

Advection Diffusion Denkleminin Genişletilmiş Kübik B-spline Sonlu Elemanlar
zmleri

Sümeyye Doğan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Eylül 2013

Extended Cubic B-spline Finite Element Solutions of the Advection Diffusion Equation

Sümeyye Doğan

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

September 2013

Advection Diffusion Denkleminin Genişletilmiş Kübik B-spline Sonlu Elemanlar zmleri

Sümeyye Doğan

Eskiřehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmelięi Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk

Eylül 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Sümeyye Doğan'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Advection Diffusion Denkleminin Genişletilmiş Kübik B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İdiris Dağ

Üye : Doç. Dr. Bülent Saka

Üye : Doç. Dr. Ahmet Bekir

Üye : Doç. Dr. Yılmaz Dereli

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez Advection Diffusion denkleminin genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin ve galerkin metotlarıyla sayısal çözümleri hakkındadır.

İlk bölümde ileriki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı kavramlar açıklanmıştır. İlk olarak sonlu elemanlar metotları tanıtılmıştır. Spline fonksiyon kavramı anlatıldıktan sonra kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar tanımlanmıştır. Son olarak sonraki bölümlerde sayısal çözümü araştırılacak olan Advection Diffusion (AD) denklemi test problemleri ile birlikte tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, AD denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal olarak çözülmüştür. Üç test problemi tam sonuçla önerilen yöntemi karşılaştırmak için kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu AD denklemini sayısal olarak çözmek için kullanılmıştır. Önerilen metot üç test problemi kullanılarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde kübik B-spline galerkin metodu AD denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için tanımlanmıştır. Üç test problemi metodun performansını görebilmek için kullanılmıştır.

Beşinci bölümde AD denklemi genişletilmiş kübik B-spline galerkin yöntemi ile sayısal olarak çözülmüştür. Metodun performansı üç test problemi ile test edilmiştir.

Son bölümde önerilen yöntemler hakkında bir tartışma yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: B-spline, Genişletilmiş B-spline, Sonlu elemanlar metodu, Advection diffusion denklemi.

SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of Advection Diffusion equation by using extended cubic B-spline collocation and galerkin methods.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First, finite element methods are described. After the concept of the spline functions is outlined, cubic B-spline and extended cubic B-spline functions are described. Finally, Advection diffusion (AD) equation solved numerically in the next chapters is introduced together with their test problems.

In the second chapter, the AD equation is solved numerically by using cubic B-spline collocation method. Three test problems are used to compare between analytic result and proposed method.

In the third chapter, extended cubic B-spline collocation method is used to solve the AD equation numerically. The proposed method is examined by using three test problems.

In the fourth chapter, cubic B-spline galerkin method is designed to have the numerical solution of the AD equation. Three test problems are used to demonstrate the performance of the method.

In the fifth chapter, the AD equation is solved numerically by using the extended cubic B-spline galerkin method. The performance of the method is tested by three problems.

In the last chapter a discussion about the proposed methods is given.

Keywords: B-spline, Extended B-spline, Finite element method, Advection diffusion equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca benden yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk 'a bana ayırdığı zaman ve sağladığı destek için minnettarım. Ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı da teşekkürü borç bilirim. Son olarak manevi destekleriyle yanımda olan babama, ablama, kardeşime ve en önemlisi anneme gönülden teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ.....	xi
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	1
1.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemi	1
1.2.1 Galerkin yöntemi	2
1.2.2 Kolokeyşin yöntemi	3
1.3 Spline Fonksiyonlar	4
1.4 B-Spline Fonksiyonlar	5
1.4.1 Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonlar	6
1.4.2 Lineer B-spline fonksiyonlar	7
1.4.3 Kuadratik B-spline fonksiyonlar	7
1.4.4 Kübik B-spline fonksiyonlar.....	8
1.4.5 Geniştirilmiş kübik B-spline fonksiyonlar	9
1.5 Advection Diffusion Denklemi ve Test Problemleri	11
1.5.1 Birinci test problemi	12
1.5.2 İkinci test problemi	13
1.5.3 Üçüncü test problemi	13
2.KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİ.....	14
2.1 Metodun Uygulanması	14
2.2 Test Problemleri	18
2.2.1 Birinci test problemi	18
2.2.2 İkinci test problemi	20
2.2.3 Üçüncü test problemi	22

3. GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİ.....	26
3.1 Metodun Uygulanması	26
3.2 Test Problemleri	30
3.2.1 Birinci test problemi	30
3.2.2 İkinci test problemi	33
3.2.3 Üçüncü test problemi	36
4. KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ	39
4.1 Metodun Uygulanması	39
4.2 Test Problemleri	43
4.2.1 Birinci test problemi	43
4.2.2 İkinci test problemi	45
4.2.3 Üçüncü test problemi	46
5. GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ	49
5.1 Metodun Uygulanması	49
5.2 Test Problemleri	54
5.2.1 Birinci test problemi	55
5.2.2 İkinci test problemi	56
5.2.3 Üçüncü test problemi	58
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	61
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	64

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
2.1	Dalgaların durumu.....	19
2.2	Mutlak hata.....	20
2.3	$t = 3000$ anındaki analitik çözüm	21
2.4	Mutlak hata.....	22
2.5	$t = 1$ anındaki analitik çözüm.....	24
2.6	Mutlak hata.....	24
3.1	$\lambda = 0$ için mutlak hata.....	32
3.2	$\lambda = -0.176$ için mutlak hata	32
3.3	$\lambda = 0$ için mutlak hata.....	35
3.4	$\lambda = 0.062$ için mutlak hata.....	35
3.5	$\lambda = 0$ için mutlak hata.....	38
3.6	$\lambda = -0.1644$ için mutlak hata	38
4.1	Mutlak hata.....	45
4.2	Mutlak hata.....	46
4.3	Mutlak hata.....	48
5.1	$\lambda = -0.1421$ için mutlak hata	56
5.2	$\lambda = 1.225$ için mutlak hata.....	57
5.3	$\lambda = 0.6371$ için mutlak hata.....	59

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri 8
1.2	Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri..... 10
2.1	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normları . 19
2.2	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normları . 21
2.3	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normları..... 23
3.1	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normları . 31
3.2	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normları . 34
3.3	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normları..... 37
4.1	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normları . 44
4.2	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normları . 46
4.3	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normları..... 47
5.1	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normları . 55
5.2	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normları . 58
5.3	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normları..... 60
6.1	Birinci test problemleri için hata normları..... 61
6.2	İkinci test problemleri için hata normları..... 62
6.3	Üçüncü test problemleri için hata normları..... 63

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar **Açıklama**

AD	Advection Diffusion
GKBG	Genişletilmiş Kübik B-spline Galerkin
GKBK	Genişletilmiş B-spline Kübik Kolokeyşin
KBG	Kübik B-spline Galerkin
KBK	Kübik B-spline Kolokeyşin

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar metodu, karmaşık mühendislik problemlerinin hassas olarak çözülmesinde etkin olarak kullanılan bir sayısal metottur. İlk defa 1956 yılında uçak gövdelerinin gerilme analizi için geliştirilmiş olan bu metot, günümüzde uygulamalı bilimler ve mühendislik problemlerinin çözümünde (yapısal mekanik problemlerinin yanı sıra, ısı iletimi, akışkanlar mekaniği, elektrik ve manyetik alanlar ile ilgili mühendislik problemlerinin çözümü) kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodundaki ana düşünce, karmaşık bir problemi basite indirgeyerek bir çözüm bulmaktır. Esas problemin daha basit bir probleme indirgenmiş olması nedeni ile kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç elde edilmektedir. Sonlu elemanlar yönteminde yapı, davranışı daha önce belirlenmiş olan bir çok elemana bölünür. Elemanlar "düğüm" adı verilen noktalarda tekrar birleştirilerek denklem takımları elde edilir. Denklem takımları elde edilirken dikkat edilmesi gereken hususlar vardır. Öncelikle elemanlar uygun biçimde seçilmeli ve problemin yapısına uygun olarak yerleştirilmelidir. Çözümün ani değişim gösterdiği yerlerde elemanlar daha küçük seçilerek daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir. Uygun elemanlar seçmek kadar bu elemanları ve onların düğüm noktalarını uygun numaralamak da önemlidir. Sonlu elemanlara ayırma işleminden sonra, ifade edilmek istenen büyüklüğün bölge içerisinde değişimini gösteren bir interpolasyon fonksiyonu belirlenir. Fonksiyon gerçeğe ne kadar yakın seçilirse çözüm için yaklaşımda o kadar iyi olur (Clough, 1960; Hillier and Lieberman, 1965; Hinton and Owen, 1977; Muaveni, 2003; Segerlind, 1976; Zienkiewicz and Morgan, 1983).

1.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemi

Sonlu elemanlar yönteminin integral formları varyasyonel ve ağırlıklı rezidü yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan elde edilir. Varyasyonel yöntemler genelde fonksiyonel olarak bilinen özel bir integral bağıntısının maksimum veya minimumunu oluşturan noktasal parametreleri bulmayı amaçlar. Fonksiyonelin ekstremumunu üreten çözüm

sınır şartlarını da sağlar ancak bu fonksiyonelin bulunması bazen çok zor olmakta bazen de mümkün olmamaktadır. Bu nedenle orjinal diferansiyel denklemden integral formunun elde edildiği çeşitli ağırlıklı rezidü yöntemleri mevcuttur.

L bir lineer diferansiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon, $u(x)$ aranan çözüm ve Ω tanım bölgesi olmak üzere

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

şeklinde diferansiyel denklemin sayısal çözümü için ağırlıklı kalan metodu kullanıldığında, aranan $u(\cdot)$ ifadesi yerine

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.2)$$

formundaki bir $U(x)$ sonlu yaklaşım serisi kullanılır. Burada $\phi_j(x)$, ($j = 1, \dots, N$) Ω bölgesi üzerinde tanımlı fonksiyon kümesidir. $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları problem için verilen sınır şartlarını sağlayacak biçimde seçilirler. a_j ler ise belirlenmesi gereken serbest parametrelerdir. $U(\cdot)$, (1.1) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$LU(x) - f(x) = R(x) \quad (1.3)$$

olarak tanımlanan $R(x)$ kalanı elde edilir. Bu yöntem ile a_j parametrelerinin belirlenmesinde, $R(x)$ kalanı ile W_i ağırlık fonksiyonunun çarpımının Ω bölgesi üzerinde integralinin sıfır olması istenir. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} W_i(\cdot) R(\cdot) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

olarak N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek a_j parametreleri bulunur ve (1.2) denkleminde yerine yazılırsa $U(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılır.

1.2.1 Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi bir varyasyon yöntemi olup diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde kullanılmaktadır. Bir önceki alt bölümde tanımlanan (1.4) eşitliğindeki W_i ağırlık fonksiyonu ϕ_i yaklaşım fonksiyonuna eşit alınırsa bu yöntem Galerkin yöntemi olarak bilinir. Bu durumda eğer konum aralığı $[a, b]$ olarak kabul edilir ve (1.2)

çözümü (1.1) denkleminde yerine yazılarak denklemin her iki tarafı $\phi_i(x)$ ile çarpıldıktan sonra integrali alınırsa

$$\int_a^b \phi_i \left(L \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

elde edilir. Ulaşılan denklem sistemi ise açık olarak N tane denklemden oluşan

$$Q_j = L (a_j \phi_j(x)) - f(x)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_1 \int_a^b \phi_1 Q_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_1 Q_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \phi_1 Q_N dx &= 0, \\ a_1 \int_a^b \phi_2 Q_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_2 Q_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \phi_2 Q_N dx &= 0, \\ &\vdots \\ a_1 \int_a^b \phi_N Q_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_N Q_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \phi_N Q_N dx &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

formunda yazılabilir. Denklem sistemi kolaylıkla çözümlenerek a_1, a_2, \dots, a_n bilinmeyen katsayıları bulunabilir.

1.2.2 Kolokeyşin yöntemi

Kolokeyşin metodu ağırlıklı kalan metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta W_i ağırlık fonksiyonları yerine

$$W_i = \delta(x - x_i) \quad (1.7)$$

olacak şekilde Dirac Delta fonksiyonları seçilir. Dirac Delta fonksiyonları $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\int_a^b \delta(x - x_i) \left(L \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = (L [a_i \phi_i(x)] - f(x)) \Big|_a^b = 0, \quad (1.8)$$

olacak şekilde önemli bir özelliğe sahiptir. Buradan N tane bağımsız değişken ve N tane denklemden oluşan sistemden a_1, a_2, \dots, a_n bilinmeyen katsayıları kolaylıkla bulunur.

1.3 Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyon ismi ilk defa 1946 da Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır (Schoenberg, 1946). Spline fonksiyonlar için teorik ve pratik uygulamalardaki gelişme 1960' lı yılların başında olmuştur. Spline fonksiyonlar yapısal özellikleri ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması nedeniyle interpolasyon, veri uydurma, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde, eğri ve yüzey uydurma gibi birçok uygulamalarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Yaklaşım yapılan fonksiyonun özelliklerinden dolayı interpolasyon formüllerinin $[a, b]$ aralığının tamamına uygulanması her zaman istenilen sonucu vermeyebilir. Öyle ki yüksek dereceden polinomlar kullanılarak yapılan interpolasyonlardaki işlem hatalarının artmasıyla gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Birçok durumda kullanılan noktaların sayısının artması çözümün iraksaması anlamına gelir. Ayrıca istenilen fonksiyon $[a, b]$ aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçları vermeyebilir. Bu gibi nedenlerden dolayı yüksek derecesi olmayan birinci, ikinci veya üçüncü dereceden polinom fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygun olur. O halde spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda birbirini örtmeyen alt aralıklarda daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır.

Reel sayıların monoton artan bir dizisi x_1, x_2, \dots, x_N 'e bağlı k . dereceden $S(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

a. $S(x)$, her $[x_m, x_{m+1}]$ de k . ya da daha küçük bir dereceden polinomdur. (Burada $x_0 = -\infty$ ve $x_{n+1} = \infty$ olabilir)

b. $S(x)$ ve kendisinin $1, 2, \dots, k - 1$. basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve x_m ($m = 1, 2, \dots, N - 1$) bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki tanıma göre, parçalı polinom fonksiyonları süreklilik durumunda ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması durumunda spline fonksiyon oluştururlar. $k = 0$ için b koşulu geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır. $k = 1$ için $S(x)$ polinomu kırık çizgilerden oluşur.

Genel olarak, $S(x)$; $[x_{m-1}, x_m]$ ve $[x_m, x_{m+1}]$, $m = 1, 2, \dots, N$ aralıklarından her biri içinde derecesi k ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarak verilebilir. $k > 0$ için k . dereceden bir $S(x)$ spline fonksiyonunun k . türevi bir adım fonksiyonudur. Farklı bir tanım olarak k . dereceden bir spline fonksiyonu bir adım fonksiyonunun k . basamaktan belirsiz integralidir.

Spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar yardımı ile sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir.
- Nümerik analizde ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrislerin tersi kolayca alınabilir. Dolayısıyla spline fonksiyonlar kullanıldığında elde edilecek denklem sistemleri rahatlıkla çözülebilir.
- Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon; k . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.
- Düşük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

1.4 B-Spline Fonksiyonları

B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesi

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \infty = - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \quad (1.9)$$

olmak üzere çalışmamızda kullanacağımız kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar ile birlikte daha düşük dereceden B-spline fonksiyonları da kısaca inceleyelim.

1.4.1 Sıfıncı dereceden B-spline fonksiyonlar

Sıfıncı dereceden B-spline fonksiyonları B_m^0 ile gösterilir ve

$$B_m^0(x) = \begin{cases} 1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlanır. $\{B_m^0 : m \in \mathbb{Z}\}$ kümesi B-spline formunun bir sonlu dizisi olmak üzere bu fonksiyonların önemli özellikleri aşağıdaki şekildedir:

- B_m^0 fonksiyonunun desteği $B_m^0(x) \neq 0$ olan x noktalarının kümesi olarak tanımlanır. O halde bu destek $[x_m, x_{m+1})$ aralığıdır.
- Tüm m ve x değerleri için $B_m^0(x) \geq 0$ eşitsizliği vardır.
- B_m^0 fonksiyonu, bütün sayı doğrusu üzerinde sağdan süreklidir.
- Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları için $\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^0(x) = 1$ eşitliği vardır.

Bu son özelliğin doğruluğu, seçilen herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için kanıtlanabilir. Bunun için x noktasının bulunduğu düğüm noktaları aralığı $x_m \leq x < x_{m+1}$ olsun. Dolayısıyla

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^0(x) = B_m^0(x) = 1 \quad (1.11)$$

eşitliği bulunur.

B_m^0 spline fonksiyonları hakkında son olarak şunu söyleyebiliriz. Verilen düğüm noktaları dizisi üzerinde sıfıncı dereceden tüm spline fonksiyonlar için bir taban oluştururlar. Bu iddianın doğruluğu kolaylıkla kanıtlanabilir. Kabul edelim ki S sıfıncı dereceden bir spline fonksiyonu olsun. O halde S fonksiyonu $x_m \leq x < x_{m+1}$, ($m \in \mathbb{Z}$) için $S(x) = c_m$ formunda tanımlı bir parçalı sabittir. Buradan

$$S(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m B_m^0(x) \quad (1.12)$$

olduğu açıktır.

B_m^0 fonksiyonları bütün yüksek dereceden B-spline fonksiyonları tanımlamak için bir başlangıç noktasıdır. Yüksek mertebeden B-spline fonksiyonlar aşağıdaki indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir (Höllig, 2003).

$$B_m^k(x) = \left(\frac{x - x_m}{x_{m+k} - x_m} \right) B_m^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{m+k+1} - x}{x_{m+k+1} - x_{m+1}} \right) B_{m+1}^{k-1}(x), (k \geq 1) \quad (1.13)$$

1.4.2 Lineer B-Spline fonksiyonlar

x_m ' ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonları

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x_m) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.14)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Bununla birlikte $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı L_m ve L_{m+1} gibi (1.14) de tanımlanan ardışık iki lineer B-spline fonksiyonları tarafından örtülür.

1.4.3 Kuadratik B-Spline fonksiyonlar

x_m ' ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarında $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 + 3[x_m - x]^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+2} - x]^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.15)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onların birinci mertebeden türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1} gibi (1.15) de tanımlanan ardışık üç kuadratik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür.

1.4.4 Kübik B-Spline fonksiyonlar

x_m 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarında $\Psi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 \\ -3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 \\ -3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.16)$$

olarak tanımlanır (Prenter,1975). Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kübik B-spline fonksiyonları ile onların birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Ayrıca $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\Psi_{m-1}, \Psi_m, \Psi_{m+1}$ ve Ψ_{m+2} gibi (1.16) da tanımlanan ardışık dört kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. $\Psi_m(x)$ ve onun ikinci mertebeye kadar olan $\Psi'_m(x), \Psi''_m(x)$ türevlerinin bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.1' de görülmektedir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\Psi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\Psi'_m(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2\Psi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

U_N yaklaşık çözümü ise kübik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \delta_{-1}(t)\Psi_{-1}(x) + \delta_0(t)\Psi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\Psi_{N+1}(x) \quad (1.17)$$

formunda yazılabilir. Bununla birlikte $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, $\Psi_{m-1}, \Psi_m, \Psi_{m+1}$ ve Ψ_{m+2} gibi 4 tane B-spline tarafından örtüldüğünden U için yaklaşım ifadesi ve onun ilk iki

türevi

$$U_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.18)$$

$$U'_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi'_j(x) \delta_j(t) \quad (1.19)$$

$$U''_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi''_j(x) \delta_j(t) \quad (1.20)$$

formunda ifade edilebilir. Dolayısıyla U_m yaklaşık çözümü ve ikinci mertebeye kadar olan türevleri δ parametresine göre

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (1.21)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (1.22)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (1.23)$$

biçiminde yazılabilir.

1.4.5 Genişletilmiş kübik B-Spline fonksiyonlar

x_m ' ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{24h^4} \left\{ \begin{array}{ll} 4h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^3 + 3\lambda(x-x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{m-1}) \\ + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1})^2 \\ - 12h(x-x_{m-1})^3 - 3\lambda(x-x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{m+1}-x) \\ + 6h^2(2+\lambda)(x_{m+1}-x)^2 \\ - 12h(x_{m+1}-x)^3 - 3\lambda(x_{m+1}-x)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ 4h(1-\lambda)(x_{m+2}-x)^3 + 3\lambda(x_{m+2}-x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \quad (1.24)$$

olarak tanımlanır (Xu and Wang, 2008). Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir ve $\lambda = 0$ olduğunda kübik B-spline fonksiyonlar elde edilir. Kübik B-spline fonksiyonlarda olduğu gibi

genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının kendisi, birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Ayrıca $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}$ ve Φ_{m+2} gibi (1.24) de tanımlanan ardışık dört genişletilmiş kübik B-spline tarafından örtülür. $\Phi_m(x)$ ve onun ikinci mertebeye kadar olan $\Phi'_m(x), \Phi''_m(x)$ türevlerinin bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.2: Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$24\Phi_m(x)$	0	$4 - \lambda$	$16 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	0
$2h\Phi'_m(x)$	0	1	0	-1	0
$2h^2\Phi''_m(x)$	0	$2 + \lambda$	$-4 - 2\lambda$	$2 + \lambda$	0

U_N yaklaşık çözümünü ise genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden daha önce kübik B-spline fonksiyonlarda olduğu gibi

$$U_N(x, t) = \delta_{-1}(t)\Phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\Phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\Phi_{N+1}(x) \quad (1.25)$$

formunda yazılabilir. Bununla birlikte $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}$ olarak dört tane spline tarafından örtüldüğünden U için yaklaşım ifadesi ve ilk iki türevi

$$U_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Phi_j(x)\delta_j(t) \quad (1.26)$$

$$U'_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Phi'_j(x)\delta_j(t) \quad (1.27)$$

$$U''_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Phi''_j(x)\delta_j(t) \quad (1.28)$$

formunda ifade edilebilir. Dolayısıyla U_m yaklaşık çözümünü ve ikinci mertebeye kadar olan türevleri δ parametresine göre

$$U_m = U(x_m) = \frac{4 - \lambda}{24}\delta_{m-1} + \frac{8 + \lambda}{12}\delta_m + \frac{4 - \lambda}{24}\delta_{m+1} \quad (1.29)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{1}{2h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (1.30)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{2 + \lambda}{2h^2}\delta_{m-1} - \frac{2 + \lambda}{h^2}\delta_m + \frac{2 + \lambda}{2h^2}\delta_{m+1} \quad (1.31)$$

biçiminde yazılabilir.

1.5 Advection Diffusion Denklemi ve Test Problemleri

Advection diffusion (AD) denklemi birçok fiziksel ve kimyasal olay için temeldir. Dolayısıyla bilimin çoğu branşındaki problemler AD denklemi ile modellenenebilir (Karur and Ramachandran, 1995). Özellikle, atmosferdeki kirleticilerin uzun mesafelere taşınması ve dağılımı (Zlatev et.al., 1984), birden fazla tepkisel kimyasalın taşınması (Hornberger and Wiberg, 2005), akışkanlar dinamiği (Chatwin and Allen, 1985), ısı ve kütle transferi (Heryudono and Driscoll, 2007), yeraltı suyu içinde çözünmüş tuzların dağılımı (Guvanasen and Volker, 1983), atmosferik izlerin dağılımı ya da gözenekli bir ortam aracılığıyla çürüten radyonükleotitlerin uzak alan ulaşımı (Kumar, 1983), gibi birçok evrim olaylarında meydana gelen adveksiyon difüzyon süreçlerinin modellenmesinde kullanılan önemli diferensiyel denklemlerden birisidir.

α ve μ pozitif parametreler olmak üzere kaynak terimi olmayan tek boyutlu bir AD denklemi matematiksel formül olarak;

$$U(x, 0) = f(x) \quad (1.32)$$

başlangıç şartı

$$U(0, t) = U_0 \quad (1.33)$$

$$U(L, t) = U_N \quad (1.34)$$

sınır şartları ile

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{\partial U}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < L, 0 < t \leq T \quad (1.35)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

- t ve x alt indisleri sırasıyla zamana ve konuma göre türevleri,
- $\mu > 0$ difüzyon katsayısını,
- $\alpha(x, t) > 0$ su akış hızını,
- $U(x, t)$ konsantrasyonu,

- L kanalın uzunluğunu göstermektedir.

Ayrıca $f(x)$, U_0 ve U_N önceden tanımlanmış fonksiyonlar olup ileriki bölümlerde değerleri verilecektir.

Başlangıç ve sınır şartlarının karışık olması ve advection teriminin baskın olmasından dolayı AD denkleminin analitik çözümünün bulunması kolay değildir. Bu nedenle AD denklemini çözmek için çeşitli nümerik metotlar geliştirilmiştir. Bu nümerik metotların birçoğunda AD denkleminin sayısal çözümleri için spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Pepper ile arkadaşları (1979) ve Okamoto ile arkadaşları (1998) tek boyutlu bir AD denkleminin sayısal çözümünü quasi -Lagrange kübik spline metodu kullanarak araştırmışlardır. Ahmet (2000) ile Ahmad ve Kothiyari (2001) tek boyutlu AD denklemini, adveksiyon terimi için kübik spline interpolasyonu, difüzyon terimi için Crank Nicolson yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Gardner ve Dağ (1994) AD denklemini çözmek için kübik B-spline galerkin metodunu kullanmışlardır. Ayrıca kübik B-spline kolokeyşin metodu da AD denkleminin sayısal çözümü için önerilmiştir (Goh et.al.,2010,2012). (Dağ et.al.,2006) adlı çalışmada AD denkleminin sayısal çözümü için en küçük kareler B-spline sonlu elemanlar metodunu kullanmışlardır. Kapoor ile Dhawan (2010) ve Dhawan ile arkadaşları (2011,2012) AD denkleminin sayısal çözümünü kübik/kuadratik B-spline en küçük kareler sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yapmışlardır. Kuadratik ve kübik B-spline taylor/galerkin metotları ile denklemin sayısal çözümü (Dağ et.al.,2011) adlı çalışmada verilmiştir.

1.5.1 Birinci test problemi

(1.35) formundaki AD denkleminde $\mu = 0$ alınrsa denklemin tam çözümü

$$U(x, t) = 10 \exp \left(-\frac{1}{2\rho^2}(x - x_0 - \alpha t)^2 \right), \quad 0 < x < L \quad (1.36)$$

olarak verilebilir. Burada ρ standart sapmayı göstermektedir. Analitik çözümde $t = 0$ alındığında ise

$$U(x, 0) = 10 \exp \left(-\frac{1}{2\rho^2}(x - x_0)^2 \right) \quad (1.37)$$

başlangıç şartı elde edilir. Sınır şartları ise

$$U(0, t) = U_0, \quad U(L, t) = U_N, \quad t > 0 \quad (1.38)$$

olarak verilebilir.

Bu çözüm fiziksel olarak L uzunluğundaki bir kanalda başlangıç anında tepe noktası $x = x_0$ noktasına gelecek şekilde yerleştirilen bir dalganın zamanla sağa doğru hareketini modellemektedir.

1.5.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde hem adveksiyonun hemde difüzyonun akış üzerindeki fiziksel etkisi modellenmektedir. Bu test probleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\alpha x}{\mu} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right), \quad 0 < x < L \quad (1.39)$$

olarak alınmaktadır. İkinci test probleminde başlangıç şartı

$$U(x, 0) = 0 \quad (1.40)$$

ve sınır şartı

$$U(0, t) = U_0, \quad U(L, t) = U_N, \quad t > 0 \quad (1.41)$$

olarak kullanılmaktadır.

Bu problemin çözümü ile yeteri kadar uzun bir kanaldaki akış incelenmektedir.

1.5 3. Üçüncü test problemi

(1.35) formundaki AD denkleminde $\alpha = 0$ alındığında denklemin tam çözümü

$$U(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\mu\pi^2 t), \quad 0 < x < L \quad (1.42)$$

olarak verilmektedir. Analitik çözümde $t = 0$ seçildiğinde ise başlangıç şartı olarak

$$U(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (1.43)$$

elde edilir. Bu problem için sınır şartı da birinci test problemine benzer olarak

$$U(0, t) = U_0, \quad U(L, t) = U_N, \quad t > 0 \quad (1.44)$$

şeklindedir.

Bu test probleminin çözümünde zamanla L uzunluğuna sahip bir çubuktaki ısı yayılımı modellenmektedir.

BÖLÜM 2

KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİ

Bu bölümde, AD denkleminin kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak kolokeyşin yöntemi ile sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir.

2.1 Metodun Uygulanması

AD denkleminin birinci bölümde

$$U_t + \alpha U_x - \mu U_{xx} = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

formunda verilmiştir. Burada α ve μ pozitif parametreler olmak üzere AD denkleminin için sınır şartları

$$U(a, t) = U_0, \quad U(b, t) = U_N, \quad (2.2)$$

ve başlangıç şartı ise

$$U(x, 0) = f(x) \quad (2.3)$$

olarak tanımlanmıştır. (2.1) denkleminin Crank-Nicolson yöntemi uygulanırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{\alpha U_x^{n+1} + \alpha U_x^n}{2} - \frac{\mu U_{xx}^{n+1} + \mu U_{xx}^n}{2} = 0 \quad (2.4)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$U^{n+1} + \frac{\alpha \Delta t}{2} U_x^{n+1} - \frac{\mu \Delta t}{2} U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\alpha \Delta t}{2} U_x^n + \frac{\mu \Delta t}{2} U_{xx}^n \quad (2.5)$$

denkleminin ulaşılır. (2.5) denkleminde

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (2.6)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (2.7)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (2.8)$$

eşitlikleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $m = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{2} \frac{3}{h} - \frac{\mu\Delta t}{2} \frac{6}{h^2}\right) \delta_{m-1}^{n+1} + \left(4 + 2\frac{\mu\Delta t}{2} \frac{6}{h^2}\right) \delta_m^{n+1} \\
& + \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2} \frac{3}{h} - \frac{\mu\Delta t}{2} \frac{6}{h^2}\right) \delta_{m+1}^{n+1} = \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2} \frac{3}{h} + \frac{\mu\Delta t}{2} \frac{6}{h^2}\right) \delta_{m-1}^n \\
& + \left(4 - 2\frac{\mu\Delta t}{2} \frac{6}{h^2}\right) \delta_m^n + \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{2} \frac{3}{h} + \frac{\mu\Delta t}{2} \frac{6}{h^2}\right) \delta_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.9) denklemi basit olarak

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 - \frac{3\alpha\Delta t}{2h} - \frac{3\mu\Delta t}{h^2}, & \beta_4 &= 1 + \frac{3\alpha\Delta t}{2h} + \frac{3\mu\Delta t}{h^2} \\
\beta_2 &= 4 + \frac{6\mu\Delta t}{h^2}, & \beta_5 &= 4 - \frac{6\mu\Delta t}{h^2} \\
\beta_3 &= 1 + \frac{3\alpha\Delta t}{2h} - \frac{3\mu\Delta t}{h^2}, & \beta_6 &= 1 - \frac{3\alpha\Delta t}{2h} + \frac{3\mu\Delta t}{h^2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\beta_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_m^{n+1} + \beta_3 \delta_{m+1}^{n+1} = \beta_4 \delta_{m-1}^n + \beta_5 \delta_m^n + \beta_6 \delta_{m+1}^n, \quad m = 0, 1, \dots, N \tag{2.10}$$

formunda yazılabilir. Bu sistem $N + 3$ bilinmeyen $N + 1$ lineer denklemden oluşmaktadır. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısını eşitlemek için δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri sınır koşullarının kullanılmasıyla yok edilerek $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 3 bandlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bunun için öncelikle (2.2) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$U(a, t) = \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = U_0$$

$$U(b, t) = \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = U_N$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\delta_{-1} = U_0 - 4\delta_0 - \delta_1 \tag{2.11}$$

$$\delta_{N+1} = U_N - \delta_{N-1} - 4\delta_N \tag{2.12}$$

formunda yazılır. (2.10) denklem sisteminde ilk ve son denklem

$$F_1 = \beta_4 \delta_{-1}^n + \beta_5 \delta_0^n + \beta_6 \delta_1^n$$

$$F_{N+1} = \beta_4 \delta_{N-1}^n + \beta_5 \delta_N^n + \beta_6 \delta_{N+1}^n$$

olmak üzere $m = 0$ için

$$\beta_1 \delta_{-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_0^{n+1} + \beta_3 \delta_1^{n+1} = F_1 \tag{2.13}$$

sistemi çözümlenerek elde edilebilir. Bölünme noktalarında

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, \dots, N$$

olduğundan (2.16) açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0 = f(x_0) \\ U(x_1, 0) &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 = f(x_1) \\ &\vdots \\ U(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2}^0 + 4\delta_{N-1}^0 + \delta_N^0 = f(x_{N-1}) \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 = f(x_N) \end{aligned} \tag{2.17}$$

elde edilir. Böylece $N + 3$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan lineer denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminde δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri yok edilirse, $N + 1$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan bir karesel sistem elde edilir. Bu sistemin çözümü Thomas algoritması ile yapılır. Bunun için (2.3) başlangıç şartından elde edilen

$$\begin{aligned} U'(a, 0) &= f'(a) \\ U'(b, 0) &= f'(b) \end{aligned}$$

sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{3}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) &= f'(a) \Rightarrow \delta_{-1}^0 = \delta_1^0 - \frac{h}{3}f'(a) \\ \frac{3}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) &= f'(b) \Rightarrow \delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0 + \frac{h}{3}f'(b) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler (2.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X^0 = \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} f(x_0) + \frac{h}{3}f'(a) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) - \frac{h}{3}f'(b) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$KX^0 = H \quad (2.18)$$

denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde üç bantlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur. Bu sistemde kolaylıkla çözülür.

2.2 Test Problemleri

Lineer AD denkleminin sayısal çözümü için verilen nümerik metodun doğruluğu üç problemle test edilmiştir. Sayısal çözümlerle analitik çözümleri karşılaştırırken

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j| \quad (2.19)$$

L_∞ maksimum hata normu kullanılacaktır.

2.2.1 Birinci test problemi

Birinci test problemi için (1.36) denkleminde $\alpha = 0.5$ ve $\mu = 0$ seçimleri yapılırsa AD denkleminin

$$U(x, t) = 10 \exp\left(-\frac{1}{2\rho^2}(x - x_0 - \frac{t}{2})^2\right)$$

şeklinde verilen analitik çözümüne ulaşılır. Analitik çözümde $t = 0$ alındığında ise

$$U(x, 0) = 10 \exp\left(-\frac{1}{2\rho^2}(x - x_0)^2\right)$$

başlangıç şartı elde edilir. Sınır şartları (1.38) eşitliğinde $U_0 = U_N = 0$ alınarak

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

şeklinde kullanılmıştır.

İlk test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için $x_0 = 2000$ ve $\rho = 264$ parametreleri ile birlikte $L = 9000$ seçimi yapılarak $[0, 9000]$ konum aralığı için işlemler yapılmıştır. Çeşitli konum ve zaman artımı için program $t = 9600$ zamanına kadar çalıştırılarak bulunan maksimum hata norm değerleri ise Tablo 2.1 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman artımı değerlerinin en düşük alındığı yerde, en büyük hatanın ise konum ve zaman artımı değerlerinin en büyük alındığı yerde olduğu görülebilir.

Tablo 2.1: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normları

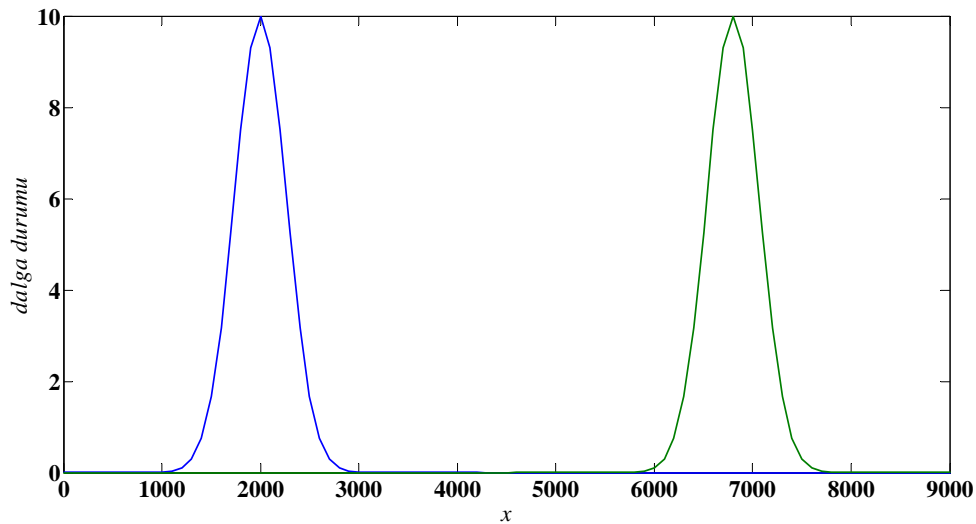
h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞
100	100	0.82672	50	100	0.76949	25	100	0.76226	10	100	0.76496
	50	0.32577		50	0.19756		50	0.19012		50	0.18977
	25	0.18411		25	0.05456		25	0.04750		25	0.04705
	10	0.14377		10	0.01485		10	0.00795		10	0.00751

$t = 0$ ve $t = 9600$ anındaki dalgaların durumu Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 0$ anında dalganın tepe noktası $x = 2000$ de iken, $t = 9600$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + \frac{t}{2} = 2000 + 4800 = 6800$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.

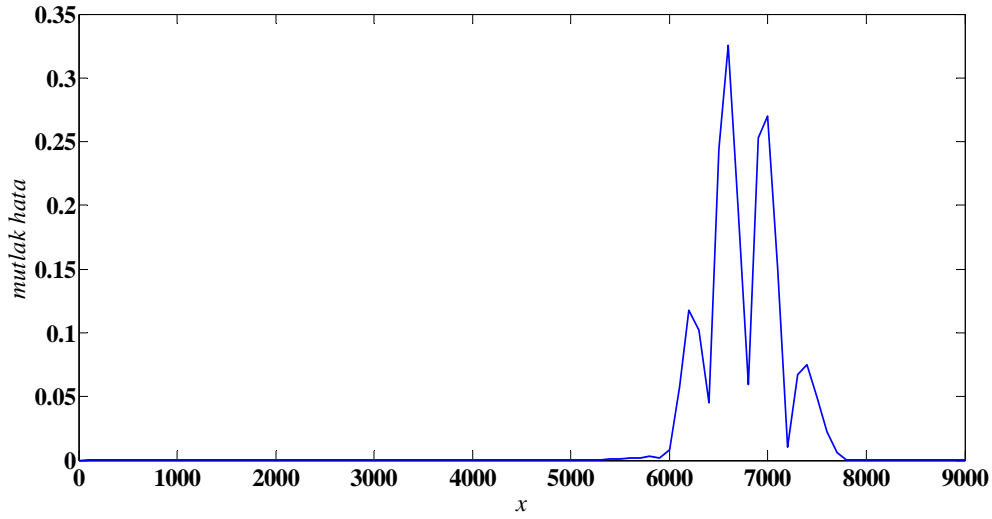
Şekil 2.1 : Dalgaların durumu



$h = 100$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 9000$ için $t = 9600$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik Şekil 2.2 de çizilmiştir.

Grafik incelendiğinde maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir. Ayrıca maksimum hatanın Tablo 2.1 de $h = 100$, $\Delta t = 50$ için verilen değerler ile tutarlı olduğuda görülebilir.

Şekil 2.2: Mutlak hata



2.2.2 İkinci test problemi

Bu test problemi için AD denkleminin tam çözümü (1.39) da verildiği gibi

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\alpha x}{\mu} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right) \quad (2.20)$$

formunda kullanılmıştır. Bu test probleminde $L = 200$ seçimiyle $[0, 200]$ konum aralığı olmak üzere başlangıç şartı olarak (1.40) da $f(x) = 0$ seçimiyle

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200 \quad (2.21)$$

eşitliği alınmıştır. Sınır şartı ise (1.41) de $U_0 = 1$ ve $U_N = 0$ seçimiyle

$$U(0, t) = 1, \quad U(200, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.22)$$

olarak belirlenmiştir.

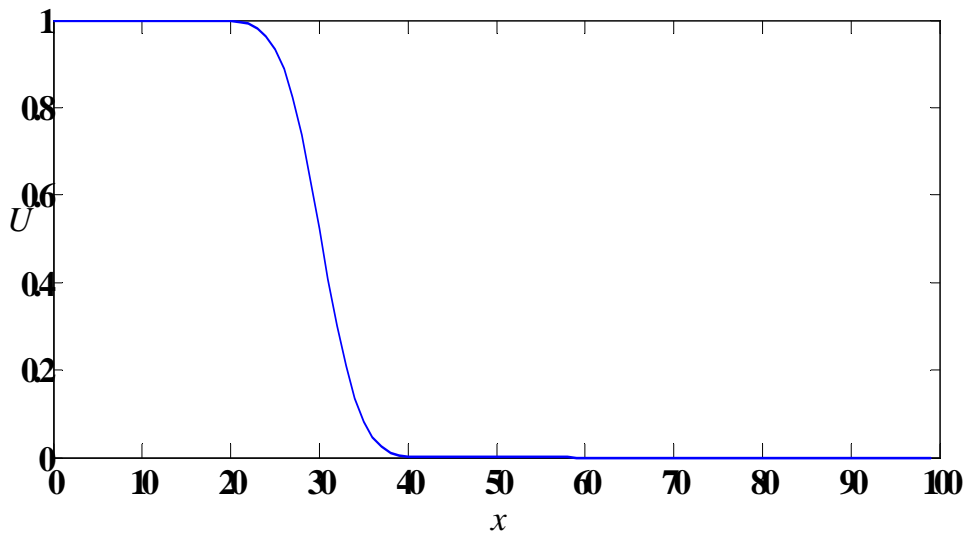
Analitik çözüm için parametreler $\alpha = 0.01$ ve $\mu = 0.002$ olarak seçilerek program farklı konum ve zaman artımı için $t = 3000$ zamanına kadar çalıştırılarak hata normu Tablo 2.2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en küçük hatanın konum ve zaman adımının en küçük olduğu durumda elde edildiği ve oldukça düşük olduğu görülmektedir.

Tablo 2.2: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki L_∞ hata normu

h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞
1	50	0.03466	0.5	50	0.03494	0.25	50	0.03519	0.1	50	0.03524
	25	0.01586		25	0.01585		25	0.01599		25	0.01604
	10	0.00665		10	0.00595		10	0.00600		10	0.00604
	5	0.00400		5	0.00296		5	0.00292		5	0.00295
	1	0.00215		1	0.00086		1	0.00059		1	0.00057

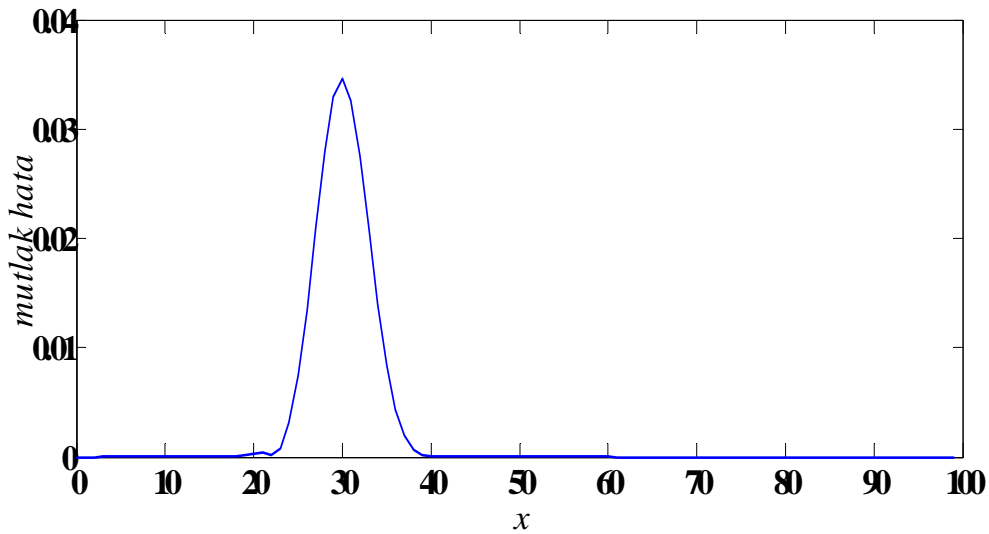
$t = 3000$ anındaki $[0, 100]$ konum aralığındaki analitik çözüm görsel olarak Şekil 2.3 de gösterilmiştir.

Şekil 2.3: $t = 3000$ anındaki analitik çözüm



Şekil incelendiğinde yaklaşık $x = 20$ olana kadar analitik değerini 1 değerini aldığı ve sonrasında yaklaşık $x = 40$ olana kadar monoton olarak azaldığı ve sonrasında ise sıfır değerini aldığı görülebilir. Grafik bu yüzden sadece $[0, 100]$ aralığında çizilmiş, konum aralığının tümünde yani $[0, 200]$ aralığında çizilmemiştir.

Şekil 2.4: Mutlak hata



$h = 1$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 3000$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik Şekil 2.4 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın $x = 30$ civarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir. Hatanın analitik çözümün değiştiği bölge olan $20 \leq x \leq 40$ aralığında olduğu görülebilir. Ayrıca maksimum hatanın Tablo 2.2 de $h = 1$, $\Delta t = 50$ için verilen L_∞ hatası ile uyumlu olduğu görülmektedir.

2.2.3 Üçüncü test problemi

Bu test problemi için AD denkleminin tam çözümü (1.42) çözümünde $\mu = 1$ alınarak

$$U(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t) \quad (2.23)$$

şekliyle kullanılmıştır. Analitik çözümde konum aralığı $[0, 1]$ olmak üzere $t = 0$ seçilerek

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.24)$$

formundaki başlangıç şartı ve sınır şartı olarakta (1.44) eşitliğinde $U_0 = U_N = 0$ alınarak

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.25)$$

şeklinde belirlenmiştir.

Bu test probleminde program farklı konum ve zaman artımlarında $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılarak hata normu Tablo 2.3 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın birinci ve ikinci test probleminde olduğu gibi konum ve zaman adımının en düşük olduğu durumda elde edildiği görülebilir.

Tablo 2.3: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki L_∞ hata normu

h	Δt	$L_\infty \times 10^5$	h	Δt	$L_\infty \times 10^5$
0.1	0.1	3.36477	0.025	0.1	3.17220
	0.05	1.32022		0.05	0.99371
	0.025	0.64523		0.025	0.28016
	0.01	0.44358		0.01	0.06737
0.05	0.1	3.21211	0.01	0.1	3.16090
	0.05	1.06097		0.05	0.97470
	0.025	0.35527		0.025	0.25894
	0.01	0.14474		0.01	0.04551

$t = 1$ anındaki $[0, 1]$ konum aralığındaki analitik çözüm görsel olarak Şekil 2.5 de gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde aralığın baş ve son noktalarında analitik değerlerin sıfır olduğu, aralığın ortalarında ise en büyük değeri aldığı görülebilir.

BÖLÜM 3

GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİ

Bu bölümde, AD denkleminin genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak kolokeyşin yöntemi ile sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir.

3.1 Metodun Uygulanması

İkinci bölümde bulunan

$$U^{n+1} + \frac{\alpha\Delta t}{2}U_x^{n+1} - \frac{\mu\Delta t}{2}U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{\alpha\Delta t}{2}U_x^n + \frac{\mu\Delta t}{2}U_{xx}^n$$

formundaki (2.5) denkleminde

$$U_m = U(x_m) = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m-1} + \frac{8+\lambda}{12}\delta_m + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m+1} \quad (3.1)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{1}{2h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (3.2)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{2+\lambda}{2h^2}\delta_{m-1} - \frac{2+\lambda}{h^2}\delta_m + \frac{2+\lambda}{2h^2}\delta_{m+1} \quad (3.3)$$

formundaki genişletilmiş kübik B-spline eşitlikleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{4-\lambda}{24} - \frac{\alpha\Delta t}{4h} - \frac{\mu\Delta t(2+\lambda)}{4h^2}, & \beta_4 &= \frac{4-\lambda}{24} + \frac{\alpha\Delta t}{4h} + \frac{\mu\Delta t(2+\lambda)}{4h^2} \\ \beta_2 &= \frac{8+\lambda}{12} + \frac{\mu\Delta t(2+\lambda)}{2h^2}, & \beta_5 &= \frac{8+\lambda}{12} - \frac{\mu\Delta t(2+\lambda)}{2h^2} \\ \beta_3 &= \frac{4-\lambda}{24} + \frac{\alpha\Delta t}{4h} - \frac{\mu\Delta t(2+\lambda)}{4h^2}, & \beta_6 &= \frac{4-\lambda}{24} - \frac{\alpha\Delta t}{4h} + \frac{\mu\Delta t(2+\lambda)}{4h^2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\beta_1\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_2\delta_m^{n+1} + \beta_3\delta_{m+1}^{n+1} = \beta_4\delta_{m-1}^n + \beta_5\delta_m^n + \beta_6\delta_{m+1}^n, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.4)$$

denklemleri bulunur. Bu sistem $N+3$ bilinmeyenli $N+1$ lineer denklemden oluşmaktadır. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısını eşitlemek için δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri sınır koşullarının kullanılmasıyla yok edilerek $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu 3 bandlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

İkinci bölümde izlenen yola benzer şekilde sınır koşulları

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{-1} + \frac{8+\lambda}{12}\delta_0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_1 = U_0 \\ U(b, t) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-1} + \frac{8+\lambda}{12}\delta_N + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N+1} = U_N \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\delta_{-1} = \frac{24}{4-\lambda}\left(U_0 - \frac{8+\lambda}{12}\delta_0 - \frac{4-\lambda}{24}\delta_1\right) \quad (3.5)$$

$$\delta_{N+1} = \frac{24}{4-\lambda}\left(U_N - \frac{8+\lambda}{12}\delta_N - \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-1}\right) \quad (3.6)$$

olarak yazılır ve bu değerler (3.4) denklem sisteminde yerine yazılarak gerekli yok etme işlemi gerçekleştirilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_4\delta_{-1}^n + \beta_5\delta_0^n + \beta_6\delta_1^n \\ F_{N+1} &= \beta_4\delta_{m-1}^n + \beta_5\delta_m^n + \beta_6\delta_{m+1}^n \end{aligned}$$

olmak üzere (3.4) denklem sisteminde $m = 0$ için

$$\beta_1\delta_{-1}^{n+1} + \beta_2\delta_0^{n+1} + \beta_3\delta_1^{n+1} = F_1 \quad (3.7)$$

ve $m = N$ için

$$\beta_1\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_2\delta_N^{n+1} + \beta_3\delta_{N+1}^{n+1} = F_{N+1} \quad (3.8)$$

eşitlikleri bilindiğinden (3.5-3.6) eşitlikleri (3.7) ve (3.8) denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.7) denklemi

$$\left(\beta_2 - 2\beta_1\frac{8+\lambda}{4-\lambda}\right)\delta_0^{n+1} + (\beta_3 - \beta_1)\delta_1^{n+1} = F_1 - \frac{24}{4-\lambda}\beta_1U_0$$

ve (3.8) denklemi

$$(\beta_1 - \beta_3)\delta_{N-1}^{n+1} + \left(\beta_2 - 2\beta_3\frac{8+\lambda}{4-\lambda}\right)\delta_N^{n+1} = F_{N+1} - \frac{24}{4-\lambda}\beta_3U_N$$

şeklinde yazılır. İkinci bölümdeki duruma benzer olarak (3.4) denklem sistemi

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \beta_2 - 2\beta_1 \frac{8+\lambda}{4-\lambda} & \beta_3 - \beta_1 & & & & & & \\ & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & & \beta_3 & \\ & & & & \beta_1 - \beta_3 & \beta_2 - 2\beta_3 \frac{8+\lambda}{4-\lambda} & & \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & & & & & \\ & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & & & & \\ & & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & & \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\frac{24}{4-\lambda}\beta_1 U_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{24}{4-\lambda}\beta_3 U_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$AX^{n+1} = BX^n + C \quad (3.9)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. (3.9) sisteminde Thomas algoritması kullanıldığında X^{n+1} yaklaşımı elde edilir.

Başlangıç Durumu

X^{n+1} bilinmeyen vektörünün bulunabilmesi için X^0 başlangıç vektörü gerekmektedir. Başlangıç vektörü

$$U_m^0 = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_m^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m+1}^0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.10)$$

sistemi çözümlenerek elde edilebilir. Bu sistem $N+3$ bilinmeyenli $N+1$ lineer denklemden oluşmaktadır. Bölünme noktalarında

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, \dots, N$$

olduğundan (3.10) eşitliği açık olarak yazılırsa

$$U(x_0, 0) = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_0^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_1^0 = f(x_0)$$

$$\begin{aligned}
U(x_1, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_0^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_1^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_2^0 = f(x_1) \\
&\vdots \\
U(x_{N-1}, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-2}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_{N-1}^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_N^0 = f(x_{N-1}) \\
U(x_N, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_N^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N+1}^0 = f(x_N)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Böylece $N + 3$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan lineer denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminde δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri yok edilirse, $N + 1$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan bir karesel sistem elde edilir. Bu sistemin çözümünde Thomas algoritması ile yapılır. Bunun için (2.3) başlangıç şartından

$$\begin{aligned}
U'(a, 0) &= f'(a) \\
U'(b, 0) &= f'(b)
\end{aligned}$$

sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{2}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) &= f'(a) \Rightarrow \delta_{-1}^0 = \delta_1^0 - \frac{h}{2}f'(a) \\
\frac{2}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) &= f'(b) \Rightarrow \delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0 + \frac{h}{2}f'(b)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} & & & & & \\ \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} & & & & \\ & \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} & \\ & & & & \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} \end{bmatrix}, \\
X^0 &= \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} f(x_0) + \frac{h}{2}f'(a)\frac{4-\lambda}{24} \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) - \frac{h}{2}f'(b)\frac{4-\lambda}{24} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$KX^0 = H \quad (3.12)$$

denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde üç bantlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur. Bu sistemde kolaylıkla çözülebilir.

3.2 Test Problemleri

Lineer AD denkleminin sayısal çözümü için kullanılan genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodunun doğruluğu üç problemle kontrol edilmiştir. Sayısal çözümlerle analitik çözümleri karşılaştırırken ise

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j| \quad (3.13)$$

L_∞ maksimum hata normu kullanılmıştır.

3.2.1 Birinci test problemi

Bu alt bölümde kübik B-spline kolokeyşin yöntemi için verilen ilk test probleminde olduğu gibi birinci test problemi için

$$U(x, t) = 10 \exp\left(-\frac{1}{2\rho^2}\left(x - x_0 - \frac{t}{2}\right)^2\right)$$

analitik çözümü ve

$$U(x, 0) = 10 \exp\left(-\frac{1}{2\rho^2}(x - x_0)^2\right)$$

başlangıç şartı ile birlikte

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

sınır şartı kullanılmıştır.

Bu bölümün ilk test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için $x_0 = 2000$ ve $\rho = 264$ parametreleri ile birlikte $[0, 9000]$ konum aralığı kullanılmıştır. Genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarda serbest parametre olan λ değerinin belirlenmesi çok önemlidir. Bunun için program farklı λ değerleri için çalıştırılarak en düşük hatayı veren en iyi λ değeri belirlenmeye çalışılmıştır. Sonuç olarak çeşitli konum ve zaman artımı için program $t = 9600$ zamanına kadar çalıştırılarak

$\lambda = 0$ ve en iyi λ değeri için bulunan maksimum hata norm değerleri Tablo 3.1 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman artımı değerlerinin en düşük alındığı yerde olduğu görülmektedir. Ayrıca λ değerinin hatayı oldukça düşürdüğü söylenebilir.

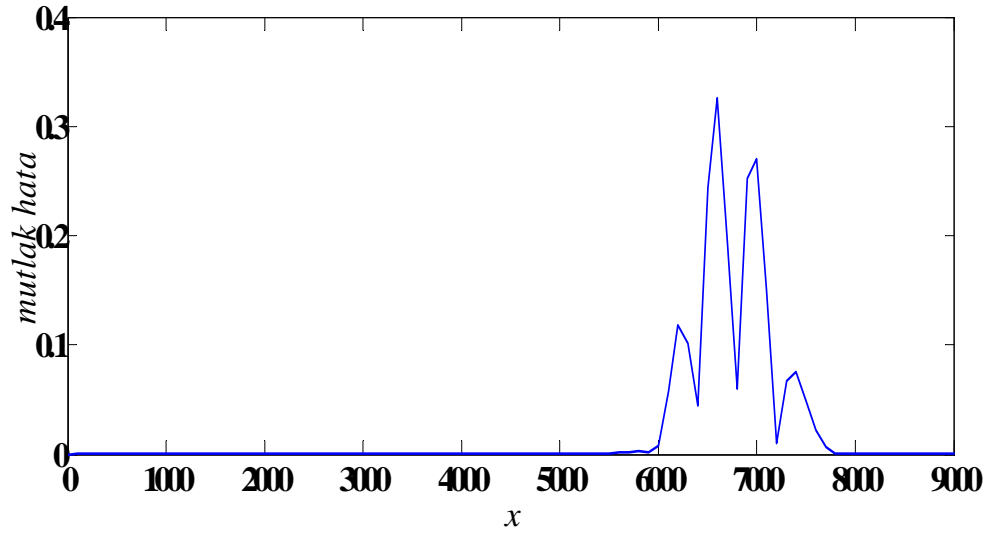
Tablo 3.1: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normu

h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞	h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞
100	100	0.82672	0.03740 $\lambda = -0.5357$	25	100	0.76226	0.69712 $\lambda = -0.700$
	50	0.32577	0.05047 $\lambda = -0.1760$		50	0.19012	0.14697 $\lambda = -0.700$
	25	0.18411	0.05394 $\lambda = -0.0865$		25	0.04750	0.00013 $\lambda = -0.5023$
	10	0.14377	0.05492 $\lambda = -0.0615$		10	0.00795	0.00018 $\lambda = -0.083$
50	100	0.76949	0.49359 $\lambda = -0.7000$	10	100	0.76496	0.75427 $\lambda = -0.7000$
	50	0.19756	0.00220 $\lambda = -0.5090$		50	0.18977	0.17900 $\lambda = -0.7000$
	25	0.05456	0.00290 $\lambda = -0.1368$		25	0.04705	0.03648 $\lambda = -0.7000$
	10	0.01485	0.00311 $\lambda = -0.0326$		10	0.00751	3.49×10^{-6} ($\lambda = -0.5004$)

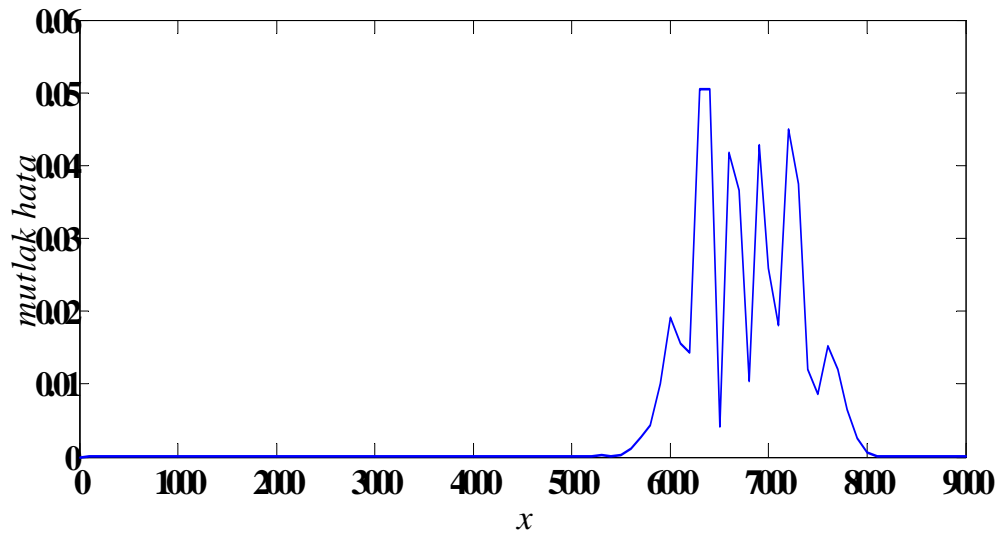
$h = 100$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 9000$ için $t = 9600$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = 0$ için Şekil 3.1 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir. Şekildeki

maksimum hatanın Tablo 3.1 de $h = 100$, $\Delta t = 50$ ve $\lambda = 0$ için verilen hata normu ile aynı olduğuda görülmektedir.

Şekil 3.1: $\lambda = 0$ için mutlak hata



Şekil 3.2: $\lambda = -0.176$ için mutlak hata



Şekil 3.2 de ise $\lambda = -0.176$, $h = 100$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 9000$ için $t = 9600$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini tem-

sil eden grafik çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın dalganın ortalarında ve Tablo 3.1 ile uyumlu olduğu görülebilir. Maksimum hata aralığın uç noktalarında olmadığından sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı da şekle bakılarak söylenebilir.

Şekil 3.1 ve 3.2 incelendiğinde λ nın -0.176 seçimi yapıldığında maksimum hatada bir azalmanın olduğu açıkça görülmektedir.

3.2.2 İkinci test problemi

Bu test probleminde AD denkleminin tam çözümü olan ve ikinci bölümün test probleminde de kullanılan

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\alpha x}{\mu} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right)$$

eşitliği kullanılmıştır. Bu test problemi için konum aralığı $[0, 200]$ olmak üzere başlangıç ve sınır şartları ise sırasıyla

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200$$

ve

$$U(0, t) = 1, \quad U(200, t) = 0, \quad t > 0$$

olarak belirlenmiştir.

Analitik çözüm için parametreler $\alpha = 0.01$ ve $\mu = 0.002$ olarak seçilerek program farklı konum ve zaman artımı için $t = 3000$ zamanına kadar çalıştırılarak $\lambda = 0$ ve en iyi λ değeri için bulunan maksimum hata norm değerleri Tablo 3.2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman adımının en düşük olduğu durumda elde edildiği görülebilir. Ayrıca λ değerinin değiştirilmesinin hatayı azda olsa düşürdüğü görülebilir.

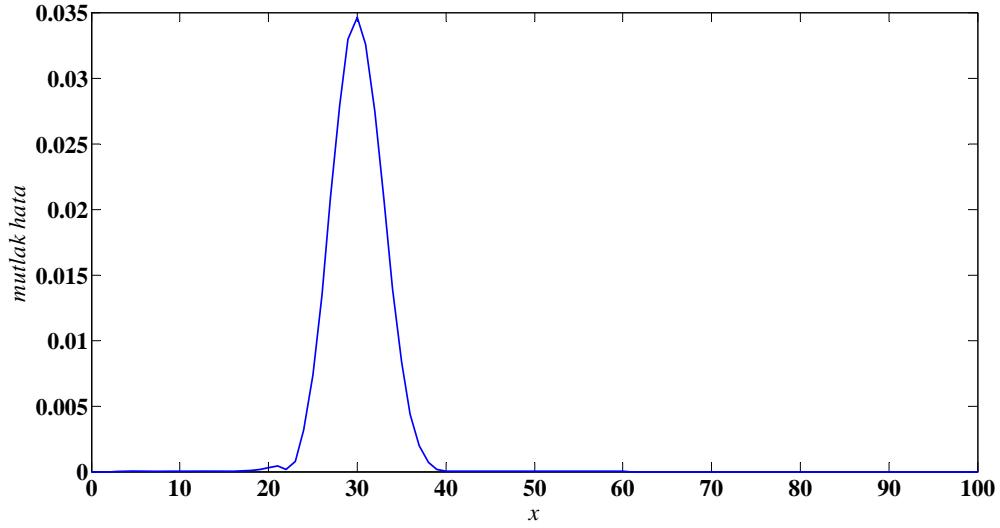
Tablo 3.2: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normu

h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞	h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞
1	50	0.03466	0.03430 $\lambda = 0.062$	0.25	50	0.03519	0.03390 $\lambda = 0.10$
	25	0.01586	0.01580 $\lambda = -0.047$		25	0.01599	0.01565 $\lambda = 0.038$
	10	0.00665	0.00590 $\lambda = -0.042$		10	0.00600	0.00594 $\lambda = 0.008$
	5	0.00399	0.00280 $\lambda = -0.041$		5	0.00292	0.00291 $\lambda = 0.002$
	1	0.00215	0.00120 $\lambda = -0.02$		1	0.00059	0.00057 $\lambda = -0.002$
0.5	50	0.03490	0.03410 $\lambda = 0.10$	0.1	50	0.03524	0.03385 $\lambda = 0.100$
	25	0.01585	0.01568 $\lambda = 0.024$		25	0.01604	0.01563 $\lambda = 0.039$
	10	0.00595	0.00590 $\lambda = 0.002$		10	0.00604	0.00593 $\lambda = 0.012$
	5	0.00296	0.00290 $\lambda = -0.005$		5	0.00295	0.00291 $\lambda = 0.005$
	1	0.00086	0.00058 $\lambda = -0.008$		1	0.00058	0.00057 $\lambda = 0.001$

$h = 1$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 3000$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = 0$ için Şekil 3.3 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının uç noktalarında olmadığı, dolayısıyla bu test probleminde $\lambda = 0$ için yapılan hesaplamalarda sınır

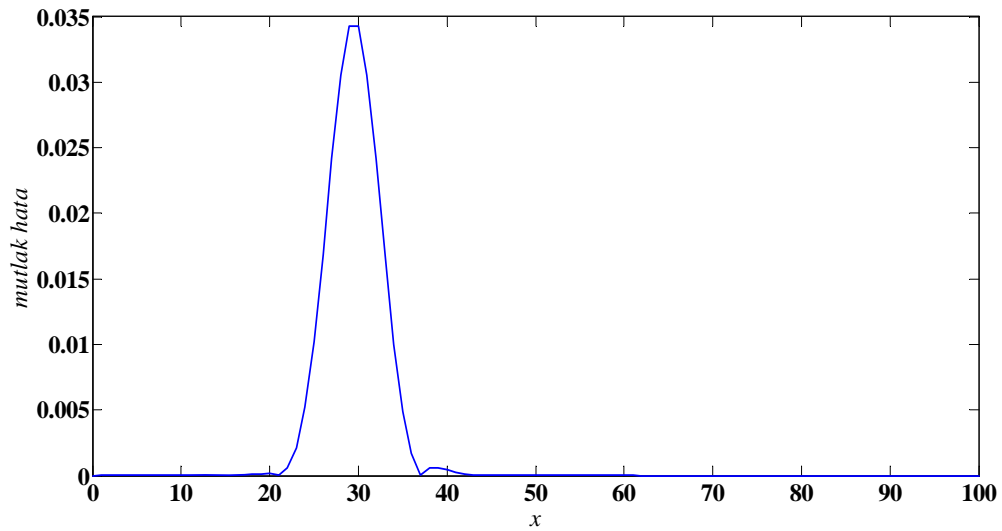
şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 3.3: $\lambda = 0$ için mutlak hata



$h = 1$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 3000$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = 0.062$ için Şekil 3.4 de çizilmiştir.

Şekil 3.4: $\lambda = 0.062$ için mutlak hata



Grafik incelendiğinde maksimum hatanın Şekil 3.3 te olduğu gibi konum aralığının

uç noktalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir. Şekil 3.3 ve 3.4 incelendiğinde λ nın 0.062 seçimi ile maksimum hatada gözle görülür bir azalmanın olmadığı kolaylıkla görülmektedir.

3.2.3 Üçüncü test problemi

Kübik B-spline kolokeyşin metodununun doğruluğunun incelendiği üçüncü test probleminde olduğu gibi AD denkleminin tam çözümü

$$U(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

olarak bu test problemi içinde kullanılmıştır. Bu tam çözüm için konum aralığı $[0, 1]$ olmak üzere başlangıç ve sınır şartları ise sırasıyla

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0$$

şeklinde alınmıştır.

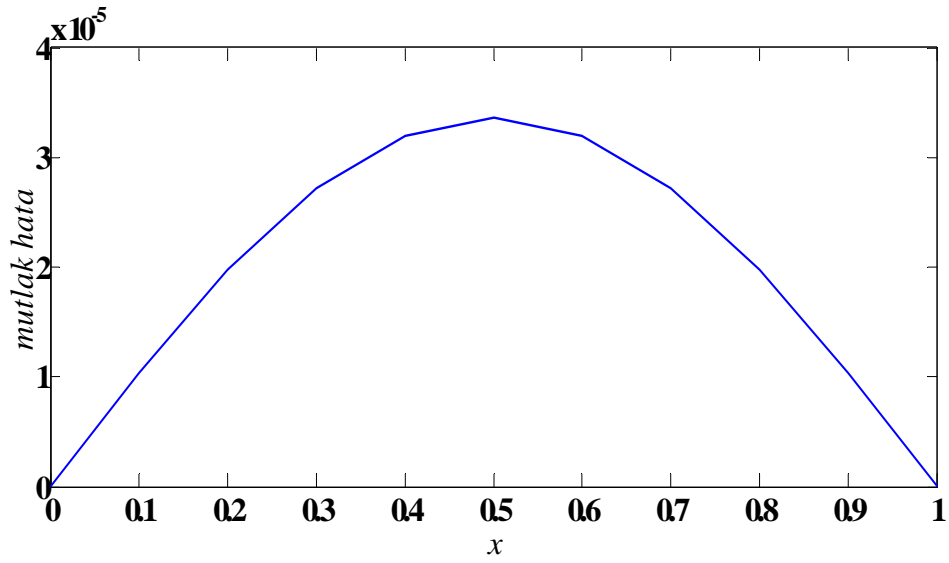
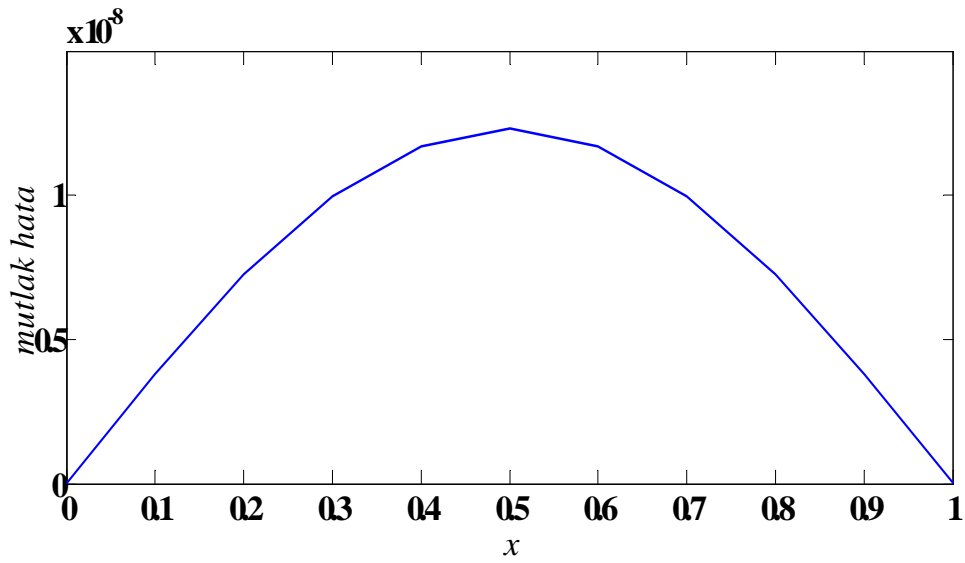
Analitik çözüm için parametreler $\alpha = 0$ ve $\mu = 1$ olarak seçilerek program farklı konum ve zaman artımı için $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılarak $\lambda = 0$ ve en düşük hataya karşılık gelen iyi λ değeri için hata normları Tablo 3.3 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman adımının en düşük olduğu durumda elde edildiği görülebilir. λ nın değiştirilmesi sonucunda bulunan hata normlarının oldukça düşük olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Tablo 3.3: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normu

h	Δt	$L_\infty \times 10^4(\lambda = 0)$	$L_\infty \times 10^7$
0.1	0.1	0.33648	0.12316($\lambda = -0.1644$)
	0.05	0.13202	0.05015($\lambda = -0.0561$)
	0.025	0.06452	0.03041($\lambda = -0.0266$)
	0.01	0.04436	0.06507($\lambda = -0.0181$)
0.05	0.1	0.32121	0.14832($\lambda = -0.152$)
	0.05	0.10610	0.09905($\lambda = -0.0437$)
	0.025	0.03553	0.00254($\lambda = -0.0142$)
	0.01	0.01447	0.09625($\lambda = -0.0057$)
h	Δt	$L_\infty \times 10^4(\lambda = 0)$	$L_\infty \times 10^7$
0.025	0.1	0.31722	0.07841($\lambda = -0.149$)
	0.05	0.09937	0.13451($\lambda = -0.0407$)
	0.025	0.02802	0.03538($\lambda = -0.0111$)
	0.01	0.00674	0.12744($\lambda = -0.0027$)
0.01	0.1	0.31609	0.05370($\lambda = -0.1481$)
	0.05	0.09747	0.03541($\lambda = -0.0398$)
	0.025	0.02589	0.12924($\lambda = -0.0102$)
	0.01	0.00455	0.03479($\lambda = -0.0018$)

$h = \Delta t = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 1$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = 0$ için Şekil 3.5 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

$h = \Delta t = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 1$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = -0.1644$ için Şekil 3.6 da çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 3.5: $\lambda = 0$ için mutlak hataŞekil 3.6: $\lambda = -0.1644$ için mutlak hata

Son iki şekil incelendiğinde λ parametresinin en iyi durum için belirlenmesi sonucunda ilk $\lambda = 0$ durumuna göre hatanın neredeyse 10^{-3} ile çarpıldığı görülebilir.

BÖLÜM 4

KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

Bu bölümde, AD diferensiyel denkleminin kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak galerkin metoduyla sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu üç test problemi için L_∞ hata normu hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

4.1 Metodun Uygulanması

İlk iki bölümde sayısal çözümü araştırılan AD denkleminin Crank-Nicolson yöntemi uygulandığında

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}\alpha(U_x)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}\mu(U_{xx})^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2}\alpha(U_x)^n + \frac{\Delta t}{2}\mu(U_{xx})^n \quad (4.1)$$

elde edilmişti. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (4.1) denkleminin Galerkin metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b w(x) \left(U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}\alpha(U_x)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}\mu(U_{xx})^{n+1} \right) dx \\ & = \int_a^b w(x) \left(U^n - \frac{\Delta t}{2}\alpha(U_x)^n + \frac{\Delta t}{2}\mu(U_{xx})^n \right) dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitliğine ulaşılır. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu ve U , U_x , U_{xx} yerine ϕ_m kübik B-spline fonksiyonları kullanılırsa, (4.2) denkleminin i , j ve k , $m-1$, m , $m+1$, $m+2$ ($m=0, 1, \dots, N-1$) olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}\alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx \right) \right] \delta_j^{n+1} \\ & - \frac{\Delta t}{2}\mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx \right) \right] \delta_j^{n+1} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^n \\ & - \frac{\Delta t}{2}\alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx \right) \delta_j^n + \frac{\Delta t}{2}\mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx \right) \delta_j^n \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak yazılabilir. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları ilk bölümde

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.4)$$

formunda tanımlanmıştır. (4.3) eşitliğindeki integralleri hesaplayabilmek için öncelikle $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq h$ dönüşümü yapılırsa

$$\phi_{m-1}(\xi) = \frac{1}{h^3}(x_{m+1} - x)^3 = \frac{1}{h^3}(x_{m+1} - \xi - x_m)^3 = \frac{1}{h^3}(h - \xi)^3, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3] \\ &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - \xi - x_m) + 3h(x_{m+1} - \xi - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - \xi - x_m)^3] \\ &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1}(\xi) &= \frac{1}{h^3} h^3 + 3h^2(x - x_m) + 3h(x - x_m)^2 - 3(x - x_m)^3 \\ &= \frac{1}{h^3} (h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\phi_{m+2}(\xi) = \frac{1}{h^3}(x - x_{m+4}) = \frac{1}{h^3}\xi^3 \quad (4.8)$$

eşitlikleri bulunur. $\xi = x - x_m$ dönüşümü (4.3) eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi \right) \right] \delta_j^{n+1} \\ &- \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi \right) \right] \delta_j^{n+1} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j^n \\ &- \frac{\Delta t}{2} \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi \right) \delta_j^n + \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi \right) \delta_j^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) sistemindeki integraller $m = 0, 1, \dots, N - 1$ ve $i, j = m - 1, m,$

$m + 1, m + 2$ için (4.5-4.8) spline eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi = \frac{h}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix} \\
 B_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix} \\
 C_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi = \frac{1}{20h} \begin{bmatrix} 24 & -42 & 12 & 6 \\ 198 & -264 & -66 & 132 \\ 132 & -66 & -264 & 198 \\ 6 & 12 & -42 & 24 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

eleman matrisleri bulunur. Eleman matrislerinin uygun şekilde birbirlerine eklenerek düzenlenmesi sonucunda

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere

$$\left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \alpha \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} \mu \mathbf{C} \right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \alpha \mathbf{B} + \frac{\Delta t}{2} \mu \mathbf{C} \right] \boldsymbol{\delta}^n \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) denklem sistemi $(N + 3)$ denklem ve $(N + 3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek bölgenin uç noktalarındaki

$$U(a, t) = U_0$$

$$U(b, t) = U_N$$

sınır şartları kullanılıp δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (4.10) denklem sistemi $(N + 1) \times (N + 1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla kolayca çözülebilir.

AD denkleminin kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümünü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörünün bulunması gereklidir.

Başlangıç durumu

$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$ başlangıç vektörü, AD denklemi için verilen

$$U(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (4.11)$$

başlangıç ve

$$U_x(a, 0) = f'(a) \Rightarrow U_x(x_0, 0) = f'(a) \quad (4.12)$$

$$U_x(b, 0) = f'(b) \Rightarrow U_x(x_N, 0) = f'(b) \quad (4.13)$$

sınır şartları kullanılarak bulunabilir. Bunun için öncelikle

$$U(x_m, 0) = \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 = f(x_m) \quad (4.14)$$

kübik B-spline eşitlikleri kullanılır ve (4.11) eşitliği açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0 = f(x_0) \\ U(x_1, 0) &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 = f(x_1) \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 = f(x_N) \end{aligned} \quad (4.15)$$

sistemine ulaşılır. Açık olarak yazılan (4.15) sistemi $N + 3$ bilinmeyen ve $N + 1$ denklemden oluşmaktadır. (4.12) ve (4.13) sınır şartlarında

$$U_x(x_m, 0) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \quad (4.16)$$

olarak verilen birinci türev için kübik B-spline eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_x(x_0, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) = f'(a) \\ \delta_{-1}^0 &= \delta_1^0 - \frac{h}{3}f'(a) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} U_x(x_N, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) = f'(b), \\ \delta_{N+1}^0 &= \delta_{N-1}^0 + \frac{h}{3}f'(b) \end{aligned} \quad (4.18)$$

formunda alınmıştır. Bu analitik çözümde $t = 0$ seçimiyle

$$U(x, 0) = 10 \exp\left(-\frac{1}{2\rho^2}(x - x_0)^2\right)$$

başlangıç şartı ile birlikte

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

sınır şartı kullanılmıştır.

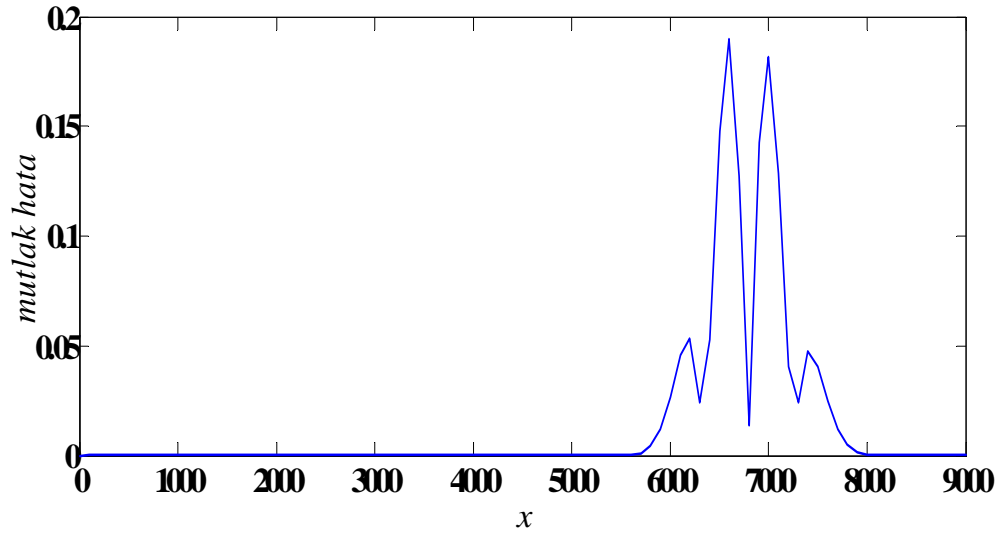
Bu bölümün ilk test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için $x_0 = 2000$ ve $\rho = 264$ parametreleri ile birlikte $[0, 9000]$ konum aralığı kullanılmıştır. Çeşitli konum ve zaman artımı için program $t = 9600$ zamanına kadar çalıştırılarak bulunan maksimum hata norm değerleri Tablo 4.1 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman artımı değerlerinin en düşük alındığı yerde olduğu görülebilir.

Tablo 4.1: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normu

h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞
100	100	0.73387	50	100	0.76178	25	100	0.76178	10	100	0.76495
	50	0.18987		50	0.18963		50	0.18963		50	0.18976
	25	0.04722		25	0.04704		25	0.04704		25	0.04704
	10	0.00766		10	0.00750		10	0.00750		10	0.00750

$h = 100$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 9000$ için $t = 9600$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik Şekil 4.1 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hata sınırlara yakın yerde olmadığından sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 4.1: Mutlak hata



4.2.2 İkinci test problemi

Bu bölümün ikinci test probleminde ise AD denkleminin tam çözümü

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\alpha x}{\mu} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right)$$

olacak şekilde önceki bölümlerdeki ikinci test problemleriyle benzer seçilmiştir. Bu test problemi için konum aralığı $[0, 200]$ olmak üzere;

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = 1, \quad U(200, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartı kullanılmıştır.

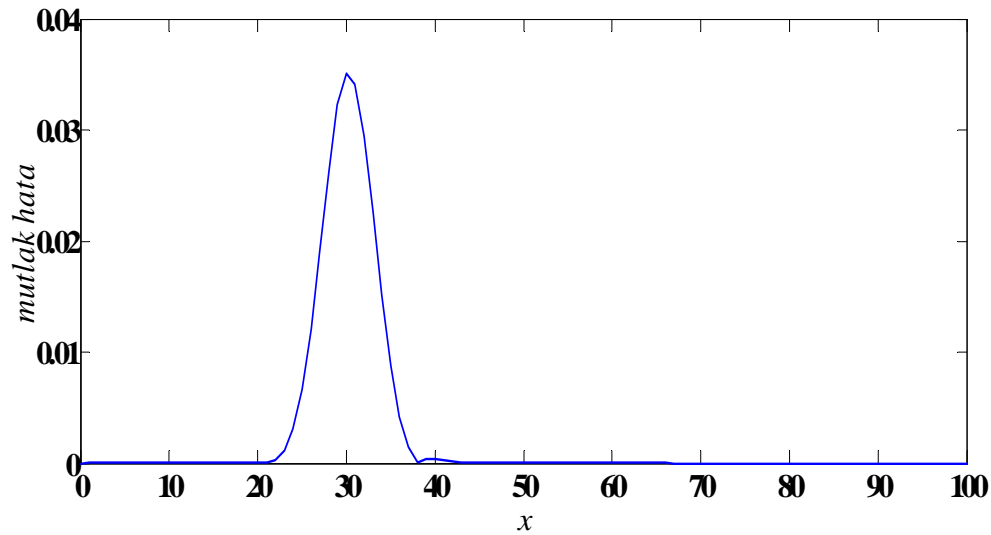
Analitik çözüm için parametreler $\alpha = 0.01$ ve $\mu = 0.002$ olarak seçilerek program farklı konum ve zaman artımı için $t = 3000$ zamanına kadar çalıştırılarak hata normları Tablo 4.2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman adımının en düşük olduğu durumda elde edildiği görülebilir.

Tablo 4.2: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normu

h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞
1	50	0.03513	0.5	50	0.03513	0.25	50	0.03526	0.1	50	0.03525
	25	0.01594		25	0.01603		25	0.01604		25	0.01605
	10	0.00600		10	0.00604		10	0.00604		10	0.00604
	5	0.00294		5	0.00296		5	0.00296		5	0.00296
	1	0.00058		1	0.00058		1	0.00058		1	0.00058

$h = 1$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 3000$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik Şekil 4.2 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde hatanın $20 \leq x \leq 40$ aralığında olduğu, aralığın dışında kalan bölgelerde herhangi bir hata oluşmadığı dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 4.2: Mutlak hata



4.2.3 Üçüncü test problemi

Kübik B-spline galerkin metodunun son test problemi için $\mu = 1$ seçimiyle AD

denkleminin tam çözümü

$$U(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

şeklinde alınmıştır. Bu test probleminde $[0, 1]$ konum aralığı olacak şekilde başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve sınır şartı

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0$$

olarak belirlenmiştir.

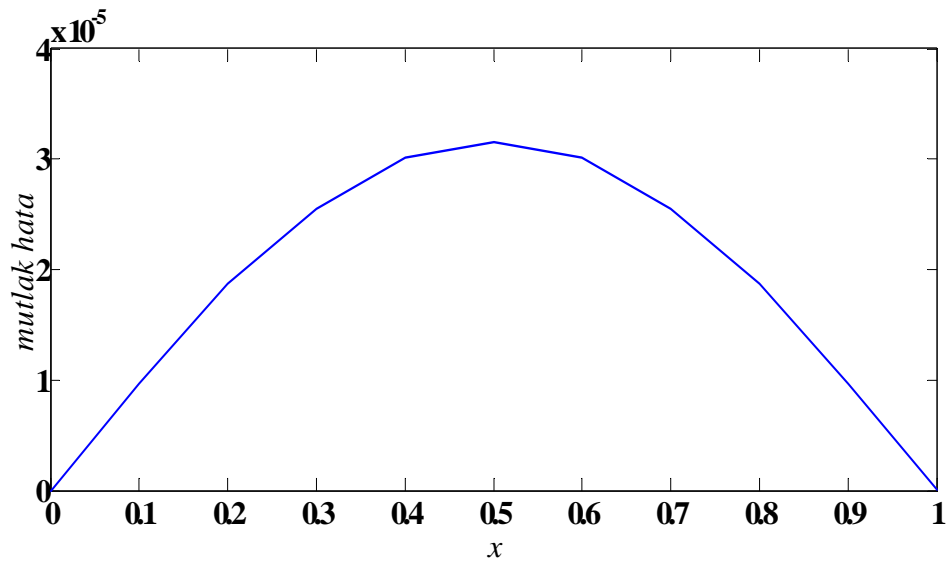
Program farklı konum ve zaman artımı için $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılarak hata normları Tablo 4.3 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman adımının en düşük olduğu durumda elde edildiği görülebilir.

Tablo 4.3: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normu

h	Δt	$L_\infty \times 10^5$	h	Δt	$L_\infty \times 10^5$
0.1	0.1	3.15492	0.025	0.1	3.15874
	0.05	0.96979		0.05	0.97107
	0.025	0.25508		0.025	0.25489
	0.01	0.04133		0.01	0.04133
0.05	0.1	3.15874	0.01	0.1	3.15874
	0.05	0.97107		0.05	0.97107
	0.025	0.25489		0.025	0.25489
	0.01	0.04133		0.01	0.04133

$h = \Delta t = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 1$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik ise Şekil 4.3 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın aralığın baş ve son tarafında değil de ortalarında olduğu, dolayısıyla sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 4.3: Mutlak hata



BÖLÜM 5

GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN YÖNTEMİ

Bu bölümde, AD diferensiyel denkleminin genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak galerkin metoduyla sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu üç test problemi için hata normu hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

5.1 Metodun Uygulanması

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümde $[a, b]$ konum aralığı üzerinde tanımlanan

$$U_t + \alpha U_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (5.1)$$

AD denkleminde Crank-Nicolson yöntemi uygulandığında

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \alpha (U_x)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mu (U_{xx})^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \alpha (U_x)^n + \frac{\Delta t}{2} \mu (U_{xx})^n \quad (5.2)$$

elde edilmiştir. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (5.2) denkleminde galerkin metodu uygulanırsa dördüncü bölümde olduğu gibi

$$\begin{aligned} & \int_a^b w(x) \left(U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \alpha (U_x)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mu (U_{xx})^{n+1} \right) dx \\ & = \int_a^b w(x) \left(U^n - \frac{\Delta t}{2} \alpha (U_x)^n + \frac{\Delta t}{2} \mu (U_{xx})^n \right) dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

eşitliğine ulaşılır. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu ve U, U_x, U_{xx} yerine ϕ_i genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılırsa, (5.3) denklemi i, j ve $k, m-1, m, m+1, m+2$ ($m = 0, 1, \dots, N-1$) olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx \right) \right] \delta_j^{n+1} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx \right) \right] \delta_j^{n+1} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j dx \right) \delta_j^n \\ & - \frac{\Delta t}{2} \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j' dx \right) \delta_j^n + \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \phi_j'' dx \right) \delta_j^n \end{aligned} \quad (5.4)$$

olarak yazılabilir. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m noktasında $\phi_m(x)$ genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonu ise ilk bölümde

$$\phi_m(x) = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} 4h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^3 + 3\lambda(x-x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{m-1}) \\ + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1})^2 \\ - 12h(x-x_{m-1})^3 - 3\lambda(x-x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{m+1}-x) \\ + 6h^2(2+\lambda)(x_{m+1}-x)^2 \\ - 12h(x_{m+1}-x)^3 - 3\lambda(x_{m+1}-x)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ 4h(1-\lambda)(x_{m+2}-x)^3 + 3\lambda(x_{m+2}-x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (5.5)$$

formunda tanımlanmıştır. (5.4) eşitliğindeki integralleri hesaplayabilmek için öncelikle $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq h$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\xi) &= \frac{1}{24h^4} [4h(1-\lambda)(x_{m+1}-x)^3 + 3\lambda(x_{m+1}-x)^4] \\ &= \frac{1}{24h^4} [4h(1-\lambda)(x_{m+1}-x_m-\xi)^3 + 3\lambda(x_{m+1}-x_m-\xi)^4] \\ &= \frac{1}{24h^4} [4h-4h\lambda)(h-\xi)^3 + 3\lambda(h-\xi)^4], \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{m+1}-x) + 6h^2(2+\lambda)(x_{m+1}-x)^2 \\ &\quad - 12h(x_{m+1}-x)^3 - 3\lambda(x_{m+1}-x)^4] \\ &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{m+1}-x_m-\xi) + 6h^2(2+\lambda)(x_{m+1}-x_m-\xi)^2 \\ &\quad - 12h(x_{m+1}-x_m-\xi)^3 - 3\lambda(x_{m+1}-x_m-\xi)^4] \\ &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3(h-\xi) + 6h^2(2+\lambda)(h-\xi)^2 - 12h(h-\xi)^3 \\ &\quad - 3\lambda(h-\xi)^4], \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1}(\xi) &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_m) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_m)^2 - 12h(x-x_m)^3 \\ &\quad - 3\lambda(x-x_m)^4] \\ &= \frac{1}{24h^4} [(4-\lambda)h^4 + 12h^3\xi + 6h^2(2+\lambda)\xi^2 - 12h\xi^3 - 3\lambda\xi^4], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+2}(\xi) &= \frac{1}{24h^4} [4h(1-\lambda)(x-x_m)^3 + 3\lambda(x-x_m)^4] \\ &= \frac{1}{24h^4} [4h(1-\lambda)\xi^3 + 3\lambda\xi^4] \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitlikleri bulunabilir. $\xi = x - x_m$ dönüşümü (5.4) eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi \right) \right] \delta_j^{n+1} \\
& - \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi \right) \right] \delta_j^{n+1} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j^n \\
& - \frac{\Delta t}{2} \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi \right) \delta_j^n + \frac{\Delta t}{2} \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi \right) \delta_j^n
\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) sistemindeki integraller $m = 0, 1, \dots, N-1$ ve $i, j = m-1, m, m+1, m+2$ için (5.6-5.9) spline eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$A^e = \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, \quad B^e = \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi, \quad C^e = \int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi$$

ve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T, \\
A_{m-1, m-1}^e &= A_{m+2, m+2}^e = \frac{h}{40320} (20\lambda^2 - 110\lambda + 160), \\
A_{m-1, m}^e &= A_{m, m-1}^e = A_{m+1, m+2}^e = A_{m+2, m+1}^e = \frac{h}{40320} (-37\lambda^2 - 294\lambda + 1032), \\
A_{m-1, m+1}^e &= A_{m+1, m-1}^e = A_{m, m+2}^e = A_{m+2, m}^e = \frac{h}{40320} (14\lambda^2 - 258\lambda + 480), \\
A_{m-1, m+2}^e &= A_{m+1, m-2}^e = \frac{h}{40320} (3\lambda^2 - 10\lambda + 8), \\
A_{m, m}^e &= A_{m+1, m+1}^e = \frac{h}{40320} (88\lambda^2 + 1170\lambda + 9504), \\
A_{m, m+1}^e &= A_{m+1, m}^e = \frac{h}{40320} (-65\lambda^2 + 54\lambda + 7464),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m-1, m-1}^e &= -B_{m+2, m+2}^e = \frac{1}{40320} (-35\lambda^2 + 280\lambda - 560), \\
B_{m-1, m}^e &= -B_{m+2, m+1}^e = \frac{1}{40320} (87\lambda^2 + 48\lambda - 504), \\
B_{m-1, m+1}^e &= -B_{m+2, m}^e = \frac{1}{40320} (-69\lambda^2 - 264\lambda + 1008), \\
B_{m-1, m+2}^e &= -B_{m+2, m-1}^e = \frac{1}{40320} (17\lambda^2 - 64\lambda + 56), \\
B_{m, m-1}^e &= -B_{m+1, m+2}^e = \frac{1}{40320} (53\lambda^2 + 512\lambda - 3976),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m,m}^e &= -B_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{40320} (-105\lambda^2 - 2520\lambda - 840), \\
B_{m,m+1}^e &= -B_{m+1,m}^e = \frac{1}{40320} (51\lambda^2 + 2832\lambda + 10248), \\
B_{m,m+2}^e &= -B_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{40320} (\lambda^2 - 824\lambda + 2128), \\
\\
C_{m-1,m-1}^e &= C_{m+2,m+2}^e = \frac{1}{1680h} (-4\lambda^2 - 7\lambda + 56), \\
C_{m-1,m}^e &= C_{m+2,m+1}^e = \frac{1}{1680h} (11\lambda^2 - 98), \\
C_{m-1,m+1}^e &= C_{m+2,m}^e = \frac{1}{1680h} (-10\lambda^2 + 21\lambda + 28), \\
C_{m-1,m+2}^e &= C_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{1680h} (3\lambda^2 - 14\lambda + 14), \\
C_{m,m-1}^e &= C_{m+1,m+2}^e = \frac{1}{1680h} (11\lambda^2 + 70\lambda + 462), \\
C_{m,m}^e &= C_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{1680h} (-32\lambda^2 - 189\lambda - 616), \\
C_{m,m+1}^e &= C_{m+1,m}^e = \frac{1}{1680h} (31\lambda^2 + 168\lambda - 154), \\
C_{m,m+2}^e &= C_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{1680h} (-10\lambda^2 - 49\lambda + 308)
\end{aligned}$$

eleman matrisleri bulunabilir. Eleman matrislerinin uygun şekilde birbirlerine eklenerek düzenlenmesi sonucunda

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere

$$\left[\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \alpha \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} \mu \mathbf{C} \right] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \left[\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \alpha \mathbf{B} + \frac{\Delta t}{2} \mu \mathbf{C} \right] \boldsymbol{\delta}^n \quad (5.11)$$

yazılır. (5.11) denklem sistemi $(N+3)$ denklem ve $(N+3)$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Bu denklem sistemindeki ilk ve son denklem silinerek konum aralığının uç noktalarındaki

$$U(a, t) = U_0$$

$$U(b, t) = U_N$$

sınır şartları kullanılıp δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} yok edilirse (5.11) denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ matris sistemine indirgenmiş olur. Ulaşılan denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla kolayca çözülebilir.

AD denkleminin genişletilmiş kübik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörünün bulunması gereklidir.

Başlangıç durumu

$$(\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1})$$

bilinmeyen vektörünün bulunabilmesi için öncelikle

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörü gerekmektedir. Başlangıç vektörü

$$U_m^0 = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_m^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m+1}^0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (5.12)$$

sistemi çözümlenerek elde edilebilir. Bu sistem $N+3$ bilinmeyenli $N+1$ lineer denklemden oluşmaktadır. Bölünme noktalarında

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, \dots, N$$

olduğundan (5.12) açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_0^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_1^0 = f(x_0) \\ U(x_1, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_0^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_1^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_2^0 = f(x_1) \\ &\vdots \\ U(x_{N-1}, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-2}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_{N-1}^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_N^0 = f(x_{N-1}) \\ U(x_N, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_N^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N+1}^0 = f(x_N) \end{aligned} \quad (5.13)$$

elde edilebilir. Böylece $N+3$ bilinmeyenli $N+1$ denklemden oluşan bir denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminde δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri yok edilirse $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklemden oluşan bir karesel sistem elde edilir. Bu sistemin

çözümü Thomas algoritması ile yapılır. Başlangıç şartının konuma göre türevi alınır ve

$$U'(a, 0) = f'(a)$$

$$U'(b, 0) = f'(b)$$

sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{2}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) &= f'(a) \Rightarrow \delta_{-1}^0 = \delta_1^0 - \frac{h}{2}f'(a) \\ \frac{2}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) &= f'(b) \Rightarrow \delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0 + \frac{h}{2}f'(b) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler (5.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$K = \begin{bmatrix} \frac{8+\lambda}{24} & \frac{4-\lambda}{24} & & & & & \\ \frac{12}{4-\lambda} & \frac{12}{8+\lambda} & \frac{4-\lambda}{24} & & & & \\ & \frac{12}{4-\lambda} & \frac{24}{8+\lambda} & \frac{4-\lambda}{24} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{24} & \\ & & & & \frac{12}{4-\lambda} & \frac{24}{8+\lambda} & \\ & & & & \frac{12}{12} & \frac{12}{12} & \end{bmatrix},$$

$$X^0 = \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} f(x_0) + \frac{h}{2}f'(a)\frac{4-\lambda}{24} \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) - \frac{h}{2}f'(b)\frac{4-\lambda}{24} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$KX^0 = H \quad (5.14)$$

denklemler elde edilir. Dolayısıyla $(N+1) \times (N+1)$ tipinde üç bandlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur. Bu sistemde kolaylıkla çözülebilir.

5.2 Test Problemleri

Lineer AD denkleminin sayısal çözümü için verilen nümerik metodun doğruluğu üç problemle test edilmiştir. Sayısal çözümlerle analitik çözümleri karşılaştırırken

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j| \quad (5.15)$$

L_∞ maksimum hata normu kullanılmıştır.

5.2.1 Birinci test problemi

Genişletilmiş kübik B-spline galerkin yönteminin ilk test problemi için yine önceki bölümlerdeki birinci test probleminde olduğu gibi $\alpha = 0.5$ ve $\mu = 0$ seçimleriyle AD denkleminin tam çözümü

$$U(x, t) = 10 \exp \left(-\frac{1}{2\rho^2} \left(x - x_0 - \frac{t}{2} \right)^2 \right)$$

olarak alınmıştır. Bu çözümde de $t = 0$ alınarak

$$U(x, 0) = 10 \exp \left(-\frac{1}{2\rho^2} (x - x_0)^2 \right)$$

başlangıç şartı ile birlikte

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

sınır şartı kullanılmıştır.

Bu test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için $x_0 = 2000$ ve $\rho = 264$ parametreleri ile birlikte $[0, 9000]$ konum aralığı kullanılmıştır. Çeşitli konum ve zaman artımı için program $t = 9600$ zamanına kadar çalıştırılarak bulunan maksimum hata norm değerleri Tablo 5.1 de verilmiştir.

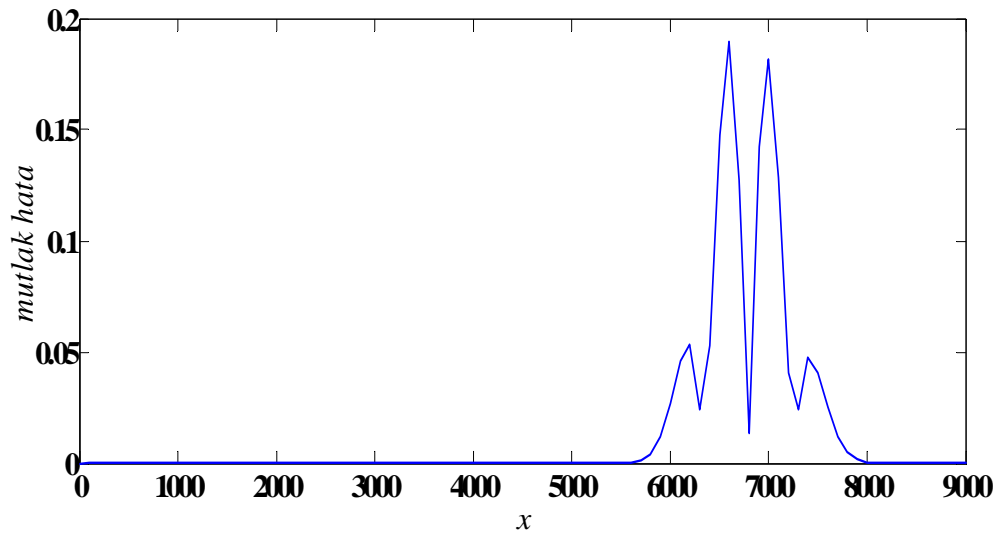
Tablo 5.1: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 9600$ zamanındaki hata normu

h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞	h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞ her λ için
100	100	0.73387	0.73377($\lambda = -0.1188$)	25	100	0.76178	0.76178
	50	0.18987	0.18969($\lambda = -0.1421$)		50	0.18963	0.18963
	25	0.04722	0.04708($\lambda = -0.1297$)		25	0.04704	0.04704
	10	0.00766	0.00753($\lambda = -0.1200$)		10	0.00750	0.00750
50	100	0.76178	0.76178 (her λ için)	10	100	0.76495	0.76495
	50	0.18963	0.18963 (her λ için)		50	0.18976	0.18976
	25	0.04704	0.04704 (her λ için)		25	0.04704	0.04704
	10	0.00750	0.00750 (her λ için)		10	0.00750	0.00750

Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman artımı değerlerinin en düşük alındığı yerde olduğu görülebilir. Bununla birlikte en iyi λ değerinin belirlenmesi işleminin hatayı düşürmediği tablodan kolaylıkla görülebilir. Hatta zaman ve konum artımı için belirlenen değerler düşürüldükçe her λ için aynı hata normu elde edilmektedir.

$h = 100$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 9000$ için $t = 9600$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = -0.1421$ için Şekil 5.1 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının başında veya sonunda değilde ortasında olduğu, bu sebepten dolayı da sınır şartlarının hata üzerinde herhangi bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 5.1: $\lambda = -0.1421$ için mutlak hata



5.2.2 İkinci test problemi

Bu bölümün ikinci test probleminde AD denkleminin sayısal çözümünü kontrol etmek için önceki bölümlerde olduğu gibi

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\alpha x}{\mu} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4t\mu}} \right)$$

tam çözümlü kullanılmıştır. Bu test problemi için konum aralığı $[0, 200]$ olmak üzere başlangıç şartı

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200$$

ve sınır şartı

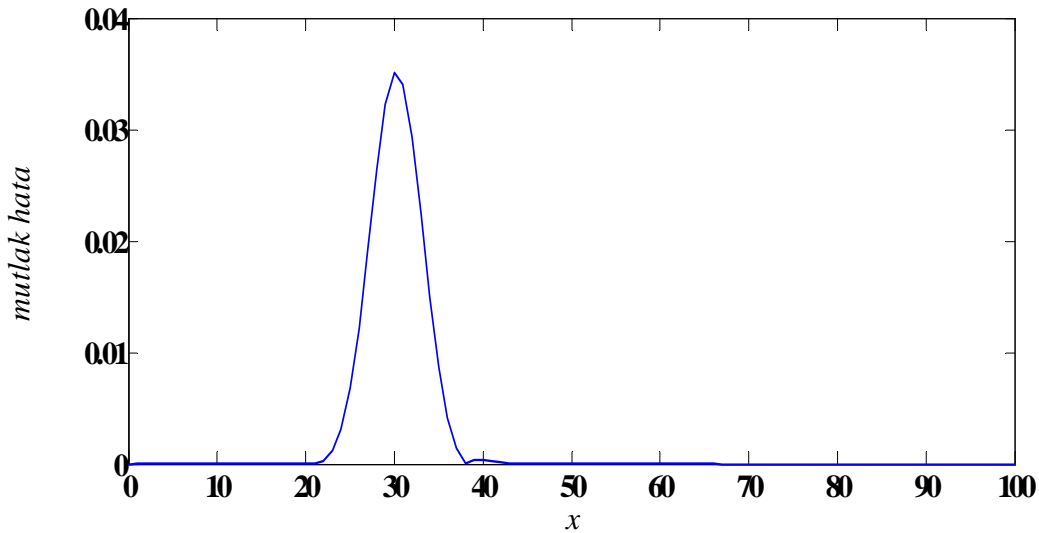
$$U(0, t) = 1, \quad U(200, t) = 0, \quad t > 0$$

şeklinde seçilmiştir.

Analitik çözüm için parametreler $\alpha = 0.01$ ve $\mu = 0.002$ olarak seçilerek program farklı konum ve zaman artımı için $t = 3000$ zamanına kadar çalıştırılarak hata normları Tablo 5.2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en düşük hatanın konum ve zaman adımının en düşük olduğu durumda elde edildiği görülebilir. Diğer taraftan λ 'nın değiştirilmesi sonucunda bazen hiç değişmediği bazende az miktarda iyileştirme sağlandığı görülebilir.

$h = 1$, $\Delta t = 50$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 3000$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = -1.225$ için Şekil 5.2 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın daha önceki bölümlerde olduğu gibi konum aralığının uç noktalarında olmadığından, sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir. Ayrıca mutlak hatanın yaklaşık olarak $20 \leq x \leq 40$ aralığının dışında sıfır olduğu görülebilir.

Şekil 5.2: $\lambda = -1.225$ için mutlak hata



Tablo 5.2: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 3000$ zamanındaki hata normu

h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞	h	Δt	L_∞ $\lambda = 0$	L_∞
1	50	0.03514	0.03512 $\lambda = -1.2250$	0.25	50	0.03526	0.03525 $\lambda = -1.9999$
	25	0.01594	0.01594 her λ için		25	0.01604	0.01603 $\lambda = -1.9999$
	10	0.00600	0.00600 her λ için		10	0.00604	0.00604 her λ için
	5	0.00294	0.00294 her λ için		5	0.00296	0.00295 $\lambda = -1.9999$
	1	0.00058	0.00058 her λ için		1	0.00058	0.00058 her λ için
0.5	50	0.03513	0.03512 $\lambda = -1.9999$	0.1	50	0.03525	0.03525 her λ için
	25	0.01603	0.01600 $\lambda = -1.9999$		25	0.01605	0.01604 $\lambda = -1.9800$
	10	0.00604	0.00602 $\lambda = -1.9999$		10	0.00604	0.00604 her λ için
	5	0.00296	0.00294 $\lambda = -1.7360$		5	0.00296	0.00296 her λ için
	1	0.00058	0.00058 her λ için		1	0.00058	0.00058 her λ için

5.2.3 Üçüncü test problemi

Genişletilmiş kübik B-spline galerkin metodunun son test problemi için AD denkleminin tam çözümü, önceki bölümlerdeki üçüncü test problemlerinden farklı ol-

mayacak şekilde

$$U(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

formunda seçilmiştir. Önceki problemlerde yapılan seçimlere benzer şekilde konum aralığı $[0, 1]$, başlangıç şartı ve sınır şartları ise sırasıyla

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ve

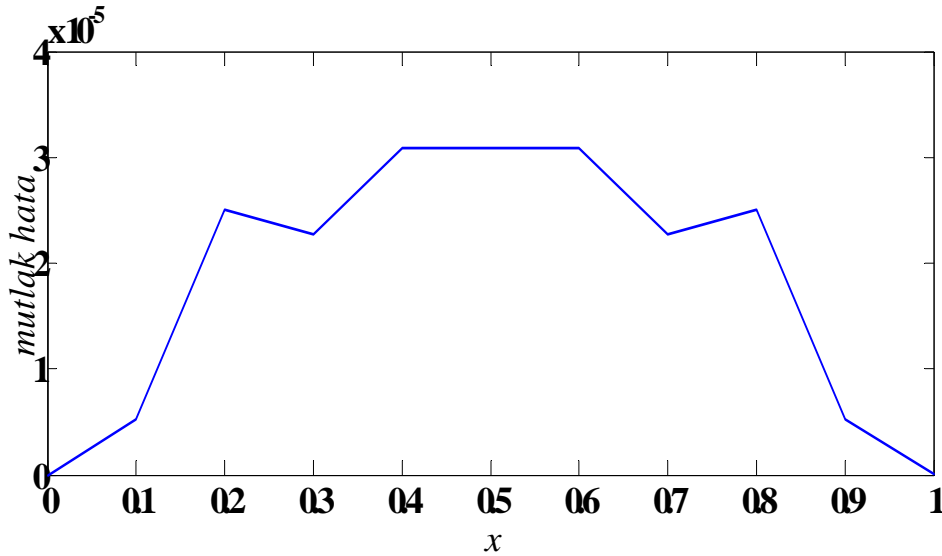
$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0$$

olarak alınmıştır.

Program farklı konum ve zaman artımı için $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılarak hata normu Tablo 5.3 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde L_∞ hata normunun λ 'nın değiştirilmesi sonucunda bazen hiç değişmediği bazende az miktarda iyileştiği görülebilir.

$h = \Delta t = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 1$ zamanındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik $\lambda = 0.637$ için Şekil 5.3 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın $[0, 1]$ konum aralığının uç noktalarında olmadığı görülebilir. Maksimum hata uç noktalarda olmadığından sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı söylenebilir.

Şekil 5.3: $\lambda = 0.6371$ için mutlak hata



Tablo 5.3: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 1$ zamanındaki hata normu

h	Δt	$L_\infty \times 10^5$ $\lambda = 0$	L_∞
0.1	0.1	3.15492	3.08941($\lambda = 0.6371$)
	0.05	0.96979	0.94828($\lambda = 0.2364$)
	0.025	0.25508	0.25282($\lambda = -0.200$)
	0.01	0.04133	0.04132($\lambda = 0.0345$)
0.05	0.1	3.15874	3.15800($\lambda = -0.200$)
	0.05	0.97107	0.97085($\lambda = -0.200$)
	0.025	0.25489	0.25473($\lambda = -0.200$)
	0.01	0.04133	0.04133($\lambda = 0.0322$)
h	Δt	$L_\infty \times 10^5$ $\lambda = 0$	L_∞
0.025	0.1	3.15874	3.15868($\lambda = -0.200$)
	0.05	0.97107	0.97107($\lambda = 0.0226$)
	0.025	0.25489	0.25489($\lambda = 0.0159$)
	0.01	0.04133	0.04133($\lambda = 0.0158$)
0.01	0.1	3.15874	3.15873($\lambda = -0.200$)
	0.05	0.97107	0.97107($\lambda = 0.0077$)
	0.025	0.25489	0.25489($\lambda = 0.0068$)
	0.01	0.04133	0.04133($\lambda = 0.0069$)

BÖLÜM 6

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde AD denklemi için yapılan sayısal çözümlerin kıyaslamaları yapılmıştır. Kıyaslamalar yapılırken tablolar verilmiştir. Tablolarda hesaplama yapılırken kullanılan zaman ve konum artımlarının herbiri için sonuçlar verilmemiştir. Bunun sebebi sonuçların değişmemesidir.

İlk olarak Tablo 6.1 'de bazı zaman ve konum artımları için birinci test probleminde elde edilen hata normunun değerleri dört farklı yöntem için de verilmiştir.

Tablo 6.1: Birinci test problemi için hata normu

h	Δt	KBK Kübik B-spline Kolokeyşin	GKBK Genişletilmiş Kübik B-spline Kolokeyşin	
100	50	0.32577	0.32577($\lambda = 0$)	0.05047($\lambda = -0.1760$)
50	50	0.19756	0.19756($\lambda = 0$)	0.00220($\lambda = -0.5090$)
h	Δt	KBG Kübik B-spline Galerkin	GKBG Genişletilmiş Kübik B-spline Galerkin	
100	50	0.18987	0.18987($\lambda = 0$)	0.18969($\lambda = -0.1421$)
50	50	0.18963	0.18963($\lambda = 0$)	0.18963 (her λ için)

Tablo 6.1 incelendiğinde en iyi çözümün GKBK yöntemi ile elde edildiği görülebilir. GKBK yöntemi ile KBK yöntemi kıyaslandığında sonuçların $\lambda = 0$ için aynı olduğu, λ parametresinin en iyi çözüm için taratıldığı GKBK yönteminin ise daha iyi sonuç verdiği görülebilir. Bununla birlikte KBG ve GKBG metotlarında kolokeyşin yöntemine göre büyük bir oranda ilerleme kaydedilememiştir. Bu iki yöntem kendi arasında kıyaslandığında λ parametresinin en iyi çözüm için taratıldığı durum olan GKBG

yönteminin KBG yöntemine göre istenilen oranda bir iyileştirme sağlamadığı tespit edilmiştir.

Tablo 6.2 'de ise bazı zaman ve konum artımları için ikinci test probleminde elde edilen hata normunun değerleri dört farklı yöntem için verilmiştir.

Tablo 6.2: İkinci test problemi için hata normu

h	Δt	KBK	GKBK	
1	50	0.03466	0.03466($\lambda = 0$)	0.03430($\lambda = 0.062$)
0.5	25	0.01585	0.01585($\lambda = 0$)	0.01568($\lambda = 0.024$)
h	Δt	KBG	GKBG	
1	50	0.03514	0.03514($\lambda = 0$)	0.03512($\lambda = -1.2250$)
0.5	25	0.01603	0.01603($\lambda = 0$)	0.01600($\lambda = -1.9999$)

Tablo 6.2 incelendiğinde yine en iyi çözümün GKBK yöntemi ile elde edildiği görülebilir. GKBK metodu ile KBK yöntemi kıyaslandığında daha öncede belirtildiği gibi $\lambda = 0$ için sonuçların aynı olduğu, en iyi λ için maksimum hatada istenilen miktarda olmasa da çok az miktarda bir iyileştirme sağlandığı görülmüştür. Aynı şekilde GKBG yönteminde, KBG yöntemine göre en iyi λ için hesaplanan hata normları incelendiğinde yine istenilen miktarda bir iyileştirme sağlanamamıştır. Bununla birlikte ikinci test probleminde de KBG ve GKBG metotlarında kolokeyşin yöntemine göre bir ilerleme sağlanamamıştır.

Tablo 6.3' te bazı zaman ve konum artımları için üçüncü test probleminde elde edilen hata normunun değerleri dört farklı yöntem için verilmiştir. Tablo 6.3 incelendiğinde bu test problemi içinde en iyi çözümün GKBK yöntemi ile elde edildiği görülebilir. GKBK yöntemi ile KBK yöntemi kıyaslandığında yine $\lambda = 0$ için sonuçların aynı olduğu, en iyi λ için hesaplanan maksimum hatanın iyileştirilmesinde çok iyi sonuçlar elde edildiği gözlenmektedir. Benzer şekilde GKBG yönteminde, KBG yöntemine göre en iyi λ için hesaplanan hata normları incelendiğinde GKBG yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir. İlk iki test probleminde

olduğu gibi bu test probleminde de KBG ve GKBG metotlarında kolokeyşin yöntemine göre kayda değer oranda bir ilerleme sağlanamamıştır.

Tablo 6.3: Üçüncü test problemi için hata normu

h	Δt	KBK	GKKBK	
0.1	0.1	3.3648×10^5	$3.3648 \times 10^5 (\lambda = 0)$	$0.12316 \times 10^7 (\lambda = -0.1644)$
0.05	0.05	1.0610×10^5	$1.0610 \times 10^5 (\lambda = 0)$	$0.09905 \times 10^7 (\lambda = -0.0437)$
h	Δt	KBG	GKKBG	
0.1	0.1	3.15492×10^5	$3.15492 \times 10^5 (\lambda = 0)$	$3.08941 \times 10^5 (\lambda = 0.6371)$
0.05	0.05	0.97107×10^5	$0.97107 \times 10^5 (\lambda = 0)$	$0.97085 \times 10^5 (\lambda = -0.2000)$

Özetlemek gerekirse bu tezde AD denkleminin kübik ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak ağırlıklı kalan yöntemlerinden galerkin ve kolokeyşin yöntemleriyle sonlu elemanlar çözümleri verilmiştir. Bu tezin amacı, sonlu elemanlar yöntemlerinde kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak elde edilen sonuçlarla genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak maksimum hatanın ne ölçüde azaldığını gözlemlemektir. Diğer bir ifadeyle $\lambda = 0$ için KBG ve KBK metodları ve en iyi λ parametresinin belirlendiği GKKBK ve GKKBG metodları kullanılarak AD denkleminin yaklaşık çözümü incelenmiştir. Sonuç olarak birinci ve üçüncü test problemlerinde AD denkleminin çözümünde kullanılan GKKBK yöntemi KBK yöntemine göre iyi sonuçlar verirken GKKBG yöntemi KBG yöntemine göre istenilen iyileştirmeyi gerçekleştirememiştir. İkinci test probleminde ise taratılan her λ değeri incelendiğinde her iki metod için yeteri miktarda bir iyileştirme görülmediği ifade edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ahmad, Z. and Kothiyari, U.C., 2001, Time-line cubic spline interpolation scheme for solution of advection equation. *Computer & Fluids*, 30, 737-752.
- Ahmet, Z., 2000, Numerical solution for advection-diffusion equation with spatially variable coefficients. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 1, 46-54.
- Chatwin, P.C. and Allen, C.M., 1985, Mathematical models of dispersion in rivers and estuaries, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 17, 119-149.
- Clough, R.W., 1960, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, *Proceedings of American Society of Civil Engineers*, 2nd Conference on Electronic Computations, 23, 345-378.
- Dag, I., Irk, D. and Tombul, M., 2006, Least-squares finite element method for the advection diffusion equation. *Appl. Math. Comput.*, 173, 554-65.
- Dag, I., Canıvar, A. and Şahin, A., 2011, Taylor-Galerkin method for advection-diffusion equation. *Kybernetes*, 40, 762-777.
- Dhawan, S., Rawat, S., Kumar, S. and Kapoor, S., 2011, Solution of advection diffusion equation using finite Element Method. *Modelling Simulation and applied optimization international conference (ICMSAO), IEEE* , 1-4.
- Dhawan, S., Kapoor, S. and Kumar, S., 2012, Numerical method for advection diffusion equation using FEM and B-splines. *Journal of Computational Science* 3,429-43.
- Gardner, L.R.T and Dag, I., 1994, A numerical solution of the advection-diffusion equation using B-spline finite element. *Proceedings International AMSE Conference SYSTEMS Analysis, Control & Design Lyon, France, July 4-6*, 1,109-16.
- Goh, J., Abd. Majid, A. and Md. Ismail, A.I., 2010, A comparison of some splines-based methods for the one-dimensional heat equation. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 70, 858-861.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Goh, J., Majid, A.A. and Ismail, A.I.Md., 2012, Cubic B-Spline Collocation Method for One-Dimensional Heat and Advection-Diffusion Equations., *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 1-8.
- Guvanasen, V. and Volker, R.E., 1983, Numerical solution for solute transport in unconfined aquifers. *Int J Numer Meth Fluids* 3, 103-23.
- Heryudono, A.R. and Driscoll, T.A., 2007, Adaptive Radial Basis Function Methods with Residual Subsampling Technique for Interpolation and Collocation Problems, *Computers and Mathematics with Applications*, 53, 927-939.
- Hinton, E. and Owen, D.R.J., 1977, *Finite Element Programming*, Academic Pres, London, 305p.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J., 1974, *Introduction to operations Research*, 2th ed. New York, 639p.
- Hornberger, G.M. and Wiberg, P.L., 2005, *Numerical Methods for Solving First-Order Ordinary Differential Equations*, notes, *Numerical Methods in the Hydrological Sciences*, 233p.
- Höllig, K., 2003, *Finite element methods with B-splines*, *Society for Industrial & Applied Mathematics*, 145 p.
- Kapoor, S. and Dhawan, S., 2010, B-spline finite element tecnique for advection-diffusion equation. *Int. J. of Appl. Math. and Mech.* 6, 75-94.
- Karur, S.R. and Ramachandran, P.A., 1995, Augmented Thin Plate Spline Approximation in DRM , *Boundary Elements Communications*, 6, 55-58.
- Kumar, N., 1983, Unsteady flow against dispersion in finite porous media, *Journal of Hydrology*, 63, 345-358.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Moaveni, S., 2003, Finite Element Analysis, Pearson Education, New Jersey, 822p.
- Okamoto, S., Sakai, K., Matsumoto, K., Horiuchi, K. and Kobayashi, K., 1998, Development and application of a three-Dimensional Taylor-Galerkin numerical model for air quality simulation near roadway tunnel portals. *J.Appl.Meteor*, 37, 1010-1025.
- Pepper, D.W., Kern C.D. and Long, P.E.Jr., 1979, Modeling the dispersion of atmospheric pollution using cubic splines and chapeau functions, *Atmos. Environ.*, 13, 223-237.
- Prenter, P.M., 1975, Splines and variational methods, John Wiley&Sons, 323p.
- Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions, *Quart.Appl.Math*, 4, 45-99.
- Seegerlind, L.J., 1976, Applied Finite Element Analysis, 2nd. ed. John Wiley and Sons, New York, 422p.
- Xu, G. and Wang, G. Z. ,2008, Extended cubic uniform B-spline and -B-spline. *Acta Automat. Sinica* 34(8), 980-983.
- Zienkiewicz, O.C. and Morgan, K., 1983, Finite Elements And Approximation, A Wiley-Interscience Publication, New York, 328p.
- Zlatev, Z., Berkowicz, R. and Prahm, L.P., 1984, Implementation of a variable stepsize variable formula method in the timeintegration part of a code for treatment of long-range transport of air pollutants, *Journal of Computational Physics*, 55, 278-301.