden olan Ricci tensörünün paralelliği, çok uzun zamandır üzerinde çalışılan bir konudur. Ricci tensörünün sıfır olması Ricci düz, ya da fiziksel ifadesiyle bir boş Einstein uzay zamanını gösterir. Ricci tensörünün kovaryant türevinin sıfır olması durumu ise, Shirokov tarafından bir çalışmasında ele alınıyor (Shirokov, 1925). Bu eserde paralel Ricci tensöre sahip bir Riemann uzayının ya bir Einstein uzayı ya da Einstein uzaylarının bir çarpımı olarak yazılabileceği ifade ediliyor. Dolayısıyla Ricci paralel hiperyüzeyler, Einstein hiperyüzeyler başlığı altında incelenebilirler. Einstein uzaylarının sınıflandırılması Petrov tarafından yapıldı (Petrov, 1966), (Petrov, 1969). Öklidiyen uzaylarda Einstein hiperyüzeylerin sınıflandırılması (Kobayashi and Nomizu, 1963) eserinde vardır. Riemann uzay formlarında ise paralel Ricci tensörüne sahip hiperyüzeyler Ryan tarafından sınıflandırıldı (Ryan, 1971). Ricci paralel Riemann manifoldlar, en azından yerel olarak, Einstein manifoldların bir çarpımı olarak ifade edilebilmelerine rağmen, yarı-Riemann uzaylarda bu geçerli değildir. Ricci tensörü paralel olan yarı-Riemann uzayların sınıflandırılması ise, lineer cebir ve holonomi yardımıyla, Boubel ve Bergery tarafından yapıldı (Boubel and Bergery, 2001). Einstein hiperyüzeylerinin uzay formlarında sınıflandırılması konusu (Fialkow, 1938) ve (Magid, 1982) çalışmalarında ele alındı. Mirzoyan ise Öklidiyen uzayda paralel Ricci tensöre sahip altmanifoldları inceledi (Mirzoyan, 1993). Ayrıca Einstein uzayları, enerji-momentum tensörleri kovaryant sabit olan uzaylardır. Fakat böylesi uzayların Ricci tensörlerinin paralel oldukları biliniyor (Chaki and Ray, 1996).

Riemann Ricci yarı-simetrik (ya da dış Ricci yarı-paralel) uzaylar, Ricci tensörünün yarı-paralelliği ile karakterize edilirler. Bu uzaylar simetrik, yarı-simetrik ve Einstein uzayların doğal genellemesidirler ve birçok araştırmacı tarafından çalışılmışlar ve hala çalışmalar sürmektedir. Ricci yarı-simetrik uzaylar ve hiperyüzeyler üzerine aynı adlı ilk çalışmalara 1970 yıllarında rastlanır (Tanno, 1969), (Sekigawa and Takagi, 1971), (Sekigawa, 1972), (Sekigawa, 1973). Ricci yarı-paralel uzayların incelemesi ve genel sınıflandırması Mirzoyan tarafından çalışılmıştır (Mirzoyan, 1991 a), (Mirzoyan, 1992). 1991 yılında yine aynı yazar tarafından, Riemann uzay formlarındaki Ricci yarı-simetrik altmanifoldların sınıflandırılması yapılmıştır (Mirzoyan, 1991 b). Bu çalışmada Ricci yarı-simetrik altmanifoldların, yarı-simetrik, Ricci paralel ve simetrik altmanifoldlarla ilgili özel durumlarına ait değinmeler de vardır. (Mirzoyan, 2000) çalışmasında ise Mirzoyan, sabit eğrilikli uzaylarda yarı-paralel hiperyüzeylerin sınıflandırmasını tamamlamıştır. 2006 yılında yine aynı yazar (Mirzoyan, 2006) çalışmasında, üzerinde fazla inceleme bulunmadığını söylediği Ricci yarı-simetrik altmanifoldları ele alır. Yarı-Riemann uzay formlarında hiperyüzeylerin ve altmanifoldların Ricci tensörünün paralel ya da yarı-paralel olması ile ilgili çalışmalar hala sürmektedir. Genellikle yarı-simetrik ve Ricci yarı-simetrik uzaylar ve bunların arasındaki ilişkiler yönünde ilerleyen çalışmalar bulunmasına karşın, bu uzayların sınıflandırılmasına yönelik incelemeler hala devam etmektedir (Defever, et al., 1997), (Defever, et al., 1999), (Defever, 2000), (Dabrowska, et al., 2000). Konformal düz Ricci yarı-simetrik Lorentz uzayların sınıflandırılmasına dair (Erdoğan and Ikawa, 1995) ve (Honda, 2003) çalışmaları bulunmaktadır.

Lightlike hiperyüzeylerin yapıları üzerine, 4-boyutlu uzay-zamanda yapılan çalışmalar, görelilik teorisinin gelişmesinde ve yerçekimi yasasının fiziksel ve matematiksel altyapısının oluşumunda önemli rol oynamıştır. Uzay-zamanların zamana bağlı yapılarının, karadeliklerin, asimptotik düz geometrilerin ve yerçekimsel dalgaların anlaşılmasında, lightlike hiperyüzeyler üzerinde yapılan detaylı araştırmaların etkisi büyüktür.

Yarı-Riemann uzaylarda metriği dejenere olan lightlike hiperyüzeyler üzerinde çalışmak çoğu zaman zordur. Christoffel sembolleri gibi klasik nesneleri dahi tanımlamak dejenere metrikten dolayı mümkün olmayabilir. Lightlike hiperyüzeyin tanjant uzayı üzerindeki lightlike vektörün varlığı Gauss ayrışımına olanak tanımaz. Bu ve benzeri problemlerin üstesinden gelme adına günümüze kadar iki farklı yol takip edilmiştir. İlkinde, sadece dejenere metriğe bağlı kalmayıp diğer bazı değerlere dayanan bir koneksiyon yapısı tanımlanmıştır. Hiperyüzeyin tanjant düzlemi üzerinde yer almayan özel bir vektör seçimiyle koneksiyonun tek olarak bulunması sağlanmış ve ardından eğrilik tensörü ve tüm diğer geometrik yapılar bu donanıma bağlı olarak tanımlanmıştır (Kammerer, 1967), (Galstyan, 1967), (Bonnor, 1972), (Katsuno, 1980), (Katsuno, 1981). Son olarak (Gutiérrez and Olea, 2012) çalışmasında lightlike hiperyüzeylere aynı yaklaşımla bakılarak bir inceleme yapılmıştır.

Lightlike hiperyüzeyleri anlama ve üzerlerinde inceleme yapabilme adına, kullanılan diğer yöntem ise (Duggal and Bejancu, 1996) ve (Duggal and Jin, 2007) kitaplarında ele alınıp geliştirilen yöntemdir. Bu yöntemde lightlike hiperyüzeylerin tanjant uzaylarının ayrışımında normal uzayın, adına ekran dağılımı denilen, bir tümleyen uzayı kullanılıyor. Böyle bir dağılım verilmişken, hiperyüzeyin tanjant uzayı üzerinde bulunmayan bir null vektör alanının varlığı ispatlanmıştır. Böylelikle hiperyüzey üzerine indirgenmiş tanjant uzayının bir üçlü ayrışımı tanımlanmıştır. Daha sonra bu ayrışıma uygun olarak Gauss-Weingarten formülleri tanımlanmıştır. Kısaca tarif edilmeye çalışılan bu yöntemle yapılan incelemeler devam etmektedir.

Bu çalışmada lightlike hiperyüzeylerin Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve ikinci temel formu ile ilgili simetri tip koşullar ve bunların kendi aralarındaki ilişkileri incelenmektedir. Önceki paragraflarda bu tip koşulların tarihi seyri içinde Riemann ve yarı-Riemann uzaylardaki gelişimleri özetlendi. Simetri tip koşullar ve bunların ilişkileri konusunda lightlike hiperyüzeyler ve altmanifoldlar üzerinde yapılan araştırmalar oldukça azdır. Yapılan sınırlı sayıdaki bu araştırmaların bir özeti bu çalışmada bulunabilir. Görelilik teorisinde önemli bir yere sahip lightlike hiperyüzeylerde simetri tip eğrilik koşullarının varlığı, Einstein denklemleri gibi bazı hesaplamaların yapılabilmesini kolaylaştırmakta veya mümkün kılmaktadır. Örnek teşkil edecek bazı çalışmalar şu şekilde sıralanabilir: Yarı-Riemann uzay formlarında simetrik ve Ricci simetrik lightlike hiperyüzeyler (Güneş vd., 2003) çalışmasında ele alınmıştır. (Şahin, 2007) çalışmasında ise yarı-Öklidiyen ve Lorentz uzaylarda yarı-simetrik, Ricci yarı-simetrik, paralel ve yarı-paralel lightlike hiperyüzeyler incelenmiştir. Son olarak lightlike hiperyüzeylerin bahsedilen simetri tip eğrilik koşulları tanımsız uzay formlara genelleştirilmiştir (Atindogbe, et al., 2013).

Bu çalışmanın 2. bölümü Riemann ve yarı-Riemann uzaylarla ilgili genel tanım ve teoremlerden oluşmaktadır. Ayrıca katlı çarpım uzayları ve lightlike hiperyüzeyler anlatılıyor. 3. bölümde simetri tip eğrilik koşulları el alındı. Bu kapsamda Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve ikinci temel tensörün simetri tip koşulları ile ilgili güncel bilgiler sunulup yeni sonuçlar elde edildi. Son bölümde ise katlı uzay çarpımlarından Robertson-Walker uzay zamanında lightlike hiperyüzeylerin aynı simetri tip koşulları incelendi.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann ve Yarı-Riemann Manifoldlar

Riemann manifoldu her noktadaki tanjant uzayının diferensiyellenebilir bir g metriği ile donatıldığı diferensiyellenebilir bir reel manifolddur. Riemann metriği pozitif tanımlıdır. Böylelikle açı, uzunluk, alan (veya hacim), eğrilik, fonksiyonların gradyanları ve vektör alanlarının diverjansları gibi çeşitli kavramların tanıtılmasına olanak tanır. Yarı-Riemann manifoldu ise Riemann manifoldunun bir genellemesidir. Yarı-Riemann manifoldunun metriğinin pozitif tanımlı olması gerekmez. Bunun yerine daha genel bir koşul olan non-dejenere olma şartı getirilmiştir.

Tanım 2.1.1 *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M de bir g Riemann metriği her $x \in M$ noktasında aşağıdaki şartları sağlayan $(0,2)$ tipinde bir tensör alanıdır:*
1) $g_p(U,V) = g_p(V,U)$
2) $g_p(U,U) \geq 0$ *iken* $U = 0$ *dır (Nakahara, 2003).*

Burada $U, V \in T_pM$ ve $g_p = g_{|p}$ dir. Kısaca g_p bir simetrik pozitif tanımlı 2-formdur.

Tanım 2.1.2 $(0,2)$ *tipinde bir g tensör alanı, eğer*
1) $g_p(U,V) = g_p(V,U)$
2) *Her* $U \in T_pM$ *için* $g_p(U,V) = 0$ *ise* $V = 0$ *dır,*
koşullarını sağlıyorsa bir yarı-Riemann metrik olarak adlandırılır (Nakahara, 2003).

Yani yarı-Riemann geometri basitçe, Riemann geometrinin bir genellemesidir. Bu genel durumda, Cauchy-Schwartz eşitsizliği gibi, pozitif tanımlı metriklerin bazı özellikleri artık geçerli değildir.

Not 2.1.3 *Yukarıdaki (2) non-dejenere koşulu şu önemli gerçeği ifade ediyor: $X \in T_pM$ olmak üzere, $\forall Y \in T_pM$ için $g(X,Y)$ değeri biliniyorsa X tek olarak belirlenebilir. Yani, T_pM uzayının bir bazı $\{X_1,...,X_m\}$ olmak üzere, sadece $g(X,X_i)$ değerini hesaplamalıyız: $g_{ij} = g(X_i,X_j), 1 \leq i,j \leq m$ alırsak metriğin non-dejenere olması $[g_{ij}]_{1\leq i,j\leq m}$ matrisinin tersinin bulunduğu anlamına gelir. Ters matrisin katsayılarını g^{ij} ile gösterirsek ve $X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i$ yazarsak,*

$$g(X,X_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(X_i,X_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{ij}$$

buluruz. g^{ij} ile çarparak $\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} g^{ij} g(X,X_j)$ elde edilir. Buradan

$$X = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} g(X,X_j) X_i$$

bulunur (Anciaux, 2011).

g metriği simetrik olduğundan $g_{ij} = g_{ji}$ dir ve aynı zamanda $1 \leq i,j \leq m$ için $g^{ij} = g^{ji}$ olur. Ayrıca g metrik tensörü

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx_i dx_j$$

şeklinde ifade edilir.

Bir X vektörü

- eğer $g(X,X) > 0$ ya da $X = 0$ ise spacelike
- eğer $g(X,X) < 0$ ise timelike
- eğer $g(X,X) = 0$ ve $X \neq 0$ ise null (ya da lightlike)

vektör olarak isimlendirilir (Anciaux, 2011).

Sylvester teoreminden biliyoruz ki her $x \in M$ noktasında $i \neq j$ için $g(e_i,e_j) = 0$ ve $|g(e_i,e_i)| = 1$ olacak şekilde T_xM uzayının bir $\{e_1,...,e_m\}$ ortonormal bazı bulunur. Üstelik bu bazın timelike vektörlerinin sayısı p (ve dolayısıyla spacelike vektörlerin sayısı $m-p$), ne noktanın kendisine ne de baza bağlıdır. p sayısına g metriğinin indeksi, $(p,m-p)$ çiftine ise işareti adı verilir. Örneğin, eğer işaret $(0,m)$ ise metrik Riemann metriğidir; eğer p ve $m-p$ sıfırdan farklı veya eğer lightlike vektörler varsa metrik tanımsızdır denir. Minkowski uzayının işareti

$(1, m-1)$ dir. Genel olarak $(1, m-1)$ işaretli yarı-Riemann uzaya bir Lorentz uzayı denir (Anciaux, 2011).

M yarı-Riemann uzayında iki vektör alanı U ve V olsun. Her p noktasında V vektör alanının U_p yönündeki değişim oranını gösteren bir yeni vektör alanı bulmak istenirse bunu, $\mathbb{R}^m_p$ yarı-Öklidiyen uzayda bulmanın doğal bir yolu var:

Tanım 2.1.4 *$\mathbb{R}^m_p$ de doğal koordinatlar $\{x_1, ..., x_m\}$ ve TM tanjant uzayının kanonik bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ olsun. Eğer $\mathbb{R}^m_p$ de iki vektör alanı U ve $V = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ise,*

$$\nabla_U V = \sum_{i=1}^m U(v_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

vektör alanına V vektör alanının U vektör alanına göre kovaryant türevi denir (O'neill, 1983).

Bu tanımı yarı-Riemann manifoldlara genellemek için aşağıdaki genel koneksiyon tanımı yapılır.

Tanım 2.1.5 *Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı $\Gamma(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ ve $U, V, W \in \Gamma(M)$ olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M), \quad (U, V) \to \nabla_U V$$

fonksiyonuna M de bir (doğrusal ya da afin) koneksiyon adı verilir:

$$\begin{aligned} \nabla_U (V + W) &= \nabla_U V + \nabla_U W \\ \nabla_{(U+V)} W &= \nabla_U W + \nabla_V W \\ \nabla_{(fU)} V &= f \nabla_U V \\ \nabla_U (fV) &= U[f] V + f \nabla_U V \end{aligned}$$

(Nakahara, 2003).

Burada ∇_U ifadesine kovaryant türev operatörü ve $\nabla_U V$ ifadesine de V vektör alanının U vektör alanına göre kovaryant türevi denir. $(\nabla V)(U) = \nabla_U V$ ile verilen $(1, 1)$ tipinde ∇V tensör alanını tanımlayalım. f fonksiyonu için $\nabla_U f = U[f]$ ifadesi

f nin U vektör alanına göre kovaryant türevini gösterir. Bir ω 1-formun kovaryant türevi

$$(\nabla_U \omega)(V) = U[\omega(V)] - \omega(\nabla_U V)$$

biçiminde tanımlanır.

Afin koneksiyon kavramı yerel bir kavramdır. Yani, $\{x_1, ..., x_m\}$ koordinat sistemi seçilip tanjant uzayının bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ alınırsa

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

vektörleri için kovaryant türev

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{m} x_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^{m} x_i y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

bulunur. Burada $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ kovaryant türevi diferensiyellenebilir Γ_{ij}^k fonksiyonları ile ifade edilirse

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i,j=1}^{m} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

şeklinde yazılır. Görüldüğü üzere koneksiyon x_i, y_k ve $X(y_k)$ ifadelerine bağlıdır. Burada $\Gamma_{ij}^k = dx_k \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ fonksiyonlarına koneksiyonun 2. cins Christoffel sembolleri adı verilir (Carmo, 1983).

Tanım 2.1.6 *Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde her $U, V, W \in \Gamma(M)$ için*

$$\begin{aligned} [V, W] &= \nabla_V W - \nabla_W V \\ U < V, W > &= < \nabla_U V, W > + < V, \nabla_U W > \end{aligned}$$

olacak biçimde tek bir ∇ koneksiyonu vardır. ∇ ye M nin Levi-Civita koneksiyonu denir ve aşağıdaki Kozsul formülü ile karakterize edilir:

$$\begin{aligned} 2 < \nabla_V W, U > &= V < W, U > + W < U, V > - U < V, W > \\ &- < V, [W, U] > + < W, [U, V] > + < U, [V, W] > \end{aligned}$$

(O'neill, 1983).

Burada birinci eşitliği sağlayan afin koneksiyona simetrik koneksiyon ve ikinci eşitliği sağlayan koneksiyona da metrik koneksiyon adı verilir.

Bir (r,s) tipindeki T tensör alanının herhangi bir X vektör alanına göre kovaryant türevi, $w^1,...,w^r$ kovaryant vektörler ve $Y_1,..,Y_s$ kontravaryant vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned}
& (\nabla T)\left(w^1,...,w^r,Y_1,...,Y_s;X\right) \\
= & \ (\nabla_X T)\left(w^1,...,w^r,Y_1,...,Y_s\right) \\
= & \ X\left(T\left(w^1,...,w^r,Y_1,...,Y_s\right)\right) \\
& -\sum_{i=1}^{r} T\left(w^1,...,\nabla_X w^i,...,w^r,Y_1,...,Y_s\right) \\
& -\sum_{j=1}^{s} T\left(w^1,...,w^r,Y_1,...,\nabla_X Y_j,...,Y_s\right) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Bir Riemann manifoldu üzerindeki ∇ afin koneksiyonu, her $U,V,W\in\Gamma(M)$ için

$$(\nabla_U g)(V,W)=0$$

eşitliğini sağlıyorsa, yani ∇ koneksiyonuna göre paralel ise bir metrik koneksiyon adını alır (Duggal, Şahin, 2010). Kozsul formülünden yararlanarak

$$\sum_{l=1}^{m}\Gamma_{ij}^{l}g_{lk}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}$$

ve bu eşitlikten

$$\Gamma_{ij}^{l}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}g^{kl}$$

formülü elde edilir. Yarı-Öklidiyen uzay $\mathbb{R}_p^m$ de $\Gamma_{ij}^l=0$ dır (Carmo, 1983).

Bir (r,s) tipinde T tensör alanının ikinci kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 T\right)(W_1,...,W_s;U,V) &= \left(\nabla^2_{U,V}T\right)(W_1,...,W_s) \\
&= \nabla_U\left((\nabla_V T)(W_1,...,W_s)\right) \\
&\quad -\left(\nabla_{\nabla_U V}T\right)(W_1,...,W_s) \\
&\quad -(\nabla_V T)(\nabla_U W_1,...,W_s) \\
&\quad -...-(\nabla_V T)(W_1,...,\nabla_U W_s) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

$(r, s+2)$ tipinde bir tensör alanıdır. Bir f fonksiyonunun ikinci kovaryant türevi ise

$$\nabla^2_{U,V} f = \nabla_U \nabla_V f - \nabla_{\nabla_U V} f$$

şeklinde tanımlanır. Fonksiyonların ikinci kovaryant türevi U ve V ye göre simetriktir ama daha genel tensörler için aynı kural geçerli değildir (Peterson, 2006).

(M, g) yarı-Riemann manifoldunda diferensiyellenebilir bir f fonksiyonunun gradyanı

$$g(\operatorname{grad} f, X) = g(\nabla f, X) = X(f), \ \forall X \in \Gamma(TM)$$

ile tanımlanan bir vektör alanıdır. Aynı gradyan yerel koordinatlar kullanılarak

$$\operatorname{grad} f = \sum \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.2 Yarı-Riemann Altmanifoldlar

Altmanifoldlar eğrilerin yüksek boyutlu benzerleridirler. Altmanifoldlar genel olarak bir gömme fonksiyonunun görüntüsü olarak tarif edilirler. Bir $\bar{M}$ manifoldunun bir alt kümesi M olmak üzere, eğer $j : M \to \bar{M}$ doğal injeksiyonu bir immersiyon ise, M manifolduna $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu adı verilir (Brickell and Clark, 1970). M manifoldunun $\bar{g}$ metriğinin M manifolduna kısıtlanmasıyla, M manifoldunun indirgenmiş g metriği elde edilir. M altmanifoldunun tanjant ve normal uzayları TM ve $TM^{\perp}$ olmak üzere, $T\bar{M}$ tanjant uzayının M altmanifoldu üzerine indirgenmiş altuzayı

$$T\bar{M}_{|M} = TM \oplus TM^{\perp}$$

şeklinde gösterilir. $T\bar{M}_{|M}, TM, TM^{\perp}$ uzayları üzerinde tanımlı koneksiyonlar sırasıyla, $\bar{\nabla}, \nabla, \nabla^{\perp}$ olmak üzere,

$$\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$$

biçiminde tanımlanan koneksiyona, Van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu denir. Bu koneksiyona göre karma tensör alanlarının kovaryant türevleri, karşılık gelen koneksiyonun eylemleriyle tanımlanır (Postnikov, 2001).

2.3 Riemann Eğrilik Tensörü

En genel anlamıyla eğrilik, bir manifoldun düz bir uzaydan ne kadar farklılık gösterdiğinin ölçüsüdür. Bir yarı-Riemann manifoldunun eğriliğini ölçmek için, paralel taşımanın yola bağımlılıktan ne ölçüde saptığı bulunur. Bu sapmayı Riemann eğrilik tensörü ile ifade ederiz.

Tanım 2.3.1 *Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere, her $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ için*

$$\begin{aligned} R &: \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M) \\ R(X,Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $(1,3)$ tipindeki tensör alanına M nin Riemann eğrilik tensörü denir (O'neill, 1983).

Görüleceği üzere Riemann eğrilik tensörü X ve Y ye göre anti-simetriktir. Yerel koordinatlar cinsinden Riemann eğrilik tensörü

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^l_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{sj}$$

şeklinde yazılır.

Riemann eğrilik tensörünün k-yıncı kovaryant türevini $\nabla^k R$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\left(\nabla^k R\right)(X_1, X_2; X_3, X_4, ..., X_{k+2})\, W = \\ = \;& \left(\nabla_{X_{k+2}, ..., X_3} R\right)(X_1, X_2)\, W \\ = \;& \nabla_{X_{k+2}} \left\{ \left(\nabla^{k-1} R\right)(X_1, X_2; ..., X_{k+1})\, W \right\} \\ & - \left(\nabla^{k-1} R\right)(X_1, X_2; ..., X_{k+1})\, \nabla_{k+2} W \\ & - \sum_{j=1}^{k+1} \left(\nabla^{k-1} R\right)\left(X_1, ..., \nabla_{X_{k+2}} X_j, .., X_{k+1}\right) W \end{aligned} \tag{2.5}$$

olur. Bu tanımdan $k \geq 2$ için kovaryant türevin aşağıdaki değişme özelliği elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla^k R\right)(X_1, ..., X_{k+1}, X_{k+2}) - \left(\nabla^k R\right)(X_1, ..., X_{k+2}, X_{k+1}) = \\
= \; & R(X_{k+2}, X_{k+1})\left\{\left(\nabla^{k-2} R\right)(X_1, X_2; ..., X_k)\right\} \\
& - \sum_{1 \leq j \leq k} \left(\nabla^{k-2} R\right)(X_1, ..., R(X_{k+2}, X_{k+1}) X_j, .., X_k) \\
& - \left\{\left(\nabla^{k-2} R\right)(X_1, .., X_k)\right\} R(X_{k+2}, X_{k+1})
\end{aligned}$$

Örneğin $k = 2$ olduğunda bu özellik

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla^2 R\right)(X_1, X_2; X_3, X_4) - \left(\nabla^2 R\right)(X_1, X_2; X_4, X_3) = \\
= \; & R(X_4, X_3) R(X_1, X_2) - R(X_1, X_2) R(X_4, X_3) \\
& - R(R(X_4, X_3) X_1, X_2) - R(X_1, R(X_4, X_3) X_2)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

olarak bulunur (Gilkey, 2007).

Riemann eğrilik tensörüne karşılık gelen $\mathcal{R}(X, Y) : TM \to TM$ doğrusal endomorfizmi, TM tanjant uzayının X ve Y vektörleri tarafından belirlenen bir doğrusal dönüşümüdür (Kobayashi and Nomizu, 1963 a). Bu endomorfizme eğrilik operatörü veya eğrilik dönüşümü adı verilir. $\mathcal{R}(X, Y)$ operatörü, herhangi bir T tensörü üzerinde türev operatörü rolü üstlenebilir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X, Y) T &= (\nabla_X (\nabla_Y T)) - (\nabla_Y (\nabla_X T)) - \left(\nabla_{[X,Y]} T\right) \qquad (2.7) \\
&= \nabla^2_{X,Y} T - \nabla^2_{Y,X} T
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Riemann eğrilik operatörünün türev operatörü olarak kullanıldığı durumlarda, Riemann eğrilik tensörü ile aynı şekilde gösterilmeleri işlevsel açıdan bir karışıklığa yol açmadığından genel yazımda her ikisi için de aynı gösterim kullanılacaktır.

Üstelik T tensörü yerine bir f fonksiyonunu alırsak,

$$\nabla^2_{X,Y} f = \nabla^2_{Y,X} f$$

eşitliği fonksiyonlar için doğru olduğundan

$$R(X, Y) f = \nabla^2_{X,Y} f - \nabla^2_{Y,X} f = 0$$

eşitliği elde edilir. Daha genel olarak $(0,k)$ tipinde bir T tensörü için, $T(X_1,...,X_k)$ bir fonksiyon belirttiğinden,

$$\begin{aligned} (R\cdot T)(X_1,...,X_k,X,Y) &= (R(X,Y)T)(X_1,...,X_k) \\ &= -R(R(X,Y)X_1,...,X_k) \\ &\quad -R(X_1,R(X,Y)X_2,...,X_k) \\ &\quad -R(X_1,...,R(X,Y)X_4) \end{aligned} \tag{2.8}$$

ifadesi bulunur.

Önerme 2.3.2 *Riemann manifoldunun R eğriliği aşağıdaki özelliklere sahiptir:*
1) R eğrilik tensörü $\Gamma(M)\times\Gamma(M)$ de bilineerdir, yani her $f,g\in\mathcal{F}(M)$ ve $X,Y,Z\in\Gamma(M)$ için

$$\begin{aligned} R(fX+gY,Z) &= fR(X,Z)+gR(Y,Z), \\ R(X,fY+gZ) &= fR(X,Y)+gR(X,Z). \end{aligned}$$

2) $R(X,Y):\Gamma(M)\to\Gamma(M)$ eğrilik operatörü lineerdir, yani her $f\in\mathcal{F}(M)$ ve $X,Y,Z,W\in\Gamma(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z+R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

(Carmo,1993).

Metrik kullanılarak bu eğrilik tensörü $(0,4)$ tipinde bir tensör olarak da ifade edilebilir:

$$R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

Riemann eğrilik tensörünün sahip olduğu bazı özellikler aşağıdaki önermede verilmiştir:

Önerme 2.3.3 *$R(X,Y,Z,W)$ Riemann eğrilik tensörü şu özelliklere sahiptir:*
1) *R ilk iki ve son iki değişken için anti-simetriktir:*

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)=R(Y,X,W,Z)$$

2) *R ilk iki ve son iki çift arasında simetriktir:*

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$$

3) *R tensörü birinci Bianchi özdeşliği denilen bir dairesel permütasyon özelliğini sağlar:*

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$$

4) *∇R tensörü ikinci Bianchi özdeşliği denilen bir dairesel permütasyon özelliğini sağlar:*

$$(\nabla_Z R)(X,Y)W + (\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W = 0$$

(Peterson, 2006)

Yardımcı teorem 2.3.4 *Riemann eğrilik tensörünün cebirsel simetrileri kovaryant türevi için de geçerlidir:*

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y,Z)W &= -(\nabla_X R)(Z,Y)W \\ g((\nabla_X R)(Y,Z)W,U) &= -g((\nabla_X R)(Y,Z)U,W) \\ g((\nabla_X R)(Y,Z)W,U) &= g((\nabla_X R)(W,U)Y,Z) \end{aligned}$$

(Kühnel, 2006)

Riemann eğrilik tensörü oldukça karmaşıktır. Eğriliği belirleyen daha basit bir fonksiyon olarak kesitsel eğriliği görürüz.

Yardımcı teorem 2.3.5 *M manifoldunun p noktasında non-dejenere bir tanjant düzlemi Π olsun. Π düzleminin bir bazı $\{X,Y\}$ olmak üzere*

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)\,g(Y,Y) - [g(X,Y)]^2}$$

değerine Π düzleminin $K(\Pi)$ kesitsel eğriliği denir (O'neill,1983).

Bir yarı-Riemann manifoldun eğriliği sıfır ($R = 0$) ise, bu manifolda düz manifold denir. Örneğin yarı-Öklidiyen uzay $\mathbb{R}_p^m$ bir düz uzaydır. Bir yarı-Riemann manifoldun kesitsel eğriliği sabit bir sayı ise bu manifolda sabit eğrilikli manifold adı verilir.

Sonuç 2.3.6 *Bir M manifoldu c sabit eğriliğe sahip ise Riemann eğrilik tensörü*

$$R(X,Y)Z = c\{g(Z,X)Y - g(Z,Y)X\}$$

olur (O'neill, 1983).

Tanım 2.3.7 $A : TM \to TM$ *tensörü* $(1,1)$ *tipinde bir tensör olsun. Bu durumda* $\{E_1, ..., E_m\}$, TM *tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere,* A *tensörünün kontraksiyonu veya izi*

$$CA = trA = \sum_{i=1}^{m} g(AE_i, E_i)$$

ile tanımlanır. A, $(1,s)$ *tipinde bir tensör olsun.* $i \in \{1, ..., s\}$ *ve* $i \neq j$ *olmak üzere her sabit* X_j *vektörü için* $A(X_1, ..., X_{i-1}, -, X_{i+1}, ..., X_s)$ *tensörü, kontraksiyonu veya izi*

$$\begin{aligned} & C_iA(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_s) \\ = & \sum_{j=1}^{m} g(A(X_1, ..., X_{i-1}, E_j, X_{i+1}, ..., X_s), E_j) \end{aligned}$$

olan $(1,1)$ *tipinde bir tensördür. Bu durumda* C_iA, $(0, s-1)$ *tipinde bir tensördür (Kühnel, 2006).*

Bir tensörün izi ile kovaryant türevi arasındaki değişimlilik özelliği aşağıda belirtilmiştir:

Yardımcı teorem 2.3.8 *Her* $(1,s)$ *tipindeki* A *tensörü için,*

$$C_i(\nabla_X A) = \nabla_X(C_iA)$$

olur (Kühnel, 2006).

Riemann eğrilik tensörünün izi alınarak tanımlanan $(0,2)$ tipinde diğer bir tensör,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= C_2R(X,Y) \\ &= tr(Z \to R(X,Z)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(R(X,E_i)Y, E_i) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Ricci eğrilik tensörüdür. Burada $\{E_i\}$, T_pM tanjant uzayının ortonormal bir bazı ve $\varepsilon_i = g(E_i, E_i)$ değeridir. Ricci tensörü simetrik bilineer bir formdur. Aynı zamanda $(1,1)$ tipinde bir tensör olarak da tanımlanabilir:

$$Ric(X) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i R(X, E_i) E_i$$

(Peterson, 2006).

Ricci tensörünün izine skalar eğrilik denir:

$$r = tr(Ric) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i R(E_i, E_i).$$

2.4 Yarı-Riemann Uzay Formları

Tam, irtibatlı ve sabit eğrilikli yarı-Riemann manifoldlara uzay formları adı verilir. Basit irtibatlı uzay formları boyut, indeks ve eğriliklerinin eşit olmaları durumunda izometriktirler. En önemli ve basit uzay formları hiperquadriklerdir.

Yarı-Riemann metriği

$$g(.,.) = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{i=p+1}^{m+1} dx_i^2$$

ile donatılmış yarı-Öklidiyen $\mathbb{R}_p^{m+1}$ uzayında, $c \in \mathbb{R}$ için

$$Q_{p,c}^m = \left\{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x|^2 = c\right\}$$

şeklinde tanımlanmış hiperyüzeylere hiperkuadrikler adı verilir.

Teorem 2.4.1 *$Q_{p,c}^m$ hiperkuadratiği $\mathbb{R}^{m+1}$uzayının total umbilik bir hiperyüzeyidir ve $N(x) = -\kappa x$ birim normal vektör alanına göre $\kappa = |c|^{-1/2}$ sabit ortalama eğriliğe sahiptir. Tersine, eğer $\mathbb{R}_p^{m+1}$ uzayının irtibatlı, total umbilik bir hiperyüzeyi S ise, S nin ortalama eğriliği κ sabittir ve bir hiperdüzlemin açık bir altkümesi (κ sıfırsa) veya $|c| = 1/\kappa^2$ değerli bir hiperquadriktir (Anciaux, 2011)*

Önerme 2.4.2 *$Q_{p,c}^m$ de indirgenmiş metriğin R eğrilik tensörü*

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{c}\left(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\right)$$

formülü ile verilir. Ayrıca $Q^m_{p,c}$ uzayı $1/c$ sabit kesitsel eğriliğe sahiptir (Anciaux, 2011).

Şimdi bazı özel hiperkuadrik örnekleri verelim:

i. $S^m = Q^m_{0,1}$ klasik birim küredir; tek kompakt uzay formdur ve indirgenmiş metrik pozitif tanımlıdır.

ii. $S^m_p = Q^m_{p,1}$ birim pseudoküre olarak adlandırılır. Sabit eğriliği 1 olan tam yarı-Riemann manifoldudur.

iii. $H^m_{p-1} = Q^m_{p,c}$ birim pseudohiperbolik uzaydır ve -1 sabit eğriliğe sabit tam yarı-Riemann manifoldudur.

iv. $dS^m = Q^m_{1,1}$ de Sitter uzayı denir ve indirgenmiş metriği Lorentz metriğidir.

v. $AdS^m = Q^m_{m-1,1}$ anti de Sitter uzayı denir ve indirgenmiş metriği Lorentz metriğidir.

vi. $\Lambda^m_{p-1} = Q^m_{p,0}$ ışık konisidir ve yarı-Riemann manifoldu değildir (Anciaux, 2011; O'neill, 1983).

2.5 Katlı Çarpım Uzayları

B ve F yarı-Riemann manifoldlar ve f fonksiyonu B de diferensiyellenebilir pozitif bir fonksiyon olsun. $M = B \times_f F$ katlı çarpım manifoldu,

$$g = \pi^* (g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^* (g_F)$$

metrik tensörü ile donatılmış $B \times F$ çarpım manifoldudur. Diğer bir ifadeyle eğer X, $B \times F$ manifolduna (p,q) noktasında teğet ise π ve σ dönüşümleri $B \times F$ manifoldunun sırasıyla B ve F uzayları üzerlerine doğal izdüşümleri olmak üzere

$$g(X,X) = g(d\pi(X), d\pi(X)) + f^2(p)\, g_F(d\sigma(X), d\sigma(X))$$

olur. Bu şekilde tanımlı g tensörü metrik tensördür. $f = 1$ olması durumunda $B \times_f F$ uzayı bir yarı-Riemann çarpım uzayı olur. Burada B ye $M = B \times_f F$

manifoldunun tabanı ve F ye de fiberi adı verilir. M manifoldunun geometrisi f katlı fonksiyonu ile B ve F uzaylarının geometrileri cinsinden tanımlanabilir. Her $(p,q) \in M$ için $p \times F = \pi^{-1}(p)$ ve $B \times q = \sigma^{-1}(q)$ uzayları M manifoldunun yarı-Riemann altmanifoldlarıdır ve (p,q) noktasında birbirlerine diktirler. B uzayındaki vektör alanlarının M manifoldu üzerinde yer alan liftlerine yatay liftler denir ve $L(B)$ ile gösterilir. Benzer şekilde F uzaylarına teğet vektör alanlarının M üzerindeki liftlerinin kümesi de $L(F)$ ile ifade edilir ve dikey liftler adı verilir. M manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu D olmak üzere B ve F uzayları üzerlerindeki koneksiyonlarla ilişkisi aşağıdaki yardımcı teoremle verilir:

Yardımcı teorem 2.5.1 *$M = B \times_f F$ manifoldunda, $U, V \in L(B)$ ve $X, Y \in L(F)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

1. *$D_U V \in L(B)$ vektör alanı B uzayındaki $D_U V$ vektör alanının liftidir.*
2. *$D_U X = D_X U = (\ln f)' X$.*
3. *$nor D_X Y = h(X,Y) = -\frac{g(X,Y)}{f} \operatorname{grad} f$.*
4. *$tan D_X Y \in L(F)$ vektör alanı F deki $\nabla_X Y$ vektör alanının liftidir (∇, F uzayının Levi-Civita koneksiyonudur) (O'neill, 1983).*

$M = B \times_f F$ katlı çarpım manifoldunun eğrilik tensörü de yine f fonksiyonu ve B ile F uzaylarının eğrilik tensörleri cinsinden aşağıdaki yardımcı teoremle verilir:

Yardımcı teorem 2.5.2 *$M = B \times_f F$ manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R, B ve F uzaylarının Riemann eğrilik tensörlerinin M deki liftleri sırasıyla R^B ve R^F olsun. $U, V, W \in L(B)$ ve $X, Y, Z \in L(F)$ olmak üzere R tensörü için aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

1. *$R(U,V)W \in L(B)$, B deki $R^B(U,V)W$ vektör alanının liftidir.*
2. *$R(X,U)V = \left(\frac{H^f(U,V)}{f}\right) X$ (H^f, f fonksiyonunun Hessianı'dır).*
3. *$R(U,V)X = R(X,Y)U = 0$.*

4. $R(U,X)Y = \frac{g(X,Y)}{f} D_U(\operatorname{grad} f)$.

5. $R(X,Y)Z = R^F(X,Y)Z - \frac{g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)}{f^2} \{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}$
(O'neill, 1983).

$M = B \times_f F$ katlı çarpım manifoldunun Ricci eğriliği, B ve F uzaylarının Ricci eğriliklerinin liftleri olan Ric^B ve Ric^F cinsinden aşağıdaki sonuçla verilir:

Sonuç 2.5.3 *$M = B \times_f F$ katlı çarpım manifoldunda $d = \dim F > 1$ olmak üzere, $U, V \in L(B)$ ve $X, Y \in L(F)$ olsun. O halde*

1. $Ric(U,V) = Ric^B(U,V) - \frac{d}{f} H^f(U,V)$

2. $Ric(U,X) = 0$

3. $Ric(X,Y) = Ric^F(X,Y) - g(X,Y)\left\{\frac{\Delta f}{f} + (d-1)\frac{g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)}{f^2}\right\}$

ifadeleri sağlanır ve Δ, B manifoldunda Laplasyen operatörüdür (O'neill, 1983).

2.6 Lightlike Hiperyüzeyler

Yarı-Riemann uzaylarda 1 ko-boyutlu altmanifoldlara yarı-Riemann hiperyüzeyler adı verilir. Esas uzayın metriğinin hiperyüzey üzerine indirgenmiş metriğinin dejenere olması durumunda lightlike hiperyüzey oluşur.

$(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann uzayında g simetrik tensör alanı dejenere olan bir hiperyüzey (M, g) olsun. Yani, M hiperyüzeyinde öyle bir $\xi \neq 0$ vektör alanı vardır ki

$$g(\xi, X) = 0, \ \forall X \in \Gamma(TM)$$

şartını sağlar.

$$Rad T_x M = \{\xi \in T_x M : g_x(\xi, X) = 0, \forall X \in T_x M\}$$

ile tanımlı altuzaya $x \in M$ noktasındaki $T_x M$ tanjant uzayının radikali ya da null uzayı adı verilir. Her null vektör kendisine dik olduğundan

$$Rad T_x M = T_x M \cap T_x M^{\perp}$$

olur. Bir lightlike hiperyüzey için $RadT_xM$ uzayı bir boyutludur ve $RadT_xM = T_xM^{\perp}$ dir. $RadTM$ dağılımına M hiperyüzeyinin radikal (null) dağılımı denir. Tanjant uzayının

$$TM = RadTM \perp S(TM)$$

ayrışımında $S(TM)$ vektör demetine M hiperyüzeyinin bir ekran dağılımı adı verilir. Bu dağılım dejenere olmadığından ve M hipeyüzeyinde her zaman böyle bir ekran dağılımı bulunacağından şu ayrışım yazılabilir:

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}, \quad S(TM) \cap S(TM)^{\perp} \neq \{0\}.$$

$S(TM)^{\perp}$ demeti $S(TM)$ demetinin dik komplemanı olup non-dejeneredir. Lightlike hiperyüzeylerde tanjant ve normal uzayları ayrık olmadığından bu hiperyüzeylere özel olarak ortonormal bazlar yerine quasi-ortonormal bazlar tanımlanmıştır. Lightlike hiperyüzeyin quasi-ortonormal bazı aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 2.6.1 $(M, g, S(TM))$, *yarı-Riemann manifoldu* $(\bar{M}, \bar{g})$ *de bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda* M *hiperyüzeyinde rankı 1 olan tek bir* $tr(TM)$ *vektör demeti vardır öyle ki* $U \subset M$ *koordinat komşuluğunda* $TM^{\perp}$ *nin sıfırdan farklı herhangi bir* ξ *vektör alanı için* U *da* $tr(TM)$ *demetinin*

$$\bar{g}(N, \xi) = 1, \quad \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, W) = 0, \quad \forall W \in \Gamma(S(TM)|_U) \tag{2.9}$$

eşitliğini sağlayan tek bir N *vektör alanı bulunur (Duggal and Bejancu, 1996).*

Burada $tr(TM)$, bir lightlike vektör demetidir ve her $u \in M$ için $tr(TM)|_u \cap T_uM = \{0\}$ dır. Böylece aşağıdaki ayrışım yazılabilir:

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp (RadTM \oplus tr(TM)) = TM \oplus tr(TM). \tag{2.10}$$

Her $S(TM)$ ekran dağılımı için $T\bar{M}|_M$ de TM tanjant uzayını tümleyen tek bir $tr(TM)$ vektör demeti vardır. Bu nedenle $tr(TM)$ demetine M hiperyüzeyinin $S(TM)$ ekran dağılımına göre lightlike transversal vektör demeti denir.

Yarı-Riemann manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ de, bir $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyin Gauss-Weingarten formülleri her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X N &= -A_N X + \nabla^t_X N \end{aligned} \tag{2.11}$$

olur. Burada ∇ koneksiyonu M hiperyüzeyinde torsiyonsuz ve indirgenmiş lineer bir koneksiyondur. h simetrik bilineer formuna M hiperyüzeyinin ikinci temel formu ve A_N lineer operatörüne M hiperyüzeyinin şekil operatörü adı verilir. Bu eşitliklerden

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X Y, \xi\right) = \bar{g}(h(X, Y), \xi), \\ \tau(X) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X N, \xi\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

formlarını tanımlayabiliriz. Diğer bir ifadeyle

$$h(X, Y) = B(X, Y) N \tag{2.13}$$

$$\nabla^t_X N = \tau(X) N \tag{2.14}$$

yazılabilir. Burada B formuna M hiperyüzeyinin yerel ikinci temel formu adı verilir. $\bar{M}$ uzayında $\bar{\nabla}$ metrik koneksiyon olduğundan

$$B(X, \xi) = 0, \qquad \forall X \in \Gamma(TM) \tag{2.15}$$

olur. M hiperyüzeyindeki ∇ koneksiyonu metrik koneksiyon olmayıp her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X\ g)(Y, Z) = \bar{g}(h(X, Y), Z) + \bar{g}(h(X, Z), Y) \tag{2.16}$$

veya diğer bir ifadeyle

$$(\nabla_X\ g)(Y, Z) = B(X, Y)\, \bar{g}(N, Z) + B(X, Z)\, \bar{g}(N, Y) \tag{2.17}$$

eşitliğini sağlar.

Tanjant uzayının ayrışımında $\Gamma(S(TM))$ üzerine $\Gamma(TM)$ uzayının izdüşüm morfizmi P olsun. $S(TM)$ ekran dağılımı için yerel Gauss-Weingarten denklemleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + h^*(X, PY), \\ \nabla_X U &= -A^*_U X + \nabla^{*t}_X U, \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM),\ U \in \Gamma\left(TM^\perp\right). \end{aligned}$$

Burada ∇ ve ∇^{*t} koneksiyonları sırasıyla $\Gamma(S(TM))$ ve $\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ üzerinde lineer koneksiyonlardır. h^{*} bilineer formuna ekran dağılımının ikinci temel formu ve A_{U}^{*} lineer operatörüne de ekran dağılımının şekil operatörü denir. Bu durumda ekran dağılımının yerel ikinci temel formu aşğıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} C(X, PY) &= \bar{g}(\nabla_{X} PY, N) = \bar{g}(h^{*}(X, PY), N), \\ \varepsilon(X) &= \bar{g}\left(\nabla_{X}^{*t} U, N\right), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \end{aligned}$$

Burada $\varepsilon(X) = -\tau(X)$ dir. Sonuçta yerel Gauss-Weingarten denklemleri her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_{X} PY = \nabla_{X}^{*} PY + C(X, PY)\xi, \tag{2.18}$$

$$\nabla_{X} \xi = -A_{\xi}^{*} X - \tau(X)\xi \tag{2.19}$$

şeklinde verilir. Her iki ikinci temel form, şekil operatörleri ile aşağıdaki denklemlerle ilişkilendirilir:

$$B(X, Y) = \bar{g}(h(X, Y), \xi) = g\left(A_{\xi}^{*} X, Y\right), \ \bar{g}\left(A_{\xi}^{*} X, N\right) = 0, \tag{2.20}$$

$$C(X, PY) = \bar{g}(h^{*}(X, PY), N) = g(A_{N} X, PY), \ \bar{g}(A_{N} Y, N) = 0. \tag{2.21}$$

Ekran dağılımı üzerindeki ∇^{*} koneksiyonu metrik koneksiyondur. A_{ξ}^{*} şekil operatörü, $S(TM)$-değerli ve self-adjoint olup lightlike hiperyüzey için

$$A_{\xi}^{*} \xi = 0 \tag{2.22}$$

eşitliği vardır. Yani ξ, A_{ξ}^{*} için sıfır karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör alanıdır. Böylece

$$\bar{\nabla}_{\xi} \xi = \nabla_{\xi} \xi = -\tau(\xi)\xi \tag{2.23}$$

eşitliği bulunur (Duggal and Bejancu, 1996).

M lightlike hiperyüzeyinin $h(X, Y)$ ikinci temel formunun ve $A_{N} X$ şekil operatörünün kovaryant türevleri her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki formüllerle verilebilir:

$$(\nabla_{X} h)(Y, Z) = \nabla_{X}^{t} h(Y, Z) - h(\nabla_{X} Y, Z) - h(Y, \nabla_{X} Z), \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{X}(A_{N} Y) &= (\nabla_{X} A_{N}) Y + A_{N}(\nabla_{X} Y) \\ &= (\nabla_{X} A)_{N} Y + A_{N}(\nabla_{X} Y) + A_{\nabla_{X}^{t} N} Y \end{aligned} \tag{2.25}$$

$\bar{M}, M$ ve $S(TM)$ uzaylarının $\bar{\nabla}$,∇ ve ∇^* koneksiyonlarının eğrilik tensörlerini sırasıyla $\bar{R}$, R ve R^* ile gösterirsek M ve $S(TM)$ uzaylarının Gauss-Codazzi denklemleri her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \bar{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z, PW\right) &= g\left(R(X,Y)Z, PW\right) + B(X,Z)\,C(Y,PW) \\ &\quad -B(Y,Z)\,C(X,PW), \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z, \xi\right) &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &\quad +B(Y,Z)\,\tau(X) - B(X,Z)\,\tau(Y), \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\bar{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z, N\right) = g\left(R(X,Y)Z, N\right), \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} g\left(R(X,Y)PZ, PW\right) &= g\left(R^*(X,Y)PZ, PW\right) + C(X,PZ)\,B(Y,PW) \\ &\quad -C(Y,PZ)\,B(X,PW), \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} g\left(R(X,Y)PZ, N\right) &= (\nabla_X C)(Y,PZ) - (\nabla_Y C)(X,PZ) \\ &\quad +C(X,PZ)\,\tau(Y) - C(Y,PZ)\,\tau(X). \end{aligned} \tag{2.30}$$

olur. Burada B ve C formlarının kovaryant türevleri

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = X(B(Y,Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \tag{2.31}$$

$$(\nabla_X C)(Y,PZ) = X(C(Y,PZ)) - C(\nabla_X Y, PZ) - C(Y, \nabla^*_X PZ) \tag{2.32}$$

ifadeleriyle bulunur.

$(M, g, S(TM))$, yarı-Riemann manifoldu $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ de bir lightlike hiperyüzey olsun. M lightlike hiperyüzeyi ve $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörleri sırasıyla R ve $\bar{R}$ olmak üzere her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için Gauss eğrilik denklemi

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned} \tag{2.33}$$

ile verilir. Esas uzay c sabit eğrilikli bir yarı-Riemann uzay formu olduğunda ise Gauss denklemi

$$R(X,Y)Z = c\left\{\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y\right\} - A_{h(X,Z)}Y + A_{h(Y,Z)}X \tag{2.34}$$

ve Codazzi denklemi

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) \tag{2.35}$$

olur. Yarı-Öklidiyen uzayda bir lightlike hiperyüzeyin Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = B(Y,Z)A_NX - B(X,Z)A_NY \tag{2.36}$$

şeklinde ifade edilir (Şahin,2007).

$(\bar{M},\bar{g})$ yarı-Riemann uzayının Ricci tensörü her $X,Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\overline{Ric}(X,Y) = trace\left\{Z \to \bar{R}(X,Z)Y\right\} \tag{2.37}$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $(M,g,S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin indirgenmiş $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{a=1}^{m} \varepsilon_a g(R(X,E_a)Y,E_a) + \bar{g}(R(X,\xi)Y,N)$$

ile verilir. Burada $\varepsilon_a = g(E_a,E_a)$ dir ve $\{\xi;E_a\}$, $(M,g,S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi üzerinde indirgenmiş bir quasi-ortonormal çatı olup $Rad(TM) = span\{\xi\}$ ve $S(TM) = span\{E_a\}$ tanımlıdır. Genel olarak Ricci tensörü simetrik değildir. Bu yüzden $R^{(0,2)}$ tensörü simetrik olduğunda indirgenmiş Ricci tensörü olarak adlandırılacak ve Ric ile gösterilecektir. Ricci tensörünün simetrik olması ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.6.2 $(\bar{M},\bar{g})$ *yarı-Riemann manifoldunda bir lightlike hiperyüzey* $(M,g,S(TM))$ *olsun. Bu durumda* M *lightlike hiperyüzeyine indirgenmiş* ∇ *koneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart* $S(TM)$ *ekran dağılımı ile indirgenmiş her* τ *1-formunun kapalı olması, yani* $d\tau = 0$ *olmasıdır (Duggal and Bejancu, 1996).*

$(m+2)-$boyutlu bir yarı-Riemann uzay formu $(\bar{M}(c),\bar{g})$ de bir lightlike hiperyüzey $(M,g,S(TM))$ olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için lightlike hiperyüzeyin Ricci eğriliği

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) &= mcg(X,Y) + \sum_{a=1}^{m} \varepsilon_a C(E_a,E_a)B(X,Y) \\ &\quad - \sum_{a=1}^{m} \varepsilon_a C(E_a,Y)B(X,E_a) \end{aligned} \tag{2.38}$$

ile tanımlıdır (Güneş vd., 2003). Aynı zamanda esas uzay Lorentz uzay formu olduğunda ise lightlike hiperyüzeyin Ricci eğriliği için

$$R^{(0,2)}(X,Y) = mcg(X,Y) + B(X,Y)\, trA_N - B(Y, A_N X) \tag{2.39}$$

ifadesi elde edilir (Jin, 2010).

Tanım 2.6.3 $(M, g, S(TM))$, *yarı-Riemann manifoldu* $(\bar{M}, \bar{g})$ *de bir lightlike hiperyüzey olsun.* M *hiperyüzeyinin her* U *koordinat komşuluğunda bir* ρ *diferensiyellenebilir fonksiyonu bulunmak üzere*

$$B(X,Y) = \rho g(X,Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM|_U) \tag{2.40}$$

eşitliği sağlanıyorsa M *hiperyüzeyine total umbiliktir denir.*

Eşdeğer olarak M nin total umbilik olması için gerek ve yeter şart

$$A^*_\xi(PX) = \rho PX, \quad \forall X \in \Gamma\left(TM_{|U}\right)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Aynı şekilde ekran dağılımı için aşağıdaki tanım yapılabilir:

Tanım 2.6.4 $(M, g, S(TM))$, *yarı-Riemann manifoldu* $(\bar{M}, \bar{g})$ *de bir lightlike hiperyüzey olsun.* M *hiperyüzeyinin her* U *koordinat komşuluğunda bir* λ *diferensiyellenebilir fonksiyonu bulunmak üzere*

$$C(X, PY) = \lambda g(X, PY), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM|_U) \tag{2.41}$$

eşitliği sağlanıyorsa $S(TM)$ *ekran dağılımına total umbiliktir denir.*

Yine eşdeğer olarak $S(TM)$ ekran dağılımının total umbilik olması için gerek ve yeter şart her $U \subset M$ komşuluğunda λ diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$A_N X = \lambda PX$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Böyle bir durumda C, $\Gamma(S(TM)|_U)$ üzerinde simetriktir ve böylece $S(TM)$ integrallenebilirdir. $\lambda = 0$ olması durumunda ise $S(TM)$ total geodeziktir denir.

Şimdi M lightlike hiperyüzeyi üzerinde bir global null normal vektör alanı tarafından tanımlanan bir global yapı ve bu vektör ile belirlenen bir seçimli dağılım hakkındaki bazı tanımlar ve sonuçlar verilecektir. Bunlar daha sonra Ricci simetrik uzaylar konusunda kullanılacak.

Tanım 2.6.5 *$(\bar{M}, \bar{g})$ Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. ξ vektör alanının M de yok olmayan bir global null normal (GNN) vektör alanı olması gerek ve yeter şartıyla bir $(S(TM), \xi)$ çiftine M de bir global yapı adı verilir (Duggal and Gimenez, 2005).*

Tanım 2.6.6 *$(\bar{M}, \bar{g})$ Lorentz manifoldunda bir GNN ξ vektör alanına sahip bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. TM tanjant uzayının bir $D(TM)$ Riemann dağılımına, $D(TM)$ nin her W vektör alanı için $\bar{\nabla}_W \xi \in \Gamma(D(TM))$ olması şartıyla, $\xi-$seçimli adı verilir. Özel olarak, eğer bir $S(TM)$ ekran dağılımı $\xi-$seçimli ise $(S(TM), \xi)$ çiftine M de bir seçimli dağılım denir (Duggal and Gimenez, 2005).*

Önerme 2.6.7 *$(\bar{M}, \bar{g})$ Lorentz manifoldunda bir geodezik GNN ξ vektör alanına sahip bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. O halde, $S(TM)$ ekran dağılımının $\xi-$seçimli olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen τ 1-formunun yok olmasıdır. Bu durumda, indirgenmiş ∇ koneksiyonunun Ricci tensörü simetriktir (Duggal and Gimenez, 2005).*

İspat: Her $X \in \Gamma(TM)$ için, (2.12), (2.19), (2.22) eşitlikleri ve $X = PX + \bar{g}(X, N)\xi$ ayrışımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tau(X) &= -\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X \xi, N\right) = -\bar{g}(\nabla_X \xi, N) \\
&= -\bar{g}\left(\nabla_{PX+\bar{g}(X,N)\xi} \xi, N\right) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{PX} \xi, N) - \bar{g}(X, N)\, \bar{g}(\nabla_\xi \xi, N) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{PX} \xi, N) + \tau(\xi)\, \bar{g}(X, N)
\end{aligned}$$

bulunur. $\tau = 0$ olması durumunda $\bar{g}(\nabla_{PX} \xi, N) = 0$ ve (2.23) yardımıyla $\bar{\nabla}_X \xi \in \Gamma(S(TM))$ olması gerektiği görülür. Yani $S(TM)$ ekran dağılımı $\xi-$seçimlidir. Eğer $\bar{\nabla}_X \xi \in \Gamma(S(TM))$ alınırsa yine (2.19) ve (2.23) eşitliklerinden $\tau(X) = 0$

elde edilir. (Duggal and Bejancu, 1996) kitabında (Teorem 3.2 sf 99)'e göre $d\tau = 0$ olması Ricci tensörünün simetrik olmasını gerektirir. $\square$

Tanım 2.6.8 *$(\bar{M}, \bar{g})$ Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. O halde, her yerel $\xi \in \Gamma\left(Rad\left(TM\right)|_{U}\right)$ vektör alanı ile irtibatlı tüm esas eğriliklerin her yerde sıfırdan farklı olması şartıyla M hiperyüzeyine total non-geodezik hiperyüzey adı verilir (Duggal and Gimenez, 2005).*

Sonuç 2.6.9 *$(\bar{M}, \bar{g})$ Lorentz manifoldunda bir geodezik GNN ξ vektör alanına sahip bir total non-geodezik lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. O halde, tek bir $\xi-$seçimli ekran dağılımı vardır (Duggal and Gimenez, 2005).*

Esasen bir geodezik GNN ξ vektör alanına sahip her sabit eğrilikli $\bar{M}$ Lorentz manifoldunda her total non-geodezik lightlike hiperyüzey, $A_N\xi = 0$ olacak biçimde tek bir $\xi-$seçimli yapıya sahiptir (Duggal and Gimenez, 2005).

Tanım 2.6.10 *Bir yarı-Riemann manifoldunun $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi, M nin bir U komşuluğunda sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir fonksiyon φ olmak üzere, şekil operatörleri A_N ve A^*_ξ*

$$A_N = \varphi A^*_\xi \tag{2.42}$$

eşitliği ile bağıntılı ise ekran yerel konformaldir denir (Atindogbe and Duggal, 2004).

Yukarıdaki tanımda φ fonksiyonu sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon alınırsa M lightlike hiperyüzeyine ekran homotetik hiperyüzey adı verilir.

Lightlike hiperyüzeyin $S(TM)$ ekran dağılımının ortonormal bazı $\{E_a : 1 \leq a \leq m\}$ ve $A^*_\xi(E_a) = k_a E_a$ olsun. Bu durumda lightlike hiperyüzeyin lightlike ortalama eğriliği $H_\xi : M \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$H_\xi = -\sum_{a=1}^{m} B(E_a, E_a) = -\sum_{a=1}^{m} g\left(A^*_\xi(E_a), E_a\right) = -trA^*_\xi. \tag{2.43}$$

Lightlike ortalama eğrilik H_ξ ekran dağılımı ve ortonormal baza bağlı değildir ve $H_\xi = -\sum_{a=1}^{m} k_a$ dir (Duggal and Giménez, 2005).

Tanım 2.6.11 *Bir T operatörü, $m \geq 1$ için $T^m = 0$ veya tüm karakteristik değerlerinin sıfır olması durumunda nilpotent operatördür. $T \neq 0$ operatörüne, eğer $r \geq 2$ için $T^r = 0$ ama $T^{r-1} \neq 0$ ise r-yinci mertebeden nilpotenttir denir (Vazquez, et al., 2009).*

Teorem 2.6.12 *n. mertebeden bir matris A olsun. A matrisinin nilpotent olması için gerek ve yeter şart her $p = 1, ..., n$ için $tr\left(A^p\right) = 0$ olmasıdır (Prasolov, 1994).*

Teorem 2.6.13 *$\bar{M}$ uzay zamanında her $U \subset M$ de, her $\xi \in Rad\left(TM\right)$ için $Ric\left(\xi, \xi\right) \geq 0$ koşulunu sağlayan bir lightlike hiperyüzey M olsun. Bu durumda, M hiperyüzeyinin total geodezik olması için gerek ve yeter şart her $\xi \in Rad\left(TM_{|U}\right)$ için $H_\xi = 0$, yani M nin minimal olmasıdır (Küpeli, 1987).*

Eğer A^*_ξ şekil operatörü 2-nilpotent ise Teorem 2.6.12 den $trA^*_\xi = 0$ olur. Yani, (2.43) eşitliğinden H_ξ lightlike ortalama eğrilik sıfır bulunur. Dolayısıyla A^*_ξ şekil operatörü nilpotent olan bir lightlike hiperyüzey minimaldir.

BÖLÜM 3

SEMI-RIEMANN UZAY FORMLARDA LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİN SİMETRİ TİP EĞRİLİK KOŞULLARI

3.1 Yerel Simetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bir diferensiyellenebilir M manifoldunun bir afin koneksiyonu ∇ olsun. M manifoldunun bir noktası p ve T_pM uzayında 0 orijin noktasına göre simetrik, 0 merkezli bir normal komşuluk N_0 olsun. $N_p = Exp_p N_0$ ile gösterilsin. Her $q \in N_p$ için, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ olacak biçimde p ve q noktalarından geçen N_p içinde bir $t \to \gamma(t)$ geodeziğini düşünelim. $q' = \gamma(-1)$ olsun. Bu durumda N_p de örten $q \to q'$ dönüşümüne p ye göre bir geodezik simetri adı verilir ve s_p ile gösterilir. p noktasındaki $\{x_1, ..., x_m\}$ normal koordinatlar cinsinden, s_p dönüşümünün ifadesi $(x_1, ..., x_m) \to (-x_1, ..., -x_m)$ şeklindedir. Özellikle s_p dönüşümü N_p nin örten bir difeomorfizmidir ve I birim dönüşüm olmak üzere $(ds_p)_p = -I$ olur.

Tanım 3.1.1 *Bir M Riemann manifoldunda $p \in M$ olsun. Eğer her p noktasında geodezik simetrinin bir izometri olduğu bir normal komşuluk varsa, M manifolduna yerel simetriktir denir (Helgason, 1962).*

Teorem 3.1.2 *Bir Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R ve Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere, M manifoldunun yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla R = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır (Cartan, 1951).

Aynı tanım ve teorem yarı-Riemann uzaylar ve altmanifoldları için de geçerlidir (Kath, 2010). Bir yerel simetrik yarı-Riemann manifoldunda lightlike hiperyüzeylerin yerel simetrileri için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.3 *$\bar{M}$ bir yerel simetrik yarı-Riemann manifoldu ve $A_N\xi$ bir null vektör alanı olmayacak şekilde $\bar{M}$ manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi M olsun. Bu durumda M lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır (Güneş vd., 2003).*

Her uzay formu sabit eğrilikli olduğundan $\nabla R = 0$ eşitliğini sağlar. Yani yerel simetrik uzaydır. Dolayısıyla uzay formlarında total geodezik olan her lightlike hiperyüzey yerel simetrik olacaktır. D.H.Jin (2009) çalışmasında lightlike hiperyüzeyin kendisinin total umbilik olması yerine ekran dağılımının total umbilik olması durumunu düşünerek aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır:

Teorem 3.1.4 *$\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ yarı-Riemann uzay formunda $m > 2$ için, $S(TM)$ ekran dağılımı total umbilik olacak şekilde $(m+1)-$boyutlu bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda $C = 0$ veya $B = 0$ olur. Üstelik,*

i. *$C = 0$ ise $S(TM)$ ekran dağılımı total geodezik ve $c = 0$ olur.*

ii. *$B = 0$ ise M lightlike hiperyüzeyi $\bar{M}(c)$ uzayında total geodezik daldırılmıştır ve M hiperyüzeyine indirgenmiş ∇ koneksiyonu metrik koneksiyondur.*

Teorem 3.1.5 *$\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ yarı-Riemann uzay formunda $m > 2$ için, $S(TM)$ ekran dağılımı total umbilik olacak şekilde $(m+1)-$boyutlu bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda M lightlike hiperyüzeyi indirgenmiş bir simetrik Ricci tensöre sahiptir. Üstelik, M lightlike hiperyüzeyi ve $S(TM)$ ekran dağılımının M^* lifi, c sabit eğrilikli uzaylardır (Jin, 2009).*

Bu teoremden faydalanarak, sabit eğrilikli uzaylar aynı zamanda yerel simetrik olduklarından, lightlike hiperyüzeyin ekran dağılımının total umbilik olması durumunda şu sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.1.6 *$\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ yarı-Riemann uzay formunda $m > 2$ için, $S(TM)$ ekran dağılımı total umbilik olacak şekilde $(m+1)-$boyutlu bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda M lightlike hiperyüzeyi yerel simetriktir.*

Önerme 3.1.7 *Minkowski uzayı* $\mathbb{R}_1^{m+2}$ *de ışık konisi* $\wedge_0^{m+1}$ *olsun. Bu durumda* $\wedge_0^{m+1}$ *üzerinde öz total umbilik olan bir ekran dağılımı bulunur (Duggal and Bejancu, 1996).*

Yukarıda verilen sonucun bir uygulaması olarak, yine aynı eserde geçen ispattan yararlanarak Minkowski uzayında tanımlı ışık konisinin yerel simetrik olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

Örnek 3.1.8 $\left(\mathbb{R}_1^{m+2}, \bar{g}\right)$ *uzayı,*

$$\bar{g}(x,y) = -x^0 y^0 + \sum_{a=1}^{m+1} x^a y^a$$

yarı-Öklidiyen metriği ile donatılmış bir Minkowski uzayı olsun. $\mathbb{R}_1^{m+2}$ *uzayında,* $\wedge_0^{m+1}$ *ışık konisi , her* $x \in \wedge_0^{m+1}$ *için* $x = \sum_{A=0}^{m+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A} \neq 0$ *olmak üzere*

$$-\left(x^0\right)^2 + \sum_{a=1}^{m+1} (x^a)^2 = 0$$

denklemi ile tanımlanır. Bu lightlike hiperyüzeyin radikal dağılımının bazı

$$\xi = \sum_{A=0}^{m+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A}$$

null vektör alanıdır ve transversal tanjant demeti ise

$$N = \frac{1}{2\left(x^0\right)^2}\left\{-x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{a=1}^{m+1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a}\right\}$$

tarafından gerilir. Bu durumda karşılık gelen ekran dağılımı $S\left(T\wedge_0^{m+1}\right)$ *olmak üzere, her* $X \in S\left(T\wedge_0^{m+1}\right)$ *vektörü*

$$X = \sum_{a=1}^{m+1} X^a \frac{\partial}{\partial x^a}$$

biçiminde gösterilir. Her $X, Y \in \Gamma\left(S\left(T\Lambda_0^{m+1}\right)\right)$ *için (2.11), (2.18) eşitlikleri ve (2.1) kovaryant türev tanımından*

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= \bar{g}(\nabla_X Y, N) = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X Y, N\right) = -\bar{g}\left(Y, \bar{\nabla}_X N\right) \\ &= -g\left(Y, \frac{1}{2\left(x^0\right)^2} X\right) = -\frac{1}{2\left(x^0\right)^2} g(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $S\left(T\Lambda_0^{m+1}\right)$ *ekran dağılımı total geodezik olmayan umbilik uzay olup,* Λ_0^{m+1} *ışık konisinin Sonuç 3.1.3'ten yerel simetrik olduğu görülür.*

(Duggal ve Jin, 2007) eserinde örnek olarak geçen, yarı-Öklidiyen uzayda tanımlı aşağıdaki lightlike hiperyüzeyin sıfır sabit eğrilikli ve dolayısıyla yerel simetriktir:

Örnek 3.1.9 $(\mathbb{R}_2^4, \bar{g})$,

$$\bar{g}(x,y) = -x^0y^0 - x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

yarı-Öklidiyen metriği ile donatılmış, $\left(\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}, ..., \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ *kanonik baza sahip* $4-$*boyutlu yarı-Öklidiyen bir uzay olsun. Bu uzayda bir* M *hiperyüzeyi*

$$x_0 = x_1 + \sqrt{2}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

denklemi ile tanımlansın. Kolaylık açısından $f = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ *alalım. Bu hiperyüzeyin normal uzayını geren vektörü, (2.4) gradyan tanımı yardımıyla*

$$\xi = f(\partial_0 - \partial_1) + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)$$

olarak bulunur. Bu vektörün lightlike olmasından dolayı M *hiperyüzeyi bir lightlike hiperyüzeydir. Lightlike transversal vektör demeti de*

$$N = \frac{1}{4f^2}\left\{f(-\partial_0 + \partial_1) + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\right\}$$

olarak bulunur. Bu durumda, karşılık gelen bir ekran dağılımı ise

$$\{W_1 = \partial_0 + \partial_1, W_2 = -x_3\partial_2 + x_2\partial_3\}$$

olur. Doğrudan hesaplamalarla, ilgili vektörlerin yarı-Öklidiyen uzayın $\bar{\nabla}$ *Levi-Civita koneksiyonuna göre kovaryant türevleri şu şekildedir:*

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X W_1 &= \bar{\nabla}_{W_1} X = 0, \ X \in \Gamma(TM) \qquad (3.1)\\
\bar{\nabla}_{W_2} W_2 &= -x_2\partial_2 - x_3\partial_3\\
\bar{\nabla}_\xi \xi &= \sqrt{2}\xi\\
\bar{\nabla}_{W_2}\xi &= \bar{\nabla}_\xi W_2 = \sqrt{2}W_2\\
\bar{\nabla}_\xi N &= \frac{1}{2\sqrt{2}f}\partial_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}f}\partial_1 - \frac{x_2}{2f^2}\partial_2 - \frac{x_3}{2f^2}\partial_3 = -\sqrt{2}N\\
\bar{\nabla}_{W_1} N &= 0, \ \bar{\nabla}_{W_2} N = -\frac{x_3}{2\sqrt{2}f^2}\partial_2 - \frac{x_2}{2\sqrt{2}f^2}\partial_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}f^2}W_2.
\end{aligned}$$

Gauss formülü yardımıyla yine ilgili vektörlerin lightlike hiperyüzeyin indirgenmiş ∇ *koneksiyonuna göre kovaryant türevleri*

$$\begin{aligned}\nabla_X W_1 &= \nabla_{W_1} X = 0,\ X \in \Gamma(TM)\\ \nabla_\xi \xi &= \sqrt{2}\xi,\ \nabla_{W_2} W_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\xi\\ \nabla_\xi W_2 &= \nabla_{W_2}\xi = \sqrt{2} W_2\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla hiperyüzeyin ikinci temel formları

$$B(W_1, W_1) = B(W_1, W_2) = 0,\ B(W_2, W_2) = -\sqrt{2} f^2 \tag{3.2}$$

olur. Daha sonra Weingarten formülünden hiperyüzeyin şekil operatörü A_N *için*

$$A_N \xi = 0 = A_N W_1,\ A_N W_2 = \frac{1}{2\sqrt{2} f^2} W_2 \tag{3.3}$$

ve lightlike transversal vektör uzayının indirgenmiş ∇^t *koneksiyonuna göre kovaryant türevleri*

$$\nabla^t_\xi N = -\sqrt{2} N,\ \nabla^t_{W_1} N = 0,\ \nabla^t_{W_2} N = \frac{1}{\sqrt{2} f^2} W_2$$

şeklinde bulunur. Yarı-Öklidiyen uzayda lightlike hiperyüzeyin Riemann eğrilik tensörü (2.36) eşitliğinde, (3.2) ve (3.3) eşitlikleri yardımıyla, hiperyüzeyin quasi-ortonormal bazı $\{\xi, W_1, W_2\}$ *olmak üzere her* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\begin{aligned}R(W_1, Y) Z &= R(X, Y) W_1 = 0\\ R(\xi, Y) Z &= R(X, Y)\xi = 0\\ R(W_1, W_2) W_1 &= R(W_1, W_2) W_2 = 0\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla $R = 0$ *olur, yani lightlike hiperyüzey düzdür. Her düz uzay yerel simetrik olduğundan, bu hiperyüzey yerel simetrik olur.*

3.2 İkinci Dereceden Simetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Bir önceki bölümde tanımını yaptığımız yerel simetrik uzayların bir genellemesi olarak karşımıza, R eğrilik tensörünün ikinci mertebeden kovaryant türevi sıfır olan uzaylar çıkar. Yani:

Tanım 3.2.1 *Eğrilik tensörü R olan bir yarı-Riemann manifoldu her $X, Y, W, V \in \Gamma(TM)$ için*

$$\left(\nabla^2 R\right)(X, Y, W, V) = \left(\nabla^2_{V,W} R\right)(X, Y) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa ikinci dereceden simetrik (2-simetrik) olarak adlandırılır (Senovilla, 2008).

Bu koşula ek olarak eğer $\nabla R \neq 0$ ise uzay öz 2-simetriktir. Riemann uzaylarında bu genellemenin incelenmemesinin sebebi meşhur bir teoremdir (Omachi, 1986; Tanno, 1972):

$$\nabla^k R = 0 \quad (k \geq 2) \Leftrightarrow \nabla R = 0.$$

İspatı ise uzayların dik de Rham (de Rham, 1952) ayrışımına dayanıyor. Bu teoreme göre Riemann uzaylarında k-simetriklik ile yerel simetriklik aynı şeydir. Ancak yarı-Riemann uzaylarda de Rham ayrışımı aynı şekilde geçerli olmadığından (Wu, 1964), artık k-simetriklik ile yerel simetriklik kavramları eşdeğer değildirler. Dolayısıyla yarı-Riemann uzaylarda yerel simetrik hiperyüzeylerin bir genellemesi olarak 2-simetrik hiperyüzeyler incelenebilir. Yarı-Riemann uzay formlarda 2-simetrik bir lightlike hiperyüzey için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.2 *$(m+2)-$boyutlu $(\bar{M}(c), \bar{g})$ yarı-Riemann uzay formunda $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey olsun. M lightlike hiperyüzeyi 2-simetrik ise ekran dağılımının şekil operatörü 2-nilpotent ya da $C(\xi, A_N\xi) = -c$ olur.*

İspat: Şimdi $(m+2)$-boyutlu bir yarı-Riemann uzay formu $(\bar{M}(c), \bar{g})$ de $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin 2-simetriklik koşullarını incelemek için, Riemann eğrilik tensörü R nin önce birinci dereceden kovaryant türevini, (2.2) kuralından her $X, Y, Z, W, V \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_W R)(X, Y) Z &= \nabla_W R(X, Y) Z - R(\nabla_W X, Y) Z \\ &\quad - R(X, \nabla_W Y) Z - R(X, Y) \nabla_W Z \end{aligned} \tag{3.4}$$

ve ardından yine aynı kural ve (2.5) eşitliğinden ikinci dereceden kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2_{V,W}R\right)(X,Y)Z &= \nabla_V\left((\nabla_W R)(X,Y)Z\right) - (\nabla_{\nabla_V W}R)(X,Y)Z \\ &\quad - (\nabla_W R)(\nabla_V X,Y)Z - (\nabla_W R)(X,\nabla_V Y)Z \\ &\quad - (\nabla_W R)(X,Y)\nabla_V Z \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde bulunur.

(2.34) Gauss eğrilik denklemi, g metriğinin kovaryant türevi (2.16), hiperyüzeyin ikinci temel formunun türevi (2.24) ve şekil operatörünün türevi (2.25) eşitliklerinden faydalanarak, lightlike hiperyüzeyin R eğrilik tensörünün ∇ koneksiyonuna göre kovaryant türevi, (3.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X,Y)Z &= c\{\bar{g}(h(W,Y),Z)X + \bar{g}(h(W,Z),Y)X \\ &\quad -\bar{g}(h(W,X),Z)Y - \bar{g}(h(W,Z),X)Y\} \\ &\quad + (\nabla_W A)_{h(Y,Z)}X + A_{(\nabla_W h)(Y,Z)}X \\ &\quad - (\nabla_W A)_{h(X,Z)}Y - A_{(\nabla_W h)(X,Z)}Y \end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak bulunur.

Tekrar (3.4) eşitliğini kullanarak, (3.6) eşitliğinin V vektör alanına göre kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \nabla_V\left((\nabla_W R)(X,Y)Z\right) &= c\{\bar{g}\left(\nabla^{\perp}_V h(W,Y),Z\right)X + \bar{g}(h(W,Y),\nabla_V Z)X \\ &\quad +\bar{g}(h(W,Y),Z)\nabla_V X + \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_V h(W,Z),Y\right)X \\ &\quad +\bar{g}(h(W,Z),\nabla_V Y)X + \bar{g}(h(W,Z),Y)\nabla_V X \\ &\quad -\bar{g}\left(\nabla^{\perp}_V h(W,X),Z\right)Y - \bar{g}(h(W,X),\nabla_V Z)Y \\ &\quad -\bar{g}(h(W,X),Z)\nabla_V Y - \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_V h(W,Z),X\right)Y \\ &\quad -\bar{g}(h(W,Z),\nabla_V X)Y - \bar{g}(h(W,Z),X)\nabla_V Y\} \\ &\quad +\nabla_V\left[(\nabla_W A)_{h(Y,Z)}X\right] + \nabla_V\left[A_{(\nabla_W h)(Y,Z)}X\right] \\ &\quad -\nabla_V\left[(\nabla_W A)_{h(X,Z)}Y\right] - \nabla_V\left[A_{(\nabla_W h)(X,Z)}Y\right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

olur. Şimdi, ilk olarak M lightlike hiperyüzeyinin h ikinci temel formunun, (2.24) kovaryant türev eşitliğinin V vektör alanına göre ikinci dereceden kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \nabla_V^{\perp}\left(\left(\nabla_W h\right)(Y,Z)\right) &= \left(\nabla^2_{V,W} h\right)(Y,Z) + \left(\nabla_W h\right)\left(\nabla_V Y, Z\right) \\ &\quad + \left(\nabla_W h\right)\left(Y, \nabla_V Z\right) + \left(\nabla_{\nabla_V W} h\right)(Y,Z) \end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. Sonra M lightlike hiperyüzeyinin şekil operatörü A_N nin, $h(Y,Z)$ ikinci temel formuna göre ifadesi $A_{h(Y,Z)}X$ olup, şekil operatörünün $\left(\nabla_W A\right)_{h(Y,Z)} X$ kovaryant türevinin V vektör alanına göre tekrar kovaryant türevi alındığında

$$\begin{aligned} \nabla_V\left(\left(\nabla_W A\right)_{h(Y,Z)} X\right) &= \left(\nabla^2_{V,W} A\right)_{h(Y,Z)} X + \left(\nabla_{\nabla_V W} A\right)_{h(Y,Z)} X \\ &\quad + \left(\nabla_W A\right)_{h(Y,Z)} \nabla_V X + \left(\nabla_W A\right)_{(\nabla_V h)(Y,Z)} X \\ &\quad + \left(\nabla_W A\right)_{h(\nabla_V Y,Z)} X + \left(\nabla_W A\right)_{h(Y,\nabla_V Z)} X \end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur. X ve Y vektörlerinin yerleri değiştirilerek, aynı işlem $\left(\nabla_W A\right)_{h(X,Z)} Y$ kovaryant türevi için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_V\left(\left(\nabla_W A\right)_{h(X,Z)} Y\right) &= \left(\nabla^2_{V,W} A\right)_{h(X,Z)} Y + \left(\nabla_{\nabla_V W} A\right)_{h(X,Z)} Y \\ &\quad + \left(\nabla_W A\right)_{h(X,Z)} \nabla_V Y + \left(\nabla_W A\right)_{(\nabla_V h)(X,Z)} Y \\ &\quad + \left(\nabla_W A\right)_{h(\nabla_V X,Z)} Y + \left(\nabla_W A\right)_{h(X,\nabla_V Z)} Y \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. $A_{(\nabla_W h)(Y,Z)}X$ şekil operatörünün V vektör alanına göre kovaryant türevi, (2.25) eşitliğinden

$$\nabla_V\left(A_{(\nabla_W h)(Y,Z)} X\right) = \left(\nabla_V A\right)_{(\nabla_W h)(Y,Z)} X + A_{(\nabla_W h)(Y,Z)}\left(\nabla_V X\right) + A_{\nabla_V^{\perp}((\nabla_W h)(Y,Z))} X$$

şeklinde bulunur. Bu son eşitlikte (3.8) ifadesi yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \nabla_V\left(A_{(\nabla_W h)(Y,Z)} X\right) &= \left(\nabla_V A\right)_{(\nabla_W h)(Y,Z)} X + A_{(\nabla_W h)(Y,Z)}\left(\nabla_V X\right) \\ &\quad + A_{\left(\nabla^2_{V,W} h\right)(Y,Z)} X + A_{(\nabla_W h)(\nabla_V Y,Z)} X \\ &\quad + A_{(\nabla_W h)(Y,\nabla_V Z)} X + A_{\left(\nabla_{\nabla_V W} h\right)(Y,Z)} X \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Benzer biçimde $A_{(\nabla_W h)(X,Z)}Y$ şekil operatörünün V vektör alanına göre kovaryant türevi de

$$\begin{aligned}\nabla_V\left(A_{(\nabla_W h)(X,Z)}Y\right) &= (\nabla_V A)_{(\nabla_W h)(X,Z)}Y + A_{(\nabla_W h)(X,Z)}(\nabla_V Y)\\ &\quad + A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(X,Z)}Y + A_{(\nabla_W h)(\nabla_V X,Z)}Y\\ &\quad + A_{(\nabla_W h)(X,\nabla_V Z)}Y + A_{\left(\nabla_{\nabla_V W}h\right)(X,Z)}Y \qquad (3.12)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece (3.5) eşitliğinde (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) ifadelerinin yerlerine yazılması ve gerekli sadeleştirmelerin yapılmasıyla, lightlike hiperyüzeyin R eğrilik tensörünün ikinci dereceden kovaryant türevi

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2_{V,W}R\right)(X,Y)Z &= c\{\bar{g}((\nabla_V h)(W,Y),Z)X + \bar{g}((\nabla_V h)(W,Z),Y)X\\ &\quad -\bar{g}((\nabla_V h)(W,X),Z)Y - \bar{g}((\nabla_V h)(W,Z),X)Y\}\\ &\quad + \left(\nabla^2_{V,W}A\right)_{h(Y,Z)}X + (\nabla_W A)_{(\nabla_V h)(Y,Z)}X\\ &\quad - \left(\nabla^2_{V,W}A\right)_{h(X,Z)}Y - (\nabla_W A)_{(\nabla_V h)(X,Z)}Y\\ &\quad + (\nabla_V A)_{(\nabla_W h)(Y,Z)}X + A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(Y,Z)}X\\ &\quad - (\nabla_V A)_{(\nabla_W h)(X,Z)}Y - A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(X,Z)}Y \qquad (3.13)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Eğer M lightlike hiperyüzeyi 2-simetrik ise, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ olmak üzere (3.13) eşitliğinde $Y = Z = \xi$ alırsak,

$$\begin{aligned}0 &= c\{\bar{g}((\nabla_V h)(W,\xi),\xi)X + \bar{g}((\nabla_V h)(W,\xi),\xi)X\\ &\quad -\bar{g}((\nabla_V h)(W,X),\xi)\xi - \bar{g}((\nabla_V h)(W,\xi),X)\xi\}\\ &\quad + \left(\nabla^2_{V,W}A\right)_{h(\xi,\xi)}X + (\nabla_W A)_{(\nabla_V h)(\xi,\xi)}X\\ &\quad - \left(\nabla^2_{V,W}A\right)_{h(X,\xi)}\xi - (\nabla_W A)_{(\nabla_V h)(X,\xi)}\xi\\ &\quad + (\nabla_V A)_{(\nabla_W h)(\xi,\xi)}X + A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(\xi,\xi)}X\\ &\quad - (\nabla_V A)_{(\nabla_W h)(X,\xi)}\xi - A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(X,\xi)}\xi \qquad (3.14)\end{aligned}$$

olur.

(3.14) eşitliğinde yerlerine yazılmak üzere, (2.15), (2.20) eşitliklerinden ve (2.24) eşitliğinden faydalanarak

$$
\begin{aligned}
h(\xi,\xi) &= 0,\ h(X,\xi)=0 && (3.15)\\
(\nabla_W h)(\xi,\xi) &= \nabla^t_W h(\xi,\xi) - h(\nabla_W\xi,\xi) - h(\xi,\nabla_W\xi)\\
&= 0 && (3.16)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (3.14) eşitliği

$$
\begin{aligned}
0 = {} & c\{\bar{g}((\nabla_V h)(W,\xi),\xi)X + \bar{g}((\nabla_V h)(W,\xi),\xi)X\\
& -\bar{g}((\nabla_V h)(W,X),\xi)\xi - \bar{g}((\nabla_V h)(W,\xi),X)\xi\}\\
& -(\nabla_W A)_{(\nabla_V h)(X,\xi)}\xi + A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(\xi,\xi)}X\\
& -(\nabla_V A)_{(\nabla_W h)(X,\xi)}\xi - A_{\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(X,\xi)}\xi && (3.17)
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. Tekrar (2.24) ve (3.15) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
(\nabla_W h)(X,\xi) &= \nabla^t_W h(X,\xi) - h(\nabla_W X,\xi) - h(X,\nabla_W\xi)\\
&= -h(X,\nabla_W\xi) && (3.18)
\end{aligned}
$$

sonucu bulunur. (3.8) eşitliğinde, (3.16) ve (3.18) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(\xi,\xi) &= \nabla^\perp_V((\nabla_W h)(\xi,\xi)) - (\nabla_{\nabla_V W}h)(\xi,\xi)\\
&\quad -(\nabla_W h)(\nabla_V\xi,\xi) - (\nabla_W h)(\xi,\nabla_V\xi)\\
&= 2h(\nabla_W\xi,\nabla_V\xi) && (3.19)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(X,\xi) &= \nabla^\perp_V((\nabla_W h)(X,\xi)) - (\nabla_{\nabla_V W}h)(X,\xi)\\
&\quad -(\nabla_W h)(\nabla_V X,\xi) - (\nabla_W h)(X,\nabla_V\xi)\\
&= -(\nabla_V h)(X,\nabla_W\xi) - h(X,\nabla_V(\nabla_W\xi))\\
&\quad +h(X,\nabla_{\nabla_V W}\xi) - (\nabla_W h)(X,\nabla_V\xi)\\
&= -(\nabla_V h)(X,\nabla_W\xi) - h\left(X,\nabla^2_{V,W}\xi\right)\\
&\quad -(\nabla_W h)(X,\nabla_V\xi) && (3.20)
\end{aligned}
$$

ifadeleri elde edilir. (3.18), (3.19) ve (3.20) eşitliklerini (3.17) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= c\{-2\bar{g}\left(h\left(W, \nabla_V \xi\right), \xi\right) X - \bar{g}\left(\left(\nabla_V h\right)\left(W, X\right), \xi\right) \xi \\ &\quad + \bar{g}\left(h\left(W, \nabla_V \xi\right), X\right) \xi\} + \left(\nabla_W A\right)_{h(X, \nabla_V \xi)} \xi + 2A_{h(\nabla_W \xi, \nabla_V \xi)} X \\ &\quad + \left(\nabla_V A\right)_{h(X, \nabla_W \xi)} \xi + A_{(\nabla_V h)(X, \nabla_W \xi)} \xi + A_{h\left(X, \nabla^2_{V,W} \xi\right)} \xi \\ &\quad + A_{(\nabla_W h)(X, \nabla_V \xi)} \xi \end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $W = \xi$ alınırsa, (2.23) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 &= -c\bar{g}\left(\left(\nabla_V h\right)\left(\xi, X\right), \xi\right) \xi + \left(\nabla_\xi A\right)_{h(X, \nabla_V \xi)} \xi + A_{(\nabla_V h)\left(X, \nabla_\xi \xi\right)} \xi \\ &\quad + A_{\left(\nabla_\xi h\right)(X, \nabla_V \xi)} \xi + A_{h\left(X, \nabla^2_{V,\xi} \xi\right)} \xi \end{aligned} \tag{3.22}$$

olur. (2.19), (2.20) ve (3.18) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \left(\nabla_V h\right)\left(\xi, X\right) &= -h\left(\nabla_V \xi, X\right) = h\left(A^*_\xi V, X\right) \\ &= B(A^*_\xi V, X) N = g\left(A^*_\xi A^*_\xi V, X\right) N \end{aligned} \tag{3.23}$$

ve bu eşitlikle birlikte (2.23) kullanıldığında

$$\left(\nabla_V h\right)\left(X, \nabla_\xi \xi\right) = -\tau\left(\xi\right) g\left(A^*_\xi A^*_\xi V, X\right) N \tag{3.24}$$

bulunur. Tekrar (2.19), (2.20) ve (3.18) eşitlikleri ve (2.35) Codazzi denkleminden

$$\begin{aligned} \left(\nabla_\xi h\right)\left(X, \nabla_V \xi\right) &= \left(\nabla_X h\right)\left(\xi, \nabla_V \xi\right) = -h\left(\nabla_X \xi, \nabla_V \xi\right) \\ &= -h\left(A^*_\xi X, A^*_\xi V\right) = -g\left(A^*_\xi A^*_\xi V, A^*_\xi X\right) N \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. Son olarak ikinci kovaryant türev formülü (2.3) ve (2.20), (2.19), (2.23), (2.3), (3.15) eşitliklerden

$$\begin{aligned} h\left(X, \nabla^2_{V,\xi} \xi\right) &= h\left(X, \nabla_V\left(\nabla_\xi \xi\right) - \nabla_{\nabla_V \xi} \xi\right) \\ &= h\left(X, \nabla_V\left(-\tau\left(\xi\right)\xi\right) - \nabla_{-A^*_\xi V - \tau(\xi)\xi} \xi\right) \\ &= h\left(X, \tau\left(\xi\right) A^*_\xi V\right) + h\left(X, \nabla_{A^*_\xi V} \xi\right) \\ &= \tau\left(\xi\right) h\left(X, A^*_\xi V\right) + h\left(X, -A^*_\xi\left(A^*_\xi V\right) - \tau\left(A^*_\xi V\right)\xi\right) \\ &= \tau\left(\xi\right) g\left(X, A^*_\xi A^*_\xi V\right) N - g\left(A^*_\xi X, A^*_\xi A^*_\xi V\right) N \end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur. (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) eşitlikleri (3.22) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -cg\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right)\xi - g\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right)\left(\nabla_\xi A\right)_N \xi \\ &\quad -\tau(\xi)\, g\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right) A_N\xi - g\left(A_\xi^* A_\xi^* V, A_\xi^* X\right) A_N\xi \\ &\quad +\tau(\xi)\, g\left(X, A_\xi^* A_\xi^* V\right) A_N\xi - g\left(A_\xi^* X, A_\xi^* A_\xi^* V\right) A_N\xi \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $N \in \Gamma(tr(TM))$ vektör alanı ile iç çarpılırsa (2.21) deki son eşitlikten

$$0 = -cg\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right) - g\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right)\bar{g}\left(\left(\nabla_\xi A\right)_N \xi, N\right) \tag{3.27}$$

elde edilir. Bu arada $\bar{g}(A_N\xi, N) = 0$ eşitliğinin ξ vektörüne göre kovaryant türevi alınırsa

$$0 = \bar{\nabla}_\xi \bar{g}(A_N\xi, N) = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_\xi(A_N\xi), N\right) + \bar{g}\left(A_N\xi, \bar{\nabla}_\xi N\right)$$

bulunur. (2.11) ve (3.15) yardımıyla

$$0 = \bar{g}\left(\nabla_\xi(A_N\xi), N\right) + \bar{g}\left(A_N\xi, -A_N\xi + \nabla_\xi^t N\right)$$

ve (2.12) ile (2.21) deki son eşitlikten

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{g}\left(\left(\nabla_\xi A\right)_N \xi, N\right) + \bar{g}\left(A_{\nabla_\xi^t N}\xi, N\right) + \bar{g}\left(A_N\left(\nabla_\xi \xi\right), N\right) \\ &\quad -g\left(A_N\xi, A_N\xi\right) + \bar{g}\left(A_N\xi, \nabla_\xi^t N\right) \\ &= \bar{g}\left(\left(\nabla_\xi A\right)_N \xi, N\right) - g\left(A_N\xi, A_N\xi\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.21) eşitliğinden

$$\bar{g}\left(\left(\nabla_\xi A\right)_N \xi, N\right) = C(\xi, A_N\xi)$$

elde edilir. Bu ifade (3.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$0 = -cg\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right) - g\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right) C(\xi, A_N\xi) \tag{3.28}$$

bulunur. Son olarak

$$0 = g\left(A_\xi^* A_\xi^* V, X\right)\left(c + C(\xi, A_N\xi)\right) \tag{3.29}$$

bulunur ki ya $A_\xi^* A_\xi^* = 0$ ya da $C(\xi, A_N\xi) = -c$ olmasını gerektirir. □

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki özel durum incelenebilir:

Sonuç 3.2.3 $\mathbb{R}_q^n$ *yarı-Öklidiyen uzayında,* $A_N\xi$ *sıfırdan faklı bir vektör alanı olmak üzere, bir lightlike hiperyüzey* $(M, g, S(TM))$ *olsun. Eğer* M *lightlike hiperyüzeyi 2-simetrik ise* M *hiperyüzeyinin* $S(TM)$ *ekran dağılımının şekil operatörü 2-nilpotenttir.*

İspat: Yarı-Öklidiyen uzay için kesitsel eğrilik sıfırdır ($c = 0$). (2.21) eşitliğinden $C(\xi, A_N\xi) = g(A_N\xi, A_N\xi)$ elde edilir. $A_N\xi$ sıfırdan farklı vektör alanı olduğundan, $C(\xi, A_N\xi) \neq 0$ bulunur. $A_\xi^* V \in S(TM)$ olması sebebiyle, (3.29) eşitliğinden $A_\xi^* A_\xi^* = 0$ olur. Yani ekran dağılımının şekil operatörü A_ξ^* 2-nilpotenttir. □

Ekran dağılımının total umbilik olması durumunda ise aşağıdaki sonuca varılır:

Sonuç 3.2.4 *Bir yarı-Riemann uzay formunda, ekran dağılımı total umbilik olan bir lightlike hiperyüzey* $(M, g, S(TM))$ *olsun. Eğer* M *lightlike hiperyüzeyi 2-simetrik ise ya esas uzay yarı-Öklidiyendir ya da hiperyüzeyin* $S(TM)$ *ekran dağılımının* A_ξ^* *şekil operatörü 2-nilpotenttir.*

İspat: Ekran dağılımı total umbilik olduğundan (2.41) eşitliğinden

$$C(\xi, A_N\xi) = \lambda g(\xi, A_N\xi) = 0$$

bulunur ve (3.29) de yerine yazılırsa ya $c = 0$ (esas uzay yarı-Öklidiyendir) ya da $A_\xi^* \in S(TM)$ olduğundan $A_\xi^* A_\xi^* = 0$ bulunur (A_ξ^* şekil operatörü 2-nilpotenttir). □

Sonuç 3.2.5 *Bir yarı-Riemann uzay formunda, ekran yerel konformal bir lightlike hiperyüzey* $(M, g, S(TM))$ *olsun. Eğer* M *lightlike hiperyüzeyi 2-simetrik ise ya esas uzay yarı-Öklidiyendir ya da hiperyüzeyin* $S(TM)$ *ekran dağılımının* A_ξ^* *şekil operatörü 2-nilpotenttir.*

İspat: M lightlike hiperyüzeyi ekran yerel konformal olması durumunda, (2.22) ve (2.42) eşitliklerinden

$$C(\xi, A_N\xi) = \varphi C\left(\xi, A_\xi^*\xi\right) = 0$$

bulunur. Yine (3.29) de yerine yazılırsa $c = 0$ veya $A_\xi^* A_\xi^* = 0$ sonuçları bulunur. □

Teorem 3.2.6 *Bir yarı-Riemann uzay formunda, $A_N\xi$ sıfırdan faklı bir vektör alanı ve $C(\xi, A_N\xi) \neq -c$ olmak üzere, A_N şekil operatörü paralel olan ekran homotetik bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. M lightlike hiperyüzeyinin 2-simetrik olması için gerek ve yeter şart ekran dağılımının şekil operatörünün 2-nilpotent olmasıdır.*

İspat: Teorem 3.2.2'den M lightlike hiperyüzeyinin 2-simetrik olması durumunda, belirlenen şartlarda ekran dağılımının A^*_ξ şekil operatörünün 2-nilpotent olması gerektiği açıktır. M hiperyüzeyinin A^*_ξ şekil operatörü 2-nilpotent olsun. Her $X, Y, W \in \Gamma(TM)$ için (2.20) eşitliğinde her iki tarafın W vektörüne göre kovaryant türevi alınırsa

$$W[\bar{g}(h(X,Y),\xi)] = W\left[g\left(A^*_\xi X, Y\right)\right]$$

ve (2.24), (2.25), (2.42) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
W[\bar{g}(h(X,Y),\xi)] &= W\left[\varphi^{-1}g(A_N X, Y)\right] \\
\bar{g}((\nabla_W h)(X,Y),\xi) &= W\left[\varphi^{-1}\right]g(A_N X, Y) + \varphi^{-1}[(\nabla_W g)(A_N X, Y) \\
&\quad + g(\nabla_W(A_N X), Y) + g(A_N X, \nabla_W Y)] \\
&\quad + \bar{g}(h(\nabla_W X, Y),\xi) + \bar{g}(h(X, \nabla_W Y),\xi) \\
&\quad + \bar{g}\left(h(X,Y), \bar{\nabla}_W \xi\right)
\end{aligned}$$

bulunur. M lightlike hiperyüzeyi ekran homotetik olduğundan $W[\varphi^{-1}] = 0$ olur. (2.11), (2.16), (2.19), (2.20), (2.42) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\bar{g}((\nabla_W h)(X,Y),\xi) &= \varphi^{-1}[\bar{g}(h(W, A_N X), Y) + \bar{g}(h(W,Y), A_N X) \\
&\quad + g\left((\nabla_W A)_N X, Y\right) + g(A_{\nabla_W N} X, Y) \\
&\quad + g(A_N(\nabla_W X), Y) + g(A_N X, \nabla_W Y)] \\
&\quad + \varphi^{-1}[g(A_N(\nabla_W X), Y) + g(A_N X, \nabla_W Y)] \\
&\quad + \bar{g}\left(h(X,Y), -A^*_\xi W - \tau(W)\xi\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.9) ile $Z \in \Gamma(S(TM))$ için $\bar{g}(h(X,Y),Z) = 0$, $A_\xi^* X \in \Gamma(S(TM))$ ve $A_N X \in \Gamma(S(TM))$ olduğundan, yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}\bar{g}((\nabla_W h)(X,Y),\xi) &= \varphi^{-1}[\bar{g}(h(W,A_N X),Y) + g((\nabla_W A)_N X, Y) \\ &\quad + g\left(A_{\nabla_W^\perp N} X, Y\right)] - \tau(W)\bar{g}(h(X,Y),\xi)\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. (2.13), (2.14), (2.20) ve (2.42) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\bar{g}((\nabla_W h)(X,Y),\xi) &= \varphi^{-1}[g\left(W,\varphi A_\xi^* A_\xi^* X\right)\bar{g}(N,Y) + g((\nabla_W A)_N X, Y) \\ &\quad + \tau(W) g(A_N X, Y)] - \tau(W) g(A_N X, Y) \\ &= g\left(W, A_\xi^* A_\xi^* X\right)\bar{g}(N,Y) + \varphi^{-1} g((\nabla_W A)_N X, Y)\end{aligned}$$

elde edilir. A_ξ^* şekil operatörü 2-nilpotent ve paralel olduğundan

$$\bar{g}((\nabla_W h)(X,Y),\xi) = 0$$

olur. ∇h tensörü $tr(TM)$ uzayında tanımlı olduğundan bulunan eşitlik $\nabla h = 0$ olmasını gerektirir. M lightlike hiperyüzeyinin şekil operatörünün paralel olduğu ($\nabla A_N = 0$) hipotezden bilindiğine göre, ekran dağılımının A_ξ^* şekil operatörünün ve M hiperyüzeyin h ikinci temel formunun ikinci mertebeden kovaryant türevleri de (2.3), (2.24) ve (2.25) eşitliklerinden sıfır olarak bulunur:

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{V,W}^2 A\right)_N X &= \nabla_V((\nabla_W A)_N X) - (\nabla_{\nabla_V W} A)_N X \\ &\quad - (\nabla_W A)_{\nabla_V^\perp N} X - (\nabla_W A)_N (\nabla_V X) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{V,W}^2 h\right)(Y,Z) &= \nabla_V^\perp((\nabla_W h)(Y,Z)) - (\nabla_W h)(\nabla_V Y, Z) \\ &\quad - (\nabla_W h)(Y, \nabla_V Z) - (\nabla_{\nabla_V W} h)(Y,Z) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Son olarak yukarıdaki iki sonuç, $\nabla h = 0$ ve $\nabla A_N = 0$ ifadeleri (3.13) eşitliğinde kullanıldığında

$$\left(\nabla_{V,W}^2 R\right)(X,Y)Z = 0$$

olarak bulunur. Yani M lightlike hiperyüzeyi 2-simetriktir. $\square$

3.3 Yarı-Simetrik ve 2-Yarısimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

Yerel simetrik ve 2-simetrik uzayların doğal genellemeleri olan yarı-simetrik yarı-Riemann uzaylar, Riemann eğrilik tensörü üzerinde $\nabla R = 0$ denklem sisteminin integrallenebilme koşulu olan $R(X,Y) \cdot R = 0$ koşulunu sağlayan uzaylardır. Bu eşitlikteki $R(X,Y)$ endomorfizmi, daha önce bahsedilen eğrilik operatörüdür.

Tanım 3.3.1 *$(M, g, S(TM))$, yarı-Riemann manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ de bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda her $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için R, lightlike hiperyüzeyin Riemann eğrilik tensörü olmak üzere,*

$$(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y) = 0$$

eşitliğini sağlayan M lightlike hiperyüzeyine yarı-simetriktir denir.

Burada $R \cdot R$ tensör alanı (2.8) kullanılarak aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$\begin{aligned}
(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y) &= (R(X,Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\
&\quad -R(R(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) \\
&\quad -R(X_1, R(X,Y)X_2, X_3, X_4) \\
&\quad -R(X_1, X_2, R(X,Y)X_3, X_4) \\
&\quad -R(X_1, X_2, X_3, R(X,Y)X_4)
\end{aligned}$$

Aynı zamanda lightlike hiperyüzeylerin yarı-simetrikliğini, $(1,3)$ tipindeki Riemann eğrilik tensörü cinsinden

$$\begin{aligned}
0 &= (R(X,Y) \cdot R)(X_1, X_2)X_3 \\
&= R(X,Y)R(X_1,X_2)X_3 - R(X_1,X_2)R(X,Y)X_3 \qquad (3.30) \\
&\quad -R(R(X,Y)X_1, X_2)X_3 - R(X_1, R(X,Y)X_2)X_3
\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edebiliriz (Şahin, 2007).

Lightlike hiperyüzeyler için

$$(R(X,Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, \xi) = 0$$

eşitliği açıkça sağlanacağından, yarı-simetriklik koşulu

$$(R(X,Y)\cdot R)(X_1,X_2,X_3,PX_4)=0$$

şeklini alır. Yarı-Öklidiyen uzayda Riemann eğrilik tensörü için (2.36) eşitliği geçerli olduğundan, her $X,Y,X_1,X_2,X_3,X_4\in\Gamma(TM)$ için yukarıdaki ifadeyi

$$\begin{aligned}
&(R(X,Y)\cdot R)(X_1,X_2,X_3,PX_4)=B(Y,X_1)[B(A_NX,X_3)\,g(A_NX_2,PX_4)\\
&-B(X_2,X_3)\,g\left(A_N^2X,PX_4\right)]+B(X,X_1)[B(X_2,X_3)\,g\left(A_N^2Y,PX_4\right)\\
&-B(A_NY,X_3)\,g(A_NX_2,PX_4)]+g(A_NX_1,PX_4)[-B(Y,X_2)\,B(A_NX,X_3)\\
&+B(X,X_2)\,B(A_NY,X_3)]+B(X_1,X_3)[B(Y,X_2)\,g\left(A_N^2X,PX_4\right)\\
&-B(X,X_2)\,g\left(A_N^2Y,PX_4\right)]+g(A_NX_1,PX_4)[-B(X_3,Y)\,B(X_2,A_NX)\\
&+B(X,X_3)\,B(X_2,A_NY)]+g(A_NX_2,PX_4)[B(X_3,Y)\,B(X_1,A_NX)\\
&-B(X,X_3)\,B(X_1,A_NY)]+B(X_2,X_3)[-B(Y,X_4)\,g(A_NX_1,A_NX)\\
&+B(X,PX_4)\,g(A_NX_1,A_NY)]+B(X_1,X_3)[B(Y,PX_4)\,g(A_NX_2,A_NX)\\
&-B(X,PX_4)\,g(A_NX_2,A_NY)]
\end{aligned}\tag{3.31}$$

biçiminde yazabiliriz.

Yarı-Öklidiyen uzaylarda lightlike hiperyüzeylerin yarı-simetrikliği ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 3.3.2 *Her $X\in\Gamma(TM)\,,\xi\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı ve $Ric(\xi,X)=0$ olacak biçimde, $(n+2)$-boyutlu yarı-Öklidiyen uzayda bir lightlike hiperyüzey $(M,g,S(TM))$ olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci tensörü Ric ve şekil operatörü A_N olmak üzere, M hiperyüzeyinin yarı-simetrik olması için gerek ve yeter şart M hiperyüzeyinin total geodezik olmasıdır (Şahin, 2007).*

Bu teoremin tanımsız uzay formlara uyarlaması ise şöyledir:

Sonuç 3.3.3 *Bir tanımsız $\left(\bar{M}(c)\,,\bar{g}\right)$ uzay formunun $(M,g,S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi şu koşulları sağlasın:*

1) $Ric(\xi,X)=0,\ \forall\xi\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right),X\in\Gamma(TM)\,;$

2) $A_N\xi$ null olmayan bir vektör alanıdır.

O halde M lightlike hiperyüzeyinin yarı-simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır (Atindogbe, et al., 2013).

Önerme 3.3.4 *Bir yarı-Riemann $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ manifoldunun, bir yarı-simetrik $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin R eğrilik tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\nabla^2_{X,Y} R = -\nabla^2_{Y,X} R$$

şartını sağlasın. Bu durumda M lightlike hiperyüzeyinin 2-simetrik olması için gerek ve yeter şart yarı-simetrik olmasıdır.

İspat: (2.6) ve (3.30) eşitliklerinden her $X, Y, X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (R(X,Y) \cdot R)(X_1, X_2) X_3 &= \left(\nabla^2 R\right)(X_1, X_2; X, Y) X_3 \\ &\quad - \left(\nabla^2 R\right)(X_1, X_2; Y, X) X_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hiperyüzeyin 2-simetrik olması durumunda yarı-simetrik olması gerektiği açıktır. Diğer taraftan, lightlike hiperyüzeyin yarı-simetrik olduğunu kabul edersek,

$$\left(\nabla^2 R\right)(X_1, X_2; X, Y) X_3 + \left(\nabla^2 R\right)(X_1, X_2; Y, X) X_3 = 0$$

olması durumunda $\nabla^2 R = 0$ bulunur. Yani lightlike hiperyüzey 2-simetriktir. □

Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevi her $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_W R)(X_1, X_2, X_3, X_4) = g((\nabla_W R)(X_1, X_2) X_3, X_4) - (\nabla_W g)(R(X_1, X_2) X_3, X_4) \tag{3.32}$$

biçiminde ifade edilebilir (Atindogbe, et al., 2011). Yerel simetrik bir lightlike hiperyüzey aynı zamanda yarı-simetriktir. Fakat bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 3.3.5 *$m \geq 3$ için M bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R ve Ricci tensörü Ric olmak üzere,*

i. $\nabla Ric = 0$,

ii. $R(X,Y)\cdot R=0,$

iii. $R(X,Y)\cdot\nabla_W R=0$

koşullarının sağlanması durumunda M manifoldu yerel simetriktir (Sekigawa and Tanno, 1970).

Bu teoremde bir şart olarak sunulan $R(X,Y)\cdot\nabla_W R=0$ eşitliğini sağlayan uzaylara, yarı-simetriklik tanımına uygunluğundan dolayı, çalışma boyunca 2-yarısimetrik uzaylar adı verilecektir. Böylece aşağıdaki tanım yapılabilir:

Tanım 3.3.6 *Yarı-Riemann manifoldu $\left(\bar{M},\bar{g}\right)$ de bir lightlike hiperyüzey $(M,g,S(TM))$ olsun. M hiperyüzeyinin $R\cdot\nabla R=0$ eşitliğini sağlaması durumunda M hiperyüzeyine 2-yarısimetriktir denir.*

Diğer bir ifadeyle her $X,Y,W,X_1,X_2,X_3,X_4\in\Gamma(TM)$ için (2.8) ve (3.32) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
0 &= \left(R(X,Y)\cdot(\nabla_W R)\right)(X_1,X_2,X_3,X_4)\\
&= -(\nabla_W R)(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)\\
&\quad -(\nabla_W R)(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\
&\quad -(\nabla_W R)(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4)\\
&\quad -(\nabla_W R)(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)
\end{aligned}\tag{3.33}$$

eşitliğinin sağlaması halinde M lightlike hiperyüzeyi 2-yarısimetriktir.

Teorem 3.3.7 *Her $X\in\Gamma(TM),\xi\in\Gamma(RadTM)$ ve $N\in\Gamma(tr(TM))$ için $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, $\mathbb{R}^n_1$ yarı-Öklidiyen uzayda bir lightlike hiperyüzey $(M,g,S(TM))$ olsun. Eğer M hiperyüzeyi 2-yarısimetrik ise ya $Ric(\xi,X)=0$ ya da $Ric\left(\xi,A^*_\xi X\right)=0$ olur.*

İspat: $\mathbb{R}^n_1$ yarı-Öklidiyen uzayında bir lightlike hiperyüzeyin R Riemann eğrilik tensörü (2.36) olup, bunun kovaryant türevi (3.4) yardımıyla her $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
(\nabla_W R)(X,Y)Z &= -(\nabla_W B)(X,Z)A_N Y+(\nabla_W B)(Y,Z)A_N X\\
&\quad -B(X,Z)(\nabla_W A_N)Y+B(Y,Z)(\nabla_W A_N)X
\end{aligned}$$

Bu eşitlik (3.33) de yerine yazıldığında $X, Y, X_1, X_2, X_3, X_4, W \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&(R(X,Y)\cdot(\nabla_W R))(X_1,X_2,X_3,X_4) = \\
= \; & -B(Y,X_1)\, g((\nabla_W R)(A_N X, X_2) X_3, X_4) \\
& +B(X,X_1)\, g((\nabla_W R)(A_N Y, X_2) X_3, X_4) \\
& -B(Y,X_2)\, g((\nabla_W R)(X_1, A_N X) X_3, X_4) \\
& +B(X,X_2)\, g((\nabla_W R)(X_1, A_N Y) X_3, X_4) \\
& -B(Y,X_3)\, g((\nabla_W R)(X_1, X_2) A_N X, X_4) \\
& +B(X,X_3)\, g((\nabla_W R)(X_1, X_2) A_N Y, X_4) \\
& -B(Y,X_4)\, g((\nabla_W R)(X_1, X_2) X_3, A_N X) \\
& +B(X,X_4)\, g((\nabla_W R)(X_1, X_2) X_3, A_N Y)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte $Y = X_1 = X_3 = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
(R(X,\xi)\cdot(\nabla_W R))(\xi, X_2, \xi, X_4) &= B(X,X_2)\, B\left(A_N\xi, A_\xi^* W\right) C(\xi, X_4) \\
&\quad + B(X,X_4)\, B\left(X_2, A_\xi^* W\right) C(\xi, A_N\xi)
\end{aligned}$$

bulunur. 2-yarısimetrik bir uzayda $X_2 = X_4 = A_N\xi$ ve $X = W$ alınırsa

$$0 = B(X, A_N\xi)\, B\left(A_N\xi, A_\xi^* X\right) C(\xi, A_N\xi) \tag{3.34}$$

eştiliğine ulaşılır ve (2.39) Ricci tensörü tanımından

$$0 = Ric(\xi, X)\, Ric\left(\xi, A_\xi^* X\right) g(A_N\xi, A_N\xi)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla $A_N\xi$ sıfırdan faklı bir vektör alanı olduğundan ya $Ric(\xi, X) = 0$ ya da $Ric\left(\xi, A_\xi^* X\right) = 0$ sonucu bulunur. □

Sonuç 3.3.8 *Bir tanımsız $\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ uzay formunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olması ve M lightlike hiperyüzeyinin ekran dağılımının A_ξ^* şekil operatörünün 2-nilpotent olmaması durumunda, M hiperyüzeyi yarı-simetrik ve 2-yarısimetrik ise yerel simetriktir.*

İspat: $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olması ve A^*_ξ şekil operatörünün 2-nilpotent olmaması durumunda, M lightlike hiperyüzeyinin 2-yarısimetrik olması her $X \in \Gamma(TM)$ için $B\left(A_N\xi, A^*_\xi X\right) \neq 0$ ve dolayısıyla

$$B(X, A_N\xi) = Ric(\xi, X) = 0$$

olmasını gerektirir. Sonuç 3.3.3 e göre M yarı-simetrik ise total geodeziktir. Teorem 3.1.3 ve $\bar{M}$ uzay formunun yerel simetrik olduğu gözönüne alınırsa M lightlike hiperyüzeyi yerel simetrik olur. □

3.4 Harmonik Eğrilikli Lightlike Hiperyüzeyler

Harmonik eğriliğe sahip uzaylara, tanımları gereği yerel simetrik uzayların bir genellemesi olarak bakılabilir. Bir $(n+2)-$boyutlu (M, g) Riemann manifoldundaki bir X vektör alanı için diverjans tanımı şu şekildedir (Besse, 1987):

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n+2} g\left(\nabla_{Y_i} X, Y_i\right).$$

Burada $(Y_i)_{i=1,\dots,n+2}$ vektör alanları, M manifoldunun tanjant uzayının bir ortonormal bazıdır. Benzer şekilde, $n \geq 1$ olmak üzere bir T tensör alanının diverjansının tanımı ise şöyledir:

$$\operatorname{div} T(X_1, \dots, X_k) = tr\left[(Y, Z) \to (\nabla_Y T)(X_1, \dots, X_k, Z)\right].$$

Yarı-Riemann uzayında tanımlı bir lightlike hiperyüzey söz konusu olduğunda, metriğin dejenere olması sebebiyle, bir X vektör alanının diverjans tanımı biraz farklı biçimde yapılır (Duggal ve Şahin, 2010):

Teorem 3.4.1 $(M, g, S(TM))$, $(n+2)-$*boyutlu yarı-Riemann manifoldu* $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ *de bir lightlike hiperyüzey olsun. O halde* M *de bağdaşık bir* $\tilde{g}$ *metriği ve* g *nin bir pseudo-tersi* $g^{[\cdot]}$ *vardır, öyle ki yerel olarak* $U \subset M$ *de şunlar sağlanır:*

i. *Herhangi bir diferensiyellenebilir* $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için*

$$\operatorname{grad}^g f = g^{[\alpha\beta]} f_\alpha \partial_\beta \quad where \quad f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad \alpha, \beta = 0, \dots, n.$$

ii. *$U \subset M$ de her X vektör alanı için*

$$\operatorname{div}^g X = \sum_{\alpha=0}^{n} \varepsilon_\alpha \tilde{g}\left(\nabla_{X_\alpha} X, X_\alpha\right); \ \varepsilon_0 = 1.$$

iii. *$U \subset M$ de tanımlı bir diferensiyellenebilir f fonksiyonu için*

$$\triangle^g f = \sum_{\alpha=0}^{n} \varepsilon_\alpha \tilde{g}\left(\nabla_{X_\alpha} \operatorname{grad}^g f, X_\alpha\right).$$

Burada $\triangle^g$, U komşuluğunda g ye göre D'Alembertian operatörüdür.

Benzer şekilde $(n+2)$-boyutlu bir Lorentz manifoldu $(\bar{M}, \bar{g})$ de bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ nin eğrilik tensörü R nin diverjansı yukarıdaki teorem yardımıyla her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \operatorname{div} R(X,Y)Z &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \tilde{g}\left(\left(\nabla_{E_k} R\right)(X,Y)Z, E_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} g\left(\left(\nabla_{E_k} R\right)(X,Y)Z, E_k\right) \\ &\quad + \bar{g}\left(\left(\nabla_\xi R\right)(X,Y)Z, N\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ifadede $k \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere M lightlike hiperyüzeyinin TM tanjant uzayının $\{E_0 = \xi, E_k\}$ quasi-ortonormal çatısı, $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun $T\bar{M}$ tanjant uzayının $\{E_0 = \xi, E_k, N\}$ çatısından indirgenmiştir. Öyle ki $S(TM) = span\{E_k\}$ ve $RadTM = span\{\xi\}$ olur.

Bir yarı-Riemann manifoldu $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ de bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. $\bar{M}$ manifoldunun $\bar{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun M lightlike hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyonu ∇ ve bu hiperyüzeyin Riemann eğrilik tensörü R ve Ricci tensörü Ric olmak üzere,

$$\operatorname{div} R(X,Y)Z = (\nabla_X Ric)(Y,Z) - (\nabla_Y Ric)(X,Z)$$

eşitliği vardır. M lightlike hiperyüzeyinin R eğrilik tensörünün diverjansı sıfırsa ($\operatorname{div} R = 0$), hiperyüzeyin harmonik eğriliği vardır denir (Derdziński, 1980). Harmonik eğriliğin Ricci tensörü ile ilgili kısmını sonraya bırakarak, yerel simetriklikle olan ilişkisine bakalım. (3.35) eşitliğinden yerel simetrik bir uzayın harmonik eğrilikli olduğu açıktır. Ancak genelde tersi doğru değildir.

Teorem 3.4.2 *$(n+2)-$boyutlu $(\bar{M}(c), \bar{g})$ Lorentz uzay formunda $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey ve $\{E_k\}_{k=1,\ldots,n}$, hiperyüzeyin $S\,(TM)$ ekran dağılımının bir ortonormal bazı olsun. $C\,(\xi, E_k) > 0$ veya $C\,(\xi, E_k) < 0$ koşullarından biri doğru ve $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin harmonik eğrilik tensörüne sahip olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.*

İspat: Şimdi (3.6) ifadesini (3.35) eşitliğinde yerleştirirsek her $X, Y, Z \in \Gamma\,(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} R\,(X,Y)\,Z \;=\; & \sum_{k=1}^{n}[c\{\bar{g}\,(h\,(E_k, Y)\,, Z)\,g\,(X, E_k) + \bar{g}\,(h\,(E_k, Z)\,, Y)\,g\,(X, E_k) \\
& +\bar{g}\,(h\,(E_k, X)\,, Z)\,g\,(Y, E_k) + \bar{g}\,(h\,(E_k, Z)\,, X)\,g\,(Y, E_k)\} \\
& +g\left((\nabla_{E_k} A)_{h(Y,Z)}\,X, E_k\right) + g\left(A_{(\nabla_{E_k} h)(Y,Z)}X, E_k\right) \\
& -g\left((\nabla_{E_k} A)_{h(X,Z)}\,Y, E_k\right) - g\left(A_{(\nabla_{E_k} h)(X,Z)}Y, E_k\right)] \\
& +\bar{g}\left((\nabla_{\xi} A)_{h(Y,Z)}\,X, N\right) + \bar{g}\left(A_{(\nabla_{\xi} h)(Y,Z)}X, N\right) \\
& -\bar{g}\left((\nabla_{\xi} A)_{h(X,Z)}\,Y, N\right) - \bar{g}\left(A_{(\nabla_{\xi} h)(X,Z)}Y, N\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan eğer $h = 0$ ise $\operatorname{div} R = 0$ olduğu açıktır. Eğer $\operatorname{div} R = 0$ ise aynı eşitlikte $Y = Z = \xi$ alırsak

$$-\sum_{k=1}^{n} g\left(A_{(\nabla_{E_k} h)(X,\xi)}\xi, E_k\right) - \bar{g}\left(A_{(\nabla_{\xi} h)(X,\xi)}\xi, N\right) = 0$$

olur. (2.15), (2.23) ve (3.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n} g\left(A_{h\left(X,\nabla_{E_k}\xi\right)}\xi, E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} B\,(X, \nabla_{E_k}\xi)\,g\,(A_N\xi, E_k) = 0$$

elde edilir. Bu ifadede (2.19) eşitliği kullanılıp $X = E_k$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n} g\left(A_{\xi}^{*}E_k, A_{\xi}^{*}E_k\right) g\,(A_N\xi, E_k) = \sum_{k=1}^{n} \left|A_{\xi}^{*}E_k\right|^2 C\,(\xi, E_k) = 0$$

sonucuna ulaşılır. $C\,(\xi, E_k) > 0$ veya $C\,(\xi, E_k) < 0$ koşullarından biri doğru ve $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olduğundan $A_{\xi}^{*}E_k = 0$ bulunur. Dolayısıyla $A_{\xi}^{*} = 0$ dır. Yani M lightlike hiperyüzeyi total geodezik olur. $\square$

3.5 Ricci Simetrik, Ricci 2-Simetrik, Ricci Yarısimetrik ve Ricci 2-Yarısimetrik Lightlike Hiperyüzeyler

3.5.1 Ricci simetrik ve Ricci 2-simetrik lightlike hiperyüzeyler

Ricci tensörü paralel olan, yani $\nabla R^{(0,2)} = 0$ eşitliğini sağlayan lightlike hiperyüzeylere Ricci simetrik ve $\nabla^2 R^{(0,2)} = 0$ eşitliğini sağlayan lightlike hiperyüzeylere de Ricci 2-simetrik lightlike hiperyüzeyler adı verilir. Yarı-Riemann uzay formlarda lightlike hiperyüzeylerin Ricci eğrilikleri için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.5.1 *Bir $(m+1)-$ boyutlu yarı-Riemann $(\bar{M}(c), \bar{g})$ uzay formunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer M lightlike hiperyüzeyi total geodezik ise M hiperyüzeyinin Ricci tensörü ∇ koneksiyonuna göre paraleldir. Tersine, eğer M hiperyüzeyinin Ricci tensörü ∇ koneksiyonuna göre paralel ise her $X, W \in TM$ için $B\left(A_\xi^* W, A_N X\right) = B\left(A_\xi^* X, A_N W\right)$ dir (Güneş vd., 2003).*

İspat: Ric tensörünün W vektörüne göre kovaryant türevi (2.2) eşitliğine göre her $X, Y, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y) = \nabla_W R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(\nabla_W X, Y) - R^{(0,2)}(X, \nabla_W Y) \quad (3.36)$$

olarak yazılır. $S(TM)$ ekran dağılımının bir ortonormal bazı $\{E_a\}_{1 \le a \le m-1}$ olsun. Eşitlik (2.38) de

$$\alpha = trA_N = \sum_{a=1}^{m-1} \varepsilon_a C(E_a, E_a) \quad (3.37)$$

alalım. Bu durumda (2.17) ve (2.38) eşitliklerinden Ricci tensörünün kovaryant türevi ∇ koneksiyonuna göre yukarıdaki eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y) &= -mc\left\{B(W,X)\bar{g}(N,Y)+B(W,Y)\bar{g}(N,X)\right\}\\ &\quad -(\nabla_W B)(X,Y)\alpha - B(X,Y)(W(\alpha))\\ &\quad +\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a\{B(\nabla_W E_a,Y)C(X,E_a)\\ &\quad +(\nabla_W B)(E_a,Y)C(X,E_a)+B(E_a,Y)C(X,\nabla_W E_a)\\ &\quad +B(E_a,Y)(\nabla_W C)(E_a,X)\}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer M total geodezik ise bu eşitlikten $\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y)=0$ olduğu görülür. Tersine $\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y)=0$ alınırsa yukarıdaki eşitlikte $Y=\xi$ yazıldığında

$$\begin{aligned}0 &= -(m-1)cB(W,X)+B(X,\nabla_W\xi)\alpha\\ &\quad -\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a B(E_a,\nabla_W\xi)C(X,E_a)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.19) yardımıyla yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}0 &= -(m-1)cB(W,X)-B\left(X,A_\xi^*W\right)\alpha\\ &\quad +\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a B\left(E_a,A_\xi^*W\right)C(X,E_a)\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte W ile X vektörlerinin yerleri değiştirilip bu eşitliklerin farkı alındığında

$$0=-\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a B\left(E_a,A_\xi^*W\right)C(X,E_a)+\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a B\left(E_a,A_\xi^*X\right)C(W,E_a)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikten, (2.20) ve (2.21) kullanılarak

$$\begin{aligned}0 &= -\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a g\left(E_a,A_\xi^*A_\xi^*W\right)g(A_NX,E_a)+\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a g\left(E_a,A_\xi^*A_\xi^*X\right)g(A_NW,E_a)\\ &= -g\left(\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a g(A_NX,E_a)E_a,A_\xi^*A_\xi^*W\right)+g\left(\sum_{a=1}^{m-1}\varepsilon_a g(A_NW,E_a)E_a,A_\xi^*A_\xi^*X\right)\\ &= -g\left(A_NX,A_\xi^*A_\xi^*W\right)+g\left(A_NW,A_\xi^*A_\xi^*X\right)\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak (2.20) eşitliğinden

$$B\left(A_\xi^* W, A_N X\right) = B\left(A_\xi^* X, A_N W\right)$$

elde edilir. □

Yarı-Riemann uzay formlarında tanımlı belli özelliklere sahip lightlike hiperyüzeylerin Ricci simetrik olmaları, total geodezik olmalarıyla yakından ilişkilidir. Lightlike hiperyüzeyin ekran dağılımının 2-nilpotent olması durumunda aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 3.5.2 *Kesitsel eğriliği sıfırdan farklı bir yarı-Riemann $(\bar{M}(c), \bar{g})$ uzay formunda, ekran dağılımının A_ξ^* şekil operatörü 2-nilpotent olan bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. O halde M lightlike hiperyüzeyinin Ricci simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.*

İspat: Bir yarı-Riemann uzay formunda bir lightlike hiperyüzeyin Ricci tensörünü (2.39) eşitliğinden biliyoruz. M lightlike hiperyüzeyinin Ricci tensörünün indirgenmiş ∇ koneksiyonuna göre kovaryant türevi, (2.25) kullanılarak (3.36) eşitliğine göre her $X, Y, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y) &= mc\left(\nabla_W g\right)(X,Y) + \left(\nabla_W B\right)(X,Y)\, trA_N \\ &\quad + B(X,Y)\left(\nabla_W\left(trA_N\right)\right) - \left(\nabla_W B\right)(Y, A_N X) \\ &\quad - B\left(Y, \left(\nabla_W A_N\right) X\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

olarak bulunur. Total geodezik bir lightlike hiperyüzey için (2.17) ve (2.31) eşitliklerinden $\nabla_W g = 0$ ve $\nabla_W B = 0$ olacağından, $\nabla_W R^{(0,2)} = 0$ olacağı açıktır. M lightlike hiperyüzeyini Ricci simetrik kabul edersek, yukarıdaki eşitlikte $Y = \xi$ alıp yine (2.9), (2.17) ve (2.31) eşitlikleri kullanılırsa

$$0 = mcB(W,X) + B\left(A_\xi^* W, X\right) trA_N - B\left(A_\xi^* W, A_N X\right)$$

sonucu elde edilir. (2.20) eşitliğinden

$$0 = mcB(W,X) + g\left(A_\xi^* A_\xi^* W, X\right) trA_N - g\left(A_\xi^* A_\xi^* W, A_N X\right)$$

ve A_{ξ}^{*} şekil operatörü 2-nilpotent olduğundan

$$0 = mcB\,(W, X)$$

bulunur. m ve c sıfırdan farklı olduklarından $B = 0$ olur. Yani M lightlike hiperyüzeyi total geodezik olur. □

Eğer lightlike hiperyüzey total umbilik ise aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

Teorem 3.5.3 *Bir yarı-Riemann $(\bar{M}(c), \bar{g})$ uzay formunda, $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, total umbilik bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. O halde M lightlike hiperyüzeyinin Ricci simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.*

İspat: M lightlike hiperyüzeyi total umbilik olduğundan, (2.17) ve (2.31) ile (2.40) eşitliğinin her iki tarafının kovaryant türevinden, her $X, Y, W \in \Gamma\,(TM)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla_W B)\,(X, Y) &= W\,(\rho)\,g\,(X, Y) + \rho\,(\nabla_W g)\,(X, Y) \\
&= W\,(\rho)\,g\,(X, Y) + \rho\,[B\,(W, X)\,\bar{g}\,(Y, N) + B\,(W, Y)\,\bar{g}\,(X, N)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonucu (3.38) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X, Y) &= (mc + \rho tr A_N)\,[B\,(W, X)\,\bar{g}\,(Y, N) + B\,(W, Y)\,\bar{g}\,(X, N)] \\
&\quad + W\,(\rho)\,[g\,(X, Y)\,tr A_N - g\,(Y, A_N X)] \\
&\quad + B\,(X, Y)\,(\nabla_W tr A_N) - \rho[B\,(W, A_N X)\,\bar{g}\,(Y, N) \\
&\quad + B\,(W, Y)\,\bar{g}\,(A_N X, N)] - B\,(Y, (\nabla_W A_N)\,X)
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer M total geodezik ise $\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X, Y) = 0$ olduğu kolayca görülür. Tersine, M Ricci simetrik kabul edilip yukarıdaki eşitlikte $X = Y = \xi$ ve $W \neq \xi$ alınırsa

$$0 = -\rho B\,(W, A_N\xi) = -\rho^2 g\,(W, A_N\xi)$$

olur. $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olduğundan $\rho = 0$ olmalıdır. Bu ise M hiperyüzeyinin total geodezik olduğu anlamına gelir. □

Sonuç 3.5.4 *Bir yarı-Riemann* $(\bar{M}(c), \bar{g})$ *uzay formunda,* $A_N\xi$ *sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, total umbilik bir lightlike hiperyüzey* $(M, g, S(TM))$ *olsun. O halde* M *lightlike hiperyüzeyinin Ricci simetrik olması için gerek ve yeter şart yerel simetrik olmasıdır.*

İspat: Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.5.4 gözönüne alındığında, yerel simetriklik ve Ricci simetriklik durumlarının birbirini sağladığı açıkça görülmektedir. □

Ricci simetrik lightlike hiperyüzeylerle ilgili, geniş bir uygulama sahasına sahip olan aşağıdaki iki örnek verilebilir:

Örnek 3.5.5 *Bir yarı-Riemann* $(\bar{M}(c), \bar{g})$ *uzay formunda,* λ *diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için*

$$R^{(0,2)}(X, Y) = Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

eşitliğini sağlayan bir $(M, g, S(TM))$ *lightlike hiperyüzeyine bir Einstein lightlike hiperyüzeyi adı verilir. Bu eşitlik (2.39) eşitliği ile karşılaştırıldığında*

$$\lambda g(X, Y) = mcg(X, Y) + B(X, Y)\, trA_N - g\left(A_\xi^* Y, A_N X\right)$$

denklemi elde edilir. Burada $X = \xi$ *ve* $A_N\xi \neq 0$ *alınırsa* $A_\xi^* = 0$ *sonucu bulunur. Yani* M *total geodeziktir. Daha sonra Ricci tensörünün (3.38) kovaryant türevi eşitliğinde* $A_\xi^* = 0$ *yazılırsa* M *lightlike hiperyüzeyi Ricci simetrik olarak bulunur. Sonuçta,* $A_N\xi$ *sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, bir yarı-Riemann uzay forumunun her Einstein lightlike hiperyüzeyinin Ricci simetrik olduğu görülür.*

Örnek 3.5.6 $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ *diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,*

$$M = \left\{(x_0, ..., x_{m+1}) \in \mathbb{R}_q^{m+1} : x_0 = F(x_1, ..., x_{m+1})\right\}$$

şeklinde tanımlanan hiperyüzeylere Monge hiperyüzeyleri denir.

$$1 + \sum_{s=1}^{q-1} \left(F'_{x_s}\right)^2 = \sum_{a=q}^{m+1} \left(F'_{x_a}\right)^2$$

kısmi diferensiyel denklemini sağlayan Monge hiperyüzeylerine ise lightlike Monge hiperyüzeyleri adı verilir (Duggal and Bejancu, 1996). Yine aynı eserden $S^*(TM)$

doğal ekran dağılımı ile verilen bir lightlike Monge hiperyüzeyin lokal ekran konformal olduğu biliniyor. Yani, A_N ve A^*_ξ, sırasıyla M lightlike hiperyüzeyinin ve $S^*(TM)$ ekran dağılımının şekil operatörlerini göstermek üzere, her $X \in \Gamma(TM)$ için $A_N X = \frac{1}{2} A^*_\xi X$ eşitliği sağlanır. Böylesi bir lightlike Monge hiperyüzeyin Ricci tensörü simetriktir ve (2.39) eşitliğinden faydalanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{2}\left\{B(X,Y)\, trA^*_\xi - g\left(A^*_\xi Y, A^*_\xi X\right)\right\}.$$

Bu eşitliğin kovaryant türevi (3.36) yardımıyla

$$\begin{aligned}(\nabla_W Ric)(X,Y) &= \frac{1}{2}\{(\nabla_W B)(X,Y)\, trA^*_\xi + B(X,Y)\nabla_W trA^*_\xi \\ &\quad - g\left(\left(\nabla_W A^*_\xi\right)X, A^*_\xi Y\right) - g\left(A^*_\xi X, \left(\nabla_W A^*_\xi\right)Y\right)\}\end{aligned} \tag{3.39}$$

olarak hesaplanır. Daha sonra (2.20), (2.25) ve (2.31) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla_W B)(X,Y) = (\nabla_W g)\left(A^*_\xi X, Y\right) + g\left(\left(\nabla_W A^*_\xi\right)X, Y\right)$$

sonucu bulunur. Aynı zamanda, $A^*_\xi X \in S^*(TM)$ olduğundan, (2.17) eşitliğinden

$$(\nabla_W B)(X,Y) = B\left(W, A^*_\xi X\right)\eta(Y) + g\left(\left(\nabla_W A^*_\xi\right)X, Y\right)$$

elde edilir. Bu eşitliği (3.39) ifadesinde yerine yazarsak kovaryant türev ile izin değişmeli oldukları gerçeğinden, lightlike Monge hiperyüzeyin Ricci tensörünün kovaryant türevi

$$\begin{aligned}(\nabla_W Ric)(X,Y) &= \frac{1}{2}\{B\left(W, A^*_\xi X\right)\eta(Y) + g\left(\left(\nabla_W A^*_\xi\right)X, Y\right)\} trA^*_\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}\{B(X,Y)\, tr\left(\nabla_W A^*_\xi\right) - g\left(\left(\nabla_W A^*_\xi\right)X, A^*_\xi Y\right) \\ &\quad - g\left(A^*_\xi X, \left(\nabla_W A^*_\xi\right)Y\right)\}.\end{aligned}$$

olur. Eğer ekran şekil operatörü A^*_ξ 2-nilpotent ise, yani $A^*_\xi A^*_\xi = 0$ ise, $B\left(W, A^*_\xi X\right) = 0$ bulunur. Ayrıca 2-nilpotentliğe ek olarak ekran şekil operatörü paralel ise, yani $\nabla_W A^*_\xi = 0$ ise, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 3.5.7 *$\mathbb{R}^{m+1}_q$ yarı-Öklidiyen uzayın $S^*(TM)$ doğal ekran dağılımının A^*_ξ ekran şekil operatörü 2-nilpotent ve paralel olan bir lightlike Monge hiperyüzeyi M olsun. Bu durumda M Ricci simetriktir.*

Şimdi giriş kısmında verilen bazı tanım ve sonuçlar kullanılarak Ricci 2-simetrik uzaylarla ilgili aşağıdaki teorem ispatlanacak.

Teorem 3.5.8 $(\bar{M},\bar{g})$ *yarı-Öklidiyen manifoldunda bir geodezik GNN* ξ *vektör alanına sahip, ikinci temel tensörü paralel ve* $S(TM)$ *ekran dağılımı* $\xi-$*seçimli olan bir total non-geodezik lightlike hiperyüzey* $(M,g,S(TM))$ *olsun. O halde* M *lightlike hiperyüzeyinin Ricci 2-simetrik olması için gerek ve yeter şart her* $V,W\in\Gamma(TM)$ *için* $\nabla^2_{V,W}A_N=0$ *olmasıdır.*

İspat: Ricci tensörünün ikinci mertebeden türevi (2.3) eşitliğine göre her $X,Y,W,V\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2_{V,W}R^{(0,2)}\right)(X,Y) &= \nabla_V\left(\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y)\right)-\left(\nabla_{\nabla_V W}R^{(0,2)}\right)(X,Y)\\ &\quad -\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(\nabla_V X,Y)-\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,\nabla_V Y)\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte Ricci tensörünün birinci mertebeden kovaryant türevi olan (3.38) ifadesi yerine yazılıp (2.17), (2.25) ve (2.31) kullanılarak Ricci tensörünün ikinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2_{V,W}R^{(0,2)}\right)(X,Y) &= mc[\bar{g}(N,Y)(\nabla_V B)(W,X)+\bar{g}(N,X)(\nabla_V B)(W,Y)\\ &\quad +B(W,X)\bar{g}\left(Y,\nabla^t_V N\right)+B(W,Y)\bar{g}\left(X,\nabla^t_V N\right)]\\ &\quad +\left(\nabla^2_{V,W}B\right)(X,Y)\,trA_N+(\nabla_W B)(X,Y)(\nabla_V trA_N)\\ &\quad +(\nabla_V B)(X,Y)(\nabla_W trA_N)+B(X,Y)\left(\nabla^2_{V,W}trA_N\right)\\ &\quad -\left(\nabla^2_{V,W}B\right)(Y,A_N X)-(\nabla_W B)(Y,(\nabla_V A_N)X)\\ &\quad -(\nabla_V B)(Y,(\nabla_W A_N)X)-B\left(Y,\left(\nabla^2_{V,W}A_N\right)X\right) \qquad (3.40)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. M lightlike hiperyüzeyinin ikinci temel tensörünün paralel olması $(\nabla h=0)$ durumunda (2.24) ve $h(X,Y)=B(X,Y)N$ eşitliklerinden

$$(\nabla_W h)(X,Y)=(\nabla_W B)(X,Y)N+B(X,Y)\nabla^t_W N$$

elde edilir. Önerme 2.5.6 gereğince $\tau=0$ olup $\nabla^t_W N=\tau(W)N=0$ eşitliğinden yukarıdaki ifade

$$(\nabla_W h)(X,Y)=(\nabla_W B)(X,Y)N$$

olarak bulunur. Yani $\nabla_W h = 0$ ise $\nabla_W B = 0$ ve buradan $\nabla^2_{V,W} B = 0$ olması gerektiği görülür. Dolayısıyla (3.40) eşitliği

$$\left(\nabla^2_{V,W} R^{(0,2)}\right)(X,Y) = B(X,Y)\left(\nabla^2_{V,W} trA_N\right) - B\left(Y, \left(\nabla^2_{V,W} A_N\right) X\right)$$

şeklinde bulunur. Kovaryant türev ile iz değişimli olduklarından

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{V,W} trA_N &= \nabla_V\left(\nabla_W trA_N\right) - \nabla_{\nabla_V W} trA_N \\
&= \nabla_V\left(tr\left(\nabla_W A_N\right)\right) - tr\left(\nabla_{\nabla_V W} A_N\right) \\
&= tr\left(\nabla_V\left(\nabla_W A_N\right)\right) - tr\left(\nabla_{\nabla_V W} A_N\right) \\
&= tr\left(\nabla^2_{V,W} A_N + \nabla_{\nabla_V W} A_N\right) - tr\left(\nabla_{\nabla_V W} A_N\right) \\
&= tr\left(\nabla^2_{V,W} A_N\right)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak, M lightlike hiperyüzeyinin total non-geodezik olduğu gerçeği gözönünde bulundurularak

$$\left(\nabla^2_{V,W} R^{(0,2)}\right)(X,Y) = B(X,Y)\, tr\left(\nabla^2_{V,W} A_N\right) - B\left(Y, \left(\nabla^2_{V,W} A_N\right) X\right)$$

eşitliğinden Ricci 2-simetrik olması için gerek ve yeter şartın $\nabla^2_{V,W} A_N = 0$ olması gerektiği görülür. □

Teorem 3.5.9 $(\bar{M}, \bar{g})$ *yarı-Öklidiyen manifoldunda bir geodezik GNN* ξ *vektör alanına sahip,* $A_N\xi = 0$ *olacak biçimde* $S(TM)$ *ekran dağılımı* $\xi-$*seçimli olan bir Ricci 2-simetrik total non-geodezik lightlike hiperyüzey* $(M, g, S(TM))$ *olsun. O halde,* $A_N A^*_\xi = 0$ *ise* M *lightlike hiperyüzeyinin* $S(TM)$ *ekran dağılımı minimaldir.*

İspat: (3.40) eşitliğinde yerine konmak üzere $X = Y = \xi$ ve $\bar{M}$ uzayı yarı-Öklidiyen olduğundan $c = 0$ alınırsa, (2.9), (2.15) eşitlikleri ve $A_N\xi = 0$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2_{V,W} R^{(0,2)}\right)(\xi,\xi) &= \left(\nabla^2_{V,W} B\right)(\xi,\xi)\, trA_N + \left(\nabla_W B\right)(\xi,\xi)\left(\nabla_V trA_N\right) \\
&\quad + \left(\nabla_V B\right)(\xi,\xi)\left(\nabla_W trA_N\right) - \left(\nabla_W B\right)\left(\xi, \left(\nabla_V A_N\right)\xi\right) \\
&\quad - \left(\nabla_V B\right)\left(\xi, \left(\nabla_W A_N\right)\xi\right) \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.15) ve (2.31) eşitliklerinden

$$\left(\nabla_W B\right)(\xi,\xi) = 0, \quad \left(\nabla_V B\right)(W,\xi) = -B\left(W, \nabla_V \xi\right) \qquad (3.42)$$

elde edilir. Önerme 2.5.6 ya göre $\tau = 0$ olup (2.19) ve yukarıdaki eşitliklerden

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2_{V,W} B\right)(\xi,\xi) &= \nabla_V \left((\nabla_W B)(\xi,\xi)\right) - \left(\nabla_{\nabla_V W} B\right)(\xi,\xi) \\ &\quad -2\left(\nabla_W B\right)(\nabla_V \xi, \xi) \\ &= 2B\left(\nabla_V \xi, \nabla_W \xi\right) = 2B\left(A^*_\xi V, A^*_\xi W\right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

olur. M lightlike hiperyüzeyinin Ricci 2-simetrik olması durumunda (3.42) ve (3.43) sonuçları, (3.41) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 2B\left(A^*_\xi V, A^*_\xi W\right) trA_N - (\nabla_W B)\left(\xi, (\nabla_V A_N)\xi\right) \\ &\quad - (\nabla_V B)\left(\xi, (\nabla_W A_N)\xi\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.25), (2.19) ve (3.42) ün ikinci eşitliği ile $A_N \xi = 0$ kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= 2B\left(A^*_\xi V, A^*_\xi W\right) trA_N + B\left(A^*_\xi W, A_N A^*_\xi V\right) \\ &\quad +B\left(A^*_\xi V, A_N A^*_\xi W\right) \end{aligned}$$

bulunur. $A_N A^*_\xi = 0$ olması durumunda ise

$$0 = 2B\left(A^*_\xi V, A^*_\xi W\right) trA_N$$

olur. Lightlike hiperyüzey total non-geodezik olduğundan $trA_N = 0$ eşitliği sağlanmalıdır, yani $S(TM)$ ekran dağılımı minimaldir. □

3.5.2 Ricci yarı-simetrik ve Ricci 2-yarısimetrik lightlike hiperyüzeyler

$n \geq 3$ için

$$R(X,Y) \cdot R^{(0,2)} = 0$$

koşulunu sağlayan lightlike hiperyüzeylere Ricci yarı-simetrik lightlike hiperyüzeyler denir. Yani $X, Y, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ olmak üzere M lightlike hiperyüzeyinin Ricci yarı-simetrik olması için

$$\begin{aligned} \left(R(X,Y) \cdot R^{(0,2)}\right)(X_1, X_2) &= -R^{(0,2)}\left(R(X,Y)X_1, X_2\right) \\ &\quad -R^{(0,2)}\left(X_1, R(X,Y)X_2\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Her Ricci simetrik uzayın Ricci yarı-simetrik olduğu (2.7) eşitliğinden ve yine her Ricci simetrik uzayın yarı-simetrik olduğu Ricci tensörünün tanımından açıkça görülür.

Benzer şekilde (Sekigawa, 1972) çalışmasında bir koşul olarak ele alınan

$$R(X,Y)\cdot\nabla R^{(0,2)}=0$$

eşitliğini sağlayan veya diğer bir ifadesiyle her $X,Y,W,X_1,X_2\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\left(R(X,Y)\cdot\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)\right)(X_1,X_2) &= -\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(R(X,Y)X_1,X_2)\\ &\quad -\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X_1,R(X,Y)X_2)\\ &= 0 \qquad (3.45)\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan lightlike hiperyüzeylere, literatüre uygun olarak bu çalışmada Ricci 2-yarısimetrik lightlike hiperyüzeyler adı verilecektir.

Teorem 3.5.10 *$(n+2)-$boyutlu bir yarı-Öklidiyen uzayın bir Ricci yarı-simetrik lightlike hiperyüzeyi M olsun. Bu durumda $R^{(0,2)}$ ve A_N sırasıyla M hiperyüzeyinin Ricci tensörü ve şekil operatörünü göstermek üzere, $\xi\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ için ya M hiperyüzeyi total geodezik ya da $R^{(0,2)}(\xi,A_N\xi)=0$ dır (Şahin, 2007).*

Sonuç 3.5.11 *$(\bar{M}(c),\bar{g})$ tanımsız uzay formunda bir lightlike hiperyüzey $(M,g,S(TM))$ olsun. Her $\xi\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right), N\in\Gamma(tr(TM))$ için $R^{(0,2)}(\xi,A_N\xi)\neq 0$ olmak üzere M hiperyüzeyinin Ricci yarı-simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır (Atindogbe, et al., 2003).*

Teorem 3.5.12 *$\mathbb{R}_q^{m+1}$ yarı-Öklidiyen uzayın, total umbilik ve lokal ekran konformal bir lightlike hiperyüzeyi $(M,g,S(TM))$ olsun. Bu durumda M Ricci yarısimetriktir.*

İspat: (2.36) ve (2.42) eşitliklerinden M lightlike hiperyüzeyinin Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z=\varphi\left\{B(Y,Z)A_\xi^*X-B(X,Z)A_\xi^*Y\right\}$$

şeklinde bulunur. (2.39) ve (2.42) eşitliklerinden de M nin Ricci tensörü

$$Ric(X,Y)=\varphi\left\{B(X,Y)\,trA_\xi^*-g\left(A_\xi^*Y,A_\xi^*X\right)\right\}$$

olur. Ricci tensörünün simetrik olduğu açıkça görülmektedir. Bu sonuçları (3.44) eşitliğinde yerleştirirsek her $X, Y, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot Ric)(X_1,X_2) &= \varphi^2[B(X,X_1)B\left(A_\xi^* Y,X_2\right)trA_\xi^* \\ &-B(Y,X_1)B\left(A_\xi^* X,X_2\right)trA_\xi^* \\ &-B(X,X_1)B\left(A_\xi^* X_2,A_\xi^* Y\right) \\ &+B(Y,X_1)B\left(A_\xi^* X_2,A_\xi^* X\right) \\ &+B(X,X_2)B\left(X_1,A_\xi^* Y\right)trA_\xi^* \\ &-B(Y,X_2)B\left(X_1,A_\xi^* X\right)trA_\xi^* \\ &-B(X,X_2)B\left(A_\xi^* Y,A_\xi^* X_1\right) \\ &+B(Y,X_2)B\left(A_\xi^* X,A_\xi^* X_1\right)]. \qquad (3.46)\end{aligned}$$

bulunur. M lightlike hiperyüzeyi total umbilik olduğundan, (2.20) ve (2.40) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot Ric)(X_1,X_2) &= -\varphi^2\rho[B(X,X_1)B(Y,X_2)trA_\xi^* \\ &-B(Y,X_1)B(X,X_2)trA_\xi^* \\ &-\rho B(X,X_1)B(X_2,Y) \\ &+\rho B(Y,X_1)B(X_2,X) \\ &+B(X,X_2)B(X_1,Y)trA_\xi^* \\ &-B(Y,X_2)B(X_1,X)trA_\xi^* \\ &-\rho B(X,X_2)B(Y,X_1) \\ &+\rho B(Y,X_2)B(X,X_1)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani M lightlike hiperyüzeyi Ricci yarı-simetriktir. □

Örnek 3.5.13 $\mathbb{R}_1^3$ *yarı-Öklidiyen uzayın her M lightlike yüzeyi ya total geodezik ya da total umbiliktir (Duggal and Bejancu, 1996). Teorem 3.5.12 ye göre* $3-$*boyutlu Minkowski uzayının her lightlike Monge yüzeyi Ricci yarı-simetriktir.* $4-$*boyutlu Minkowski uzayında lightlike Monge hiperyüzeylerin Ricci yarı-simetrikliğini incelemek için, öncelikle,* $S(TM) = span\{E_k\}$ *ve* $RadTM = span\{\xi\}$ *olacak biçimde*

TM tanjant uzayının bir $\{E_0 = \xi, E_k, N\}$ quasi-ortonormal çatısını alalım. Daha sonra, $k = 1, 2$ için A^*_ξ ekran şekil operatörünün karakteristik değerleri k_i olmak üzere $A^*_\xi E_i = k_i E_i$ eşitliklerini yazabiliriz. Bu eşitlikleri (3.46) eşitliğinde yerine yazıp gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$(R(X,Y) \cdot Ric)(E_i, E_j) = 0, \ i, j = 0, 1, 2$$

sonucunu buluruz. Böylece $4-$boyutlu Minkowski uzayının herhangi bir lightlike Monge hiperyüzeyinin Ricci yarı-simetrik olduğu görülür.

Teorem 3.5.14 *Bir yarı-Öklidiyen uzayın bir Ricci 2-yarısimetrik lightlike hiperyüzeyi M ve $R^{(0,2)}(\xi, A_N\xi) = 0$ olsun. Bu durumda $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere, ya M hiperyüzeyi total geodezik ya da $R^{(0,2)}(\xi, (\nabla_\xi A_N)\xi) = 0$ dır.*

İspat: (2.36), (3.38) ve (3.45) eşitliklerinden ve yarı-Öklidiyen uzayda $c = 0$ olduğundan, her $X, Y, W, X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\left(R(X,Y)\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)\right)(X_1, X_2) = & -B(Y, X_1)[(\nabla_W B)(A_N X, X_2)\, trA_N \\
& +B(A_N X, X_2)(\nabla_W trA_N) - (\nabla_W B)\left(X_2, A_N^2 X\right) \\
& -B(X_2, (\nabla_W A_N) A_N X)] \\
& +B(X, X_1)[(\nabla_W B)(A_N Y, X_2)\, trA_N \\
& +B(A_N Y, X_2)(\nabla_W trA_N) - (\nabla_W B)\left(X_2, A_N^2 Y\right) \\
& -B(X_2, (\nabla_W A_N) A_N Y)] \\
& -B(Y, X_2)[(\nabla_W B)(A_N X, X_1)\, trA_N \\
& +B(A_N X, X_1)(\nabla_W trA_N) \\
& -(\nabla_W B)(A_N X, A_N X_1) \\
& -B(A_N X, (\nabla_W A_N) X_1)] \\
& +B(X, X_2)[(\nabla_W B)(A_N Y, X_1)\, trA_N \\
& +B(A_N Y, X_1)(\nabla_W trA_N) \\
& -(\nabla_W B)(A_N Y, A_N X_1) \\
& -B(A_N Y, (\nabla_W A_N) A_N X_1)]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu aşamada lightlike hiperyüzeyin Ricci 2-yarısimetrik olduğu kabul edilirse bu eşitlikte $X = X_1 = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= -B(Y, X_2)\left[(\nabla_W B)(A_N\xi, \xi)\, trA_N \right. \\ &\quad \left. - (\nabla_W B)(A_N\xi, A_N\xi) - B(A_N\xi, (\nabla_W A_N)\xi)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.15) ve (2.31) eşitlikleri yardımıyla bu eşitlikte $W = \xi$ alınırsa

$$0 = B(Y, X_2)\left[(\nabla_\xi B)(A_N\xi, A_N\xi) + B(A_N\xi, (\nabla_\xi A_N)\xi)\right]$$

olur. Şimdi $R^{(0,2)}(\xi, A_N\xi) = B(A_N\xi, A_N\xi) = 0$ olduğundan, (2.31) ve (2.25) eşitliklerinden

$$0 = -B(Y, X_2)\, B(A_N\xi, (\nabla_\xi A_N)\xi)$$

bulunur. Böylece ya $B = 0$ ya da $B(A_N\xi, (\nabla_\xi A_N)\xi) = R^{(0,2)}(\xi, (\nabla_\xi A_N)\xi) = 0$ sonucuna ulaşılır. □

3.6 Paralel, 2-Paralel, Yarı-paralel ve 2-Yarıparalel Lightlike Hiperyüzeyler

3.6.1 Paralel ve 2-paralel lightlike hiperyüzeyler

Paralel ikinci temel forma sahip, yani $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan hiperyüzeylere paralel hiperyüzeyler denir. Genel olarak

$$\nabla^k h = 0, \quad \nabla^s h \neq 0 \ \ (s < k)$$

şartına uyan hiperyüzeyler ise k-paralel olarak adlandırılır. En basit durum olarak $\nabla^0 h = 0$ görülür. $0-$paralel hiperyüzeyler total geodezik hiperyüzeyler ve $1-$paralel hiperyüzeyler ise total geodezik olmayan paralel hiperyüzeyler olarak bulunur. Ayrıca $\nabla h = 0$ diferensiyel denklem sisteminin integrallenebilme koşulu olan

$$R(X, Y) \cdot h = 0$$

koşulunu sağlayan hiperyüzeyler yarı-paralel hiperyüzeyler olarak isimlendirilir. Yani her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için bu eşitlik

$$h(R(X, Y)Z, W) + h(Z, R(X, Y)W) = 0 \tag{3.47}$$

olur. Daha genel bir durum olarak $\nabla^k h = 0$ diferensiyel denklem sisteminin integrallenebilme koşulu olan

$$R(X,Y)\cdot\nabla^{k-1}h = 0 \tag{3.48}$$

koşulunu sağlayan hiperyüzeylere k-yarıparalel hiperyüzeyler denir. $1-$yarıparalel kısaca yarı-paralel anlamında kullanılır. Bu uzaylar arasındaki hiyerarşi aşağıdaki şekildedir ($k \geq 2$):

$$\begin{array}{ccc}
\text{Total geodezik} & & \\
\downarrow & & \\
\text{Paralel} & \longrightarrow & (k-1)-\text{paralel} \\
\downarrow & & \downarrow \\
k-\text{paralel} & \longrightarrow & (k-1)-\text{yarıparalel} \\
\downarrow & & \\
k-\text{yarıparalel} & &
\end{array}$$

Teorem 3.6.1 *$\bar{M}$ Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi M olsun. O halde M nin ikinci temel formunun paralel olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır (Şahin, 2007).*

Teorem 3.6.2 $(n+2)$ *yarı-Öklidiyen uzayın bir yarı-paralel lightlike hiperyüzeyi M olsun. O halde C ve A^*_ξ sırasıyla, $S(TM)$ ekran dağılımının ikinci temel formu ve şekil operatörü olmak üzere, her $U \in \Gamma(S(TM))$ ve $\xi \in \Gamma\left(TM^\perp\right)$ için ya M total geodezik ya da $C\left(\xi, A^*_\xi U\right) = 0$ dır (Şahin, 2007).*

Önerme 3.6.3 *Bir yarı-Riemann uzay formunda 2-paralel lightlike hiperyüzey bulunamaz.*

İspat: Bir yarı-Riemann $(\bar{M}(c), \bar{g})$ uzay formunda bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. Hiperyüzeyin ikinci temel formunun ikinci mertebeden kovaryant türevi, her $X, Y, V, W \in \Gamma(TM)$ için (3.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2_{V,W}h\right)(X,Y) &= \nabla^t_V\left((\nabla_W h)(X,Y)\right) - (\nabla_W h)(\nabla_V X, Y) \\
&\quad - (\nabla_W h)(X, \nabla_V Y) - (\nabla_{\nabla_V W} h)(X,Y)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hiperyüzeyin $2-$paralel olduğunu kabul edersek, $W = X = \xi$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_V^t \left(\left(\nabla_\xi h \right) (\xi, Y) \right) - \left(\nabla_\xi h \right) \left(\nabla_V \xi, Y \right) \\ &\quad - \left(\nabla_\xi h \right) \left(\xi, \nabla_V Y \right) - \left(\nabla_{\nabla_V \xi} h \right) (\xi, Y) \end{aligned} \tag{3.49}$$

olur. (2.24) ve (2.19) eşitliklerinden $(\nabla_\xi h)(\xi, Y) = 0$ bulunur. Yine (2.19) eşitliğine göre ∇h tensörü simetrik olduğundan Codazzi denklemi kullanılarak

$$\left(\nabla_\xi h \right) \left(\nabla_V \xi, Y \right) = \left(\nabla_{\nabla_V \xi} h \right) (\xi, Y) = \left(\nabla_Y h \right) \left(\xi, \nabla_V \xi \right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak (3.49) eşitliği

$$0 = -\left(\nabla_Y h \right) \left(\xi, \nabla_V \xi \right)$$

olarak bulunur. $V \in S(TM)$ alınırsa, bu denklemden $\nabla h = 0$ olur. Ancak 2-paralellik tanımına göre bu bir çelişkidir. Yani M 2-paralel olamaz. □

3.6.2 Yarı-paralel ve 2-yarıparalel lightlike hiperyüzeyler

Daha önce yarı-Öklidiyen uzayda lightlike hiperyüzeyler için verilen Teorem 3.6.2, Lorentz uzay formlarında lightlike hiperyüzeyleri kapsayacak şekilde genişletilebilir.

Teorem 3.6.4 $\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ *Lorentz uzay formunda, bir yarı-paralel lightlike hiperyüzeyi M olsun. O halde, her $Z \in \Gamma(TM)$ için ya M total geodezik ya da $R^{(0,2)}(\xi, Z) = 0$ dır.*

İspat: (2.34) eşitliği (3.47) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & h\left(R(X,Y)Z, W\right) + h\left(Z, R(X,Y)W\right) \\ = \;& c\{g(Y,Z)B(X,W) - g(X,Z)B(Y,W) \\ & + g(Y,W)B(X,Z) - g(X,W)B(Y,Z)\} \\ & - B(X,Z)h(A_N Y, W) + B(Y,Z)h(A_N X, W) \\ & - B(X,W)h(A_N Y, Z) + B(Y,W)h(A_N X, Z) \end{aligned} \tag{3.50}$$

bulunur. Lightlike hiperyüzey yarı-paralel olduğundan bu eşitlikte $X = \xi$ ve $Z = W$ alınırsa

$$0 = B(Y,Z)\, g\left(A_N \xi, A_\xi^* Z\right)$$

elde edilir. Bu durumda (2.39) Ricci tensörü tanımından $g\left(A_N\xi, A^*_\xi Z\right) = R^{(0,2)}(\xi, Z)$ olur. Böylece ya $B = 0$, yani M total geodeziktir, ya da $R^{(0,2)}(\xi, Z) = 0$ eşitliği sağlanır. □

Sonuç 3.6.5 $\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ *yarı-Riemann uzay formunda, bir total umbilik lightlike hiperyüzey* $(M, g, S(TM))$ *olsun.* M *hiperyüzeyinin yarı-parallel olması için gerek ve yeter şart* M *nin* $\mathbb{R}^n_q$ *yarı-Öklidiyen uzayında bir yarı-paralel lightlike hiperyüzey olmasıdır.*

İspat: Eğer M lightlike hiperyüzeyi total umbilik ise, yani (2.40) eşitliğini sağlıyorsa, (3.50) ifadesinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
& h(R(X,Y)Z, W) + h(Z, R(X,Y)W) = \\
= \; & c\rho\{g(Y,Z)\,g(X,W) - g(X,Z)\,g(Y,W) \\
& +g(Y,W)\,g(X,Z) - g(X,W)\,g(Y,Z)\} \\
& -B(X,Z)\,h(A_N Y, W) + B(Y,Z)\,h(A_N X, W) \\
& -B(X,W)\,h(A_N Y, Z) + B(Y,W)\,h(A_N X, Z) \\
= \; & -h(B(X,Z)\,A_N Y - B(Y,Z)\,A_N X, W) \\
& -h(Z, B(X,W)\,A_N Y - B(Y,W)\,A_N X) \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

bulunur. Yarı-Öklidiyen uzayın Riemann eğrilik tensörü (2.36) eşitliğindeki gibi olduğundan istenen sonuç bulunur. □

Örnek 3.6.6 $\mathbb{R}^{m+2}_1$ *Minkowski uzayında* $\wedge^{m+1}_0$ *ışık konisi*

$$-\left(x^0\right)^2 + \sum_{a=1}^{m+1}\left(x^a\right)^2 = 0, \;\; x = \sum_{A=0}^{m+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A} \neq 0$$

denklemi ile verilir. Işık konisi Λ^{m+1}_0 *ve ekran dağılımı* $S\left(T\Lambda^{m+1}_0\right)$ *için*

$$B(X,Y) = -g(X,Y) \;\; ve \; C(X,Y) = -\frac{1}{2\left(x^0\right)^2} g(X,Y)$$

olduğundan total umbiliktirler. Işık konisinin Riemann eğrilik tensörü ise

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{2\left(x^0\right)^2}\{g(Y,Z)\,PX - g(X,Z)\,PY\}$$

dir (Duggal and Bejancu, 1996). Ricci tensörü ise (2.38) den, $c = 0$ *olduğundan* $Ric(X, Y) = 0$ *olarak bulunur. Yani ışık konisi Ricci düz bir lightlike hiperyüzeydir. Işık konisi total geodezik olmadığından paralel değildir. Ancak yarı-paralellik tanımından faydalanılarak her* $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot h)(Z,W) &= -h(R(X,Y)Z,W) - h(Z,R(X,Y)W)\\ &= \frac{1}{2(x^0)^2}\{g(Y,Z)h(PX,W) - g(X,Z)h(PY,W)\}\\ &\quad +\frac{1}{2(x^0)^2}\{g(Y,W)h(Z,PX) - g(X,W)h(Z,PY)\}\end{aligned}$$

ve $B(X,Y) = -g(X,Y)$ *kullanılarak*

$$(R(X,Y)\cdot h)(Z,W) = 0$$

elde edilir. Yani Λ_0^{m+1} *ışık konisi yarı-paralel bir lightlike hiperyüzeydir.*

Örnek 3.6.7 *Örnek 3.1.9'da tanımlanan*

$$x_0 = x_1 + \sqrt{2}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

lightlike hiperyüzeyi ele alalım. Bu lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu sadece

$$h(W_2, W_2) = -\sqrt{2}f^2 N \tag{3.52}$$

durumunda sıfırdan farklıdır. İkinci temel formun kovaryant türevi ise (2.24), (3.2) ve (3.1) eşitliklerinden yararlanarak

$$(\nabla_\xi h)(W_2, W_2) = (\nabla_{W_2} h)(\xi, W_2) = 2f^2 N, \quad (\nabla_{W_2} h)(W_2, W_2) = -W_2 \tag{3.53}$$

durumları dışında sıfır olarak bulunur. Buradan anlaşılacağı üzere bu lightlike hiperyüzey paralel değildir. (3.51) ve (3.2) eşitliklerinden her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ *için*

$$(R(X,Y)\cdot h)(Z,W) = 0$$

elde edilir ki böylece lightlike hiperyüzey yarı-paralel olur.

Teorem 3.6.8 $\left(\bar{M}(c), \bar{g}\right)$ *yarı-Riemann uzay formunda, bir lightlike hiperyüzeyi* M *olsun. Eğer* M $2-$*yarıparalel ise ya total geodezik ya da* $R^{(0,2)}\left(A_\xi^* W, \xi\right) = 0$ *dır.*

İspat: Şimdi (3.48) eşitliğinden, bir lightlike hiperyüzey 2−yarıparalel ise

$$\begin{aligned}
0 &= (R(X,Y)\cdot\nabla h)(U,V,W) = (R(X,Y)\cdot\nabla_W h)(U,V) \\
&= -(\nabla_W h)(R(X,Y)U,V) - (\nabla_W h)(U,R(X,Y)V) \\
&\quad -\left(\nabla_{R(X,Y)W} h\right)(U,V) \\
&= -B(Y,U)(\nabla_W h)(A_N X,V) + B(X,U)(\nabla_W h)(A_N Y,V) \\
&\quad -B(Y,V)(\nabla_W h)(U,A_N X) + B(X,V)(\nabla_W h)(U,A_N Y) \\
&\quad -B(Y,W)(\nabla_{A_N X} h)(U,V) + B(X,W)(\nabla_{A_N Y} h)(U,V)
\end{aligned}$$

bulunur. $U = X = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= B(Y,V)\,h(\nabla_W \xi, A_N \xi) + B(Y,W)\,h(\nabla_{A_N\xi}\xi, V) \\
&= -B(Y,V)\,h\left(A_\xi^* W, A_N \xi\right) - B(Y,W)\,h\left(A_\xi^*(A_N\xi), V\right)
\end{aligned}$$

ve yine $V = W$ alınırsa

$$0 = -2B(Y,W)\,h\left(A_\xi^* W, A_N\xi\right)$$

elde edilir. Bu durumda ya $B = 0$ ya da $g\left(A_\xi^* A_\xi^* W, A_N\xi\right) = 0$ olur. Yani M ya total geodeziktir ya da (2.39) yardımıyla $R^{(0,2)}\left(A_\xi^* W, \xi\right) = 0$ eşitliğini sağlar. □

BÖLÜM 4

ROBERTSON-WALKER UZAY ZAMAN MODELLERİNDE SİMETRİ KOŞULLARI

4.1 Genel Tanımlar ve Teoremler

Newton sayesinde güneş sistemi ile ilgilenmeye başlayan fizikçiler, astronomideki gelişmelerle desteklenen görelilik teorisi ile çalışmalarını evreni kapsayacak biçimde genişletmişlerdir. Kurdukları basit kozmolojik modeller yardımıyla, evrenin ve içindekilerin hareketlerini anlama ve test etme imkanına kavuşmuşlardır. Bu modellerden en bilineni Robertson-Walker uzay-zaman modelidir.

Bir açık aralık $I \subset \mathbb{R}$ ve irtibatlı $3-$boyutlu sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu F olmak üzere $I \times F$ çarpım manifoldunu düşünelim. π ve σ, sırasıyla I ve F üzerine izdüşüm dönüşümleri olsun. I üzerindeki standart d/dt vektör alanının $I \times F$ manifoldundaki lifti ∂_t timelike birim vektör alanı ve

$$F(t) = t \times F = \{(t,p) : p \in F\}$$

olmak üzere $\partial_t \perp F(t)$ olsun. Böylelikle her $F(t)$ uzayı bir Riemann uzayı olur. Her $t \in I$ için $f(t) > 0$ fonksiyonu alınır ve X, Y vektörleri $F(t)$ uzayına teğet olmak üzere

$$\bar{g}(X,Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + f^2(t)\, g(d\sigma(X), d\sigma(Y))$$

tanımlanırsa, $(I \times F, \bar{g})$ manifoldu I tabanlı, (F, g) fiberli bir katlı çarpım manifoldu olur. Şimdi bu gösterimler yardımıyla Robertson-Walker uzay-zamanı şu şekilde tanımlanır:

Tanım 4.1.1 *İrtibatlı $3-$boyutlu $k = -1, 0$ veya 1 sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu F ve $I \subset \mathbb{R}^1_1$ açık aralığında tanımlı diferensiyellenebilir pozitif bir fonksiyon*

f olmak üzere,

$$M_1^4(k,f) = (I \times_f F, \bar{g}), \ \bar{g} = -dt^2 + f^2(t)\, g_k$$

katlı çarpım manifolduna bir Robertson-Walker uzay-zamanı adı verilir (O'neill, 1983).

Burada F uzayı için standart seçimler sırasıyla $-1, 0, 1$ sabit eğrilikleri için $H^3, \mathbb{R}^3, S^3$ uzay formlarıdır. F ve I uzaylarındaki tanjant vektör alanlarının yatay ve düşey liftleri sırasıyla $L(F)$ ve $L(I)$ ile gösterilir. ∂_t timelike birim vektör alanının gelecek yönlü seçilmesiyle $M_1^4(k,f)$ manifoldu zaman yönlendirilmiş olur. Her $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için

$$X = \hat{X} - \bar{g}(X, \partial_t)\, \partial_t, \ \hat{X} \in L(F) \tag{4.1}$$

ayrışımı yazılabilir.

Not 4.1.2 *F fiberi, $n-$boyutlu genel bir Riemann manifoldu alınırsa, bu durumda $M_1^{n+1}(k,f)$ manifolduna genelleştirilmiş bir Robertson-Walker uzay-zamanı (GRW) denir. Klasik Robertson-Walker uzay-zamanının aksine, genelleştirilmiş Robertson-Walker uzay-zamanında fiber uzay sabit eğrilikli olmak zorunda değildir.*

$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanında yardımcı teoremler 2.4.1 ve 2.4.2 kullanılarak, koneksiyon ve Riemann eğrilik tensörü ile ilgili aşağıdaki yardımcı teoremler elde edilir (Chen and Veken, 2007), (Kang, 2012):

Yardımcı teorem 4.1.3 *$M_1^{n+1}(k.f)$ manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun. Her $X, Y \in L(F)$ için*

1. $\bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0,$
2. $\bar{\nabla}_{\partial_t}X = \bar{\nabla}_X\partial_t = \frac{f'}{f}X,$
3. $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X Y, \partial_t\right) = -\bar{g}(X,Y)\,\frac{f'}{f},$
4. *F uzayının Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere, $\nabla_X Y$ vektör alanının düşey lifti $\bar{\nabla}_X Y$ dir.*

Yardımcı teorem 4.1.4 *$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, her $X,Y,Z \in L(F)$ için*

1. $\bar{R}(\partial_t, X)\partial_t = \frac{f''}{f}X,$
2. $\bar{R}(X,\partial_t)Y = -\bar{g}(X,Y)\frac{f''}{f}\partial_t,$
3. $\bar{R}(X,Y)\partial_t = 0,$
4. $\bar{R}(X,Y)Z = \frac{(f')^2+k}{f^2}(\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y)$

   olur.

$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının Riemann eğrilik tensörünü bulmak için yukarıdaki yardımcı teoremin son eşitliğinden faydalanabiliriz. Her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için (4.1) ayrışımı ve eğrilik tensörünün doğrusallığı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z &= \frac{(f')^2+k}{f^2}(\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y) \\ &+\frac{ff''-(f')^2-k}{f^2}(\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)Y - \bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)X \\ &+(\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z) - \bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\partial_t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

bulunur.

Not 4.1.5 *Eğer f katlı çarpım fonksiyonu $\left(ff''-(f')^2-k\right)=0$ denklemini sağlarsa $(((f')^2+k)/f^2)'=0$ eşitliğini de sağlayacağı açıktır. Dolayısıyla (4.2) eşitliğinden, $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının sabit eğrilikli olduğu görülür.*
$\left(ff''-(f')^2-k\right)=0$ diferensiyel denkleminin çözümünden şu sonuçlar elde edilir:

- *$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının Riemann eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart $f(t)=at+b,\ (k=-a^2)$ olmasıdır.*
- *$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının $c^2>0$ sabit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart $f(t)=ae^{ct}+be^{-ct},\ (k=4c^2ab)$ olmasıdır.*
- *$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının $-c^2<0$ sabit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart $f(t)=a\sin(ct)+b\cos(ct),\ (k=-c^2(a^2+b^2))$ olmasıdır.*

4.2 Robertson-Walker Uzay-zamanda Lightlike Hiperyüzeyler ve Simetri Özellikleri

Bir $\left(\bar{M}, \bar{g}\right)$ yarı-Riemann uzay-zamanının bir alt uzayı V ve Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ olsun. Eğer her $X, Y, Z \in V$ için $\bar{R}\,(X, Y)\,Z \in V$ oluyorsa, V alt uzayına $\bar{R}$ ye göre eğrilik-invaryant'tır denir. Burada özel olarak $V = T\bar{M}$ alınırsa, $\bar{M}$ uzay-zamanı eğrilik-invaryant'tır denir. Benzer şekilde bir lightlike hiperyüzey $(L, g, S\,(TL))$ için şu önerme verilebilir:

Önerme 4.2.1 *Bir $M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S\,(TL))$ olsun. O halde*

1. *L lightlike hiperyüzeyinin eğrilik-invaryant olması için gerek ve yeter şart $M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanının sabit eğrilikli olmasıdır.*

2. *Eğer $S\,(TL)$ ekran dağılımı eğrilik-invaryant ise $M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanı düzdür.*

3. *Eğer $Rad\,(TL)$ null dağılımı eğrilik-invaryant ise $M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir.*

4. *Eğer $tr\,(TL)$ null transversal dağılımı eğrilik-invaryant ve $rank(S(TL)) > 1$ ise $M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanı ya düz ya da $S(TL)$ ekran dağılımı $L(F)$ fiber uzaylarına teğettir (Kang, 2012).*

$M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanının sabit eğrilikli olması durumunda, Teorem 3.1.1 den $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere L lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezikliktir. Uzay-zamanın sabit eğrilikli olmaması durumu ise aşağıda incelenecektir. ∂_t timelike vektör alanının, bir L lightlike hiperyüzeyine göre durumunu belirleyen aşağıdaki yardımcı teoremi biliyoruz:

Yardımcı teorem 4.2.2 *Bir $M_1^{n+1}\,(k, f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S\,(TL))$ olsun. O halde ∂_t vektör alanının (2.10) ayrışımına göre transversal izdüşümü ∂_t^{tr} olmak üzere*

i. *∂_t vektör alanı L ye teğet olamaz, yani $\partial_t^{tr} \neq 0$.*

ii. *∂_t vektör alanı L ye dik olamaz.*

iii. *$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanındaki bir sıfırdan farklı null U vektör alanı için $\bar{g}(U,\partial_t) \neq 0$ dır (Kang, 2012).*

Görüdüğü üzere ∂_t vektör alanı L lightlike hiperyüzeyinin $RadTL$ radikal uzayına veya $tr(TL)$ transversal vektör demetine ait olamaz. Ancak ∂_t vektör alanı $S(TL)$ ekran dağılımına ait veya dik olabilir.

Önerme 4.2.3 *Sabit eğrilikli olmayan bir $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ ve $rank(S(TM)) > 1$ olsun. Aşağıdaki (i) ˜ (iii) koşullarından birinin sağlandığını varsayalım:*

i. *η paraleldir, yani her $X,Y \in \Gamma(TL)$ ve $N \in \Gamma(tr(TL))$ için $\eta(Y) = \bar{g}(Y,N)$ olmak üzere $\nabla_X \eta(Y) = 0$,*

ii. *Ekran ikinci temel formu h^* paraleldir,*

iii. *Her $X,Y \in \Gamma(TL)$ ve $N \in \Gamma(tr(TL))$ için $(\nabla_X A)_N Y = (\nabla_Y A)_N X$ dir.*

Bu durumda $S(TL)$ ekran dağılımı $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğettir (Kang, 2012).

Teorem 4.2.4 *Sabit eğrilikli olmayan bir $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olsun. $S(TL)$ ekran dağılımının h^* ikinci temel tensörünün paralel olması ve f fonksiyonu sabit olmayan diferensiyellenebilir bir fonksiyon olması durumunda, eğer L lightlike hiperyüzeyi yerel simetrik ise total umbiliktir.*

İspat: Şimdi $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir $(L,g,S(TL))$ lightlike hiperyüzeyini ele alalım. (4.2) eşitliğinden $\bar{R}$ Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevi her $X,Y,Z \in \Gamma(TL)$ vektör alanı için

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{\nabla}_W \bar{R}\right)(X,Y)Z &= W\left[\frac{(f')^2+k}{f^2}\right](\bar{g}(Y,Z)X-\bar{g}(X,Z)Y) \\
&+W\left[\frac{ff''-\left((f')^2+k\right)}{f^2}\right](\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)Y \\
&-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)X+(\bar{g}(Y,\partial_t)g(X,Z) \\
&-\bar{g}(X,\partial_t)g(Y,Z))\partial_t) \\
&+\frac{ff''-\left((f')^2+k\right)}{f^2}((\bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\bar{g}(X,Z) \\
&-\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\bar{g}(Y,Z))\partial_t+(\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z) \\
&-\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\bar{\nabla}_W\partial_t+\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)Y \\
&-\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)X+\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}\left(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)Y \\
&-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}\left(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)X)
\end{aligned}
$$

olur. (Güneş, et al., 2003) çalışması Yardımcı Teorem 3.2 den biliyoruz ki her $X,Y,Z\in\Gamma(TL)$ için

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{\nabla}_W \bar{R}\right)(X,Y)Z &= (\nabla_W R)(X,Y)Z+B(W,R(X,Y)Z)N \\
&+(\nabla_W B)(X,Z)A_N Y-(\nabla_W B)(X,Z)\tau(Y)N \\
&+B(X,Z)(\nabla_W A_N)Y+B(X,Z)B(W,A_N Y)N \\
&-(\nabla_W B)(Y,Z)A_N X-B(Y,Z)(\nabla_W A_N)X \\
&-B(Y,Z)B(W,A_N X)N+(\nabla_W(\nabla_X B))(Y,Z)N \\
&-(\nabla_W(\nabla_Y B))(X,Z)N+B(Y,Z)(\nabla_W\tau)(X)N \\
&-B(Y,Z)\tau(X)A_N W+\tau(X)\tau(W)B(Y,Z)N \\
&+(\nabla_Y B)(X,Z)A_N W-(\nabla_Y B)(X,Z)\tau(W)N \\
&-(\nabla_X B)(Y,Z)A_N W\quad+(\nabla_X B)(Y,Z)\tau(W)N \\
&-B(X,Z)(\nabla\tau)(Y)N+B(X,Z)\tau(Y)A_N W \\
&+B(X,Z)\tau(Y)\tau(W)N-(\nabla_{\nabla_W X}B)(Y,Z)N \\
&+(\nabla_{\nabla_W Y}B)(X,Z)N-\bar{R}(h(W,X),Y)Z \\
&-\bar{R}(X,h(W,Y))Z-\bar{R}(X,Y)h(W,Z) \\
&+(\nabla_W B)(Y,Z)\tau(X)N
\end{aligned}
$$

olur. L lightlike hiperyüzeyinin Riemann eğrilik tensörü R ve quasi-ortonormal bazı (2.9) daki gibi olmak üzere, R eğrilik tensörünün $W \in \Gamma(TL)$ vektör alanına göre kovaryant türevi yukarıdaki eşitlik kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_W R)(X,Y)Z &= W\left[\frac{(f')^2+k}{f^2}\right](\bar{g}(Y,Z)X-\bar{g}(X,Z)Y) \\
&+W\left[\frac{ff''-\left((f')^2+k\right)}{f^2}\right](\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)Y \\
&-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(Z,\partial_t)X+(\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z) \\
&-\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\partial_t) \\
&+\frac{ff''-\left((f')^2+k\right)}{f^2}((\bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\bar{g}(X,Z) \\
&-\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\bar{g}(Y,Z))\partial_t+(\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,Z) \\
&-\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,Z))\bar{\nabla}_W\partial_t+\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)Y \\
&-\bar{g}(Z,\partial_t)\bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)X+\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}\left(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)Y \\
&-\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}\left(Z,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)X)-B(W,R(X,Y)Z)N \\
&-(\nabla_W B)(X,Z)A_NY+(\nabla_W B)(X,Z)\tau(Y)N \\
&-B(X,Z)(\nabla_W A_N)Y-B(X,Z)B(W,A_NY)N \\
&+(\nabla_W B)(Y,Z)A_NX+B(Y,Z)(\nabla_W A_N)X \\
&+B(Y,Z)B(W,A_NX)N-(\nabla_W(\nabla_X B))(Y,Z)N \\
&+(\nabla_W(\nabla_Y B))(X,Z)N-B(Y,Z)(\nabla_W\tau)(X)N \\
&+B(Y,Z)\tau(X)A_NW-\tau(X)\tau(W)B(Y,Z)N \\
&-(\nabla_Y B)(X,Z)A_NW+(\nabla_Y B)(X,Z)\tau(W)N \\
&+(\nabla_X B)(Y,Z)A_NW-(\nabla_X B)(Y,Z)\tau(W)N \\
&+B(X,Z)(\nabla\tau)(Y)N-B(X,Z)\tau(Y)A_NW \\
&-B(X,Z)\tau(Y)\tau(W)N+(\nabla_{\nabla_W X}B)(Y,Z)N \\
&-(\nabla_{\nabla_W Y}B)(X,Z)N+\bar{R}(h(W,X),Y)Z \\
&+\bar{R}(X,h(W,Y))Z+\bar{R}(X,Y)h(W,Z) \\
&-(\nabla_W B)(Y,Z)\tau(X)N \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

L lightlike hiperyüzeyinin yerel simetrik olduğu kabul edilirse, (4.3) eşitliğinde $X = Z = \xi$ alındığında

$$\begin{aligned} 0 &= W\left[\frac{ff'' - \left((f')^2 + k\right)}{f^2}\right]\left((\bar{g}(\xi, \partial_t))^2 Y - \bar{g}(Y, \partial_t)\,\bar{g}(\xi, \partial_t)\,\xi\right) \\ &\quad + \frac{ff'' - \left((f')^2 + k\right)}{f^2}\left(\bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}\left(\xi, \bar{\nabla}_W \partial_t\right) Y\right. \\ &\quad - \bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}\left(Y, \bar{\nabla}_W \partial_t\right)\xi + \bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}\left(\xi, \bar{\nabla}_W \partial_t\right) Y \\ &\quad \left.- \bar{g}(Y, \partial_t)\,\bar{g}\left(\xi, \bar{\nabla}_W \partial_t\right)\xi\right) - B(W, R(\xi, Y)\,\xi)\,N \\ &\quad + (\nabla_W B)(Y, \xi)\,A_N \xi - (\nabla_W (\nabla_\xi B))(Y, \xi)\,N \\ &\quad + (\nabla_W (\nabla_Y B))(\xi, \xi)\,N + (\nabla_{\nabla_W \xi} B)(Y, \xi)\,N \\ &\quad + \bar{R}(\xi, h(W, Y))\,\xi - (\nabla_W B)(Y, \xi)\,\tau(\xi)\,N \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. h^* ikinci temel formu paralel olduğundan, yukarıdaki önerme yardımıyla $S(TL)$ ekran dağılımı $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğettir. Dolayısıyla $S(TL)$ ekran dağılımı tanım gereğince ∂_t vektör alanına diktir.
$Y \in S(TL)$ alınırsa $\bar{g}(Y, N) = 0$ ve $\bar{g}(Y, \partial_t) = 0$ sonuçlarına ulaşılır. Ayrıca (4.1) eşitliği ve Yardımcı Teorem 4.1.2 den

$$\bar{\nabla}_W \partial_t = \bar{\nabla}_{\hat{W}} \partial_t = \frac{f'}{f}\left(W + \bar{g}(W, \partial_t)\,\partial_t\right)$$

bulunur. (4.2) eşitliğinden bulunan

$$\bar{g}\left(\bar{R}(\xi, N)\,\xi, N\right) = \frac{(f')^2 + k}{f^2} - \frac{2\left(ff'' - \left((f')^2 + k\right)\right)}{f^2}\bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}(N, \partial_t)$$

ifadesi ve yukarıdaki eşitlik kullanılarak (4.4) eşitliğinin her iki tarafının N vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\left(ff'' - \left((f')^2 + k\right)\right)}{f^2} \cdot \frac{f'}{f}\bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}(W, Y) \\ &\quad + B(W, Y)\left(\frac{(f')^2 + k}{f^2} - \frac{2\left(ff'' - \left((f')^2 + k\right)\right)}{f^2}\bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}(N, \partial_t)\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Bu aşamada, eğer

$$\frac{(f')^2 + k}{f^2} - \frac{2\left(ff'' - \left((f')^2 + k\right)\right)}{f^2}\bar{g}(\xi, \partial_t)\,\bar{g}(N, \partial_t) = 0$$

olduğu kabul edilirse, $\bar{g}(\xi, \partial_t) \neq 0$ ve $\frac{ff'' - \left((f')^2 + k\right)}{f^2} \neq 0$ olduğundan, (4.5) eşitliğinden $f' = 0$ bulunur. Fakat f fonksiyonu sabit olmadığından, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (4.5) eşitliğinden

$$B(W, Y) = \frac{\frac{\left(ff'' - \left((f')^2 + k\right)\right)}{f^2} . \frac{f'}{f} \bar{g}(\xi, \partial_t) \bar{g}(W, Y)}{\left(\frac{(f')^2 + k}{f^2} - \frac{2\left(ff'' - \left((f')^2 + k\right)\right)}{f^2} \bar{g}(\xi, \partial_t) \bar{g}(N, \partial_t)\right)}$$

elde edilir. Bu ise hiperyüzeyin total umbilik olduğu anlamına gelir. □

$M_1^{n+1}(k, f)$ Robertson-Walker uzay-zamanının sabit eğrilikli olması durumunda ise aşağıdaki sonuç elde edilir:

Önerme 4.2.5 *$M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S(TL))$ olsun. Eğer hiperyüzeyin h ikinci temel formu paralel ise, $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir (Kang, 2012).*

Sonuç 4.2.6 *$M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L, g, S(TL))$ olsun. $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı ve hiperyüzeyin h ikinci temel formu paralel olmak üzere, L lightlike hiperyüzeyin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.*

İspat: Yukarıda verilen önerme gereğince, h ikinci temel formunun paralel olması durumunda $M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir. Her sabit eğrilikli uzay yerel simetrik olduğundan, Teorem 3.1.3'e göre L lightlike hiperyüzeyin yerel simetrik olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır. □

$M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının Ricci tensörü ise aşağıdaki önerme ile tanımlanıyor:

Önerme 4.2.7 *$M_1^{n+1}(k, f)$ uzay-zamanının Ricci tensörü her $X, Y \in M_1^{n+1}(k, f)$ için*

$$\bar{R}ic(X, Y) = -\alpha n \bar{g}(X, Y) + \beta\{(n-1)\bar{g}(X, \partial_t)\bar{g}(Y, \partial_t) - \bar{g}(X, Y)\}$$

eşitliği ile tanımlıdır (Kang, 2012).

$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olmak üzere, bu hiperyüzeyin Ricci tensörü $R^{(0,2)}$ ile gösterilirse, her $X,Y\in\Gamma(TL)$ için (2.33) ve (2.37) eşitliklerinden

$$R^{(0,2)}(X,Y)=\bar{R}ic(X,Y)-B(X,Y)TrA_N+g\left(A_\xi^*Y,A_NX\right)+g\left(\bar{R}(\xi,Y)X,N\right) \tag{4.6}$$

bulunur. (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(\bar{R}(\xi,Y)X,N\right) &= \alpha\bar{g}(X,Y)+\beta\{\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)-\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,N) \\ &\quad -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,Y)\bar{g}(N,\partial_t)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik, yukarıdaki önerme ile birlikte (4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa, $R^{(0,2)}$ tensörü

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) &= -\alpha(n-1)\bar{g}(X,Y)+\beta\{n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)-\bar{g}(X,Y) \\ &\quad -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(Y,\partial_t)\bar{g}(X,N)-\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,Y)\bar{g}(N,\partial_t)\} \\ &\quad -B(X,Y)TrA_N+g\left(A_\xi^*Y,A_NX\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur.

Sonuç 4.2.8 *Düz bir $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ ve $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı olsun. Bu durumda L hiperyüzeyinin Ricci düz olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.*

İspat: $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının düz olması durumunda $\beta=\alpha=0$ olur. (4.7) eşitliğinden

$$R^{(0,2)}(X,Y)=-B(X,Y)TrA_N+g\left(A_\xi^*Y,A_NX\right)$$

bulunur. L hiperyüzeyinin Ricci düz olması durumunda, $X=\xi$ alınırsa

$$0=g\left(A_\xi^*Y,A_N\xi\right)$$

olur. $A_N\xi\neq0$ olduğundan, $A_\xi^*=0$ olarak bulunur. Yani L lightlike hiperyüzeyi total geodeziktir. Diğer taraftan, eğer L total geodezik kabul edilirse, (4.7) eşitliğinden ve $\alpha=\beta=0$ olduğu gerçeğinden $R^{(0,2)}=0$ olacağı açıktır. $\square$

Teorem 4.2.9 *$M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının bir lightlike hiperyüzeyi $(L,g,S(TL))$ olsun. $A_N\xi$ sıfırdan farklı bir vektör alanı ve $S(TL)$ ekran dağılımı, $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğet olmak üzere, eğer L lightlike hiperyüzeyi Ricci simetrik ise, $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir.*

İspat: (4.7) eşitliğinin kovaryant türevini alırsak

$$\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y) = W\left(R^{(0,2)}(X,Y)\right) - R^{(0,2)}(\nabla_W X,Y) - R^{(0,2)}(X,\nabla_W Y)$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_W R^{(0,2)}\right)(X,Y) \;=\;& -W(\alpha)(n-1)\,g(X,Y) \\
& -\alpha(n-1)\{B(W,X)\,\bar{g}(N,Y)+B(W,Y)\,\bar{g}(N,X)\} \\
& +W(\beta)\{n\bar{g}(X,\partial_t)\,\bar{g}(Y,\partial_t)-g(X,Y) \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\,\bar{g}(Y,\partial_t)\,\bar{g}(X,N)-\bar{g}(\xi,\partial_t)\,g(X,Y)\,\bar{g}(N,\partial_t)\} \\
& +\beta\{n\bar{g}(Y,\partial_t)\left[B(W,X)\,\bar{g}(N,\partial_t)+\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\right] \\
& +n\bar{g}(X,\partial_t)\left[B(W,Y)\,\bar{g}(N,\partial_t)+\bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\right] \\
& -B(W,X)\,\bar{g}(N,Y)-B(W,Y)\,\bar{g}(X,N) \\
& -\bar{g}(Y,\partial_t)\,\bar{g}(X,N)\left[-\bar{g}\left(A_\xi^*W,\partial_t\right)+\bar{g}\left(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\right] \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\,\bar{g}(X,N)\left[B(W,Y)\,\bar{g}(N,\partial_t)+\bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\right] \\
& +\bar{g}(Y,\partial_t)\,\bar{g}(\xi,\partial_t)\,\bar{g}(X,A_N W) \\
& -g(X,Y)\,\bar{g}(N,\partial_t)\left[-\bar{g}\left(A_\xi^*W,\partial_t\right)+\bar{g}\left(\xi,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\right] \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\,g(X,Y)\left[-\bar{g}(A_N W,\partial_t)+\bar{g}\left(N,\bar{\nabla}_W\partial_t\right)\right] \\
& -\bar{g}(\xi,\partial_t)\,\bar{g}(N,\partial_t)\left[B(W,X)\,\bar{g}(N,Y)+B(W,Y)\,\bar{g}(X,N)\right]\} \\
& -(\nabla_W B)(X,Y)\,trA_N - B(X,Y)\,W(trA_N) \\
& +B(Y,(\nabla_W A_N)X)
\end{aligned}$$

bulunur. $Y = W = \xi$ alınırsa, L lightlike hiperyüzeyinin Ricci simetrik olduğu düşünülerek, (2.15) ve (2.22) eşitlikleri yardımıyla yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(\beta)\{n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}(\xi,\partial_t) - (\bar{g}(\xi,\partial_t))^2\bar{g}(X,N)\} \\ &\quad +\beta\{n\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_\xi\partial_t\right) + n\bar{g}(X,\partial_t)\bar{g}\left(\xi,\bar{\nabla}_\xi\partial_t\right) \\ &\quad -\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,N)\bar{g}\left(\xi,\bar{\nabla}_\xi\partial_t\right) - \bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,N)\bar{g}\left(\xi,\bar{\nabla}_\xi\partial_t\right) \\ &\quad +(\bar{g}(\xi,\partial_t))^2\bar{g}(X,A_N\xi) - (\nabla_\xi B)(X,\xi)\,trA_N \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $X \in S(TL)$ alınırsa, $S(TL)$ ekran dağılımı $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanının spacelike dilimlerine teğet olduğundan, $\bar{g}(X,\partial_t) = 0$ ve $\bar{g}(X,N) = 0$ olur. Bu ifadeler yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında (2.23) ve (2.31) eşitlikleri de kullanılarak

$$0 = \beta\{n\bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_\xi\partial_t\right) + (\bar{g}(\xi,\partial_t))^2\bar{g}(X,A_N\xi) \tag{4.8}$$

bulunur. (4.1) eşitliği ve Yardımcı Teorem 4.1.3'ten

$$\bar{\nabla}_\xi\partial_t = \bar{\nabla}_{\hat{\xi}-\bar{g}(\xi,\partial_t)\partial_t}\partial_t = \bar{\nabla}_{\hat{\xi}}\partial_t = \frac{f'}{f}\hat{\xi} = \frac{f'}{f}(\xi + \bar{g}(\xi,\partial_t)\partial_t)$$

ve

$$\bar{g}\left(X,\bar{\nabla}_\xi\partial_t\right) = \frac{f'}{f}\{g(X,\xi) + \bar{g}(\xi,\partial_t)\bar{g}(X,\partial_t)\} = 0$$

elde edilir. Böylece (4.8) eşitliğinden

$$0 = \beta(\bar{g}(\xi,\partial_t))^2\bar{g}(X,A_N\xi)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte $\bar{g}(\xi,\partial_t) \neq 0$ ve $A_N\xi \neq 0$ olacağından, $\beta = 0$ olmalıdır. Yani $M_1^{n+1}(k,f)$ uzay-zamanı sabit eğriliklidir. $\square$

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada yarı-Riemann uzay formlarında simetri tip ve yarı-simetri tip eğrilik koşullarına sahip lightlike hiperyüzeyler incelendi. Üçüncü bölümde bir lightlike hiperyüzeyin Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve ikinci temel formunun simetri tip ve yarı-simetri tip eğrilik koşulları ele alındı. Lightlike hiperyüzeylerin yerel simetrisi konusunda var olan teorem ve sonuçlara ek olarak, ekran dağılımının yerel simetri ile olan ilişkisine bakıldı. Bilinen bazı örneklerin yerel simetrikliği araştırıldı. Yarı-Riemann uzaylarda yerel simetrikliğin yerel olarak bir genellemesi olan ikinci mertebeden simetriklik incelendi. Yerel simetrikliğin doğal bir genellemesi olan yarı-simetriklik ile 2-simetriklik arasındaki ilişki bulundu. Yarı-simetriklik tanımına uygun olarak diğer bir genelleme olarak düşünülebilecek 2-yarısimetriklik kavramı tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi. Riemann eğrilik tensörünün diverjansının yok olduğu uzaylar olarak tarif edilen, harmonik eğrilikli lightlike hiperyüzeyler konusu işlendi. Ardından Ricci tensörünün eğrilik koşulları üzerinde duruldu. Ricci simetrik, Ricci yarı-simetrik ve bunların ikinci mertebeden eğrilik koşulları lightlike hiperyüzeylerde incelendi. Son olarak ikinci temel formun eğrilik koşulları ele alındı. Bu koşullara sahip lightlike hiperyüzeyler araştırıldı. Dördüncü bölümde Robertson-Walker uzay zamanında lightlike hiperyüzeyler konusu ele alınıp yerel simetri ve Ricci simetri eğrilik koşulları incelendi.

Burada yapılan çalışma, lightlike hiperyüzeylerde Duggal ve Bejancu tarafından geliştirilen yöntem üzerine kurulmuştur. Yöntemin yeni olması sebebiyle, daha çok çalışma yapılması gerektiği açıktır. Özellikle simetri tip eğrilik koşulları bu uzaylarda son on yıldır sadece birkaç makalede ele alınmıştır. Bu çalışmada en önemli üç tensör üzerinde durulmuştur. Riemann eğrilik tensörünün eğrilik koşulları üzerinde bazı sonuçlar incelenmeye çalışıldı. Ancak bu tensörün kovaryant türevlerinin ve eğrilik benzeri tensörlerin simetri koşulları üzerinde durulamamıştır. Yerel olarak ikinci mertebeden simetrik olan uzaylar ele alınmasına karşın, bu tür uzayların bir genellemesini yapmak için daha farklı yöntemlerin kullanılması gerekmektedir. Yarı simetrik lightlike hiperyüzeylerin yüksek mertebeden karşılıkları olan k-yarısimetrik uzaylar konusu diğer bir inceleme konusu olarak durmaktadır. Ricci tensörü için de benzeri hususlar düşünülebilir. Ricci tensörünün simetrikliği ve 2-simetrikliği incelenmesine rağmen yüksek mertebeden Ricci simetrik lightlike hiperyüzeyler bırakılmıştır. Aynı şekilde Ricci yarısimetrik uzayların yüksek mertebeden benzerleri de sonraki araştırmalara bırakılmıştır. Diğer bir konu da ikinci temel tensörün eğrilik koşullarıdır. Bunların yüksek mertebeden genellemeleri, üzerinde çalışılmaya değer konular arasındadır. Son olarak, bu çalışmada bahsedilen eğrilik koşulları arasındaki ilişkiler üzerinde bazı sonuçlar bulunmuş olmasına karşın, çok daha fazlası araştırılmayı beklemektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akivis, M. A. and Goldberg, V. V., 1999, Lightlike hypersurfaces on manifolds endowed with a conformal structure of Lorentzian signature, Acta Appl. Math., 57, 255-285.

Alekseevsky, D.V. and Galaev, A.S., 2011, Two-symmetric Lorentzian manifolds, J. Geom. Phys., 61, 23-31.

Anciaux, H., 2011, Minimal Submanifolds in Pseudo-Riemannian Geometry, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 186 p.

Atindogbe, C., Ezin, J.P. and Tossa, J., 2003, Pseudo-inversion of Degenerate Metrics, Int. J. Math. Math. Sci., 55, 3479-3501.

Atindogbe, C., Lungiambudila O. and Tossa, J., 2011, Pseudo-Szabó operators and lightlike Szabó hypersurfaces, Afr. Diaspora J. Math. (N.S.), Volume 11, Number 1, 1-23.

Atindogbe, C., Lungiambudila O. and Tossa, J., 2013, Scalar curvature and symmetry properties of lightlike submanifolds, Turk. J. Math., 37, 95-113.

Atindogbe, C. and Duggal, K.L., 2004, Conformal screen on lightlike hypersurfaces, Int. J. Pure Appl. Math., 11 (4), 421-442.

Backes, E. and Reckziegel, H., 1983, On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature, Math. Ann., 263, 419-433.

Beem, J.K. and Ehrlich , P.E., 1981, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, New York, 460 p.

Berndt, J., Console, S. and Olmos, C., 2003, Submanifolds and Holonomy, Chapman&Hall / CRC, USA, 336 p.

Berndt, J., Eschenburg, J.H., Naitoh, H. and Tsukada, K., 2005, Symmetric submanifolds associated with the irreducible symmetric R-spaces, Math. Ann., 332, 721-737

Besse A. L., 1987, Einstein Manifolds, Springer, Heidelberg, 516 p.

Blanco, O.F., Sánchez, M. and Senovilla, J.M.M, 2010, Complete classification of second-order symmetric spacetimes, J. Phys. Conf. Ser., 229, 012021.

Blanco, O.F., Sánchez, M. and Senovilla, J.M.M, 2011 a, 2nd-order symmetric Lorentzian manifolds II: structure and global properties, J. Phys. Conf. Ser., 314, 012021.

Blanco, O.F., Sánchez, M. and Senovilla, J.M.M, 2011 b, Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds, arXiv:1101.5503v2 [math.DG].

Boeckx, E., 1993, Einstein-like semi-symmetric spaces, Arch. Math., 29, 235-240.

Boeckx, H.E., 2005, A Case for Curvature: the Unit Tangent Bundle, Complex, Contact and Symmetric Manifolds In Honor of L. Vanhecke, O. Kowalski, E. Musso, D. Perrone (Eds), Birkhauser, Boston, 277 p.

Bonnor, W.B., 1972, Null hypersurfaces in Minkowski space-time, Tensor (N.S.), 24, 329-345.

Boothby, W., 1975, An introduction to differential manifolds and Riemannian geometry, Academic Press Inc., New York, 430 p.

Boubel, C. and Bergery, L.B., 2001, On Pseudo-Riemannian Manifolds Whose Ricci Tensor is Parallel, Geom. Dedicata, 86, 1-18.

Brickell, F. and Clark, R.S., 1970, Differentiable Manifolds: An Introduction, Van Nostrand Reinhold Company, London, 289 p.

Carfagna D'Andrea, A., Mazzocco, R. and Romani, G., 1994, Some characterizations of 2-symmetric submanifolds in spaces of constant curvature, Czechoslovak Math. J., 44, 691-711.

Carfagna D'Andrea, A. and Console, S., 1999, Immersions into the hyperbolic space invariant by reflections, Beitr. Algebra Geom., 40, 67-78.

Carmo, M.P., 1993, Riemannian Geometry, Birkhauser, Boston, 300 p.

Cartan, E., 1946, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2nd Ed., Gauthier-Villars, Paris, 394 p.

Cartan, E., 1951, Geometry of Riemannian Spaces, Translated by J. Glazebrook, Math Sci Press, Massachusetts, 507 p.

Chaki, M.C. and Ray, S., 1996, Space-Times with Covariant-Constant Energy-Momentum Tensor, Int. J. Theor. Phys., Vol. 35, No.5, 1027-1032.

Chen, B. and Veken, J.V., 2007, Spatial and Lorentzian surfaces in Robertson-Walker space times, J. Math. Phys., 48, 073509.

Chen, B. and Wei, S.W., 2008, Differential Geometry of Submanifolds of Warped Product Manifolds $I \times_f S^{m-1}(k)$, J. Geom., 91, 21-42.

Chern, S.S., do Carmo, M.P. and Kobayashi, S., 1970, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and Related Fields Conference Chicago 1968, 59-75.

Couty, R., 1957, Sur les transformations definis par le groupe d'holonomie infinitésimale, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 244, 553-555.

Couty, R., 1959, Sur les transformations des variétés riemanniennes et kähleriennes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 9, 147-248.

Dabrowska, M., Defever, F., Deszcz, R. and Kowalczyk, D., 2000, Semisym-metry and Ricci-semisymmetry for hypersurfaces of semi-Euclidean spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 67 (81), 103-111.

de Rham, G., 1952, Sur la Réductibilité d'un Espace de Riemann, Comment. Math. Helv., 26, 328-344.

Defever F. and Deszcz M., 1991, A Note On Geodesic Mappings of Pseudosymmetric Riemannian Manifolds, Colloq. Math., 62 (2), 313-319.

Defever, F., Deszcz, R., Verstraelen, L., 1997, On semisymmetric para-Kähler manifolds, Acta Math. Hungar., 74, 7-17.

Defever, F., Deszcz, R., Şenturk, Z., Verstraelen, L. and Yaprak, Ş., 1999, P.J. Ryan's problem in semi-Riemannian space forms, Glasg. Math. J., 41, 271-281.

Defever, F., 2000, Ricci-semisymmetric hypersurfaces, Balkan J. Geom. Appl., 5, 81-91.

Derdziński, A., 1980, Classification of Certain Compact Riemannian Manifolds with Harmonic Curvature and Non-parallel Ricci Tensor, Math. Z., 172, 273-280.

Derdziński, A., 1982, On compact Riemannian manifolds with harmonic curvature, Math. Ann., 259, 145-152.

Duggal, K.L., 2002, Constant scalar curvature and warped product globally null manifolds, J. Geom. Phys., 43, 327-340.

Duggal, K.L. and Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academics Publishers, 301 p.

Duggal K.L. and Giménez, A., 2005, Lightlike hypersurfaces of Lorentzian manifolds with distinguished screen, J. Geom. Phys., 55, 107-122.

Duggal K.L. and Jin, D. H., 2003, Totally Umbilical Lightlike Submanifolds, Kodai Math. J., 26, 49-68.

Duggal K.L. and Jin, D.H., 2007, Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds, World Scientific, 293 p.

Duggal, K.L. and Şahin, B., 2010, Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Birkhauser Verlag AG, Germany, 475 p.

Erdogan, M. and Ikawa, T., 1995, On conformally flat Lorentzian spaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor, Indian J. Pure Appl. Math., 26, 417-424.

Ferus, D., 1974 a, Produkt-Zerlegung von Immersionen mit paraller zweiter Fundamentalform, Math. Ann., 211, 1-5.

Ferus, D., 1974 b, Immersions with parallel second fundamental form, Math. Z., 140, 87-93.

Ferus, D., 1974 c, Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele, Manuscripta Math., 12, 153-162.

Ferus, D., 1980, Symmetric submanifolds of Euclidean space, Math. Ann., 247, 81–93.

Fialkow, A., 1938, Hypersurfaces of a space of constant curvature, Ann. of Math., 39, 762-785.

Galstyan, N.G., 1967, The rigging of isotropic hypersurfaces, Dokl. Akad. Nauk. Arm. SSR, 45, 97-100.

Gilkey, P.B., 2007, The Geometry of Curvature Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 376 p.

Gutierrez, M. and Olea, B., 2012, Lightlike Hypersurfaces in Lorentzian Manifolds, arXiv:1207.1030v1 [math.DG].

Güneş, R., Şahin, B. ve Kılıç, E., 2003, On Lightlike Hypersurfaces of a Semi-Riemannian Space Form, Turk. J. Math., 27, 283-297.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N., 2003, Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 256 s.

Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R., 1973, The Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge University Press, USA, 391 p.

Helgason, S., 1962, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 486 p.

Honda, K., 2003, Conformally Flat Semi-Riemannian Manifolds with Commuting Curvature and Ricci Operators, Tokyo J. Math., 26 (1), 241-260.

Jin, D.H., 2009, Lightlike Hypersurfaces With Totally Umbilical Screen Distributions, Jour. Chung. Math. Soc., 22, 409-416.

Jin, D.H., 2010, Screen Conformal Einstein Lightlike Hypersurfaces of a Lorentzian Space Form, Commun. Korean Math. Soc., 25 (2), 225-234.

Kammerer, J.B., 1967, Théorème de Peering et hypersurfaces isotropes, Rend. Circ. Mat. Palermo (série II), 16, 129-202.

Kang, T.H., 2012, On Lightlike Hypersurfaces of a GRW space-time, Bull. Korean. Math. Soc., 49 (4), 863-874.

Kath, I., 2010, Classification results for pseudo-Riemannian symmetric spaces, Handbook of Pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry, V. Cortes (Ed.), EMS, Germany, 946 p.

Katsuno, K., 1980, Null hypersurfaces in Lorentzian manifolds: I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 88, 175-182.

Katsuno, K., 1981, Null hypersurfaces in Lorentzian manifolds: II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 89, 525-532.

Ki, U. and Nakagawa, H., 1987, Submanifolds with harmonic curvature, Tsukuba J. Math., Vol. 10, No. 2, 285-292.

Ki, U., Nakagawa, H. and Umehara, M., 1987, On complete hypersurfaces with harmonic curvature in a Riemannian manifold of constant curvature, Tsukuba J. Math., Vol. 11, No.1, 61-76.

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1963 a, Foundations of Differential Geometry, Vol. 1, Interscience, New York, 329 p.

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1963 b, Foundations of Differential Geometry, Vol. 2, Interscience, New York, 470 p.

Kovaljev, P.I., 1973, O ne katorih svojstvah structuri, opredelaemoj tenzoram Rimana na prostranstve affinnoj svajznocti, Ukrain. Geometr. Sb., 13, 95-100.

Kowalski, O., 1996, An explicit classification of 3-dimensional Riemannian spaces satisfying R(X,Y)·R=0, Czechoslovak Math. J., 46 (121), 427-474.

Kowalski, O. and Kulich, I., 1987, Generalized symmetric submanifolds of Euclidean spaces, Math. Ann., 277, 67-78.

Kriele, M., 2001, Spacetime: Foundations of General Relativity and Differential Geometry, Springer, Germany, 436 p.

Kühnel, W., 2006, Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds 2nd Ed., AMS, USA, 380 p.

Küpeli, D.N., 1987, On null submanifolds in spacetimes, Geom. Dedicata, 23 (1), 33–51.

Kwon, J., Pyo, Y. and Suh, Y.J., 2003, On semi-Riemannian manifolds satisfying the second Bianchi identity, J. Korean Math. Soc., 40 (1), 129-167.

Lichnerowicz, A., 1952, Courbure, nombres de Betti et espaces symmetriques, Proc. Internat. Congress Math. (Cambridge, 1950), Amer. Math. Soc., Vol. II, 216-223.

Lumiste, Y.G., 1991, Semisymmetric Submanifolds, Itogi Nauki i Tekhn. Probl. Geom., 23, 3-28.

Lumiste, Ü., 2009, Semiparallel Submanifolds in Space Forms, Springer, 306 p.

Magid, M.A., 1982, Shape operators of Einstein hypersurfaces in indefinite space forms, Proc. Amer. Math. Soc., 84, 237-242.

Mirzoyan, V.A., 1991 a, Ric-semisymmetric manifolds, Itogi Nauki i Tekhniki, Probl. Geom., vol. 23, VINITI, Moscow, 29–66.

Mirzoyan, V.A., 1991 b, Ric-Semisymmetric Submanifolds, Itogi Nauki Tekhn. Probl. Geom., vol. 23, VINITI, Moscow 1991, 29-66.

Mirzoyan, V.A., 1992, Structure theorems for Riemannian Ric-semisymmetric spaces, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 6, 80-89.

Mirzoyan, V.A., 1993, Submanifolds with parallel Ricci tensor in Euclidean spaces, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 9, 22-27.

Mirzoyan, V.A., 2000, Classification of Ric-semiparallel hypersurfaces in Euclidean spaces, Mat. Sb., 9 (191), 65-80.

Mirzoyan, V.A., 2006, Structure theorems for Ricci-semisymmetric submanifolds and geometric description of a class of minimal semi-Einstein submanifolds, Mat. Sb., 7 (197), 47-76.

Naitoh, H., 1981, Totally real parallel submanifolds in $P^n(c)$, Tokyo J. Math., 4, 279-306.

Naitoh, H., 1983 a, Parallel submanifolds of complex space forms I, Nagoya Math. J., 90, 85-117.

Naitoh, H., 1983 b, Parallel submanifolds of complex space forms II, Nagoya Math. J., 91, 119-149.

Naitoh, H., 1986, Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces, Tsukuba J. Math., 10, 215-242.

Naitoh, H. and Takeuchi, M., 1989, Symmetric submanifolds of symmetric spaces, Sugaku Expositions, 2, 157-188.

Nakagawa, H. and Takagi, R., 1976, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28, 638-667.

Nakahara, M., 2003, Geometry, Topology and Physics 2nd Ed., IOP Publishing Ltd., London, 583 p.

Nikolaevskij,Y.A., 1994, Totally umbilical submanifolds of symmetric spaces, Mat. Fiz. Anal. Geom., 1, 314-357.

Nomizu, K., 1968, On Hypersurfaces satisfying a Certain Condition on The Curvature Tensor, Tohoku Math. J., 20, 46-59.

Omachi E., 1986, Hypersurfaces With Harmonic Curvature in a Space of Constant Curvature, Kodai Math. J., 9, 170-174.

O'neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 469 p.

Onishchik, A.L., 1980, On totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, Geom. Metody Zadachakh Algebry Anal., 2, 64-85.

Peterson, P., 2006, Riemannian Geometry 2nd Ed., Springer, USA, 404 p.

Petrov, A.Z., 1966, New methods in the general theory of relativity, Nauka, Moscow, 496 p.

Petrov, A.Z., 1969, Einstein spaces, Pergamon Press, Hungary, Oxford and New York, 411 p.

Postnikov, M.M., 2001, Geometry VI: Riemannian Geometry, Springer-Verlag, Germany, 521 p.

Prasolov, V.V., 1994, Problems and Theorems in Linear Algebra (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 134), AMS, USA, 223 p.

Ryan, P.J., 1971, Hypersurfaces with parallel Ricci tensor, Osaka J. Math., 8, 251-259.

Sánchez, C., 1985, k-symmetric submanifolds of R^n, Math. Ann., 270, 297–316.

Sekigawa, K., 1969, On 4-dimensional connected Einstein spaces satisfying the condition $R(X,Y)\cdot R = 0$, Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A, 7, 29-31.

Sekigawa, K., 1972, On some hypersurfaces satisfying R(X,Y)$\cdot$R$_1$ = 0, Hokkaido Math. J., 1 (1), 102-109.

Sekigawa, K., 1973, On some 3-dimensional Riemannian manifolds, Hokkaido Math. J., 2 (2), 259-270.

Sekigawa, K., 1975, On some 3-dimensional complete Riemannian manifolds satisfying R(X,Y)$\cdot$R = 0, Tohoku Math. J., 27, 561-568.

Sekigawa, K. and Takagi, H., 1971, On conformally flat spaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor, Tohoku Math. J., 23 (1), 1-11.

Sekigawa, K. and Tanno, S., 1970, Sufficient conditions for a Riemannian manifold to be locally symmetric, Pacific J. Math., 34 (1), 157-162.

Senovilla, J.M.M., 2008, 2nd-Order Symmetric Lorentzian Manifolds I: Characterization and General Results, Classical Quantum Gravity, 25, 245011.

Shirokov, P.A., 1925, Constant vector fields and second-order tensors in Riemannian spaces, Izv. Fiz.-Mat. Obsch. KGU, Ser. 2, 25, 86-114.

Sinjukov, N.S., 1956, O geodeziceskom otobrazenii rimanovih prostranstv, Trudy Vsesojuz. Mat. Sezda, 167-168.

Sinjukov, N.S., 1961, Ob odnom klasse Rimanovih Prostranstv, Naučh. Ezegodnik OGI, Fiz.-Mat., F.-T. i In.-T. Fiziki, vip. 2, 122-126.

Sinjukov, N.S., 1962, Poctu simmetriceskie Rimanovi proctranstva, Pervaja Vsesojuz. Geometr. Konferencia, Tezisi Dokladov, Kiev, 84 p.

Strübing,W., 1979, Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds, Math. Ann., 245, 37-44.

Szabo, Z.I., 1982, Structure theorems on Riemarmian spaces satisfying R(X,Y)$\cdot$R = 0. I. The local version, J. Differential Geom., 17, 531-532.

Szabo, Z.I., 1984, Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying R(X,Y)$\cdot$R = 0, Acta Sci. Math., 47, Nos. 3-4, 321-348.

Szabo, Z.I., 1985, Structure Theorems on Riemannian spaces satisfying R(X,Y)·R = 0. II. Global version, Geom. Dedicata, 19, 65-108.

Şahin, B., 2007, Lightlike Hypersurfaces of Semi-Euclidean Spaces Satisfying Curvature Conditions of Semisymmetry Type, Turk. J. Math., 31, 139-162.

Takeuchi, M., 1981, Parallel submanifolds of space forms, Manifolds and Lie Groups, Papers in Honor of Y. Matsushima, Prog. Math., 14, 429-447.

Tanno, S., 1969, Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor, Tohoku Math. J., 21, 297-303.

Tanno, S., 1971, A class of Riemannian manifolds satisfying R(X,Y)·R = 0, Nagoya Math. J., 42, 67-77.

Tanno, S., 1972, Curvature Tensors and Covariant Derivatives, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 96 (1), 233-241.

Tsukada, K., 1985, Parallel submanifolds in a quaternion projective space, Osaka J. Math., 22, 187-241.

Tsukada, K., 2005, Symmetric Submanifolds of Riemannian Symmetric Spaces and Symmetric R-spaces, Complex, Contact and Symmetric Manifolds In Honor of L. Vanhecke, O. Kowalski, E. Musso, D. Perrone (Eds), Birkhauser, Boston, 277 p.

Tsukada, K. and Naitoh, H., 2007, Classification of symmetric submanifolds of symmetric spaces, Sugaku expositions, AMS, 20, 149-168.

Umehara, M., 1986, Hypersurfaces with harmonic curvature, Tsukuba J. Math., Vol. 10, No. 1, 79-88.

Van de Woestijne, I. and Verstraelen, L., 1987, Semi-symmetric Lorentzian Hypersurfaces, Tohoku Math. J., 39, 81-88.

Vazquez, M.B., Rio, E.G., Gilkey, P., Nikčević, S. and Lorenzo, R.V., 2009, The Geometry of Walker Manifolds, Morgan & Claypool, 159 p.

Vilms, J., 1972, Submanifolds of Euclidean space with parallel second fundamental form, Proc. Am. Math. Soc. 32, 263-267.

Walden, R., 1973, Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Spären, Manuscripta Math., 10, 91-102.

Wu, H., 1964, On the de Rham decomposition theorem, Illinois J. Math., 8, 291–311.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Süleyman Cengiz
Doğum Yeri	: Kayseri
Doğum Tarihi	: 1972
Medeni Hali	: Evli, 2 Çocuk

Eğitim ve Akademik Durum:

Lise	: 1984-1991 Samsun Anadolu Lisesi
Lisans	: 1991-1996 Boğaziçi Ün. Matematik Bölümü
Yabancı Dil	: İngilizce

İş Tecrübesi:

1996-2009	Matematik Öğretmenliği
2009…	Çankırı Karatekin Ün. Matematik Bölümü Öğr. Gör.