Lie Cebirleri Üzerinde Önçaprazlanmış Modüller

Ahmet Faruk ASLAN

DOKTORA TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Nisan 2013

Precrossed Modules of Lie Algebras

Ahmet Faruk ASLAN

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

April 2013

Lie Cebirleri Üzerinde Önçaprazlanmış Modüller

Ahmet Faruk ASLAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Bilgisayar Bilimleri Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Nisan 2013

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı doktora öğrencisi Ahmet Faruk ASLAN' in DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı " **Lie Cebirleri Üzerinde Önçaprazlanmış Modüller**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Üye : Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Tezde, Lie cebirlerinin genellemesi olan Lie cebirler üzerinde önçaprazlanmış modüller kavramı (2-boyutlu Lie cebirler) in bazı kategoriksel ve cebirsel özellikleri incelenip, bu kavram GAP yardımıyla bilgisayar ortamına aktarılmış ve çeşitli sınıflandırılmaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: GAP, Grup Cebir, Lie Cebirler, (Ön)çaprazlanmış modüller.

SUMMARY

In this thesis, we investigate some categorical and algebraic properties of precrossed modules of Lie algebras which are known as the generalization of Lie algebras (two-dimensional Lie algebras). Then we adapt this notion to the computer environment by using GAP and make some classification.

Keywords: GAP, Group algebra, Lie algebras, Crossed Modules of Lie algebras.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen,

Hocalarım, Sayın;

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ ye,

Doç. Dr. Enver Önder USLU ya,

Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ a,

eşim ve aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması TUBİTAK-TBAG 107T542 nolu araştırma projesi tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR vii

BÖLÜM 0. ÖNSÖZ 1

0.1 Giriş . . . 1

0.1.1 Neden **PXLie** ? . . . 1

BÖLÜM 1. TEMEL KAVRAMLAR 3

1.1 Giriş . . . 3

1.2 Grup Cebirler . . . 6

1.2.1 Grup Cebirler ve GAP . . . 9

1.3 Lie Cebirleri . . . 14

1.4 Lie cebirleri üzerinde Önçaprazlanmış modüller . . . 17

1.4.1 Bir Önçaprazlanmış Modülün Aktörü . . . 19

BÖLÜM 2. ÖNÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER 24

2.1 Lie Cebirleri Üzerinde Önçaprazlanmış Modüller Kategorisinin Kategoriksel Özellikleri . . . 24

2.1.1 Üçlenebilirlik(Tripleability) Özelliği . . . 24

2.2 İnterest Kategorisi . . . 28

2.3 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ Kategorisi . . . 29

2.3.1 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ da Eşçarpımlar Ve Eşlimitler . . . 31

BÖLÜM 3. SEMİ-COMPLETE ÖNÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER **34**

3.1 Giriş 34

3.2 İç Derivasyon 34

3.3 (Yarı)Tam Önçaprazlanmış Modüller 37

3.4 Önçaprazlanmış Modüllerin Holomorfları 39

BÖLÜM 4. GAP İLE LİE ÖN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER **45**

4.1 Giriş 45

4.2 Lie Cebirleri Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 45

4.3 Alt Çaprazlanmış Modüller 50

4.4 Cat^1-Lie Cebirler 52

4.5 Denk Kategoriler 56

BÖLÜM 5. SONUÇ ve TARTIŞMA **59**

KAYNAKLAR DİZİNİ **60**

ÖZGEÇMİŞ **63**

BÖLÜM 0

ÖNSÖZ

0.1 Giriş

Tez en genel anlamda **PXLie** şeklinde gösterilecek olan Lie cebirleri üzerinde önçaprazlanmış modüller kategorisinin bazı temel özelliklerinin araştırılması, funktoriyel ilişkilerinin bulunması ve mezkur yapının sonlu boyutlarda bilgisayar ortamına aktarılarak sınıflandırılmasından oluşmaktadır.

0.1.1 Neden PXLie ?

Her L Lie cebirine karşılık $L \longrightarrow 0$ önçaprazlanmış modülü vardır. Bu bağlamda **Lie**, Lie cebirlerinin kategorisi olmak üzere

$$\mathbf{Lie} \subseteq \mathbf{PXLie}$$

olup, **PXLie** kategorisi **Lie** kategorisinin genellemesidir.

İnterest kategorilerinde actor objenin bir genel tanımlaması (Casas vd., 2012) de verilmiştir.

Nevar ki, **PXLie** bir interest kategorisine izomorf değildir.

Şöyle ki; $L : L_1 \longrightarrow L_0$ bir önçaprazlanmış modül ve $(L_0 \ltimes L_1, \omega_0, \omega_1)$, bu önçaprazlanmış modülden elde edilen Cat^1-Lie cebiri olsun. ω_0, ω_1 dönüşümleri genelde

$$[\omega_i(a), b] = \omega_i[a, b], \quad i = 0, 1,$$

şartını sağlamaz.

Bu durumda interest kategorileri için geçerli olan genel tanımlamalar **PXLie** de geçerli değildir. Dolayısıyla ek tanımlamalara ve incelemelere ihtiyaç vardır.

Tezin birinci bölümünde, öncelikle Lie cebirlerinin bilgisayar ortamına aktarılması için temel araç olan grup cebirleri ve Lie cebirleri ile ilgili tezin kalan kısmında kullanılacak gerekli tanımlamalar ve özellikler verilmiştir. Sonrasında **PXLie** kategorisi ile ilgili yine gerekli temel tanımlamalar ve inşaalar verilmiştir.

İkinci bölümde, **PXLie** kategorisinin bazı kategoriksel özellikleri araştırılmıştır. Bu bağlamda, bu kategorinin bir dolu alt kategorisi olan $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ kategorisinde en genel anlamda limitlerin ve eşlimitlerin varlığı araştırılmış, ki bu sayede yapının semi-abelian kategori olması sonucuna ulaşılmıştır. Diğer yandan 2-boyutlu Lie cebirleri (burada kastedilen Lie cebirler kategorisindeki grupoid objesidir) ile ilgili özellikle üçüncü kohomoloji grubunun inşaası için gerekli olan üçlenebilirlik özelliğinin varlığı araştırılmıştır. Diğer taraftan literatürde var olan interest kategorisi olma özelliği verilmiştir.

Üçüncü bölümde, (yarı)tam olma ve holomorf olma gibi temel cebirsel yapıların **PXLie** kategorisindeki karşılıkları incelenmiş ve bu sayede **PXLie** içinde belli bir sınıflandırma elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Lie cebirleri üzerinde (ön)çaprazlanmış modüller, (ön)çaprazlanmış alt modüller, (ön)çaprazlanmış idealler, bölüm cebirleri, merkez gibi yapıların bilgisayar ortamında GAP kullanılarak nasıl elde edilebileceği sorusu incelenmiştir. Bu doğrultuda gerekli GAP komutları hazırlanmıştır. Diğer taraftan (Ön)Cat^1-Lie cebirleri bilgisayar ortamına aktarılmış ve (ön)çaprazlanmış modüller ve (Ön)Cat^1-Lie cebirler kategorileri arasındaki doğal denklik elde edilmiştir.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Giriş

Bu bölümde tezde verilen kavramların daha iyi anlaşılması için bilinen cebirsel yapılar verilecektir. Daha sonra çaprazlanmış modül kategorisinin özelliklerini incelemek için gerekli olan kavramların tanımları hatırlanacaktır. Detaylı bilgi için (Ege, 1998) ve (Casas, 1991) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 1.1 R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere A, R-modülü

$$\cdot \ : \ A \times A \longrightarrow A$$

bilineer dönüşümüyle birlikte A**-cebiri** olarak adlandırılır.

Buradaki bilineer dönüşüm çarpım olarak adlandırılır ve $x, y \in A$ için $\cdot(x, y)$ yerine xy notasyonu kullanılır.

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & & (x,y) & \longmapsto & \cdot(x,y) = x \cdot y \end{array}$$

bilineer dönüşümü

M$_1$**)** $(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y, \quad x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$

M$_2$**)** $r(xy) = (rx)y = x(ry)$, $r \in R$

şartlarını sağlar.

Bir A-cebiri, A-modül olduğundan $B \subset A$ alt modülü her $x, y \in B$ için $xy \in B$ oluyorsa B, **alt cebir** olarak adlandırılır. Aynı zamanda $x \in A$ ve $y \in B$ için $xy \in B$ ve $yx \in B$ ise B ye A nın **ideali** denir. Açıktır ki her ideal bir alt cebirdir.

A ve B iki R-cebir olmak üzere

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

dönüşümü her $x, y \in A$ için

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

oluyorsa φ ye **cebir homomorfizmi** denir. Eğer φ, birebir ve örtense izomorfizm olarak adlandırılır.

Tanım 1.2 R bir cisim ve A bir R-cebir olsun. Bu durumda

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

şartını sağlayan

$$D : A \longrightarrow A$$

şeklinde tanımlı R-lineer fonksiyonlarına A nın bir R-derivasyonu denir. A nın tüm R-derivasyonları kümesi Der(A) ile gösterilir.

Örnek 1.1 Her R halkası toplamsal Abelyan gruptur. Buradan

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times R & \longrightarrow & R \\ (n,r) & \longmapsto & n \cdot r = \underbrace{r + \ldots + r}_{n \text{ tane}} \end{array}$$

işlemiyle B bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla her halka bir $\mathbb{Z}$-cebirdir.

Örnek 1.2 Her R halkası aynı zamanda R-modül olduğundan bir R-cebirdir.

Örnek 1.3 **k** bir halka, S bir cisim ve Der(S), S nin k-derivasyonları kümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccccc} + & : & \mathrm{Der}(S) \times \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ & & (D_1, D_2) & \longmapsto & (D_1 + D_2)(s) = D_1(s) + D_2(s) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & : & \mathbf{k} \times \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ & & (k, D) & \longmapsto & (k \cdot D)(s) = D(ks) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte

M_1) $(\mathrm{Der}(S), +)$ bir Abelyan gruptur.

M_2) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} (k \cdot (D_1 + D_2))(s) &= (D_1 + D_2)(ks) \\ &= D_1(ks) + D_2(ks) \\ &= k \cdot D_1(s) + k \cdot D_2(s) \\ &= (k \cdot D_1 + k \cdot D_2)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$k \cdot (D_1 + D_2) = k \cdot D_1 + k \cdot D_2$$

dır.

M$_3$) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} ((k_1+k_2)\cdot D)(s) &= D((k_1+k_2)s) \\ &= D(k_1s+k_2s) \\ &= D(k_1s)+D(k_2s) \quad (\because \mathrm{Der}(S)\ \mathbf{k}\text{-lineer}) \\ &= (k_1\cdot D)(s)+(k_2\cdot D)(s) \\ &= (k_1\cdot D+k_2\cdot D)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1+k_2)\cdot D = k_1\cdot D + k_2\cdot D$$

dır.

M$_4$) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} ((k_1k_2)\cdot D)(s) &= D((k_1k_2)s) \\ &= D(k_1(k_2s)) \\ &= k_1\cdot D(k_2s) \\ &= k_1\cdot(k_2\cdot D)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1k_2)\cdot D = k_1\cdot(k_2\cdot D)$$

dir. Bu durumda $\mathrm{Der}(S)$ bir **k**-modüldür.

Tanım 1.3 A bir R-cebir olmak üzere her $x,y,z \in A$ için

$$(xy)z = x(yz) \quad \text{(Asosyatiflik kuralı)}$$

oluyor ise A ya **asosyatif cebir** denir.

A, R-modülü $(A,+)$ Abelyan grup yapısını ve $\cdot$ bilineer dönüşümünün (M_1) şartından dağılma aksiyomu sağlandığından asosyatif cebir şu şekilde de tanımlanabilir.

A bir R-modül ve bir halka olsun. Her $r \in R$ ve $x,y \in A$ için

$$r(xy) = (rx)y = x(ry)$$

şartı sağlanıyorsa A ya **asosyatif R-cebir** denir.

Örnek 1.4 A bir R-modül olsun. $\mathrm{End}(A)$, A dan A ya tüm modül homomorfizmlerinin kümesi olmak üzere

$$\begin{array}{rclcrcl} R\times\mathrm{End}(A) & \longrightarrow & \mathrm{End}(A) & & & & \\ (r,f) & \longmapsto & r\cdot f & : & A & \longrightarrow & A \\ & & & & a & \longmapsto & (r\cdot f)(a) = f(ra) \end{array}$$

işlemiyle birlikte $\mathrm{End}(A)$ bir asosyatif R-cebirdir.

1.2 Grup Cebirler

Matematikte $R[G]$ ile gösterilen grup halka yapısı bir halkadır. Grup halka kavramı ilk olarak Cayley tarafından (Cayley, 1854) çalışmasında tanımlanmıştır. Bu yapıda R bir halka G ise bir gruptur. Grup halkalar bazen basitçe RG biçiminde de gösterilirler.

S bir halka ve R, S nin bir alt halkası olsun. $r \in R$ ve $s \in S$ için $rs \in S$ olduğundan S bir R-modül yapısı oluşturur. R halkası değişmeli ise S aynı zamanda bir R-cebirdir. O halde $\mathbf{k}[X]$ polinomlar halkası bir $\mathbf{k}$-cebirdir. ($\mathbf{k} \leq \mathbf{k}[X]$)

Bir grup halkanın elemanları G grubunun elemanlarının sonlu lineer kombinasyonları ile R nin elemanlarının katsayı olarak kullanılmasıyla oluşur. Buradan da anlaşılacağı gibi grup halka kavramı yapısal olarak polinom halkası kavramına benzemektedir.

Her $R[G]$ grup halkası için $R \leq R[G]$ olduğundan $R[G]$ bir R-modüldür. Eğer R bir cisim ise (değişmeli halka), grup halka yapısı grup cebir olarak adlandırılır. Detaylar (Passman, 1977) de bulunabilir.

Tanım 1.4 $R = \mathbb{Z}$ alınırsa $\mathbb{Z}[G]$, $\mathbb{Z}$-cebirine tam grup halka (integral group ring) adı verilir. K bir cisim, $(G,*)$ bir grup olsun. $\forall i \in I$ için $a_i \in K$ ve $g_i \in G$ olmak üzere, her elemanı

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n$$

formunda olan, G nin elemanlarının sonlu lineer kombinasyonları ile K nın elemanlarını katsayı kabul edilmesinden oluşan $K[G]$ kümesi göz önüne alınsın.

$K[G]$ nin herhangi elemanı genellikle

$$\sum_{g \in G} a_g g$$

biçiminde gösterilir. Aşağıdaki işlemlerle birlikte $K[G]$, K üzerinde bir cebirdir. Bu cebire grup cebir denir. G grubunun mertebesi n ve R cisminin mertebesi m olmak üzere $K[G]$ grup cebirinin mertebesi m^n dir.

Toplama:

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

Skalerle çarpma :

$$a \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} (a a_g) g$$

Çarpma:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (a_g b_h) g * h$$

Örnek 1.5 $G = C_3 = \langle g \rangle$ 3. mertebeden devirli grup olsun. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathbb{C}[G]$ grup cebirinin herhangi bir elemanı

$$r = z_1 + z_2 g + z_3 g^2$$

şeklinde yazılır. $s \in \mathbb{C}[G]$ başka bir eleman olmak üzere

$$s = w_1 + w_2 g + w_3 g^2$$

elemanların toplamı

$$r + s = z_1 + w_1 + (z_2 + w_2)g + (z_3 + w_3)g^2$$

ve çarpımı

$$rs = z_1w_1 + z_2w_3 + z_3w_2 + (z_1w_2 + z_2w_1 + z_3w_3)g + (z_1w_3 + z_3w_1 + z_2w_2)g^2$$

biçimindedir.

Örnek 1.6 $G = C_3 = \langle g \rangle$ 3. mertebeden devirli grup ve $R = \mathbb{Z}_2$ olmak üzere RG grup cebirinin elemanları

$$\mathbb{Z}_2 C_3 = \left\{0, 1, g, g^2, 1+g, 1+g^2, g+g^2, 1+g+g^2\right\}$$

şeklindedir.

Önerme 1.5 R değişmeli ve G Abelyen ise $R[G]$ grup halkası da değişmelidir.

Önerme 1.6 H, G nin bir alt grubu ise $R[H]$ da $R[G]$ nin bir alt grubudur. Benzer şekilde S, R nin bir alt halkası ise $S[G]$ de $R[G]$ nin bir alt halkasıdır.

$f : G \to H$ herhangi bir grup homomorfizmi olmak üzere $K[f] : K[G] \to K[H]$ grup cebir homomorfizmi

$$\sum_{g\in G} a_g g \longmapsto \sum_{g\in G} a_g f(g)$$

şeklinde tanımlanabilir. $f' : H \to L$ başka bir grup homomorfizmi ise $K[ff'] = K[f]K[f']$ dir. Grup cebir tanımı ve grup cebir homomorfizm yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 1.7 Herhangi bir grup alındığında, herzaman bir K-cebir

$$K[.] : \textbf{Gr} \to \textbf{K-Alg}$$

funktoru ile elde edilir.

$K[.]$ grup cebir funktorunun aksine herhangi bir cebirden bir grup elde edilebilir. Cebirdeki çarpma unutularak toplamsal abelyen grup elde edilir, bu da unutulabilir (forgetful)

$$\textbf{K-Alg} \to \textbf{Ab}$$

funktorunu verir. Ayrıca bilindiği üzere cebirdeki çarpmaya göre tersi bulunabilen elemanların oluşturduğu küme bir altgruptur. Bu gruba cebirin terslenebilen elemanları grubu denir, bu da

$$U(.)\text{: } \textbf{K-Alg} \to \textbf{Gr}$$

funktorunu verir. Genel olarak komutatif olmayan cebirlerin terslenebilen elemanları grubu abelyen olmak zorunda değildir. Buradan, ispatı (Barker, 2003) tarafından yapılan aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 1.8 $K[.]$: **Gr** $\to$ **K-Alg** grup cebir funktoru $U(.)$: **K-Alg** $\to$ **Gr** funktorunun sol ekidir. Böylece G bir grup ve A bir K-cebir olmak üzere

$$\textbf{Gr}(G, U(A)) \quad \cong \quad \textbf{K-Alg}(K[G], A)$$

izomorfizmi vardır.

Önerme 1.9 (Evrensellik Özelliği) G bir grup ve K bir cisim olsun. A, $K \subset A$ biçiminde herhangi bir halka ve $f : G \to A$ grup homomorfizmi olsun. Bu durumda $i : G \to K[G]$ içine dönüşüm olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & K[G] \arrow[dr, "f^*"] & \\ G \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "f"'] & & A \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde (yani $f^* \circ i = f$) birtek

$$\begin{array}{rccc} f^* : & K[G] & \longrightarrow & A \\ & \sum\limits_{g \in G} a_g g & \longmapsto & \sum\limits_{g \in G} a_g f(g) \end{array}$$

homomorfizmi vardır.

$A = K[H]$ alınırsa $f^* : K[G] \to K[H]$ birtek grup cebir homomorfizmi vardır. Ayrıca;

ii f birebir ise f^* birebirdir.

iii f örten ise f^* da örtendir.

İspat: Bakınız (Schubert, 1972). □

Tanım 1.10 $\varepsilon : K[G] \to K$

$$\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g$$

homomorfizmine agümentasyon homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeğine ise agümentasyon ideali denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Grup cebirlerin temel özelliklerinden birisi de sağ-sol simetri özelliğidir. Herhangi bir gruptaki her elemanın tersi varolduğundan, herhangi $R[G]$ grup halka üzerinde aşağıdaki gibi homomorfizm tanımlanabilir.

Önerme 1.11 R değişmeli halka ve G bir grup olsun.

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \longmapsto \sum_{g\in G} a_g g^{-1}$$

şeklinde tanımlanan $\xi : R[G] \to R[G]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan bir homomorfizmdir.

i $\xi(\alpha+\beta) = \xi(\alpha) + *(\beta)$,

ii $\xi(\alpha\beta) = \xi(\beta)\xi(\alpha)$,

iii $\xi(\xi(\alpha)) = \alpha$.

Tanım 1.12 Grup cebirin tüm elemanları ile değişmeli olan elemanların oluşturduğu küme grup cebirin merkezidir. Yani

$$M(R[G]) = \{z \in R[G] : zr = rz \text{ her } r \in R[G]\}$$

kümesi grup cebirin merkezidir.

1.2.1 Grup Cebirler ve GAP

Grup cebir cebirsel yapısı bilgisayar ortamına (Bovdi vd., 2007) tarafından yazılmış olan LAGUNA ortak paketi ile aktarılmıştır. Herhangi bir R halkası ve G grubu yardımıyla bir sol R-modül oluşturulabilir. Buradaki R halkası yerine F cismi alınırsa oluşan yapı bir cisim olacaktır. Örneğin 32. mertebeden Dihedral grup, 2. mertebeden Galois cismi ve $\mathbb{Z}_4$ halkası kullanılarak $K[G]$ ve $R[G]$ grup halkaları oluşturulabilir.

GAP
```
gap> G:=DihedralGroup(32);
<pc group of size 32 with 5 generators>
gap> K:=GaloisField(2);
GF(2)
gap> KG:=GroupRing(K,G);
<algebra-with-one over GF(2), with 5 generators>
gap> R:=Integers mod 4;
(Integers mod 4)
gap> RG:=GroupRing(R,G);
<free left module over (Integers mod 4), and ring-with-one, with 5 generators>
```

Herhangi bir grup halkası verildiğinde, bu halkayı oluşturan grup ve halkayı bulmak için `LeftActionDomain` ve `UnderlyingGroup` denetim deyimleri kullanılabilir.

GAP
```
gap> UnderlyingGroup(KG);
<pc group of size 32 with 5 generators>
gap> LeftActingDomain(KG);
GF(2)
gap> UnderlyingRing(RG);
(Integers mod 4)
gap> UnderlyingField(KG);
GF(2)
```

`GroupRing` fonksiyonu ile oluştuşturulmuş cebirsel yapının bir cebir olup olmadığını denetlemek için ise `IsGroupAlgebra` fonksiyonu kullanılır. Yapı bir cebir ise GAP programı `true` cevabını verir.

GAP
```
gap> IsGroupAlgebra(KG);
true
gap> IsAlgebra(KG);
true
gap> IsGroupAlgebra(RG);
false
gap> IsLeftModule(RG);
true
```

K cisminin karakteristiği, G nin bazı elemanlarının mertebesini bölüyor ise $K[G]$ grup cebiri *modüler* olarak adlandırılır. GAP programında `IsFModularGroupAlgebra` fonksiyonu grup cebirlerin modüler olup olmadığını kontrol eder.

GAP
```
gap> IsFModularGroupAlgebra(GroupRing(GF(3),SymmetricGroup(6)));
true
gap> IsFModularGroupAlgebra(GroupRing(GF(3),CyclicGroup(7)));
false
gap> Characteristic(GF(3));
3
gap> List(CyclicGroup(7),Order);
[ 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7 ]
```

Bir grubun, birimden farklı her elemanının mertebesi bir p asal sayısının kuvveti ise bu gruba p-grup denir. Bu özellikten dolayı p-gruplar nilpotent özellik gösterirler. K karakteristiği p olan cisim ve G de aynı p asal sayısı için p-grup ise $K[G]$ grup cebirine p-modüler denir. GAP programında `IsPModularGroupAlgebra` fonksiyonu bir $K[G]$ grup cebirinin p-modüler olup olmadığını denetler.

GAP
```
gap> List(G,Order);
[ 1, 2, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
  2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 ]
gap> IsPGroup(G);
true
gap> IsNilpotent(G);
true
gap> PrimePGroup(G);
2
gap> Characteristic(K);
2
gap> IsPModularGroupAlgebra(KG);
true
gap> IsPModularGroupAlgebra( GroupRing( GF( 2 ), SymmetricGroup( 6 ) ) );
false
```

`Support` fonksiyonu, $\alpha_i \in R$ ve $g_i \in G$ olmak üzere $R[G]$ grup halkasının herhangi $x = \alpha_1 \cdot g_1 + \alpha_2 \cdot g_2 + \cdots + \alpha_k \cdot g_k$ elemanındaki $g_i \in G$ lerin listesini verir.

GAP
```
gap> KG:=GroupRing(GF(3),CyclicGroup(8));
<algebra-with-one over GF(3), with 3 generators>
gap> eL:=Elements(KG);;
gap> Size(KG);
6561
gap> x:=eL[6001];
(Z(3)^0)*f2+(Z(3)^0)*f1*f2+(Z(3)^0)*f1*f3+(Z(3)^0)*f2*f3+(Z(3))*f1*f2*f3
gap> Support(x);
[ f2, f1*f2, f1*f3, f2*f3, f1*f2*f3 ]
```

`Length` fonksiyonu, bir x elamanını oluşturan lineer toplamdaki elemanların sayısını verir. Açıkca bu sayı G nin eleman sayısını geçemez.

GAP
```
gap> Length(x);
5
```

`Augmentation` fonksiyonu $x = \alpha_1 \cdot g_1 + \alpha_2 \cdot g_2 + \cdots + \alpha_k \cdot g_k$ şeklindeki grup halka elemanının $\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_k$ katsayılarının toplamını verir.

GAP
```
gap> Augmentation(x);
0*Z(3)
```

$R[G]$ grup halkasının bir x elemanının tersinin olup olmadığını hesaplamak için `IsUnit` fonksiyonu, varolan tersi hesaplamak için `InverseOp` fonksiyonu kullanılır. $x\hat{} - 1$ ifadesi de tersi hesaplamak için kullanılabilir.

GAP
```
gap> IsUnit(x);
false
gap> x^-1;
fail
gap> y:=eL[1001];
(Z(3)^0)*<identity> of ...+(Z(3))*f1+(Z(3))*f2+(Z(3)^0)*f3+(Z(3)^0)*f1*f2+(
Z(3))*f2*f3+(Z(3)^0)*f1*f2*f3
gap> IsUnit(y);
true
gap> y^-1;
(Z(3)^0)*<identity> of ...+(Z(3)^0)*f1+(Z(3))*f2+(Z(3)^0)*f3+(Z(3)^0)*f1*f3+(
Z(3))*f2*f3+(Z(3))*f1*f2*f3
```

Bu operasyon $R[G] \to R$ biçiminde, tanım 1.10 da verilen agümantasyon homomorfizmini oluşturmak için kullanılır. $R[G]$ nin herhangi bir elemanının bu homomorfizm altındaki görüntsünü bulmak için `Augmentation` fonksiyonu da kullanılabilir.

GAP
```
gap> F := GF( 2 ); G := SymmetricGroup( 3 ); FG := GroupRing( F, G );
GF(2)
Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> f:=AugmentationHomomorphism(KG);
[ (Z(3)^0)*f1, (Z(3)^0)*f2, (Z(3)^0)*f3 ] -> [ Z(3)^0, Z(3)^0, Z(3)^0 ]
```

```
gap> IsSurjective(f);
true
gap> Augmentation(x)=Image(f,x);
true
gap> Augmentation(x+y);
Z(3)
```

Tanım 1.10 da verilen agümentasyon ideali, agümentasyon homomorfizminin çekirdeğinden oluşur. Başka bir deyişle `Augmentation` fonksiyonu R nin sıfırı olan $R[G]$ nin elemanları kümesini verir.

GAP
```
gap> A:=AugmentationIdeal(KG);
<two-sided ideal in <algebra-with-one of dimension 8 over GF(3)>,
  (3 generators)>
gap> IsIdeal(KG,A);
true
gap> eA:=Elements(A);;
gap> Image(f,eA[8]);
0*Z(3)
gap> A=Kernel(f);
true
```

`Units` fonksiyonu bir grup cebirinin tersinir olan elemanlarının oluşturduğu $T(K[G])$ grubunu oluşturur. GAP programı, bu grubu oluşturmak için

$$T(K[G]) = K^* \times V(K[G])$$

direk çarpımını kullanır.

GAP
```
gap> T := Units( KG );
#I  LAGUNA package: Computing the unit group ...
<group of size 32768 with 15 generators>
gap> GeneratorsOfGroup( U )[5];
(Z(2)^0)*f2+(Z(2)^0)*f3+(Z(2)^0)*f2*f3
gap> IsSubgroup(T,V);
true
gap> FH := GroupRing( GF(3), SmallGroup(27,3) );
<algebra-with-one over GF(3), with 3 generators>
gap> T := Units( FH );
#I  LAGUNA package: Computing the unit group ...
<group of size 5083731656658 with 27 generators>
gap> x := GeneratorsOfGroup( T )[1];
Tuple( [ Z(3), (Z(3)^0)*<identity> of ... ] )
gap> x in FH;
```

```
false
gap> x[1] * x[2] in FH;
true
```

1.3 Lie Cebirleri

F bir cisim ve L, F vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \longrightarrow & L \\ (x,y) & \longmapsto & [x,y] \end{array}$$

bilineer fonksiyonu

L1) Her $x \in L$ için $[x,x] = 0$

L2) Her $x,y,z \in L$ için $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

şartlarını sağlıyorsa L ye bir Lie cebir denir.

Lie cebiri hakkında ayrıntılı bilgi için (Erdmann ve Wildon, 2006) çalışmasına bakılabilir.

Genellikle $[x,y]$ Lie braketine x ve y nin komutatörü, ayrıca L2'ye de Jacobi özdeşliği denir.

$[\ ,\ ]$ Lie braket ikili işlemi,

$$\begin{aligned} 0 = [x+y, x+y] &= [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] \\ &= [x,y] + [y,x] \end{aligned}$$

ile bilineerdir. Ayrıca L1 durumu,

L1$'$) Her $x,y \in L$ için $[x,y] = -[y,x]$ şeklinde de ifade edilebilir. F cisminin karakteristiği 2 değil ise L1$'$ de $x = y$ alınarak L1 yerine L1$'$ kullanılır.

Örnek 1.7 M, A üzerinde bir cebir olsun. $[,] : M \times M \to M$ fonksiyonu

$$[x,y] = xy - yx$$

şeklinde tanımlansın. $[,]$ fonksiyonun iki lineer olduğunu gösterelim.

i)

$$[x,x] = xx - xx = 0$$

ii)

$$\begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= [x,yz-zy]+[y,zx-xz]+[z,xy-yx] \\ &= x(yz-zy)-(yz-zy)x+(xy-yx)z \\ &\quad -(zx-xz)y+z(xy-yx)-(xy-yx)z \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Böylece M, $[,]$ ile birlikte Lie cebiridir.

Bir Lie cebiri oluşturmak için LAGUNA ortak paketiyle oluşturulan `LieAlgebraByDomain` veya `LieAlgebra` fonksiyonu kullanılabilir.

GAP

```
gap> G:=SymmetricGroup(6);
Sym( [ 1 .. 6 ] )
gap> KG:=GroupRing(GF(8),G);
<algebra-with-one over GF(2^3), with 2 generators>
gap> L:=LieAlgebraByDomain(KG);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2^3)>
```

Tanım 1.13 M bir Lie cebiri olsun. Her $x,y \in M$ için $[x,y]=0$ oluyorsa M ye abelyen Lie cebiri denir. (Amoya, 1974)

A grup cebiri üzerinde tanımlı Lie cebirinin değişmeli olup olmadığını test etmek için `IsLieAbelyan` fonksiyonu kullanılır.

GAP

```
gap> G := SymmetricGroup( 3 ); FG := GroupRing( GF( 2 ), G);
Sym( [ 1 .. 3 ] )
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> L := LieAlgebra( FG );
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> IsAbelian( G );
false
gap> IsAbelian( L );
true
gap> IsLieAbelian( L );
false
```

`IsLieAlgebraOfGroupRing` fonksiyonu L Lie cebirinin oluşturulduğu asosyatif cebirin bir grup halkası olup olmadığını denetler.

GAP

```
gap> IsLieAlgebraOfGroupRing( L );
true
```

`LieCentre` fonksiyonu bir $K[G]$ grup cebiri üzerinde tanımlanmış Lie cebirinin merkezini verir. Bir Lie cebirinin merkezi, G grubunun merkezi ve K cismi tarafından üretilen grup cebirin Lie cebiridir. L Lie cebirinin merkezi olan C bir ideal oluşturur.

$R[G]$ grup halkası tarafından oluşturulmuş L Lie cebirinden G grubunu elde etmek için `UnderlyingGroup` fonksiyonu kullanılır.

GAP

```
gap> F := GF( 2 ); G := SymmetricGroup( 3 ); FG := GroupRing( F, G );
GF(2)
Sym( [ 1 .. 3 ] )
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> L := LieAlgebra( FG );
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> UnderlyingGroup( L );
Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> LeftActingDomain( L );
GF(2)
```

Örnek 1.8 V,F üzerine sonlu-boyutlu vektör uzayı olsun. V den V ye bütün lineer fonksiyonların kümesi $GL(V)$ olarak yazılır. Bu da yine F üzerine bir vektör uzayıdır. $[\ ,\ ]$ Lie braket işlemi, her $x,y \in GL(V)$ için, $\circ$ işlemi fonksiyonların bileşke işlemi olmak üzere

$$[x,y] := x \circ y - y \circ x$$

şeklindedir. Böylelikle $GL(V)$ bir Lie cebirdir. Ayrıca $GL(V)$ ye *genel lineer cebir* denir.

Tanım 1.14 F üzerinde L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun. $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ lineer fonksiyonu her $x,y \in L_1$ için

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

ise φ ye bir homomorfizm denir. Burada eşitliğin sol tarafındaki L_1 in, sağ tarafındaki ise L_2 nin braket işlemidir. φ bire bir ve örten ise φ bir izomorfizmdir.

Örnek 1.9 L bir Lie cebiri olsun. $x,y \in L$ için

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Ad}: & L & \longrightarrow & \mathrm{GL}(L) \\ & x & \longmapsto & ((\mathrm{Ad})(x))(y) = [x,y] \end{array}$$

fonksiyonu bir Lie cebir homomorfizmidir. Bu homomorfizme Adjoint homomorfizmi denir. Ad in çekirdeği L nin merkezidir.

`NaturalBijectionToLieAlgebra` fonksiyonu $f : A \rightarrow L$ şeklinde birebir örten fonksiyonu oluşturur. Bu fonksiyon, cebir izomorfizmi olmamasına rağmen bir vektör uzayı izomorfizmidir.

GAP
```
gap> F := GF( 2 ); G := SymmetricGroup( 3 ); FG := GroupRing( F, G );
GF(2)
Sym( [ 1 .. 3 ] )
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> t := NaturalBijectionToLieAlgebra( FG );
MappingByFunction( <algebra-with-one over GF(2), with
2 generators>, <Lie algebra over GF(
2)>, <Operation "LieObject">, function( y ) ... end )
```

`NaturalBijectionToAssociativeAlgebra` fonksiyonu yukarıda tanımlanan f fonksiyonunun $f^{-1} : L \rightarrow A$ biçiminde ters fonksiyonu verir.

GAP
```
gap> G := SymmetricGroup(3); FG := GroupRing( GF( 2 ), G );
Sym( [ 1 .. 3 ] )
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> L := LieAlgebra( FG );
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> s := NaturalBijectionToAssociativeAlgebra( L );
MappingByFunction( <Lie algebra over GF(2)>, <algebra-with-one over GF(
2), with 2 generators>, function( y ) ... end, <Operation "LieObject"> )
gap> InverseGeneralMapping( s ) = NaturalBijectionToLieAlgebra( FG );
true
```

1.4 Lie cebirleri üzerinde Önçaprazlanmış modüller

Tezin bundan sonraki kısmında k bir birimli değişmeli halka olup, tüm Lie cebirleri k üzerinde tanımlı olacaktır. Lie cebirleri üzerinde önçaprazlanmış modüller (Casas vd., 2012) de tanımlanmış ve bu kategoride etkilerin sunumları incelenmiştir. Bu kısım hazırlanırken (Casas vd., 2012) de verilen bazı tanım ve sonuçlar kullanılmıştır.

Tanım 1.15 L_0 ve L_1 birer Lie cebiri olsun. L_0 ın L_1 üzerine $l_0 \in L_0,\ l_1 \in L_1$ için $l_0 \cdot l_1$ şeklinde gösterilen etkisi ile birlikte $d : L_1 \longrightarrow L_0$ dönüşümü her $l_0 \in L_0,\ l_1 \in L_1$ için

$$d\,(l_0 \cdot l_1) = [l_0, d(l_1)]$$

şartını sağlıyorsa $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ yapısına Lie cebirleri üzerinde bir önçaprazlanmış modül denir.

Buna ek olarak, her $l_1, l_1' \in L_1$ için

$$d(l_1) \cdot l_1' = \left[l_1, l_1'\right]$$

şartı sağlanıyorsa $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ ye bir çaprazlanmış modül denir. Bu son eşitliğe Peiffer özdeşliği denir.

Örnek 1.10 L bir Lie cebiri ve N, L nin bir ideali olsun. Bu durumda $N \xrightarrow{inc} L$ bir önçaprazlanmış modüldür. Burada etki eşsunum(adjoint representation) ile tanımlanır. Özel olarak, $L \xrightarrow{id} L$ ve $0 \xrightarrow{inc.} L$ yapıları da birer önçaprazlanmış modüldür.

Örnek 1.11 L bir Lie cebiri ve M bir abelyen olmayan L-Lie cebiri olsun. Bu durumda $M \xrightarrow{0} L$ bir önçaprazlanmış modüldür. Özel olarak, eğer L bir abelyen olmayan Lie cebiri ise, $(L, L, 0)$ ve $(L, 0, 0)$ da birer önçaprazlanmış modüldür ve üç örnekte çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 1.12 L bir Lie cebiri olsun. $\pi_1(x_1, x_2) = x_1, x_1, x_2 \in L$ şeklinde tanımlanan $\pi_1 : L \times L \longrightarrow L$ izdüşümü ve L nin $L \times L$ üzerine $x \cdot (x_1, x_2) = ([x, x_1], 0), x, x_1, x_2 \in L$ şeklinde tanımlı etkisi ile birlikte $L \times L \xrightarrow{\pi_1} L$ bir önçaprazlanmış modül olup çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 1.13 M bir abelyen olmayan Lie cebiri olsun. $M_{\mathrm{ab}} = M/[M, M]$ olsun. M_{ab} nin M üzerine aşikar etkisi ile birlikte $\pi : M \longrightarrow M_{\mathrm{ab}}$ bir önçaprazlanmış modül olup çaprazlanmış modül değildir.

Örnek 1.14 M ve L birer Lie cebiri ve L nin M üzerine bir etkisi olsun. $\pi_1 : L \ltimes M \longrightarrow L, \pi_1(l, m) = l$, kanonik iz düşümünü ve L nin $L \ltimes M$ üzerine $l \cdot (l', m) = ([l, l'], l \cdot m)$ şeklinde tanımlı etkisini düşünelim. Bu durumda $L \ltimes M \xrightarrow{\pi_1} L$ bir önçaprazlanmış modül olup çaprazlanmış modül değildir.

Tanım 1.16 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ ve $M : M_1 \xrightarrow{d'} M_0$ önçaprazlanmış modüller, $f : L_1 \longrightarrow M_1$ ile $g : L_0 \longrightarrow M_0$ birer Lie cebir homomorfizmi olmak üzere

$$d' f = g d$$

ve her $l_0 \in L_0,\ l_1 \in L_1$ için

$$f(l_0 \cdot l_1) = g(l_0) \cdot f(l_1)$$

oluyorsa (f, g) ikilisine L ve M arasında bir önçaprazlanmış modül morfizmi denir.

Böylelikle Lie cebirleri üzerinde önçaprazlanmış modüller kategorisi tanımlanabilir. Bu kategori **PXLie** ile gösterilecektir. **PXLie**, semi-abelian, tripleable kategori olup bir interest kategorisi değildir. Detaylar bir sonraki bölümde verilecektir.

Tanım 1.17 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0, L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L'_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. Eğer $L'_1,\ L'_0$ sırasıyla L_1 ve L_0 ın altcebirleri, $d' = d' \mid_{L_1}$ve L'_0 ın L'_1 üzerine etkisi L_0 ın L_1 üzerine etkisinden indirgeniyor ise L'ne L nin bir önçaprazlanmış altmodülü denir.

Tanım 1.18 $L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L'_0, L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ ın önçaprazlanmış altmodülü olsun. L'_1 ile L'_0, sırasıyla L_1 ve L_0 ın idealleri, her $l_0 \in L_0,\ l'_1 \in L'_1$ için $l_0 \cdot l'_1 \in L'_1$ ve her $l'_0 \in L'_0,\ l_1 \in L_1$ için $l'_0 \cdot l_1 \in L'_1$ ise L' ne L nin bir önçaprazlanmış ideali denir ve bu durum $L' \trianglelefteq L$ şeklinde gösterilir.

Bunun bir sonucu olarak $L/L' : L_1/L'_1 \longrightarrow L_0/L'_0$ bölüm önçaprazlanmış modülü elde edilir. Önçaprazlanmış ideal tanımı bölüm objesindeki etkinin iyi tanımlılığını garanti eder.

$(f,g) : L \to M$ bir önçaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda (Çek$f$,Çek$g, d\mid$) ye (f,g) nin çekirdeği denir ve bu önçaprazlanmış modül L nin bir önçaprazlanmış idealidir. Benzer şekilde (Görf,Gör$g, d'\mid$) ye (f,g) nin görüntüsü denir ve bu önçaprazlanmış modül M nin bir önçaprazlanmış altmodülüdür.

$(f,g) : L \longrightarrow M$ ve $(f',g') : M \longrightarrow L'$ birer önçaprazlanmış modül morfizmi olsun. Eğer Gör(f,g) =Çek(f',g') ise $L \xrightarrow{(f,g)} M \xrightarrow{(f',g')} L'$ dizisine M de tam dizi denir. Eğer $0 \longrightarrow L \rightarrowtail M \twoheadrightarrow L' \longrightarrow 0$ her bileşende tam ise bu diziye **PXLie** de bir kısa tam dizi denir. (Burada 0, aşikar önçaprazlanmış modülü, bir başka deyişle **PXLie** deki sıfır objeyi temsil etmektedir).

1.4.1 Bir Önçaprazlanmış Modülün Aktörü

Bu kısım hazırlanırken (Casas vd., 2012) çalışması referans alınmıştır.

Tanım 1.19 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. $\mu_0 : L_0 \longrightarrow L_0,\ \mu_1 : L_1 \longrightarrow L_1$ derivasyonları her $l_0 \in L_0,\ l_1 \in L_1$ için

$$\begin{array}{ll} [i)] & \mu_0 d = d\mu_1 \\ [ii)] & \mu_1(l_0 \cdot l_1) = l_0 \cdot \mu_1(l_1) + \mu_0(l_0) \cdot l_1 \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa (μ_1, μ_0) ikilisine L nin bir derivasyonu denir.

L önçaprazlanmış modülünün tüm derivasyonlarının kümesi $Der(L)$ ile gösterilsin.

$Der(L)$ bir Lie cebiri olup üzerindeki ikinci işlem, her $(\mu_1,\mu_0),(\alpha_1,\alpha_0) \in Der(L)$ için $[(\mu_1,\mu_0),(\alpha_1,\alpha_0)] = ([\mu_1,\alpha_1],[\mu_0,\alpha_0])$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.20 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. $\alpha, \alpha_1 : L_1 \longrightarrow L_1$, $\beta : L_0 \longrightarrow L_0$ birer Lie derivasyonu ve $\partial : L_0 \longrightarrow L_1$ bir çaprazlanmış derivasyon $\beta := d\partial$ olmak üzere

$$\begin{array}{ll} D1. & \alpha(l_0 \cdot l_1) = l_0 \cdot \alpha(l_1) + [\partial l_0, l_1] \\ D2. & \alpha_1(\, l_0 \cdot l_1) = l_0 \cdot \alpha_1(l_1) + \beta(l_0) \cdot l_1 \\ D3. & \beta d = d\alpha_1 = d\alpha \end{array}$$

şartlarını sağlayan tüm $(\alpha, \partial, \alpha_1)$ üçlülerinin kümesi $\mathfrak{D}(L)$ ile gösterilir..

$\mathfrak{D}(L)$ nin elemanları L önçaprazlanmış modülünün genelleştirilmiş derivasyonları olarak adlandırılır.

$\mathfrak{D}(L)$ üzerinde $[\partial, \partial'] = \partial d \partial' - \partial' d \partial$ olmak üzere her $(\alpha, \partial, \alpha_1)$, $(\alpha', \partial', \alpha_1') \in \mathfrak{D}(L)$, $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{rl} (\alpha, \partial, \alpha_1) + (\alpha', \partial', \alpha_1') & = (\alpha + \alpha', \partial + \partial', \alpha_1 + \alpha_1') \\ k(\alpha_l, \partial_l, \alpha_{1l}) & = (k\alpha_l, k\partial_l, k\alpha_{1l}) \\ [(\alpha, \partial, \alpha_1), (\alpha', \partial', \alpha_1')] & = ([\alpha, \alpha'], [\partial, \partial'], [\alpha_1, \alpha_1']) \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir Lie cebiri yapısı vardır.

$Der(L)$ nin $\mathfrak{D}(L)$ üzerine

$$\begin{array}{rcl} ((\eta_1, \eta_0), (\alpha_l, \partial_l, \alpha_{1l})) & \mapsto & (\eta_1, \eta_0) \cdot (\alpha_l, \partial_l, \alpha_{1l}) \\ & = & ([\eta_1, \alpha_l], \eta_1 \partial_l - \partial_l \eta_0, [\eta_1, \alpha_{1l}]) \end{array}$$

şeklinde tanımlı

$$Der(L) \times \mathfrak{D}(L) \longrightarrow \mathfrak{D}(L)$$

fonksiyonu vasıtasıyla bir etkisi vardır.

Şimdi her $(\alpha_l, \partial_l, \alpha_{1l}) \in \mathfrak{D}(L)$ için $\Delta(\alpha, \partial, \alpha_1) = (\alpha_1, \beta_1)$ şeklinde $\Delta : \mathfrak{D}(L) \longrightarrow Der(L)$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda

$$\Delta : \mathfrak{D}(L) \longrightarrow Der(L)$$

yukarıda tanımlanan etki ile birlikte bir önçaprazlanmış modüldür. (Detaylar için bakınız (Casas vd., 2012)).

Tanım 1.21 $\Delta : \mathfrak{D}(L) \longrightarrow Der(L)$ önçaprazlanmış modülüne $L : L_1 \longrightarrow L_0$ önçaprazlanmış modülünün aktörü denir ve $Act(L)$ ile gösterilir.

Burada tanımlanan aktör objesi, semi-abelyen kategorilerdeki tanımlı split extension classifier objesine karşılık gelmektedir. Semi-abelyen kategorilerde etkiler, bu objeler yardımıyla tanımlanmaktadır.

Örnek 1.15 $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri olsun. $L : \mathfrak{g} \xrightarrow{id} \mathfrak{g}$ bir önçaprazlanmış modüldür. $\mathfrak{D}(L) = \{(\alpha_l, \partial_l, \alpha_{1l}) : \alpha_l = \partial_l = \alpha_{1l}, \alpha_l \in Der(\mathfrak{g})\}$, $Der(L) = \{(\alpha_l, \alpha_l) : \alpha_l \in Der(\mathfrak{g})\} \cong Der(\mathfrak{g})$ ve $\Delta(\alpha_l, \partial_l, \alpha_{1l}) = (\alpha_l, \alpha_l)$ olmak üzere $Act\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, id) := (Der(\mathfrak{g}), Der(\mathfrak{g}), id)$ dir.

Şimdi herhangi bir $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ önçaprazlanmış modülü için $(\varepsilon, \eta) : L \longrightarrow Act(L)$ kanonik dönüşümü hatırlansın.

Önerme 1.22 $\varepsilon : L_1 \longrightarrow \mathfrak{D}(L)$, $\eta : L_0 \longrightarrow Der(L)$ dönüşümleri her $l_1, l_1' \in L_1$, $l_0, l_0' \in L_0$ için $\alpha_{l_1}(l_1') = [l_1, l_1']$, $\alpha_{1l_1}(l_1') = d\,(l_1) \cdot l_1'$, $\partial_{l_1}(l_0) = -l_0 \cdot l_1$, ve $\eta_{1l_0}(l_1) = l_0 \cdot l_1$, $\eta_{0l_0}(l_0') = [l_0, l_0']$ olmak üzere $\varepsilon(l_1) = (\alpha_{l_1}, \partial_{l_1}, \alpha_{1l_1})$, $\eta(l_0) = (\eta_{1l_0}, \eta_{0l_0})$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\varepsilon, \eta) : L \longrightarrow \mathrm{Act}(L)$ bir önçaprazlanmış modül homomorfizmidir.

İspat: Bakınız (Casas vd., 2012). □

$(\varepsilon, \eta) : L \longrightarrow Act(L)$ kanonik dönüşüm olsun. (ε, η) nin görüntüsü $\mathfrak{I}(L)$ ile gösterilecektir. Yani,

$$\mathfrak{I}(L) := (Gör\varepsilon, Gör\eta, \Delta|_{\text{Gör}\varepsilon}).$$

Bu obje **PXLie** de, iç derivasyonların Lie cebirleri için oynadığı role benzer bir rol oynar. Bu iki yapının haiz olduğu özellikler aşağıdaki önermede şekillendirilmiştir.

$Act\,(L)\,/\mathfrak{I}(L)$ bölüm önçaprazlanmış modülü $\mathfrak{O}(L)$ ile gösterilir, ve dış derivasyonları olarak adlandırılır.

Önerme 1.23 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$, $L' : L_1' \xrightarrow{d'} L_0'$ ve $M : M_1 \xrightarrow{d''} M_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. Eğer $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow 0$, **PXLie** içinde bir kısa tam dizi ise

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow (\sigma_1, \sigma_2) & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{I}(L) & \longrightarrow & Act(L) & \longrightarrow & \mathfrak{O}(L) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diagramını değişmeli yapacak biçimde bir $(\sigma_1, \sigma_2) : M \to Act(L)$ homomorfizmi vardır.

İspat: Bakınız (Casas vd., 2012). □

Tanım 1.24 $L' : L_1' \xrightarrow{d'} L_0'$ ve $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. Eğer bir $(\sigma, \tau) : L \longrightarrow Act\,(L')$ morfizmi varsa L nin L' üzerine etkisi vardır denir.

Örnek 1.16 $L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L'_0$ ve $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ birer önçaprazlanmış modül ve $L' \trianglelefteq L$ olsun. $\sigma : L_1 \longrightarrow \mathfrak{D}(L'_1)$ dönüşümü $\alpha_{l_1}(l'_1) = [l_1, l'_1]$, $\partial_{l_1}(l'_0) = -l'_0 \cdot l_1$, $\alpha_{1l_1}(l'_1) = d(l_1) \cdot l'_1$ $l_1 \mapsto (\alpha_{l_1}, \partial_{l_1}, \alpha_{1l_1})$ şeklinde ve $\tau : L_0 \longrightarrow Der(L')$ dönüşümü $\eta_{1l_0}(l'_1) = l_0 \cdot l'_1, \eta_{0l_0}(l'_0) = [l_0, l'_0]$ olmak üzere $l_0 \mapsto (\eta_{1l_0}, \eta_{0l_0})$ şeklinde tanımlansın. $(\sigma, \tau) : L \longrightarrow Act(L')$ dönüşümü vasıtasıyla L nin L' üzerine etkisi vardır. Özel olarak, $L' = L$ alındığında (σ, τ) dönüşümü, $(\varepsilon, \eta) : L \longrightarrow Act(L)$ kanonik dönüşümüne eşit bulunur.

Tanım 1.25 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$, $L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L'_0$, $A : A_1 \xrightarrow{\delta} A_0$ birer önçaprazlanmış modül ve A nın L ve L' üzerine sırasıyla $(\sigma, \tau) : A \longrightarrow Act(L)$ ve $(\sigma', \tau') : A \longrightarrow Act(L')$ dönüşümleri vasıtasıyla etkisi olsun. $(f_1, f_0) : L \longrightarrow L'$ önçaprazlanmış modül homomorfizmi her $l_0 \in L_0$, $l_1 \in L_1$, $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ için

1) $f_0(a_0 \cdot l_0) = a_0 \cdot f_0(l_0)$

2) $f_1(a_0 \cdot l_1) = a_0 \cdot f_1(l_1)$

3) $f_1(\partial_{a_1}(l_0)) = \partial'_{a_1}(f_0(l_0))$

şartını sağlıyorsa (f_1, f_0) dönüşümü A nın L ve L' üzerine etkisini korur denir. (Burada ∂_{a_0} ve ∂'_{a_0}, sırasıyla $\sigma(a_1)$ ve $\sigma'(a_1)$ üçlülerindeki çaprazlanmış derivasyonlardır).

$L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. $(\varepsilon, \eta) : L \longrightarrow \mathrm{Act}(L)$, önçaprazlanmış modüller kategorisinde bir önçaprazlanmış modül oluşturur. Yani *ÖnCat*^{2}-Lie cebirleri kategorisinde $(L_1, L_0, w_0^L, w_1^L) \xrightarrow{(\varepsilon,\eta)} (\mathfrak{D}(L) \rtimes Der(L), w_0^{Act(L)}, w_1^{Act(L)})$ homomorfizmi bir önçaprazlanmış modüldür.

Tanım 1.26 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ ile $L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L'_0$ birer önçaprazlanmış modül ve L' nün L üzerine etkisi var olsun. $(d', d) : L'_1 \ltimes L_1 \longrightarrow L'_0 \ltimes L_0$ dönüşümü her $l_1 \in L_1$, $l'_1 \in L'_1$ için $(d', d)(l'_1, l_1) = (d'(l'_1), d(l_1))$ şeklinde tanımlansın. Bu etki ile birlikte $(d', d) : L'_1 \ltimes L_1 \longrightarrow L'_0 \ltimes L_0$ bir önçaprazlanmış modüldür. Bu önçaprazlanmış modüle L ve L' nün yarı-direkt çarpımı denir.

$(\varepsilon, \eta) : L \longrightarrow Act(L)$ kanonik dönüşümünün tanımından;

$\text{Çek}\varepsilon = Z(L_1) \cap \{l_1 \in L_1 : \text{her } l'_1 \in L_1, l_0 \in L_0 \text{ için } d(l_1) \cdot l'_1 = 0,\ l_0 \cdot l_1 = 0\}$,

$\text{Çek}\eta = Z(L_0) \cap \{l_0 \in L_0 : \text{her } l_1 \in L_1 \text{ için } l_0 \cdot l_1 = 0\}$ dir.

Çekε ve Çekη, sırasıyla $\mathcal{Z}_1 = Z(L_1) \cap Inv(L_1)$ ve $\mathcal{Z}_0 = Z(L_0) \cap St_{L_0}(L_1)$ şeklinde gösterilir.

$(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_0, d\left|_{\mathcal{Z}_1}\right.)$ ye $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ önçaprazlanmış modülünün merkezi denir ve $\mathcal{Z}(L)$ ile gösterilir.

Örnek 1.17 $L_1 = L_0 = g$ olsun. $\mathcal{Z}(g \xrightarrow{id} g) = \mathcal{Z}(g) \xrightarrow{id} \mathcal{Z}(g)$ olur.

Eğer bir önçaprazlanmış modül, merkezine eşitse buna abelyen önçaprazlanmış modül denir.

Örnek 1.18 L bir abelyen Lie cebiri olsun ve $N \trianglelefteq L$ olsun. $L \xrightarrow{id} L, L \longrightarrow 0$ ve $N \xrightarrow{inc.} L$ önçaprazlanmış modülleri abelyendir.

Tanım 1.27 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlabnmış modül olsun. $[L_0, L_1]$, L_1 in $\{l_0 \cdot l_1 \,|\, l_0 \in L_0, l_1 \in L\}$ tarafından üretilen ideali, $[L_1, L_1]$ ve $[L_0, L_0]$ ise sırasıyla L_1 in ve L_0 ın komütatör idealleri olmak üzere, $[L, L] :\ [L_1, L_1] \oplus [L_0, L_1] \xrightarrow{d} [L_0, L_0]$ önçaprazlanmış modülüne L nin komütatör ideali denir.

Tanımdan direkt olarak $L : L_1 \longrightarrow L_0$ önçaprazlanmış modülünün abelyen olması için gerek ve yeter şartın $[L, L] = 0$ olması sonucuna ulaşılabilir.

Teorem 1.28 Herhangi $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ önçaprazlanmış modülü için $[L, L]$, $L_{\mathrm{ab}} : L_1 / ([L_1, L_1] \oplus [L_0, L_1]) \xrightarrow{d} L_0 / [L_0, L_0]$ yi abelyen yapan en küçük idealdir.

İspat: Bakınız (Casas vd., 2012). $\square$

BÖLÜM 2

ÖNÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

2.1 Lie Cebirleri Üzerinde Önçaprazlanmış Modüller Kategorisinin Kategoriksel Özellikleri

2.1.1 Üçlenebilirlik(Tripleability) Özelliği

Bu kısımda öncelikli olarak üçlenebilir kategorilerle ilgili bazı temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Bu tanımlamalarla ilgili detaylı bilgilere (Adămek vd., 1990), (Barr ve Beck, 1966; Barr ve Beck, 1969), (Barr ve Wells, 1985), (Borceux, 1994 a,b,c), (Herlich ve Strecker, 1972) ve (MacLane, 1971) kaynaklarından ulaşılabilir. Daha sonra Lie cebirleri üzerinde önçaprazlanmış modüller kategorisinin tripleable olduğu ispatlanacaktır.

M bir küme $\mu : M \times M \longrightarrow M, \eta : \{1\} \longrightarrow M$ iki fonksiyon olsun.(Burada$\{1\}, M$ nin tek elemanlı bir altkümesini temsil etmektedir). $d : \{1\} \times M \longrightarrow M, d(1,m) = m, l : M \times 1 \longrightarrow M, (m,1) = m$ olmak üzere;

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "id\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times id"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \times M \arrow[r, "\eta\times id"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \times \{1\} \arrow[l, "id\times\eta"'] \arrow[d, "\ell"] \\
M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli ise $\langle M, \eta, \mu \rangle$ sistemine bir monoid denir ve 1 elemanına monoidin birim elemanı denir.

Tanım 2.1 X bir kategori, $T : X \longrightarrow X$ bir funktor ve $\eta : I_X \longrightarrow T$ ve $\mu : T^2 \longrightarrow T$ birer doğal transformasyon olsun. ($T^2 = T \circ T$ olmak üzere)

$$\begin{tikzcd} TT \arrow[r, "\mu"] & T & TT \arrow[l, "\mu"'] \\ & T \arrow[ul, "T\eta"] \arrow[u, equal] \arrow[ur, "\eta T"'] & \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\ TT \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli ise T $= \langle T, \eta, \mu \rangle$ sistemine X içinde bir monoid denir.

(MacLane, 1971) de belirtildiği üzere monad tanımı, kümeler üzerinde monoid tanımının bir genellemesidir. Bir M monoidini oluşturan kümenin yerine $T = X \longrightarrow X$ funktoru, çarpımın yerine (ikili işlem) $\mu = TT \longrightarrow T$ transformasyonu ve birim eleman yerine $\eta : I_X \longrightarrow T$ transformasyonu yer almaktadır.

Yani X içinde bir monad, X üzerinde tanımlı funktorların oluşturduğu bir monoiddir. Burada $\{1\}$ kümesinin yerini birim funktor almaktadır. Literatürde monoid; dual standard construction, monoid ve triad şeklinde de adlandırılmaktadır. Yaygın olarak monad ve triple şeklinde adlandırılmaktadır.

$\langle T, \eta, \mu \rangle$ monadında η ve μ sırasıyla birim(unit) ve çarpım(multiplication) olarak bilinir. Verilen diyagramların değişmeliliği, sol ve sağ birimlilik ve bileşke özelliklerinin varlığını göstermektedir.

$\langle T, \eta, \mu \rangle$ bir monad ve $A \in Ob(X)$ olsun. $h : T(A) \longrightarrow A$ morfizmi

$$\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "T_h"] \arrow[d, "\mu_A"'] & TA \arrow[d, "h"] \\ TA \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "id"'] & TA \arrow[d, "h"] \\ & A \end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapıyorsa $\langle A, h \rangle$ ikilisine $\langle T, \eta, \mu \rangle$ monadı üzerinde bir T-cebir denir. h morfizmine cebirin yapı dönüşümü(structure map) denir.

(A, h) ve (A', h') iki T-cebir olmak üzere $f : A \longrightarrow A'$ morfizmi yapı dönüşümleri ile uyumlu ise f ye (A, h) ve (A', h') T-cebirleri arasında bir morfizm denir. T cebirlerin kategorisi X^T ile gösterilir.

(MacLane, 1971) den hatırlanacağı üzere, X ve Y iki kategori ve $F : X \longrightarrow Y, U : Y \longrightarrow X$ iki funktor olmak üzere her $A \in Ob(X)$ ve $B \in Ob(Y)$ için

$$Hom_X(A, U(B)) \cong Hom_Y(F(A), B)$$

izomorfizmi (kümeler için) mevcut ise (F, U) ikilisine eş ikili (adjoint pair) denir.

Şimdi (Barr ve Beck, 1966; Barr ve Beck,1969) çalışmalarında verilen, eş ikililerin üçlenebilir (tripleable) olmasının tanımı verilecektir. Fakat tezde bu orjinal tanım yerine buna denk olan (Barr ve Wells, 1985) de verilen tanımlama kullanılacaktır.

Tanım 2.2 Eğer $\Phi : Y \longrightarrow X^T$ kategoriler arasında bir denklik ise (F, U) eş ikilisine üçlenebilir (tripleable) denir.

Teorem 2.3 (Barr ve Wells, 1985) *Set*, kümeler kategorisi olmak üzere $U : D \longrightarrow Set$ funktorunun tripleable olabilmesi için gerek ve yeter şart U nun bir sol eşini (left adjoint) var olması ve aşağıdaki üç şartın sağlanmasıdır:

(i) D nin kernel çiftleri ve coequalizerleri vardır.

(ii) $p : Y \longrightarrow Z$ nin coequalizer olması için gerek ve yeter şart $U_p : U(Y) \longrightarrow U(Z)$ nin coequalizer olmasıdır.

(iii) $X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$ nin D için kernel pair olması için gerek ve yeter şart $U(X) \underset{U_t}{\overset{U_s}{\rightrightarrows}} U(Y)$ nin *Set* içinde kernel pair olmasıdır.

Şimdi bu kriter $U : PXLie \longrightarrow Set, (L : L_1 \xrightarrow{d} L_0) \longmapsto L_1 \times L_0$ şeklinde tanımlanan U funktoru için uygulanacaktır.

Önerme 2.4 $U : PXLie \longrightarrow Set$ funktorunun sol eşi (left adjointi) vardır.

İspat: $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. $L_1 * L_0, L_1 \times L_0$ üzerindeki serbest Lie cebiri,

$$\overline{L_1} = Ker(L_1 * L_0 \xrightarrow{(0,id)} L_0) \quad , \quad (d, Id) : L_1 * L_0 \longrightarrow L_0$$

olmak üzere $U_1(L_1, L_0, d) = d$ şeklinde tanımlanan $U_1 : PXLie \longrightarrow Lie \downarrow Lie$ funktorunun $F_1(L_1 \xrightarrow{d} L_0) = (\overline{L_1}, L_0, (d, Id)\mid_{\overline{L_1}})$ şeklinde tanımlanan $F_1 : Lie \downarrow Lie \longrightarrow PXLie$ sol eş funktoru vardır. Yine $U_2(L_1 \xrightarrow{d} L_0) \longrightarrow L_1 \times L_0$ şeklinde tanımlanan $U_2 : Lie \downarrow Lie \longrightarrow Lie$ funktorunun $F_2(L_1) = (L_1 \xrightarrow{i_1} L_1 * L_1)$ şeklinde tanımlanan $F_2 : Lie \longrightarrow Lie \downarrow Lie$ sol eş funktoru vardır. Yine $U_3 : Lie \longrightarrow Set$ funktorunun bilinen $F_3 : Set \longrightarrow Lie$ sol eş funktoru (kümeyi, bu küme üzerinde tanımlı serbest Lie cebirine götüren funktor) vardır.

Böylelikle

$$PXLie \underset{F_1}{\overset{U_1}{\rightleftarrows}} Lie \downarrow Lie \underset{F_2}{\overset{U_2}{\rightleftarrows}} Lie \underset{F_3}{\overset{U_3}{\rightleftarrows}} Set$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Bu funktorların bileşkesi yardımıyla

$$\mathcal{U} = U_3 \circ U_2 \circ U_1 : PXLie \longrightarrow Set$$

funktorunun

$$F = F_3 \circ F_2 \circ F_1 : Set \longrightarrow PXLie$$

funktorunun sağ eş funktoru olduğu sonucu elde edilir. Yani bir $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ önçaprazlanmış modülünün U altındaki görüntüsü $L_1 \times L_0$ olup $L_1 \times L_0$ ın F altındaki görüntüsü; $K = \mathfrak{L}(L_1 \times L_0), \overline{K} = Ker(K * (K * K) \xrightarrow{(0,id)} K * K), (i_1, id) : K * (K * K) \longrightarrow K * K$ ve $K * K$ nın $\overline{K}$ ne etkisi eş gösterim (adjoint representation) yardımıyla tanımlanmak üzere $(\overline{K}, K * K, \langle i_1, id \rangle \mid_{\overline{K}})$ önçaprazlanmış modülüdür. $\square$

Teorem 2.5 $\mathcal{U} : PXLie \longrightarrow Set$ funktoru tripleable funktordur.

İspat: Teorem 2.3 deki şartların sağlandığı gösterilmelidir. İstenen sonuçlar (Casas vd., 2010 a) ve (Ellis, 1993) çalışmalarında yapılan hesaplamalara benzer hesaplamalarla kolayca elde edilir. $\square$

Sonuç 2.6 **PXLie** kategorisi bir üçlenebilir kategoridir.

2.2 İnterest Kategorisi

(Orzech, 1972), (Datuashvili, 1995) ve (Casas vd., 2010b) çalışmalarında interest kategorileri tanımlanmış ve bu kategorilerde bazı cebirsel özellikler incelenmiştir. Daha sonra hasıl olan ihtiyaçlara binaen (Boyaci vd., preprint) çalışmasında modifiye interest kategorileri tanımlanmıştır. Şimdi bu tanım hatırlatılsın.

Ω ve $\mathbb{E}$ sırasıyla, gruptaki işlemler kümesini ve grup kurallarını içine alacak şekildeki özdeşlikler kümesini temsil etmek üzere, $\mathbb{C}$ sistemi, Ω ve $\mathbb{E}$ ile birlikte grupların bir kategorisi olsun ve bu kategori için aşağıdaki şartlar sağlansın:

Ω_i, Ω daki i-li işlemlerin kümesi olsun ve C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmak üzere $x,y,z \in C$ olsun. Buna göre:

(a) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$;

(b) toplamsal grup işlemleri olan $0,-,+$ işlemleri, sırasıyla Ω_0, Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır. Ayrıca, $\Omega_2' = \Omega_2 \setminus \{+\}$, $\Omega_1' = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere, $* \in \Omega_2$ iken Ω_2', $x *^{\circ} y = y * x$ şeklinde tanımlanan $*^{\circ}$ işlemini içerir ve $\Omega_0 = \{0\}$ olarak kabul edilir;

(c) her bir $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $x*(y+z) = x*y + x*z$ özdeşliğini içerir;

(d) her bir $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y)$ ve $\omega(x) * \omega(y) = \omega(x*y)$ özdeşliklerini içerir.

C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi ve $x_1, x_2, x_3 \in C$ olsun. Buna göre:

Aksiyom 1: Her $* \in \Omega_2'$ için, $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.

Aksiyom 2: Her $(*,\overline{*}) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için,

$$(x_1 * x_2)\overline{*}x_3 = W(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1,$$
$$(x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

şeklinde tanımlanan bir W kelimesi vardır. Yani, $(x_1 * x_2)\overline{*}x_3$ elemanı, $(x_1(x_2x_3), \ldots)$ elemanlarının ürettiği alt cebirin elemanıdır.

Tanım 2.7 Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 şartlarıyla birlikte, $\mathbb{C}$ kategorisine modifiye interest kategorisi denir.

Tanımlanan bu kategorinin interest kategorisinden farkı; $\omega(x) * \omega(y) = \omega(x*y)$ şartının interest kategorisinde $\omega(x) * y = \omega(x*y)$ şeklinde olmasıdır. Bu bağlamda gruplar kategorisi bir interest kategorisi olup modifiye interest kategorisi değildir.

Bölüm 1 de **PXLie** nin $\mathrm{Pr}\mathbf{eCat}^1-\mathbf{Lie}$ ile doğal denk olduğu sonucu elde edilmişti. $\mathrm{Pr}\mathbf{eCat}^1-\mathbf{Lie}$ kategorisi (Boyaci vd., preprint) çalışmasında belirtildiği üzere bir modifiye interest kategorisi olduğundan **PXLie** kategorisi de bir modifiye interest kategorisi olarak kabul edilir. Yine (Casas vd., 2012) çalışmasından **PXLie** bir interest kategorisi değildir.

2.3 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L_0}$ Kategorisi

L_0 bir Lie cebiri olmak üzere $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L_0}$, ikinci bileşeni L_0 olan tam önçaprazlanmış modüller kategorisi olsun. Açıkça $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L_0}, \mathbf{PXLie}$ nin tüm altkategorisidir. Bu kategoride $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ ve $L' : L_1' \xrightarrow{d'} L_0$ önçaprazlanmış modülleri arasındaki morfizmler, $d'f = d$ şartını sağlayan $f : L_1 \longrightarrow L_1'$ Lie cebir homomorfizmleri olarak tanımlanmaktadır. Yani, orjinal formda ifade edilecek olursa, $d'f = d$ olmak üzere (f, id) Lie cebir homomorfizmi çiftidir. Şimdi yeni oluşturulan bu kategorideki (eş)çarpımlar ve sonlu (eş)limitlerin varlığı ve inşaası incelenecektir.

Önerme 2.8 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L_0}$ da aynı önçaprazlanmış modül üzerinde tanımlı mnorfizm çiftinin bir eşitleyicisi vardır.

İspat: $\mu, \mu' : (L_1, d) \longrightarrow (L_1', d')$ iki önçaprazlanmış L_0-modül olsun. $K = \{k \in K \,|\, d(k) = d'(k)\}$ olsun. $\lambda = d\,|_K$ olsun. (K, λ) bir önçaprazlanmış L_0-modüldür.

Ayrıca $\gamma : (K, \lambda) \longrightarrow (L_1, d)$ içine dönüşümü bir önçaprazlanmış L_0-modül morfizmidir. Yani kategoriksel ifade ile $(K, \lambda), (L_1, d)$ nin bir altobjesidir. $\mu\gamma' = \mu'\gamma'$ şartını sağlayan $\gamma' : (K', \lambda') \longrightarrow (L_1, d)$ önçaprazlanmış modül morfizminin var olduğu düşünülsün. Böylece her $k' \in K'$ için $\mu(\gamma'(k')) = \mu'(\gamma'(k'))$ olur ki buradan $\gamma'(k') \in K$ bulunur. Buradan hareketle, ξ :

$K' \longrightarrow K$ dönüşümü $\xi(k') = \gamma'(k')$ şeklinde tanımlansın.

$$\begin{tikzcd}
(K,\lambda) \arrow[r, "\gamma"] & (L_1,d) \arrow[r, shift left, "\mu_1'"] \arrow[r, shift right, "\mu_0'"'] & (L_1,d') \\
(K',\lambda') \arrow[u, dashed, "\xi"] \arrow[ur, "\gamma'"'] & &
\end{tikzcd}$$

γ' ve γ bir morfizm olduğundan ξ da bir morfizmdir. Ayrıca diyagramı değişmeli yapacak biçimde tek türlü tanımlanabilir. Sonuç olarak (K,λ) , $\mu_1,\mu_1' : (L_1,d) \longrightarrow (L_1',d')$ morfizmlerinin eşitleyicisidir. $\square$

Teorem 2.9 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ kategorisi geriçekmelere(pullback) sahiptir.

İspat: $\mu_L : (L,\partial_L) \longrightarrow (M,\partial_M)$ ve $\mu_K : (K,\partial_K) \longrightarrow (M,\partial_M)$ iki önçaprazlanmış modül morfizmi olsun. $K \times L$ nin $X := \{(k,l) : \partial_K(k) = \partial_L(l)\}$ şeklinde tanımlı X altkümesini ele alınsın. $X, L \times M$ çarpım Lie cebirinin bir altcebiridir.

$\varphi(k,l) = \partial_L(l) = \partial_K(k)$ şeklinde bir $\varphi : X \longrightarrow M$ dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bir önçaprazlanmış M-modüldür. Gerçekten, her $m \in M$ ve $(k,l) \in X$ için

$$\begin{aligned}
\varphi([m,(k,l)]) &= \varphi([m,k],[m,l]) \\
&= \varphi([\partial_M(m),k],[\partial_M(m),l]) \\
&= \partial_K([\partial_M(m),k]) \\
&= [\partial_M(m),\partial_K(k)] \\
&= [m,\varphi(k,l)]
\end{aligned}$$

dir.

Ayrıca izdüdüşümler yardımıyla üretilen $\pi_1 : (X,\varphi) \longrightarrow (K,\partial_K)$ ve $\pi_2 : (X,\varphi) \longrightarrow (L,\partial_L)$ morfizmleri vardır. Bu π_1 ve π_2 dönüşümleri evrensellik özelliğini sağlar. Şöyle ki, $\pi_1' : (X',\varphi') \longrightarrow (K,\partial_K)$ ve $\pi_2' : (X',\varphi') \longrightarrow (L,\partial_L)$ önçaprazlanmış modül morfizmleri $\mu_K\pi_1' = \mu_L\pi_2'$ şartını sağlasın. Bu durumda $\psi(x') = (\pi_1'(x'),\pi_2'(x'))$ şeklinde tanımlı $\psi : (X',\varphi') \longrightarrow (X,\varphi)$

dönüşümü bir önçaprazlanmış modül morfizmi olup

$$
\begin{tikzcd}
(X',\varphi') \arrow[dr, dotted, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\pi_1'"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_2'"'] & & \\
& (X,\varphi) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & (K,\partial_K) \arrow[d, "\mu_K"] \\
& (L,\partial_L) \arrow[r, "\mu_L"'] & (M,\partial_M)
\end{tikzcd}
$$

diyagramını değişmeli yapan biricik morfizmdir. □

Önerme 2.10 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ sonlu çarpımlara sahiptir.

İspat: (K,∂_K) ve (L,∂_L) iki önçaprazlanmış L_0-modül olsun.

$$
\begin{tikzcd}
& (K,\partial_K) \arrow[d] \\
(L,\partial_L) \arrow[r] & (L_0, id_{L_0})
\end{tikzcd}
$$

diyagramının geri çekmesi olan (X,φ) önçaprazlanmış L_0-modülü, (K,∂_K) ve (L,∂_L) nin çarpımıdır. Böylece $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ kategorisi sonlu çarpımlara sahiptir. □

Önerme 2.11 $\mathbb{J}$ sonlu bir kategori olmak üzere herhangi $F:\mathbb{J}\longrightarrow \mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ funktoru için $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ kategorisi bir limite sahiptir.

İspat: $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$, sonlu çarpımlara ve eşitleyicilere sahip olduğundan istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 2.12 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ kategorisi sonlu tamdır, yani, $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ tüm sonlu limitlere sahiptir.

2.3.1 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ da Eşçarpımlar Ve Eşlimitler

Önerme 2.13 $\mathbf{PXLie}/\mathbf{L}_0$ kategorisinde kaynak(source) ve hedef(target) objeleri eşit olan her morfizm çiftinin bir eş eşitleyicisi vardır.

İspat: $\mu,\mu' : (L,\partial) \longrightarrow (L',\partial')$ iki önçaprazlanmış L_0-modül morfizmi olsun. L' içinde $\{\mu(l)-\mu'(l)\,|\,l\in L\}$ kümesi tarafından üretilen ideal I olsun. Dikkat edileceği üzere $I \subseteq Ker\partial'$ olup buradan hareketle $(L'/I,\overline{\partial'})$ bir önçaprazlanmış L_0-modüldür. (Burada $\overline{\partial'}(l'+I)=\partial'(l')$ şeklinde tanımlanmaktadır.). $\rho : (L',\partial') \longrightarrow (L'/I,\overline{\partial'})$ projeksiyon dönüşümü ele alınsın. Bu morfizm yardımıyla

$$(L,\partial) \overset{\mu}{\underset{\mu'}{\rightrightarrows}} (L',\partial') \xrightarrow{\rho} (L'/I,\overline{\partial'})$$

diyagramı elde edilir. Direkt hesaplama ile evrensellik özelliğine sahip olduğu görülür. Yani $\rho'\mu=\rho'\mu'$ şartını sağlayan $\rho' : (L',\partial') \longrightarrow (M,\partial_M)$ önçaprazlanmış L_0-modül morfizmi verildiğinde de

$$\begin{tikzcd}
(L,\partial) \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "\mu'"'] & (L',\partial') \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & (L'/I,\overline{\partial'}) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
 & & (M,\partial_M)
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak biçimde bir tek $\varphi : (L'/I,\overline{\partial'}) \longrightarrow (M,\partial_M)$ önçaprazlanmış L_0-modül morfizmi vardır. $\square$

Önerme 2.14 $\mathbf{PXLie/L_0}$ kategorisi eşçarpımlara sahiptir.

İspat: $L \xrightarrow{d} L_0$ ve $K \xrightarrow{d'} L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. K nın L üzerine her $k\in K, l\in L$ için $k\cdot l=[d'(k),l]$ şeklinde tanımlanan bir etkisi mevcuttur. Bu etki $*$ ile gösterilsin. Buradan hareketle $K' \ltimes L$ semidirekt çarpımı tanımlanabilir. $\sigma : K\ltimes L \longrightarrow L_0$ homomorfizmi $\sigma(k,l)=d'(k)+d(l)$ şeklinde tanımlansın. Her $(k,l),(k',l')\in K\ltimes L$ için

$$\begin{aligned}
\sigma[(k,l),(k',l')] &= \sigma([k,k'],k*l'-k'*l+[l,l']) \\
&= d'[k,k']+d(k*l')-d(k'*l)+d[l,l'] \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d'k+dl,d'k'+dl'] &= [d'k+dl,d'k']+[d'k+dl,dl'] \\
&= [d'k,d'k']+[dl,d'k']+[d'k,dl']+[dl,dl'] \\
&= d'[k,k']-d(d'k'*l)+d(d'k*l')+d[l,l'] \\
&= d'[k,k']-d(k'*l)+d(k*l')+d[l,l']
\end{aligned}$$

olduğundan $\sigma : K\ltimes L \longrightarrow L_0$ bir Lie cebir homomorfizmidir. L_0 ın $K\ltimes L$ üzerine, her $l_0\in L_0, l\in L, k\in K$ için $l_0\cdot(k,l)=(l\cdot k, l_0\cdot l)$ şeklinde tanımlanan etkisi düşünülsün.

$$\begin{aligned}
\sigma(l_0\cdot(k,l)) &\overset{?}{=} [l_0,\sigma(k,l)] \\
\sigma(l_0\cdot(k,l)) &= \sigma(l_0\cdot k, l_0\cdot l)) \\
&= d'(l_0\cdot k)+d(l_0\cdot l) \\
&= [l_0,dk]+[l_0,dl] \\
&= [l_0,dk+dl] \\
[l_0,\sigma(k,l)] &= [l_0,d'k+d(l)]
\end{aligned}$$

olduğundan tanımlanan bu etki ile birlikte $\sigma : K \ltimes L \longrightarrow L_0$ bir önçaprazlanmış modüldür. (Fakat çaprazlanmış modül değildir). Rutin hesaplamalar sonucunda bu yapı, verilen $L \xrightarrow{d} L_0$ ve $K \xrightarrow{d'} L_0$ önçaprazlanmış modüllerinin $\mathbf{PXLie/L_0}$ de bir eşçarpımdır. $\square$

Uyarı 2.15 $C \longrightarrow L_0, K \longrightarrow L_0, L \longrightarrow L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. $(f, id) : (C \longrightarrow L_0) \longrightarrow (K \longrightarrow L_0)$ ve $(g, id) : (C \longrightarrow L_0) \longrightarrow (L \longrightarrow L_0)$ birer önçaprazlanmış modül homomorfizmi olsun. Bu durumda I, her $x \in X$ için $(g(x), 0) - (0, f(x)) = (g(x), f(x))$ formundaki elemanlar tarafından üretilen çaprazlanmış ideal olmak üzere $(K \ltimes L)/I \longrightarrow L_0$ önçaprazlanmış modülü, $K \longrightarrow L_0$ ve $L \longrightarrow L_0$ önçaprazlanmış modüllerinin bir ileri itmesi(push out)dir.

Bu iki teoremeden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.16 $\mathbf{PXLie/L_0}$ kategorisi, herhangi $F : \mathbb{J} \longrightarrow \mathbf{PXLie/L_0}$ kategorisi için eşlimitlere sahiptir, yani, $\mathbf{PXLie/L_0}$ eştam(cocomplete) kategoridir.

$\mathbf{PXLie/L_0}$ kategorisinde epimorfizmalarla ilgili temel bir özellik verilerek bu bölüm tamamlanacaktır.

Şimdi de $\mathbf{PXLie/L_0}$ kategorisinde epimorfizmalar ile örten Lie cebir homomorfizmleri arasındaki ilişki incelensin.

Teorem 2.17 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0, L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. $(\alpha, \beta) : L \longrightarrow L'$ bir epimorfizm ise α ve β birer örten Lie cebir homomorfizmasıdır.

İspat: $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0, L' : L'_1 \xrightarrow{d'} L_0$ birer önçaprazlanmış modül olsun. $(\alpha, \beta) : L \longrightarrow L'$ bir epimorfizm olsun. Direkt hesaplama sonucu β bir epimorfizmdir ki, Lie cebirleri kategorisinde her epimorfizm bir örten homomorfizm olduğundan β örtendir. $\alpha(L_1) \xrightarrow{d'} L_0$ bir önçaprazlanmış modüldür ve $inc. : \alpha(L_1) \longrightarrow L'_1$ homomorfizmi vardır. $I, K \ltimes L$ nin $\{(a, a) \,|a \in \alpha(L_1)\}$ tarafından üretilen ideali olmak üzere, yukarıda ifade edilen ileri itmelerin inşaasında $C = \alpha(L_1), L_0 = P_2, K = L = L'_1, f = g = inc.$ alınırsa, $(J_1, id) \circ (\alpha, \beta) = (J_2, id) \circ (\alpha, \beta)$ bulunur ve (α, β) bir epimorfizm olduğundan $J_1 = J_2$ dir. $\alpha(L_1) \neq L'_1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda en az bir $x \in L'_1 - \alpha(L_1)$ vardır. Dolayısıyla $J_1(x) \neq J_2(x)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha(L_1) = L'_1$ olup α bir örten Lie cebir homomorfizmidir. $\square$

BÖLÜM 3

SEMİ-COMPLETE ÖNÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

3.1 Giriş

Bu bölümde semi-complete önçaprazlanmış modüller tanımlanacak, verilen bir $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ önçaprazlanmış modülünün semi-complete olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır. Bu bağlamda, Lie cebirleri için tanımlanmış bazı cebirsel yapıların, önçaprazlanmış modüllere uyarlaması yapılıp, bu cebirsel yapılar ile semi-complete olma arasındaki ilişki(ler) incelenecektir. Benzeri çalışmalar gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller için (Lue, 1979) da ve Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modüller için (Aytekin vd., 2013) da yapılmıştır. Bu bağlamda bazı ispatlar (Aytekin vd., 2013) dakilerle paralellik gösterdiğinden ayrıntılı olarak verilmemiştir.

3.2 İç Derivasyon

$L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül ve $L_1 \rtimes L_0, L$ deki etki ile tanımlanmış olsun. Bu durumda, daha sonraki kısımlarda kullanılmak üzere $L_1 \rtimes L_0$ Lie cebirinin iç derivasyonları ile ilgili bazı özellikler araştırılacaktır. $\varepsilon, L_1 \rtimes L_0$ ın bir derivasyonu olmak üzere bu derivasyonu, $\alpha : L_1 \longrightarrow L_1, \partial : L_0 \longrightarrow L_1, \psi : L_1 \longrightarrow L_0$ ve $\beta : L_0 \longrightarrow L_0$ k-lineer dönüşümler olmak üzere, $(l_1, l_0) \in L_1 \rtimes L_0$ için,

$$\varepsilon(l_1, l_0) = (\alpha(l_1) + \partial(l_0), \psi(l_1) + \beta(l_0))$$

biçiminde tanımlanabilir. Şimdi bu k-lineer dönüşümlerin bazı özellikleri araştırılsın.

$\varepsilon : L_1 \rtimes L_0 \longrightarrow L_1 \rtimes L_0$ bir derivasyon olduğundan, her $(l_1, l_0), (m_1, m_0) \in L_1 \rtimes L_0$ için

$$\varepsilon([(l_1, l_0), (m_1, m_0)]) = [\varepsilon(l_1, l_0), (m_1, m_0)] + [(l_1, l_0), \varepsilon(m_1, m_0)]$$

olup

$$\begin{aligned}
\varepsilon([(l_1,l_0),(m_1,m_0)]) &= \varepsilon([l_1,m_1]+ {}^{l_0}m_1 - {}^{m_0}l_1, [l_0,m_0]) \\
&= (\alpha([l_1,m_1]+ {}^{l_0}m_1 - {}^{m_0}l_1) + \partial[l_0,m_0], \\
&\quad \psi([l_1,m_1]+ {}^{l_0}m_1 - {}^{m_0}l_1) + \beta[l_0,m_0]) \\
\\
[\varepsilon(l_1,l_0),(m_1,m_0)] &= [(\alpha(l_1)+\partial(l_0), \psi(l_1)+\beta(l_0)),(m_1,m_0)] \\
&= ([\alpha(l_1)+\partial(l_0),m_1] + {}^{\psi(l_1)+\beta(l_0)}m_1 \\
&\quad - {}^{m_0}(\alpha(l_1)+\partial(l_0)), [\psi(l_1)+\beta(l_0),m_0]) \\
\\
[(l_1,l_0),\varepsilon(m_1,m_0)] &= [(l_1,l_0),(\alpha(m_1)+\partial(m_0),\psi(m_1)+\beta(m_0))] \\
&= ([l_1,\alpha(m_1)+\partial(m_0)] + {}^{l_0}(\alpha(m_1)+\partial(m_0)) \\
&\quad - {}^{(\psi(m_1)+\beta(m_0))}l_1, [l_0,\psi(m_1)+\beta(m_0)])
\end{aligned}$$

bulunur. $l_0=0$ ve $m_0=0$ için

$$\begin{aligned}
&\alpha[l_1,m_1] = [\alpha(l_1),m_1] + [l_1,\alpha(m_1)] + {}^{\psi(l_1)}m_1 - {}^{\psi(m_1)}l_1 \\
&\psi[l_1,m_1] = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

$l_1=0, m_0=0$ için

$$\begin{aligned}
&\alpha[{}^{l_0}m_1] = [\partial(l_0),m_1] + {}^{\beta(l_0)}(m_1) + {}^{l_0}(\alpha(m_1)) \quad , \\
&\psi({}^{l_0}m_1) = [l_0,\psi(m_1)] \quad ,
\end{aligned}$$

$l_1=0, m_1=0$ için

$$\begin{aligned}
&\beta[l_0,m_0] = [\beta(l_0),m_0] + [l_0,\beta(m_0)] \quad , \\
&\partial[l_0,m_0] = {}^{l_0}(\partial(m_0)) - {}^{m_0}(\partial(l_0)) \quad ,
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu bölümde bundan sonraki kısım için bir $\varepsilon \in Der(L_1 \rtimes L_0)$ derivasyonu ve ilgili k-lineer dönüşümleri ε=$(\alpha,\partial;\psi,\beta)$ notasyonu ile temsil edilecektir.

Şimdi $\mathfrak{R} = \{\varepsilon \in Der(L_1 \rtimes L_0)\,|\,\varepsilon(-l_1,dl_1) = (-l_1', dl_1')$, bazı $l_1' \in L_1$ için$\}$, $\mathfrak{L} = \{\varepsilon \in Der(L_1 \rtimes L_0)\,|\,\varepsilon(l_1,0) = (l_1',0)$, bazı $l_1' \in L_1$ için$\}$ kümeleri ele alınsın.

Önerme 3.1 $\tau : L_1 \rtimes L_0 \longrightarrow L_1 \rtimes L_0$ derivasyonu $\tau(l_1,l_0) = (-l_1, d(l_1)+l_0)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{\tau\varepsilon\tau\,|\,\varepsilon \in \mathfrak{L}\} = \mathfrak{R}$ ve $\{\tau\varepsilon\tau\,|\,\varepsilon \in \mathfrak{R}\} = \mathfrak{L}$ dir.

İspat: $\varepsilon \in \mathfrak{L}$ olsun. Bu durumda her $l_1 \in L_1$ için $\varepsilon(l_1,0) = (l_1',0)$ denirse

$$\begin{aligned}
\tau\varepsilon\tau(-l_1,d(l_1)) &= \tau\varepsilon(l_1,-d(l_1)+d(l_1)) \\
&= \tau\varepsilon(l_1,0) \\
&= \tau(l_1',0) \\
&= (-l_1',d(l_1'))
\end{aligned}$$

olup her $\varepsilon \in \mathfrak{L}$ için $\tau\varepsilon\tau \in \mathfrak{R}$ bulunur.

Diğer taraftan $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ için $D = id_{L_1 \rtimes L_0} \in \mathfrak{L}$ seçilirse $\tau D\tau = \varepsilon$ bulunur ki bu iki sonuçtan $\{\tau\varepsilon\tau\,|\,\varepsilon \in \mathfrak{L}\} = \mathfrak{R}$ olur. Benzer şekilde $\{\tau\varepsilon\tau\,|\,\varepsilon \in \mathfrak{R}\} = \mathfrak{L}$ dir. □

Önerme 3.2 ε=$(\alpha,\partial;\beta,\psi) \in Der(L_1 \rtimes L_0)$ olsun. $\varepsilon \in \mathfrak{L}$ olması için gerek ve yeter şart $\psi = 0$ olmasıdır.

İspat: $\varepsilon \in \mathfrak{L}$ olsun. Bu durumda her $l_1 \in L_1$ için $\varepsilon(l_1,0) = (l_1',0)$ olacak biçimde $l_1' \in L_1$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}\varepsilon(l_1,0) &= (\alpha(l_1)+\partial(0),\psi(l_1)+\beta(0))\\ &= (\alpha(l_1),\psi(l_1))\\ &= (l_1',0)\end{aligned}$$

olup, her $l_1 \in L_1$ için $\psi(l_1) = 0$ dır.

Tersine $\psi = 0$ olsun. Bu durumda her $l_1 \in L_1$ için $\varepsilon(l_1,0) = (\alpha(l_1),0)$ olup $\varepsilon \in \mathfrak{L}$ bulunur. $\square$

Önerme 3.3 ε=$(\alpha,\partial;\beta,\psi) \in Der(L_1 \rtimes L_0)$ olsun. $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ olması için gerek ve yeter şart her $l_1 \in L_1$ için $d\alpha(l_1) - d\alpha d(l_1) = \beta d(l_1) - \psi(l_1)$ olmasıdır.

İspat: $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ olsun. Bu durumda, her $l_1 \in L_1$ için $\varepsilon(-l_1,d(l_1)) = (-l_1',d(l_1'))$ olacak biçimde $l_1' \in L_1$ vardır.

$$\varepsilon(-l_1,d(l_1)) = (-\alpha(l_1)+\partial d(l_1),-\psi(l_1)+\beta d(l_1))$$

olduğundan

$$d(\alpha(l_1)-\partial d(l_1)) = \beta d(l_1)-\psi(l_1)$$

bulunur.

Tersine $\varepsilon \equiv (\alpha,\partial;\beta,\psi) \in Der(L_1 \rtimes L_0)$ ve her $l_1 \in L_1$ için

$$d(\alpha(l_1)-\partial d(l_1)) = \beta d(l_1)-\psi(l_1)$$

eşitliğinden $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ bulunur. $\square$

Uyarı 3.4 Önerme 3.2 ve Önerme 3.3 gereğince ε=$(\alpha,\partial;\beta,\psi) \in Der(L_1 \rtimes L_0)$ olmak üzere $\varepsilon \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$ ise $\psi = 0$ dır. Böylece, bundan sonraki kısımda ε=$(\alpha,\partial;\beta,\psi)$ yerine ε=$(\alpha,\partial;\beta)$ notasyonu kullanılacaktır.

Önerme 3.5 $Ider(L_1 \rtimes L_0) \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$.

İspat: $(l_1,l_0) \in L_1 \rtimes L_0$ olsun. $\varepsilon_{(l_1,l_0)}$ iç derivasyonunu ele alınsın.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{(l_1,l_0)}(-m_1,d(m_1)) &= [(l_1,l_0),-m_1,d(m_1)]\\ &= ([-l_1,-m_1]-\,{}^{l_0}m_1+\,{}^{d(m_1)}l_1,[l_0,d(m_1)])\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} -d([l_1,m_1] - {}^{l_0}m_1 + {}^{d(m_1)}l_1) &= [d(l_1),d(m_1)] + d({}^{l_0}m_1) - d({}^{d(m_1)}l_1) \\ &= -[d(l_1),d(m_1)] + [l_0,d(m_1)] - [d(m_1),d(l_1)] \\ &= -[d(l_1),d(m_1)] + [l_0,d(m_1)] + [d(l_1),d(m_1)] \\ &= [l_0,d(m_1)] \end{aligned}$$

olduğundan $\varepsilon_{(l_1,l_0)} \in \mathfrak{R}$ dir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(l_1,l_0)}(m_1,0) &= [(l_1,l_0),(m_1,0)] \\ &= ([l_1,m_1] + {}^{l_0}m_1 - {}^{0}l_1, [l_0,0]) \\ &= ([l_1,m_1] + {}^{l_0}m_1, 0) \end{aligned}$$

ve $[l_1,m_1] + {}^{l_0}m_1 \in L_1$ olduğundan $\varepsilon_{(l_1,l_0)} \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$ dir. $\square$

Doğrudan bir ispat ile $(l_1,l_0) \in L_1 \rtimes L_0$ için $\varepsilon_{(l_1,l_0)}$ derivasyonuna karşılık gelen $(\alpha,\partial;\beta)$ üçlüsü, her $m_1 \in L_1$ ve $m_0 \in L_0$ için

$$\begin{aligned} \alpha(m_1) &= [l_1',m_1] + {}^{l_0}m_1 \\ \partial(m_0) &= -{}^{m_0}l_1 \\ \beta(m_0) &= [l_0,m_0] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Elde edilen bu veriler doğrultusunda $Ider(L_1,L_0)$ ile $IderAct(L)$ arasındaki ilişki incelensin.

Önerme 3.6 $Ider(L_1 \rtimes L_0) \cong InnAct(L)$.

İspat: $\varphi : Ider(L_1 \rtimes L_0) \longrightarrow IderAct(L)$ dönüşümü $\varepsilon_{(l_1,l_0)} \longmapsto (\xi(l_1),\eta(l_0))$ ve Ψ : $InnAct(L) \longrightarrow Ider(L_1 \rtimes L_0)$ dönüşümü $(\xi(m_1),\eta(m_0)) \longmapsto \varepsilon_{(m_1,m_0)}$ şeklinde tanımlansın. $\varphi\Psi = id_{InnAct(L)}$ ve $\Psi\varphi = id_{Ider(L_1 \rtimes L_0)}$ olup buradan istenen sonuç elde edilir. $\square$

3.3 (Yarı)Tam Önçaprazlanmış Modüller

Bu bölümde Lie cebirleri için verilen tam olma ve ilgili yapıların önçaprazlanmış modüllere genellemeleri verilecektir.

Tanım 3.7 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. $Act(L) \cong InnAct(L)$ ise L ye bir yarı-tam önçaprazlanmış modül denir.

Örnek 3.1 L_1 bir tam Lie cebiri olsun. Bu durumda $L : L_1 \xrightarrow{ad} Der(L_1)$ bir yarı-tam önçaprazlanmış modüldür.

Önerme 3.8 L_1 bir Lie cebiri olsun. $L_1 \rtimes Der(L_1)$ bir tam Lie cebiri ise $(L_1, Der(L_1), d)$ önçaprazlanmış modülü yarı-tamdır.

İspat: Her L_1 Lie cebiri için $(L_1, Der(L_1), d)$ aynı zamanda bir çaprazlanmış modül olduğundan istenilen sonuç (Aytekin vd., 2013) da verilen benzer sonuçlardan direkt olarak elde edilebilir. □

Tanım 3.9 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir yarı-tam önçaprazlanmış modül olsun. Eğer, L nin merkezi aşikar önçaprazlanmış modül ise L ye tam önçaprazlanmış modül denir.

Örnek 3.2 L_0, merkezi aşikar olan perfect Lie cebiri olsun. Bu durumda $(0, L_0, iç.)$ önçaprazlanmış modülü tamdır.

Örnek 3.3 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$; basit bağlantılı, perfect ve merkezi aşikar olan bir önçaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $Act(L)$ tamdır.

Teorem 3.10 $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir önçaprazlanmış modül ve $L' : L_1' \xrightarrow{d'} L_0'$ ile $L'' : L_1'' \xrightarrow{d''} L_0''$ ise L nin $L = L' \oplus L''$ şartını sağlayan iki ideali olsun. Bu durumda;

$$\begin{array}{l}(i)\ Z(L) = Z(L') \oplus Z(L'') \\ (ii)\ Act(L) = Act(L') \oplus Act(L'')\end{array}$$

elde edilir.

İspat: (i) doğrudan hesaplamayla elde edilir.

(ii) ∂' ve ∂'' sırasıyla L' ve L'' nün çaprazlanmış derivasyonları olsun. $l_0 \in L_0$ seçilsin. Bu durumda $L_0 = L_0' \oplus L_0''$ olduğundan $l_0 = l_0' + l_0''$ olacak biçimde $l_0' \in L_0'$ ve $l_0'' \in L_0''$ vardır.

$\partial : L_0 \longrightarrow L_1, l_0 \longmapsto \partial'(l_0') + \partial''(l_0'')$ dönüşümü tanımlansın. ∂ bir çaprazlanmış idealdir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
\partial[l_0, m_0] &= \partial[l_0' + l_0'', m_0' + m_0''] \\
&= \partial'[l_0', m_0'] + \partial''[l_0'', m_0''] \\
&= l_0' \cdot \partial'(m_0') - m_0' \cdot \partial'(l_0') + l_0'' \cdot \partial''(m_0'') - m_0'' \cdot \partial''(l_0'') \\
&= (l_0' + l_0'') \cdot (\partial'(m_0') + \partial''(m_0'')) - (m_0' + m_0'') \cdot (\partial'(l_0') + \partial''(l_0'')) \\
&= l_0 \cdot \partial(m_0) - m_0 \cdot \partial(l_0)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde $(\alpha',\beta')\in Der(L')$ ve $(\alpha'',\beta'')\in Der(L'')$ olmak üzere $\alpha=\alpha'+\alpha''$ ve $\beta=\beta'+\beta''$ denirse $(\alpha,\beta)\in Der(L)$ bulunur. Böylece $Act(L')\oplus Act(L'')\subseteq Act(L)$ olup benzer şekilde $Act(L)\subseteq Act(L')\oplus Act(L'')$ bulunur. □

Sonuç 3.11 $L:L_1\xrightarrow{d}L_0, L':L_1'\xrightarrow{d'}L_0, L'':L_1''\xrightarrow{d''}L_0''$ birer önçaprazlanmış modül, $L_1',L_1''\trianglelefteq L$ ve $L=L'\oplus L''$ olsun.

(i) $InnAct(L)=InnAct(L')\oplus InnAct(L'')$ dir.

(ii) L nin tam olması için gerek ve yeter şart L' ve L'' nün tam olmasıdır.

İspat: Teorem 3.10 ve tanım 3.9 dan direkt olarak elde edilir. □

3.4 Önçaprazlanmış Modüllerin Holomorfları

Bu bölümde bir önçaprazlanmış modülün holomorfu tanımı ve tam önçaprazlanmış modüllerle ilişkisi verilecektir. Bu tanımlar ve incelenen ilişkiler (Aytekin vd., 2013) daki sonuçların genellemesi olup, önçaprazlanmış modül yerine çaprazlanmış modül alındığında (Aytekin vd., 2013) daki sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 3.12 $L:L_1\xrightarrow{d}L_0$ ve $L':L_1'\xrightarrow{d'}L_0'$ birer önçaprazlanmış modül olsun. Bir $(\sigma,\tau):L'\longrightarrow Act(L)$ önçaprazlanmış modül homomorfizmi varsa L' nün L üzerine bir etkisi vardır denir.

$L':L_1'\xrightarrow{d''}L_0'$ nün $L:L_1\xrightarrow{d}L_0$ üzerine $(\sigma,\tau):L'\longrightarrow Act(L)$ yardımıyla etkisi olsun. Bu durumda L_1' ve L_0' nün sırasıyla L_1 ve L_0 üzerine etkisi vardır. Bu etkiler şu şekilde tanımlanır;

$l_1\in L_1, l_0\in L_0$ ve $l_1'\in L_1', l_0'\in L_0'$ için $l_1'\cdot l_1=\eta_{1d''(l_1')}\cdot l_1$ ve $l_0'\cdot l_0=\eta_{0(l_0')}(l_0)$. Böylece $L_1\rtimes L_1'$ ve $L_0\rtimes L_0'$ yarı-direkt çarpımları elde edilir. Ayrıca $L_0\rtimes L_0'$ nün $L_1\rtimes L_1'$ üzerine $(l_0,l_0')\cdot(l_1,l_1')=(\eta_{1l_1'}(l_1)-\partial_{l_1'}(l_0)+l_0\cdot l_1, l_0'\cdot l_1')$ şeklinde bir etkisi vardır ve bu etkiyle birlikte $(d,d'):L_1\rtimes L_1'\longrightarrow L_0\rtimes L_0'$ bir önçaprazlanmış modüldür. (Burada $\partial_{l_1'},\sigma(l_1')=(\alpha_{l_1'},\partial_{l_1'},\alpha_{1l_1'})$ ve $\eta_{1l_1'}$, ise $\tau(l_0')=(\eta_{1l_1'},\eta_{0l_0'})$ eşitliklerinden elde edilir.)

Elde edilen $L_1\rtimes L_1'\xrightarrow{(d,d')}L_0\rtimes L_0'$ önçaprazlanmış modülüne L ve L' önçaprazlanmış modüllerinin yarı-direkt çarpımı denir ve $L\rtimes L'$ şeklinde gösterilir.

Şimdi L' yerine $Act(L)$ önçaprazlanmış modülü ve $(id,id) : Act(L) \longrightarrow Act(L)$ dönüşümü ele alınsın. Sonuç olarak elde edilen yarı-direkt çarpım $L_1 \rtimes \mathfrak{D}(L) \overset{(d,\triangle)}{\longrightarrow} L_0 \rtimes Der(L)$ önçaprazlanmış modülü olacaktır. $\mathfrak{D}(L)$ nin L_1 üzerine etkisi $(\alpha,\partial,\alpha_1)\cdot l_1 = \eta_{1\triangle(\alpha,\partial,\alpha_1)}(l_1) = \eta_{1(\alpha_1,d\partial)}(l_1) = \alpha_1(l_1)$ ve $(\mu_1,\mu_0)\cdot l_0 = \mu_0(l_0)$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $L_0 \rtimes Der(L)$ nin $L_1 \rtimes \mathfrak{D}(L)$ üzerine etkisi $(l_0,(\mu_1,\mu_0))\cdot(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)) = (\mu_1(l_1)-\partial(l_0)+l_0\cdot l_1,(\mu_1,\mu_0)\cdot(\alpha,\partial,\alpha_1)) = (\mu_1(l_1)-\partial(l_0)+l_0\cdot l_1,(([\mu_1,\alpha_1],\mu_1\partial-\partial\mu_0,[\mu_1,\alpha_1]))$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.13 $L : L_1 \overset{d}{\longrightarrow} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. $L \rtimes Act(L)$ önçaprazlanmış modülüne yani $L_1 \rtimes \mathfrak{D}(L) \overset{(d,\triangle)}{\longrightarrow} L_0 \rtimes Der(L)$ önçaprazlanmış modülüne L nin holomorfu denir ve $Hol(L)$ ile gösterilir.

Tanım 3.14 $L : L_1 \overset{d}{\longrightarrow} L_0$ bir önçaprazlanmış modül ve $M : M_1 \overset{d}{\longrightarrow} M_0$ da L nin bir ideali olsun. L nin M üzerinde merkezleyicisi $C_L(M) : (C_{L_1}(M_1) \cap L_1^{M_0}) \overset{d}{\longrightarrow} (C_{L_0}(M_0) \cap st_{L_0}(M_1))$ önçaprazlanmış modülü olup burada $L_1^{M_0} = \{l_1 \in L_1 \,|\, d(l_1)\cdot m_1 = 0, m_0\cdot l_1 = 0, m_1 \in L_1, m_0 \in M_0\}$ ve $st_{L_0}(M_1) = \{l_0 \in L_0 \,|\, l_0\cdot m_1 = 0, m_1 \in M_1\}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $C_{L_0}(M_0) = \{l_1 \in L_1 \,|\, [l_1,m_1] = 0, m_1 \in M_1\}$ dir.

$L : L_1 \overset{d}{\longrightarrow} L_0$ bir önçaprazlanmış modül olsun. Şimdi $C_{Hol(L)}(L\times 0)$ önçaprazlanmış modülü incelensin. $C_{Hol(L)}(L\times 0) = C_1 \overset{(d,\triangle)}{\longrightarrow} C_0$ olsun. $C_1 = C_{L_1\rtimes\mathfrak{D}(L)}(L_1\times 0) \cap (L_1 \rtimes \mathfrak{D}(L))^{(L_1\times 0)}$ olup

$$\begin{aligned}
C_{L_1\rtimes\mathfrak{D}(L)}(L_1\times 0) \quad &= \{\underbrace{(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)) \in L_1\rtimes\mathfrak{D}(L)}_{x} \,|\, [(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)),(l_1',0)] \\
&= (0,0), l_1' \in L_1\} \\
&= \{x \,|\, [(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)),(l_1',0)] = (0,0), l_1' \in L_1\} \\
&= \{x \,|\, ([l_1,l_1'] + (\alpha,\partial,\alpha_1)\cdot l_1',0) = (0,0), l_1' \in L_1\} \\
&= \{x \,|\, [l_1,l_1'] + \alpha_1(l_1) = 0, l_1' \in L_1\} \\
&= \{x \,|\, \alpha_1(l_1) = -[l_1,l_1'], l_1' \in L_1\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(L_1\rtimes\mathfrak{D}(L))^{(L_1\times 0)} \quad &= \{\underbrace{(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)) \in L_1\rtimes\mathfrak{D}(L)}_{a} \,| \\
&((d,\triangle)(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)))\cdot(l_1',0) = 0, (l_0,0)\cdot(l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)) \\
&= (0,0), \underbrace{l_1' \in L_1, l_0 \in L_0}_{b}\} \\
&= \{a \,|\, (d(l_1),(\alpha,d\partial))\cdot(l_1',0) = (0,0), (l_0,0)\cdot(l_1, \\
&(\alpha,\partial,\alpha_1)) = 0, b\} \\
&= \{a \,|\, (\alpha_1(l_1) + d(l_1)\cdot l_1',0) = (0,0), (-\partial(l_0)+l_0\cdot l_1 \\
&,0) = (0,0), b\} \\
&= \{a \,|\, \alpha_1(l_1') = -d(l_1)\cdot l_1', l_0\cdot l_1 = \partial(l_0)\ , b\} \\
&= \{(-l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)) \in L_1\rtimes\mathfrak{D}(L) \,|\, \partial = \partial_{l_1}, \alpha_1 \\
&= \alpha_{1l_1}, l_1 \in L_1\}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $C_1 = \{(-l_1,(\alpha,\partial,\alpha_1)) \in L_1 \rtimes \mathfrak{D}(L)\,|\partial = \partial_{l_1}, \alpha_1 = \alpha_{1l_1}, \alpha = \alpha_{l_1}\}$ olur.

$C_0 = C_{L_0 \rtimes Der(L)}(L_0 \times 0) \cap st_{L_0 \rtimes Der(L)}(L_1 \times 0)$ olup

$$\begin{aligned} C_{L_0 \rtimes Der(L)}(L_0 \times 0) &= \{\underbrace{(l_0,(\mu_1,\mu_0)) \in L_0 \rtimes Der(L)}_{a} \Big| [(l_0,(\mu_1,\mu_0)),(l_0',0)] \\ &= 0, l_0' \in L_0\} \\ &= \{a \Big| ([l_0,l_0'] + (\mu_1,\mu_0)\cdot l_0', 0) = 0 \;, l_0' \in L_0\} \\ &= \{a \Big| ([l_0,l_0'] + \mu_0(l_0'), 0) = 0 \;, l_0' \in L_0\} \\ &= \{a \Big| \mu_0(l_0') = -[l_0,l_0'] \;, l_0' \in L_0\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} st_{L_0 \rtimes Der(L)}(L_1 \times 0) &= \{\underbrace{(l_0,(\mu_1,\mu_0)) \in L_0 \rtimes Der(L)}_{a} \Big| (l_0,(\mu_1,\mu_0))\cdot(l_0',0) \\ &= (0,0), l_1' \in L_1\} \\ &= \{a\,|\mu_1(l_1') + l_0 \cdot l_1' = 0 \;, l_1' \in L_1\} \\ &= \{a\,|\mu_1(l_1') = -l_0 \cdot l_1' \;, l_1' \in L_1\} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} C_0 &= \{(l_0,(\mu_1,\mu_0)) \in L_0 \rtimes Der(L)\,\big|\mu_1(l_1') = -l_0 \cdot l_1', \mu_0(l_0') = -[l_0,l_0'] \\ &\quad , l_0' \in L_0, l_1' \in L_1\} \\ &= \{(-l_0,\eta(l_0)) \in L_0 \rtimes Der(L)\,|, l_0 \in L_0\} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.15 L bir önçaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $L \cap C_{Hol(L)} \cong Z(L)$ dir.

İspat: $C_{Hol(L)}$ nin özellikleri ve L nin merkezi tanımından direkt olarak elde edilir. □

Önerme 3.16 $L : (L_1, L_0, d)$ çaprazlanmış modülü için, $A : L_1 \rtimes Der(L_0, L_1) \longrightarrow L_1 \rtimes Der(L_0, L_1), A(l_1,\partial) = (-l_1, \partial + \partial_{l_1})$ ve $B : L_0 \rtimes Der(L) \longrightarrow L_0 \rtimes Der(L), B(l_0,(\alpha,\beta)) = (-l_0,(\alpha,\beta) + (\alpha_{l_0},\beta_{l_0}))$ dönüşümleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır.

i) $(A,B) : Hol(L) \longrightarrow Hol(L)$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir.

ii) $(A,B) \circ (A,B) = Id$ ve $L \cong C_{Hol(L)}(L)$ dir.

İspat: Tanım 3.13 den direkt olarak elde edilir. □

Sonuç 3.17 Sonuç 3.15 ve önerme 3.16 dan $L' : (L_1', L_0', d'), L : (L_1, L_0, d)$ önçaprazlanmış modülünün bir ideali olmak üzere
i) $L' : (L_1', L_0', d')$ tam önçaprazlanmış modül,
ii) $L' \cong C_L(L') \rtimes L'$ ve $L' \cap C_L(L') = 0$,
iii) $Hol(L\prime) \cong C_{Hol(L)}(L') \rtimes L'$ ve $L' \cap C_{Hol(L')}(L') = 0$
ifadeleri denktir.

Örnek 3.4 (i) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir ve $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ nin merkezi sıfır olan perfect ideali olsun. $(\mathfrak{h},\mathfrak{h},id)$ tam olup $(\mathfrak{g},\mathfrak{g},id) \cong C_{(\mathfrak{g},\mathfrak{g},id)}(\mathfrak{h},\mathfrak{h},id) \rtimes (\mathfrak{h},\mathfrak{h},id) \cong (C_g(\mathfrak{h}) \rtimes \mathfrak{h}, C_g(\mathfrak{h}) \rtimes \mathfrak{h}, id)$ dir.

(ii) $\mathfrak{h}$ bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin merkezi sıfır olan perfect ideali olsun. $(0,\mathfrak{g},id)$ önçaprazlanmış modülünün $(0,\mathfrak{h},id)$ önçaprazlanmış ideali gözönüne alındığında $(0,\mathfrak{g},id) \cong (0, C_g(\mathfrak{h}) \rtimes \mathfrak{h}, inc)$ bulunur.

Önerme 3.18 (Aytekin vd., 2013) $L : (L_1, L_0, d)$ merkezi sıfır olan perfect basit bağlantılı çaprazlanmış modül olsun. Böylece $Hol(L)$ nin tam olması için gerek ve yeter şart $Z(OutAct(L)) = 0$ olmasıdır.

İspat: $(H_1, H_0, (d, \triangle))$ tarafından L nin holomorf ve $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_0, \triangle)$ tarafından L nin outer aktörü gösterilmelidir.

$\Leftarrow$: $L : (L_1, L_0, d)$ bir centerless perfect basit bağlantılı çaprazlanmış modül olsun. $H_1 = L_1 \rtimes Der(L_0, L_1)$ ve $H_0 = L_0 \rtimes Der(L)$ olduğunda $(H_1, H_0, (d, \triangle))$ tarafından $Hol(L)$ gösterilmeli. İlk olarak $Z(Hol(L)) = 0$ yani $(H_1^{H_0}, st_{H_0}(H_1) \cap Z(H_0), (d, \triangle))$ nin aşikar çaprazlanmış modül olduğu gösterilmeli.

Her $(l_0, (\alpha, \beta)) \in H_0$ için $(l_1, \partial) \in H_1, (l_0, (\alpha, \beta)) \cdot (l_1, \partial) = 0$ olsun. Böylece $l_0 = 0$ için her $(\alpha, \beta) \in Der(L)$ olmak üzere $(\alpha, \beta) \cdot \partial = 0$ olur, böylece her $l_0 \in L_0$ için $l_0 \cdot l_1 = 0$ bulunur. $Z(L) = 0$ olduğundan $Z(Act(L)) = 0$ olup buradan $(l_1, \partial) = 0$ bulunur. Fakat $(l_1, \partial), H_1^{H_0}$ keyfi olmak üzere $H_1^{H_0} = 0$ bulunur. Benzer şekilde $st_{H_0}(H_1) \cap Z(H_0) = 0$ bulunur.

Böylece $Z(Hol(L)) = 0$ olup $Z(Act(Hol(L))) = 0$ sonucu elde edilir.

$\Gamma \in Der(H_0, H_1)$ olsun, $\partial' : L_0 \longrightarrow L_1$ olduğunda **k**-lineer dönüşüm olmak üzere Γ, $\Gamma(l_0, 0) = (\partial'(l_0), 0)$ olarak tanımlansın. Böylece her $l_0, l_0' \in L_0$ için

$$\begin{aligned}
(\partial'[l_0, l_0'], 0) &= \Gamma[(l_0, 0), (l_0', 0)] \\
&= (l_0, 0) \cdot (\partial'(l_0), 0) - (l_0', 0) \cdot (\partial(l_0), 0) = (l_0 \cdot \partial'(l_0) - l_0' \cdot \partial(l_0), 0)
\end{aligned}$$

olup $\partial' : L_0 \longrightarrow L_1$ bir çaprazlanmış derivasyondur. $\Gamma_1 := \Gamma - \Gamma_{(0,\partial')}$ olsun. Her $(0, (\alpha, \beta)) \in H_0$ için bazı $l_{(\alpha,\beta)} \in L_1$ olmak üzere $\Gamma_1(0, (\alpha, \beta)) = (l_{(\alpha,\beta)}, \partial_1)$ şeklinde gösterilsin. Her $l_0 \in L_0$ için

$$\begin{aligned}
(l_0 \cdot l_{(\alpha,\beta)} - \partial_1(l_0), 0) &= (l_0, 0) \cdot (l_{(\alpha,\beta)}, 0) + (l_0, 0) \cdot (0, \partial_1) \\
&= (l_0, 0) \cdot (l_{(\alpha,\beta)}, \partial_1) = (l_0, 0) \cdot \Gamma_1(0, (\alpha, \beta)) \\
&= \Gamma_1((\alpha, \beta) \cdot l_0) + (0, (\alpha, \beta)) \cdot \Gamma_1(l_0, 0)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $l_0 \in L_0$ için $\Gamma_1(l_0,0) = (\partial'(l_0),0) + (l_0,0)\cdot(0,\partial') = (\partial'(l_0),0) + (-\partial'(l_0),0) = 0$ olduğundan $l_0 \cdot l_{(\alpha,\beta)} = \partial_1(l_0)$ ve böylece $\partial_1 = -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}}$ bulunur. Dolayısıyla $\Gamma_1(0,(\alpha,\beta)) = (l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}})$ olur.

Şimdi $\delta : Der(L) \longrightarrow Der(l_0,L_1), (\alpha,\beta) \longmapsto (-\partial_{l_{(\alpha,\beta)}})$ şeklinde tanımlanan **k**-lineer dönüşümü, her $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in Der(L)$ için

$$\begin{aligned}
(l_{[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]}, \delta[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]) &= \Gamma_1[(0,(\alpha,\beta)),(0,(\alpha',\beta'))] \\
&= (0,(\alpha,\beta))\cdot(l_{(\alpha',\beta')}, -\partial_{l_{(\alpha',\beta')}}) - \\
&\quad (0,(\alpha',\beta'))\cdot(l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}}) \\
&= ((\alpha,\beta)\cdot l_{(\alpha',\beta')}, (\alpha,\beta)\cdot\delta(\alpha',\beta')) - \\
&\quad ((\alpha',\beta')\cdot l_{(\alpha,\beta)}, (\alpha',\beta')\cdot\delta(\alpha,\beta))
\end{aligned}$$

olduğundan bir çaprazlanmış derivasyondur.

$Act(L)$ tam olduğundan her $(\alpha,\beta) \in Der(L)$ için $\delta(\alpha,\beta) = -(\alpha,\beta)\cdot\partial''$ olacak şekilde $\partial'' \in Der(L_0,L_1)$ vardır. Diğer taraftan her $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \in Der(L)$ için $(\overline{\alpha},\overline{\beta})\cdot\partial'' = -\delta(\overline{\alpha},\overline{\beta}) = \partial_{l_{(\overline{\alpha},\overline{\beta})}}$ olduğundan $\partial'' + Ider(L_0,L_1) \in \mathcal{O}_1^{\mathcal{O}_0} \equiv Ider(L_0,L_1)$ bulunur ve böylece $\partial'' \in Der(L_0,L_1)$ elde edilir.

Bazı $l_1 \in L_1$ için $\partial'' = \partial_{l_1}$ olsun. $\Gamma_2 := \Gamma_1 + \Gamma_{(l_1,-\partial_{l_1})}$ şeklinde tanımlansın.

$$\partial_{l_{(\alpha,\beta)}} = -\delta(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)\cdot\partial'' = (\alpha,\beta)\cdot\partial_{l_1} = \partial_{\alpha(l_1)}$$

olduğundan her $(\alpha,\beta) \in Der(L)$ için L nin centerless'i tarafından $l_{(\alpha,\beta)} = \alpha(l_1)$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(l_0,(\alpha,\beta)) &= -(l_0,0)\cdot(l_1,-\partial_{l_1}) + (l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}}) - (0,(\alpha,\beta))\cdot(l_1,-\partial_{l_1}) \\
&= (l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{\alpha(l_1)}) + (-\alpha(l_1), \partial_{\alpha(l_1)}) = 0
\end{aligned}$$

bulunur, $\Gamma_2 = 0$ olup dolayısıyla $\Gamma_1 = -\Gamma_{(l_1,-\partial_{l_1})}$ bulunur. $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_{(0,\partial')}$ olduğundan Γ bir inner derivasyondur. Benzer şekilde her $(\theta_1,\theta_0) \in Der(Hol(L))$ için inner olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $Hol(L)$ complete'tir.

$\Rightarrow$: $Hol(L)$ complete olsun. $Z(OutAct(L)) \neq 0$ yani $(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_0,\triangle)$ centerless olmadığı kabul edilsin, bu ise

$$\mathcal{O}_1^{\mathcal{O}_0} \neq 0 \quad \text{veya} \quad st_{\theta_0}(\theta_1) \cap Z(\theta_0) \neq 0$$

olması demektir. $\mathcal{O}_1^{\mathcal{O}_0} \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Her $(\alpha,\beta) \in Der(L)$ için $(\alpha,\beta)\cdot\partial \in Der(L_1,L_0)$ olacak şekilde $\partial \in Der(L_1,L_0)$ vardır ve ∂ bir inner çaprazlanmış derivasyon değildir. Her $(\alpha,\beta) \in Der(L)$ için $(\alpha,\beta)\cdot\partial = \partial_{l_{(\alpha,\beta)}}$ olacak şekilde $l_{(\alpha,\beta)} \in L_1$ vardır. Açıkça L nin centerless'i tarafından $l_{(\alpha,\beta)}$ biriciktir.

Şimdi her $(\alpha,\beta) \in Der(L), l_0 \in L_0$ için $\delta : H_0 \longrightarrow H_1$

$$\delta(l_0,0) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta(0,(\alpha,\beta)) = (l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}})$$

şeklinde tanımlansın. δ nin tanımından her $l_0 \in L_0$, $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in Der(L)$ için

$$(l_0,0)\cdot\delta(0,(\alpha,\beta)) = (l_0,0)\cdot(l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}}) = (\partial_{l_{(\alpha,\beta)}}\cdot l_0 + l_0\cdot l_{(\alpha,\beta)}, 0) = (0,0)$$

ve

$$\partial_{l_{[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]}} = (\alpha,\beta)\cdot\partial_{l_{(\alpha',\beta')}} - (\alpha',\beta')\cdot\partial_{l_{(\alpha,\beta)}} = \partial_{\alpha(l_{(\alpha',\beta')})} - \partial_{\alpha'(l_{(\alpha,\beta)})}$$

bulunur. L nin centerless'i tarafından $l_{[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]} = \alpha(l_{(\alpha',\beta')}) - \alpha'(l_{(\alpha,\beta)})$ dir. Diğer taraftan δ bir çaprazlanmış derivasyondur. Gerçekten de

$$\begin{aligned}(l_0,(\alpha,\beta))\cdot\delta(l_0',(\alpha',\beta')) &= (l_0,(\alpha,\beta))\cdot(l_{(\alpha',\beta')}, -\partial_{l_{(\alpha',\beta')}}) \\ &= (\alpha(l_{(\alpha',\beta')}) + \partial_{l_{(\alpha',\beta')}}\cdot l_0 + l_0\cdot(l_{(\alpha',\beta')}, \\ &\quad -(\alpha,\beta)\cdot\partial_{l_{(\alpha',\beta')}}) \\ &= (\alpha(l_{(\alpha',\beta')}), -(\alpha,\beta)\cdot((\alpha',\beta')\cdot\partial)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$(l_0',(\alpha,\beta))\cdot\delta(l_0,(\alpha,\beta)) = (\alpha'(l_{(\alpha,\beta)}), -(\alpha',\beta')\cdot((\alpha,\beta)\cdot\partial))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\delta[(l_0,(\alpha,\beta)),(l_0',(\alpha',\beta'))] &= (l_{[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]}, -\partial_{l_{[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]}}) \\ &= (\alpha(l_{(\alpha',\beta')}) - \alpha'(l_{(\alpha,\beta)}), -\partial_{\alpha(l_{(\alpha',\beta')})} + \partial_{\alpha'(l_{(\alpha,\beta)})}) \\ &= (l_0,(\alpha,\beta))\cdot\delta(l_0',(\alpha',\beta')) - (l_0',(\alpha',\beta'))\cdot \\ &\quad \delta(l_0,(\alpha,\beta))\end{aligned}$$

bulunur. $Hol(L)$ complete olduğundan $\delta = \delta_{(l_1,\partial_1)}$ olacak şekilde (l_1,∂_1) vardır. Her $l_0 \in L_0$ için $\delta(l_0,0) = 0$ olduğundan $\partial_1 = -\partial_{l_1}$ ve böylece $\delta = \delta_{(l_1,-\partial_{l_1})}$ bulunur.

$$(l_{(\alpha,\beta)}, -\partial_{l_{(\alpha,\beta)}}) = \delta(0,(\alpha,\beta)) = -(0,(\alpha,\beta))\cdot(l_1,-\partial_{l_1}) = (-\alpha(l_1),(\alpha,\beta)\cdot\partial_{l_1})$$

olduğundan $-l_{(\alpha,\beta)} = \alpha(l_1)$ dir.

Şimdi her $(\alpha,\beta) \in Der(L)$ için

$$(\alpha,\beta)\cdot\partial = \partial_{l_{(\alpha,\beta)}} = \partial_{\alpha(l_1)} = -(\alpha,\beta)\cdot\partial_{l_1}$$

olduğundan $\partial = \partial_{l_1}$ bulunur, bu ise çelişkidir. Bu sebeple $\mathcal{O}_1^{\mathcal{O}_0} = 0$ dır.

Benzer yolla $st_{\mathcal{O}_0(\mathcal{O}_1)} \cap Z(\mathcal{O}_0) = 0$ bulunur, bu ise $Z(OutAct(L)) = 0$ demek olup istenen sonuç elde edilir. □

Önerme 3.19 L bir bağlantılı, merkezi sıfır olan perfect önçaprazlanmış modül olsun. $Hol(L)$ nin tam olması için gerek ve yeter şart $Z(OutAct(L)) = 0$ olmasıdır.

İspat: Önerme 3.18 nin ispatında gerekli yer değiştirmeler yapılarak elde edilir. □

BÖLÜM 4

GAP İLE LİE ÖN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

4.1 Giriş

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller ilk olarak (Alp, 1997) ve (Alp ve Wensley, 2002) çalışmalarıyla birlikte oluşturulan XMOD ortak paketi ile GAP ortamına aktarılmıştır. Alp ve Wensley bu çalışmalarında gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller yapısına kategoriksel olarak denk olan Cat^1-gruplar yapısınıda bilgisayar ortamına aktarmıştır. Daha sonra (Odabaş, 2009) çalışmasında cebirler üzerindeki çaprazlanmış modülleri ve buna kategoriksel olarak denk olan Cat^1-cebir yapılarını bilgisayar ortamına aktarmıştır.

Bu bölümde Lie cebirleri üzerindeki çaprazlanmış modüllerin bilgisayar ortamına aktarılması için tarafımızdan yazılan GAP fonksiyonlarından bahsedilecektir. Bu fonskyionlar yazılırken (Odabaş, 2009) çalışmasında olduğu gibi herhangi bir cebir yerine grup cebirler kullanılmıştır. İlk olarak GAP ortamında eksik olan bazı fonksiyonlar yazılarak alt yapı çalışması tamamlanmıştır.

4.2 Lie Cebirleri Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Lie çaprazlanmış modül tanımı kullanılarak bir çaprazlanmış modül inşaa etmek için tez kapsamında yazılan PXLieAlg() fonksiyonu temel alınacaktır. PXLieAlg() fonksiyonu GAP programında aşağıdaki şekilde kullanılır.

```
gap> PXLieAlg( bdy, act );
```

Bu iki paremetre boundary ve etkidir. Boundary bir Lie cebir homomorfizmi, etki ise çaprazlanmış modül etkisi olmak zorundadır. Bu komutun çıktısı olarak ise program, bir çaprazlanmış modül ve bunun kayıt alanlarını oluşturur. Bu fonksiyonu yazmak için;

1. Adım	Verilen boundary nin Lie cebir homomorfizmi ve etkinin çaprazlanmış modül etkisi olup olmadığı denetle.
2. Adım	Lie çaprazlanmış modülü oluşturacak olan, boundary nin tanım ve değer kümelerini al.
3. Adım	Lie çaprazlanmış modül için verilen kayıt alanlarını oluştur.
4. Adım	**IsPXLieAlg** fonksiyonunu çağırarak kayıt alanlarındaki verilerin, Lie çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını sorgula.

algoritma basamakları gerçekleştirilmiştir. Bir Lie çaprazlanmış modül oluşturmak için eldeki bilgileri bir veri haline getirecek olan PXLieAlgObj() objesi oluşturulmuştur ve diğer tüm fonksiyonlar bu objeye bağlanmıştır. Oluşturulan objenin bir Lie (ön)çaprazlanmış modül olup olmadığını denetlemek için IsPrePXLieAlg() ve IsPXLieAlg() fonksiyonları yazılmıştır.

IsPXLieAlg() fonksiyonu aşağıdaki şekilde çağrılır.

```
gap> IsPXLieAlg( X );
```

Fonksiyon, girilen X parametresi bir Lie çaprazlanmış modül ise **true** aksi halde **false** cevabı verir. Fonksiyon X üzerinde kayıt alanının varlığını ve CM1, CM2 aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığını denetler. IsPXLieAlg() fonksiyonunu yazmak için aşağıdaki algoritma kullanılmıştır.

1. Adım	**X** in **Source(X)**,ve **Range(X)** kayıt alanlarını varlığını ve bu kayıt alanlarının Lie cebiri olduklarını denetle.
2. Adım	**Boundary(X)** in varlığını ve tanım kümesiniden değer kümesine bir Lie cebir homomorfizmi olduğunu denetle.
3. Adım	**Action(X)** in varlığını değer kümesinin tanım kümesi üzerine bir Lie çaprazlanmış etkisi olduğunu denetle.
4. Adım	CM1 ve CM2 aksiyomlarının sağlandığını denetle.
5. Adım	**X** e **.IsPXLieAlg** kayıt alanını ekle.

Elde edilen Lie çaprazlanmış modüllerin özelliklerini incelemek için tez kapsamında Size(), ViewObj(), PrintObj(), DisplayPXLieAlg(), Name() ve Boundary() fonksiyonları yazılmıştır.

Herhangi bir Lie cebiri ve onun ideali yardımıyla Lie çaprazlanmış modül oluşturmak için PXLieAlgByIdeal() fonksiyonu yazılmıştır. Bu fonksiyon şu şekilde çağrılır:

```
gap> PXLieAlgByIdeal( R [, S ] );
```

Burada S ,R nin bir ideali ve $[,]$ isteğe bağlı elemanı göstermektedir. Eğer ikinci eleman kullanılmayacak ise, her Lie cebiri kendisinin bir ideali olduğundan fonksiyon $R=S$ alınarak kullanılabilir. Bu fonskyion çıktı olarak bir Lie çaprazlanmış modülü verir. Bu Lie çaprazlanmış modülün boundary si içine dönüşümdür ve r, s üzerine konjugasyon ile etki eder.

1. Adım Girilen verilerin doğru formatta olup olmadığını kontrol et.
2. Adım Alt Lie cebir ve ideallik şartlarını denetle.
3. Adım Derleme $S \to R$ bir içine Lie cebir homomorfizmi oluşturur.
4. Adım Değer kümesinin her bir r üreteci için $R \times S \to S,\ s \mapsto s^r$
Lie cebir etkisini oluştur.
5. Adım **PXLieAlg** fonksiyonunu çağır ve Lie çaprazlanmış modül yapısını oluştur.
6. Adım **IsPXLieAlg** kayıt alanını ekledikten sonra Lie çaprazlanmış modülü görüntüle.

Şimdi GAP yardımıyla bir Lie çaprazlanmış modül oluşturulsun.

Örnek 4.1 L herhangi bir Lie cebiri ve D, L nin ideali olduğunda her zaman $\partial : D \to L$ içine fonksiyonu yardımıyla bir çaprazlanmış modül elde edilebilir. Örneğin GF_2 halkası ve Kl_4 Klein 4 grubu kullanılarak oluşturulan grup cebirinden elde edilecek olan Lie cebiri ve bu Lie cebirinin üretilmiş bir ideali ele alınsın. Bu durumda aşağıdaki gibi bir çaprazlanmış modül oluşturulabilir.

GAP
```
gap> FG := GroupRing(GF(2),SmallGroup(4,2));
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> L := LieAlgebra(FG);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> D := LieDerivedSubalgebra(L);
#I  LAGUNA package: Computing the Lie derived subalgebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> IsIdeal(L,D);
true
gap> LX := PXLieAlg(L,D);
[Algebra( GF(2), ... )->Algebra( GF(2), [ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of .. ),
LieObject( (Z(2)^0)*f1 ), LieObject( (Z(2)^0)*f2 ),
LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ) ] )]
gap> IsPXLieAlg(LX);
true
gap> Size(LX);
[ 1, 16 ]
gap> DisplayPXLieAlg(LX);
Crossed module of Lie algebras [..->..] :-
: Source algebra has generators:
  [  ]
: Range algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(2)^0)*f1 ),
```

```
  LieObject( (Z(2)^0)*f2 ), LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
  [  ]
true
```

Yukarıda verilen örneğin tersi de doğrudur. Diğer bir deyişle $\partial : D \rightarrow L$ herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde $\partial(D) = T$, L nin bir idealidir.

GAP

```
gap> f := Boundary(LX);
MappingByFunction( <Lie algebra of dimension 0 over GF(2)>,
<Lie algebra of dimension 4 over GF(2)>,
function( i ) ... end )
gap> T := Image(f);
<Lie algebra over GF(2)>
gap> IsIdeal(L,T);
true
```

Bir Lie cebiri ve çarpım cebiri kullanılarak her zaman bir Lie çaprazlanmış modülü elde edilebilir. PXLieAlgByMultipleLAlgebra() fonksiyonu bu Lie çaprazlanmış modülü elde etmek için yazılmıştır. Bu fonksiyon parametre olarak herhangi bir Lie cebirini alacaktır.

Örnek 4.2 Bir L Lie cebiri ve $M(L)$, çarpım Lie verildiğinde çaprazlanmış modül oluşturulabilir. Örneğin GF_2 halkası ve C_6 devirli kullanılarak oluşturulan grup cebirden elde edilen Lie cebiri ve çarpım Lie cebiri yardımıyla aşağıdaki çaprazlanmış modül elde edilir.

GAP

```
gap> FG := GroupRing(GF(2),SmallGroup(6,2));
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> L := LieAlgebra(FG);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> LX := PXLieAlgByMultipleLAlgebra(L);
[Algebra( GF(2), [ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of ... ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1 ), LieObject( (Z(2)^0)*f2 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ), LieObject( (Z(2)^0)*f2^2 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2^2 ) ] )-> Mul. Alg.(Algebra( GF(2),
[ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(2)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f2 ), LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f2^2 ), LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2^2 ) ] ))]
gap> IsPXLieAlg(LX);
true
gap> Size(LX);
[ 64, 64 ]
```

Bir Lie cebiri ve R-modül kullanılarak her zaman bir Lie çaprazlanmış modülü elde edilebilir. PXLieAlgByModule() fonksiyonu bu Lie çaprazlanmış modülü elde etmek için yazılmıştır. Bu fonksiyon parametre olarak herhangi bir Lie cebiri ve üzerinde tanımlandığı R-modül yapısını alacaktır.

Örnek 4.3 Örneğin GF_5 halkası ve 8. mertebeden quaternion grubu alınarak oluşturulacak olan modül ve Lie cebirinden bir Lie çaprazlanmış modül aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

GAP

```
gap> F := GF(5);
GF(5)
gap> G := SmallGroup(8,4);
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> StructureDescription(G);
"Q8"
gap> FG := GroupRing(F,G);
<algebra-with-one over GF(5), with 3 generators>
gap> L := LieAlgebra(FG);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(5)>
gap> LX := PXLieAlgByModule(L,F);
[Algebra( GF(5), [ LieObject( (Z(5)^0)*<identity> of ... ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f1 ), LieObject( (Z(5)^0)*f2 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f3 ), LieObject( (Z(5)^0)*f1*f2 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f1*f3 ), LieObject( (Z(5)^0)*f2*f3 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f1*f2*f3 ) ] )->GF(5)]
gap> IsXModLieAlg(LX);
true
gap> DisplayPXLieAlg(LX);
Crossed module of Lie algebras [..->..] :-
: Source algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(5)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(5)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f2 ), LieObject( (Z(5)^0)*f3 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f1*f2 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f1*f3 ), LieObject( (Z(5)^0)*f2*f3 ),
  LieObject( (Z(5)^0)*f1*f2*f3 ) ]
: Range algebra has generators:
  [ Z(5)^0, Z(5)^0 ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
  [ 0*Z(5), 0*Z(5), 0*Z(5), 0*Z(5), 0*Z(5), 0*Z(5), 0*Z(5), 0*Z(5) ]
true
gap> Size(LX);
[ 390625, 5 ]
```

Yukarıda ifadenin tersi de doğrudur. Yani $\partial : S \to R$ herhangi bir çaprazlanmış modül ve $I = \partial(S)$ verildiğinde *Çek* ∂, R/I-modüldür.

GAP
```
gap> f := Boundary(LX);
MappingByFunction( L, GF(5), function( r ) ... end )
gap> L := Kernel(f);
<vector space over GF(5), with 390625 generators>
gap> IsLeftModule(L);
true
```

Bu bölümdeki örneklerin verilmesinde, tez kapsamında yazılan PrePXLieAlgByBoundaryAndAction() fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyonun temel görevi, verilen herbir örnek tipine göre uygun boundary ve etki dönüşümlerini vererek cebirsel yapının elde edilmesini sağlamaktır.

4.3 Alt Çaprazlanmış Modüller

Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin alt çaprazlanmış modüllerinin bilgisayar ortamında incelenebilmesi için SubPXLieAlg (), SubPrePXLieAlg(), IsSubPXLieAlg() ve IsSubPrePXLieAlg() fonksiyonları yazılmıştır. Bu fonksiyonlar, iki Lie çaprazlanmış modül parametresi almaktadır. IsSubPrePXLieAlg() fonksiyonunun kaynak kodu aşağıdaki gibidir.

Kaynak Kodu
```
InstallMethod( IsSubPrePXLieAlg, "generic method for pre-Lie
crossed modules", true,
    [ Is2dLieAlgObject, Is2dLieAlgObject ], 0,
function( PM, SM )
    local  ok, Ssrc, Srng, gensrc, genrng, s, r, r1, r2, im1, im2;
    if not ( IsPrePXLieAlg( PM ) and IsPrePXLieAlg( SM ) ) then
        return false;
    fi;
    if ( HasParent( SM ) and ( Parent( SM ) = PM ) ) then
        return true;
    fi;
    Ssrc := Source( SM );
    Srng := Range( SM );
    if not (     IsIdeal( Source( PM ), Ssrc ) ) then
        Info( InfoXModAlg, 3, "IsIdeal failure in IsSubPrePXLieAlg" );
        return false;
    fi;
    ok := true;
    if HasGeneratorsOfAlgebra( Ssrc ) then
       gensrc := GeneratorsOfAlgebra( Ssrc );
    else
       gensrc := Ssrc;
    fi;
```

```
    if HasGeneratorsOfAlgebra( Srng ) then
       genrng := GeneratorsOfAlgebra( Srng );
    else
       genrng := Srng;
    fi;
    for s in gensrc do
        if ( Image( Boundary( PM ), s ) <> Image( Boundary( SM ), s ) ) then
            ok := false;
        fi;
    od;
    if not ok then
        Info( InfoPXLieAlg, 3, "boundary maps have different images" );
        return false;
    fi;
    for r in genrng do
        for s in gensrc do
        im1 := Image( PXLieAlgAction( PM ), [r,s] );
        im2 := Image( PXLieAlgAction( SM ), [r,s] );
           if ( im1 <> im2 ) then
                ok := false;
                Info( InfoPXLieAlg, 3, "s,im1,im2 = ", [s,im1,im2] );
            fi;
        od;
    od;
    if not ok then
        Info( InfoPXLieAlg, 3, "actions have different images" );
        return false;
    fi;
    if ( PM <> SM ) then
        SetParent( SM, PM );
    fi;
    return true;
end );
```

Örnek 4.4 Bir ideal yardımıyla tanımlanan çaprazlanmış modül örneğindenden hareketle bir alt çaprazlanmış modül oluşturulması aşağıdaki GAP oturumunda verilmiştir.

GAP

```
gap> FG := GroupRing(GF(2),SmallGroup(4,2));
<algebra-with-one over GF(2), with 2 generators>
gap> L := LieAlgebra(FG);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(2)>
gap> LC := LieCentre(L);
<Lie algebra of dimension 4 over GF(2)>
gap> LCC := LieDerivedSubalgebra(LC);
<Lie algebra of dimension 0 over GF(2)>
gap> PX1 := PXLieAlg(L,LC);
[Algebra( GF(2), [ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of ... ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1 ), LieObject( (Z(2)^0)*f2 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ) ] )->Algebra( GF(2),
```

```
  [ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of ... ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1 ), LieObject( (Z(2)^0)*f2 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ) ] )]
gap> PX2 := PXLieAlg(LC,LCC);
[Algebra( GF(2), ... )->Algebra( GF(2),
  [ LieObject( (Z(2)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(2)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(2)^0)*f2 ), LieObject( (Z(2)^0)*f1*f2 ) ] )]
gap> IsSubPXLieAlg(PX1,PX2);
true
```

4.4 Cat^1-Lie Cebirler

Cat^1-Lie cebir tanımı kullanılarak bilgisayar ortamında bir Cat^1-Lie cebiri inşaa etmek için tez kapsamında yazılan Cat1LieAlg() fonksiyonu temel alınacaktır.

Bilgisayar ortamında bir $LC = (e;t,h : S \to R)$ cat^1-Lie cebir yapısını oluşturmak için ilk olarak aşağıdaki kayıt alanları oluşturulmuştur.

Source(C),	G, tanım Lie cebiri.
Range(C),	R, değer Lie cebiri.
IsDomain(C),	**true**, olarak ayarla.
Name(C),	G ve R nin birleştirilmiş ismi.
IsCat1LieAlg(C)	Boolean fonksiyonu, normalde **true**.

Cat1LieAlg() fonksiyonu, yazılmış olan ilk versiyonunda iki paremetre alarak çalışmaktadır. Bu parametreler t ve h, tail ve head homomorfizmleridir. Gömme homomorfizmi olan e ise opsiyonel üçüncü parametredir. S , R nin bir Lie alt cebiri olmadığı durumlarda e homomorfizminin de girilmesi gerekmektedir. Bu fonskiyonun çıktısı olarak bir (ön)Cat^1-cebir olabilecek bir cebirsel yapıya ulaşılır. Cat1LieAlg() fonksiyonunun algoritması kabaca şu şekilde verilebilir.

1. Adım	Üç paremetre verilip verilmediğini ve birinci parametrenin Lie cebiri olduğunu denetle.
2. Adım	t ve h nın R den S ye birer Lie cebir homomorfizmi olduğunu denetle.
3. Adım	Kayıt alanlarını kur.
4. Adım	IsCat1LieAlg() fonksiyonunu cağır ve aksiyomların sağlandığını denetle.

4. adımda bahsedilen IsCat1LieAlg() fonksiyonu yine tez kapsamında yazılmış olup şu şekilde çağrılır:

```
gap> IsCat1LieAlg(C);
```

Fonksiyon verilen C yapısı bir Cat^1-Lie cebir ise **true** cevabını aksi halde **false** cevabını döndürür. Bu fonksiyon kayıt alanlarıyla verilen verinin Cat^1-Lie cebir aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını denetler. Bu fonksiyon için geliştirilen algoritma aşağıdaki gibidir.

1. Adım	**C** nin bir kayıt yapısı olduğunu ve **Source(C)** ve **Range(C)** kayıt alanlarının varlığını ve Lie cebiri olduğunu denetle.
2. Adım	**Tail(C)** ve **Head(C)** kayıt alanlarının varlığını ve Lie cebir homomorfizmi olduğunu denetle.
3. Adım	**EmbedRange(C)**, **EmbedKernel(C)**, **Kernel(C)** ve **Boundary(C)** kayıt alanlarının varlığını ve doğru tanımlandığını konrol et.
4. Adım	Cat^1-Lie cebir şartlarının sağlandığını denetle.
5. Adım	**C** kayıt yapısına **IsCat1LieAlg** alanını ekle.

Bu fonskiyona benzer olarak oluşan yapının, yalnızca ön Cat^1-Lie cebir olup olmadığını denetleyen IsPreCat1LieAlg() fonksiyonu yine tez kapsamında yazılmıştır.

Örnek 4.5 L herhangi bir Lie cebiri ve $t,h,e : L \to L$ birim dönüşümler olmak üzere bir $C = (e;t,h : L \to L)$ Cat^1-Lie cebiri her zaman elde edilebilir. Örneğin aşağıdaki GAP oturumunda GF_3 sonlu cismi $c_2 \times c_2$ grubu kullanılarak oluşturulan grup cebirden elde edilen Lie cebiri ve birim dönüşümler ile birlikte bir Cat^1-Lie cebiri elde edilmiştir.

GAP

```
gap> FG := GroupRing(GF(3),SmallGroup(4,2));
<algebra-with-one over GF(3), with 2 generators>
gap> StructureDescription(SmallGroup(4,2));
"C2 x C2"
gap> L := LieAlgebra(FG);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
<Lie algebra over GF(3)>
gap> gL := GeneratorsOfAlgebra(L);
[ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
gap> f := AlgebraHomomorphismByImages(L,L,gL,gL);
[ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ] ->
[ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
gap> IsAlgebraHomomorphism(f);
true
gap> C := Cat1LieAlg(f,f,f) ;
[Algebra( GF(3), [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f1 ), LieObject( (Z(3)^0)*f2 ),
```

```
  LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ] ) -> Algebra( GF(3),
[ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ] )]
gap> IsCat1LieAlg(C);
true
gap> Size(C);
[ 81, 81 ]
gap> Display(C);
[Algebra( GF(3), [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f1 ), LieObject( (Z(3)^0)*f2 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ] )=>Algebra( GF(3),
[ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ] )]
gap> DisplayCat1LieAlg(C);
Cat1-Lie algebra [..=>..] :-
: source algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
:  range algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
: tail homomorphism maps source generators to:
  [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
: head homomorphism maps source generators to:
  [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
: range embedding maps range generators to:
  [ LieObject( (Z(3)^0)*<identity> of ... ), LieObject( (Z(3)^0)*f1 ),
  LieObject( (Z(3)^0)*f2 ), LieObject( (Z(3)^0)*f1*f2 ) ]
: the kernel is trivial.
true
```

Cat^1-Lie cebir oluşturmak için kullanılan üç morfizmin gerekli şartları sağlaması çoğu zaman mümkün olmaz. Bu nedenle GAP kullanıcılarının (ön)Cat^1-Lie cebirler elde etmesinde kolaylık sağlayacak bir kütüphane (Odabaş, 2009) çalışmasına benzer olarak oluşturulmuştur. Bu kütüphane, verilen gruplar ve Galois cisimleri yardımıyla oluşturulan grup-cebirlerden elde edilen Lie cebirlerinin (ön)Cat^1-cebirlerinden oluşmaktadır. GAP kullanıcılarının bu kütüphaneyi kullanmaları için tez kapsamında Cat1LieAlgSelect() fonksiyonu yazılmıştır. Bu fonksiyon

$$\texttt{Cat1AlgSelect}(<\texttt{gf}>, <\texttt{size}>, <\texttt{gpnum}>, <\texttt{num}>);$$

biçiminde dört parametre alarak çalışmaktadır. Bu parametreler sırasıyla

<gf> : Galois cisminin mertebesini,

<size> : Kullanılacak grubun mertebesini,

<gpnum> : Aynı mertebeden farklı grupların kütüphanedeki sırasını,

<num> : Verilen ilk üç değere göre oluşabilecek (ön)Cat^1-Lie cebirin sayısını vermektedir.

Bu fonksiyonunun kullanımına örnek aşağıdaki gibidir.

GAP
```
gap> C := Cat1LieAlg(4,8,4,1);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
[Lie(GF(2^2)_q8) -> Lie(GF(2^2)_q8)]
gap> IsCat1LieAlg(C);
true
```

Yukarıda kullanımına örnek verilen Cat1LieAlgSelect() fonksiyonu eksik veya yanlış giriş paremetreleri verilerek çalıştırılmak istendiğinde ise kütüphane içerisinde yer alan (ön)Cat^1-Lie cebirler hakkında bilgi vermektedir. Aşağıdaki GAP oturumunda Cat1LieAlgSelect() fonksiyonu eksik veya yanlış giriş parametrelerine karşılık verdiği cevaplar görülmektedir.

GAP
```
gap> Cat1LieAlgSelect(4);
There are groups having orders maximum 9 for GF(4) in the library.
fail
gap> Cat1LieAlgSelect(4,6);
 0 is a invalid gpnum number.
 where 0 < gpnum <= 2 for gpsize 6.
Usage:  Cat1LieAlg( GF(num), gpsize, gpnum, num );
[ "Lie(GF(2^2)_s3)", "Lie(GF(2^2)_c6)" ]
gap> Cat1LieAlgSelect(4,6,2);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
There are 4 cat1-structures for the algebra Lie(GF(2^2)_c6).
 Range Alg,         Tail Genimg,         Head Genimg
|------------------------------------------------|
| Lie(GF(2^2)_c6),  identity map identity map    |
| Lie(GF(2^2)_triv), [ 1, 1 ],  [ 1, 1 ]         |
| Lie(GF(2^2)_c2),   [ 1, 2 ],  [ 1, 2 ]         |
| Lie(GF(2^2)_c3),   [ 1, 2 ],  [ 1, 2 ]         |
|------------------------------------------------|
Usage:  Cat1LieAlg( GF(num), gpsize, gpnum, num );
Algebra has generators [ LieObject( (Z(2)^0)*() ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(4,5) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3)(4,5) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3,2)(4,5) ) ]
4
```

4.5 Denk Kategoriler

Cat[1]-Lie cebirler **Cat1LieAlg** kategorisi ile Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modüller **XModLieAlg** kategorisi doğal denk kategorilerdir. Buna göre bu tez çalışması ile birlikte bilgisayar ortamına aktarılan herhangi bir Lie cebiri üzerindeki çaprazlanmış modülden bir Cat[1]-Lie cebir ve yine tez kapsamında bilgisayar ortamına aktarılmış herhangi bir Cat[1]-Lie cebirden bir Lie çaprazlanmış modül elde edecek fonksiyonlar yazılmıştır. PreCat1LieAlgByPrePXLieAlg(), PrePXLieAlgByPreCat1LieAlg(), PXLieAlgByCat1LieAlg(), Cat1LieAlgByPXLieAlg() isimleri altında oluşturulmuş olan bu fonksiyonlar kendilerine parametre olarak bir Lie (ön)çaprazlanmış modül veya (ön)Cat[1]-Lie cebir almaktadır.

Örneğin Cat1LieAlgByPXLieAlg() fonksiyonu aşağıdaki gibi kullanılır.

```
gap> Cat1LieAlgByPXLieAlg( X );
```

XModLieAlg $\rightarrow$ **Cat1LieAlg** funktorunu oluşturmakta olan bu fonksiyon için algoritma aşağıdaki gibi verilebilir.

1. Adım	**IsPXLieAlg** fonksiyonunuyla girilen parametrenin bir çaprazlanmış modül olduğunu denetle.
2. Adım	$A = R \ltimes S$ yarı direkt çarpımını oluştur.
3. Adım	Uygun tail, head and embedding homomorfizmleri tanımla.
4. Adım	**Cat1LieAlg(A,t,h,e)** fonksiyonunu çağır.
5. Adım	**Cat1LieAlg(X)= C** ve **PXLieAlg(C)= X** kayıt alanlarını ekle.

Aşağıdaki GAP oturumunda, tez kapsamında oluşturulan kütüphaneden seçilen bir Cat[1]-Lie cebirden, Lie çaprazlanmış modül elde edilmiştir. Daha sonra Lie çaprazlanmış modülden tekrar bir Cat[1]-Lie cebir elde edilmiştir.

GAP

```
gap> C := Cat1LieAlg(4,8,2,1);
#I  LAGUNA package: Constructing Lie algebra ...
[Lie(GF(2^2)_c4c2) -> Lie(GF(2^2)_c4c2)]
gap> IsCat1LieAlg(C);
true
gap> DisplayCat1LieAlg(C);
Cat1-Lie algebra [Lie(GF(2^2)_c4c2)=>Lie(GF(2^2)_c4c2)] :-
: source algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*() ), LieObject( (Z(2)^0)*(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4) ),
```

```
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4)(5,6) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4)(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2)(5,6) ) ]
:  range algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*() ), LieObject( (Z(2)^0)*(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4)(5,6) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4)(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2)(5,6) ) ]
: tail homomorphism maps source generators to:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*() ), LieObject( (Z(2)^0)*(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4)(5,6) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4)(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2)(5,6) ) ]
: head homomorphism maps source generators to:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*() ), LieObject( (Z(2)^0)*(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4)(5,6) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4)(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2)(5,6) ) ]
: range embedding maps range generators to:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*() ), LieObject( (Z(2)^0)*(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4)(5,6) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4)(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2)(5,6) ) ]
: the kernel is trivial.
true
gap> XM := PXLieAlgByCat1LieAlg(C);
[Algebra( GF(2^2), [], LieObject( <zero> of ... ) )->Lie(GF(2^2)_c4c2)]
gap> IsPXLieAlg(XM);
true
gap> DisplayPXLieAlg(XM);
Crossed module of Lie algebras [..->Lie(GF(2^2)_c4c2)] :-
: Source algebra has generators:
  [  ]
: Range algebra has generators:
  [ LieObject( (Z(2)^0)*() ), LieObject( (Z(2)^0)*(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,2,3,4)(5,6) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,3)(2,4)(5,6) ),
  LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2) ), LieObject( (Z(2)^0)*(1,4,3,2)(5,6) ) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
  [  ]
true
gap> C2 := Cat1LieAlgByPXLieAlg(XM);
[Lie(GF(2^2)_c4c2) -> Lie(GF(2^2)_c4c2)]
gap> C2 = C;
true
```

Böylece Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller ve Cat^1-Lie cebirler, GAP programı kullanılarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Yine bu yapıların kategoriksel denkliklerinin GAP fonksiyonları tez kapsamında yazılmıştır.

BÖLÜM 5

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada Lie cebirleri üzerinde (ön)çaprazlanmış modüllerin cebirsel ve kategoriksel özellikleri incelenmiştir. Buna ek olarak sonlu boyutlu Lie cebirleri üzerinde tanımlı (ön)çaprazlanmış modüller, grup-cebirleri yardımıyla GAP kullanılarak bilgisayar ortamına aktarılmış ve belli numaralandırmalar ile sınıflandırmalara olanak sağlamıştır.

Yapılan bu çalışmalar ışığında, Leibniz cebirleri, Değişmeli (olmayan) Poisson cebirleri, Lie-Leibniz cebirleri gibi Fizikte ve Nambu mekaniğinde kullanılan önemli bazı cebirsel yapılar bilgisayar ortamına aktarılabilir ve benzer numaralandırmalar ile sınıflandırmalar elde edilebilir. Ayrıca mezkur yapılar üzerinde (ön)çaprazlanmış modüllerin belli cebirsel ve kategoriksel özellikleri elde edilip, literatürde verilen pek çok özellik ikinci boyuta taşınabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Adámek J., Herrlich H., Strecker, G. (1990) Abstract and concrete categories, (Series in Pure and Applied Mathematics), John Wiley and Sons.

Alp M. (1997) GAP, Crossed Modules, Cat^1- Groups, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor.

Alp M., Wensley C. (2002) Crossed Modules and Cat^1-groups in GAP, version 2.1 Manual for the XMOD share package.

Amoya R., Stewart I. (1974) Infinite-dimensional lie algebras, Nordhoff.

Aytekin A., Casas J. M., Uslu E.Ö. (2013) Semi-Complete Crossed Modules of Lie Algebras, Journal of Algebra and its applications (ISI), DOI No: 10.1142/S021949881250096X.

Barker M. (2003) Representations of Crossed Modules and Cat^1-Groups, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor.

Barr M., Beck. J. (1966) Acyclic models and triples, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla), Springer.

Barr M., Beck. J. (1969) Homology and standard constructions, en “Seminar on Triples and Categorical Homology Theory” (B. Eckmann, ed.). Lecture Notes in Mathematics, vol. 80. Springer, pp. 245-335.

Barr M., Wells C. (1985) Toposes, triples and theories, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York.

Borceux F. (1994a) Handbook of categorical algebra 1, Cambridge University Press.

Borceux F. (1994b) Handbook of categorical algebra 2, Cambridge University Press.

Borceux F. (1994c) Handbook of categorical algebra 3, Cambridge University Press.

Borceux, F., Janelidze, G., Kelly, G. M. (2005a) On the representability of actions in a semi-abelian category. Theory Appl. Categories 14:244-286.

Borceux, F., Janelidze, G., Kelly, G. M. (2005b) Internal object actions. Comment. Math. Univ. Carolin. 46:235-255.

Bovdi V., Konovalov A., Rossmanith R., SchneiderBarker C. (2007) LAGUNA : Lie AlGebras and UNits of group Algebras, GAP Share Package.

Boyaci Y., Casas J. M., Datuashvili T., Uslu E. Ö. Actions in modified categories of interest with application to crossed modules, preprint

Casas. J.M. (1991) Invariantes de Módulos Cruzados en Álgebras de Lie, Ph.D.Thesis, University of Santiago.

Casas J.M., Inassaridze N., Ladra M. (2010a) Homological aspects of Lie algebra crossed modules, Manuscripta Math. 131, 385-401.

Casas J.M., Datuashvili T., Ladra M. (2010b), Universal Strict General Actors and Actors in Categories of Interest, Appl. Categ. Structures 18:85-114.

Casas J.M., Datuashvili T., Ladra M. and Uslu Uslu E.Ö. (2012) Actions in the category of precrossed modules in Lie algebras, Comm. Algebra 40 , 2962-2982.

Cayley A. (1854) On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$, Phil. Mag. 7, 40-47.

Datuashvili T. (1995) Cohomologically trivial internal categories in categories of groups with operations, Applied Categorical Structures 3, n. 3, 221-237.

Ege, U. (1998) Çaprazlanmış Modüller, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Universitesi.

Ellis G.J. (1993) Homotopical aspects of Lie algebras, J. Austral. Math. Soc. (series A), 54 393-419.

Erdmann K., Wildon M. J. (2006) Introduction to Lie Algebras, Springer Press.

Herrlich H., Strecker G. E. (1972) Category theory, Allyn and Bacon series in advanced mathematics.

Lue A.S.-T. (1979) Semicomplete crossed modules and holomorphs of groups, Bull. London Math. Soc. 11, 8-16.

Mac Lane S. (1971) Categories for the working mathematician, Springer.

Odabaş A. (2009) GAP (Grup, Algoritma, Programlama) ile Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Orzech G. (1972) Obstruction theory in algebraic categories I, J. Pure Appl. Algebra 2, 287-314.

Passman. D.S. (1977) The Algebraic Structure of Group Rings, Eiley-Interscience, New York.

Schubert. H. (1972) Categories, Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Faruk ASLAN 6 Ocak 1984 arihinde İstanbul'da doğmuştur. Lisans öğrenimine 2002 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başlamış ve 2006 yılında mezun olmuştur. Yüksek Lisans öğrenimine 2007 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başlamış ve 2010 yılında mezun olmuştur. İş hayatına 2007 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak başlamıştır ve halen aynı bölümde akademik çalışmalarına devam etmektedir.

Eskişehir Osmangazi
Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Matematik ve
Bilgisayar Bilimleri Bölümü
ESKİŞEHİR