Vektör Uzaylarının Fuzzy Alt Uzayları Üzerine

Ahmet ARVAS

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Ekim 2014

On Fuzzy Subspaces of Vector Spaces

Ahmet ARVAS

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

October 2014

Vektör Uzaylarının Fuzzy Alt Uzayları Üzerine

Ahmet ARVAS

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya AKÇA

Ekim 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Ahmet ARVAS' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " **Vektör Uzaylarının Fuzzy Alt Uzayları Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ziya AKÇA

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, vektör uzaylarının fuzzy alt uzayları incelenmiştir. Birinci bölümde klasik grup teori, vektör uzayları ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, fuzzy kümeleri ve fuzzy vektör uzayları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde vektör uzaylarının fuzzy alt uzayları ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Vektör Uzayı, Fuzzy Vektör Alt Uzayı, Fuzzy Kümeleri

SUMMARY

In this thesis; fuzzy subspaces of vector spaces have been examined. In the first chapter, fundamental definitions of group theory, concepts and theorems related to vector spaces were given. In the second chapter, fuzzy set theory and fuzzy vector spaces were handled. In the third chapter, fuzzy subspaces of vector spaces were studied.

Keywords: Fuzzy Vector Space, Subspaces of Fuzzy Vector Space, Fuzzy Sets

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya yönlendiren ve tezim boyunca her türlü bilgi ve yardımlarını esirgemeyen

başta değerli danışman hocam, sayın;

Prof. Dr. Ziya AKÇA

olmak üzere

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ ve **Doç. Dr. Enver Önder USLU**'ya

Tezimin yazım ve düzenleme aşamasındaki her türlü yardımlarından dolayı değerli hocalarım,

Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ ve **Yrd. Doç. Dr. Ahmet Faruk ASLAN**'a

Ayrıca son olarak da beni bugünlere getiren,

değerli ailemdeki herkese

ayrı ayrı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Bu tezde vektör uzaylarının normal fuzzy alt uzayları ele alındı. Bunu kullanarak yeni fuzzy alt uzayları oluşturuldu. Ayrıca ; gerekli koşullar sağlandığında vektör uzayın fuzzy alt uzayının iki değerli olduğu ve bu değerlerin $0, 1$ olduğu gösterildi.

Bu çalışmada, birinci bölümde gerekli olan bazı cebirsel ve geometrik yapılar verildi.

İkinci bölümde ise fuzzy kümeler, fuzzy vektör doğrular, fuzzy vektör düzlemler ve n-boyutlu fuzzy vektör uzayları üzerine incelemeler yapıldı.

Son bölümde ise normal fuzzy alt uzayları üzerinde durularak aşağıdaki çalışmalar incelenmiş ve gerekli tanım, teorem ve örnekler kullanılmıştır;

Zadeh(**Zadeh**, 1965) fuzzy küme gösterimini tanıttı ve genel bir görüş ortaya koydu. Bundan sonra fuzzy üzerine matematiksel kavramlar tekrardan değerlendirildi. Tez de bu temel kavramların genellemesinin bir kaçı yer almaktadır. Cebirsel fuzzy yapıları; teorik fizik, bilgisayar bilimleri, mühendislik, enformasyon bilimi, kod teori, kriptoloji, topolojik uzaylar, mantık, küme teori, grup teori, reel analiz, ölçüm teori ve benzeri bir çok dalda geniş uygulama alanıyla matematikte önemli bir rol oynamaktadır. 1977 de Katsaras ve Liu(**A. K. Katsaras, D. B. Liu**, 1977) vektör uzayının fuzzy alt uzayı kavramı üzerine çalışmalar yapmış ve formülize etmişlerdir. Bundan sonra bir çok matematikçi tarafından fuzzy kümeleri dar bir vektör uzayı olmaktan çıkıp, geniş bir sahada uygulama alanı bulmuştur ve temel görüşler içerisindeki yerini almıştır. Ama tabii ki her sonuç fazileştirilemedi. Kumar(**R. Kumar**, 1992) diğer görüşler ve sonuçlar arasından, bir fuzzy alt uzayının fuzzy kosetinin iyi tanımlanması ve homomorfizm altındaki fuzzy alt uzaylarına doğal cebirsel işlemlerin uygulanabilmesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Yine Kumar(**R. Kumar**, 1992) diğer bir çalışmasında da fuzzy alt uzayının fuzzy tabanı ve boyutunun iyi tanımlanması ve çalışması konusu üzerinde durmuştur. Abu Osman(**Abu Osman**, 1989) ve Biswas(**Biswas**, 1989) ise çalışmalarında fuzzy cisimler üzerinde fuzzy alt uzaylar konusunu araştırmışlardır.

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Cebirsel, Geometrik Yapılar ve Bazı Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.1 A boş olmayan bir küme olsun. $A\times A$ dan A ya tanımlı bir

$$\begin{array}{cccc} *: & A\times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longrightarrow & (x*y) \end{array}$$

fonksiyonuna A içinde **ikili işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A\times A$ nın herhangi bir (a,b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a+b$, ab, $a.b$, $a\circ b$, $a\oplus b$, $a\odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).

Örnek 1.1 Tamsayıların ve gerçel sayıların toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri en çok bilinen ikili işlemlerdir.

Tanım 1.2 G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **grup** denir (Çallıalp, 2011).

G1) $*$, G de bir ikili işlemdir. Diğer bir ifade ile G kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.

G2) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Diğer bir ifade ile $\forall x,y,z\in G$ için $x*(y*z)=(x*y)*z$ dir.

G3) G kümesinin $*$ işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır. Diğer bir ifade ile $\forall x\in G$ için $x*e=e*x=x$ olacak şekilde en az bir $e\in G$ vardır.

G4) G nin her elemanının $*$ işlemine göre tersi vardır. Yani $x\in G$ için $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$ olacak şekilde en az bir $x^{-1}\in G$ vardır.

Örnek 1.2 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri adi toplama işlemine ($+$ işlemine) göre birer gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \mathbb{R}\backslash\{0\},$ ve $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine($\cdot$ işlemine) göre bir gruptur. $(\mathbb{N},+)$ ve $(\mathbb{Z},\cdot)$ cebirsel yapıları ise grup değildir.

Tanım 1.3 $(G,*)$ bir grup olsun, $\forall x,y\in G$ için $x*y=y*x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba **değişmeli grup** veya **abelyan grup** denir (Çallıalp, 2011).

Örnek 1.3 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri adi toplama işlemine ($+$ işlemine) göre birer değişmeli gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ve $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine ($\cdot$ işlemine) göre değişmeli gruptur.

Not 1.4 Grubun işlemi "$+$" ise **toplamsal grup**, "$\cdot$" ise **çarpımsal grup** denir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.5 $(G,*)$ bir grup olsun, G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir **sonlu grup** denir ve grubun eleman sayısına da **grubun mertebesi** denir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.6 G bir grup ve G nin boş olmayan alt kümesi H olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin **alt grubu** denir ve $H < G$ ile gösterilir (Çallıalp, 2011).

Tanım 1.7 F boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında

$$+ : F \times F \to F \text{ ve } \cdot : F \times F \to F$$

ile gösterilen iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya **cisim** adı verilir.

C1) Her $a,b \in F$ için $a+b=b+a$ ve $a\cdot b=b\cdot a$ dır.

C2) Her $a,b,c \in F$ için $(a+b)+c=a+(b+c)$ ve $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ dir.

C3) Her $a,b,c \in F$ için $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ dir.

C4) Her $a \in F$ için $a+0=a$ olacak şekilde bir tek $0 \in F$ vardır.

C5) Her $a \in F$ için $a\cdot 1=a$ olacak şekilde bir tek $1 \in F$ vardır.

C6) Her $a \in F$ elemanı için $a+(-a)=0$ olacak şekilde bir tek $-a \in F$ vardır.

C7) Her $a \in F$ ve $a \neq 0$ için, $a\cdot a^{-1}=1$ olacak şekilde bir tek $a^{-1} \in F$ vardır.

Örnek 1.4 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ birer cisim iken, $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Tanım 1.8 V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$$+ : V \times V \to V \text{ ve } \cdot : F \times V \to V$$

iki fonksiyon olmak üzere $(V,F,+,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, V kümesine F cismi üzerinde bir **vektör uzayı**dır denir.

V1) Her $x,y \in V$ için $x+y=y+x$ dir.

V2) Her $x, y, z \in V$ için $(x+y)+z = x+(y+z)$ dir.

V3) Her $x \in V$ için $x+\theta = x$ olacak şekilde V de bir tek θ elemanı vardır.

V4) Her $x \in V$ elemanı için, $x+y=\theta$ eşitliğini sağlayan V de bir tek y elemanı vardır.

V5) Her $a, b \in F$ ve her $x \in V$ için $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ dir.

V6) Her $a, b \in F$ ve her $x \in V$ için $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ dir.

V7) Her $a \in F$ ve her $x, y \in V$ için $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$ dir.

V8) Her $x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir.

Örnek 1.5 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer vektör uzayıdır. $n \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere $\mathbb{R}^{n}$ bir vektör uzayıdır.

Önerme 1.9 V bir vektör uzayı olsun. V de vektörel toplama işleminin etkisiz elemanı tektir.

İspat. Kabul edelim ki V vektör uzayının 0 ve $0'$ gibi iki etkisiz elemanı olsun. 0 bir etkisiz eleman olduğundan

$$\forall x \in V \text{ için } x+0 = 0+x = x$$

olur, burada özel olarak $x = 0'$ alınırsa;

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0' \tag{1}$$

bulunur. Aynı şekilde $0'$ bir etkisiz eleman olduğundan

$$\forall x \in V \text{ için } x + 0' = 0' + x = x$$

özel olarak $x = 0$ alınırsa,

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0 \tag{2}$$

bulunur. (1) ve (2) eşitlikleri karşılaştırılırsa $0 = 0'$ elde edilir. Böylece etkisiz elemanın tek olduğu gösterilmiş olur. Bundan böyle toplama işlemine göre etkisiz elemana sıfır vektör denilecektir. Açıktır ki $0 \cdot x = 0$ dır. Çünkü

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

dır. Benzer olarak , $r \in \mathbb{R}$ ve $0 \in V$ için $r \cdot 0 = 0$ dır. $\square$

Önerme 1.10 V bir vektör uzayı olsun. V de vektörel toplama işleminin ters elemanı tektir.

İspat. Kabul edelim ki V vektör uzayının $x^{'}$ ve $x^{''}$ gibi iki ters elemanı olsun. 0 V nin etkisiz elemanı olduğundan $\forall\, x \in V$ için

$$\begin{array}{rcll} x^{''} & = & x^{''}+0 & \text{şeklinde yazılabilir.} \\ & = & x^{''}+(x+x^{'}) & x^{'}\ x \text{ in toplamaya göre negatifi olduğundan,} \\ & = & (x^{''}+x)+x^{'} & \text{toplamanın birleşme özelliğinden,} \\ & = & 0+x^{'} & x^{''}\ x \text{ in toplamaya göre negatifi olduğundan} \\ & = & x^{'} & \text{elde edilir.} \end{array}$$

Böylece $x^{''}=x^{'}$ eşitliği elde edilir. Böylece V de vektörel toplama işleminin ters elemanı tektir. □

Örnek 1.6

$$V=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(x_1,x_2),\ \ (y_1,y_2)\in V,\ \ c\in\mathbb{R}\ \text{ için}$$

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,0)\ \text{ ve }\ c\cdot(x_1,x_2)=(c\cdot x_1,c\cdot x_2)$$

V kümesi bu işlemlere göre bir vektör uzayı mıdır?

Çözüm. Bunun için, V kümesinin öğelerinin verilen işlemlere göre vektör uzayı koşullarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. V1) Her $A,B\in V$, $A=(x_1,x_2)$, $B=(y_1,y_2)$ için

$$A+B=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,0)$$

$$B+A=(y_1,y_2)+(x_1,x_2)=(y_1+x_1,0)$$

olduğundan toplamanın değişme özelliği sağlanır. V2) Her $A,B,C\in V$, $A=(x_1,x_2)$, $B=(y_1,y_2)$, $C=(z_1,z_2)$ için

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= (x_1,x_2)+[(y_1,y_2)+(z_1,z_2)] \\ &= (x_1,x_2)+(y_1+z_1,0) \\ &= (x_1+y_1+z_1,0) \\ (A+B)+C &= [(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]+(z_1,z_2) \\ &= (x_1+y_1,0)+(z_1,z_2) \\ &= (x_1+y_1+z_1,0) \end{aligned}$$

olduğundan toplamanın birleşme özelliği sağlanır. V3) Her $A \in V$ için, $A = (x_1, x_2)$ olsun $A + E = A$ olacak şekilde bir E vektörü yani etkisiz(birim) vektör var mıdır? $E = (a, b)$ olsun , $a, b \in \mathbb{R}$ için;

$$A + E = (x_1, x_2) + (a, b) = (x_1, x_2) \text{ ise } (x_1 + a, 0) = (x_1, x_2)$$

iki vektörün eşitliğinden

$$x_1 + a = x_1 \text{ ve } x_2 = 0$$

olur. Buradan daima $x_2 = 0$ elde edilir. $x_2 \neq 0$ da olabileceğinden $A + E = A$ eşitliğini her zaman sağlayan bir E vektörü yoktur. Örneğin $A = (1, 2)$ için yukarıdaki eşitlik

$$(1, 2) + (a, b) = (1, 2) \text{ ise } (1 + a, 0) = (1, 2)$$

olur. Buradan $0 = 2$ gibi doğru olmayan bir eşitlik elde edilir. Buna göre V üzerinde ki toplama işleminin etkisiz öğesi yoktur yani, V verilen işlemlere göre bir vektör uzayı değildir.

Tanım 1.11 V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W kümesi, V kümesinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir alt uzayı denir. Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilir: (i) Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır. (ii) $\{0\}$ kümesinin oluşturduğu sıfır vektör uzayı o vektör uzayının bir alt uzayıdır. Buna göre sıfır vektör uzayından farklı her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır.

Örnek 1.7

$$W = \{(x, y) \mid y = x + 1, \ \ x \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı mıdır?

Çözüm. Alt uzay tanımına göre, W alt uzay ise $\mathbb{R}^2$ deki işlemlere göre bir vektör uzayıdır. Dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ nin sıfır vektörünü içermek zorundadır. Fakat, $0 = (0, 0) \notin W$ olduğundan ($x = 0$ için $y = 1$)

$$W = \{(x, y) \mid y = x + 1, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesi alt uzay değildir.

Teorem 1.12 V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W nin V nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul (i) $x, y \in W$ iken $x + y \in W$ (W toplama işlemine göre kapalı) (ii) $x \in W$, $c \in \mathbb{R}$ iken $c \cdot x \in W$ (W skalerle çarpma işlemine göre kapalı) olmasıdır.

İspat. W, V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda (i) ve (ii) koşullarının sağlandığı gösterilmelidir. W nin , V nin bir alt uzayı olmasından dolayı W nin kendisi de bir vektör uzayıdır. Bu nedenle (i) ve (ii) koşulları sağlanır. Tersine olarak W kümesi (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. (ii) den $x \in W, c \in \mathbb{R}$ iken $c \cdot x \in W$ olup, $c = 0$ ve $c = -1$ için $0 \in W$ ve $-x \in W$ elde edilir. Buna göre etkisiz öğe ve W içinde ki her x öğesinin tersi W içindedir. Bunun yanında vektör uzayının diğer koşulları W içinde sağlanır. Yani V nin W alt kümesi, aynı zamanda bir vektör uzayıdır. Bu da W kümesinin V nin bir alt uzayı olduğunu gösterir. □

Örnek 1.8

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı mıdır?

Çözüm. W kümesinin $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı olması için ; $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iken $x, y \in W$ için $x + y \in W$ ve $c \in \mathbb{R}$, için $c \cdot x \in W$ olmalıdır.

$$x, y \in W \text{ ise } x = (0, x_2, x_3) \text{ ve } y = (0, y_2, y_3)$$

olur. (W nin öğeleri birinci bileşenleri 0 olan vektörlerdir.)

$$x + y = (0, x_2, x_3) + (0, y_2, y_3) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ ve } x \in W \text{ iken } c \cdot x = c \cdot (0, x_2, x_3) = (0, c \cdot x_2, c \cdot x_3) \in W$$

elde edilir. Böylece W kümesinin öğeleri alt uzay olma koşullarını sağlar. W, $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır. Bu alt uzayın $yz-$düzlemi olduğuna dikkat ediniz.

Tanım 1.13 β, K kümesinden L kümesine bir bağıntı ve $(x, y) \in \beta$ ise, x ve y elemanları β **bağıntısıyla bağlıdır** denir ve $(x\beta y)$ olarak gösterilir.

Örnek 1.9 $\mathbb{R}$ içinde, $\leq$ ile gösterilen **küçük veya eşit olma** bağıntısı, iyi bilinen bir bağıntıdır. $x, y \in \mathbb{R}$ için x sayısı y den küçük veya y ye eşit ise, $x \leq y$ olarak yazılır. Tanım 1.13 de verilen gösterimlerle $2 \leq 3$, $3 \leq 3$ verilebilir.

Örnek 1.10 Belli bir kümeler topluluğu içinde, $\subseteq$ ile gösterilen **alt küme olma** bağıntısı da iyi bilinen bir bağıntıdır. Tanım 1.13 de verilen gösterimlerle $\{0, 1\} \subseteq \{-1, 0, 1\}$, $\{1, 2\} \subsetneq \{-1, 0, 1\}$ dir. Bağıntılar, çeşitli özellikleriyle kendi içlerinde ayrışırlar. Ayrıştırıcı özelliklerinden bazıları aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 1.14 K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun. $*$ Her $x \in K$ için $x\beta x$ ise, β nın **yansıma** özelliği vardır denir. $*$ $x, y \in K$ ve $x\beta y$ olunca, daima $y\beta x$ oluyorsa, β nın **simetri** özelliği vardır denir. $*$ $x, y \in K$, $x\beta y$ ve $y\beta x$ olunca, daima $x = y$ oluyorsa, β bağıntısının **ters-simetri** özelliği vardır denir. $*$ $x, y, z \in K$, $x\beta y$ ve $y\beta z$ olunca, daima $x\beta z$ oluyorsa, β nın **geçişme** özelliği vardır denir.

Tanım 1.15 K bir küme ve $\rho = \{K_i : i \in I\}$, K nın bazı altkümelerinin bir topluluğu olsun. Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanırsa, ρ ye K nın bir parçalanışı ve K_i lerden her birine bu parçalanışın bir hücresi denir:

(i) Her $i \in I$ için $K_i \neq \emptyset$.

(ii) $\bigcup\limits_{i \in I} K_i = K$.

(iii) Her $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$.

Örnek 1.11 $K = \{0,1,2,3,4\}$ için $K_1 = \{0\}$, $K_2 = \{1\}$, $K_3 = \{1,3\}$ altkümeleri, K nın bir parçalanışını oluştururlar.

Tanım 1.16 K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β nın yansıma, ters-simetri ve geçişme özellikleri varsa, β ya bir **kısmi sıralama bağıntısı** denir. Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı bulunan bir kümeye **kısmi sıralı küme** denir.

Örnek 1.12 $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ve kümelerde $\subseteq$ bağıntıları kısmi sıralama bağıntılarıdır.

Tanım 1.17 K, $\leq$ ile kısmi sıralı bir küme, $x, y \in K$ olsun. Eğer $x \leq y$ veya $y \leq x$ den en az biri doğru ise, x ve y elemanları **karşılaştırılabilir** elemanlardır denir. $\mathbb{Z} \subseteq K$ ise ve her $x, y \in \mathbb{Z}$ için x ve y karşılaştırılabilir elemanlar ise, $\mathbb{Z}$ ye K içinde bir **zincir** denir.

Örnek 1.13 K, $\mathbb{Z}$ nin tüm altkümelerinden oluşan, $\subseteq$ ile kısmi sıralı küme, $A_1 = \{-1,0\}$, $A_2 = \{-1,0,1\}$, $A_3 = \{-1,0,1,2\}$, $A_4 = \{-2,-1,0\}$ olmak üzere $Z = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\AA = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ olsun. Z bir zincirdir, fakat $\AA$ zincir değildir.

Tanım 1.18 K bir kısmi sıralı küme, $\AA \subseteq K$; $a, b, m \in \AA$ olsun. Eğer her $x \in \AA$ için $a \leq x$ ise, a elemanı $\AA$ nın **en küçük elemanı**dır denir. Benzer şekilde, eğer her $x \in \AA$ için $x \leq b$ ise, b elemanı $\AA$ nın en büyük elemanıdır denir. Eğer $\AA$ içinde $m \leq x$ olan yegane eleman $x = m$ ise, m elemanı $\AA$ nın bir **maksimal elemanı**dır denir.

Tanım 1.19 K bir kısmi sıralı küme, $\AA \subseteq K$ ve $u \in K$ olsun. Eğer her $x \in \AA$ için $x \leq u$ ise, u elemanı $\AA$ nın bir **üstsınırı**dır denir. Eğer u, $\AA$ nın bir üstsınırı ise ve $\AA$ nın her üstsınırı v için $u \leq v$ ise, u elemanı $\AA$ nın **en küçük üstsınırı**dır denir.

Örnek 1.14 Tanım 1.18'de verilen K ve onun altkümesi olan $\mathring{A}$ düşünüldüğünde, A_2 ve A_4 karşılaştırılamaz elemanlardır; A_1, $\mathring{A}$ nın en küçük elemanıdır; $\mathring{A}$ nın en büyük elemanı yoktur. $\mathring{A}$ nın iki tane maksimal elemanı vardır: A_3 ve A_4. $\mathring{A}$ nın K içinde bir üstsınırı, $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir ve bu üstsınır, $\mathring{A}$ nın K içindeki en küçük üstsınırıdır.

BÖLÜM 2

FUZZY VEKTÖR UZAYLARI

Bölüm 1 de bazı temel kavramlar vektör uzayları ve alt vektör uzayları gibi kavramların tanımları üzerinde duruldu ve örnekler verildi. Bu bölümde ise fuzzy kümeler, fuzzy vektör doğrular, fuzzy vektör düzlemler ve n-boyutlu fuzzy vektör uzayları incelendikten sonra bir fuzzy vektör uzayından uzunluğu n olan $(U_0, U_1, U_2....., U_{n-1}, V)$ maximal bir flagın varlığı ispat edilmektedir.

Verilen bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V , V nin başlangıç vektörü de $\overline{o}$ ile gösterilmektedir. Minimum operatör $\wedge$ ve Maksimum operatör $\vee$ ile gösterilmektedir. V nin klasik altuzayları L, α ve U ile gösterilmektedir. Bu bölümde verilen tanım ve teoremler P. Lubczonok ve L. Kuijken, H. Van Maldeghem, E. E. Kerre den alınmıştır.

Tanım 2.1 λ fuzzy kümesi, X kümesi üzerinde tanımlı

$$\begin{array}{rcl} \lambda \ : & X & \rightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \lambda(x) \end{array}$$

dönüşümdür. $\lambda(x)$ sayısı, λ daki x noktasının üyelik derecesi olarak adlandırılır. X kümesi üzerindeki λ ve μ gibi iki fuzzy kümelerinin arakesiti

$$\begin{array}{rcl} \lambda \wedge \mu \ : & X & \rightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \lambda(x) \wedge \mu(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda \wedge \mu$ fuzzy kümesidir.

Tanım 2.2 A ve B, X kümesinin herhangi iki fuzzy alt kümesi olsun. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A ve B eşittir denir ve $A = B$ olarak gösterilir. Ek olarak $A = B$ ancak ve ancak $\forall x \in X$ için $A(x) = B(x)$ dir.

Tanım 2.3 X in boş fuzzy alt kümesi, $\emptyset$ ile gösterilir ve her $x \in X$ için $\emptyset(x) = 0$ olarak tanımlanır. $\emptyset \subseteq A$ kapsaması X in her A fuzzy alt kümesi için sağlanır.

Tanım 2.4

$$\lambda : V \longrightarrow [0,1]$$

V üzerinde bir fuzzy kümesi olsun. λ nın V üzerinde bir fuzzy vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\forall \overline{u}, \overline{v} \in V \text{ ve } \forall a, b \in K \text{ için } \lambda(a.\overline{u} + b.\overline{v}) \geqslant \lambda(\overline{u}) \wedge \lambda(\overline{v})$$

olmasıdır.

Tanım 2.5 Bir fuzzy kümesinin boyu $hgt(A)$ ile gösterilir ve A nın üyelik derecelerinin supremumu(maximumu)dur.

Tanıma göre

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

olur. Eğer $hgt(A) = 1$ ise fuzzy kümesi A normaldir. Başka deyişle $\mu_A(x) = 1$ eşitliğini sağlayan en az bir x vardır. Normal olmayan her küme normalin altında diye adlandırılır. Böyle bir A kümesi $norm(A)$ normalizasyon fonksiyonu kullanılarak normalleştirilebilir ve aşağıdaki gibi gösterilir,

$$B = norm(A) \Rightarrow \mu_B(x) = \frac{\mu_A(x)}{hgt(A)}$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.6 K cismi üzerinde V bir vektör uzayı, $\bar{u}, \bar{v} \in V$ ve $\alpha \in K - \{0\}$ olsun.

$$\lambda : V \to [0,1]$$

fuzzy vektör uzayı ise aşağıdaki özellikler geçerlidir

(i) $\lambda(a.\bar{u}) = \lambda(\bar{u})$

(ii) $\lambda(\bar{0}) = \sup_{\bar{u} \in V} \lambda(\bar{u})$

(iii) $\lambda(\bar{u}) \neq \lambda(\bar{v})$ ise $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$

Not 2.7 λ, V üzerinde bir fuzzy vektör uzayı olsun. Alt uzay L, $\sup(\lambda)$

$$(\sup(\lambda) = \{\bar{x} \in V \mid \lambda(\bar{x}) = 0\})$$

tarafından doğrusal olarak üretilen, λ nın taban vektör uzayı olarak adlandırılır. L üzerindeki fuzzy vektör uzayı λ, $(\lambda, \bar{u})$ olarak gösterilir. $\lambda'(\bar{x}) = 0$, $\forall x \in V/U$ ifadesini ekleyerek (λ, U) fuzzy vektör uzayını her zaman (λ', V) vektör uzayına genişletebiliriz. Fuzzy vektör uzaylarının boyutu tanımlanırsa;

Örneğin V üzerinde iki fuzzy vektör uzayı olsun. Sırasıyla tabanları $\{(\bar{x}, 0.1), (\bar{y}, 0.3)\}$ ve $\{(\bar{x}, 0.7)\}$ olsun. İlk fuzzy alt uzayının boyutu 0.4 ve ikinci fuzzy alt uzayının boyutu 0.7 dir. Bir fuzzy geometri tanımlamak için iyi bir taban olmayan bu boyuttan taban vektörlerinin elde edilmesi pek olası değildir. Bu handikapın üstesinden gelmek için alternatif bir tanım aşağıda yapılmıştır.

Tanım 2.8 V nin bir λ fuzzy altuzayının boyutu $d(\lambda)$ ile gösterilir ve onun taban altuzayının boyutudur.(P. Lubczonok)

Örneğin V vektör uzayının 1 boyutlu alt uzayı L olsun.

$$\lambda : L \longrightarrow [0,1]$$

bir fuzzy altuzayının boyutu $d(\lambda) = 1$ dir.

Tanım 2.9 U, V nin $i-$boyutlu bir altyuzayı olsun ve (λ, U) da bir fuzzy vektör uzayı ise λ ya U üzerinde bir $i-$boyutlu fuzzy vektör uzayı denir. $i = 1$ iken U bir vektör doğrudur ve (λ, U), U üzerinde bir fuzzy vektör doğru olarak adlandırılır. $i = 2$ ise U bir düzlemdir ve (λ, U), U üzerinde bir fuzzy vektör düzlemi olarak adlandırılır. $i = n-1$ ise (λ, U) U üzerinde bir fuzzy vektör hiperdüzlem olarak adlandırılır.

2.1 Fuzzy Vektör Doğruları ve Düzlemleri

Tanım 2.10 V, bir K cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı olsun. $n \geqslant 2$ olmak üzere L, V nin bir vektör doğrusudur. Böylece L, sıfırdan farklı $\overline{u}$ vektörü ile tanımlanır. Bazen de bu L doğrusu $\overline{ou}$ ile gösterilir. L üzerindeki bir λ fuzzy kümesi verilsin.

Teorem 2.11

$$\lambda : L \longrightarrow [0,1]$$

L üzerinde bir fuzzy vektör doğrusu ise

$$\forall \overline{u}, \overline{v} \in L/\{0\}, \lambda(\overline{u}) = \lambda(\overline{v}) \text{ ve } \forall \overline{u} \in L, \lambda\left(\overline{0}\right) \geqslant \lambda(\overline{u})$$

dir.

İspat. Yardımcı teorem 2.6 (i) ve (ii) den L fuzzy vektör doğrusu üzerindeki vektörler aynı zamanda bir V fuzzy vektör uzayınında elemanıdır. Yardımcı teorem2.6 (i) den; $\forall \bar{u}, \bar{v} \in L/\{0\}$ aynı zamanda $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ dir. Buradan

$$\forall a, b \in K/\{0\} \text{ için } \lambda(a.\bar{u}) = \lambda(\bar{u}),\ \ \lambda(b.\bar{v}) = \lambda(\bar{v})$$

olur. Dolayısıyla $\lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$ elde edilir.

$$\lambda(\overline{0}) = \sup_{\bar{u} \in V} \lambda(\bar{u})$$

yardımcı teorem 2.6 (iii) koşulundan supremumuna ya eşit olur ya da ondan küçük olmalıdır. Dolayısıyla $\lambda(\overline{0}) \geq \lambda(\bar{u})$ elde edilir. $\square$

$n \geqslant 3$ olmak üzere, $n-$boyutlu V vektör uzayının bir vektör düzlemi α olsun. Bu takdirde α, $\overline{u}$ ve $\overline{v}$ gibi iki lineer bağımsız vektör tarafından tek türlü olarak bellidir. Bazen de bu α düzlemi $\overline{ouv}$ vektörleri ile gösterilir. Aşağıdaki teoremde α üzerinde bir λ fuzzy kümesi ele alınsın.

Teorem 2.12

$$\lambda : \alpha \longrightarrow [0,1]$$

α üzerinde bir fuzzy vektör düzlemi ise

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2, \ \ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$$

olmak üzere

$$\begin{array}{lllll} \lambda & : & \alpha & \longrightarrow & [0,1] \\ & & \overline{0} & \longrightarrow & \alpha_0 \\ & & \overline{u} & \longrightarrow & \alpha_1, \quad \overline{u} \in L \setminus \{0\} \\ & & \overline{v} & \longrightarrow & \alpha_2, \quad \overline{u} \in \alpha \setminus L \end{array}$$

olacak şekilde, α nın bir L vektör doğrusu vardır.

İspat. $\lambda\left(\overline{0}\right) = \alpha_0$ olsun. Yardımcı teorem 2.6 (ii) den $\forall\ \overline{u} \in V$ için $\alpha_0 = \lambda\left(\overline{0}\right) \geqslant \lambda\left(\overline{u}\right)$ olduğu açıktır. Şimdi α düzleminde $\overline{u}$ ve $\overline{v}$ iki taban vektörleri seçilsin. O halde $a, b \in K$ olmak üzere $\overline{w} \in \alpha$ vektörü, $\overline{w} = a.\overline{u} + b.\overline{v}$ şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılabilir. Fuzzy vektör uzayı tanımından

$$\lambda\left(\overline{w}\right) = \lambda\left(a.\overline{u} + b.\overline{v}\right) \geqslant \lambda\left(\overline{u}\right) \wedge \lambda\left(\overline{v}\right)$$

dır. $\overline{u}' = a.\overline{u}$ ve $\overline{v}' = b.\overline{v}$ denilirse, bu takdirde

$$\lambda\left(\overline{w}\right) = \lambda\left(a.\overline{u} + b.\overline{v}\right) = \lambda\left(\overline{w}\right) = \lambda\left(\overline{u'} + \overline{v'}\right)$$

olur. Burada iki durum söz konusudur:

1.DURUM : $\lambda\left(\overline{u'}\right) \neq \lambda\left(\overline{v'}\right)$ ise $a, b \in K - \{0\}$ için yardımcı teorem 2.6 (i) ve (iii) den

$$\begin{aligned} \lambda\left(\overline{w}\right) &= \lambda\left(\overline{u}'\right) \wedge \lambda\left(\overline{v}'\right) \\ &= \lambda\left(a.\overline{u}\right) \wedge \lambda\left(b.\overline{v}\right) \\ &= \lambda\left(\overline{u}\right) \wedge \lambda\left(\overline{v}\right) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ya $\lambda(\overline{u})$ ya da $\lambda(\overline{v})$ demektir ki bu da $a,b \neq 0$ olmak üzere

$$\overline{w} = a.\overline{u} + b.\overline{v}$$

şeklinde yazılan $\forall_{\overline{w}} \in V$ için, $\overline{w}, \overline{u}$ ve $\overline{v}$ nin üyelik derecesi en küçük olan ile aynı üyelik derecesine sahip olacağı anlamına gelir. Eğer $\lambda(\overline{u}) > \lambda(\overline{v})$ ise $\overline{ou}$ vektör doğrusu üzerindeki vektörler dışında α üzerindeki tüm vektörler $\lambda(\overline{v})$ üyelik derecesine sahip olacaktır($\lambda(\overline{v}) = \alpha_1$). Bu vektörler için en az bir $a \in K \setminus \{0\}$ için

$$\lambda(\overline{w}) = \lambda(a.\overline{u}) = \lambda(\overline{u}) = \alpha_1$$

dir. Bu durumda $L = \overline{ou}$ dır. Benzer şekilde $\lambda(\overline{v}) > \lambda(\overline{u})$ ise $L = \overline{ov}$ dir.

2.DURUM:

$$\lambda(\overline{u'}) = \lambda\left(\overline{v'}\right) = \lambda(\overline{u}) = \lambda(\overline{v})$$

ise

a)

$$\lambda(\overline{w}) > \lambda\left(\overline{u'}\right) = \lambda\left(\overline{v'}\right)$$

olacak şekilde α da $\overline{w} \neq \overline{0}$ vektörleri yoksa α üzerindeki tüm vektörler aynı $\lambda-$üyelik derecelerine sahip olacaktır ve teoremin doğruluğu aşikardır. Herhangi bir vektör doğrusu olarak L vektör doğrusu gibi düşünülebilir ve

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \lambda\left(\overline{u}'\right)$$

dir.

b)

$$\lambda(\overline{w}) > \lambda(\overline{u}) = \lambda(\overline{v})$$

olacak şekilde $\overline{w} \neq \overline{0}$ bir vektör olsun öyleki (özellikle $\overline{w}$ ne $\overline{ou}$ ne de $\overline{ov}$ üzerindedir) α yı geren vektör kümesi olarak $\{\overline{u}, \overline{w}\}$ kümesi alınabilir ki bu durumda 1.durum söz konusudur. □

2.2 Fuzzy Vektör Uzaylar

Yardımcı Teorem 2.13 Tabanı $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots.., \overline{x_n}\}$ olan, K cismi üzerinde n-boyutlu V vektör uzayı verilsin. λ, V üzerinde bir fuzzy vektör uzayı olsun $\forall i, j$ için $i \neq j$ olmak üzere

$$\lambda(\overline{x}_i) \neq \lambda\left(\overline{x}_j\right) \text{ ve } \overline{x} \neq \overline{0} \text{ için } \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overline{x_i} \text{ ise } \lambda(\overline{x}) = \min_{i=1}^{n} \lambda(\overline{x}_i)$$

dir.

İspat. n üzerinde tümevarım ile ispatı verilsin.

$n=1$ için yardımcı teorem 2.6 (i) ye indirgenir.

$n=k$ iken ifade doğru olsun. Şimdi sıfırdan farklı bir vektör için $a_{k+1} \neq 0$ iken

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i . \overline{x_i}$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
\lambda(\bar{x}) &= \lambda\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i . \overline{x_i}\right) \\
&= \lambda(a_{k+1} . \bar{x}_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i . \overline{x_i}) \\
&= \lambda(a_{k+1} . \bar{x}_{k+1} + \bar{x}')
\end{aligned}$$

$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i . \overline{x_i}$$

dir.

(a) $\forall i < k+1$ için yi yardımcı teorem 2.6(iii) den

$$\lambda(a_{k+1} . \bar{x}_{k+1}) = \lambda(\bar{x}_{k+1}) \neq \lambda(\bar{x}_i)$$

olur.

(b) Hipotezden

$$\lambda(\bar{x}') = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i . \overline{x_i}\right) = \min_{i=1}^{k} \lambda(\bar{x}_i)$$

ifadeleri vardır. $\forall i < k$ için $\lambda(\bar{x}_{k+1}) \neq \lambda(\bar{x}_i)$ dir. Dolayısıyla yardımcı teorem 2.6(iii) kullanılarak

$$\lambda(\bar{x}') \wedge \lambda(a_{k+1} . \bar{x}_{k+1})$$

olur. (a) ve (b) den aşağıdaki denklem

$$\min_{i=1}^{k} \lambda(\bar{x}_i) \wedge \lambda(\bar{x}_{k+1}) = \min_{i=1}^{k+1} \lambda(\bar{x}_i)$$

elde edilir. □

Tanım 2.14 V, $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşikar olmayan ve her $j < i < n-1$, $U_j \subset U_i$ olacak şekilde farklı altuzaylarının $(U_0, U_1, ..., U_m)$ dizisine V de bir **flag** denir. Bir flagın rankı içerdiği altuzayların sayısı olup, V de bir maximal flag ise uzunluğu n olan bir flagdır.

Teorem 2.15

$$\lambda : V \to [0,1]$$

V de n boyutlu bir fuzzy vektör uzayı olsun.

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant .... \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \alpha_n, \;\; \alpha_i \in [0,1]$$

olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \lambda : & V & \to & [0,1] & \\ & \overline{u} & \to & \alpha_0, & \overline{u} = \overline{0} = U_0 \\ & \overline{u} & \to & \alpha_1, & \overline{u} \in U_1 - U_0 \\ & \overline{u} & \to & \alpha_2, & \overline{u} \in U_2 - U1 \\ & \overline{u} & \to & \alpha_3, & \overline{u} \in U_3 - U2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & \overline{u} & \to & \alpha_{n-1}, & \overline{u} \in U_{n-1} - U_{\;n-2} \\ & \overline{u} & \to & \alpha_n, & \overline{u} \in V - U_{n-1} \end{array}$$

ve $d(U_i) = i$ olacak şekilde (bir tek olmak zorunda olmayan) uzunluğu n olan $(U_0, U_1, U_2 ....., U_{n-1}, V)$ maximal bir flag vardır.

İspat. $\lambda\left(\overline{0}\right) = a_0$ ise yardımcı teorem 2.6(ii) den $\forall \overline{x} \in V$, $a_0 \geqslant \lambda(\overline{x})$ dir. V nin olası tüm tabanları içinden, üyelik dereceleri farklı en çok sayıda vektörlerden oluşan tabanlar seçilip ve bu tabanların kümesine M denilsin. M deki tüm tabanlar içinde $i \neq j$, $\lambda(\overline{x}_i) \neq \lambda\left(\overline{x}_j\right)$ özelliğindeki bir $B = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\}$ tabanı seçilsin ve bu tabanın vektörleri aşağıdaki özelliği sağlasın

$$\lambda(\overline{x}_1) > \lambda(\overline{x}_2) > .... > \lambda(\overline{x}_n) \qquad (1)$$

şimdi keyfi $\overline{x} \in V$ alındığında

- $\lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda\left(\overrightarrow{0}\right)$ ise $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

- $\lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{x_1})$ ise $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1} \setminus \overrightarrow{0}$ dir. Bu yardımcı teorem 2.6 (ii) ve (1) den söylenebilir.

$\vdots$

- $\lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{x_1})$ ise $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1 ... x_i} \setminus \overrightarrow{0x_1 ... x_{i-1}}$ dir.

Eğer $U_0 = \overrightarrow{0}$, $\forall_i \neq 0$, $U_i = \overrightarrow{0x_1 .. x_i}$ ve $a_i = \lambda(\overrightarrow{x_i})$ ise teorem ispatlanmış olur.

Şimdi M de tüm $\mu(\overrightarrow{x_i})$ ler farklı olacak şekilde bir taban bulunmadığı varsayılsın. Bu durumda taban vektör uzayın boyutu üzerinden tümevarımla ispat yapıldığında; yardımcı teorem 2.6 (ii) ve 2.12 den, $n = 1$ (taban $\{\overline{x_1}\}$) ve $n = 2$ (taban $\{\overline{x_1},\ \overline{x_2}\}$) için bu durumu ispatlar.

$(\overline{0}, \overline{0x_1})$ ve $(\overline{0}, \overline{0x_1}, \overline{0x_1x_2})$ maximal flaglar, $(\alpha_{0,}\alpha_1)$ ve $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $\left(\lambda\left(\overline{0}\right), \lambda(\overline{x}_1)\right)$ ve $\left(\lambda\left(\overline{0}\right), \lambda(\overline{x}_1), \lambda(x_2)\right)$ tarafından verilen diziler olur. Buradan da görülür ki taban maksimal flag i ve α_i lerin dizisini tanımlar.

Şimdi $n = 1$ ve $n = 2$ deki durumun k dan $n-1$ e kadar olan tüm boyutlar için sağlandığı kabul edilip. n boyutlu durum için geçerli olacağı gösterilirse. Yani $B = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\}$ tabanı için $U_i = \overline{0x_1x_2.....x_i}$ ve

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant .... \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \alpha_n, \quad \alpha_i = \lambda(x_i)$$

olduğu araştırılacak ve $U_0 = \overline{0}$, $\lambda\left(\overline{0}\right) = \alpha_0$ olması ile ispat tamamlanacaktır. M nin her bir tabanı ile belli bir sayı arasında ilişki kurulursa. Bunu yapmak için

$$\lambda(x_n) \leqslant \lambda(\overline{x_{n-1}}) \leqslant ...... \leqslant \lambda(\overline{x_1}) \tag{2}$$

olacak şekilde her bir tabandaki $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\}$ taban vektörleri düzenlenir. M nin seçiminden dolayı bu tabandaki vektörlerin herbiri için eşitliklerin sayısı aynı olacaktır.

Şimdi herbir tabanın sayısının nasıl tanımlanacağı açıklanırsa. İlk olarak taban vektörleri (2) deki şekilde monoton artan bir dizideki gibi düzenlenir. Her bir eşitsizlik için ”/” koyarak başlanır. Seçilen tüm tabanlar için ”/” sayısı aynı olacaktır. İlk ”/” dan önce, ilk eşitsizlikten önce ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır, iki ardışık ”/” arasına ise iki ilişkili eşitsizlik arasında ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır. Son olarak ise son ”/” dan sonra son eşitsizlikten sonra ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır.

$n = 8$ için örnek verilirse

$$\begin{aligned} \lambda(\overline{x}_8) &= \lambda(\overline{x}_7) \\ &= \lambda(\overline{x}_6) < \lambda(\overline{x}_5) < \lambda(\overline{x}_4) \\ &= \lambda(\overline{x}_3) < \lambda(\overline{x}_2) \\ &= \lambda(\overline{x}_1) < \lambda\left(\overline{0}\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\{x_1, x_2, ..., x_8\}$ tabanı $2/0/1/1/0$ dizisini verir.

M nin her bir tabanı için bir dizi elde ettikten sonra, bu diziler sırasıyla düzenlenip ve bu düzenleme ile ilişkili olarak en küçük B tabanı olduğu gösterilecektir.

Varsayalım ki B nin dizisi sıfır ile başlasın. ($\lambda(\bar{x}_n) < \lambda(\bar{x}_{n-1})$) keyfi

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i.\bar{x}_i$$

olacak şekilde $V \setminus \overline{ox_1x_2.......x_{n-1}}$ alınsın. Dolayısıyla b_n sıfırdan farklı olmak zorundadır. Böylece

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda\left(b_n.\bar{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1}\right)$$

dır. Tümevarım hipotezinden dolayı

$$i < n, \lambda\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i.\bar{x}_i\right) = \lambda(\bar{x}_i)$$

dır. $\forall i < n,\ \lambda(\overline{x_i}) \geqslant \lambda(\bar{x}_n)$ olduğundan yardımcı teorem 2.6 (iii) den $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_n)$ dir.

$\overline{0x_1.........x_n}$ vektörü, $\{\bar{x}_{1,}..........,\bar{x}_{n-1}\}$ tabanı tarafından tanımlanan $(n-1)$ boyutta, tümevarım hipotezinden elde edilen maksimal flag ile toplanırsa $n+1$ uzunluklu bir maksimal flag elde edilir ve $\lambda(\overline{x_n}) = a_n$ alarak teorem ispatlanır. Eğer dizi sıfırdan farklı bir k sayısı ile başlarsa, bunun anlamı

$$\lambda(\bar{x}_n) = \lambda(\bar{x}_{n-1}) = ... = \lambda(\bar{x}_{n-k})$$

dır.

$V \setminus \overline{0x_1x_2.......x_{n-1}}$ de $\bar{x}$ keyfi bir vektör alınırsa iki durum vardır. $\bar{x} = b_n.x_n$, $b_n \neq 0$ ise $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\overline{x_n})$ olduğu açıktır. Eğer bir $i \neq n,$ en azından bir $b_i \neq 0$ ve $b_n \neq 0$ ise iki durum vardır;

1.DURUM: $\forall\ i \in \{n-k, ..., n-1\}$ için $b_i = 0$ ise $\bar{x} \in \overline{0x_1x_2.....x_{n-k-1}x_n}$ dir. Böylece

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda\left(b_n.\overline{x_n} + \sum_{i=1}^{n-k-1} b_i.\overline{x_i}\right)$$

dır. Tümevarım hipotezinden belli bir $j < n-k$ için,

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n-k-1} b_i.\bar{x}_i\right) = \lambda\left(\overline{x_j}\right) < \lambda(\bar{x}_n)$$

dir, buradan yardımcı teorem 2.6 uygulanabilir anlamı çıkar ve $\lambda(\overline{x}) = \lambda(\overline{x}_n)$ bulunur.

2.DURUM: $b_i \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{n-k, n-k-1, ..., n-1\}$ tamsayısının bulunduğu varsayılırsa. Tümevarım hipotezinden $\overline{0x_1.....x_{n-1}}$ sırasıyla düzenlenmiş en küçük taban $\{\overline{x}_1, ...\overline{x}_{n-1}\}$ dır. Böylece

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i.\overline{x}_i\right) = \lambda(\overline{x}_{n-1}) = \lambda(\overline{x_n})$$

dır. Burada yardımcı teorem 2.6 (ii) kullanılamaz fakat fuzzy vektör uzayı tanımından $\lambda(\overline{x}) \geqslant \lambda(\overline{x_n})$ sonucu elde edilir. Varsayalım ki $V \setminus \overline{0x_1......x_{n-1}}$ de $\lambda(\overline{v}) \succ \lambda(\overline{x}_n)$ olacak şekilde bir $\overline{v} \in V$ olsun. Bu takdirde bazı $i \leqslant n-k-1$ için, M nin tanımından $\lambda(\overline{v}) \geqslant \lambda(\overline{x_i})$ dir. Başka bir B' tabanından elde edilen $\overline{v}$ vektörü ile $\overline{x}_n$ vektörü değiştirilsin. Ancak B' tabanı sırasıyla düzenlenen B den daha küçük bir taban olacaktır. Çünkü B

$$n_1/n_2/...../n_i/..../n_e$$

dizisi ile karakterize edilirse, B'

$$n_1 - 1/n_2/....../n_i + 1/....../n_e$$

ile karakterize edilecektir. Bu ise B nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla

$$\forall_v \in V \setminus \overline{0x_1.......x_{n-1}} \text{ için } \lambda(\overline{v}) = \lambda(\overline{x}_n)$$

dir. Bu iki durumda

$$\forall_{\overline{x}} \in V \setminus \overline{0x_1......x_{n-1}} \text{ için } \lambda(\overline{x}) = \lambda(\overline{x_n})$$

bulundu. Dolayısıyla $\overline{0x_1x_2.........x_{n-1}x_n} = V$, n uzunluklu maksimal flag ekleyerek ve $a_n = \lambda(\overline{x_n})$ alarak teorem ispatlanır. □

Sonuç 2.16

$$\lambda : V \to [0,1]$$

V üzerinde n boyutlu bir fuzzy vektör uzayı

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant .... \geqslant a_{m-1} \geqslant a_m\ ,\ \ a_i \in [0,1]$$

olmak üzere

$$\begin{array}{llll}
\lambda : & V & \longrightarrow & [0,1] \\
& \overline{0} & \longmapsto & \alpha_0, \quad \overline{u} = \overline{0} = U_0 \\
& \overline{u} & \longmapsto & \alpha_1, \quad \overline{u} \in U_1 \setminus U_0 \\
& \overline{u} & \longmapsto & \alpha_2, \quad \overline{u} \in U_2 \setminus U1 \\
& \overline{u} & \longmapsto & \alpha_3, \quad \overline{u} \in U_3 \setminus U2 \\
& & & \vdots \\
& \overline{u} & \longmapsto & \alpha_{m-2}, \quad \overline{u} \in U_m \setminus U_{\ m-2} \\
& \overline{u} & \longmapsto & \alpha_{m-1}, \quad \overline{u} \in U_m \setminus U_{\ m-1} \\
& \overline{u} & \longmapsto & \alpha_m, \quad \overline{u} \in V \setminus U_m
\end{array}$$

olacak şekilde $m \leqslant n$ için $(U_0, U_1, ...U_m)$ tek bir flag bulunur.

Bir önceki teoremde, U_i altuzaylarının tek olmaları mümkündü, örneğin $\lambda(\overline{x_i}) = \lambda(\overline{x_{i+1}})$ ise $j < i$ için tüm U_j leri içeren U_{i+1} de $i-$boyutlu her U_i altuzayı maxsimal flag içinde $i-$boyutlu her altuzay için seçilebilir. Tüm belirsiz altuzaylar çıkarılırsa, tek olan bir F flag elde edilir ki burada teoremin düzenlediği başka flaglar yoktur. Bu F flagı genellikle maksimal olmayacaktır.

BÖLÜM 3

VEKTÖR UZAYLARININ FUZZY ALTUZAYLARI

Bu bölümde vektör uzayının fuzzy alt uzaylarının bazı özellikleri incelenmektedir. Özellikle bazı yöntemler eski fuzzy alt uzaylarından yeni fuzzy alt uzayları inşa etmek için kullanıldı. Ayrıca vektör uzaylarının normal fuzzy alt uzayının notasyonu gösterildi ve bazı normal fuzzy alt uzaylarının fuzzy alt uzayı tarafından üretildiği de gösterilmektedir. Son olarak sabit olmayan bir normal fuzzy alt uzayı, bir vektör uzayının normal fuzzy alt uzayının parçalı sıralı kümesinde maksimal olması durumunda bu fuzzy alt uzayının iki değerli olduğu ve alacağı değerlerin $0,1$ olduğu gösterildi.

3.1 Fuzzy Normal Alt Uzayları

Tanım 3.1 V vektör uzayının bir fuzzy kümesi olan μ, $\forall x, y \in V$ ve $a \in F$ için aşağıdaki koşulları sağlandığında V nin bir fuzzy alt uzayı olarak adlandırılır.

(i) $\mu(x+y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(ii) $\mu(-x) \geq \mu(x)$

(iii) $\mu(a \cdot x) \geq \mu(x)$

Açıkça μ, V nin bir fuzzy alt uzayı ise, $\forall x \in V$ için $\mu(0) \geq \mu(x)$ dir. Ayrıca μ, V nin bir fuzzy alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul μ_t, $\forall t \in [0,1)$ için V nin bir alt uzayıdır.(**A. K. Katsaras, D. B. Liu**(1977); **P. Lubczonok**(1990))

Yardımcı Teorem 3.2 μ, V nin bir fuzzy alt uzayı ise

$$V_\mu = \{x \in V \mid \mu(x) = \mu(0)\}$$

kümesi V nin bir alt uzayıdır.

İspat. $x, y \in V_\mu$ olsun, o zaman

$$\mu(x) = \mu(y) = \mu(0)$$

dır. μ bir fuzzy alt uzayı olduğundan aşağıdakiler sağlanır

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(0) \wedge \mu(0) = \mu(0).$$

Diğer taraftan

$$\mu(x-y) \leq \mu(0)$$

dır. Böylece

$$\mu(x-y) = \mu(0) \text{ ve } x-y \in V_\mu$$

olur. Ayrıca herhangi

$$x \in V_\mu \text{ ve } a \in F \text{ için } \mu(a \cdot x) \geq \mu(x) = \mu(0)$$

elde edilir. Bu da $a \cdot x \in V_\mu$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak V_μ kümesi V nin bir alt uzayıdır. □

Tanım 3.3 $x \in V$ için $\mu(x) = 1$ ise, V nin μ fuzzy alt uzayı **normal** olarak adlandırılır. V nin bir fuzzy alt uzayı normal ise $\mu(0) = 1$ dir. Böylece μ normal bir fuzzy alt uzayıdır ancak ve ancak $\mu(0) = 1$ dir.

Teorem 3.4 μ, V nin bir fuzzy alt uzayı olsun ve $\widetilde{\mu}$ da

$$\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0), \quad \forall x \in V$$

olarak tanımlanan V içerisinde bir fuzzy kümesi olsun. O zaman $\widetilde{\mu}$, μ yü içeren V nin bir normal fuzzy alt uzayıdır.

İspat. $x, y \in V$ ve $a \in F$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(x-y) &= \mu(x-y) + 1 - \mu(0) \geq (\mu(x) \wedge \mu(y)) + 1 - \mu(0) \\ &= (\mu(x) + 1 - \mu(0)) \wedge (\mu(y) + 1 - \mu(0)) \\ &= \widetilde{\mu}(x) \wedge \widetilde{\mu}(y) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\widetilde{\mu}(a \cdot x) = \mu(a \cdot x) + 1 - \mu(0) \geq \mu(x) + 1 - \mu(0) = \widetilde{\mu}(x)$$

olur. Açık olarak $\widetilde{\mu}(0) = 1$ ve $\mu \subseteq \widetilde{\mu}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.5 μ, en az bir $x \in V$ için $\widetilde{\mu}(x) = 0$ ifadesini sağlayan V nin bir fuzzy alt uzayı ise $\mu(x) = 0$ dır.

İspat. $\widetilde{\mu}$ nın tanımından

$$\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0), \quad \forall x \in V$$

olarak yazılır. Bazı $x \in V$ için $\widetilde{\mu}(x) = 0$ olarak verildiğinden

$$\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0) = 0$$

dır. Diğer bir ifadeyle $\mu(0) - \mu(x) = 1$ yazılabilir. μ fuzzy alt uzayının alabileceği en büyük değer 1 olduğundan ve bu en büyük değeri $\mu(0)$ da aldığından eşitlik $\mu(0) - \mu(x) = 1$ de $\mu(0) = 1$ ve $\mu(x) = 0$ olmalıdır. □

Yardımcı Teorem 3.6 χ_w, $W \subseteq V$ alt kümesinin karakteristik fonksiyonu olsun. W, V nin bir alt uzayıdır ancak ve ancak χ_w, V nin bir fuzzy alt uzayıdır.

İspat.

$$\chi_w : V \longrightarrow \{0,1\}$$

olacak şekilde $W \subseteq V$ alt kümesinin karakteristik bir fonksiyonu

$$\chi_w(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & , & x \in W \\ 0 & , & x \in V/W \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanır. İki yönlü olarak ispat yapılırsa;

W, V nin bir alt uzayı olsun. χ_w nin bir fuzzy alt uzayı olduğu gösterelmelidir. W alt uzay olduğundan; $\forall\, x, y \in W$ için $x + y \in W$ dir. Ayrıca $\forall x \in W$ ve $\forall\, a \in F$ için $a \cdot x \in W$ dir.

(i)

$$\chi_w(x+y) \geq \chi_w(x) \wedge \chi_w(y)$$

eşitsizliğinin sağlanması için aşağıdaki üç ihtimal değerlendirilmelidir.

a) $x, y \in W$ ise karakteristik fonksiyonun tanımından $\chi_w(x) = 1$, $\chi_w(y) = 1$ ve $x + y \in W$ olduğundan $\chi_w(x+y) = 1$ dir, buradan da

$$\chi_w(x+y) = 1 \geq (\chi_w(x) \wedge \chi_w(y)) = 1 \wedge 1 = 1$$

elde edilir.Sonuç olarak $1 \geq 1$ olduğundan

$$\chi_w(x+y) \geq \chi_w(x) \wedge \chi_w(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

b) $x \in W$ ve $y \notin W$ ise karakteristik fonksiyonun tanımından $\chi_w(x) = 1$ ve $\chi_w(y) = 0$ dır. Böylelikle $x + y \notin W$ olur. Yine karakteristik fonksiyonun tanımından $\chi_w(x+y) = 0$ elde edilir.

$$\chi_w(x+y) = 0 \geq (\chi_w(x) \wedge \chi_w(y)) = 1 \wedge 0 = 0$$

olur. Sonuç olarak $0 \geq 0$ olduğundan

$$\chi_w(x+y) \geq \chi_w(x) \wedge \chi_w(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

c) $x, y \notin W$ ise karakteristik fonksiyonun tanımından;$\chi_w(x) = 0$, $\chi_w(y) = 0$ dir. Böylelikle $x + y \notin W$ olur. Buradan $\chi_w(x+y) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\chi_w(x+y) = 0 \geq (\chi_w(x) \wedge \chi_w(y)) = 0 \wedge 0 = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $0 \geq 0$ olduğundan

$$\chi_w(x+y) \geq \chi_w(x) \wedge \chi_w(y)$$

eşitsizliğine ulaşılır.Böylece birinci koşul sağlanır.

(ii) W alt uzay olduğundan $\forall a \in F$ için $\forall x \in W$ ise $a \cdot x \in W$ dir. Özel olarak $a = -1$ alınırsa $-x \in W$ olur. Buradan

$$\chi_w(-x) = 1 \text{ ve } \chi_w(x) = 1 \text{ ise } \chi_w(-x) \geq \chi_w(x)$$

olur.

$$x \notin W \text{ ise } a \cdot x \notin W$$

dir. Buradan $-x \notin W$ olduğu anlaşılır

$$\chi_w(-x) = 0 \text{ ve } \chi_w(x) = 0 \text{ ise } \chi_w(-x) \geq \chi_w(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii) $\forall\, a \in F, \forall\, x \in W$ için (ii) de uygulanan yöntemle

$$\chi_w(a \cdot x) \geq \chi_w(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan χ_w, V nin bir fuzzy alt uzayıdır.

Diğer taraftan $\forall x, y \in V$ ve $a \in F$ için

$(i)\ \ \chi_w(x+y) \geq \chi_w(x) \wedge \chi_w(y)$

$(ii)\ \ \chi_w(-x) \geq \chi_w(x)$

$(iii)\ \ \chi_w(a \cdot x) \geq \chi_w(x)$

olsun ve $x, y \in W$ için $x+y \notin W$ kabul edilsin. İspatlanması gereken $\forall x, y \in W$ için $x+y \in W$ ve $a \in F$ ve $\forall x \in W$ için $a \cdot x \in W$ dir. Buradan

$$\chi_w(x) = 1,\ \chi_w(y) = 1 \text{ ise } \chi_w(x) \wedge \chi_w(y) = 1$$

olur. Fakat $\chi_w(x+y) = 0$ olduğundan

$$\chi_w(x+y) = 0 \geq \chi_w(x) \wedge \chi_w(y) = 1 \wedge 1 = 1 \text{ ise } 0 \geq 1$$

çelişkisini verir. Dolayısıyla $x+y \in W$ dir. İkinci olarak;

$\forall x \in W$ ve $a \in F$ için $a \cdot x \notin W$ olduğunu kabul edelim. $\chi_w(x) = 1$ ve $\chi_w(a \cdot x) = 0$ olur. Bu da

$$\chi_w(a \cdot x) \geq \chi_w(x)$$

için $0 \geq 1$ çelişkisini verir. Dolayısıyla $a \cdot x \in W$ olur. Buradan W, V nin bir alt uzayıdır. □

Teorem 3.7 V nin herhangi bir alt uzayı W için, χ_w karakteristik fonksiyonu V nin bir normal fuzzy alt uzayıdır ve $V_{\chi_w} = W$ dir.

İspat. $W \subseteq V$ alt kümesinin karakteristik bir fonksiyonu

$$\chi_w(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & , & x \in W \\ 0 & , & x \in V/W \end{array} \right\}$$

ve

$$V_{\chi_w} = \{x \in V \mid \chi_w(x) = \chi_w(0)\}$$

kümesi ele alınsın.

Yardımcı teorem 3.6 dan χ_w karakteristik fonksiyonun fuzzy alt uzayı olduğu gösterildi. Şimdi ise normal olduğu gösterilecektir. Normallik tanımına göre $\chi_w(0) = 1$ olması yeterlidir. $W \subseteq V$ alt kümesi V nin alt uzayı olduğundan etkisiz elemanı olan 0 ı içermeli $0 \in W$ dir. Karakteristik fonksiyonun tanımından $\chi_w(0) = 1$ olur. Bu da χ_w nin normal olduğu anlamına gelir. Şimdi ise $V_{\chi_w} = W$ olduğu gösterilsin.

$$y \in V_{\chi_w} \text{ ise } \chi_w(y) = \chi_w(0) = 1 \text{ eşitlikten } \chi_w(y) = 1$$

olup $y \in W$ dir. Böylece

$$V_{\chi_w} \subseteq W \tag{1}$$

dir. $y \in W$ iken karakteristik fonksiyondan $\chi_w(y) = 1$ eşitliği sağlanır. $0 \in W$ olduğundan $\chi_w(0) = 1$ olup

$$\chi_w(y) = \chi_w(0) = 1$$

elde edilir. Böylece $y \in V_{\chi_w}$ dir. buradan da

$$W \subseteq V_{\chi_w} \tag{2}$$

kapsamasına ulaşılır. (1) ve (2) den $V_{\chi_w} = W$ dir. □

Teorem 3.8 V nin bir μ fuzzy alt uzayının normal olması için gerek ve yeter koşul $\widetilde{\mu} = \mu$ olmasıdır.

İspat. Eğer $\widetilde{\mu} = \mu$ eşitliği sağlanıyorsa, μ, V nin bir normal fuzzy alt uzayıdır. Diğer traftan kabul edelim ki μ, V nin normal fuzzy alt uzayı olsun. $\mu(0) = 1$ olduğundan

$$\forall x \in V \text{ için } \widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0) = \mu(x) + 1 - 1 = \mu(x)$$

olup, $\widetilde{\mu} = \mu$ dür. □

Teorem 3.9 μ, V nin bir fuzzy alt uzayı ise $\widetilde{\widetilde{\mu}} = \widetilde{\mu}$ dir.

İspat. $\widetilde{\mu}$ nın tanımından

$$\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0)$$

$\widetilde{\widetilde{\mu}}$ tanımından

$$\widetilde{\widetilde{\mu}}(x) = \widetilde{\mu}(x) + 1 - \widetilde{\mu}(0)$$

dır.

μ, V nin bir fuzzy alt uzayı olduğundan Teorem 3.4. ten $\widetilde{\mu}$, μ yü içeren V nin bir normal fuzzy alt uzayı olduğundan $\widetilde{\mu}(0) = 1$ dir. Buna göre

$$\widetilde{\widetilde{\mu}}(x) = \widetilde{\mu}(x) + 1 - \widetilde{\mu}(0) = \widetilde{\mu}(x) + 1 - 1 = \widetilde{\mu}(x)$$

$\widetilde{\widetilde{\mu}} = \widetilde{\mu}$ eşitliği elde edilir. □

Teorem 3.10 μ, V nin bir fuzzy alt uzayı olsun. $\widetilde{\nu} \subseteq \mu$ kapsamasını sağlayan V nin ν fuzzy alt uzayı mevcut ise μ, V nin bir normal fuzzy alt uzayıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\widetilde{\nu} \subseteq \mu$ olacak şekilde V nin ν fuzzy alt uzayı olsun. Buradan

$$\widetilde{\nu}(x) = \nu(x) + 1 - \nu(0)$$

olduğundan ve teorem 3.4 den $\widetilde{\nu}$ normal fuzzy alt uzayıdır. Buradan hareketle

$$1 = \widetilde{\nu}(0) \leq \mu(0)$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın kabulunde $\widetilde{\nu} \subseteq \mu$ kapsaması verilmişti. Ayrıca μ nün alabileceği en büyük değer 1 olduğundan $\mu(0) = 1$ elde edilir. Böylece μ, V nin bir normal fuzzy alt uzayıdır. □

Sonuç 3.11 μ, V nin bir fuzzy alt uzayı olsun. $\widetilde{\nu} \subseteq \mu$ kapsamasını sağlayan V nin ν fuzzy alt uzayı mevcut ise $\widetilde{\mu} = \mu$ dür.

İspat.

$$\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0)$$

tanımından teorem 3.10 da μ nün, V nin bir normal fuzzy alt uzayı olduğu elde edilmişti. Dolayısıyla $\mu(0) = 1$ dir.

$$\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0) = \mu(x) + 1 - 1 = \mu(x)$$

ise $\widetilde{\mu} = \mu$ eşitliği elde edilir. □

Teorem 3.12 μ, V nin bir alt uzayı olsun.

$$f : [0, \mu(0)] \longrightarrow [0, 1]$$

şeklinde tanımlı artan bir bağıntı olsun. Bir fuzzy kümesi

$$\mu^f : V \longrightarrow [0,1] \text{ ve } \mu^f(x) = f(\mu(x)), \quad \forall x \in V$$

olarak tanımlansın. Bu durumda μ^f, V nin bir fuzzy alt uzayı olur. Özel olarak

$$f(t) \geq t \quad \forall t \in [0, \mu(0)]$$

ise $\mu \subseteq \mu^f$ dir.

İspat. $x, y \in V$ için

$$\begin{aligned} \mu^f(x-y) &= f(\mu(x-y)) \geq f(\mu(x) \wedge \mu(y)) \\ &= f(\mu(x)) \wedge f(\mu(y)) \\ &= \mu^f(x) \wedge \mu^f(y) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $a \in F$ ve $x \in V$ için

$$\mu^f(a \cdot x) = f(\mu(a \cdot x) \geq f(\mu(x) = \mu^f(x)$$

elde edilir. Böylece μ^f, V nin fuzzy alt uzayı olur. Kabul edilim ki

$$f(t) \geq t \quad \forall t \in [0, \mu(0)]$$

olsun. O zaman

$$\forall x \in V \text{ için } \mu^f(x) = f(\mu(x)) \geq \mu(x)$$

dir. Bu da $\mu \subseteq \mu^f$ kapsamasının sağlandığı anlamına gelir. □

Teorem 3.13 Fuzzy kümeler kapsama bağıntısı altında; sabit olmayan bir normal fuzzy alt uzayı μ, V vektör uzayının normal fuzzy alt uzayının parçalı sıralı kümesinde maksimal ise μ $2-$değerli bir fuzzy alt uzayıdır ve $0, 1$ değerlerini alır.

İspat. $\mu(0) = 1$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $x \in V$ öyle ki $\mu(x) \neq 1$ olsun. Bu $\mu(x) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x' \in V$ olsun öyle ki $0 < \mu(x') < 1$ var olsun. $x, y \in V$ ise,

$$\nu : V \longrightarrow [0,1]; \text{ ve } \nu(x) = \frac{1}{2} \cdot (\mu(x) + \mu(x')) \ \forall x \in V$$

olacak şekilde bir fuzzy kümesi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\nu(x-y) &= \tfrac{1}{2} \cdot (\mu(x-y) + \mu(x')) \geq \tfrac{1}{2} \cdot ((\mu(x) \wedge \mu(y)) + \mu(x')) \\
&= (\tfrac{1}{2} \cdot (\mu(x) + \mu(x')) \wedge \tfrac{1}{2} \cdot (\mu(y) + \mu(x'))) \\
&= \nu(x) \wedge \nu(y)
\end{aligned}$$

Ayrıca, $a \in F$ ve $x \in V$ ise

$$\nu(a \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot (\mu(a \cdot x) + \mu(x')) \geq \frac{1}{2} \cdot (\mu(x) + \mu(x')) = \nu(x)$$

dir. Böylece ν, V nin bir fuzzy alt uzayıdır.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}(x) &= \nu(x) + 1 - \nu(0) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot (\mu(x) + \mu(x')) + 1 - \tfrac{1}{2} \cdot (\mu(0) + \mu(x')) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \mu(x) + \tfrac{1}{2} \cdot \mu(x') + 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \mu(x') \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot (\mu(x) + 1)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\widetilde{\nu}(0) = \frac{1}{2} \cdot (\mu(0) + 1) = 1$$

olur. Bundan dolayı $\widetilde{\nu}$, V nin bir normal fuzzy alt uzayıdır. Ayrıca

$$\widetilde{\nu}(0) = 1 > \widetilde{\nu}(x^{'}) = \frac{1}{2} \cdot (\mu(x^{'}) + 1) > \mu(x^{'})$$

eşitliği de sağlanır.

ν nün sabit olmadığı biliniyor. Bu yüzden $\widetilde{\nu}(x^{'}) > \mu(x^{'})$ eşitsizliğinden, μ nün maximal olmadığı anlaşılır. Bu da çelişki verir. Böylelikle μ sadece 0 ve 1 değerlerini alır. □

Teorem 3.14 μ, V nin bir alt uzayı olsun ve $\overline{\mu}$;

$$\overline{\mu}(x) = \mu(x)/\mu(0)$$

olarak tanımlanan V nin içinde bir fuzzy kümesi olsun. O zaman $\overline{\mu}, \mu$ yü içeren V nin bir normal fuzzy alt uzayı olur.

İspat. Herhangi $x, y \in V$ için;

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(x-y) &= \mu(x-y)/\mu(0) \geq (1/\mu(0))(\mu(x) \wedge \mu(y)) \\ &= (\mu(x)/\mu(0)) \wedge (\mu(y)/\mu(0)) \\ &= \overline{\mu}(x) \wedge \overline{\mu}(y)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $a \in F$ ve $x \in V$ ise

$$\overline{\mu}(a \cdot x) = (\mu(a \cdot x)/\mu(0)) \geq \mu(x)/\mu(0) = \overline{\mu}(x)$$

elde edilir. Böylece $\overline{\mu}, V$ nin bir fuzzy alt uzayıdır. Açıkça $\overline{\mu}(0) = 1$ ve $\mu \subseteq \overline{\mu}$ kapsaması elde edilir. □

Sonuç 3.15 μ, $\overline{\mu}(x) = 0$, en az bir $x \in V$ yi sağlayan V nin bir fuzzy alt uzayı ise $\mu(x) = 0$ dır.

İspat. $\overline{\mu}(x) = \mu(x)/\mu(0), \forall x \in V$ tanımından ve teorem 3.8 den $\overline{\mu}$ nün V nin normal fuzzy alt uzayıdır. Buradan

$$\overline{\mu}(0) = \mu(0)/\mu(0) = 1$$

dir. En az bir $x \in V$ için $\overline{\mu}(x) = 0$ olduğunda

$$\overline{\mu}(x) = \mu(x)/\mu(0) = 0 \text{ ise } \mu(0) \neq 0$$

eşitliğinden $\mu(x) = 0$ dır. Açıkça $\overline{\mu}(0) = 1$ ve $\mu \subseteq \overline{\mu}$ kapsaması elde edilir. □

Teorem 3.16 μ, V nin sabit olmayan bir fuzzy alt uzayı olsun öyle ki $\widetilde{\mu}$ fuzzy kümeler kapsama bağıntısı altında V nin normal fuzzy alt uzaylarının kısmi sıralı kümesinde maximaldir. O zaman;

(1) μ normaldir.

(2) μ sadece 0 ve 1 değerlerini alır.

(3) $\chi_{V_\mu} = \mu$ dür.

(4) V_μ, V nin maximal alt uzayıdır.

İspat. μ sabit olmadığından, $\widetilde{\mu}$ de sabit olmayan bir maximaldir. Ayrıca $\widetilde{\mu}$ normaldir, öyle ki, Teorem 3.13 den sadece 0 ve 1 değerini alır. $\widetilde{\mu}(x) = 1$ ise; $\mu(x) = \mu(0)$ ve eğer $\widetilde{\mu}(x) = 0$ ise; $\mu(x) = \mu(0) - 1$. Sonuç 3.5 den $\mu(x) = 0$ elde edilir.

Bu da $\mu(0) = 1$ olduğunu gösterir. Böylelikle μ normaldir ve ayrıca Teorem 3.8 ten $\widetilde{\mu} = \mu$ olur. Buradan (1) ve (2) koşullarının ispatı verilmiş olur.

(3) koşulu için; $\chi_{V_\mu} \subseteq \mu$ ve χ_{V_μ} sadece 0 ve 1 değerlerini aldığı açıktır. $x \in V$ olsun ve $\mu(x) = 0$ için, $\mu \subseteq \chi_{V_\mu}$ olur. $\mu(x) = 1$ ise, o zaman $x \in V_\mu$ ve böylece $\chi_{V_\mu}(x) = 1$ olur. Her durumda $\mu \subseteq \chi_{V_\mu}$ kapsaması sağlanır.

(4) koşulu için; μ sabit olmadığından, V_μ, V nin uygun bir alt uzayıdır. W, $V_\mu \subseteq W$ olacak şekilde V nin bir alt uzayı olsun, o zaman $\mu = \chi_{V_\mu} \subseteq \chi_W$ elde edilir. μ ve χ_W normal olduğundan ve $\widetilde{\mu} = \mu$ fuzzy kümeler kapsama bağıntısı altında V nin normal fuzzy alt uzaylarının kısmi sıralı kümesinde maximaldir.

$$\mu = \chi_W \text{ veya } \chi_W(x) = 1 \ \ \forall x \in V$$

elde edilir. Böylece $W = V$ olur. $\mu = \chi_W$ ise teorem 3.7 den

$$V_\mu = V_{\chi_W} = W$$

eşitliğine ulaşılır. Böylelikle V_μ, V nin bir maximal alt uzayıdır. □

BÖLÜM 4

Sonuç ve Öneriler

P. Lubczonok fuzyy vektör uzaylar kavramını tanımlamış ve pek çok bilim adamı bu alanda çalışmış ve katkı sağlamışlardır.

H. Hedayati, vektör uzaylarının fuzzy alt uzaylarının bazı özellikleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Bu tezde yukarıda sözü edilen çalışmalar esas alınmıştır.

Birinci bölümde gerekli cebirsel kavramlar ve vektör uzayları için temel tanım, teorem, ve örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde fuzzy küme teori ve fuzzy vektör uzayları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, vektör uzaylarının bazı alt uzaylarının özellikleri ve fuzzy normal alt uzayları incelenmiştir. Ayrıca uygulama olarak bulaşıcı değerler kavramlarına değinilip özellikleri verilmiştir.

Vektör uzaylarının fuzzy alt uzayları daha ayrıntılı olarak incelenerek fuzzy alt uzayların bir sınıflaması yapılabilir. Bu fuzzy geometriye çeşitlilik katıp, katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1]

L. A. Zadeh, "*Fuzzy Sets*" Inform. Control, 8 (1965), 338-353.

A. K. Katsaras, D. B. Liu, "*Fuzzy vector spaces and fuzzy topological spaces*" , J. Math. Anal. Appl. 58 (1977), 135-146.

A. K. Katsaras, "*Linear fuzzy neighborhood spaces*" , Fuzzy Sets Syst 16 (1985), 25-40.

R. Kumar, "*Fuzzy vector spaces and fuzzy cosets*" , Fuzzy Sets Syst 45 (1992), 109-116.

R. Kumar, "*On the dimension of a fuzzy subspace*" , Fuzzy Sets Syst 54 (1993), 229-234.

M. T. Abu Osman, "*On t-fuzzy subfield and t-fuzzy vector subspace*" , Fuzzy Sets Syst 33 (1989), 111-117.

R. Biswas "*Fuzzy fields and fuzzy linear spaces redefiened*" , Fuzzy Sets Syst 33 (1989), 257-259.

F. Çallıalp, "*Örneklerle soyut cebir*" , (2011).

H. İ. Karakaş, "*Soyut cebire giriş*" , 6 (1998), 140-143.

P. Lubczonok, "*Fuzzy vector spaces*" , Fuzzy Sets Syst 38 (1990), 329-343.

L. Kuijken, H. Van Maldeghem and E. E. Kerre, "*Fuzzy Projective geometries from fuzzy vector spaces*" , Proceeding of the [PMI] (1998), 1331-1338

H. Hedayati, "*On Properties Of Fuzzy Spaces Of Vectorspaces*" , Ratio Mathematica, 19 (2009), 1-10.