Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı

Kadir EMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Ocak 2012

Coproduct of Crossed Modules

Kadir EMİR

MASTER DISSERTATION
Department of Mathematics
January 2012

Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı

Kadir EMİR

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Ocak 2012

ONAY

Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Kadir EMİR' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezin esas konusu çaprazlanmış P-modüllerin eşçarpımı olup, buna hazırlık olarak öncelikle eşçarpımın genel tanımı verildikten sonra, farklı cebirsel yapılar için eşçarpımın nelere karşılık geldiği üzerinde ayrıntılı olarak durulacaktır.

Tezin amacı doğrultusunda ise öncelikle çaprazlanmış P-modül tanımını örneklerle birlikte verdikten sonra, eşçarpımın inşaasında temel olarak iki farklı yol izleyeceğiz. İlk olarak, daha önceden detaylı bir şekilde incelediğimiz serbest çarpım yapısı yardımıyla, çaprazlanmış P-modüllerin eşçarpımının nasıl inşaa edildiğini göreceğiz. Fakat bu yöntem, eşçarpımın bir parçası olan serbest grupların cebirsel özellikleri nedeniyle, hesaplanabilirlik açısından oldukça karmaşık bir yapı ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla daha sonra ise eşçarpımın alternatif olarak farklı bir yoldan, yarıdirek çarpımlar yardımıyla nasıl inşaa edilebileceğini göreceğiz. Son olarak da, kullandığımız bu iki farklı cebirsel yapı arasında nasıl bir ilişki bulunduğunu ve ayrıca bu iki yapının birbirine denk olduğunu göreceğiz.

Anahtar Kelimeler: Eşçarpım Obje, Grupların Serbest Çarpımı, Serbest Grup, Çaprazlanmış P-modüller, Çaprazlanmış P-modüllerin Eşçarpımı.

SUMMARY

The main subject of this thesis is to give the coproduct of crossed P-modules, in details. After giving the definiton of the coproduct in an arbitrary category, we will construct the coproduct objects in various categories as a preparation to the coproduct of crossed P-modules.

We will give the construction of the coproduct of crossed P-modules by two methods, after giving the definition and several examples for the coproduct. Firstly, we will give how to construct the coproduct of crossed P-modules by the free product, which we examined in previous chapters with all of its details. But we will see that, this method is very useless for calculations, because of the algebraic properties of the free product. Alternatively, we will examine the second method to construct the coproduct by semi-direct products. Finally, we will obtain the relations between these two constructions, algebraic structures and show their equivalence.

Keywords: Coproduct Object, Free Product of Groups, Free Groups, Crossed P-modules, Coproduct of Crossed P-modules.

Beni bu çalışmaya sevk eden, yöneten ve tezim boyunca her türlü bilgi ve yardımlarını

esirgemeyen başta değerli danışman hocam, sayın,

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

olmak üzere

Yrd. Doç. Dr. İ.İlker AKÇA ve **Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU**'ya

Tezimin yazım ve düzenleme aşamasındaki her türlü yardımlarından dolayı değerli hocalarım,

Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ ve **Arş. Gör. Ahmet Faruk ASLAN**'a

Ayrıca beni bugünlere getiren,

değerli ailemdeki herkese

ayrı ayrı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

teşekkürler anne...

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

Giriş

0.1 Tezin Yapısı

Matematikte karşılaşılan en temel sorulardan biri her zaman,*"eldeki mevcut yapılar yardımıyla yeni bir yapının nasıl elde edilebileceği"* olmuştur. Bu soru kategori teori için ise, "*herhangi bir kategorideki A ve B objeleri yardımıyla yeni bir obje nasıl elde edilebilir?"* şeklinde karşımıza çıkar.

Bu soruya cevaben ilk akla gelen, kümelerin kartezyen çarpımının genellemesi olarak düşünebileceğimiz *çarpım* objesidir. Yani herhangi bir D objesi ve

$$g_1 : D \longrightarrow A \qquad , \qquad g_2 : D \longrightarrow B$$

morfizmleri verildiğinde,

$$u_1 : C \longrightarrow A \qquad , \qquad u_2 : C \longrightarrow B$$

morfizmleri yardımıyla,

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "u_1"'] \arrow[r, "u_2"] & B \\
& D \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, dotted, "\exists ! \; f"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan ve ayrıca A ve B objelerinin *kategoriksel çarpımı* biçiminde düşünülebilecek olan bir C objesi tanımlamaktır.

Fakat kategori teoride her kavramın bir duali tanımlanabildiği gibi, bu kategoriksel çarpım kavramının da duali tanımlanabilmektedir. Dolayısıyla yukarıda verilen diyagramda yer alan okların yönü değiştirildiği takdirde, mevcut soruya alternatif bir cevap olarak karşımıza,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & C \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] & B \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramıyla birlikte A ve B objelerinin *kategoriksel toplamı* biçiminde düşünülebilecek olan ve kısaca A ve B objelerinin *eşçarpımı* olarak adlandırılan bir C objesi çıkmaktadır.

Bu tezdeki esas amacımız, çaprazlanmış P-modüller kategorisindeki herhangi iki çaprazlanmış P-modülün eşçarpımının neye karşılık geldiğini görmek ve bu yapının adım adım nasıl inşaa edilebileceğini incelemek olacaktır. Bu çalışma R. Brown tarafından [3] de yapılmış ve ayrıca yine aynı çalışmada Van Kampen Teoremi'ne uygulanması verilmiştir. Bu tezdeki amaç da bu çalışmayı tüm ayrıntısıyla birlikte incelemek olacaktır.

Fakat bu yapıyı inşaa ederken tanım ve kavramlarda herhangi bir karmaşa olmaması için, öncelikle daha kolay anlaşılabilir cebirsel yapılardaki eşçarpımın neye karşılık geldiğini görmemiz bizim için faydalı olacaktır.

Örneğin, eşçarpım tanımının tam olarak anlaşılabilmesi için basit bir örnek olarak kümeler kategorisini göz önüne aldığımızda, herhangi iki kümenin eşçarpımı, bu kümelerin elemanlarını birbirinden bağımsız kılan, yani kesişimlerini göz ardı eden bir birleşim işlemi olarak tanımlanan ve *ayrık birleşim* adı verilen bir yapıya karşılık gelecektir.

Gruplar kategorisine hazırlık olarak Abelyen gruplar kategorisini incelediğimiz takdirde, grupların Abelyen olması işleri kolaylaştıracak ve Abelyen grupların eşçarpımı, çarpım objeye eşit yani *direk toplam* olarak bulunacaktır.

Fakat Abelyen olmayan gruplar kategorisini ele aldığımızda ise açık bir şekilde göreceğiz ki, direk toplam artık eşçarpım görevi görmeyecek ve dolayısıyla da eşçarpım için yeni bir yapıya ihtiyaç duyulacaktır. Bu sebeple de karşımıza, elemanları bu grupların elemanları yardımıyla elde edilen ve belirli özelliklere sahip grup-kelimeler olan ve kısaca *serbest çarpım* adı verilen yeni bir grup yapısı çıkacaktır. Serbest çarpım basit bir ifadeyle, çarpıma giren grupların altyapısını oluşturan kümelerin ayrık birleşimi üzerinden inşaa edilen grup yapısı olarak düşünülebilir.

Tüm bu verilerle birlikte, artık tezimizin asıl amacı olan çaprazlanmış P-modüller kategorisine geçtiğimizde ise, herhangi iki grup yardımıyla verilen iki çaprazlanmış P-modül için eşçarpım, bu grupların serbest çarpımı yardımıyla elde edilen bir çaprazlanmış P-modüle karşılık gelecektir.

0.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, yüksek mertebeden homotopi tipleri için cebirsel modellerin eşçarpımını elde etmemiz için bir altyapı hazırlamaktır. Bu noktada ilk akla gelen ise, 2-çaprazlanmış modüllerin eşçarpımını elde etmektir.

BÖLÜM 1

Eşçarpım

1.1 Giriş

Bu bölümde, tezin temel yapısı olan *eşçarpım* objenin, herhangi bir kategori için genel olarak tanımı verilecek ve sahip olduğu kategoriksel özellikler üzerinde durulacaktır.

Ayrıca daha sonra, temel bir örnek olarak kümeler kategorisi için eşçarpımın neye karşılık geldiği incelenecektir.

Eşçarpım obje ilk kez, *Mac Lane* tarafından [10] da tanımlanmıştır.

Tezin bu bölümünün hazırlanmasında genel olarak [9] dan yararlanılmıştır.

1.2 Eşçarpım

Tanım 1.1 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $\{X_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$ nin objelerinin keyfi bir ailesi olsun. $\mathcal{C}$ nin herhangi bir D objesi ve

$$g_i : X_i \longrightarrow D$$

morfizmleri verildiğinde,

$$u_i : X_i \longrightarrow C$$

morfizmleri yardımıyla,

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & C \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\
& D
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek

$$f : C \longrightarrow D$$

morfizmi varsa, C objesine $\{X_i\}_{i\in I}$ ailesinin *eşçarpımı* denir ve

$$C = \bigsqcup_{i\in I} X_i$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi bu tanımı, keyfi bir aile yerine herhangi iki obje alarak özelleştirelim.

$\mathcal{C}$ bir kategori, A ve B de $\mathcal{C}$ nin objeleri olsun. $\mathcal{C}$ nin herhangi bir D objesi ve

$$g_1 : A \longrightarrow D \qquad , \qquad g_2 : B \longrightarrow D$$

morfizmleri verildiğinde,

$$u_1 : A \longrightarrow C \qquad , \qquad u_2 : B \longrightarrow C$$

morfizmleri yardımıyla,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & C \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] & B \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek

$$f : C \longrightarrow D$$

morfizmi varsa, C objesine A ve B nin *eşçarpımı* denir ve

$$C = A \sqcup B$$

şeklinde gösterilir.

Not: Bundan sonraki teorem ve ispatlarda genellikle bu özel durum ele alınacak olup, ayrıca bir genelleme yapılmayacaktır.

Teorem 1.2 Eşçarpım izomorfizm farkıyla bir tektir.

Diğer bir deyişle, C_1 ve C_2, A ve B objelerinin birbirinden farklı iki eşçarpımı ise,

$$h : C_1 \xrightarrow{\cong} C_2$$

izomorfizmi vardır. Yani diyagram olarak,

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dd, "\cong"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & C_2 & \end{tikzcd}$$

şeklindedir.

İspat: C_1, A ve B nin eşçarpımı olarak alınsın. Bu durumda herhangi bir obje olarak C_2 objesi düşünülürse, Tanım 1.1 gereği,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & C_1 \arrow[d, dotted, "h"] & B \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & C_2 & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek h morfizmi vardır.

Diğer yandan C_2, A ve B nin eşçarpımı olarak alınsın. Bu durumda herhangi bir obje olarak C_2 objesi düşünülürse, yine Tanım 1.1 gereği,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "u_1"'] & C_2 \arrow[d, dotted, "k"] & B \arrow[l, "g_2"'] \arrow[dl, "u_2"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek k morfizmi mevcut olacaktır.

Son olarak da C_1, A ve B nin eşçarpımı ve ayrıca herhangi bir obje olarak da yine C_1 objesi düşünülürse, yine Tanım 1.1 gereği,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "u_1"'] & C_1 \arrow[d, dotted, "f"] & B \arrow[l, "g_2"'] \arrow[dl, "u_2"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek f morfizmi vardır.

Bu durumda, $k \circ h : C_1 \longrightarrow C_1$ morfizmi için,

$$\begin{aligned} (k \circ h) \circ u_1 &= k \circ (h \circ u_1) \\ &= k \circ g_1 \\ &= u_1 \\ &= id_{C_1} \circ u_1 \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$id_{C_1} \circ u_1 = u_1$$

elde edilir. Aynı şartlar u_2 için de geçerli olup sonuç olarak f nin bir tek olmasından dolayı da,

$$f = k \circ h = id_{C_1}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $h \circ k = id_{C_2}$ olduğu gösterilir ve sonuç olarak,

$$h : C \longrightarrow D$$

morfizmi bir izomorfizmdir. $\square$

Uyarı 1.3 Eşçarpım her zaman mevcut değildir. Örneğin, iki elemanlı kümelerin sınıfını obje sınıfı kabul eden bir kategoride, $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ objeleri ve herhangi bir obje olarak da $D = \{d_1, d_2\}$ objesi için,

$$\begin{tikzcd} \{a_1, a_2\} \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & \{c_1, c_2\} \arrow[d, dotted, "f"] & \{b_1, b_2\} \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & \{d_1, d_2\} & \end{tikzcd}$$

diyagramıyla birlikte,

$$\begin{array}{rccc} g_1: & A & \longrightarrow & D \\ & a_1 & \longmapsto & d_2 \\ & a_2 & \longmapsto & d_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g_2: & B & \longrightarrow & D \\ & b_1 & \longmapsto & d_1 \\ & b_2 & \longmapsto & d_2 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} u_1: & A & \longrightarrow & C \\ & a_1 & \longmapsto & c_1 \\ & a_2 & \longmapsto & c_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} u_2: & B & \longrightarrow & C \\ & b_1 & \longmapsto & c_1 \\ & b_2 & \longmapsto & c_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f: & C & \longrightarrow & D \\ & c_1 & \longmapsto & d_1 \\ & c_2 & \longmapsto & d_2 \end{array}$$

morfizmleri tanımlansın.

Bu durumda,

$$(f \circ u_1)(a_1) = f(u_1(a_1)) = f(c_1) = d_1$$

ve diğer taraftan,

$$g_1(a_1) = d_2$$

olduğundan,

$$f \circ u_1 \neq g_1$$

olup diyagram değişmeli olmayacaktır. Yani bu kategori için eşçarpım mevcut değildir.

1.3 Kümeler Kategorisinde Eşçarpım

A ve B herhangi iki küme olmak üzere bu kümeler yardımıyla,

$$\begin{aligned} A^* &= (A \times \{1\}) = \{(a,1) \mid a \in A\} \\ B^* &= (B \times \{2\}) = \{(b,2) \mid b \in B\} \end{aligned}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda,

$$A^* \cup B^* = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$$

kümesine, A ve B nin *ayrık birleşimi* denir.

Böylece herhangi iki A ve B kümesi için,

$$A^* \cap B^* = \varnothing$$

olur. Çünkü eğer $A^* \cap B^* \neq \varnothing$ olsaydı,

$$\begin{aligned} s \in A^* \cap B^* &\Rightarrow s \in A^* \text{ ve } s \in B^* \\ &\Rightarrow s = (a,1) = (b,2) \end{aligned}$$

olup bu ise $1 \neq 2$ olduğundan bir çelişki olacaktı.

Örneğin, $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{d, e\}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} A^* &= \{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)\} \\ B^* &= \{(d,2),(e,2)\} \end{aligned}$$

olup bu iki kümenin ayrık birleşimi,

$$A^* \cup B^* = \{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1),(d,2),(e,2)\}$$

olur.

Açıkça görüldüğü üzere, ayrık birleşimde eleman sayısı 6 iken, normal birleşim düşünüldüğünde eleman sayısı 5 olacaktır. Ayrık birleşimin esas amacı da zaten kesişim kümesindeki elemanların birleşim işleminde meydana getirdiği problemi ortadan kaldırmak ve elemanlardan bağımsız bir birleşim işlemi tanımlamaktır.

Yani kısaca, $|A| = m$ ve $|B| = n$ olmak üzere, $|A^* \cup B^*| = |A^*| + |B^*| = m + n$ dir.

Önerme 1.4 $\mathcal{C} = \mathit{Küme}$ (kümeler kategorisi) olmak üzere, A ve B de $\mathcal{C}$ nin iki objesi (küme) olsun.

Bu durumda herhangi bir D kümesi ve

$$g_1 : A \longrightarrow D \qquad\qquad g_2 : B \longrightarrow D$$

fonksiyonları verildiğinde,

$$\begin{array}{rccc} u_1: & A & \longrightarrow & A^* \cup B^* \\ & a & \longmapsto & (a,1) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} u_2: & B & \longrightarrow & A^* \cup B^* \\ & b & \longmapsto & (b,2) \end{array}$$

içine fonksiyonları yardımıyla,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & A^* \cup B^* \arrow[d, dotted, "\exists!\, f"] & B \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek f fonksiyonu mevcuttur.

İspat: Öncelikle f fonksiyonunun her $x \in A^* \cup B^*$ için,

$$\begin{array}{rccl} f: & A^* \cup B^* & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} g_1(a) & ; \ x = (a,1) \ , \ a \in A \\ g_2(b) & ; \ x = (b,2) \ , \ b \in B \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanabileceğini gösterelim.

$x_1 = x_2$ olsun. Bu durumda $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere x_1 ve x_2 için,

$$x_1 = (a,1) \quad \text{veya} \quad x_1 = (b,2)$$

ve benzer şekilde,

$$x_2 = (a',1) \quad \text{veya} \quad x_2 = (b',2)$$

durumları söz konusudur.

O halde,

$$\begin{array}{rcl} x_1 = x_2 & \Rightarrow & (a,1) = (a',1) \\ & \Rightarrow & a = a' \\ & \Rightarrow & g_1(a) = g_1(a') \quad (\because g_1 \text{ iyi tanımlı}) \\ & \Rightarrow & f(x_1) = f(x_2) \end{array}$$

ve diğer durum için de,

$$\begin{array}{rcl} x_1 = x_2 & \Rightarrow & (b,2) = (b',2) \\ & \Rightarrow & b = b' \\ & \Rightarrow & g_2(b) = g_2(b') \quad (\because g_2 \text{ iyi tanımlı}) \\ & \Rightarrow & f(x_1) = f(x_2) \end{array}$$

elde edilir. Yani f iyi tanımlıdır.

Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için,

$$\begin{array}{rcl} (f \circ u_1)(a) & = & f(u_1(a)) \\ & = & f(a,1) \\ & = & g_1(a) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} (f \circ u_2)(b) & = & f(u_2(b)) \\ & = & f(b,2) \\ & = & g_2(b) \end{array}$$

olup

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & A^* \cup B^* \arrow[d, dotted, "f"] & B \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

f', f ile aynı özellikte ve f den farklı bir fonksiyon olsun. Bu durumda kabul gereği,

$$f' \circ u_1 = g_1 \qquad f' \circ u_2 = g_2$$

dir. O halde, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için,

$$\begin{aligned} (f' \circ u_1)(a) &= f(a,1) \\ &= g_1(a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f' \circ u_2)(b) &= f(b,2) \\ &= g_2(b) \end{aligned}$$

olup her $x \in A^* \cup B^*$ için,

$$x = (a,1) \quad \text{veya} \quad x = (b,2)$$

olup $x = (a,1)$ ise,

$$f'(x) = f'((a,1)) = f'(u_1(a)) = (f \circ u_1)(a) = g_1(a)$$

ve benzer şekilde $x = (b,2)$ ise,

$$f'(x) = g_2(b)$$

elde edilir ki sonuç olarak,

$$f'(x) = \begin{cases} g_1(a) \ ; \ x = (a,1) \ , \ a \in A \\ g_2(b) \ ; \ x = (b,2) \ , \ b \in B \end{cases} = f(x)$$

yani,

$$f = f'$$

olup f bir tektir. □

Sonuç 1.5 $\boxed{\text{Kümeler kategorisinde ayrık birleşim, eşçarpım objedir.}}$

BÖLÜM 2

Abelyen Gruplar Kategorisinde Eşçarpım

2.1 Giriş

Eşçarpımın herhangi bir kategori için genel tanımını ve özel olarak eşçarpımın kümeler kategorisi için ayrık birleşime karşılık geldiğini bir önceki bölümde ayrıntılı bir şekilde incelemiştik. Benzer şekilde, Abelyen gruplar kategorisi, (sol veya sağ) R-modüller kategorisi, değişmeli halkalar kategorisi, topolojik uzaylar kategorisi için de eşçarpım ayrı ayrı mevcuttur.

Fakat bizim bu tezdeki asıl amacımız, Abelyen olmayan gruplar kategorisindeki eşçarpımın neye karşılık geldiğini görmek olacağından dolayı, buna bir hazırlık olarak öncelikle bu bölümde, Abelyen gruplar kategorisi için eşçarpım üzerinde duracağız.

Tezin bu bölümünün hazırlanmasında genel olarak [13] den yararlanılmıştır.

2.2 Zayıf Çarpım, Direk Çarpım ve Direk Toplam

I bir indis kümesi ve $\{G_i : i \in I\}$ gruplar ailesi olmak üzere,

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

direk çarpım grubu verilsin.

Bu durumda G nin elemanları, $g_i \in G_i$ olmak üzere,

$$g = (g_i)_{i \in I}$$

biçimindedir.

Tanım 2.1 Sonlu sayıdaki $g_i \in G_i$ elemanları dışındaki tüm bileşenleri birim olan $g \in G$ elemanlarından oluşan küme, G nin bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba $\{G_i : i \in I\}$ ailesinin *zayıf çarpımı* denir.

Özel olarak;

(i) $\{G_i : i \in I\}$ ailesinin *sonlu* olması durumunda; bu ailenin zayıf çarpımı, *direk çarpımına* eşit olur.

(ii) G_i gruplarının her birinin *Abelyen* olması durumunda ise; $\{G_i : i \in I\}$ ailesinin zayıf çarpımı, *direk toplam* olarak adlandırılır ve

$$\bigoplus_{i \in I} G_i$$

şeklinde gösterilir.

G, $\{G_i : i \in I\}$ gruplar ailesinin zayıf çarpımı veya direk çarpımı ise $x \in G_i$ için,

$$\begin{array}{rccl} u_j : & G_j & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & (y_i)_{i \in I} = \begin{cases} x & , \quad i = j \ \text{ ise} \\ 1_{G_i} & , \quad i \neq j \ \text{ ise} \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlı birebir homomorfizm (monomorfizm) vardır.

Örneğin $I = \{1,2\}$ ise,

$$G = G_1 \times G_2$$

olup

$$\begin{array}{rccl} u_1 : & G_1 & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ & x & \longmapsto & (x, 1_{G_2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} u_2 : & G_2 & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ & x & \longmapsto & (1_{G_1}, x) \end{array}$$

homomorfizmleri birer monomorfizmdir.

Teorem 2.2 $(G_i)_{i \in I}$ Abelyen gruplar ve $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ olsun. Bu durumda herhangi bir D Abelyen grubu ve

$$\{g_i \mid g_i : G_i \longrightarrow D \ ; \ i \in I\}$$

homomorfizmleri için,

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & G \arrow[d, dotted, "f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$f : G \longrightarrow D$$

homomorfizmi vardır.

İspat: Her $x \in G$ için aday f fonksiyonu, $i \in I$ olmak üzere,

$$f(x) \ = \text{ “ } g_i(x_i) \text{ lerin keyfi sıralı çarpımı ”}$$

yani,

$$f(x) = \prod_{i \in I} g_i(x_i)$$

şeklinde tanımlansın. [Dikkat edilirse çarpımın keyfi sırada alınabilmesinin sebebi, D grubunun Abelyen olmasıdır.]

Bu durumda $x = (x_i)_{i \in I}$ ve $y = (y_i)_{i \in I}$ olmak üzere, her $i \in I$ için,

$$\begin{array}{rcl} x = y & \Leftrightarrow & x_i = y_i \\ & \Leftrightarrow & g_i(x_i) = g_i(y_i) \quad (\because g_i \text{ iyi tanımlı}) \\ & \Leftrightarrow & \prod\limits_{i \in I} g_i(x_i) = \prod\limits_{i \in I} g_i(y_i) \\ & \Leftrightarrow & f(x) = f(y) \end{array}$$

olup f iyi tanımlıdır. Diğer taraftan,

$$\begin{array}{rcl} f(xy) & = & f\left((x_i y_i)_{i \in I}\right) \\ & = & \prod\limits_{i \in I} g_i(x_i y_i) \\ & = & \prod\limits_{i \in I} g_i(x_i) g_i(y_i) \quad (\because g_i \text{ homomorfizm}) \\ & = & \prod\limits_{i \in I} g_i(x_i) \prod\limits_{i \in I} g_i(y_i) \\ & = & f(x) f(y) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

Her $i \in I$ için,

$$\begin{array}{rcl} (f u_i)(x_i) & = & f(u_i(x_i)) \\ & = & g_i(x_i) \end{array}$$

olup

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & G \arrow[d, dotted, "f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

f', f ile aynı özellikte ve f den farklı bir homomorfizm olsun. Bu durumda kabul gereği,

$$f'u_i = g_i$$

dir.

Bu durumda her $x \in G$ için,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f'((x_i)_{i\in I}) \\
&= f'\left(\prod_{i\in I} u_i(x_i)\right) (\because f' \text{ homomorfizm}) \\
&= \prod_{i\in I} f'(u_i(x_i)) \\
&= \prod_{i\in I} (f' \circ u_i)(x_i) \\
&= \prod_{i\in I} g_i(x_i) \quad (\because f'u_i = g_i) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$f' = f$$

olup f bir tektir. □

Bu teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için şimdi aynı teoremi $I = \{1,2\}$ durumu için tekrar inceleyelim.

Önerme 2.3 G_1 ve G_2 iki Abelyen grup olmak üzere, G grubu, G_1 ve G_2 nin direk toplamı olsun.

Dikkat edilirse burada $I = \{1,2\}$, $(G_i)_{i\in I}$ sonlu ve her G_i Abelyen olduğundan dolayı,

$$G = G_1 \oplus G_2 = G_1 \times G_2$$

olur.

Bu durumda herhangi bir D Abelyen grubu için,

$$g_1 : G_1 \longrightarrow D \qquad , \qquad g_2 : G_2 \longrightarrow D$$

homomorfizmleri verildiğinde,

$$\begin{array}{llll} u_1 : & G_1 & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & (x, 1_{G_2}) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} u_2 : & G_2 & \longrightarrow & G \\ & y & \mapsto & (1_{G_1}, y) \end{array}$$

içine fonksiyonları yardımıyla,

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & G \arrow[d, dotted, "f"] & G_2 \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek f homomorfizmi mevcuttur.

İspat: Öncelikle f nin her $(x,y) \in G_1 \times G_2$ için,

$$\begin{array}{rccl} f & : & G_1 \times G_2 & \longrightarrow & D \\ & & (x,y) & \longmapsto & g_1(x)g_2(y) \end{array}$$

şeklinde tanımlanabileceğini gösterelim.

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{lrcl} (x_1,y_1) = (x_2,y_2) & \Rightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2 & & \\ & \Rightarrow f(x_1,y_1) & = & g_1(x_1)g_2(y_1) \\ & & = & g_1(x_2)g_2(y_2) \quad (\because g_1 \text{ ve } g_2 \text{ iyi tanımlı}) \\ & & = & f(x_2,y_2) \end{array}$$

olup f iyi tanımlıdır.

$$\begin{array}{rcl} f((x_1,y_1)(x_2,y_2)) & = & f(x_1x_2,y_1y_2) \\ & = & g_1(x_1x_2)g_2(y_1y_2) \\ & = & g_1(x_1)g_1(x_2)g_2(y_1)g_2(y_2) \quad (\because g \text{ homomorfizm}) \\ & = & g_1(x_1)g_2(y_1)g_1(x_2)g_2(y_2) \quad (\because D \text{ Abelyen}) \\ & = & f(x_1,y_1)f(x_2,y_2) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

$$\begin{array}{rcl} (fu_1)(x) & = & f(u_1(x)) \\ & = & f(x,1_{G_2}) \\ & = & g_1(x)g_2(1_{G_2}) \\ & = & g_1(x)1_D \\ & = & g_1(x) \end{array}$$

olup

$$fu_1 = g_1$$

elde edilir. Benzer şekilde, $fu_2 = g_2$ elde edilip sonuç olarak,

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & G \arrow[d, dotted, "f"] & G_2 \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

f', f ile aynı özellikte ve f den farklı bir diğer homomorfizm olsun. Bu durumda kabul gereği,

$$f'u_1 = g_1 \text{ ve } f'u_2 = g_2$$

dir.

Bu durumda her $(x,y) \in G$ için,

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= f'(x.1,1.y) \\ &= f'((x,1)(1,y)) \\ &= f'(x,1)f'(1,y) \\ &= f'(u_1(x))f'(u_2(y)) \\ &= (f' \circ u_1)(x)(f' \circ u_2)(y) \\ &= g_1(x)g_2(y) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$f' = f$$

olup f bir tektir. □

Sonuç 2.4 Abelyen gruplar kategorisinde direk toplam, eşçarpım objedir.

BÖLÜM 3

Abelyen Olmayan Gruplar Kategorisinde Eşçarpım

3.1 Giriş

Bir önceki bölümde, Abelyen gruplar kategorisi için eşçarpımın direk toplam olduğunu görmüştük. Fakat Abelyen olmayan gruplar kategorisi ele alındığında artık eşçarpım, direk toplam olmamaktadır. Örneğin, Abelyen olmayan gruplar kategorisinde,

$$\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

olduğunu kabul edersek, herhangi bir D grubu ve

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & m & \longmapsto & f_1(m) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & n & \longmapsto & f_2(n) \end{array}$$

homomorfizmleri verildiğinde,

$$\begin{array}{rccl} u_1: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & m & \longmapsto & u_1(m) = (m, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} u_2: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & u_2(n) = (0, n) \end{array}$$

homomorfizmleri ile birlikte,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & (m, n) & \longmapsto & f(m, n) = f_1(m) f_2(n) \neq f_2(n) f_1(m) \end{array}$$

homomorfizmi yoktur. Çünkü,

$$\begin{array}{rcll} f((m,n)(m',n')) & = & f(mm', nn') & \\ & = & f_1(mm') f_2(nn') & \\ & = & f_1(m) f_1(m') f_2(n) f_2(n') & \\ & \neq & f_1(m) f_2(n) f_1(m') f_2(n') & (\because\ D \text{ Abelyen değil }) \\ & = & f(mn) f(m'n') & \end{array}$$

dir.

O halde kategoriksel olarak doğru eş çarpımı elde edebilmek için,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & ? \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramında ? yerine, eldeki mevcut iki grup yardımıyla, diyagramın değişmeliliğini ve eşçarpımın diğer gerektirmelerini sağlayacak şekilde **yeni bir grup** yapısı tanımlamalıyız.

Bu doğrultuda, Abelyen olmayan gruplar kategorisi için bizi doğru sonuca götürecek yol ise, *serbest çarpım* adı verilen yeni bir yapı tanımlamak olacaktır.

Serbest çarpım ilk kez M. Artin tarafından [1] de tanımlanmıştır. Daha sonra B.H. Neumann [15] de, özel bir durum altında, kesişimleri boş kümeden farklı olan gruplar için serbest çarpımın üzerinde durmuştur.

Bu bölümün hazırlanmasında genel olarak [13, 6] dan yararlanılmıştır.

3.2 Serbest Çarpım

Eşçarpımın Tanım 1.1 de verilen tanımını, Abelyen olmayan gruplar kategorisi için tekrar hatırlayalım.

$\{G_i : i \in I\}$ grupların keyfi bir ailesi olsun. Herhangi bir D grubu ve

$$g_i : G_i \longrightarrow D$$

homomorfizmleri verildiğinde,

$$u_i : G_i \longrightarrow G$$

homomorfizmleri yardımıyla,

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & G \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek f homomorfizmi varsa, G grubuna, $\{G_i : i \in I\}$ gruplarının eşçarpımı denir.

Bu G grubu ise özel olarak $\{G_i : i \in I\}$ ailesinin *serbest çarpımı* olarak adlandırılmaktadır.

Şimdi, herhangi bir $\{G_i : i \in I\}$ ailesi verildiğinde, bu ailenin serbest çarpımının nasıl inşaa edilebileceğini, yani serbest çarpımın varlığını görelim.

3.2.1 Serbest Çarpımın İnşaası

Serbest grupları inşaa ederken, herhangi iki grubun kesişimi, yalnızca ortak bir birim eleman (e) olarak; hatta bu grupların işlemleri farklı olmasına rağmen herhangi bir $g \in G_{i_k}$ için, $ge = eg = g$ olarak kabul edilecektir.

Şimdi serbest çarpımın inşaasını adım adım inceleyelim.

$\{G_i : i \in I\}$ grupların keyfi bir ailesi olsun.

► $1 \leq k \leq n$, $x_k \in G_{i_k}$, $i_k \in I$ ve $x_k \neq e$ olmak üzere,

$$\boxed{w = x_1 x_2 \ldots x_n}$$

şeklinde tanımlı n-liye bir *grup-kelime* denir.

Ayrıca $w_1 = x_1 x_2 \ldots x_n$ ve $w_2 = y_1 y_2 \ldots y_m$ olmak üzere, $w_1 = w_2$ olması için gerek ve yeter şart, $n = m$ ve $1 \leq k \leq n$ için $x_k = y_k$ olmasıdır. Böylece her grup-kelime tek türlü yazıma sahip olur.

► Bir w grup-kelimesinin herhangi iki ardışık terimi aynı gruptan gelmiyorsa, bu grup-kelimeye bir *indirgenmiş grup-kelime* denir. Yani herhangi bir $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ grup-kelimesinin indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart, $1 \leq k < n$ için,

$$\boxed{x_k, x_{k+1} \notin G_{i_k}}$$

olmasıdır.

Özel olarak, hiçbir terime sahip olmayan ve kısaca $w = 1$ ile gösterilen grup-kelime, *boş grup-kelime* olarak adlandırılır ve dikkat edilirse bu grup-kelime bir indirgenmiş grup-kelimedir.

► $\{G_i : i \in I\}$ grupları yardımıyla yazılabilen tüm indirgenmiş grup-kelimelerin oluşturduğu küme W ile gösterilsin. Yani W kümesi,

$$\boxed{W = \{w = x_1x_2\ldots x_n \mid x_k, x_{k+1} \notin G_{i_k}\ ,\ 1 \le k < n\}}$$

veya bir başka ifadeyle,

$$\boxed{W = \{w \mid w \text{ indirgenmiş grup-kelime }\}}$$

şeklinde tanımlıdır.

► $w_1, w_2 \in W$ olsun. Bu iki indirgenmiş grup-kelimenin aynı sırada uç uca eklenmesi yardımıyla, w_1w_2 ile gösterilen yeni bir işlem tanımlansın. Yani,

$$w_1 = x_1x_2\ldots x_n\ ,\ w_2 = y_1y_2\ldots y_m \in W$$

olmak üzere,

$$\boxed{w_1w_2 = x_1x_2\ldots x_ny_1y_2\ldots y_m}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada dikkat edilirse, $w = 1$ boş grup-kelimesi için,

$$w1 = 1w = w$$

dır.

Önerme 3.1 Yukarıda tanımlanan işlem asosyatiflik özelliğine sahiptir. Yani w_1, w_2, w_3 birer indirgenmiş grup-kelime olmak üzere,

$$w_1(w_2w_3) = (w_1w_2)w_3$$

dir.

İspat: w_1, w_2, w_3 indirgenmiş grup-kelimeleri,

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1x_2\ldots x_n \\ w_2 &= y_1y_2\ldots y_m \\ w_3 &= z_1z_2\ldots z_h \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w_1(w_2w_3) &= x_1x_2\ldots x_n\left[(y_1y_2\ldots y_m)(z_1z_2\ldots z_h)\right] \\ &= x_1x_2\ldots x_n(y_1y_2\ldots y_m z_1z_2\ldots z_h) \\ &= x_1x_2\ldots x_n y_1y_2\ldots y_m z_1z_2\ldots z_h \\ &= (x_1x_2\ldots x_n y_1y_2\ldots y_m)z_1z_2\ldots z_h \\ &= \left[(x_1x_2\ldots x_n)(y_1y_2\ldots y_m)\right]z_1z_2\ldots z_h \\ &= (w_1w_2)w_3 \end{aligned}$$

olup asosyatiflik sağlanmış olur. □

Problem: Amacımız W kümesi yardımıyla bir grup yapısı elde etmektir. Fakat dikkat edileceği üzere,

$$\begin{array}{ccc} W\times W & \longrightarrow & W \\ (w_1,w_2) & \longmapsto & w_1w_2 \end{array}$$

şeklinde tanımlanan bu işlem W kümesi üzerinde bir **ikili işlem tanımlamamaktadır.**

Örneğin, $w_1 = g_1\ldots g_n$, $w_2 = h_1\ldots h_m \in W$ olmak üzere, eğer $g_n, h_1 \in G_{i_k}$ olursa,

$$w_1w_2 = (g_1\ldots g_n h_1\ldots h_m)$$

bir indirgenmiş grup-kelime olmaz. Yani $w_1w_2 \notin W$ dir. Çünkü w_1w_2 kelimesinin ardışık g_n ve h_1 terimleri aynı G_{i_k} grubuna aittir.

Çözüm: Bu sorunu ortadan kaldırabilmek, yani W kümesi üzerinde bir ikili işlem tanımlayabilmek için ise yeni bir işlem tanımına ihtiyaç vardır.

► İndirgenmemiş bir w grup-kelimesi içerisindeki, aynı gruba ait ardışık x_k, x_{k+1} terimlerinin, ait oldukları grubun işlemi altında tek bir

$$x_k \cdot x_{k+1} = x'$$

terimine dönüştürülmesine *sadeleştirme işlemi* adı verilir. Bu sadeleştirme işlemi ile birlikte w' gibi yeni bir (indirgenmiş/indirgenmemiş) grup-kelime elde edilir. Bu sadeleştirme işlemi sembolik olarak,

$$w \longrightarrow w'$$

şeklinde gösterilir.

► w grup-kelimesi içindeki tüm mümkün sadeleştirme işlemleri yapılarak bir indirgenmiş grup-kelime elde edilir. Bu işleme *indirgeme işlemi* adı verilir ve elde edilen bu indirgenmiş grup-kelime,

$$\boxed{w_{ind}}$$

ile gösterilir.

Not: Dikkat edilirse, her grup-kelime sonlu sayıda terime sahip olduğundan dolayı, indirgeme işlemi de sonlu sayıda sadeleştirme işleminden oluşur. Ayrıca, indirgeme işlemindeki sadeleştirmeler için herhangi bir sıralama ya da öncelik söz konusu değildir.

Örneğin, $w = abb^2cdd^{-1}f$ grup kelimesi için,

$$\begin{array}{ccccc} w & \longrightarrow & ab^3cdd^{-1}f & \longrightarrow & ab^3cf & = w_{ind} \\ w & \longrightarrow & abb^2cf & \longrightarrow & ab^3cf & = w_{ind} \end{array}$$

olup sonuç olarak iki yoldan da aynı indirgenmiş kelime elde edilir. Bu ifade aşağıdaki teoremle birlikte daha iyi anlaşılacaktır.

Yardımcı Teorem 3.2 $w = x_1x_2\ldots x_n$ bir indirgenmemiş grup-kelime ve $w \longrightarrow w_1'$ ve $w \longrightarrow w_1''$ de bu w grup-kelimesi için birbirinden farklı iki sadeleştirme işlemi olsun. Bu durumda,

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1' \arrow[dr] & & w_1'' \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $w_1' \longrightarrow w_0$ ve $w_1'' \longrightarrow w_0$ sadeleştirme işlemleri vardır.

İspat: w grup-kelimesi için, $w \longrightarrow w_1'$ ve $w \longrightarrow w_1''$ gibi iki farklı sadeleştirmeyi mümkün kılabilecek iki olası durum söz konusudur.

a) $x_{k-1}, x_k \in G_{i_k}$ ve $x_{m-1}, x_m \in G_{i_m}$ $(k \neq m\ ,\ 1 < k < m \leq n)$ olsun. Yani w grup-kelimesi,

$$w = x_1\ldots x_{k-1}x_k\ldots x_{m-1}x_m\ldots x_n$$

şeklinde olsun. Bu durumda, $x_{k-1}\cdot x_k = x'$ ve $x_{m-1}\cdot x_m = x''$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ccl} w & \longrightarrow & x_1\ldots x'\ldots x_{m-1}x_m\ldots x_n \longrightarrow x_1\ldots x'\ldots x''\ldots x_n = w_0 \\ w & \longrightarrow & x_1\ldots x_{k-1}x_k\ldots x''\ldots x_n \longrightarrow x_1\ldots x'\ldots x''\ldots x_n = w_0 \end{array}$$

elde edilmiş olur.

b) $x_{m-1}, x_m, x_{m+1} \in G_{i_m}$ ve $1 < m < n$ olsun. Yani w grup-kelimesi,

$$w = x_1 \ldots x_{m-1} x_m x_{m+1} \ldots x_n$$

şeklinde olsun. Bu durumda, G_{i_m} grubunun asosyatiflik aksiyomu özelliği gereği,

$$(x_{m-1} \cdot x_m) \cdot x_{m+1} = x_{m-1} \cdot (x_m \cdot x_{m+1}) = x'$$

olup sonuç olarak,

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow x_1 \ldots (x_{m-1} \cdot x_m) x_{m+1} \ldots x_n \longrightarrow x_1 \ldots ((x_{m-1} \cdot x_m) \cdot x_{m+1}) \ldots x_n = x_1 \ldots x' \ldots x_n = w_0 \\ w &\longrightarrow x_1 \ldots x_{m-1} (x_m \cdot x_{m+1}) \ldots x_n \longrightarrow x_1 \ldots (x_{m-1} \cdot (x_m \cdot x_{m+1})) \ldots x_n = x_1 \ldots x' \ldots x_n = w_0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Yani w grup-kelimesinin mümkün iki olası durumu için de sonuç olarak aynı indirgenmiş grup-kelime elde edilmiş olup

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1' \arrow[dr] & & w_1'' \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. □

Teorem 3.3 Herhangi bir w grup-kelimesi bir tek şekilde indirgenebilir. Yani bir başka deyişle, w grup-kelimesine ait iki farklı indirgeme,

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow w_1' \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_n' \\ w &\longrightarrow w_1'' \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_m'' \end{aligned}$$

şeklinde ise,

$$w_n' = w_m''$$

dir.

İspat: $|w| = 0$ yani w boş grup-kelime ise sonuç aşikardır.

$|w| \geq 1$ olmak üzere, w grup-kelimesine ait iki farklı indirgeme,

$$\begin{aligned} w &\longrightarrow w_1' \longrightarrow w_2' \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_n' \\ w &\longrightarrow w_1'' \longrightarrow w_2'' \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_m'' \end{aligned}$$

şeklinde olsun.

Yardımcı Teorem 3.2 gereği,

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1' \arrow[dr] & & w_1'' \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde,

$$\begin{aligned} w_1' &\longrightarrow w_0 \\ w_1'' &\longrightarrow w_0 \end{aligned}$$

gibi iki farklı sadeleştirme işlemi mevcuttur. Elde edilen w_0 grup-kelimesi için,

$$w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_k$$

şeklinde bir indirgeme işlemi düşünülecek olursa,

$$\begin{tikzcd} & & w \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & w_1' \arrow[dl] \arrow[dr] & & w_1'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_2' \arrow[d] & & w_0 \arrow[d] & & w_2'' \arrow[d] \\ \ldots \arrow[d] & & w_1 \arrow[d] & & \ldots \arrow[d] \\ w_n' & & \ldots \arrow[d] & & w_m'' \\ & & w_k & & \end{tikzcd}$$

şeklinde bir diyagram elde edilecektir.

Benzer şekilde Yardımcı Teorem 3.2 gereği,

$$\begin{array}{ccc} w_1' & \longrightarrow & w_2' \\ w_1' & \longrightarrow & w_0 \\ w_0 & \longrightarrow & w_1 \end{array}$$

sadeleştirmeleri için,

$$\begin{tikzcd} & w_1' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_2' \arrow[dr] & & w_0 \arrow[dl] \\ & w_1 & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir

$$w_2' \longrightarrow w_1$$

sadeleştirme işlemi mevcuttur.

Aynı işlemlere devam edilerek tümevarım yardımıyla, w_1' (ve aynı şekilde w_2') grup-kelimesi için tüm indirgeme işlemleri aynı w_k indirgenmiş grup-kelimesinde noktalanır. Ayrıca w_k hem w_1' hem de w_2' nin indirgenmiş hali olduğundan sonuç olarak,

$$w_n' = w_k = w_m''$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.4 *W kümesinin her elemanı tek türlü belirlidir.*

Şimdi, tanımlanan bu indirgeme işlemi yardımıyla, W kümesi üzerinde bir ikili işlemin nasıl tanımlanabildiğini görelim.

► $w_1, w_2 \in W$ olmak üzere,

$$\boxed{\begin{array}{llll} \diamond : & W \times W & \longrightarrow & W \\ & (w_1, w_2) & \longmapsto & w_1 \diamond w_2 = (w_1 w_2)_{ind} \end{array}}$$

şeklinde tanımlansın. Teorem 3.3 gereği, her grup-kelimenin indirgenmiş hali bir tek olduğundan dolayı,

$$\begin{array}{rcl} (w_1,w_2)=(w_1',w_2') & \Rightarrow & w_1=w_1' \text{ ve } w_2=w_2' \\ & \Rightarrow & w_1w_2=w_1'w_2' \\ & \Rightarrow & (w_1w_2)_{ind}=(w_1'w_2')_{ind} \\ & \Rightarrow & w_1\diamond w_2=w_1'\diamond w_2' \end{array}$$

olup $\diamond$ işlemi *iyi tanımlıdır*.

Örnek 3.1 $w_1=ab$ ve $w_2=cdf$ indirgenmiş kelimeleri için, b ve c aynı grubun elemanları değilse,

$$\begin{array}{rcl} w_1\diamond w_2 & = & (abcdf)_{ind} \\ & = & abcdf \end{array}$$

$w_1=abc$ ve $w_2=c^2da$ indirgenmiş kelimeleri için,

$$\begin{array}{rcl} w_1\diamond w_2 & = & (abcc^2da)_{ind} \\ & = & abc^3da \end{array}$$

$w_1=abc^{-1}d$ ve $w_2=d^{-1}cb^{-1}fh$ indirgenmiş kelimeleri için,

$$\begin{array}{rcl} w_1\diamond w_2 & = & (abc^{-1}dd^{-1}cb^{-1}fh)_{ind} \\ & = & afh \end{array}$$

olur.

Teorem 3.5 $\{G_i : i\in I\}$ grupların keyfi bir ailesi olsun.

$$\boxed{W=\{w \mid w \text{ bir indirgenmiş grup-kelime }\}}$$

şeklinde tanımlanan küme,

$$\boxed{\begin{array}{llll} \diamond: & W\times W & \longrightarrow & W \\ & (w_1,w_2) & \longmapsto & w_1\diamond w_2=(w_1w_2)_{ind} \end{array}}$$

işlemi ile bir gruptur.

İspat: G1) $\diamond$ işleminin W kümesi üzerinde asosyatiflik özelliğine sahip olduğunun direk olarak ispatı kolay değildir.

Bu zorluktan dolayı Van der Waerden [24] de, tanımlanan bu $\diamond$ işlemini farklı bir biçimde ifade etmiştir.

Öncelikle, literatürde "Van der Waerden Trick" olarak bilinen bu yöntemde, Waerden'in $\diamond$ işlemini adım adım nasıl tanımladığını verelim.

Herhangi $g_k \in G_k$ ve $w \in W$ olmak üzere, $g_k \diamond w$ işlemi,

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mu_{g_k}: & W & \longrightarrow & W \\ & w & \longmapsto & \mu_{g_k}(w) = \begin{cases} w & , \quad g_k = 1_{G_k} \\ g_k x_1 x_2 \ldots x_n & , \quad x_1 \notin G_k \\ x' x_2 \ldots x_n & , \quad x_1 \in G_k \ , \ g_k x_1 = x' \ , \ x' \neq 1_{G_k} \\ x_2 \ldots x_n & , \quad x_1 \in G_k \ , \ g_k x_1 = x' \ , \ x' = 1_{G_k} \end{cases} \end{array}}$$

şeklinde tanımlı μ_{g_k} fonksiyonu yardımıyla,

$$g_k \diamond w = \mu_{g_k}(w)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu işlem genelleştirilerek her $w_1 = x_1 x_2 \ldots x_n$, $w_2 = y_1 y_2 \ldots y_m \in W$ için $w_1 \diamond w_2$ işlemi,

$$w_1 \diamond w_2 = \mu_{x_1}\left(\mu_{x_2} \ldots \left(\mu_{x_n}(w_2)\right) \ldots\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Ayrıca her $g_k \in G_k$ ve $g_l \in G_l$, $w \in W$ için,

$$\mu_{g_k}\left(\mu_{g_l}(w)\right) = \mu_{(g_k \diamond g_l)}(w)$$

dir.

Yine her $g_k \in G_k$, $g_l \in G_l$ ve $g_n \in G_n$ için,

$$g_k \diamond \left(\mu_{g_l}(g_n)\right) = \mu_{(g_k \diamond g_l)}(g_n)$$

dir.

Böylece $w_1 = x_1 x_2 \ldots x_n$, $w_2 = y_1 y_2 \ldots y_m$, $w_3 = z_1 z_2 \ldots z_h \in W$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} w_1 \diamond (w_2 \diamond w_3) &= \mu_{x_1}\left(\mu_{x_2} \ldots \left(\mu_{x_n}(w_2 \diamond w_3)\right)\right) \\ &= \mu_{x_1}(\mu_{x_2} \ldots (\mu_{x_n}\left(\mu_{y_1}(\mu_{y_2} \ldots \left(\mu_{y_m}(w_3)\right) \ldots\right) \\ &= \mu_{x_1}(\mu_{x_2} \ldots (\mu_{x_{n-1}}\left(\mu_{(x_n \diamond y_1)}(\mu_{y_2} \ldots \left(\mu_{y_m}(w_3)\right) \ldots\right) \\ &= \ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots \\ &= \mu_{(w_1 \diamond w_2)}(w_3) \\ &= (w_1 \diamond w_2) \diamond w_3 \end{aligned}$$

olup $\diamond$ işlemi asosyatiflik özelliğine sahiptir.

G2) W nin $w = 1$ elemanı (boş grup-kelime),

$$\begin{aligned} w \diamond 1 &= (w1)_{ind} \\ &= w_{ind} \\ &= w \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$1 \diamond w = w$$

eşitlikleri ile birlikte $\diamond$ işleminin birimidir.

G3) W nin $w = x_1 x_2 \dots x_n$ elemanı için,

$$w^{-1} = x_n^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}$$

şeklinde tanımlanan w^{-1} indirgenmiş grup-kelimesi,

$$\begin{aligned} w \diamond w^{-1} &= \left(x_1 x_2 \dots x_n x_n^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}\right)_{ind} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$w^{-1} \circ w = 1$$

eşitlikleriyle birlikte $\diamond$ işlemi için w grup-kelimesinin tersidir. $\square$

Tanım 3.6 Yukarıda açık bir şekilde inşaa edilen W grubu özel olarak, $\{G_i : i \in I\}$ gruplarının *serbest çarpımı* olarak adlandırılır ve kısaca,

$$W = \underset{i \in I}{\ast} G_i$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 3.7 $\{G_i : i \in I\}$ grupların keyfi bir ailesi ve W da bu ailenin serbest çarpım grubu olsun. Herhangi bir D grubu ve

$$g_i : G_i \longrightarrow D$$

homomorfizmleri verildiğinde,

$$\begin{array}{rccc} u_i : & G_i & \longrightarrow & W \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

şeklinde tanımlı u_i homomorfizmleri ile birlikte,

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & W \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek f homomorfizmi vardır.

İspat: Öncelikle,

$$f : W \longrightarrow D$$

aday fonksiyonu, $w = x_1x_2\ldots x_n \in W$, $x_k \in G_{i_k}$, $1 \leq k \leq n$, $i_k \in I$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} f: & W & \longrightarrow & D \\ & w & \longmapsto & f(w) = g_{i_1}(x_1)g_{i_2}(x_2)\ldots g_{i_n}(x_n) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

$w_1, w_2 \in W$ için, $w_1 = x_1x_2\ldots x_n$ ve $w_2 = y_1y_2\ldots y_m$ olsun.

Bu durumda öncelikle,

$$\begin{array}{rcll} w_1 = w_2 & \Rightarrow & n = m \text{ ve } x_k = y_k \text{ , } 1 \leq k \leq n & \\ & \Rightarrow & g_{i_k}(x_i) = g_{i_k}(y_i) & (\because g_i \text{ iyi tanımlı }) \\ & \Rightarrow & g_{i_1}(x_1)g_{i_2}(x_2)\ldots g_{i_n}(x_n) = g_{i_1}(y_1)g_{i_2}(y_2)\ldots g_{i_n}(y_n) & (\because \text{grup işlemi iyi tanımlı }) \\ & \Rightarrow & f(w_1) = f(w_2) & \end{array}$$

olup f iyi tanımlıdır.

Ayrıca,

$$\begin{array}{rcl} f(w_1 \diamond w_2) & = & f\left(\mu_{x_1}\left(\mu_{x_2}\ldots\left(\mu_{x_n}(w_2)\right)\ldots\right)\right) \\ & = & g_{i_1}(x_1)f\left(\mu_{x_2}\left(\mu_{x_3}\ldots\left(\mu_{x_n}(w_2)\right)\ldots\right)\right) \\ & = & \ldots\ldots\ldots \\ & = & \ldots\ldots\ldots \\ & = & g_{i_1}(x_1)g_{i_2}(x_2)\ldots g_{i_n}(x_n)f(w_2) \\ & = & f(w_1)f(w_2) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

Her $x_k \in G_{i_k}$ için,

$$\begin{array}{rcl} (fu_i)(g_k) & = & f(u_i(x_k)) \\ & = & f(x_k) \\ & = & g_i(x_k) \end{array}$$

olup

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & W \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

f', f ile aynı özellikte ve f den farklı bir diğer homomorfizm olsun. Bu durumda kabul gereği,

$$f'u_i = g_i$$

dir.

Bu durumda her $w = x_1x_2\ldots x_n \in W$ için,

$$\begin{aligned} f'(x_1x_2\ldots x_n) &= f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n) \quad (\because f' \text{ homomorfizm }) \\ &= f'(u_1(x_1))\, f'(u_2(x_2))\ldots f'(u_n(x_n)) \\ &= (f'u_1)(x_1)\,(f'u_2)(x_2)\ldots(f'u_n)(x_n) \\ &= g_{i_1}(x_1)g_{i_2}(x_2)\ldots g_{i_n}(x_n) \\ &= f(x_1x_2\ldots x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$f = f'$$

olup f bir tektir. $\square$

Sonuç 3.8 $\boxed{\text{Abelyen olmayan gruplar kategorisinde serbest çarpım, eşçarpım objedir.}}$

Not: Hatırlanacağı üzere grupların serbest çarpımını inşaa ederken temel olarak, grupların herhangi ikisinin kesişiminin sadece birim eleman olduğunu kabul etmiştik. Şimdi, buna aksi bir durumda ortaya nasıl bir farklılık çıkacağını kısaca inceleyelim.

G ve G' iki grup olmak üzere, $G \cap G' = H$ ve $H \neq \{e\}$ olsun. Bu durumda, $a \in G \backslash H$, $b \in G' \backslash H$ ve $h \in H$ olmak üzere,

$$w = ahb$$

grup-kelimesi bir indirgenmiş grup-kelime değildir.

Fakat bu grup-kelime için indirgeme işlemi düşünüldüğünde, bu w grup-kelimesini,

(i) $a, h \in A$ ve $b \in B$ olarak düşünerek
(ii) $a \in A$ ve $h, b \in B$ olarak düşünerek

şeklinde iki farklı indirgenmiş grup-kelimeye dönüştürülebilmemiz mümkündür.

Bu da aslında, karakteristik özellikler anlamında bir önceki kısımdaki grup-kelimelerden tamamen farklı özelliklerdir. Dolayısıyla da farklı bir serbest çarpım yapısı ortaya çıkmaktadır. Bu yapı da özel olarak, *karışımlı serbest çarpım* olarak adlandırılmaktadır. Fakat biz genel olarak bu durum üzerinde durmayacağız. Çünkü bizim için bu tezde önemli olan, serbest çarpımın ilk kısımda ele aldığımız durumudur.

3.3 Serbest Çarpım İçin Örnekler

Örnek 3.2 Bölümün giriş kısmındaki problemi tekrar ele alalım.

$\mathbb{Z} \cong < x >$ ve $\mathbb{Z} \cong < y >$ olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & ? \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramında ? yerine $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ serbest çarpım grubunu alalım.

Bu durumda, herhangi bir D grubu ve

$$\begin{array}{llll} g_1 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & g_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} g_2 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & y & \longmapsto & g_2(y) \end{array}$$

homomorfizmleri verildiğinde,

$$\begin{array}{llll} u_1 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & u_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} u_2 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ & y & \longmapsto & u_2(y) \end{array}$$

homomorfizmleri ile birlikte,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek

$$f : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow D$$

homomorfizmi vardır. Burada $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ serbest çarpım grubu, $< x >$ ve $< y >$ grubunun elemanları yardımıyla üretilebilen tüm indirgenmiş grup-kelimelerin kümesidir. Yani,

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \{1, x, y^3, x^2y, xyxy^4, \ldots\}$$

şeklindedir. Örneğin, $w = xy^2x^{-1} \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ise bu w elemanının f homomorfizmi altındaki görüntüsü,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & xy^2x^{-1} & \longmapsto & f(w) = g_1(x)g_2(y^2)g_1(x^{-1}) \end{array}$$

şeklindedir.

Ayrıca $x^n \in \mathbb{Z}$ elemanı için,

$$\begin{array}{rcl} (fu_1)(x^n) & = & f(u_1(x^n)) \\ & = & f(x^n) \\ & = & g_1(x^n) \end{array}$$

olup

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \arrow[d, dotted, "\exists!\, f"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğu görülür.

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nin $w_1 = xy^2x^{-1}$ ve $w_2 = xy$ gibi iki elemanı için,

$$w_1 \diamond w_2 = (w_1w_2)_{ind} = (xy^2x^{-1}xy)_{ind} = xy^3$$

dir. Böylece,

$$\begin{array}{rcl} f(w_1 \diamond w_2) & = & f(xy^3) \\ & = & g_1(x)g_2(y^3) \\ & = & g_1(x)g_2(y^2)g_2(y) \\ & = & g_1(x)g_2(y^2)1_Dg_2(y) \\ & = & g_1(x)g_2(y^2)g_1(x^{-1}x)g_2(y) \\ & = & g_1(x)g_2(y^2)g_1(x^{-1})g_1(x)g_2(y) \\ & = & f(xy^2x^{-1})f(xy) \\ & = & f(w_1)f(w_2) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

Örnek 3.3 G_1 ve G_2 ikinci mertebeden iki devirli grup yani,

$$G_1 = \{1, x\} \quad , \quad G_2 = \{1, y\}$$

olsun. Bu durumda bu iki grubun serbest çarpım grubu olan G grubunun, birimden farklı elemanları, x ve y nin sonlu çarpımları şeklinde olup

$$x, xy, xyx, xyxy, \ldots$$

ya da,

$$y, yx, yxy, yxyx, \ldots$$

şeklindedir. Dikkat edilirse burada G nin xy ve yx gibi iki elemanı için, bu elemanların ikisi de sonsuz mertebeden olup ayrıca birbirinden farklıdır. Yani G grubunun Abelyenlik özelliği yoktur.

Ayrıca bu örnek bize, serbest çarpım ile direk çarpım grubu arasındaki farkı açıkça göstermektedir. Bu iki grubun direk çarpım grubu dördüncü mertebeden bir Abelyen grup olmasına rağmen, serbest çarpım grubu sonsuz mertebeden ve Abelyen olmayan bir gruptur.

BÖLÜM 4

Serbest Gruplar

4.1 Giriş

Serbest gruplar ilk olarak hiperbolik geometri ile ilgili yapılan çalışmalarda ortaya çıkmıştır. 1882 de Walther von Dyck, [25] de, *en basit şekilde takdim edilebilen gruplar* olarak bu özel yapıdan bahsetmiştir. Fakat serbest grupların cebirsel olarak çalışılması ilk olarak 1924 de Jacob Nielsen tarafından [16, 17, 18] deki çalışmalarında başlatılmıştır. Serbest gruplara bu ismi veren ve ayrıca birçok temel cebirsel özelliğini açıklayan da yine kendisidir. Max Dehn, [12] de, serbest grupların topoloji ile bağlantısını kurmuş ve bu sayede Nielsen-Scherier Teoremi'nin ilk tam ispatını yapmıştır. Otto Scherier, [23] de, bu sonucun cebirsel olarak ispatını vermiş ve Kurt Reidemester da 1932 de kombinatöryel topoloji üzerine yazmış olduğu kitabında [21], serbest grupları kapsamlı bir biçimde ele almıştır.

Daha sonra 1950 lerde serbest çarpımın tanımlanmasının ardından, serbest çarpım ve serbest grup arasındaki ilişki de ortaya çıkmıştır.

Serbest gruplar, cebirsel datalarla topolojiksel datalar arasında kurduğu bağlantı açısından oldukça önem taşımaktadır. Cebirsel topolojinin önemli teoremlerinden biri olan Van Kampen Teoremi, serbest grup yapısı üzerinde inşaa edilmiştir.

Bu sebeple biz de bu bölümde, serbest grubun evrensellik özelliği yardımıyla tanımını verdikten sonra, keyfi bir küme üzerinde bir serbest grubun nasıl inşaa edilebileceğini ayrıntılı bir biçimde inceleyeğiz. Sonrasında ise serbest çarpım ve serbest grup yapıları arasındaki ilişki üzerinde duracağız.

Tezin bu bölümünün hazırlanmasında genel olarak [2, 22] den yararlanılmıştır.

4.2 Serbest Gruplar

Tanım 4.1 F bir grup ve X bir küme olsun. Herhangi bir D grubu ve

$$g : X \longrightarrow D$$

fonksiyonu verildiğinde,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$f : F \longrightarrow D$$

homomorfizmi varsa, F grubuna X *tabanlı (veya* X kümesi tarafından üretilen) *serbest grup* denir.

4.2.1 Serbest Gruplar İçin İki Temel Örnek

1) $X = \varnothing$ olsun. Bu durumda $\{e\}$ aşikar grubu, X tabanlı bir serbest gruptur. Çünkü herhangi bir D grubu için,

$$\begin{array}{rccc} f: & \{e\} & \longrightarrow & D \\ & e & \longmapsto & e_D \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir tek f homomorfizmi var olup,

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & \{e\} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

2) $X = \{1\}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}$ tamsayılar grubu, X tabanlı bir serbest gruptur. Çünkü herhangi bir G grubu ve

$$\begin{array}{rccc} g: & \{1\} & \longrightarrow & D \\ & 1 & \longmapsto & g(1) \end{array}$$

fonksiyonu verildiğinde,

$$\begin{array}{rccc} u: & \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

şeklinde tanımlı u ve

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & D \\ & n & \longmapsto & [g(1)]^n \end{array}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonları için,

$$\begin{array}{rcl} f(n+m) & = & [g(1)]^{n+m} \\ & = & [g(1)]^n\,[g(1)]^m \\ & = & f(n)f(m) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

Bu f homomorfizmi ile birlikte,

$$\begin{array}{rcl} (fu)(1) & = & f(u(1)) \\ & = & f(1) \\ & = & g(1) \end{array}$$

olup

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Ayrıca f', f ile aynı özellikte ve f den farklı bir diğer homomorfizm ise bu durumda kabul gereği,

$$f'u = g$$

dir. O halde her $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{array}{rcll} f'(k) & = & f'(1+1+\ldots+1) & (k \text{ tane}) \\ & = & f'(1)f'(1)\ldots f'(1) & (\because f' \text{ homomorfizm}) \\ & = & f'(u(1))\,f'(u(1))\ldots f'(u(1)) & \\ & = & (f'u)(1)\,(f'u)(1)\ldots(f'u)(1) & \\ & = & g(1)g(1)\ldots g(1) & \\ & = & [g(1)]^k & \\ & = & f(k) & \end{array}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$f = f'$$

olup f bir tektir.

Şimdi, herhangi bir X kümesi verildiğinde, bu küme üzerindeki serbest grubun nasıl inşaa edilebileceğini, yani serbest grubun varlığını görelim.

4.2.2 Serbest Grupların İnşaası

► X boştan farklı bir küme (çünkü $X = \varnothing$ alındığında aşikar grup elde edildiğini biliyoruz) ve X^{-1} kümesi de X ile,

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{-1} \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

şeklinde birebir eşlenebilen ve X den ayrık bir küme yani,

$$X = \{x_1, x_2, ...\} \text{ ise } X^{-1} = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, ...\}$$

şeklinde tanımlansın.

► Bu durumda $1 \leq n \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$\boxed{w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n}}$$

şeklinde tanımlı n-liye X kümesi üzerinde bir kelime denir.

Buradaki $n \in \mathbb{N}$ sayısına w kelimesinin boyutu denir ve $|w|$ ile gösterilir. Örneğin $\left|xx^{-1}\right| = 2$ dir. Ayrıca özel olarak, $n = 0$ alındığı takdirde elde edilen kelime *boş kelime* olarak adlandırılır ve kısaca,

$$w = 1$$

şeklinde gösterilir.

► Keyfi bir X kümesi üzerindeki tüm mümkün kelimelerin kümesi $\mathcal{W}(X)$ ile gösterilmektedir. Yani bu küme,

$$\boxed{\mathcal{W}(X) = \{w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n} \mid \varepsilon_i = \pm 1 \ , \ x_i \in X \ , \ 1 \leq i \leq n\}}$$

şeklindedir.

► $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n}$ kelimesi için,

$$v = x_i^{\varepsilon_i} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} ... x_j^{\varepsilon_j} \ \ (1 \leq i \leq j \leq n) \quad \text{veya} \quad v = 1$$

şartlarını sağlayan v kelimesine w nin bir *alt kelimesi* denir.

► $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n}$ ve $v = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}$ olmak üzere $w = v$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & n = m \\ \text{ii)} & \varepsilon_i = \delta_i \\ \text{iii)} & x_i = y_i \end{array}$$

olmasıdır. Böylece her kelime tek türlü yazıma sahip olur.

▶ Bir w kelimesi herhangi $x \in X$ için, xx^{-1} veya $x^{-1}x$ alt kelimelerine sahip değilse, w ya bir *indirgenmiş kelime* denir.

Burada dikkat edilirse, 0 boyutlu boş kelime ve 1 boyutlu her kelime bir indirgenmiş kelimedir.

Örnek 4.1 X boştan farklı bir küme ve $x_i \in X$ olmak üzere, X kümesi üzerindeki,

$$w_1 = x_1x_3x_2^{-1}x_3$$

kelimesi bir indirgenmiş kelime olmasına rağmen,

$$w_2 = x_1x_2^{-1}x_2x_4$$

kelimesi $x_2^{-1}x_2$ alt kelimesine sahip olduğundan dolayı bir indirgenmemiş kelimedir.

▶ İndirgenmemiş bir w kelimesine ait xx^{-1} veya $x^{-1}x$ alt kelimelerinden birinin, kelime içerisinden silinmesi ile yapılan kısaltma işlemi *sadeleştirme işlemi* olarak adlandırılmaktadır. Bu işlem sonucu w' gibi yeni bir (indirgenmiş/indirgenmemiş) kelime elde edilir ve bu sadeleştirme işlemi kısaca,

$$w \longrightarrow w'$$

şeklinde gösterilir.

İndirgenmemiş bir w kelimesi içerisinde, herhangi bir xx^{-1} ve $x^{-1}x$ alt kelimesi kalmayana dek sadeleştirme işleminin devam ettirilmesi sonucunda, indirgenmiş bir kelime elde edilir. Bu işleme *indirgeme işlemi* denir ve elde edilen bu indirgenmiş kelime,

$$\boxed{w_{ind}}$$

ile gösterilir.

▶ İndirgeme işleminin tanımı gereği, indirgenmiş halleri birbirine eşit olan bir çok kelime mevcuttur. Yani indirgeme işlemi birden fazla olabilir.

Örneğin, $w = babb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca$ kelimesi için,

$$\begin{aligned} w &= babb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \longrightarrow baa^{-1}c^{-1}ca \longrightarrow bcc^{-1}a \longrightarrow ba = w_{ind} \\ w &= babb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \longrightarrow babb^{-1}a^{-1}a \longrightarrow babb^{-1} \longrightarrow ba = w_{ind} \end{aligned}$$

gibi iki farklı indirgeme işlemi söz konusu olabilir. Dikkat edilirse bu iki farklı yol ile de aynı sonuca ulaşılmıştır. Bu durum genelleştirilebilir.

Teorem 4.2 Herhangi bir w kelimesi bir tek şekilde indirgenebilir.

İspat: Teorem 3.3 ile benzer şekilde ispatlanır. □

▶ $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n}$ ve $z = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}$ iki kelime olmak üzere, bu iki kelimenin aynı sırada uç uca eklenmesi yardımıyla,

$$\boxed{w.z = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}}$$

şeklinde bir çarpma işlemi tanımlansın.

Burada dikkat edilirse, $w = 1$ boş kelime için,

$$w1 = 1w = w$$

dır.

Önerme 4.3 Yukarıda tanımlanan işlem asosyatiflik özelliğine sahiptir.

İspat: Teorem 3.1 ile benzer şekilde ispatlanır. □

▶ O halde keyfi bir X kümesi üzerindeki bir grup yapısını sezgisel olarak,

- elemanları: $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{W}(X)$ şeklindeki kelimeler,
- işlemi: iki kelimenin uç uca eklenmesi işlemi,
- birimi: boş kelime,
- ters elemanı: $w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} ... x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1} \in \mathcal{W}(X)$ kelimesi,

şeklinde tanımlamak akla gelmektedir.

Problem: Bu grup yukarıdaki şekilde düşünüldüğü takdirde grubun bir $w = x$ elemanı için bu eleman tersiyle çarpıldığı takdirde grup aksiyomları gereği sıfır boyutlu boş kelime elde edilmesi gerekirken, $ww^{-1} = xx^{-1}$ gibi iki boyutlu bir kelime elde edilecektir. Dolayısıyla da grup aksiyomları tam olarak sağlanmayacak ve bir grup yapısı elde edilememiş olacaktır.

Şimdi, bu problemin hangi yollarla ortadan kaldırılabileceğini görelim.

4.2.2.1 Metot I

Yukarıdaki problemde soruna yol açan, xx^{-1} ve 1 kelimelerine aynı gözle bakabilir yani bu iki kelimeyi birbirine denk kabul edebilirsek, sorun da ortadan kalkmış olacaktır. Bu amaçla da öncelikle kelimeler üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanacak ve sonrasında ise bu denklik bağıntısı üzerindeki denklik sınıfları üzerinden bir grup yapısı inşaa edilecektir.

Teorem 4.4 $w, v \in \mathcal{W}(X)$ olmak üzere,

$$\text{“}w \sim v \Leftrightarrow w_{ind} = v_{ind}\text{”}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $w, v, z \in \mathcal{W}(X)$ olsun.

(i) Yansıma Özelliği:

Her $w \in \mathcal{W}(X)$ için, w kelimesinin indirgenmiş hali bir tek olduğundan, $w_{ind} = w_{ind}$ olup

$$w \sim w$$

elde edilir.

(ii) Simetri Özelliği:

$w \sim v$ olsun. Bu durumda, $w_{ind} = v_{ind}$ elde edilir. Eşitlik bağıntısının simetri özelliğinden dolayı da, $v_{ind} = w_{ind}$ olup tanım gereği,

$$v \sim w$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) Geçişme Özelliği:

$w \sim v$ ve $v \sim z$ olsun. Bu durumda, kabul gereği, $w_{ind} = v_{ind}$ ve $v_{ind} = z_{ind}$ elde edilir. Eşitlik bağıntısının geçişme özelliğinden dolayı da,

$$w_{ind} = z_{ind}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da bize,

$$w \sim z$$

sonucunu verir. $\square$

Teorem 4.5 Denk kelimelerin çarpımı denktir. Yani $w_1, w_2, v_1, v_2 \in \mathcal{W}(X)$ olmak üzere,

$$w_1 \sim w_2 \text{ ve } v_1 \sim v_2$$

ise,

$$w_1 v_1 \sim w_2 v_2$$

dir.

İspat: $w_1 \sim w_2$ ve $v_1 \sim v_2$ olsun. Bu durumda denklik bağıntısının tanımı gereği,

$$(w_1)_{ind} = (w_2)_{ind} \text{ ve } (v_1)_{ind} = (v_2)_{ind}$$

ve dolayısıyla da,

$$(w_1)_{ind}(v_1)_{ind} = (w_2)_{ind}(v_2)_{ind}$$

elde edilir.

w_1 ve v_1 kelimeleri kendi içlerinde indirgendiği takdirde, indirgeme işleminin özelliği gereği,

$$w_1 v_1 \sim (w_1)_{ind}(v_1)_{ind}$$

ve benzer şekilde w_2 ve v_2 kelimeleri için de,

$$w_2 v_2 \sim (w_2)_{ind}(v_2)_{ind}$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Bu durumda,

$$w_1 v_1 \sim (w_1)_{ind}(v_1)_{ind} = (w_2)_{ind}(v_2)_{ind} \sim w_2 v_2$$

ve dolayısıyla da,

$$w_1 v_1 \sim w_2 v_2$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Tanım 4.6 $\mathcal{W}(X)$ kümesinin,

$$[w]_{\sim} = \{v \in \mathcal{W}(X) \mid w \sim v \Leftrightarrow w_{ind} = v_{ind}\}$$

şeklinde tanımlı denklik sınıfları yardımıyla bir parçalanışı mevcuttur.

Ayrıca tanımlanan işlem gereği, $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ kelimesi için,

$$[w] = \left[x_1^{\varepsilon_1}\right] \left[x_2^{\varepsilon_2}\right] \ldots \left[x_n^{\varepsilon_n}\right] = [x_1]^{\varepsilon_1} [x_2]^{\varepsilon_2} \ldots [x_n]^{\varepsilon_n}$$

dir.

Teorem 4.7 Keyfi bir X kümesi üzerindeki kelimelerin denklik sınıfı yardımıyla,

$$\boxed{F = \{[w] \mid w \in \mathcal{W}(X)\}}$$

şeklinde tanımlanan küme,

$$\boxed{\begin{array}{llll} \cdot : & F \times F & \longrightarrow & F \\ & ([w], [v]) & \longmapsto & [w] \cdot [v] = [wv] \end{array}}$$

işlemi ile bir gruptur.

İspat: Teorem 4.5 gereği işlemin iyi tanımlı olduğu görülür.

G1) Her $[w], [y], [z] \in F$ için, Önerme 3.1 gereği,

$$\begin{array}{rcl} ([w] \cdot [y]) \cdot [z] & = & [wy] \cdot [z] \\ & = & [(wy)z] \\ & = & [w(yz)] \\ & = & [w] \cdot [yz] \\ & = & [w] \cdot ([y] \cdot [z]) \end{array}$$

dir.

G2) $w = 1$ boş kelimesi için, bu kelimenin denklik sınıfı olan $[1] \in F$,

$$[w] \cdot [1] = [w1] = [w] = [1w] = [1] \cdot [w]$$

eşitliği ile birlikte, bu işlem için birimdir.

G3) F nin herhangi bir $[w] = \left[x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}\right]$ elemanı için,

$$[w]^{-1} = \left[x_n^{-\varepsilon_n} \ldots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1}\right]$$

şeklinde tanımlanan $[w]^{-1} \in F$,

$$[w] \cdot [w]^{-1} = [w]^{-1} \cdot [w] = [1]$$

eşitliğiyle birlikte bu işlem için $[w]$ elemanının tersidir. □

Teorem 4.8 Keyfi bir X kümesi üzerinde,

$$F = \{[w]_\sim \mid w \in \mathcal{W}(X)\}$$

şeklinde tanımlı grup,

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

fonksiyonu yardımıyla X tabanlı bir serbest gruptur.

Yani bir başka deyişle, herhangi bir D grubu ve

$$g : X \longrightarrow D$$

fonksiyonu verildiğinde,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, dotted, "\exists! \; f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek f homomorfizmi vardır.

İspat: Bunun için öncelikle,

$$f : F \longrightarrow D$$

aday fonksiyonu, $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{W}(X)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} f: & F & \longrightarrow & D \\ & [w] & \longmapsto & g(x_1)^{\varepsilon_1} g(x_2)^{\varepsilon_2} \ldots g(x_n)^{\varepsilon_n} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.2 gereği herhangi bir w kelimesinin indirgenmiş halinin bir tek olması dolayısıyla f fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu açıktır.

$[w], [v] \in F$ olmak üzere, $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ ve $v = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} f([u] \cdot [v]) & = & f([wv]) \\ & = & f([x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}]) \\ & = & g(x_1)^{\varepsilon_1} g(x_2)^{\varepsilon_2} \ldots g(x_n)^{\varepsilon_n} g(y_1)^{\delta_1} g(y_2)^{\delta_2} \ldots g(y_n)^{\delta_m} \\ & = & (g(x_1)^{\varepsilon_1} g(x_2)^{\varepsilon_2} \ldots g(x_n)^{\varepsilon_n})(g(y_1)^{\delta_1} g(y_2)^{\delta_2} \ldots g(y_n)^{\delta_m}) \\ & = & f([w]) f([v]) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

Her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} (fu)(x) &= f(u(x)) \\ &= f([x]) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, dotted, "\exists! \; f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

f', f ile aynı özellikte ve f den farklı bir diğer homomorfizm olsun. Bu durumda kabul gereği,

$$f'u = g$$

dir.

Bu durumda her $[w] \in F$ için,

$$\begin{aligned} f'([w]) &= f'([x_1]^{\varepsilon_1}[x_2]^{\varepsilon_2} \ldots [x_n]^{\varepsilon_n}) \\ &= f'([x_1]^{\varepsilon_1}) f'([x_2]^{\varepsilon_2}) \ldots f'([x_n]^{\varepsilon_n}) \\ &= f'([x_1])^{\varepsilon_1} f'([x_2])^{\varepsilon_2} \ldots f'([x_n])^{\varepsilon_n} \\ &= (f'(u(x_1))^{\varepsilon_1} (f'(u(x_2))^{\varepsilon_2} \ldots (f'(u(x_n))^{\varepsilon n} \\ &= ((f'u)(x_1))^{\varepsilon_1} ((f'u)(x_2))^{\varepsilon_2} \ldots ((f'u)(x_n))^{\varepsilon_n} \\ &= g(x_1)^{\varepsilon_1} g(x_2)^{\varepsilon_2} \ldots g(x_n)^{\varepsilon_n} \\ &= f([w]) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$f = f'$$

olup f bir tektir. $\square$

4.2.2.2 Metot II

Mevcut problemi ortadan kaldırabilmek için bu sefer de, grubun elemanları olarak herhangi bir kelime almak yerine indirgenmiş kelimeleri almayı deneyelim.

$\boxed{\textbf{Problem :}}$ Fakat iki ingirdenmiş kelimenin çarpımı, yine bir indirgenmiş kelime olmak zorunda değildir. Örneğin, $w_1 = x_3x_5^{-1}$ ve $w_2 = x_5x_2x_7^{-1}$ birer indirgenmiş kelime olup bu iki indirgenmiş kelimenin çarpımı,

$$w_1w_2 = x_3x_5^{-1}x_5x_2x_7^{-1}$$

bir indirgenmemiş kelimedir. Dolayısıyla da tanımlanan bu çarpma işlemi indirgenmiş kelimeler üzerinde bir **ikili işlem tanımlamamaktadır**. Dolayısıyla problem hala devam edecektir.

$\boxed{\textbf{Çözüm :}}$ Serbest çarpımda tanımlanan işlemden faydalanarak, bu problem ortadan kaldırılabilir.

Teorem 4.9 Keyfi bir X kümesi üzerindeki indirgenmiş kelimelerin oluşturduğu,

$$\boxed{F' = \{w \in \mathcal{W}(X) \mid w \sim \text{indirgenmiş}\}}$$

kümesi,

$$\boxed{\begin{array}{llll} \circ: & F' \times F' & \longrightarrow & F' \\ & (w,v) & \longmapsto & w \circ v = (wv)_{ind} \end{array}}$$

işlemiyle birlikte bir gruptur.

İspat: Teorem 3.5 ile benzer şekilde ispatlanır. □

Şimdi, yukarıda iki farklı şekilde inşaa edilen grupların aslında birbirine denk olduğunu görelim.

Teorem 4.10 X keyfi bir küme olmak üzere,

X kümesi üzerindeki kelimelerin denklik sınıfları yardımıyla inşaa edilen,

$$\boxed{F = \{[w] \mid w \in \mathcal{W}(X)\}}$$

şeklindeki $(F,\cdot)$ serbest grubu ile,

X kümesi üzerindeki indirgenmiş kelimeler yardımıyla inşaa edilen,

$$\boxed{F' = \{w \in \mathcal{W}(X) \mid w \sim \text{indirgenmiş}\}}$$

şeklinde tanımlı $(F',\circ)$ grubu birbirine izomorftur.

İspat: Bu iki grup arasındaki aday f homomorfizmi,

$$\begin{array}{rccc} f: & F' & \longrightarrow & F \\ & w & \longmapsto & [w] \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

$w_1, w_2 \in F'$ için,

$$\begin{array}{rcl} w_1 = w_2 & \Rightarrow & (w_1)_{ind} = (w_2)_{ind} \\ & \Rightarrow & [w_1] = [w_2] \\ & \Rightarrow & f(w_1) = f(w_2) \end{array}$$

olup f fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Ayrıca,

$$\begin{array}{rcl} f(w_1 \circ w_2) & = & [w_1 w_2]_{\sim} \\ & = & [w_1] \cdot [w_2] \\ & = & f(w_1) \cdot f(w_2) \end{array}$$

olup f bir homomorfizmdir.

$$\begin{array}{rcl} f(w_1) = f(w_2) & \Rightarrow & [w_1] = [w_2] \\ & \Rightarrow & (w_1)_{ind} = (w_2)_{ind} \\ & \Rightarrow & w_1 = w_2 \end{array}$$

olup f birebir dir.

Son olarak, her $[w]_{\sim} \in F$ için, $w_{ind} \in F$ olup

$$\begin{array}{rcl} f(w_{ind}) & = & [w_{ind}] \\ & = & [w] \end{array}$$

olup f örtendir.

Yani f bir izomorfizm olup

$$F \cong F'$$

olur. $\Box$

Not: $X = \{x, y, \ldots\}$ alınırsa, serbest grubun evrensellik özelliğinden,

$$f : F \longrightarrow D$$

homomorfizmi,

$$\mathcal{W}(X) = \{x, x^{-1}, y, y^{-1}, \ldots\}$$

kümesindeki bir kelimeyi, D grubundaki,

$$\{g(x), g(x)^{-1}, g(y), g(y)^{-1}, \ldots\}$$

elemanlarının bir çarpımına taşır.

Not: X tabanlı bir F serbest grubu için, X in elemanları F grubunda (grup aksiyomları hariç) hiçbir bağıntıya sahip değildir. Serbest denmesinin sebebi de budur.

Örnek 4.2 $X = \{x\}$ alınırsa,

$$F = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

devirli grubu bir serbest gruptur.

Örnek 4.3 $X = \{x, y\}$ alınırsa,

$$\{x^n, y^m, \ldots \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde bir serbest grup elde edilir.

4.3 Serbest Grupların Cebirsel Özellikleri

Teorem 4.11 Her grup bir serbest grubun homomorfik görüntüsü olup ayrıca yine bu serbest grubun bir bölüm grubuna izomorftur.

İspat: G herhangi bir grup olsun. X kümesi de G grubunu oluşturan küme yapısı olsun. Bu durumda F, X kümesi üzerindeki serbest grup olmak üzere,

$$\begin{array}{cccc} g: & X & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & f(x) = x \end{array}$$

birim fonksiyonu için,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, dotted, "f"] \\ & G \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde, g nin genişlemesi olan bir f homomorfizmi vardır. Burada g örten olduğundan dolayı f de örten olup

$$f(F) = G$$

elde edilir.

Ayrıca 1. İzomorfizm Teoremi gereğince,

$$F/Çek(f) \cong f(F) = G$$

olup sonuç olarak,

$$F/Çek(f) \cong G$$

elde edilir. □

Tanım 4.12 X tabanlı bir F serbest grubu için, $|X| = n$ sayısına F serbest grubunun *rankı* denir ve

$$rank(F) = n$$

şeklinde gösterilir.

Ayrıca rankı n olan serbest grup kısaca F_n şeklinde gösterilir.

Örnek 4.4 Bu tanıma göre, serbest grup için verdiğimiz iki temel örnek aslında,

i) $F_0 = \{e\}$

ii) $F_1 \cong \mathbb{Z}$

şeklinde de ifade edilebilir.

Not: Aşağıda, serbest gruplarla ilgili birkaç temel bilgi ispatsız bir şekilde verilecektir.

▶ Aşikar grup haricindeki her serbest grup sonsuz mertebelidir.

▶ Sonsuz mertebeden her devirli grup bir serbest gruptur.

▶ Bir serbest grubun her altgrubu yine bir serbest gruptur. Bu teorem literatürde *Nielsen-Scherier Teoremi* olarak bilinmektedir.

▶ Serbest grup izomorfizm farkıyla bir tektir.

▶ F ve F' ; X ve X' sonlu kümeleri tarafından üretilmiş serbest gruplar olmak üzere, $F \cong F'$ olması için gerek ve yeter şart, $|X| = |X'|$ olmasıdır.

4.4 Serbest Grup ile Serbest Çarpım Arasındaki İlişki

Şimdi, tanımlanan bu iki yapı arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 4.13 $m,n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\boxed{F_{m+n} \cong F_m * F_n}$$

dir.

Yani bir başka deyişle, rankı m olan bir serbest grupla, rankı n olan bir başka serbest grubun serbest çarpımı, rankı $m+n$ olan bir serbest grubu verir.

İspat: X bir küme ve G de bir grup olmak üzere, kümeler kategorisinden gruplar kategorisine,

$$FG: \quad Küme(X,U(G)) \quad \longrightarrow \quad Grp(F(X),G)$$

şeklinde tanımlı bir serbest grup funktoru tanımlıdır.

Bu funktor,

$$U: \quad Grp(F(X),G) \quad \longrightarrow \quad Küme(X,U(G))$$

forgetful funktorunun sol ekidir. Böylece FG funktoru altında eşçarpım korunur. Yani eşçarpım eşçarpıma taşınır.

Bir başka ifadeyle, X ve Y iki küme olmak üzere, X ve Y nin kümeler kategorisi içerisindeki eşçarpımının FG funktoru altındaki görüntüsü ile; X ve Y kümelerinin ayrı ayrı FG funktoru altındaki görüntülerinin eşçarpımı birbirine izomorftur.

O halde X ve Y kümelerinin küme kategorisi içindeki eşçarpımı bu iki kümenin ayrık birleşimi yani $A^* \cup B^*$ olup FG funktoru altındaki görüntüsü ise,

$$F(X^* \cup Y^*)$$

serbest grubudur.

Diğer taraftan X ve Y kümelerinin FG funktoru altındaki görüntüleri $F(X)$ ve $F(Y)$ serbest grupları olup bu iki grubun gruplar kategorisi altındaki eşçarpımı ise bu iki grubun serbest çarpımı yani,

$$F(X) * F(Y)$$

dir.

İki yoldan da elde edilen eşçarpımlar birbirine izomorf olup sonuç olarak,

$$F(X^* \cup Y^*) = F(X) * F(Y)$$

elde edilir.

$m,n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $|X| = m$ ve $|Y| = n$ olsun. Bu durumda ayrık birleşimin tanımı gereği, $|X^* \cup Y^*| = m+n$ olup,

$$F_{m+n} \cong F_m * F_n$$

elde edilir. □

Örnek 4.5 Yani aslında, serbest çarpım için temel örneğimiz olan Örnek 3.2 tekrar hatırlanacak olursa, bu teoremle birlikte,

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_1 * F_1 \cong F_2$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.14 Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak her serbest grubun, uygun iki serbest grubun serbest çarpımı olarak yazılabileceği sonucuna ulaşabiliriz. Dahası, F rankı m olan bir serbest grup olmak üzere, yine bu teorem gereği,

$$F_m \cong F_m * F_0$$

yani,

$$F_m \cong F_m * \{e\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonuç da aslında grup teoriden de bildiğimiz,

$$G \cong G \times \{e\}$$

izomorfizmine benzer bir sonuçtur.

Bu sonuçla birlikte akla ilk olarak "*temel serbest grup örneklerimizden biri olan $\mathbb{Z}$ grubu hangi iki grubun serbest çarpımıdır?*" sorusu gelmektedir. Bu sorunun cevabını da aşağıdaki örnekle birlikte verelim.

Örnek 4.6 $\mathbb{Z} \cong F_1$ ve $\{e\} = F_0$ olmak üzere,

$$F_1 * F_0 \cong F_{1+0} = F_1$$

olup sonuç olarak $\mathbb{Z}$ serbest grubu,

$$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} * \{e\}$$

şeklinde $\mathbb{Z}$ ve $\{e\}$ gruplarının serbest çarpımı şeklinde yazılabilmektedir.

BÖLÜM 5

Çaprazlanmış P-Modüllerin Eşçarpımı

5.1 Giriş

Bu bölümde, şimdiye kadarki bölümlerde ön hazırlık olarak verdiğimiz tüm cebirsel yapılarla birlikte, tezimizin esas amacı olan çaprazlanmış P-modüllerin eşçarpımının nasıl inşaa edilebileceğini inceyecek ve ayrıca bazı temel özellikleri üzerinde duracağız.

R. Brown, [3] de, çaprazlanmış P-modüllerin eşçarpımını tanımlamıştır. Elde ettiği sonuç ve özellikleri de gerek aynı makalenin devamında, gerek diğer makalelerinde Topoloji ile ilişkilendirerek önemli uygulamalarını elde etmiştir. Özellikle Homotopi Teori ve 2-boyutlu Van Kampen Teoremi için, çaprazlanmış P-modüllerin eşçarpımı yardmıyla birçok önemli sonuca varmıştır.

Tezin bu bölümünün hazırlanmasında genel olarak R. Brown ın yukarıda belirtilen [3] makalesi ile birlikte, [4, 5, 19, 20] den yararlanılmıştır.

5.2 Çaprazlanmış Modüller

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, ilk kez J.H.C. Whitehead tarafından [26] da tanımlanmıştır. Whitehead, bu yapıyı homotopi grupları ile ilgili çalışmalarında incelemiştir.

Tanım 5.1 G_1, G_0 birer grup ve $\delta : G_1 \longrightarrow G_0$ bir grup homomorfizmi olmak üzere, G_0 ın G_1 üzerine,

$$\begin{array}{ccc} G_0 \times G_1 & \longrightarrow & G_1 \\ (g_0, g_1) & \longmapsto & {}^{g_0}g_1 \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir etkisi olsun. Eğer her $g_0 \in G_0$ ve $g_1 \in G_1$ için δ homomorfizmi,

$$\delta({}^{g_0}g_1) = g_0 \delta(g_1) g_0^{-1}$$

şartını sağlıyorsa, δ homomorfizmine (veya (G_1, G_0, δ) üçlüsüne) bir *önçaprazlanmış modül* denir.

Buna ek olarak, her $g_1, g_1' \in G_1$ için,

$${}^{\delta(g_1)}g_1' = g_1 g_1' g_1^{-1}$$

ise, bu durumda (G_1, G_0, δ) üçlüsüne artık bir *çaprazlanmış modül* denir. Ayrıca bu ikinci şarta özel olarak *Peiffer şartı* adı verilir.

5.2.1 Örnekler

Örnek 1. G_1 Abelyen olmayan bir grup ve G_0 herhangi bir grup olmak üzere, G_0 grubunun G_1 üzerine bir etkisi mevcut olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccc} 0: & G_1 & \longrightarrow & G_0 \\ & g_1 & \longmapsto & e_{G_0} \end{array}$$

birim homomorfizmi ile birlikte, $(G_1, G_0, 0)$ bir önçaprazlanmış modüldür.

İspat: $g_0 \in G_0$ ve $g_1 \in G_1$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \delta\left({}^{g_0}g_1\right) & = & e_{G_0} \\ & = & g_0 g_0^{-1} \\ & = & g_0 1_{G_0} g_0^{-1} \\ & = & g_0 \delta\left(g_1\right) g_0^{-1} \end{array}$$

olup (G_1, G_0, δ) bir önçaprazlanmış modüldür. □

Özel olarak, $G_1 = G_0$ ve $G_1 = \{1_{G_0}\}$ alınarak da yine birer önçaprazlanmış modül elde edilebilir.

Örnek 2. G bir grup olmak üzere, G nin $G \times G$ üzerine etkisi,

$${}^{g}(g_1, g_2) = (g g_1 g^{-1}, e)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

homomorfizmi ile birlikte $(G \times G, G, \pi_1)$ bir önçaprazlanmış modüldür.

İspat: $g \in G_0$ ve $(g_1, g_2) \in G \times G$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1\left({}^{g}(g_1, g_2)\right) & = & \pi_1(g g_1 g^{-1}, e) \\ & = & g g_1 g^{-1} \\ & = & g \pi_1(g_1, g_2) g^{-1} \end{array}$$

olup $(G \times G, G, \pi_1)$ bir önçaprazlanmış modüldür. □

Örnek 3. G Abelyen olmayan bir grup ve $[G,G]$ de G nin komütatör normal altgrubu olsun. $G/[G,G]$ bölüm grubunun G üzerine aşikar etkisi,

$$\begin{array}{ccc} G/[G,G]\times G & \longrightarrow & G \\ (\bar{g},h) & \longmapsto & {}^{\bar{g}}h = h \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{array}{cccc} p: & G & \longrightarrow & G/[G,G] \\ & g & \longmapsto & p(g) = \bar{g} \end{array}$$

bölüm homomorfizmi ile birlikte, $(G, G/[G,G], p)$ bir önçaprazlanmış modüldür.

İspat:

$$\begin{aligned} p\left({}^{\bar{g}}h\right) &= p(h) \\ &= p(h)\bar{g}\bar{g}^{-1} \\ &= \bar{g}p(h)\bar{g}^{-1} \end{aligned}$$

olup $(G, G/[G,G], p)$ bir önçaprazlanmış modüldür. □

Örnek 4. G_0 ve G_1 birer grup olmak üzere, G_0 ın G_1 üzerine bir etkisi mevcut olsun.

$$\begin{array}{cccc} \pi_2: & G_1 \rtimes G_0 & \longrightarrow & G_0 \\ & (g_1,g_0) & \longmapsto & g_0 \end{array}$$

olmak üzere, G_0 ın $G_1 \rtimes G_0$ üzerine,

$${}^{g_0}(g_1,g_0') = \left({}^{g_0}g_1, g_0g_0'g_0^{-1}\right)$$

şeklinde tanımlı etkisiyle birlikte, $(G_1 \rtimes G_0, G_0, \pi_2)$ bir önçaprazlanmış modüldür.

Burada, $G_1 \rtimes G_0$ yarı-direkt çarpım üzerindeki işlem, $a,a' \in G_1$ ve $b,b' \in G_0$ olmak üzere,

$$(a,b)(a',b') = (a^ba', bb')$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat:

$$\begin{aligned} \pi_2\left({}^{g_0}(g_1,g_0')\right) &= \pi_2({}^{g_0}g_1, g_0g_0'g_0^{-1}) \\ &= g_0g_0'g_0^{-1} \\ &= g_0\pi_2(g_1,g_0')g_0^{-1} \end{aligned}$$

olup $(G_1 \rtimes G_0, G_0, \pi_2)$ bir önçaprazlanmış modüldür. □

Örnek 5. (G, G_0, δ) ve (H, G_0, δ') birer çaprazlanmış modül olsun. G nin H üzerine etkisi,

$${}^{g_1}g_1' =^{\delta(g_1)} g_1'$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccc} \partial : & G \rtimes H & \longrightarrow & G_0 \\ & (g,h) & \longmapsto & \delta(g)\delta'(h) \end{array}$$

olmak üzere G_0 ın $G \ltimes H$ üzerine,

$$^{g_0}(g,h) = (^{g_0}g, ^{g_0}h)$$

etkisiyle birlikte, $(G \rtimes H, G_0, \partial)$ bir önçaprazlanmış modüldür.

İspat:

$$\begin{aligned} \partial\left(^{g_0}(g,h)\right) &= \partial(^{g_0}g, ^{g_0}h) \\ &= \delta(^{g_0}g)\delta'(^{g_0}h) \\ &= g_0\delta(g)g_0^{-1}g_0\delta'(h)g_0 \\ &= g_0\delta(g)\delta'(h)g_0 \\ &= g_0\partial(g,h)g_0 \end{aligned}$$

olup $(G \rtimes H, G_0, \partial)$ bir önçaprazlanmış modüldür. □

Uyarı: Dikkat edilirse, yukarıda verilen örneklerin hiçbiri çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 6. G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olmak üzere G nin N üzerine konjüge etkisi,

$$^{g}n = gng^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda i içine fonksiyonu ile birlikte, (N, G, i) bir çaprazlanmış modüldür.

İspat: $g \in G$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} i\left(^{g}n\right) &= i(gng^{-1}) \\ &= gng^{-1} \\ &= gi(n)g^{-1} \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} ^{i(n)}n' &= {}^{n}n' \\ &= nn'n^{-1} \end{aligned}$$

olup (N, G, i) bir çaprazlanmış modüldür. □

Bu örneğin tersinin de doğru olduğu aşağıdaki önermede verilecektir.

Önerme 5.2 Herhangi bir (G_1, G_0, δ) çaprazlanmış modülü için, $\delta(G_1) \trianglelefteq G_0$ dir.

İspat: $g_1 \in \delta(G_1)$ ve $g_0 \in G_0$ olsun. Bu durumda $g_1 = \delta(x)$ olacak şekilde en az bir $x \in G_1$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned} g_0 g_1 g_0^{-1} &= g_0 \delta(x) g_0^{-1} \\ &= \delta({}^{g_0}x) \\ &= \delta(x') \in \delta(G_1) \end{aligned}$$

olup $\delta(G_1) \trianglelefteq G_0$ dir. $\square$

Örnek 7. G bir grup ve M bir sol G-Modül olmak üzere, G grubunun M üzerine,

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g,m) &\longmapsto {}^{g}m \end{aligned}$$

şeklinde bir etkisi mevcut olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0: \quad M &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto 1_G \end{aligned}$$

olmak üzere $(M,G,0)$ bir çaprazlanmış modüldür.

İspat:

$$\begin{aligned} 0({}^{g}m) &= 1_G \\ &= g1_G g^{-1} \\ &= g0(m)g^{-1} \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} {}^{0(m)}m' &= {}^{1_G}m' \\ &= m' \\ &= m'mm^{-1} \\ &= mm'm^{-1} \end{aligned}$$

olup $(M,G,0)$ bir çaprazlanmış modüldür. $\square$

Yine bu örneğin de tersinin doğru olduğu aşağıdaki önermede verilecektir.

Önerme 5.3 (C,G,δ) bir çaprazlanmış modül olsun. Çek$(\delta) \subseteq Z(C)$ dir. G nin C üzerine etkisiyle birlikte Çek(δ) bir G-Modüldür [20]. Ayrıca $\delta(C)$ nin Çek(C) üzerine etkisi de aşikar etkidir.

İspat: $x \in$ Çek(δ) ve $c \in C$ olsun. Bu durumda,

$$xcx^{-1} = {}^{\delta(x)}c = {}^{1_G}c = c$$

olup $xc = cx$ elde edilir. Yani Çek$(\delta) \subseteq Z(C)$ dir. $\square$

Not: Yukarıdaki örneklerden anlaşılacağı üzere, çaprazlanmış modüller, normal altgruplar ile modüller arasında yer almaktadır.

Örnek 8. G bir grup, $\mathrm{Oto}(G)$ de G nin otomorfizmlerinin grubu olmak üzere, $\mathrm{Oto}(G)$ nin G üzerine,

$$^{f}g = f(g)$$

etkisi tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccl} ad: & G & \longrightarrow & \mathrm{Oto}(G) \\ & g & \longmapsto & ad_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ k & \longmapsto & gkg^{-1} \end{array} \end{array}$$

homomorfizmi ile birlikte, $(G, \mathrm{Oto}(G), ad)$ bir çaprazlanmış modüldür.

İspat: $f \in \mathrm{Oto}(G)$ ve $g, k \in G$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \left(ad\left({}^{f}g\right)\right)(k) &= (ad\,(f(g)))\,(k) \\ &= ad_{f(g)}(k) \\ &= f(g)kf(g)^{-1} \\ &= f(g)kf(g^{-1}) \\ &= f(g)f\left(f^{-1}(k)\right)f(g^{-1}) \\ &= f\left(gf^{-1}(k)g^{-1}\right) \\ &= f\left(ad_g\left(f^{-1}(k)\right)\right) \\ &= (f \circ ad_g)\left(f^{-1}(k)\right) \\ &= \left(f \circ ad_g \circ f^{-1}\right)(k) \\ &= \left(f \circ ad(g) \circ f^{-1}\right)(k) \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} {}^{ad(g)}g' &= {}^{(ad_g)}g' \\ &= ad_g(g') \\ &= gg'g^{-1} \end{aligned}$$

olup $(G, \mathrm{Oto}(G), ad)$ bir çaprazlanmış modüldür. $\square$

Tanım 5.4 (G_1, G_0, ∂) ve (G'_1, G'_0, ∂') birer önçaprazlanmış modüller olsun. $\mu_1 : G_1 \longrightarrow G'_1$ ve $\mu_0 : G_0 \longrightarrow G'_0$ birer grup homomorfizmi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mu_1"'] & G_0 \arrow[d, "\mu_0"] \\ G'_1 \arrow[r, "\partial'"'] & G'_0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani,

$$\partial'\mu_1 = \mu_0\partial$$

ve her $g_0 \in G_0$ için,

$$\mu_1({}^{g_0}g_1) = {}^{\mu_0(g_0)}\mu_1(g_1)$$

ise, (μ_1,μ_0) ikilisine, (G_1,G_0,∂) önçaprazlanmış modülünden (G_1',G_0',∂') önçaprazlanmış modülüne bir *çaprazlanmış modül homomorfizmi* denir.

Bu tanımlama yardımıyla,

- objeleri, önçaprazlanmış modüller
- morfizmleri, önçaprazlanmış modül homomorfizmleri

olan kategoriye de *önçaprazlanmış modüller kategorisi* adı verilir. Ayrıca bu kategori kısaca $PXMod$ ile gösterilir.

Bu kategorinin objeler sınıfı, çaprazlanmış modüllere kısıtlanarak, bu kategorinin *çaprazlanmış modüller kategorisi* adı verilen bir dolu alt kategorisi elde edilir ve bu kategori kısaca $XMod$ ile gösterilir.

5.3 Çaprazlanmış P-Modüller

P sabit bir grup olmak üzere, (G,P,∂) şeklindeki çaprazlanmış modüllere *çaprazlanmış P-modül* denir. Burada P her zaman sabit olduğundan, (G,P,∂) çaprazlanmış P-modülü kısaca (G,∂) ile de gösterilebilir.

(G,∂) ve (G',∂') çaprazlanmış P-modülleri için, $\mu : G \longrightarrow G'$ grup homomorfizmi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mu"'] & P \arrow[d, equal] \\ G' \arrow[r, "\partial'"'] & P \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani,

$$(\partial'\mu = \partial)$$

ve her $g \in G$ için,

$$\mu({}^p g) = {}^p \mu(g)$$

oluyorsa μ ye artık, (G,∂) çaprazlanmış P-modülünden, (G',∂') çaprazlanmış P-modülüne bir *çaprazlanmış P-modül homomorfizmi* denir. Bu tanımlama yardımıyla,

- objeleri, çaprazlanmış P-modüller
- morfizmleri, çaprazlanmış P-modül homomorfizmleri

olan kategoriye *çaprazlanmış P-modüller kategorisi* adı verilir ve bu kategori $XMod/P$ ile gösterilir. Ayrıca bu kategori, çaprazlanmış modüller kategorisi olan $XMod$ un bir dolu alt kategorisidir. Yani,

$$XMod/P \subseteq XMod \subseteq PXMod$$

dir.

5.4 Çaprazlanmış P-Modüllerin Eşçarpımı

İlk olarak, eşçarpımın Tanım 1.1 de verilen tanımını çaprazlanmış P-modüller kategorisi için tekrar hatırlayalım.

(G,∂) ve (G',∂') birer çaprazlanmış P-modül olsun. Bu durumda herhangi bir (H',δ') çaprazlanmış P-modülü ve

$$u_1 : (G,\partial) \longrightarrow (H',\delta') \qquad , \qquad u_2 : (G',\partial') \longrightarrow (H',\delta')$$

morfizmleri verildiğinde,

$$i_1 : (G,\partial) \longrightarrow (H,\delta) \qquad , \qquad i_2 : (G',\partial') \longrightarrow (H,\delta)$$

morfizmleri yardımıyla,

$$\begin{tikzcd}
(G,\partial) \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "u_1"'] & (H,\delta) \arrow[d, dotted, "\exists!\ \mu"] & (G',\partial') \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "u_2"] \\
& (H',\delta') &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek

$$\mu : (H,\delta) \longrightarrow (H',\delta')$$

morfizmi varsa, (H,δ) *çaprazlanmış P-modülüne* (G,∂) ve (G',∂') *çaprazlanmış P-modüllerinin eşçarpım* denir.

Tanım 5.5 (G,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. $m,n \in G$ olmak üzere,

$$[\![m,n]\!] = {}^{\partial(m)}nmn^{-1}m^{-1}$$

elemanı G nin *Peiffer elemanı* olarak adlandırılır ve G nin bu elemanlar tarafından üretilen altgrubu da,

$$[\![G,G]\!]$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 5.6 (G,∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $[\![G,G]\!]$, G nin P-invaryant normal altgrubudur.

İspat: $x \in G$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
x[\![m,n]\!]x^{-1} &= x^{\partial(m)}nmn^{-1}m^{-1}x^{-1} \\
&= x^{\partial(m)}nm\left({}^{\partial(xm)}n(xm)\right)^{-1}\left({}^{\partial(xm)}n(xm)\right)n^{-1}(xm)^{-1} \\
&= x^{\partial(m)}nm\left({}^{\partial(xm)}n(xm)\right)^{-1}[\![xm,n]\!] \\
&= x^{\partial(m)}nmm^{-1}x^{-1}\left({}^{\partial(xm)}n\right)^{-1}[\![xm,n]\!] \\
&= x^{\partial(m)}nx^{-1}\left({}^{\partial(xm)}n\right)^{-1}[\![xm,n]\!] \\
&= \left({}^{\partial(xm)}nx\left({}^{\partial(m)}n\right)^{-1}x^{-1}\right)^{-1}[\![xm,n]\!] \\
&= \left({}^{\partial(x)\partial(m)}nx\left({}^{\partial(m)}n\right)^{-1}x^{-1}\right)^{-1}[\![xm,n]\!] \\
&= [\![x,{}^{\partial(m)}n]\!][\![xm,n]\!]
\end{aligned}$$

olup

$$x[\![m,n]\!]x^{-1} \in [\![G,G]\!]$$

elde edilir. Yani $[\![G,G]\!]$, G nin P-invaryant normal altgrubudur. $\square$

(G,∂) bir önçaprazlanmış modül olmak üzere, önçaprazlanmış modüller kategorisinden, çaprazlanmış modüller kategorisine bir

$$\begin{array}{rccc}
(-)^{cr}: & PXMod & \longrightarrow & XMod \\
& (G,\partial) & \longmapsto & (G/[\![G,G]\!],\partial)
\end{array}$$

funktoru tanımlıdır. Bu funktor,

$$U : XMod \longrightarrow PXMod$$

forgetful funktorunun sol ekidir. Böylece, $(-)^{cr}$ funktoru altında eşçarpım korunur. Yani eşçarpım eşçarpıma taşınır.

O halde, $XMod/P$ altkategorisindeki eşçarpımı elde edebilmek için, öncelikle $PXMod/P$ altkategorisindeki eşçarpım elde edilecek, daha sonra ise $(-)^{cr}$ funktoru altında taşınarak $XMod/P$ altkategorisindeki eşçarpım elde edilmiş olacaktır. İzlenecek bu yol ise,

$$\begin{tikzcd} PXMod/P \arrow[r] \arrow[d, hook] & XMod/P \arrow[d, hook] \\ PXMod \arrow[r, "(-)^{cr}"] & XMod \end{tikzcd}$$

şeklindedir.

Burada $PXMod/P$ kategorisindeki eşçarpım basit olarak, gruplar kategorisindeki eşçarpımı kullanarak elde edilir. Bu da aslında daha önceki bölümlerden çok iyi bilinen, $\{G_i \mid i \in I\}$ gruplar ailesi olmak üzere,

$$G = \mathop{*}_{i\in I} G_i$$

şeklinde tanımlı serbest çarpımdır.

Önerme 5.7 (G,∂) ve (G',∂') önçaprazlanmış P-modüller olmak üzere, $G*G'$ de G ve G' gruplarının serbest çarpımı olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccc} \partial*\partial' : & G*G' & \longrightarrow & P \\ & x_1x_2\ldots x_n & \longmapsto & y_1y_2\ldots y_n \end{array}$$

için, $1 \le i \le n$ olmak üzere, $x_i \in G$ ise $y_i = \partial(x_i)$ ve $x_i \in G'$ ise $y_i = \partial'(x_i)$ şeklinde tanımlı $\partial*\partial'$ ile birlikte,

$$\left(G*G',\partial*\partial'\right)$$

(G,∂) ve (G',∂') önçaprazlanmış P-modüllerinin eşçarpımı olur. Yani $\left(G*G',\partial*\partial'\right)$, $PXMod/P$ kategorisinde eşçarpımdır.

İspat: Herhangi bir (H',δ') önçaprazlanmış P-modülü ve

$$u_1 : (G,\partial) \longrightarrow (H,\delta) \qquad , \qquad u_2 : (G',\partial') \longrightarrow (H,\delta)$$

morfizmleri için,

$$\begin{array}{rccclcrccc} i_1: & (G,\partial) & \longrightarrow & (G*G',\partial*\partial') & & , & i_2: & (G',\partial') & \longrightarrow & (G*G',\partial*\partial') \\ & g & \longmapsto & i_1(g)=\partial(g) & & & & g' & \longmapsto & i_2(g')=\partial'(g') \end{array}$$

morfizmleri ile birlikte,

$$\begin{tikzcd} (G,\partial) \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "u_1"'] & (G*G',\partial*\partial') \arrow[d, dotted, "\exists!\ \mu"] & (G',\partial') \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "u_2"] \\ & (H',\delta') & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani,

$$\mu i_1 = u_1 \qquad , \qquad \mu i_2 = u_2$$

olacak şekilde bir tek

$$\mu : \left(G*G',\partial*\partial'\right) \longrightarrow (H',\delta')$$

homorfizminin varlığını göstereceğiz.

Bunun için ise öncelikle $(G*G',\partial*\partial')$ nin bir önçaprazlanmış P-modül olduğunu göstermeliyiz.

P nin $G*G'$ üzerine etkisi, P nin G ve G' gruplarına ayrı ayrı mevcut olan etkisi yardımı ile yani,

$$\begin{array}{rcl} P\times(G*G') & \longrightarrow & G*G' \\ (p,x_1x_2\ldots x_n) & \longmapsto & {}^p(x_1x_2\ldots x_n) = {}^p(x_1)\,{}^p(x_2)\ldots{}^p(x_n) \end{array}$$

şeklindeki P-invaryant etkiyle tanımlanır.

Böylece,

$$\begin{array}{rcl} (\partial*\partial')({}^p(x_1x_2\ldots x_n)) & = & (\partial*\partial')({}^p(x_1)\,{}^p(x_2)\ldots{}^p(x_n)) \\ & = & \partial_{i_1}({}^p(x_1))\partial_{i_2}({}^p(x_2))\ldots\partial_{i_n}({}^p(x_n)) \\ & = & p\partial_{i_1}(x_1)p^{-1}p\partial_{i_2}(x_2)p^{-1}\ldots p\partial_{i_n}(x_n)p^{-1} \\ & = & p\partial_{i_1}(x_1)\partial_{i_2}(x_2)\ldots\partial_{i_n}(x_n)p^{-1} \\ & = & p\left((\partial*\partial')(x_1x_2\ldots x_n)\right)p^{-1} \end{array}$$

olup $(G*G',\partial*\partial')$ bir önçaprazlanmış P-modüldür.

$$\mu : \left(G*G',\partial*\partial'\right) \longrightarrow (H',\delta')$$

morfizmi,

$$h : G*G' \longrightarrow H'$$

homomorfizmiyle tanımlı olup bu durumda μ morfizminin varlığı, bir tekliği ve diyagramın değişmeliliği serbest çarpımın tanımı gereği açıktır. □

Not: Böylelikle önçaprazlanmış P-modüller kategorisindeki eşçarpımı elde etmiş olduk. Çaprazlanmış P-modüller kategorisindeki eşçarpımı elde edebilmemiz için şimdi yapmamız gereken tek şey, elde ettiğimiz bu yapıyı, daha önceden bahsettiğimiz gibi $(-)^{cr}$ funktoru altında çaprazlanmış P-modüller kategorisine taşımak olacaktır.

Sonuç 5.8 (G,∂) ve (G',∂') çaprazlanmış P-modüller olmak üzere, $(-)^{cr}$ funktoru yardımıyla,

$$\begin{array}{rccc} (-)^{cr}: & PXMod & \longrightarrow & XMod \\ & (G*G',\partial*\partial') & \longmapsto & ((G*G')/[\![G*G',G*G']\!],\partial*\partial') \end{array}$$

şeklinde elde edilen,

$$\boxed{((G*G')/[\![G*G',G*G']\!],\partial*\partial')}$$

çaprazlanmış P-modülü, (G,∂) ve (G',∂') çaprazlanmış P-modüllerinin eşçarpımıdır.

Böylece, çaprazlanmış P-modüller kategorisi için eşçarpım elde edilmiştir.

Not: Çaprazlanmış P-modüller kategorisindeki eşçarpımın nasıl elde edildiğini yukarıda açık şekilde inceledik. Şimdi ise, cebirsel hesaplamalarda serbest çarpıma göre daha basit hesaplamalar sunmasından dolayı, çaprazlanmış modüller yardımıyla bir başka yapı tanımlanarak, bu yapının da yine eşçarpım olduğu gösterilecektir. Daha sonra ise, Teorem 1.2 gereği eşçarpımın izomorfizm farkıyla bir tek olmasından dolayı, birbirinden farklı gibi duran bu iki cebirsel yapı aslında birbirine izomorf olacaktır.

Not: (A,α) ve (B,β) çaprazlanmış P-modüller olsun. B nin A üzerine, β vasıtasıyla bir etkisi mevcuttur. Bu durumda P nin $A \rtimes B$ üzerine,

$$^{p}(a,b) = (^{p}a,^{p}b)$$

şeklinde tanımlı bir etkisi mevcuttur.

Ayrıca,

$$\begin{array}{rccc} i: & A & \longrightarrow & A \rtimes B \\ & a & \longmapsto & (a,1) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} j: & B & \longrightarrow & A \rtimes B \\ & b & \longmapsto & (1,b) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} \delta: & A \rtimes B & \longrightarrow & P \\ & (a,b) & \longmapsto & \alpha(a)\beta(b) \end{array}$$

dönüşümleri tanımlansın.

Önerme 5.9 Yukarıdaki tanımlamalarla birlikte $(A \rtimes B, \delta)$ bir önçaprazlanmış P-modüldür.

İspat: $a, a' \in A$ ve $b, b' \in B$ olsun.

Öncelikle,

$$
\begin{aligned}
\delta((a,b)(a',b')) &= \delta(a^{b}a', bb') \\
&= \alpha(a^{b}a')\beta(bb') \\
&= \alpha(a)\alpha({}^{b}a')\beta(b)\beta(b') \quad (\because \alpha, \beta \text{ grup homomorfizmi}) \\
&= \alpha(a)\alpha({}^{\beta(b)}a')\beta(b)(b') \\
&= \alpha(a)\beta(b)\alpha(a')\beta(b^{-1})\beta(b)\beta(b') \\
&= \alpha(a)\beta(b)\alpha(a')\beta(b)^{-1}\beta(b)\beta(b') \quad (\because \beta \text{ grup homomorfizmi}) \\
&= \alpha(a)\beta(b)\alpha(a')\beta(b') \\
&= \delta(a,b)\delta(a',b')
\end{aligned}
$$

olup δ bir grup homomorfizmidir.

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\delta({}^{p}(a,b)) &= \delta({}^{p}a, {}^{p}b) \\
&= \alpha({}^{p}a)\beta({}^{p}b) \\
&= p\alpha(a)p^{-1}p\beta(b)p^{-1} \\
&= p\alpha(a)\beta(b)p^{-1} \\
&= p\delta(a,b)p^{-1}
\end{aligned}
$$

olup böylece $(A \rtimes B, \delta)$ bir önçaprazlanmış P-modüldür. □

Önerme 5.10 (C, γ) herhangi bir çaprazlanmış P-modül ve

$$
f_A : A \longrightarrow C \qquad , \qquad f_B : B \longrightarrow C
$$

birer morfizm olsun.

Bu durumda,

$$
\begin{tikzcd}
(A,\alpha) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_A"'] & (A \rtimes B, \delta) \arrow[d, dotted, "\exists!\ h"] & (B,\beta') \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "f_B"] \\
& (C,\gamma) &
\end{tikzcd}
$$

diyagramını değişmeli, olacak şekilde bir tek

$$
h : (A \rtimes B, \delta) \longrightarrow (C, \gamma)
$$

morfizmi vardır.

İspat: $(a,b) \in A \rtimes B$ için,

$$(a,b) = (a,1)(1,b)$$

dir. O halde, $h : A \rtimes B \longrightarrow C$ dönüşümü mevcut ise,

$$\begin{aligned} h(a,b) &= h((a,1)(1,b)) \\ &= h(a,1)h(1,b) \\ &= hi(a)hj(b) \\ &= f_A(a)f_B(b) \end{aligned}$$

olmalı yani,

$$\begin{aligned} h: \quad A \rtimes B &\longrightarrow C \\ (a,b) &\longmapsto f_A(a)f_B(b) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmalıdır ve bu dönüşüm için,

$$\begin{aligned} h((a,b)(a',b')) &= h(a^b a', bb') \\ &= f_A(a^b a')f_B(bb') \\ &= f_A(a)f_A({}^b a')f_B(b)f_B(b') \\ &= f_A(a)^{\gamma(f_B(b))}f_A(a') \\ &= f_A(a)f_B(b)f_A(a')f_B^{-1}(b)f_B(b)f_B(b') \\ &= f_A(a)f_B(b)f_A(a')f_B(b') \\ &= h(a,b)h(a',b') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h({}^p(a,b)) &= h({}^p a, {}^p b)) \\ &= f_A({}^p a)f_B({}^p b) \\ &= {}^p(f_A(a)){}^p(f_B(b)) \\ &= {}^p(h(a,b)) \end{aligned}$$

olduğundan h bir önçaprazlanmış P-modül homomorfizmidir.

$a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$\begin{aligned} hi(a) &= h(a,1) \\ &= f_A(a)f_B(1) \\ &= f_A(a)e_C \\ &= f_A(a) \\ &\Leftrightarrow hi = f_A \end{aligned}$$

ve benzer şekilde de $hj = f_B$ olup

$$\begin{tikzcd}
(A,\alpha) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_A"'] & (A \rtimes B,\delta) \arrow[d, dotted, "\exists ! \; h"] & (B,\beta') \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "f_B"] \\
& (C,\gamma) &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Ayrıca h, h' ile aynı özellikte bir diğer morfizm olsun. Bu durumda kabul gereği,

$$h'i = f_A \quad , \quad h'j = f_B$$

dir.

O halde,

$$\begin{aligned} h'(a,b) &= h'((a,1)(1,b)) \\ &= h'(a,1)h'(1,b) \\ &= h'i(a)h'j(b) \\ &= f_A(a)f_B(b) \\ &= hi(a)hj(b) \\ &= h(a,1)h(1,b) \\ &= h((a,1)(1,b)) \\ &= h(a,b) \end{aligned}$$

olup h bir tektir. □

Sonuç 5.11 (A,α) ve (B,β) çaprazlanmış P-modüller olsun. Bu durumda $(-)^{cr}$ funktoru yardımıyla,

$$\begin{array}{rccc} (-)^{cr}: & PXMod & \longrightarrow & XMod \\ & (A \rtimes B, \delta) & \longmapsto & ((A \rtimes B)/[\![A \rtimes B, A \rtimes B]\!], \delta) \end{array}$$

şeklinde elde edilen

$$\boxed{((A \rtimes B)/[\![A \rtimes B, A \rtimes B]\!], \delta)}$$

çaprazlanmış P-modülü, (A,α) ve (B,β) çaprazlanmış P-modüllerinin eşçarpımıdır.

Böylece, çaprazlanmış P-modüller kategorisi için eşçarpım ikinci bir alternatif yoldan elde edilmiştir.

Uyarı 5.12 Teorem gereği eşmarpım izomorfizm farkıyla bir tek olduğundan dolayı aslında eşçarpım olarak elde edilen bu iki yapı birbirine izomorf yani,

$$\boxed{((G * G')/[\![G * G', G * G']\!], \partial * \partial') \cong ((G \rtimes G')/[\![G \rtimes G', G \rtimes G']\!], \delta)}$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Artin, M., *Free Product of Groups,* American Journal of Mathematics, 1947. 19

[2] Artin, M., *Algebra,* Prentice Hall, 1991. 35

[3] Brown, R., *Coproducts of Crossed P-modules: Applications to Second Homotopy Groups and to the Homology of Groups,* Topology, 1984. 2, 53

[4] Brown, R., *Van Kampen Theorem for Diagrams of Spaces,* Topology, 1987. 53

[5] Brown, R., Higgins, P.J., Sivera, R., *Nonabelian Algebraic Topology,* EMS, 2011. 53

[6] Grillet, P.A., *Abstract Algebra,* Springer, 2007. 19

[7] Lyndon R.G., Schupp P.E., *Combinatorial Group Theory,* Springer, 1977.

[8] Lyndon R.G., Schupp P.E., *Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras,* University of Wales, 1992.

[9] Maclane, S., *Categories For the Working Mathematician,* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1988. 4

[10] Mac Lane, S., *Groups, Categories and Duality,* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A., 1948. 4

[11] Magnus, W., Karrass A., Solitar D., *Combinatorial Group Theory,* Interscience Publications, 1966.

[12] Magnus, W., Moufang, R., *Max Dehn zum Gedachtnis,* Maths. Annalen, 1954. 35

[13] Massey, W.S., *Algebraic Topology: An Introduction,* Springer, 1977. 12, 19

[14] Miller, Charles F., *Combinatorial Group Theory,* University of Melbourne, 2004.

[15] Neumann, B.H., *An Essay on Free Products of Groups with Amalgamations,* Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1954. 19

[16] Nielsen, J., *Die Isomorphismen der Allgemeinen Unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden,* Mathematische Annalen, 1917. 35

[17] Nielsen, J., *On Calculation With Noncommutative Factors and Its Application to Group Theory,* The Mathematical Scientist, 1921. 35

[18] Nielsen, J., *Die Isomorphismengruppe der Freien Gruppen,* Mathematische Annalen, 1924. 35

[19] Nizar, M.S., *Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras,* Bangor, 1992. 53

[20] Porter, T., *The Crossed Menagerie: An Introduction to Crossed Gadgetry and Cohomology in Algebra and Topology,* Bangor, 2012. 53, 57

[21] Reidemeister, K., *Einführung in die Kombinatorische Topologie,* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1932. 35

[22] Rotman, J.J., *Advanced Modern Algebra,* Prantice Hall, 2003. 35

[23] Schreier, O., *Die Untergruppen der Freien Gruppen,* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 1928. 35

[24] Van der Waerden, B.L., *Free Product of Groups,* American Journal of Mathematics, 1948. 27

[25] Von Dyck, W., *Gruppentheoretische Studien,* Mathematische Annalen, 1882. 35

[26] Whitehead, J.H.C., *Combinatorial Group Theory II,* American Mathematical Society, 1949. 53

ÖZGEÇMİŞ

Kadir Emir 24 Ekim 1986 tarihinde Bursa'da doğmuştur. Lisans eğitimini 2008 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladıktan sonra aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Eğitimine 2009 yılında bir dönem ara vererek askerlik görevini tamamlamış ve 2010 yılının Kasım ayında şu anki görevine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü / Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak başlamıştır.

Eskişehir Osmangazi
Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Matematik ve
Bilgisayar Bilimleri Bölümü
ESKİŞEHİR