Fuzzy Gruplarından Elde Edilen Fuzzy Projektif Geometriler Üzerine

Samet Erden

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Haziran 2013

On The Fuzzy Projective Geometries From Fuzzy Groups

Samet Erden

MASTER OF SCIENCE THESIS
Department of Mathematics and Computer Sciences
June 2013

Fuzzy Gruplarından Elde Edilen Fuzzy Projektif Geometriler Üzerine

Samet Erden

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ayşe Bayar

Haziran 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Samet Erden' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Fuzzy Gruplarından Elde Edilen Fuzzy Projektif Geometriler Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, fuzzy projektif geometriden elde edilen fuzzy grup ve fuzzy gruptan elde edilen fuzzy projektif geometri oluşturulmuştur. Birinci bölümde, grup teorisindeki ve projektif geometrideki temel tanım ve kavramlar tanıtılmıştır. İkinci bölümde, fuzzy kümeleri ve fuzzy alt grupları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde, Fano fuzzy düzlemine karşılık gelen fuzzy grupları bulunmuş ve fuzzy gruplarından Fano fuzzy düzlemi elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, Fano fuzzy düzlemi için üçüncü bölümde yapılanlar, n-boyutlu fuzzy projektif uzay için yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Projektif Uzayı, Fuzzy Projektif Düzlemi, Fano Fuzzy Düzlemi, Fuzzy Alt Grubu

SUMMARY

In this thesis; fuzzy group from a fuzzy projective geometry and fuzzy projective geometry from a fuzzy group are constructed. In the first chapter, fundamental definitions and concepts of group theory and projective geometry are given. Fuzzy sets and fuzzy sabgroups are focused on in the section chapter. In the third chapter, fuzzy groups corresponding to fuzzy Fano plane are found and fuzzy Fano plane from fuzzy groups are obtained. Fourthly, the practices that are done for Fano fuzzy plane in the third chapter are applied to n-dimensional fuzzy projective space.

Keywords: Fuzzy Prpjective Space, Fuzzy Projective Plane, Fuzzy Fano Plane, Fuzzy Subgroups

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Doç. Dr. Ayşe Bayar'a

ve beni her zaman destekleyen,

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Bu çalışmada, fuzzy gruplarından elde edilen fuzzy projektif geometriler incelenmiştir. İlk olarak Fano fuzzy düzleminin ve daha sonra n-boyutlu fuzzy projektif uzayının elde edilişi incelenmiştir.

Birinci bölümde, tez boyunca kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Öncelikle grup, alt grup, otomorfizm grubu, simetrik grup, dihedral grup ve koset tanımlanmış. Daha sonra projektif uzay ve projektif düzlem yapıları tanıtılmıştır.

İkinci bölüme fuzzy kavramı hakkında genel bilgi verilerek başlanmıştır. Daha sonra fuzzy küme tanımı verilerek örneklerle açıklanmıştır. Fuzzy alt grup tanımı verilerek ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. Son olarak üçüncü ve dördüncü bölümde sıkça kullanacağımız projektif uzay tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Fano fuzzy düzleminin otomorfizm grubu incelenmiştir. Fano fuzzy düzlemine karşılık gelen fuzzy grupları incelendikten sonra bu fuzzy gruplarından elde edilen Fano fuzzy düzlemi anlatılmıştır.

Son bölümde ise n-boyutlu fuzzy projektif uzayından elde edilen fuzzy grupları verilerek başlanmıştır. Daha sonra fuzzy gruplarından elde edilen n-boyutlu fuzzy projektif uzayı verilmiş. Son olarak bu bölüme örnek teşkil etmesi için fuzzy gruplarından elde edilen $PG(2,3)$ fuzzy projektif düzlemi oluşturulmuştur.

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Cebirsel ve Geometrik Yapılar

1.1.1 Bazı Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.1 A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya tanımlı bir

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longrightarrow & (x*y) \end{array}$$

fonksiyonuna A içinde **ikili işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A \times A$ nın herhangi bir (a,b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a+b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.1 Tamsayıların ve gerçel sayıların toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri en çok bilinen ikili işlemlerdir.

Tanım 1.2 G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **grup** denir (Çallıalp, 2011).

G1) $*$, G de bir ikili işlemdir. Yani G kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.

G2) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall x,y,z \in G$ için $x*(y*z) = (x*y)*z$ dir.

G3) G kümesinin $*$ işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır. Yani $\forall x \in G$ için $x*e = e*x = x$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

G4) G nin her elemanının $*$ işlemine göre tersi vardır. Yani $x \in G$ için $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$ olacak şekilde $\exists x^{-1} \in G$ vardır.

Örnek 1.2 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ve $\mathbb{C}$ kümeleri adi toplama işlemine ($+$ işlemine) göre birer gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ve $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine($\cdot$ işlemine) göre bir gruptur. $(\mathbb{N},+)$ ve $(\mathbb{Z},\cdot)$ cebirsel yapıları ise grup değildir.

Tanım 1.3 $(G,*)$ bir grup olsun, $\forall x,y \in G$ için $x*y = y*x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba **değişmeli grup** veya **abelyan grup** denir (Çallıalp, 2011).

Örnek 1.3 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri adi toplama işlemine ($+$ işlemine) göre birer değişmeli gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ve $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine ($\cdot$ işlemine) göre değişmeli gruptur.

Not 1.4 Grubun işlemi "$+$" ise **toplamsal grup**, "$\cdot$" ise **çarpımsal grup** denir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.5 $(G,*)$ bir grup olsun, G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir **sonlu grup** denir ve grubun eleman sayısına da **grubun mertebesi** denir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.6 G bir grup ve G nin boş olmayan alt kümesi H olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin **alt grubu** denir ve $H < G$ ile gösterilir (Çallıalp, 2011).

Önerme 1.7 G grubunun, boş olmayan H alt kümesinin alt grup olması için gerek ve yeter şart $\forall x,y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ (veya $x^{-1}y \in H$) olmasıdır (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.8 $(G,\cdot)$ bir grup ve $f : G \longrightarrow G$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(i) f bire-bir ve örten bir fonksiyon

(ii) $\forall x,y \in G$ için $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$

koşulları sağlanıyorsa f ye G üzerinde bir **otomorfizma** denir. G nin bütün otomorfizmalarının kümesi $O(G)$ ile gösterilir (Karakaş, 1998).

Önerme 1.9 G nin bütün otomorfizmaları kümesi $O(G)$ bileşke işlemi altında bir gruptur (Çallıalp, 2011).

Örnek 1.4 G bir abelyan grup ise, $f : G \longrightarrow G$, $f(x) = x^{-1}$ ile tanımlanan dönüşüm G nin bir otomorfizmidir. Çünkü $\forall x,y \in G$ için

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x^{-1} = y^{-1} \Longrightarrow x = y \text{ ve } f(y^{-1}) = y$$

olduğundan, f bire-bir örtendir ve

$$f(xy) = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

olduğundan f dönüşümü G üzerinde bir otomorfizmadır (Karakaş, 2011).

Tanım 1.10 K boştan farklı bir küme olsun. Eğer $f : K \longrightarrow K$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise f ye K üzerinde bir **permütasyon** denir. K üzerindeki bütün permitasyonların bileşke işlemi altında oluşturduğu gruba **permütasyon grubu** veya **simetrik grup** denir. $K = \{1,2,...,n\}$ kümesi üzerindeki simetrik grup S_n ile gösterilir ve S_n simetrik grubunun mertebesi $n!$ dir. S_n nin bir α elemanı,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.5 S_3 ün $3! = 6$ elemanı vardır ve bu elemanlar,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Önerme 1.11 S_n deki her bir permütasyon sıra gözetmeksizin, ayrık devirlerin çarpımı olarak tek türlü yazılabilir (Çallıalp, 2011).

Örnek 1.6 S_8 içinde bir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

elemanının ayrık çevrimlerin çarpımı olarak yazılışı

$$\alpha = (174)(2856)$$

şeklindedir.

Örnek 1.7 Yukarıda belirtilen S_3 grubunu ele alınırsa, S_3 ün birim elemanı,

$$\alpha = (1) \text{ veya } \alpha = (2) \text{ veya } \alpha = (3)$$

şeklinde yazılabilir. Yine S_3 ün elemanı olan β ise

$$\beta = (23)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 1.8 Bu tezde S_4 simetrik grubundan sıkça bahsedilecektir. S_4 grubunun mertebesi 24 dür ve bu 24 eleman

$\alpha_1 = (1)$	$\alpha_2 = (123)$	$\alpha_3 = (134)$	$\alpha_4 = (234)$	$\alpha_5 = (241)$	$\alpha_6 = (243)$
$\alpha_7 = (214)$	$\alpha_8 = (314)$	$\alpha_9 = (132)$	$\alpha_{10} = (12)$	$\alpha_{11} = (13)$	$\alpha_{12} = (14)$
$\alpha_{13} = (23)$	$\alpha_{14} = (24)$	$\alpha_{15} = (34)$	$\alpha_{16} = (1234)$	$\alpha_{17} = (1243)$	$\alpha_{18} = (1342)$
$\alpha_{19} = (1432)$	$\alpha_{20} = (1324)$	$\alpha_{21} = (1423)$	$\alpha_{22} = (14)(23)$	$\alpha_{23} = (13)(24)$	$\alpha_{24} = (12)(34)$

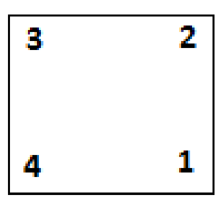
şeklindedir.

Tanım 1.12 Bir düzgün n-genin simetrilerinin oluşturduğu ve mertebesi $2n$ olan gruba **dihedral grup** denir. Dihedral grup D_{2n} ile gösterilir, bazen de D_n olarak gösterilebilir (Karakaş, 1998).

Düzlemde bir şeklin simetrisi denilince uzaklık koruyan ve şekli kendi üzerine dönüştüren bir fonksiyon anlaşılır. Bir dönüşümde p ve q gibi iki nokta arasındaki uzaklık ile onların görüntüleri arasındaki uzaklık eşitse bu dönüşüme uzaklık koruyan dönüşüm denir. Düzlemde bir şeklin tüm simetrileri fonksiyon bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba söz konusu şeklin **simetriler grubu** denir (Karakaş, 1998).

Düzlemde bir şeklin simetrisi şöyle de açıklanabilir. Söz konusu şekil bir karton üzerine çizilip ve sonra kesilip çıkarıldığını varsayalım. Eğer çıkarılan şekil tekrar yerine yerleştirilebiliyorsa, o zaman her bir yerleştiriş çizilen şeklin bir simetrisine karşılık gelir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.9 Bir düzgün dörtgenin, yani karenin, bütün simetrilerinin grubunu oluşturalım. Bu grup D_8 dihedral grubudur. Bir karenin köşelerini Şekil 1.1'deki gibi 1 den 4 e kadar



Şekil 1.1. Kare

şeklinde numaralandırıp yukarıdaki şekil 1.1'e yerine yerleştirme işlemini uygulanırsa, karenin 4 köşesinden her birine yazılan numara altta veya üstte kalacak şekilde yazılabilir. O halde karenin tam 8 simetrisi vardır, yani $|D_8| = 8$ dir. D_8 in bütün elemanları, karenin konumunun değişme durumuna göre listesi,

α_1 :	$0°$ lik dönme (ilk konum)	$\alpha_1 = (1)$
α_2 :	$90°$ lik dönme (saat yönünün tersi)	$\alpha_2 = (1432)$
α_3 :	$180°$ lik dönme	$\alpha_3 = (13)(24)$
α_4 :	$270°$ lik dönme	$\alpha_4 = (1234)$
β_1 :	Yatay eksen etrafında $180°$ lik dönme	$\beta_1 = (12)(34)$
β_2 :	Düşey eksen etrafında $180°$ lik dönme	$\beta_2 = (14)(23)$
δ_1 :	$1-3$ köşegeni etrafında $180°$ lik dönme	$\delta_1 = (24)$
δ_2 :	$2-4$ köşegeni etrafında $180°$ lik dönme	$\delta_2 = (13)$

şeklindedir. Bu durumda $D_8 = \{(1), (1432), (13)(24), (1234), (12)(34), (14)(23), (24), (13)\}$ şeklinde oluşur. Görüldüğü gibi D_8 grubu, $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerindeki S_4 simetrik grubunun alt grubudur (Karakaş, 1998).

Doğada ve güzel sanatlarda karşımıza çıkan pek çok şeklin simetri grubu bir dihedral gruptur. Deniz yıldızı ve benzeri deniz yaratıkları, yer döşemeleri ve seramikte kullanılan pek çok şekil ile Chrysler, Mercedes-Benz şirketlerinin logoları bunlara örnek olarak gösterilebilir (Karakaş, 1998).

Tanım 1.13 G bir grup, $H \leq G$ ve $x \in G$ olsun. Bu takdirde,

$$xH = \{xh : h \in H\}$$

kümesine H nin G içinde x tarafından belirlenen **sol eşkümesi** (sol koseti) denir. Benzer biçimde,

$$Hx = \{hx : h \in H\}$$

kümesine de H nin G içinde x tarafından belirlenen **sağ eşkümesi** (sağ koseti) denir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.10 $G = D_8$ ve $H = \{\alpha_1 = (1), \beta_1 = (12)(34)\}$ olsun. H nin G tarafından içerilen sağ eşkümeleri,

$$\begin{aligned} H\alpha_1 &= H = \{\alpha_1, \beta_1\} = H\beta_1 \\ H\alpha_2 &= \{\alpha_2, \beta_1\alpha_2\} = \{\alpha_2, \delta_2\} = H\delta_2 \\ H\alpha_3 &= \{\alpha_3, \beta_1\alpha_3\} = \{\alpha_2, \beta_2\} = H\beta_2 \\ H\alpha_4 &= \{\alpha_4, \beta_1\alpha_4\} = \{\alpha_2, \delta_1\} = H\delta_1 \end{aligned}$$

şeklinde ve sol eşkümeleri,

$$\begin{aligned} \alpha_1 H &= H = \{\alpha_1, \beta_1\} = \beta_1 H \\ \alpha_2 H &= \{\alpha_2, \alpha_2\beta_1\} = \{\alpha_2, \delta_1\} = \delta_1 H \\ \alpha_3 H &= \{\alpha_3, \alpha_3\beta_1\} = \{\alpha_3, \beta_1\} = \beta_2 H \\ \alpha_4 H &= \{\alpha_4, \alpha_4\beta_1\} = \{\alpha_4, \delta_2\} = \delta_2 H \end{aligned}$$

şeklindedir. H nin G tarafından içerilen 4 tane sağ eşkümesi ve 4 tane sol eşkümesi vardır (Karakaş, 1998).

Tanım 1.14 F boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+: F\times F\to F$ ve $\cdot : F\times F\to F$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya **cisim** adı verilir.

C1) Her $a,b\in F$ için $a+b=b+a$ ve $a\cdot b=b\cdot a$ dır.

C2) Her $a,b,c\in F$ için $(a+b)+c=a+(b+c)$ ve $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ dır.

C3) Her $a,b,c\in F$ için $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(b\cdot c)$ dır.

C4) F kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki, her $a\in F$ için $a+0=a$ eşitliğini sağlar.

C5) F kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı her $a\in F$ için $a\cdot 1=a$ eşitliğini sağlar.

C6) Her $a\in F$ elemanı için, F kümesinde öyle bir $-a$ elemanı vardır ki, $a+(-a)=0$ eşitliğini sağlar.

C7) Her $0\neq a\in F$ için, F kümesinde öyle bir a^{-1} elemanı vardır ki, $a\cdot a^{-1}=1$ eşitliğini sağlar.

Örnek 1.11 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ birer cisim iken, $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Örnek 1.12 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ birer cisimdir fakat $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Tanım 1.15 V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: V\times V\to V$ ve $\cdot : F\times V\to V$ iki fonksiyon olmak üzere $(V,F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, V kümesine F cismi üzerinde bir **vektör uzayı**dır denir.

V1) Her $x,y\in V$ için $x+y=y+x$ dir.

V2) Her $x,y,z\in V$ için $(x+y)+z=x+(y+z)$ dir.

V3) Her $x\in V$ için $x+\theta=x$ olacak şekilde V de en az bir θ elemanı vardır.

V4) Her $x\in V$ elemanı için, $x+y=\theta$ eşitliğini sağlayan V de en az bir y elemanı vardır.

V5) Her $a,b \in F$ ve her $x \in V$ için $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ dir.

V6) Her $a,b \in F$ ve her $x \in V$ için $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ dir.

V7) Her $a \in F$ ve her $x,y \in V$ için $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$ dir.

V8) Her $x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir.

Örnek 1.13 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer vektör uzayıdır. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

1.1.2 Projektif Uzay

Tanım 1.16 V bir vektör uzayı $D(V)$ de V nin alt uzaylarının bir kolleksiyonu ve $\circ$ da bu alt uzaylar arasında bir üzerinde bulunma bağıntısı olsun. $D(V)$ ve $D(V)$ deki üzerinde bulunma bağıntısı yardımıyla tanımlanan $PG(V) = (D(V), \circ)$ geometrik yapısına **projektif uzay** denir. U ve U' alt uzayları V nin altuzayları olsun. Eğer $U \subseteq U'$ veya $U' \subseteq U$ şartlarından biri sağlanıyorsa U ve U' birbirinin üzerindedir denir ve $U \circ U'$ ile gösterilir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Tanım 1.17 V bir vektör uzayı ve V nin bir alt uzayı U olsun. U alt uzayının boyutu tabanındaki vektör sayısına eşittir ve $boy(U)$ ile gösterilir. U alt uzayının **projektif boyutu** da U nun boyutunun bir eksiğidir ve $pboy(U) = boy(U) - 1$ ile gösterilir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Sonlu boyutlu bir projektif uzayda bütün doğrular eşit sayıda nokta içerir ve projektif uzayın mertebesi herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğidir. Eğer q mertebeli sonlu bir cisim üzerindeki projektif uzaylar üzerinde çalışılırsa, bir doğru üzerindeki noktaların sayısı $q+1$'e eşittir, böylece projektif uzayın mertebesi q olacaktır. q mertebeli bir cisim üzerindeki n-boyutlu projektif uzay $PG(n,q)$ ile gösterilir.

Tanım 1.18 $S_n = PG(n,q)$ n-bpyutlu projektif uzay ve $n \geq 2$ olsun. O zaman aşağıdaki aksiyomlar geçerlidir (Casse, 2006).

A1) S_n elemanları noktalar olan bir kümedir.

A2) $-1 \leq h \leq n$ ve $\forall h \in \mathbb{Z}$ için S_h, S_n nin h-boyutlu alt uzayıdır.

A3) S_n nin aşikar alt uzayları S_n ve S_{-1} dir. S_{-1} alt uzayı S_n nin boş alt uzayıdır.

A4) S_n nin noktaları kendisinin 0 boyutlu alt uzaylarıdır.

A5) n-boyutlu tek alt uzay S_n dir.

A6) S_h ve S_k, S_n nin iki alt uzayı olsun. O zaman $S_h \cap S_k$ da S_n nin alt uzayılarıdır.

A7) S_h ve S_k, S_n nin iki alt uzayı olsun. O zaman $S_h \cap S_k$ alt uzayının boyutu,

$$pboy(S_h \oplus S_k) + pboy(S_h \cap S_k) = pboy(S_h) + pboy(S_k)$$

şeklinde hesaplanır ($S_h \oplus S_k$ uzayı S_h ve S_k alt uzaylarının gerdiği uzaydır, bu ifade $\langle S_h, S_k \rangle$ şeklinde de gösterilebilir.).

Tanım 1.19 $S_n = PG(n,q)$ n-boyutlu bir projektif uzay olsun. O zaman;

0 boyutlu S_0 projektif alt uzayına **projektif nokta**,

1 boyutlu S_1 projektif alt uzayına **projektif doğru**,

2 boyutlu S_2 projektif alt uzayına **projektif düzlem**,

3 boyutlu S_3 projektif alt uzayına **projektif uzay** denir (Casse, 2006).

Tanım 1.20 n-boyutlu projektif uzayda boyutu $n-1$ olan alt uzaylar **hiperdüzlem** olarak adlandırılır (Casse, 2006).

Örnek 1.14 p bir projektif nokta ve L, p noktasından geçmeyen bir projektif doğru olsun. Bu durumda $pboy(p) = 0$, $pboy(L) = 1$ ve $pboy(p \cap L) = -1$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} pboy(L \oplus p) &= pboy(L) + pboy(p) - pboy(p \cap L) \\ &= 1 + 0 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur, yani $L \oplus p$ bir projektif düzlem belirtir (Casse, 2006).

Tanım 1.21 $\mathcal{P}$, n-boyutlu bir projektif uzay olsun. $\mathcal{P}$ de aşikar olmayan alt uzayların ($\emptyset$ ve $\mathcal{P}$ den farklı alt uzaylar) ve $\forall j \leq i \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_i$ olacak şekilde içiçe geçmiş farklı alt uzayların (U_0, U_1, ..., U_m) ayrık dizisine $\mathcal{P}$ de bir **flag** denir. Bir flagın rankı onun içerdiği alt uzayların sayısına eşitiir. $\mathcal{P}$ de maksimal bir flag n uzunluğunda bir flagdir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

U_i nin boyutu i olsun. $\{i,\ i+1,\ ...,m\}$ şeklinde bir flag aşikar olmayan alt uzayların ve $\forall j \leq i < k \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_k$ olacak şekilde farklı alt uzayların $(U_i,\ U_{i+1},\ ...,U_m)$ ayrık dizisidir, bu flag kısaca $[i,m]$ flag olarak da gösterilebilir.

1.1.3 Projektif Düzlem

Tanım 1.22 Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N}\times\ \mathcal{D}$ üzerinde bir $\circ$ bağıntısından meydana gelen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ üçlüsüne bir **geometrik yapı** denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $A,B,C,...,X,Y,Z,...$ gibi büyük harflerle, $\mathcal{D}$ nin elemanları a, b, $c,...,$ x, y, $z,...$ gibi küçük harflerle gösterilir.

$\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3,... \in \mathcal{N}$ noktaları için $\mathcal{N}_i \circ d$, $i=1,2,3,...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara **doğrudaş noktalar** denir.

$d_1,d_2,d_3,... \in \mathcal{D}$ doğruları için $\mathcal{N} \circ d_i$, $i=1,2,3,...$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ varsa, yani bu doğruların hepsi aynı noktadan geçerlerse bunlara **noktadaş doğrular** denir.

$d_1,d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $\mathcal{N} \circ d_1$ ve $\mathcal{N} \circ d_2$ olacak şekilde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yoksa $d_1$ve d_2 ye **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir. Buna karşın $d_1 \parallel d_2$ değilse $d_1 \nparallel d_2$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

Tanım 1.23 **(Projektif Düzlem)** $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N}\ \times\ \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N}\ \times\ \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemine bir **projektif düzlem** denir (Kaya, 2005).

P1: Her M, $N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: Her c, $d \in \mathcal{D}$, için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 1.24 Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).

Teorem 1.25 Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır (Kaya, 2005). (Bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.)

(1) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta bulunur.

(2) $\mathbb{P}$ nin her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.

(3) $\mathbb{P}$ deki noktaların toplam sayısı n^2+n+1 dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki doğruların tam sayısı n^2+n+1 dir.

Teorem 1.26 Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır.

F herhangi bir cisim olsun.

$\mathcal{N} = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3 \in F, (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0),\ (x_1,x_2,x_3) \equiv \lambda(x_1,x_2,x_3),$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$\mathcal{D} = \{[a_1,a_2,a_3] : a_1,a_2,a_3 \in F, (a_1,a_2,a_3) \neq (0,0,0), (a_1,a_2,a_3) \equiv \lambda(a_1,a_2,a_3),$

$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$

$(x_1,x_2,x_3) \circ [a_1,a_2,a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ sistemi bir projektif düzlemdir. F cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak $\mathbb{P}_2F$ ile gösterilir. Özel olarak $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{Q}$ cisimleri için $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ gerçel projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ kompleks projektif düzlem, $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ rasyonel projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005).

Yukarıdaki teoremden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.

Sonuç 1.27 r pozitif bir tam sayı p de bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $GF(p^r)$ cismi var olduğu için, bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde

$$\frac{(p^r)^3-1}{p^r-1} = (p^r)^2 + p^r + 1$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin p^r olduğunu gösterir. Diğer bir ifade ile her r pozitif tam sayısı ve her p asal sayısı için mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşın cisimler yardımıyla elde edilen bir çok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri p^r biçiminde yazılabilen pozitif tam sayılardır (Kaya, 2005).

Örnek 1.15 En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.

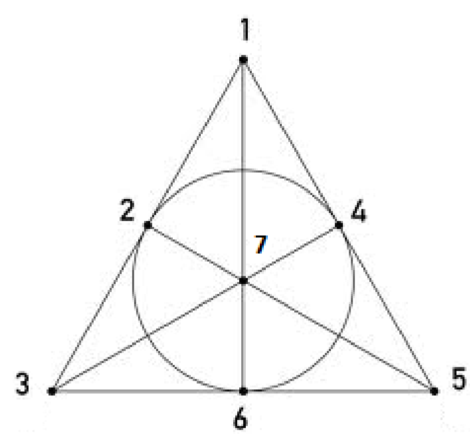
$$\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$\mathcal{D} = \{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7\}$$

ve

$$d_1 = \{1,2,3\} \quad , \quad d_2 = \{1,4,5\} \quad , \quad d_3 = \{1,6,7\} \quad , \quad d_4 = \{2,4,6\}$$
$$d_5 = \{2,5,7\} \quad , \quad d_6 = \{3,4,7\} \quad , \quad d_7 = \{3,5,6\}$$

olmak üzere $(\mathcal{N},\mathcal{D},\in)$ sistemi bir projektif düzlemdir. Yedi noktalı bu projektif düzleme **Fano Düzlemi** denir (Kaya, 2005). Şekil 1.2'de Fano düzlemi gösterilmiştir.



Şekil 1.2. Fano Düzlemi

P1) 3 ve 5 farklı iki nokta çifti olsun. 3 ve 5 den geçen bir tek d_7 doğrusu vardır. 3 ve 5 noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

P2) d_1 ve d_2 doğruları alınırsa, Bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 1 dir. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

P3) $1,2,3$ ve 7 noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.

Örnek 1.16 $F = GF(2)$ olmak üzere $\mathbb{P}_2F$ düzleminin noktaları $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ üçlülerinden oluşur. Doğruları da aynı üçlülerden ibarettir. Aşağıda her doğrunun üzerinde bulunan noktalar yanında gösterilmektedir.

$$\begin{array}{lcl}
[0,0,1] & : & (0,1,0),(1,0,0),(1,1,0) \\
[0,1,0] & : & (0,0,1),(1,0,0),(1,0,1) \\
[1,0,0] & : & (0,0,1),(0,1,0),(0,1,1) \\
[0,1,1] & : & (0,1,1),(1,0,0),(1,1,1) \\
[1,0,1] & : & (0,1,0),(1,0,1),(1,1,1) \\
[1,1,0] & : & (0,0,1),(1,1,0),(1,1,1) \\
[1,1,1] & : & (0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)
\end{array}$$

$\mathbb{P}_2F$ bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

BÖLÜM 2

BULANIK (FUZZY) KAVRAMLARI

2.1 Bulanık (Fuzzy) Mantık

Bu kısım (Şen, 2004) kaynağından yararlanılarak hazırlanmıştır.

Gerçek dünya karmaşıktır. Bu karmaşıklık genel olarak kesin düşünce ve kararlar verilememesinden kaynaklanır. Genel olarak değişik biçimlerde ortaya çıkan karmaşıklık ve belirsizlik gibi tam ve kesin olmayan bilgi kaynaklarına **bulanık (fuzzy) kaynaklar** denir.

1965 yılında Lütfi A. Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık (fuzzy) küme, mantık ve sistem kavramları bu araştırıcının çalıştığı alanlarda yöntemin karmaşıklaşması ve çözümün zorlaşması neticesinde ortaya çıkmıştır. Zadeh tarafından gerçek dünya sorunları ne kadar yakından incelemeye alınırsa, çözümün daha da bulanık hale geleceği ifade edilmiştir. Çünkü insan çok fazla olan bilgi kaynaklarının tümünü aynı anda ve etkileşimli olarak kavrayamaz ve bunlardan etkili sonuçlar çıkaramaz. Bilgi kaynaklarında temel ve kesin bilgilere ilave olarak, insan sözel düşünebildiğine göre ve bildiklerini başkalarına sözel ifadelerle aktarabildiğine göre bu ifadelerin kesin olması beklenemez.

Günlük hayatta kullanılan bir çok terim genellikle bulanık bir yapıya sahiptir. Bir şeyi tanımlarken, bir olayı açıklarken, komut verirken ve daha birçok durumda kullandığımız sözel ve sayısal ifadeler bulanıklık içerir. Dil ne kadar kesin olmayan kelime ve cümleler ihtiva etse bile, insan iletişiminde en etkin vasıtadır. Dildeki belirsizliklere rağmen insanoğlu onunla birbirini kolayca anlayabilmektedir. Bazı kesin olmayan kelimelere örnek olarak; yaşlı, genç, uzun, kısa, sıcak, soğuk, hızlı, yavaş, az, çok, çok az, çok fazla gibi bir çok kelime gösterilebilir. Örneğin; 'hava sıcak' denildiğinde herkes hava kelimesinin anlamını kesin olarak anlamakta ancak 'sıcak' kelimesinin ifade ettiği anlam görecelidir. Kutuplarda bulunan bir kişinin sıcak için 15° yi anlamasına rağmen ekvator civarındaki bir kişi için bu 35° yi bulabilir. Arada birçok kişinin görüşü olarak başka derecelerde bulunur. Böylece 'sıcak' kelimesinin altında insanlarında ima ettiği sayısal anlayışın bir sonucu olarak belirsiz bir durum ortaya çıkar. Bu şekilde kelimelerin ima ettiği belirsizliklere bulanıklık (fuzzy) denir. Bazı insanların sıcaklığı 15°, bazılarının ise 35° gibi oldukça farklı sayısal biçimde algılanmasına karşılık, bu insanlar arasında bir ihtilaf bulunmaz. İşte bulanık mantığın güzelliklerinden biride budur. Ancak

Aristo mantığı geçerli sayılacak olsaydı, bu iki grup insan arasında sürekli anlaşmazlıklar olacaktı. Çünkü Aristo mantığında sıcak veya soğuk vardır arasına müsade edilmez. Buradan anlaşılıyor ki bulanık mantık daha esnek bir yapıya sahiptir. Bu esneklik sayesinde bulanık mantık uygulanan alanlarda daha hassas sonuçlar elde edilebilir.

Olayların çok karmaşık olması durumunda bulanık mantığın en geçerli olduğu iki durum vardır. İlki kişilerin değer ve görüşlerine yer verilmesini, ikincisi ise toplanan sözel ve sayısal verilerin göz önünde bulundurularak en uygun çözüm yöntemi hakkında karar verilmesidir. Günlük örneklerden bir tanesi, bir annenin çocuğuna fırına koyduğu keklerin pişmesi durumunda fırını kapatmasını söylemesi için ya sıcaklığın 60° ye kadar devam etmesi gerektiğini ya da daha basit olarak keklerin üstünün açık kahverengi olmaya başlaması halinde kapatmasını söyleyebilir. Bunlardan ikinci tür bilgi bulanıktır ve sayısal yönleri ima etmesine rağmen kesinlik söz konusu değildir. Sıcaklığın 60° olması gibi bir örneği uygulamak oldukça zordur fakat keklerin piştiğini açık kahverengi rengin belirmesi ile çocuk bile anlayabilir. O halde böyle bilgileri bilgisayarlara tanıtarak bulanık işlemlerin yapılmasını temin etmek yoluna gidilmelidir. İşte bu yoldaki en geçerli yöntembilim (metedoloji) **bulanık mantık**, **küme** ve **sistemlerdir**.

Bulanık kavram ve sistemlerin dünyanın değişik araştırma merkezlerinde dikkat kazanması 1975 yılında Mamdami ve Assilian tarafından yapılan gerçek bir kontrol uygulaması ile olmuştur. Bu araştırmacılar ilk defa bir buhar makinesi kontrolünün bulanık sistem ile modellemesini başarmıştır. Bu ön çalışmadan, bulanık sistemlerle çalışmanın ne kadar kolay ama sonuçlarınında ne kadar etkili olduğu anlaşılmıştır. Daha sonraki yıllarda bulanık sistem uygulaması Danimarka'daki bir çimento fabrikasının işletilmesi ve kontrolü için kullanılınca, artık bulanık kavramlar dünyanın bir çok yerinde kullanılmaya başlanmıştır. Bu başlama özellikle Japonya, Singapur, Kore ve Malezya'da fazlaca kendini göstermiştir.

Bulanık mantık, makineleri "daha zeki" yapmış ve bir çok ürünün ve üretim sürecinin makine IQ'sü (Zeka seviyesi) bu sayede artmıştır. Bu makineler arasında fotoğraf makineleri, kameralar, televizyonlar, mikro dalga fırınlar, çamaşır makineleri, elektrikli süpürgeler, metro denetim mekanizmaları, asansörler ve mikrodevreler sıralanabilir.

2.2 Fuzzy Kümeleri

Tanım 2.1 X boştan farklı bir küme olsun. X kümesi üzerinde μ **fuzzy kümesi**,

$$\begin{aligned} \mu: \quad X &\to [0,1] \\ x &\to \mu(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşümdür. $\mu(x)$ sayısı, μ deki $x \in X$ in **üyelik derecesi** şeklinde adlandırılır. μ fuzzy kümesi $\mu = \{(\mu(x), x) : x \in X\}$ şeklinde de ifade edilebilir (Zadeh, 1965).

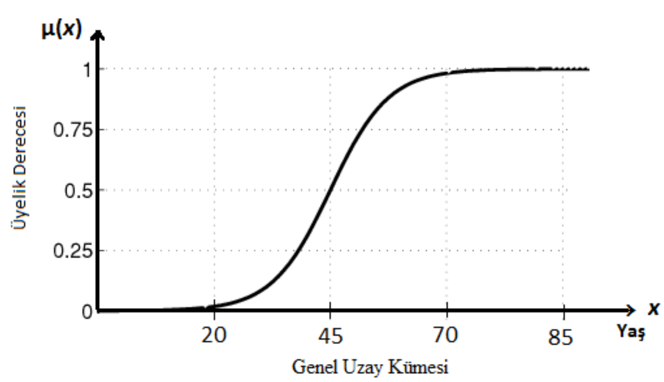
Fuzzy kümesine dahil olmayan elemanların üyelik dereceleri 0, kümeye tam dahil olan elemanların üyelik dereceleri ise 1 dir. Kümeye dahil olup olmadıkları belirsiz olan elemanlar belirsizlik durumuna göre 0 ile 1 arasında üyelik dereceleri alırlar. Fuzzy kümesinin bir elemanı kümeye üyelik derecesi kadar aittir.

Örnek 2.1 X kümesi R reel sayılar doğrusu ve μ fuzzy kümesi 1 den çok büyük sayıların fuzzy kümesi olsun. O zaman μ fuzzy kümesinin temsil ettiği değerler

$$\mu(0) = 0;\ \mu(1) = 0;\ \mu(5) = 0,01;\ \mu(10) = 0,2;\ \mu(100) = 0,95;\ \mu(500) = 1$$

şeklinde alınabilir. Buradan anlaşılıyor ki normalde 1 den çok büyük sayılar öznel bir ifade olmasına rağmen μ fuzzy kümesini kullanarak kesin bir ifade olarak verilebilir (Zadeh,1965).

Örnek 2.2 X kümesi insanların yaşlarının kümesi ve μ fuzzy kümesi yaşlı insanların fuzzy kümesi olsun. Bu küme 20 ile 75 yaşları arasındaki insanlarıda kapsar. Ancak yaşı 20 ile 75 arasında olanlar üyelik dereceleri ölçüsünde bu kümenin elemanlarıdırlar. Bu durumda μ fuzzy kümesinde yaşı 20'nin altında olanların üyelik dereceleri 0 iken, yaşı 20'nin biraz üzerinde olanların üyelik dereceleri 0'ın biraz üzerinde, yaşı 75'e gelmek üzere olanların üyelik dereceleri 1'e yakın ve yaşı 75'in üzerinde olanların üyelik dereceleride 1 dir. Örneğin 25 yaşındaki birinin yaşlı insanların fuzzy kümesindeki üyelik derecesi $\mu(25) = 0,05$ gibi oldukça az bir değere sahip iken, 65 yaşındaki birinin üyelik derecesi $\mu(65) = 0,9$ gibi oldukça yüksek bir değere sahiptir. Bu durumda 65 yaşındaki bir insan yaşlı insanların fuzzy kümesine 25 yaşındakine göre daha fazla aittir (Altaş, 1999).



Şekil 2.1. Yaş Kümesi Üzerinde Tanımlı Yaşlı İnsanların Fuzzy Kümesinin Grafiği

Tanım 2.2 μ, X kümesinin bir fuzzy kümesi olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için

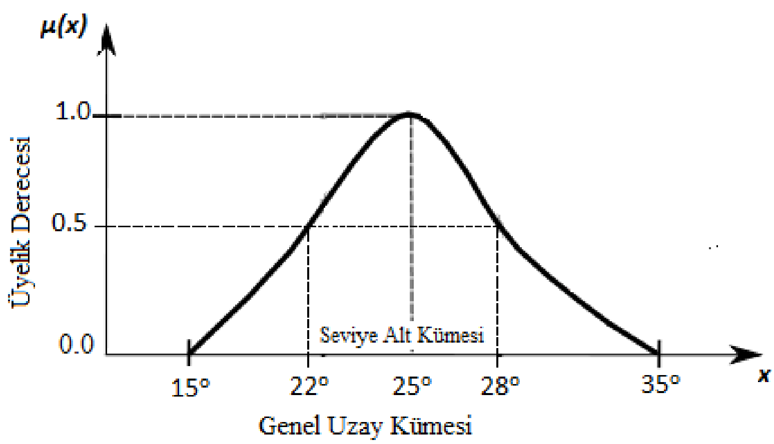
$$\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ fuzzy kümesinin **seviye alt kümesi** denir (Kandasamy, 2003).

Örnek 2.3 X kümesi hava sıcaklığının derecelerinin kümesi ve μ fuzzy kümesi ideal hava sıcaklığının fuzzy kümesi olsun. Bu hava sıcaklığı $25°$ olarak belirlenirse, bu durumda $\mu(25) = 1$ dir. $15°$ nin altında olan veya $35°$ nin üzerinde olan sıcaklıkların üyelik dereceleri 0 alınır. Normalde $15°$ ile $35°$ arasındaki sıcaklıkların üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında iken, $22°$ ile $28°$ arasındaki sıcaklıkların üyelik dereceleri $[0,5,1]$ aralığında değişiyorsa, μ fuzzy kümesinin seviye alt kümesi $22°$ ile $28°$ arasındaki sıcaklıkların fuzzy kümesidir ve

$$\mu_{0.5} = \{x \in X : \mu(x) \geq 0,5\}$$

şeklinde gösterilir.



Şekil 2.2. X Kümesi Üzerinde Tanımlı μ Fuzzy Kümesinin Grafiği

2.3 Fuzzy Alt Grupları ve Fuzzy projektif Uzayı

Fuzzy kümesi kavramı ilk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya çıkarıldı. 1971 yılında Rosenfeld'in fuzzy grupları kavramını tanıtmasıyla birlikte cebirsel fuzzy yapıları çalışılmaya başlanmıştır. Şimdi bu bölümde fuzzy alt grupları ve fuzzy projektif uzay yapısı incelenecektir.

Tanım 2.3 $(G,\cdot)$ *bir grup olsun.* G üzerinde μ *fuzzy kümesi* $\forall x,y \in G$ için

$$\begin{array}{l}(1)\ \mu(x\cdot y) \geq \mu(x)\wedge\mu(y)\\ (2)\ \mu(x^{-1}) = \mu(x)\end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa μ ye G nin **fuzzy alt gurubudur** denir. Burada, $\wedge$ **minimum operatörünü** ifade eder (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Teorem 2.4 G bir grup ve grubun birim elemanı e olsun. $\forall a \in G$ için $\mu(e) \geq \mu(a)$ dır (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

İspat $\forall a \in G$ için G nin etkisiz elemanı $e = a\cdot a^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Eğer $e = a\cdot a^{-1}$ ise $\mu(e) = \mu(a\cdot a^{-1})$ dir. Önceki tanımda verilen (1) ve (2) koşullarından,

$$\begin{aligned}\mu(e) &= \mu(a\cdot a^{-1})\\ &\geq \mu(a)\wedge\mu(a^{-1})\\ &= \mu(a)\wedge\mu(a)\\ &= \mu(a)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\mu(e) \geq \mu(a)$ elde edilir. $\square$

Teorem 2.5 G grubu üzerinde bir μ fuzzy kümesi G grubunun fuzzy alt grubudur ancak ve ancak $\forall x,y \in G$ için

$$\mu(x\cdot y^{-1}) \geq \mu(x)\wedge\mu(y)$$

dir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

İspat $(\Longrightarrow)$ G grubu üzerinde bir μ fuzzy kümesi G grubunun fuzzy alt grubu olsun. $\forall x,y \in G$ için

$$\begin{aligned}\mu(x\cdot y^{-1}) &\geq \mu(x)\wedge\mu(y^{-1})\\ &= \mu(x)\wedge\mu(y)\end{aligned}$$

olduğundan dolayı, $\mu(x\cdot y^{-1}) \geq \mu(x)\wedge\mu(y)$ olur.

$(\Longleftarrow)$ $\forall x,y \in G$ için $\mu(x\cdot y^{-1}) \geq \mu(x)\wedge\mu(y)$ olsun. μ fuzzy kümesinin birim elemanı e ve $x = e$ olsun, o zaman

$$\begin{aligned}\mu(e\cdot y^{-1}) &\geq \mu(e)\wedge\mu(y) \qquad (2.1)\\ \mu(y^{-1}) &\geq \mu(y)\end{aligned}$$

dir. $x = e$ ve $y = y^{-1}$ olsun, o zaman da

$$\begin{aligned} \mu(y) &\geq \mu(e) \wedge \mu(y^{-1}) \\ \mu(y) &\geq \mu(y^{-1}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dir. (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerinden $\mu(y) = \mu(y^{-1})$ elde edilirek fuzzy alt grubunun ikinci şartı sağlanır. Bu son eşitlikten dolayı

$$\begin{aligned} \mu(x \cdot y) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y^{-1}) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \end{aligned}$$

olduğundan, $\mu(x \cdot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ eşitsizliği elde edilir ve böylece fuzzy alt grubunun birinci şartı da sağlanmış olur. Bu durumda fuzzy alt grubunun iki şartı sağlandığından dolayı, μ fuzzy kümesi G grubunun fuzzy alt grubudur. □

Bu durum "*G grubunun H alt kümesinin G nin alt grubu olması için gerek ve yeter şart* $\forall a, b \in H$ *için* $a \cdot b^{-1} \in H$ *olmasıdır*." önermesine benzer bir durumdur.

Önerme 2.6 G grubu üzerinde bir μ fuzzy kümesi G nin bir fuzzy alt grubudur ancak ve ancak $\forall t \in [0, \mu(e)]$ için μ_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubudur (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

İspat ($\Longrightarrow$) G grubunun μ fuzzy kümesi, G nin bir fuzzy alt grubu olsun. O zaman $\forall x, y \in G$ için $\mu(x \cdot y^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ dir. μ bir fuzzy kümesi olduğundan, $\forall a \in G$ için $\mu(e) \geq \mu(a)$ dır. G de bir grup olduğundan, $x, y \in G$ ise $xy^{-1} \in G$ olur. Bu yüzden $\mu(e) \geq \mu(x)$, $\mu(e) \geq \mu(y)$ ve $\mu(e) \geq \mu(xy^{-1})$ dir. μ fuzzy kümesinin seviye alt kümesi $\mu_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ olsun. $\forall x \in G$ için $\mu(e) \geq \mu(x)$ olduğundan, G nin x, y ve xy^{-1} elemanları aynı zamanda $\forall t \in [0, \mu(e)]$ için μ_t nin de elemanlarıdır. Bu durumda her t değeri $[0, \mu(e)]$ aralığında alınırsa, $\forall x, y \in \mu_t$ için $xy^{-1} \in \mu_t$ olur. Bu yüzden μ_t, G nin bir fuzzy alt grubudur.

($\Longleftarrow$)$\forall t \in [0, \mu(e)]$ için μ_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubu olsun. $P_p = \underset{1 \leq i \leq p}{\cup} B_i = G$ olsun. $B_0 = \emptyset$ ve $1 \leq m \leq p$ için $P_m = \underset{1 \leq i \leq m}{\cup} B_i$ olsun. $B_m = \{x \in G : \mu(x) = \beta_m\}$, $P_m = \{x \in G : \mu(x) \geq \beta_m\}$ ve $B_m = P_m \backslash P_{m-1}$ ifadelerini kullanarak ispat edilebilir. Burada $1 \leq i \leq p$ için β_i değerleri, μ fuzzy kümesinin elemanlarının üyelik dereceleridir. G grubunun ne kadar küçük bir alt grubunu alınırsa, alt grubun üyelik derecesi o kadar büyük olur.

Eğer $\beta_m = t$ olursa P_m grubu μ_t seviye alt kümesine eşit olur. $\forall t \in [0, \mu(e)]$ için $P_m = \mu_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ olsun. $k < n \leq m$ ile verilen k ve n doğal sayıları ve $x, y \in G$ için, $\mu(x) = \beta_k$ ve $\mu(y) = \beta_n$ olsun. O zaman $x \in P_k$ ve $y \in P_n$ dir. Bu durumda $k < n$ olduğundan, $x, y \in P_n$

olur. P_n grubu G nin alt grubu olduğundan, $xy^{-1} \in P_n$ olur. Bu yüzden $\mu(xy^{-1}) \geq \beta_n = \mu(y) \geq t$ dir. Aynı zamanda $t \leq \beta_n \leq \beta_k = \mu(x)$ olduğundan, $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur. Bunun yanı sıra $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$ dir ve t değeri $[0, \mu(e)]$ aralığındadır. Bu yüzden μ fuzzy kümesi, G grubu üzerinde bir fuzzy alt grubudur. □

Teorem 2.7 G nin bir μ fuzzy alt kümesi G nin bir fuzzy alt grubudur ancak ve ancak G nin

$$\mu(x) = \begin{cases} \beta_1, & x \in P_1(\mu) \\ \beta_2, & x \in P_2(\mu) \\ \dots & \\ \beta_n, & x \in P_n(\mu) \end{cases}$$

olarak yazılabilen $P_1(\mu) \leq P_2(\mu) \leq \dots \leq P_n(\mu) = G$ şeklinde bir alt grupları zinciri vardır (Sulaiman, Ahmad, 2011).

İspat $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq p} B_i = G$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} \beta_1, & x \in B_1 \\ \beta_2, & x \in B_2 \\ \dots & \\ \beta_n, & x \in B_n \end{cases}$$

ve $B_0 = \emptyset$ ve $1 \leq m \leq p$ için $P_m = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq m} B_i$ olsun. $B_m = \{x \in G : \mu(x) = \beta_m\}$, $P_m = \{x \in G : \mu(x) \geq \beta_m\}$, $B_m = P_m \backslash P_{m-1}$ ve $P_p = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq p} B_i = G$ formulleri kullanarak ispat edilebilir.

($\Longrightarrow$) $\{1, 2, ..., p\}$ kümesindeki keyfi bir eleman m olsun. Birim eleman $e \in P_1$ olarak alınmalıdır, bu yüzden $e \in P_m$ olur. $x, y \in P_m$ ise $\mu(x) \geq \beta_m$ ve $\mu(y) \geq \beta_m$ dir. Fuzzy alt grubunun ilk özelliği gereğince $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olduğundan, $\mu(xy) \geq \beta_m$ olur. Bu ifade $xy \in P_m$ olduğu anlamına geliyor. Fuzzy grubunun ikinci özelliğinden $\mu(x^{-1}) = \mu(x) \geq \beta_m$ olduğundan, $x^{-1} \in P_m$ olur. Bu yüzden P_m grubu G nin bir alt grubudur. Bu durumda G nin alt gruplar zinciri $P_1(\mu) \leq P_2(\mu) \leq \dots \leq P_n(\mu) = G$ şeklinde elde edilebilir ve μ fuzzy kümesi teoremde ifade edildiği gibi yazılabilir.

($\Longleftarrow$) P_m grubu $\forall m \in \{1, 2, ..., p\}$ için G nin bir fuzzy alt grubu olsun. $k < m$ ile verilen k ve m doğal sayıları ve $x, y \in G$ için, $\mu(x) = \beta_k$ ve $\mu(y) = \beta_m$ olsun. O zaman $x \in P_k$ ve $y \in P_m$ dir. Bu durumda $k < m$ olduğundan, $x, y \in P_m$ olur. P_m grubu G nin alt grubu olduğundan, $xy \in P_m$ olur. Bu yüzden $\mu(xy) \geq \beta_m = \mu(y)$ dir. Aynı zamanda $\beta_m \leq \beta_k = \mu(x)$ olduğundan, $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur. Fuzzy alt grubunun ilk şartı sağlanmış olur.

Diğer yandan, eğer $x \in G$ ve bir $i \in \{1, 2, ..., p\}$ sayısı için $x \in B_i$ ise $\mu(x) = \beta_i$ dir. Bu durumda $x \in P_i$ olur. P_i grubu G nin bir fuzzy alt grubu olduğundan, $x^{-1} \in P_i$ olur. Bu yüzden

$\mu(x^{-1}) = \beta_i = \mu(x)$ olur. Bu durumda fuzzy alt grubunun ikinci şartı da sağlanmış olur. Buradan da μ, G nin fuzzy alt grubudur sonucuna varılabilir (Sulaiman, Ahmad, 2011). $\square$

Örnek 2.4 $G = S_4$ simetrik grup olsun. S_4 ün birim elemanı e olsun. $\mu : S_4 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile tanımlanan fuzzy kümesi,

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = e \text{ ise} \\ 0,6 & , \quad x = (12)(34) \text{ ise} \\ 0,5 & , \quad x = (14)(23),\ (13)(24) \text{ ise} \\ 0,4 & , \quad \text{Diğerleri} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. S_4 ün alt grupları zincirini $P_1 = \{e\}$, $P_2 = \{e, (12)(34)\}$, $P_3 = \{e, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ ve $P_4 = S_4 = G$ grupları ile $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq P_4 = S_4$ şeklinde oluşturulabilir. Burada $x \in P_1$ ise $\mu(x) = 1$, $x \in P_2/P_1$ ise $\mu(x) = 0,6$, $x \in P_3/P_2$ ise $\mu(x) = 0,5$ ve $x \in S_4/P_3$ ise $\mu(x) = 0,4$ üyelik dereceleriyle verilmektedir (Kandasamy, 2003).

$x = (123)$ ve $y = (143)$ elemanları ele alınırsa, $\mu(x) = 0,4$ ve $\mu(y) = 0,4$ üyelik derecelerine sahiptirler. $xy = (123)(143) = (12)(34)$ elemanın üyelik derecesi $\mu(xy) = 0,6$ olduğundan, $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olduğu söylenilebilir. Bu durumda fuzzy alt grup özelliklerinin ilki sağlanmış olur. $x = (14)(23)$ elemanı ele alınırsa $\mu(x) = 0,5$ dir. $x^{-1} = (41)(32) = (14)(23)$ elemanının üyelik derecesi $\mu(x^{-1}) = 0,5 = \mu(x)$ olduğundan, fuzzy alt grup özelliklerinin ikincisi de sağlanmış olur. Bu durumda μ fuzzy kümesi S_4 grubunun fuzzy alt grubudur.

Tanım 2.8 G grubunun bir fuzzy alt grubu μ olsun. Herhangi bir $a \in G$ ve $\forall x \in G$ için

$$(a\mu)(x) = \mu(a^{-1}x)$$

şeklinde tanımlanan $a\mu$ yapısına μ nün bir **fuzzy koseti** denir. Diğer bir ifadeyle $a\mu$ ye G grubunun bir fuzzy koseti de denilebilir (Kandasamy, 2003).

Örnek 2.5 $G = \{\pm 1, \pm i\}$ çarpma işlemi ile verilen bir grup olsun. G nin bir μ fuzzy alt grubu,

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 \text{ ise} \\ 0,5 & , \quad x = -1 \text{ ise} \\ 0,25 & , \quad x = i,\ -i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. μ nün fuzzy kosetleri $i\mu$ ve $-i\mu$,

$$i\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = i \text{ ise} \\ 0,5 & , \quad x = -i \text{ ise} \\ 0,25 & , \quad x = 1,\ -1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$-i\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = -i \text{ ise} \\ 0,5 & , \quad x = i \text{ ise} \\ 0,25 & , \quad x = 1,\ -1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır (Kandasamy, 2003).

Önerme 2.9 G grubu

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset ...... \subset G_n = G$$

alt grupları zincirine sahip bir grup ise, o zaman G nin μ fuzzy alt grubu en fazla $n+1$ basamaklı olan $G \longrightarrow [0,1]$ bir basamak fonksiyonudur (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Eğer G_i yukarıdaki gibi bir alt grup ise e nin üyelik derecesi $G_1 \setminus e$ nin elemanlarının üyelik dercesinden daha büyük olmalıdır. $G_1 \setminus e$ nin elemanlarının üyelik dereceside $G_2 \setminus G_1$ in elemanlarının üyelik dercesinden daha büyük olmalıdır, böyle devam edilirse $G_n \setminus G_{n-1}$ in elemanlarının üyelik derecesi en düşük olmalıdır (Bu durum fuzzy alt grubunun tanımından söylenir.). μ nün seviye alt kümeleri $G_i \setminus G_{i-1}$ ile verilir. G nin alt grupları zincirinin maksimum seçilmesine gerek olmadığı belirtilebilir.

Yukarıda belirtilenler doğrultusunda $\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq ... \subseteq G_n = G$ alt grupları zinciri ve $[0,1]$ aralığındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ reel sayıları için G nin μ fuzzy alt grubu,

$$\begin{array}{lll} \mu: & G \longrightarrow [0,1] & \\ & \; p \longrightarrow a_0 & , \quad p = e = G_0 \ \text{ ise} \\ & \; p \longrightarrow a_1 & , \quad p \in G_1 \setminus e \ \text{ için} \\ & \; p \longrightarrow a_2 & , \quad p \in G_2 \setminus G_1 \ \text{ için} \\ & ... & \\ & \; p \longrightarrow a_n & , \quad p \in G_n \setminus G_{n-1} \ \text{ için} \end{array}$$

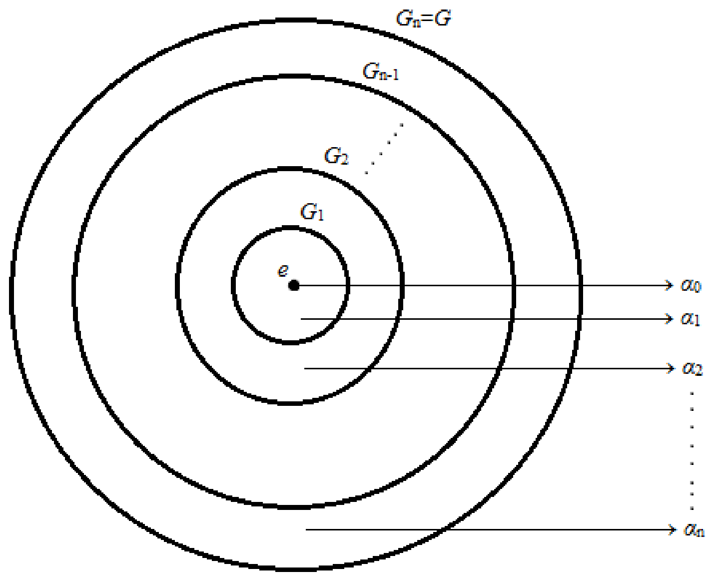
şeklinde oluşturulabilir. Burada

a_0 : e birim elemanının üyelik derecesi,
a_1 : $G_1 \setminus e$ nin elemanlarının üyelik derecesi,
a_2 : $G_2 \setminus G_1$ in elemanlarının üyelik derecesi,
...
a_n : $G_n \setminus G_{n-1}$ in elemanlarının üyelik derecesidir.

Ayrıca G nin $G_0, G_1, G_2, ..., G_n = G$ alt grupları,

$$\begin{array}{c} e = G_0 = \{p \in G : \mu(p) \geq a_0\} \\ G_1 = \{p \in G : \mu(p) \geq a_1\} \\ G_2 = \{p \in G : \mu(p) \geq a_2\} \\ ... \\ G = G_n = \{p \in G : \mu(p) \geq a_n\} \end{array}$$

şeklinde de ifade edilebilir.



Şekil 2.3. G nin Alt Grupları Zincirinin Kümesel Gösterimi

Tanım 2.10 $\mathcal{P}$, n-boyutlu bir projektif uzay ve $\mathcal{P}$ üzerinde bir fuzzy kümesi λ olsun. $\mathcal{P}$ nin her p, q, r doğrudaş noktaları için

$$\lambda(p) \geq \lambda(q) \wedge \lambda(r)$$

şartı sağlanıyorsa λ ya $\mathcal{P}$ üzerinde n**_boyutlu fuzzy projektif uzay** denir ve $[\lambda, \mathcal{P}]$ ile gösterilir. $\mathcal{P}$ projektif uzayına da $[\lambda, \mathcal{P}]$ nin **taban projektif uzayı** denir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

Not 2.11 $\mathcal{P}$ de uzunluğu n olan $(q, U_1, U_2, ..., U_{n-1})$ maksimal flagı ve $[0,1]$ aralığındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{P}]$ n-boyutlu fuzzy projektif uzayı,

$$\begin{array}{ll} \lambda: & \mathcal{P} \longrightarrow [0,1] \\ & p \longrightarrow a_0 \quad , \quad p = q \ \text{ ise} \\ & p \longrightarrow a_1 \quad , \quad p \in U_1 \setminus \{q\} \ \text{ için} \\ & p \longrightarrow a_2 \quad , \quad p \in U_2 \setminus U_1 \ \text{ için} \\ & \ldots \\ & p \longrightarrow a_{n-1} \quad , \quad p \in U_{n-1} \setminus U_{n-2} \ \text{ için} \\ & p \longrightarrow a_n \quad , \quad p \in \mathcal{P} \setminus U_{n-1} \ \text{ için} \end{array}$$

şeklindedir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

BÖLÜM 3

FUZZY GRUPLARINDAN ELDE EDİLEN FANO FUZZY DÜZLEMİ

3.1 Fano Düzleminin Otomorfizm Grubu

Bu bölüme geçişken flag geometrinin otomorfizm gruplarıyla nasıl kurulabileceğini kısa bir şekilde açıklayarak başlanılacaktır. Basitçe mümkün olan en küçük projektif uzay olan Fano düzlemini oluşturulacak. Bu işlemleri yaparken (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999) makalesinden yararlanılacaktır.

$PG(2,2)$ Fano düzlemi $GF(2)$ sonlu cismi üzerinde projektif düzlemdir. Fano düzlemi $\mathcal{F}$ ile gösterilir. Fano düzlemi 7 nokta ve 7 doğrudan oluşur ve en küçük aşikar olmayan projektif düzlemdir. $\mathcal{F}$ nin her noktasından $\mathcal{F}$ nin üç doğrusu geçer ve $\mathcal{F}$ nin her doğrusu üzerinde $\mathcal{F}$ nin üç noktası vardır. Fano düzleminin otomorfizm grubu $L_3(2)$ dir ve 168 elemandan oluşur. $L_3(2)$ nin noktalarını sabitleyen alt gruplar, mertebesi 24 olan simetrik gruplardır. Benzer şekilde $L_3(2)$ nin bir doğruyu sabitleyen alt grupları da mertebesi 24 olan simetrik gruplardır.

Fano düzleminin otomorfizm grubu olan $L_3(2)$ nin eleman sayısını Fano düzleminin 7 noktasını yine Fano düzleminin 7 noktasına götüren birebir örten φ dönüşümünün kolinasyonları hesaplanarak bulunabilir ($\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ bir otomorfizmadır.). İlk olarak $\varphi(1)$ in seçilmesi için 7 yol vardır ve $\varphi(1)$ seçildikten sonra $\varphi(2)$ nin seçilmesi için 6 yol vardır. φ bir kolinasyon olduğundan, $\varphi(1)$ ve $\varphi(2)$ ile belirlenen doğru üzerindeki üçüncü nokta $\varphi(3)$ olmalıdır. Geriye kalan nokta sayısı 4 olduğundan, $\varphi(4)$ ü seçmek için 4 yol vardır. $\varphi(1)$ ve $\varphi(4)$ ile belirlenen doğru üzerindeki kalan nokta $\varphi(5)$ olmalıdır, $\varphi(2)$ ve $\varphi(4)$ ile belirlenen doğru üzerindeki kalan nokta $\varphi(6)$ olmalıdır ve son olarak $\varphi(3)$ ve $\varphi(4)$ ile belirlenen doğru üzerindeki kalan nokta $\varphi(7)$ olmalıdır. Bu yüzden φ otomorfizmasının seçilmesi için $7 \times 6 \times 4 = 168$ yol vardır ve $L_3(2)$ otomorfizm grubunun mertebesi 168 dir (Kahrström, 2002).

Örnek 3.1 Birinci bölümde S_4 ve D_8 gruplarının elemanları verilmişti. Şimdi $L_3(2)$ grubunun

168 elemanından sadece 8 tanesi,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

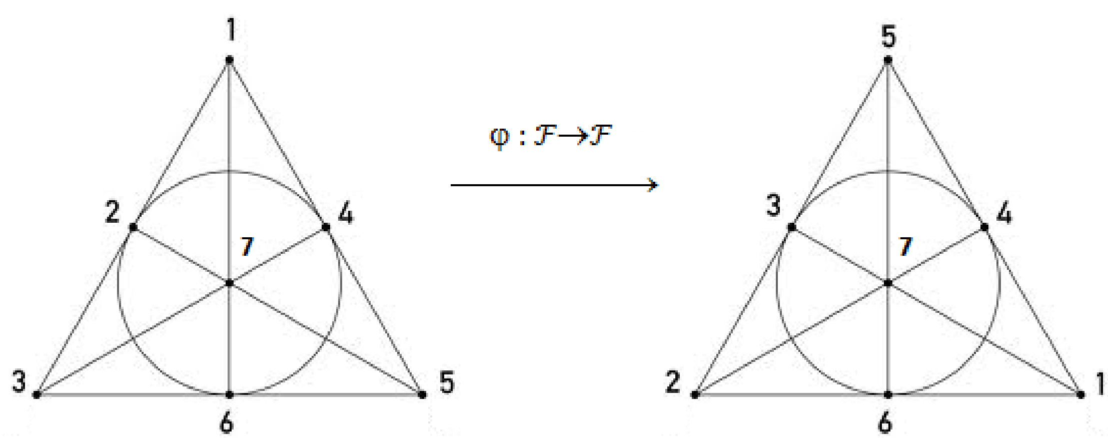
$$x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$x_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada $x_6 \in L_3(2)$ ele alınırsa, x_6 elemanı $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dönüşümünün

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 5 & \varphi(4) = 4 & \varphi(7) = 7 \\ \varphi(2) = 3 & \varphi(5) = 1 & \\ \varphi(3) = 2 & \varphi(6) = 6 & \end{array}$$

şeklinde bir kombinasyonudur. Aşağıda Şekil 3.1'de görüldüğü gibi x_6 elemanı $\mathcal{F}$ Fano düzleminin şeklini korumaktadır.



Şekil 3.1. $x_6 \in L_3(2)$ ye Karşılık Gelen Fano Düzlemi

Şimdi $L_3(2)$ (otomorfizmleri koruyan tip) grubu verilsin. Fano düzlemi nasıl geliştirilebilir? $L_3(2)$ yi baz alarak $\mathcal{F}$ fano düzlemine izomorf olan bir $\mathcal{F}'$ geometrisi oluşturulmalı ve $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $L_3(2)$ nin iki alt grubu olan 24 mertebeli simetrik gruplar S_4 ve S_4' yü D_8 e izomorf bir gruptaki kesişimden seçilir. D_8 bir doğruyu ve doğru üzerindeki bir noktayı sabitleyen bir gruptur. Bu yüzden D_8 bir flagı sabitleyen bir gruptur. Böylece D_8 in S_4

ve S_4' nün mümkün olan maksimum kesişimi olduğu görülür. Hem S_4 ün hemde S_4' nün 7 tane sol koseti vardır. Bir sol koseti $g \in L_3(2)$ için gS_4 ile belirtilir. Sadece sol kosetlerle uğraşıldığı için sol koset yerine sadece koset ifadesi kullanılacaktır.

$\mathcal{F}'$ nün noktalarını ve doğrularını aşağıdaki gibi tanımlanır:

Noktalar: S_4 ün kosetleri noktaları oluşturur, S_4 ün kosetleri 7 tanedir.

Doğrular: S_4' nün kosetleri doğruları oluşturur, S_4' nün kosetleri 7 tanedir.

Üzerinde bulunma bağıntısı: $gS_4 \circ hS_4' \Longleftrightarrow gS_4 \cap hS_4' \neq \emptyset$. Yani S_4 ve S_4' simetrik gruplarının kosetlerinin kesişimleri sıfırdan farklı ise bir nokta bir doğru üzerindedir. Eğer gS_4 ve hS_4' kosetler D_8 grubunun bir kosetinde kesişirlerse, o zaman flaglar $S_4 \cap S_4' = D_8$ in kosetleridir.

3.2 Fano Fuzzy Düzlemine Karşılık Gelen Fuzzy Grupları

$\mathcal{F} = PG(2,2)$ fano düzlemi üzerinde bir fuzzy projektif düzlemi $[\lambda, \mathcal{F}]$ olsun. Bu bölüme $[\lambda, \mathcal{F}]$ ye karşılık gelen fuzzy gruplarını oluşturmakla başlanılacaktır.

$\mathcal{F}$ de belli bir maksimal flag (q, L) ve $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{F}]$ fuzzy projektif uzayı,

$$\begin{array}{lll} \lambda: & \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] & \\ & p \longrightarrow \alpha_0 & , \quad p = q \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_1 & , \quad p \in L \setminus \{q\} \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_2 & , \quad p \in \mathcal{F} \setminus L \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım yardımıyla bir fuzzy grubu, $L_3(2)$ nin alt gruplarının bir zincirini bularak aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$\mathcal{F}$ nin sabitleyicisi $L_3(2)$ otomorfizm grubudur. Biz $L_3(2)$ yi $[\lambda, \mathcal{F}]$ nin üyelik derecesi en düşük α_2 olan noktaları sabitleyen grup olarak düşünülebilir. $[\lambda, \mathcal{F}]$ nin noktaları α_0, α_1, ve α_2 üyelik dereceleriyle verilir. Bu üyelik derecelerinin en düşüğü α_2 olduğundan, en düşük üyelik derecesi α_2 olan noktaları alındığında $[\lambda, \mathcal{F}]$ nin bütün noktaları alınmış olur. Şimdi elemanları en düşük α_1 üyelik derecesiyle verilen ve noktaları sabitleyen $L_3(2)$ nin alt grupları araştırılmalıdır. Bu noktaların hepsi L doğrusunun üzerinde olduğundan, bu alt gruplar L doğrusunun sabitleyicisidir, bu yüzden L doğrusunun sabitleyicisi mertebesi 24 olan S_4' simetrik grubudur. Son olarak α_0 üyelik derecesiyle verilen ve L doğrusu üzerindeki bir tek p noktasını sabitleyen S_4' nün alt grupları araştırılmalıdır. Bu mertebesi 8 olan dihedral grup yani D_8 dir.

Normalde D_8 dihedral grubu p noktasını sabitleyen grup değildir, çünkü noktaları sabitleyen grup mertebesi 24 olan S_4 simetrik grubudur, fakat $S_4 \cap S_4' = D_8$ olduğu biliniyor ve p noktasını L doğrusu üzerinde bir nokta olarak alındığı için D_8 dihedral grubu p noktasının sabitleyici grubudur.

Bu durum $D_8 \leq S_4' \leq L_3(2)$ alt grupları zincirini sağlar. Bu zincirle $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayıları için $L_3(2)$ deki μ fuzzy kümesini

$$\begin{array}{rll} \mu : & L_3(2) \longrightarrow [0,1] & \\ & x \longrightarrow \alpha_0 & , \quad x \in D_8 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow \alpha_1 & , \quad x \in S_4' \setminus D_8 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow \alpha_2 & , \quad x \in L_3(2) \setminus S_4' \text{ ise} \end{array}$$

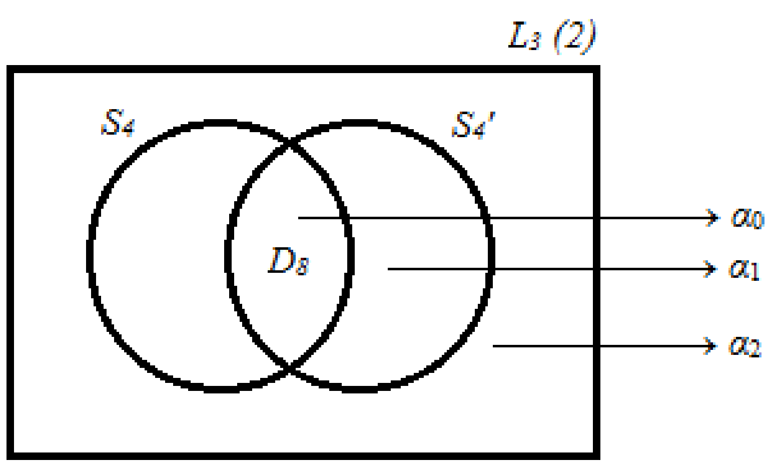
şeklinde oluşturulur. Burada

α_0 : D_8 in elemanlarının üyelik dereceleri,
α_1 : $S_4' \setminus D_8$ in elemanlarının üyelik dereceleri,
α_2 : $L_3(2) \setminus S_4'$ nün elemanlarının üyelik dereceleridir.

Ayrıca D_8, S_4' ve $L_3(2)$ grupları,

$$D_8 = \{x \in L_3(2) : \mu(x) \geq \alpha_0\}$$
$$S_4' = \{x \in L_3(2) : \mu(x) \geq \alpha_1\}$$
$$L_3(2) = \{x \in L_3(2) : \mu(x) \geq \alpha_2\}$$

şeklinde de ifade edilebilir.



Şekil 3.2. $L_3(2)$ nin Alt Grupları Zincirinin Kümesel Gösterimi

3.3 Fuzzy Gruplarından Elde Edilen Fano Fuzzy Düzlemi

Bu bölümde $\mathcal{F}$ fano düzleminin otomorfizm grubu üzerindeki özel bir fuzzy alt grubundan Fano fuzzy düzleminin nasıl oluşturulduğu incelenecektir.

$L_3(2)$ nin özel bir μ fuzzy alt grubu ile bir projektif Fano düzlemi tanımlanmalıdır. Taban düzlemi $L_3(2)$ den elde edilen geometri olacağından, bu fuzzy projektif düzlemi Fano düzlemi olacaktır.

Ortaya çıkan fuzzy projektif düzlem $[\lambda, \mathcal{F}]$, $\mathcal{F}$ de bir maksimal flag (q, L) ve $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayıları için aşağıdaki gibi olması gerekir:

$$\begin{array}{lrcl} \lambda: & \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] & & \\ & p \longrightarrow \alpha_0 & , & p = q \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_1 & , & p \in L \setminus \{q\} \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_2 & , & p \in \mathcal{F} \setminus L \text{ ise} \end{array}$$

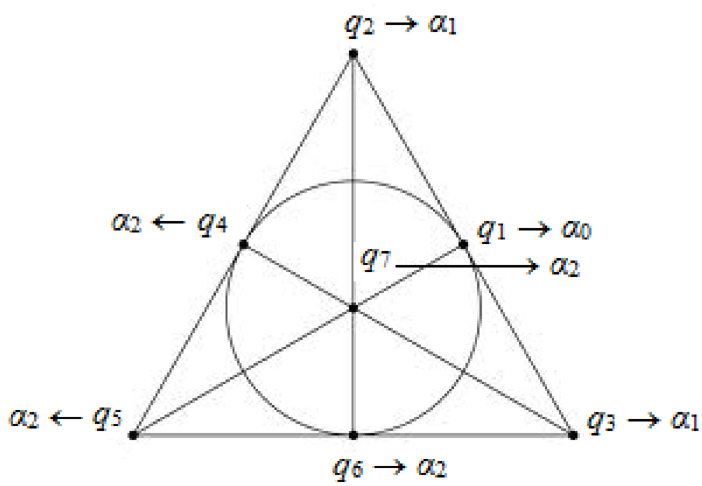
Böyle bir fuzzy projektif düzlem elde etmek için μ fuzzy alt grubunun nasıl seçileceği incelenmelidir. $L_3(2)$ grubunun alt gruplar zinciri bulunduğundan, μ fuzzy alt grubu $L_3(2) \longrightarrow [0,1]$ bir basamak fonksiyonudur. Bu yüzden μ fuzzy alt grubu $L_3(2)$ nin alt gruplarının bir zincirine karşılık gelir.

Eğer $D_8 \leq S_4' \leq L_3(2)$ alt gruplar zinciri seçilir ise S_4' bir doğrunun sabitleyicisi olur ve eğer S_4 nokta sabitleyicisi alınır ise μ fuzzy alt gruplarından fano fuzzy düzlemi geliştirilebilir. S_4 simetrik grubunu alt gruplar zincirinde kullanılmıyor, çünkü seçeceğimiz nokta S_4' grubunun sabitlediği bir L doğrusu üzerinden seçildiğinden ve $S_4 \cap S_4' = D_8$ olduğundan seçilen nokta D_8 dihedral grubu tarafından sabitleniyor. Bu yüzden alt gruplar zincirinde D_8 dihedral grubu kullanılır. $D_8 \leq S_4' \leq L_3(2)$ alt gruplar zinciri ve $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayıları için $L_3(2)$ grubu üzerindeki μ fuzzy alt grubu,

$$\begin{array}{lrcl} \mu: & L_3(2) \longrightarrow [0,1] & & \\ & x \longrightarrow \alpha_0 & , & x \in D_8 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow \alpha_1 & , & x \in S_4' \setminus D_8 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow \alpha_2 & , & x \in L_3(2) \setminus S_4' \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde yazılabilir. Ancak sonrasında α_0, α_1, α_2 reel sayılarının birbirlerinden farklı olduğu gösterilmelidir. Bu genel bir durumdur.

Üyelik derecesi olan α_i değerleri için fuzzy projektif düzlem $[\lambda, \mathcal{F}]$ yi elde edilmelidir, bunun için fuzzy noktalarına yoğunlaşılmalıdır, çünkü fuzzy doğrularının şekli tamamiyle fuzzy noktalarından yola çıkılarak elde edilir.



Şekil 3.3. $[\lambda, \mathcal{F}]$ nin Taban Noktalarının Üyelik Dereceleri

Şekil 3.3'de görüldüğü gibi $\mathcal{F}$ nin q_1 noktası α_0 üyelik derecesiyle, q_2 ve q_3 noktaları α_1 üyelik derecesiyle ve kalan 4 noktası ise α_2 üyelik derecesiyle verilmektedir. $\mathcal{F}$ nin noktalarının kümesi N ve doğrularının kümesi D olsun. Bu durumda N ve D kümeleri,

$$N = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$$

$$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$$

şeklinde yazılabilir ve D kümesinin elemanları

$$\begin{array}{ccccccc} d_1 = \{q_1, q_2, q_3\} & , & d_2 = \{q_1, q_5, q_7\} & , & d_3 = \{q_1, q_4, q_6\} & , & d_4 = \{q_2, q_4, q_5\} \\ d_5 = \{q_2, q_6, q_7\} & , & d_6 = \{q_3, q_4, q_7\} & , & d_7 = \{q_3, q_5, q_6\} & & \end{array}$$

olarak alınabilir.

$\mathcal{F}$ de bir maksimal flag (q, L) olsun (Burada q sadece bir noktayı ve L sadece bir doğruyu belirtmektedir.). Bu durumda $g \in L_3(2)$ için gD_8 kosetlerine karşılık gelen 21 flag vardır. Çünkü Fano düzleminin 7 noktası vardır ve her nokta üzerinden geçen 3 doğru vardır. Bu flaglar,

$$\begin{array}{ccccccc} (q_1, d_1), & (q_2, d_1), & (q_3, d_1), & (q_4, d_3), & (q_5, d_2), & (q_6, d_3), & (q_7, d_2) \\ (q_1, d_2), & (q_2, d_4), & (q_3, d_1), & (q_4, d_4), & (q_5, d_4), & (q_6, d_5), & (q_7, d_5) \\ (q_1, d_3), & (q_2, d_5), & (q_3, d_1), & (q_4, d_6), & (q_5, d_7), & (q_6, d_7), & (q_7, d_6) \end{array}$$

olarak yazılabilir. $g \in D_8$ için gD_8 kosetine karşılık gelen flag (q_1, d_1) flagıdır ve α_0 üyelik derecesiyle verilir. $g \in S_4' \setminus D_8$ için gD_8 kosetlerine karşılık gelen flaglar $(q_1, d_2), (q_1, d_3)$ flaglarıdır ve bu flaglar α_1 üyelik derecesiyle verilirler. Kalan 18 flag ise $g \in L_3(2) \setminus S_4'$ için gD_8 kosetlerine karşılık gelen flaglardır ve bu flaglar α_1 üyelik derecesiyle verilirler.

S_4 ün klasik kosetleri olan taban noktaları; her klasik nokta 3 flag üzerindedir, diğer bir ifadeyle her klasik nokta $L_3(2)$ deki D_8 dihedral grubunun 3 koseti üzerindedir. Şimdi fuzzy noktalarının üyelik derecelerinin nasıl verildiği açıklanacaktır.

D_8 dihedral grubunun 21 koseti vardır. Bu kosetlerden biri D_8 in kendisidir, 2 tanesi de $S_4' \setminus D_8$ in ayrık alt kümeleridir ve diğer kalan 18 koset ise $L_3(2) \setminus S_4'$ nün ayrık alt kümeleridir.

D_8 in bütün kosetlerinin kümesi olan K üzerinde bir fuzzy kümesi, $L_3(2)$ grubunun alt grubu olan D_8 grubunun bütün kosetlerinin kümesi; $\forall g \in L_3(2)$ için

$$\begin{aligned} v : K &\longrightarrow [0,1] \\ gD_8 &\longrightarrow \mu(g) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bir kosetin üyelik derecesi o kosetin seçilen temsilcisi $g \in L_3(2)$ den bağımsızdır, çünkü grup teorisinden

$$\begin{aligned} gD_8 \in D_8 &\iff g \in D_8 \\ gD_8 \subseteq S_4' \setminus D_8 &\iff g \in S_4' \setminus D_8 \\ gD_8 \subseteq L_3(2) \setminus S_4' &\iff g \in L_3(2) \setminus S_4' \end{aligned}$$

olduğu biliniyor. Böylece $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayıları için K üzerinde bir fuzzy kümesi,

$$\begin{aligned} v: \quad K &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longrightarrow \alpha_0 \quad , \quad x = D_8 \text{ ise} \\ X &\longrightarrow \alpha_1 \quad , \quad x \subseteq S_4' \setminus D_8 \text{ ise} \\ X &\longrightarrow \alpha_2 \quad , \quad x \subseteq L_3(2) \setminus S_4' \text{ ise} \end{aligned}$$

şeklinde oluşur. Bu fuzzy kümesi μ ile tamamiyle aynı yapıdadır. Aralarındaki tek fark taban kümeleridir. μ fuzzy kümesinin taban kümesi $L_3(2)$ iken, v fuzzy kümesinin taban kümesi ise K dır.

Her bir taban noktası 3 flag üzerindedir. Bir p taban noktasını ve gD_8, hD_8, jD_8 üzerinde bulunma bağıntılarıyla verilen 3 flag; g, h ve j elemanları $L_3(2)$ grubunun birbirinden farklı elemanlarıdır. $[\lambda(p), p]$ fuzzy noktasının $\lambda(p)$ üyelik derecesini belirlemek için $[\lambda, \mathcal{F}]$ fuzzy projektif düzleminin bütün taban noktalarının kümesi olan P üzerindeki λ fuzzy kümesi

$$\begin{aligned} \lambda : P &\longrightarrow [0,1] \\ p &\longrightarrow \max\left(v(gD_8), v(hD_8), v(jD_8)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.Burada gD_8, hD_8 ve jD_8 flagları p noktasından geçen 3 flagdır.

$[\lambda, \mathcal{F}]$ fuzzy projektif düzleminin 7 taban noktası vardır, her nokta 3 flag üzerindedir ve her flag tam bir nokta içerir. v fuzzy kümesinde her bir flagın üyelik derecesi sadece bir kez kullanılacak, çünkü burada 21 falg vardır ve bir noktanın üyelik derecesinin belirlenmesi için

3 flaga ihtiyaç vardır. Bu ifade bir fuzzy noktasının α_0 üyelik derecesi ile verileceği anlamına geliyor.

v fuzzy kümesinde α_1 üyelik derecesiyle verilen iki flag vardır, bu iki flag mD_8 ve nD_8 olsun. Eğer bu iki flag aynı noktayı içermiyor ise ve α_0 üyelik derecesiyle verilen fuzzy noktasının taban noktasını içeren α_1 üyelik dereceli hiçbir flag yoksa, α_1 üyelik derecesiyle verilen sadece iki fuzzy noktası olabilir. Fakat böyle değildir, $D_8 \cup mD_8 \cup nD_8 = S_4'$ olduğundan S_4' grubu bir L doğrusunu sabitleyen gruptur. D_8, mD_8 ve nD_8 birbirlerinden ayrık olduklarından, bu üç koset birbirlerinden farklı olmak zorundadır. Aynı zamanda üçüde aynı doğruyu sabitlediklerinden dolayı; D_8, mD_8 ve nD_8 in herbiri aynı doğru üzerindeki farklı noktaları sabitlemek zorundadır. Bu yüzden bir doğru üzerinde α_0, α_1 ve α_1 üyelik dereceleriyle verilen üç nokta bulunur. Diğer bütün noktalar α_2 üyelik derecesiyle verilecektir, çünkü sadece α_2 üyelik derecesiyle verilen flaglar sol kosetlerden oluşur.

Böylece $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayıları için bir fuzzy projektif düzlemi

$$\begin{array}{lll} \lambda: & \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] & \\ & p \longrightarrow \alpha_0 & , \quad p = q \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_1 & , \quad p \in L \setminus \{q\} \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_2 & , \quad p \in \mathcal{F} \setminus L \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 $\mathcal{F}$ bir Fano düzlemi, $\mathcal{F}$ de bir flag (p,L) ve $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_i \in [0,1]$ reel sayılar olmak üzere; $[\lambda, \mathcal{F}]$ fuzzy projektif düzlemi,

$$\begin{array}{lll} \lambda: & \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] & \\ & p \longrightarrow \alpha_0 & , \quad p = q \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_1 & , \quad p \in L \setminus \{q\} \text{ ise} \\ & p \longrightarrow \alpha_2 & , \quad p \in \mathcal{F} \setminus L \text{ ise} \end{array}$$

şeklindedir.$\mathcal{F}$ nin $L_3(2)$ otomorfizm grubu üzerindeki μ fuzzy alt grubu,

L doğrusunun sabitleyici grubu S_4' ve L doğrusu üzerinde bir p noktasının sabitleyici grubu D_8 olmak üzere;

$$\begin{array}{lll} \mu: & L_3(2) \longrightarrow [0,1] & \\ & x \longrightarrow \alpha_0 & , \quad x \in D_8 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow \alpha_1 & , \quad x \in S_4' \setminus D_8 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow \alpha_2 & , \quad x \in L_3(2) \setminus S_4' \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde oluşturulabilir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

BÖLÜM 4

FUZZY GRUPLARINDAN ELDE EDİLEN FUZZY PROJEKTİF GEOMETRİLER

3. bölümde Fano düzlemi üzerinden giderek fuzzy gruplarından elde edilen fuzzy projektif düzlemler incelendi, bu bölümde ise aynı işlemin n-boyutlu geometriler üzerinde nasıl yapıldığı incelenecektir. Bu incelemeleri yaparken (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999) makalesinden yararlanılacaktır.

4.1 Fuzzy Projektif Uzaylarından Elde Edilen Fuzzy Grupları

$\mathcal{P}$ n-boyutlu bir projektif uzay ve $[\lambda, \mathcal{P}]$, $\mathcal{P}$ üzerinde tanımlı n-boyutlu fuzzy projektif uzay olsun. 3. bölümde yapıldığı gibi $\mathcal{P}$ nin otomorfizm grubu üzerinde bir fuzzy alt grubu tanımlamak mümkündür.

$\mathcal{P}$ de uzunluğu n olan $(q, U_1, U_2, ..., U_{n-1})$ maksimal flagı ve $[0,1]$ aralığındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{P}]$ n-boyutlu fuzzy projektif uzayını

$$\begin{array}{ll} \lambda: & \mathcal{P} \longrightarrow [0,1] \\ & p \longrightarrow a_0 \quad , \quad p = q \text{ ise} \\ & p \longrightarrow a_1 \quad , \quad p \in U_1 \setminus \{q\} \text{ için} \\ & p \longrightarrow a_2 \quad , \quad p \in U_2 \setminus U_1 \text{ için} \\ & \ldots \\ & p \longrightarrow a_{n-1} \quad , \quad p \in U_{n-1} \setminus U_{n-2} \text{ için} \\ & p \longrightarrow a_n \quad , \quad p \in \mathcal{P} \setminus U_{n-1} \text{ için} \end{array}$$

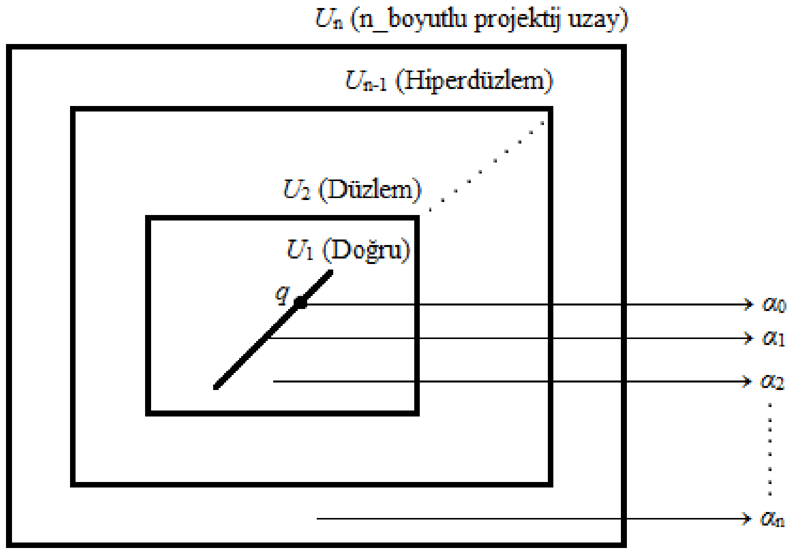
şeklinde oluşturulsun. Burada

a_0 : q noktasının üyelik derecesi,
a_1 : $U_1 \setminus \{q\}$ alt uzayının noktalarının üyelik derecesi,
a_2 : $U_2 \setminus U_1$ alt uzayının noktalarının üyelik derecesi,
...
a_n : $U_n \setminus U_{n-1}$ alt uzayının noktalarının üyelik derecesidir.

Ayrıca $\mathcal{P}$ nin $q = U_0, U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U_n = \mathcal{P}$ alt uzayları,

$$\begin{gathered} q = U_0 = \{p \in P : \lambda(p) \geq a_0\} \\ U_1 = \{p \in P : \lambda(p) \geq a_1\} \\ U_2 = \{p \in P : \lambda(p) \geq a_2\} \\ \ldots \\ U_n = \mathcal{P} = \{p \in P : \lambda(p) \geq a_n\} \end{gathered}$$

şeklinde de ifade edilebilir.



Şekil 4.1. $\mathcal{P}$ nin Alt Uzaylarının Kümesel Gösterimi

$\mathcal{P}$ nin otomorfizm grubu G olsun. Şimdi G nin alt grupları zinciri araştırılmalıdır. İlk olarak $[\lambda, \mathcal{P}]$ deki en düşük a_{n-1} üyelik derecesiyle verilen bütün noktaları sabitleyen St_{n-1} sabitleyici grubu araştırılmalıdır, St_{n-1} grubunun sabitlediği noktalar $\mathcal{P}$ uzayındaki U_{n-1} hiperdüzleminin noktalarıdır. Daha sonra St_{n-1} in alt grubu olan St_{n-2} grubu araştırılmalıdır, St_{n-2} grubu $\mathcal{P}$ nin $(n-2)$-boyutlu U_{n-2} alt uzayının sabitleyicisidir ve St_{n-2} nin sabitlediği noktalar en düşük a_{n-2} üyelik derecesiyle verilir. Böyle devam edilirse $\mathcal{P}$ nin U_1 alt uzayını sabitleyen grup St_1 olarak bulunur ve St_1 in sabitlediği noktalar en düşük a_1 üyelik derecesiyle verilir. Son olarak a_0 üyelik derecesiyle verilen q noktasını sabitleyen grup St_0 olarak bulunur. Buradan G nin alt grupları zinciri $(St_0,\ St_1,\ \ldots,\ St_{n-2},\ St_{n-1},\ G)$ şeklinde oluşturulur.

G nin $(St_0,\ St_1,\ \ldots,\ St_{n-2},\ St_{n-1},\ G)$ alt grupları zinciri ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $a_i \in [0,1]$ reel sayıları için G üzerindeki fuzzy kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
\begin{array}{lll}
\mu : & G \longrightarrow [0,1] & \\
 & x \longrightarrow a_n & ,\quad x \in G \setminus St_{n-1} \ \text{ ise} \\
 & x \longrightarrow a_{n-1} & ,\quad x \in St_{n-1} \setminus St_{n-2} \ \text{ ise} \\
 & \ldots & \\
 & x \longrightarrow a_1 & ,\quad x \in St_1 \setminus St_0 \ \text{ ise} \\
 & x \longrightarrow a_0 & ,\quad x \in St_0 \ \text{ ise}
\end{array}
$$

μ, $\mathcal{P}$ nin bir fuzzy alt grubudur, bu yüzden μ nün $[\lambda, \mathcal{P}]$ fuzzy projektif uzayına karşılık gelen fuzzy alt grubu olduğu tanımlanır.

4.2 Fuzzy Gruplarından Elde Edilen Fuzzy Projektif Uzaylar

G otomorfizm grubuyla verilen n-boyutlu projektif uzay $\mathcal{P} = PG(n,q)$ olsun. $\mathcal{P}$ projektif uzayı q mertebeli $GF(q)$ sonlu cismi üzerindedir. $\mathcal{P}$ de bir $F = (U_0,\ U_1,\ U_2,\ ...,\ U_{n-1})$ flagı seçilsin, bu flagda U_i alt uzayı $\mathcal{P}$ nin i-boyutlu bir alt uzayıdır. Bu yüzden U_0 bir nokta ve U_{n-1} bir hiperdüzlemdir. $\mathcal{P}$ üzerinde $[\lambda, \mathcal{P}]$, F flagını esas alan bir fuzzy projektif uzay yapısıdır. Şimdi $[\lambda, \mathcal{P}]$ yi geliştirmeye olanak sağlayan μ fuzzy alt grubu oluşturulacaktır.

μ yü oluşturmak için G nin alt grupları zinciri oluşturulmalıdır. İlk olarak U_{n-1} in sabitleyici grubu St_{n-1} alınsın. Sonra $[n-1, n-2]$ flagın yani $(U_{n-2},\ U_{n-1})$ in sabitleyici grubu da St_{n-2} alınsın. Böyle devam edilirse genel durumda $[n-i, n-1]$ flagın yani $(U_{n-i},\ U_{n-i+1},\ ...,\ U_{n-1})$ in sabitleyici grubuna St_{n-i} denilebilir. Böylece $[1, n-1]$ flagın yani $(U_1, U_2, ..., U_{n-1})$ flagın sabitleyici grubuna St_1 denir ve $(U_0,\ U_1,\ U_2,\ ...,\ U_{n-1})$ maximal flagın sabitleyici grubuna da St_0 denir. Bu sabitleyiciler G nin alt grupları zincirini

$$St_0 \subseteq St_1 \subseteq St_2 ... \subseteq St_{n-1} \subseteq G$$

şeklinde oluşturur. Bu zinciri kullanarak $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $a_i \in [0,1]$ reel sayıları için G üzerindeki μ fuzzy alt grubu,

$$\begin{array}{lll} \mu: & G \longrightarrow [0,1] & \\ & x \longrightarrow a_n & , \ x \in G \setminus St_{n-1} \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_{n-1} & , \ x \in St_{n-1} \setminus St_{n-2} \text{ ise} \\ & \cdots & \\ & x \longrightarrow a_1 & , \ x \in St_1 \setminus St_0 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_0 & , \ x \in St_0 \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde oluşturulur.

Aslında $\mathcal{P}$ nin bir sonlu cisim üzerinde bir projektif uzay olmasına gerek yoktur. Aynı yapı sonsuz cisimler üzerindeki temel projektif uzaylar için de geçerlidir. Ancak sonlu durumu açıklamak daha kolaydır, bu yüzden genelde sonlu cisimler üzerinde çalışılır.

Şimdi U_0 noktasını sabitleyen G nin St' grubu ele alınsın, öyle ki $St_1 \cap St' = St_0$ dır. O zaman fuzzy noktalarının taban noktaları St' nün klasik kosetleriyle verilir. Şimdi taban noktaları verilen fuzzy noktalarının üyelik dereceleri belirlenmelidir.

Bölüm 3 te yaptığımız gibi K üzerinde bir fuzzy kümesi, G grubunun alt grubu olan St_0 ın bütün kosetlerinin kümesi; $\forall g \in G$ için

$$\begin{array}{ll} V : K & \longrightarrow [0,1] \\ gSt_0 & \longrightarrow \mu(g) \end{array}$$

şeklinde yazılır. Bir kosetin üyelik derecesi o kosetin seçilen temsilcisi $g \in G$ den bağımsızdır, çünkü grup teorisinden

$$\begin{array}{rcl} gSt_0 = St_0 & \Longleftrightarrow & g \in St_0 \\ gSt_0 \subseteq St_1 \setminus St_0 & \Longleftrightarrow & g \in St_1 \setminus St_0 \\ \ldots & & \\ gSt_0 \subseteq St_{n-1} \setminus St_{n-2} & \Longleftrightarrow & g \in St_{n-1} \setminus St_{n-2} \\ gSt_0 \subseteq St_n = G \setminus St_{n-1} & \Longleftrightarrow & g \in St_n = G \setminus St_{n-1} \end{array}$$

olduğu biliniyor. Böylece $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $a_i \in [0,1]$ reel sayıları için K üzerindeki v fuzzy kümesi,

$$\begin{array}{rlll} v: & K \longrightarrow [0,1] & & \\ & x \longrightarrow a_0 & , & x = St_0 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_1 & , & x \subseteq St_1 \setminus St_0 \text{ ise} \\ & \ldots & & \\ & x \longrightarrow a_{n-1} & , & x \subseteq St_{n-1} \setminus St_{n-2} \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_n & , & x \subseteq G \setminus St_{n-1} \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathcal{P} = PG(n,q)$ q-mertebeli bir projektif uzay olduğundan bir doğrusu üzerinde $q+1$ nokta vardır. Bu ifade U_1 alt uzayının $q+1$ noktası olduğu anlamına geliyor. Genelleştirildiğinde ise, $\forall i \in \{1,2,...,n\}$ için her U_i alt uzayının $q^i + q^{i-1} + ... + q^2 + q + 1$ noktası vardır. Burada U_0 alt uzayının sadece bir noktası vardır, çünkü U_0 ın kendisi bir noktadır. Bundan sonra $\forall i \in \{1,2,...,n\}$ için $q^i + q^{i-1} + ... + q^2 + q + 1$ sayısı N_i ile gösterilir.

$\mathcal{P} = PG(n,q)$ projektif uzayının $(n-2)$-boyutlu sabit bir alt uzayından geçen $N_1 = q+1$ hiperdüzlem vardır. $\mathcal{P}$ nin $(n-3)$-boyutlu sabit bir alt uzayından geçen $(n-2)$-boyutlu alt uzaylarının sayısı $N_2 = q^2 + q + 1$ tanedir. Böyle devam edilirse $\mathcal{P}$ nin sabit bir doğrusundan geçen düzlemlerinin sayısı N_{n-2} tane ve sabit bir noktasından geçen doğrularının sayısı ise N_{n-1} tanedir. Genel bir ifadeyle, $\mathcal{P}$ nin $(i-1)$-boyutlu sabit bir alt uzayından geçen i-boyutlu alt uzaylarının sayısı N_{n-i} tanedir. Bu yüzden $\mathcal{P}$ deki maksimal flagların toplam sayısı,

$$N_1 \cdot N_2 \cdot ... N_{n-1} \cdot N_n$$

tanedir. Buradan $\mathcal{P}$ nin sabit bir noktasından geçen $N_1 \cdot N_2 \cdot ... N_{n-1}$ tane flag olduğu sonucuna varılır.

St_0 grubu $(U_0, U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U_n)$ flagını ve St_1 grubu $(U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U_n)$ flagını sabitlediğinden, bunun yanı sıra U_1 alt uzayında $N_1 = q+1$ nokta olduğundan,

$$|St_1| = (q+1)\,|St_0|$$

eşitliği vardır. Bu ifade St_0 ın St_1 tarafından içerilen $q+1$ kosetinin olduğu anlamına geliyor.

Benzer bir yolla hem St_2 grubu $(U_2,\ U_3,\ ..,\ U_{n-1},\ U_n)$ flagını sabitlediğinden hem de U_2 alt uzayında $(q+1)(q^2+q+1) = N_1 \cdot N_2$ farklı yolla (p,L) çifti seçebildiğinden

$$|St_2| = (q+1)(q^2+q+1)\,|St_0|$$

olduğu bulunabilir. Bu ifade St_2 de St_0 ın $(q+1)(q^2+q+1)$ kosetinin olduğu anlamına geliyor ((p,L) çifti ifadesinde p bir nokta, L bir doğru ve $p \circ L$ dir.).

Genel olarak; hem St_i grubu $(U_i,\ U_{i+1},\ ...,\ U_n)$ flagını sabitlediğinden hem de U_i de $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_i$ farklı yolla $(U_0,\ U_1,\ ...,\ U_i)$ flagı seçilebildiğinden,

$$|St_i| = N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_i\,|St_0|$$

olduğu bulunabilir. Buradan St_i de St_0 ın $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_i$ kosetinin olduğu bulunabilir, bu yüzden U_i de eşit sayıda $[0,i]$ flag vardır. Bu demek oluyorki, U_i de N_i nokta olduğundan U_i deki her noktadan geçen $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{i-1}$ flag vardır, çünkü $\mathcal{P}$ nin her alt uzayındaki bir noktadan geçen flagların sayısı aynıdır.

μ fuzzy alt gruplarından elde edilen $[\lambda,\mathcal{P}]$ fuzzy projektif uzayının bütün taban noktalarının kümesi olan fuzzy kümesi,

$$\begin{array}{rl} \lambda : \mathcal{P} & \longrightarrow [0,1] \\ p & \longrightarrow \max_{i=1}^{k} \nu(x_i St_0) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x_i St_0$, p noktasından geçen flaglardır ve bu flagların sayısı,

$$k = N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{n-1}$$

tanedir. Her flag sadece bir nokta içerdiğinden, ν fuzzy kümesindeki bir flagın üyelik derecesini λ daki sadece bir fuzzy noktasının üyelik derecesinin belirlenmesiyle bulanabilir.

ν de α_0 üyelik derecesine sahip olan St_0 ın bir koseti (bu koset St_0 ın kendisidir) olduğundan, p noktasını içeren bu flag α_0 üyelik dercesiyle verilecektir ve bu üyelik derecesiyle verilen p noktası tek olacaktır.

St_1 grubu St_0 ın $q+1$ kosetini içerir, bu ifade α_1 üyelik derecesiyle verilen q flag olacağı anlamına geliyor. Bütün bu flaglar α_0 üyelik derecesiyle verilen flagla birlikte $q+1$ noktayı içeren U_1 doğrusunu içerdiğinden dolayı, bu flagların hepsi farklı bir noktayı içerir. Burada sadece bu noktalardan geçen diğer flagların daha düşük üyelik derecesiyle verilenler bulunacaktır. Bu ifade λ daki $U_1 \setminus U_0$ alt uzayı üzerindeki bütün noktaların α_1 üyelik derecesiyle verileceği anlamına geliyor.

St_2 grubu St_0 ın $N_1 \cdot N_2$ kosetini içerir, bu yüzden U_2 de $N_1 \cdot N_2$ flag vardır. U_2 nin α_0, α_1 ve α_2 üyelik dereceleriyle verilen $N_1 \cdot N_2$ flag vardır. Bu flagların bir tanesi α_0 üyelik derecesiyle ve q tanesi de α_1 üyelik derecesiyle verildiğinden dolayı, U_2 de α_2 üyelik derecesiyle verilen

$$\begin{aligned} N_1 \cdot N_2 - N_1 &= (q+1)(q^2+q+1)-(q+1) \\ &= (q+1)(q^2+q) \end{aligned}$$

tane flag vardır. U_2 de N_2 nokta vardır ve her noktadan geçen $N_1 = q+1$ flag vardır. U_1 in noktalarının üyelik dereceleri değişken olmadığından ve v fuzzy kümesinde eklenen flaglar daha düşük bir üyelik derecesine sahip olduğundan, U_1 deki noktaların üyelik dereceleri eklenen flagların üyelik derecelerinin belirlenmesine katkı sağlamayacaktır. Bu yüzden $U_2 \setminus U_1$ in bütün noktalarının üyelik dereceleri α_2 üyelik derecesiyle verilir.

St_i grubu St_0 ın $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_i$ kosetini içerir, bu yüzden U_i alt uzayında $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_i$ flag vardır. U_i de her noktadan geçen $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{i-1}$ flag vardır. U_i de α_0, α_1, α_2, ..., α_{i-1} ve α_i üyelik dereceleriyle verilen $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_i$ flag vardır ve U_{i-1} de α_0, α_1, α_2, ..., α_{i-1} üyelik dereceleriyle verilen $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{i-1}$ flag vardır. Bu yüzden $U_i \setminus U_{i-1}$ de α_i üyelik derecesiyle verilen

$$(N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{i-1} \cdot N_i) - (N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{i-1}) = (N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{i-1})(N_i - 1)$$

flag vardır. U_{i-1} de noktalardan geçen flaglar daha önce verilen bir üyelik derecesine sahiptir. Bu üyelik dereceleri değişmez, çünkü yeni flagların üyelik dereceleri U_{i-1} deki flagların üyelik dercelerinden daha düşüktür. Bu yüzden U_{i-1} deki flaglar noktaların üyelik derecelerinin belirlenmesine katkı sağlamayacaktır. U_i de bütün flagların üyelik derecelerinin maksimumu alınır, bu yüzden $U_i \setminus U_{i-1}$ deki noktaların hepsi α_i üyelik derecesine sahiptir.

Yukarıda bahsedilen durumları $\mathcal{P}$ nin her noktasına bir üyelik derecesinin verilmesi ile sonlandırılsın; α_0 üyelik dercesine sahip bir nokta vardır, α_1 üyelik derecesine sahip q nokta vardır, α_2 üyelik derecesine sahip q^2 nokta vardır. Bu durumu genellersek $\mathcal{P}$ nin α_i üyelik derecesiyle verilen q^i noktası vardır. Dahası α_0 üyelik derecesiyle verilen nokta U_0 olduğundan, α_0 ve α_1 üyelik dereceleriyle tanımlanan doğru U_1 dir. Genel olarak $\mathcal{P}$ nin α_0, α_1 α_2, ..., α_{i-1} veya α_i üyelik dereceleriyle verilen noktalarla tanımlanan uzay U_i olduğundan, λ nın n-boyutlu fuzzy projektif formunu aşağıdaki teoremdeki gibi verilebilir.

Teorem 4.1 $\mathcal{P}$ keyfi bir cissim üzerinde n-boyutlu fuzzy projektif uzay olsun. $\mathcal{P}$ de $(q = U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_{n-1})$ maksimal flagı ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $a_i \in [0,1]$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{P}]$ fuzzy projektif düzlemi,

$$
\begin{array}{rll}
\lambda: & \mathcal{P} \longrightarrow [0,1] & \\
& p \longrightarrow a_0 & , \ p = q \ \text{ ise} \\
& p \longrightarrow a_1 & , \ p \in U_1 \setminus \{q\} \ \text{ için} \\
& p \longrightarrow a_2 & , \ p \in U_2 \setminus U_1 \ \text{ için} \\
& \ldots & \\
& p \longrightarrow a_{n-1} & , \ p \in U_{n-1} \setminus U_{n-2} \ \text{ için} \\
& p \longrightarrow a_n & , \ p \in \mathcal{P} \setminus U_{n-1} \ \text{ için}
\end{array}
$$

şeklindedir. $\mathcal{P}$ nin G otomorfizm grubu üzerindeki μ fuzzy alt grubu,

G nin alt grupları zinciri $St_0 \subseteq St_1 \subseteq St_2 ... \subseteq St_{n-1}$ ve $\forall i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ için $(U_i,\ U_{i+1},\ ...,\ U_n)$ flagın sabitleyici grubu St_i olmak üzere;

$$
\begin{array}{rll}
\mu: & G \longrightarrow [0,1] & \\
& x \longrightarrow a_n & , \ x \in G \setminus St_{n-1} \ \text{ ise} \\
& x \longrightarrow a_{n-1} & , \ x \in St_{n-1} \setminus St_{n-2} \ \text{ ise} \\
& \ldots & \\
& x \longrightarrow a_1 & , \ x \in St_1 \setminus St_0 \ \text{ ise} \\
& x \longrightarrow a_0 & , \ x \in St_0 \ \text{ ise}
\end{array}
$$

şeklindedir (Kujken, Maldeghem, Kerre, 1999).

4.3 Bir Fuzzy Projektif Düzlem Örneği

Bu bölümde $PG(2,3)$ projektif düzlemini baz alarak, fuzzy gruplarından elde edilen bir fuzzy projektif düzlem oluşturulacaktır. Bunun için önce $PG(2,3)$ projektif düzlemi verilecektir.

$PG(2,3)$ projektif düzlemi, mertebesi 3 olan 2 boyutlu bir projektif düzlemdir. Bu projektif düzlemin mertebesi 3 olduğundan, 13 noktası ve 13 doğrusu vardır. $PG(2,3)$ ün noktalarının kümesi N ve doğrularının kümesi D olsun. Bu durumda D ve N kümelerinin elemanları,

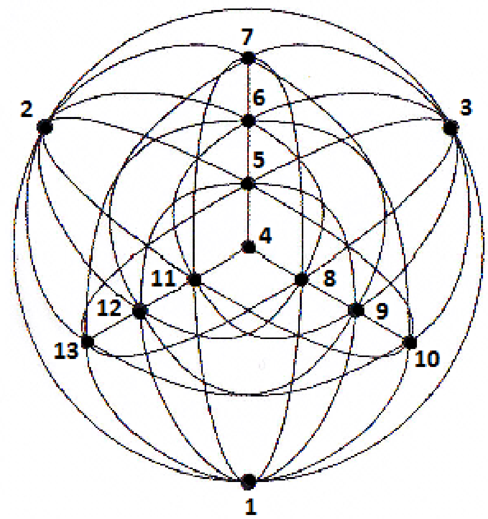
$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$$

$$D = \{d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6,\ d_7,\ d_8,\ d_9,\ d_{10},\ d_{11},\ d_{12},\ d_{13}\}$$

ve

$$
\begin{array}{lllll}
d_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} & , & d_2 = \{1,\ 5,\ 9,\ 12\} & , & d_3 = \{1,\ 6,\ 10,\ 13\} \\
d_4 = \{1,\ 7,\ 8,\ 11\} & , & d_5 = \{2,\ 5,\ 10,\ 11\} & , & d_6 = \{2,\ 6,\ 8,\ 12\} \\
d_7 = \{2,\ 7,\ 9,\ 13\} & , & d_8 = \{3,\ 5,\ 8,\ 13\} & , & d_9 = \{3,\ 6,\ 9,\ 11\} \\
d_{10} = \{3,\ 7,\ 10,\ 12\} & , & d_{11} = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\} & , & d_{12} = \{4,\ 8,\ 9,\ 10\} \\
d_{13} = \{4,\ 11,\ 12,\ 13\} & & & &
\end{array}
$$

olarak yazılabilir. Buradan da görüldüğü üzere mertebesi 3 olan bir projektif düzlemin her noktasından geçen 4 doğru ve her doğrusu üzerinde 4 nokta vardır (Kahrströn, 2002).



Şekil 4.2. $PG(2,3)$ Projektif Düzlemi

4.3.1 $PG(2,3)$ Fuzzy Projektif Uzayına Karşılık Gelen Fuzzy Grupları

$\mathcal{P} = PG(2,3)$ projektif düzlemi üzerinde bir fuzzy projektif uzayı $[\lambda, \mathcal{P}]$ olsun. $\mathcal{P}$ de belli bir maksimal flag ve $[0,1]$ aralığında $a_0 \geq a_1 \geq a_2$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{P}]$ fuzzy projektif uzayı,

$$\begin{array}{rll} \lambda : & \mathcal{P} \longrightarrow [0,1] & \\ & p \longrightarrow a_0 & , \quad p = q \text{ ise} \\ & p \longrightarrow a_1 & , \quad p \in L \setminus \{q\} \text{ için} \\ & p \longrightarrow a_2 & , \quad p \in \mathcal{P} \setminus L \text{ için} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Burada L, $\mathcal{P}$ projektif uzayının bir doğrusudur ve q, L doğrusu üzerinde bir noktadır.

$\mathcal{P}$ nin otomorfizm grubu G olsun. G grubunun elemanları, $\mathcal{P}$ nin 13 noktasını yine $\mathcal{P}$ nin noktalarına götüren $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ birebir örten dönüşümünün kolinasyonlarıdır. Burada $\varphi(1)$ in seçilmesi için 13, $\varphi(2)$ nin seçilmesi için 12 ve $\varphi(3)$ ün seçilmesi için 11 yol vardır. φ bir kolinasyon olduğundan; $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ve $\varphi(3)$ ile belirlenen doğru üzerindeki dördüncü nokta $\varphi(4)$ olmalıdır. Geriye kalan nokta sayısı 9 olduğundan, $\varphi(5)$ in seçilmesi için 9 ve $\varphi(6)$ nın seçilmesi için 8 yol vardır. $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, ve $\varphi(6)$ ile belirlenen doğru üzerindeki dördüncü nokta $\varphi(7)$ olmalıdır. Geriye kalan nokta sayısı 6 olduğundan, $\varphi(8)$ in seçilmesi için 6 yol vardır. Kalan noktaların her biri, bir doğrunun dördüncü noktası olacaktır. Bu durumda G otomorfizm grubunun eleman sayısının $13 \times 12 \times 11 \times 9 \times 8 \times 6 = 741312$ olduğu söyleyenebilir.

G otomorfizm grubunu $[\lambda, \mathcal{P}]$ fuzzy projektif düzleminde en düşük a_2 üyelik derecesiyle verilen noktaları sabitleyen grup olarak düşünülebilir. Bu durumda G, $[\lambda, \mathcal{P}]$ yi sabitleyen gruptur. $[\lambda,\mathcal{P}]$ nin bir doğrusunu sabitleyen grup St_1 olsun, o zaman St_1 in sabitlediği noktalar en düşük a_1 üyelik derecesiyle verilen noktalardır. Bu doğru üzerindeki bir noktayı sabitleyen grup ise St_0 olsun, o zaman St_0, a_0 üyelik derecesiyle verilen noktanın sabitleyici grubudur. Bu durumda G nin alt grupları zinciri $St_0 \leq St_1 \leq G$ olarak bulunur.

G nin $St_0 \leq St_1 \leq G$ alt grupları zinciri ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $a_i \in [0,1]$ reel sayıları için G üzerindeki μ fuzzy alt grubu,

$$\begin{array}{rll} \mu: & G \longrightarrow [0,1] & \\ & x \longrightarrow a_0 & , \quad x \in St_0 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_1 & , \quad x \in St_1 \setminus St_0 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_2 & , \quad x \in G \setminus St_1 \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde oluşturulabilir.

4.3.2 Fuzzy Gruplarından Elde Edilen $[\lambda,\mathcal{P}]$ Fuzzy Projektif Düzlemi

G otomorfizm grubuyla verilen projetif düzlem $\mathcal{P} = PG(2,3)$ olsun. $\mathcal{P}$ de bir (q,L) flagı seçilir ise, bu flagda L bir doğru ve q, L doğrusu üzerinde bir noktadır. $\mathcal{P}$ üzerinde $[\lambda,\mathcal{P}]$, (q,L) flagını esas alan bir fuzzy projektif düzlemdir. Şimdi $[\lambda,\mathcal{P}]$ nin geliştirilmesine olanak sağlayan μ fuzzy alt grubun bulunmalıdır, bunun için G nin alt grupları zinciri oluşturulmalıdır. İlk olarak L doğrusunun sabitleyici grubuna St_1 ve L doğrusu üzerindeki bir q noktasını sabitleyen grup St_0 olsun. Bu gruplar G nin alt grupları zincirini, $St_0 \leq St_1 \leq G$ şeklinde oluşturur. Bu zinciri kullanarak $a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $a_i \in [0,1]$ reel sayıları için G üzerindeki μ fuzzy alt grubu,

$$\begin{array}{rll} \mu: & G \longrightarrow [0,1] & \\ & x \longrightarrow a_0 & , \quad x \in St_0 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_1 & , \quad x \in St_1 \setminus St_0 \text{ ise} \\ & x \longrightarrow a_2 & , \quad x \in G \setminus St_1 \text{ ise} \end{array}$$

şeklinde oluşturulabilir.

St', $\mathcal{P}$ nin noktalarını sabitleyen bir grup olsun. Seçilecek nokta St_1 in sabitlediği nokta üzerinde olduğundan, $St_1 \cap St'$ olacaktır. Bu yüzden fuzzy noktalarının taban noktaları St' nün klasik kosetleriyle belirlenir. Şimdi taban noktaları verilen fuzzy noktalarının üyelik dereceleri belirlenmelidir.

$\mathcal{P} = PG(2,3)$ projektif düzleminin her bir noktasının üyelik derecesinin belirlenmesi için en az 4 flag gerekir, çünkü $[\lambda,\mathcal{P}]$ nin 13 taban noktası vardır ve her nokta 4 flag üzerindedir. $\mathcal{P}$ de 13 nokta olduğundan ve her nokta üzerinden 4 doğru geçtiğinden, $\mathcal{P}$ de seçilen bir (q,L) flagını $13 \times 4 = 52$ farklı şekilde seçilebilir.

St_0 ın tek koseti olduğundan, seçilen q noktasını içeren flag a_0 üyelik derecesiyle verilecektir.

St_1 grubu St_0 ın $q+1=3+1=4$ kosetini içerdiğinden, a_1 üyelik derecesiyle verilen $q=4$ flag vardır. Bu flaglar a_0 üyelik derecesiyle verilen flagla birlikte 4 noktayı içeren L doğrusunu içeriyor. Buradaki flagların hepsi farklı bir noktayı içerir. q noktasının üyelik derecesi eklenen flagların üyelik derecesinin belirlenmesine katkı sağlamayacaktır. Bu yüzden $L\setminus\{q\}$ nun noktalarının üyelik dereceleri a_1 ile verilecektir.

G grubu St_0 ın

$$\begin{aligned}(q+1)(q^2+q+1) &= (3+1)(3^2+3+1)\\ &= 52\end{aligned}$$

kosetini içerdiğinden, a_2 üyelik derecesiyle verilen

$$\begin{aligned}(q+1)(q^2+q+1)-(q+1) &= 52-4\\ &= 48\end{aligned}$$

flag vardır. Bu flaglar a_0 ve a_1 üyelik derecesiyle verilen flaglarla birlikte 52 flag vardır. L nin noktalarının üyelik dereceleri eklenen flagların üyelik derecelerine katkı sağlamayacaktır, bu yüzden $\mathcal{P}\setminus L$ nin noktalarının üyelik dereceleri a_2 ile verilecektir.

Yukarıda bahsedilenler doğrultusunda; a_0 üyelik derecesi ile verilen 1 nokta vardır, a_1 üyelik derecesi ile verilen $q=3$ nokta vardır ve a_2 üyelik derecesi ile verilen $q^2=9$ nokta vardır.

Bu durumda $[\lambda,\mathcal{P}]$ fuzzy projektif düzlemi,

$\mathcal{P}$ de bir maksimal flag (q,L) ve $a_0\geq a_1\geq a_2$, $a_i\in[0,1]$ reel sayılar olmak üzere;

$$\begin{aligned}\lambda:\ & \mathcal{P}\longrightarrow[0,1]\\ & p\longrightarrow a_0 \quad , \quad p=q \text{ ise}\\ & p\longrightarrow a_1 \quad , \quad p\in L\setminus\{q\} \text{ için}\\ & p\longrightarrow a_2 \quad , \quad p\in \mathcal{P}\setminus L \text{ için}\end{aligned}$$

şeklinde oluşur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Altaş, H.İ., 1999, Bulanık mantık: Bulanık kavramı, Bileşim Yayıncılık A.Ş., 62, 80-85.

Casse, R., 2006, Projective geometry, Oxford University Press, 192 p.

Çallıalp, F., 2011, Örneklerle soyut cebir, Birsen Yayınevi, 337 s.

Kahrström, J., 2002, On Projektive plane, Master thesis, Mid Sweden University, 40 p.

Kandasamy, W.B.V., 2003, Smarandache Fuzzy algebra, American Research Press, 432 p.

Karakaş H.İ., 1998, Soyut cebire giriş, Matematik Vakfı Yayınları, 175 s.

Kaya, R., 2005, Projektif geometri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 391 s.

Kujken, L., Maldeghem, H.V. and Kerre, E., 1999, Fuzzy projektive geometries from Fuzzy groups, Tatra Mountains Mathematical Publication, 16, 95-108.

Suleiman, R. and Ahmad, A.G., 2011, The number of Fuzzy subgroups of group defined by a presentation, International Journal of Algebra, 8, 375-382.

Şen, Z., 2004, Mühendislikte Bulanık (Fuzzy) mantık ve modelleme prensipleri, Su Vakfı Yayınları, 189 s.

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.