(2,0,{0,1})-Düzlemsel Uzayların Karakterizasyonu

Sema Saygın

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ekim 2014

A Characterization of (2,0,{0,1})-Planer Spaces

Sema Saygın

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

October 2014

(2,0,{0,1})-Düzlemsel Uzayların Karakterizasyonu

Sema Saygın

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Pınar Anapa Saban

Ekim 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Sema Saygın'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "(2,0,{0,1})-Düzlemsel Uzayların Karakterizasyonu" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Pınar ANAPA SABAN

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye: Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Üye: Doç. Dr. Pınar ANAPA SABAN

Üye: Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Üye: Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmuştur. İlk bölümde Batten.L.M. & Beutelspacher A. ve R. Kaya' dan alınan temel kavram, tanım ve yardımcı teoremlerden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, S bir düzlemsel uzay olmak üzere, S nin ikişerli arakesitleri bir doğru olan düzlemlerinin her bir C kümesi ve C ye ait olmayan her p noktası için, p den geçen C nin hiçbir düzlemini kesmeyen en çok bir doğru mevcutsa S (2,0,{0,1})-düzlemsel uzay olarak tanımlanmıştır. Daha sonra, (2,0,{0,1})-düzlemsel uzayın her bir düzleminin bir {0,1}-semiafin düzlem olduğu gösterilmiştir. Ve bu bölümde (2,0,{0,1})-düzlemsel uzayların tüm düzlemleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde tüm (2,0,{0,1})-düzlemsel uzaylar dikkate alınarak aşağıdaki teorem ile karakterize edilmiştir.

Teorem: (2,0,{0,1})-düzlem uzayı aşağıdakilerden biridir:

i. Projektif uzay
ii. Bir noktası eksik projektif uzay
iii. Bir doğrusu eksik projektif uzay
iv. Bir afin doğrusu eksik projektif uzay
v. Afin uzay
vi. Sonsuzda bir nokta ilave edilmiş afin uzay
vii. Sonsuzda bir doğru ilave edilmiş afin uzay
viii. Sonsuzda bir afin doğru ilave edilmiş afin uzay

Anahtar Kelimeler: Lineer uzaylar, Afin 3-uzay, Projektif 3-uzay, Düzlemsel uzaylar, Semi-afin düzlemler.

SUMMARY

This thesis consists of three chapters. The first chapter includes the basic concept, definitions and theorems taken from Batten.L.M &Beutelspacher A and R. Kaya.

In the second chapter, a (2,0,{0,1})-planar space S is defined as a planar space satisfied the following condition: For any collection C of planes pairwise intersecting in a line and for any point p outside each of the planes of C, there is at most one line on p that does not meet any plane in C. Then; in this chapter each plane of (2,0,{0,1})-planar spaces is shown to be a {0,1}-semiafin plane and all planes of a (2,0,{0,1})-planar space are examined.

In the third chapter; considering all (2,0,{0,1})-planar spaces are characterized by the following theorem:

Theorem: A (2,0,{0,1})- planar space is one of the following:

i. Projective space
ii. Projective space minus one point
iii. Projective space minus one line
iv. Projective space minus one affine line
v. Affine space
vi. Affine space plus one point at infinity
vii. Affine space plus one line at infinity
viii. Affine space plus one affine line at infinity

Keywords: Lineer spaces, Afin 3-spaces, Projective 3-spaces, Planar spaces, Semi-afin planes.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca, derslerimde ve tez çalışmalarımda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan çok değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Pınar Anapa Saban'a ve hocalarıma çok teşekkür ederim.

Hayatım boyunca yanımda olan desteklerini esirgemeyen aileme ve bu süreç boyunca bana yardımcı olan arkadaşlarıma da gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR vii

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ x

1. TEMEL KAVRAMLAR 1

    1.1 Lineer Uzaylar 1

    1.2 Sonlu Lineer Uzayın Temel Özellikleri 7

    1.3 Yarıafin Lineer Uzaylar 11

    1.4 Afin ve Projektif Uzaylar 11

    1.5 Düzlemsel Uzaylar 22

2. (2,0,{0,1})-DÜZLEMSEL UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ 25

3. (2,0,{0,1})-DÜZLEMSEL UZAYLARIN KARAKTERİZASYONU 35

4. SONUÇ ve ÖNERİLER 43

KAYNAKLAR DİZİNİ 44

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

1.1 Yaklaşık lineer uzay örneği 2

1.2 Fano Düzlemi 3

1.3 Yaklaşık lineer uzay örneği 5

1.4 n. mertebeden düzlem 20

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>**Kısaltmalar**</u>	<u>**Açıklama**</u>
b	Toplam doğru sayısı
b(p)	Bir p noktasından geçen doğru sayısı
b_i	p_i noktasından geçen toplam doğru sayısı
$b_\alpha(p)$	α düzlemine ait bir p noktasından geçen doğru sayısı
d	Toplam düzlem sayısı
d(p)	Bir p noktasından geçen toplam düzlem sayısı
d(L)	Bir L doğrusundan geçen toplam düzlem sayısı
v	Toplam nokta sayısı
v(L)	L doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı
v_i	L_i doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı
v_α (L)	α düzlemine ait bir L doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı
$\langle X \rangle$	X in örtüsü
Ω	Has altuzayların bir ailesi
P_α	α düzlemine ait noktaların kümesi
S (P,L,I)	Uzay
S (P,L,I, Ω)	Ω ailesinin katılması ile elde edilen uzay

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde L. M. Batten (1986) ve R. Kaya (1992) dan alınan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

1.1 Lineer Uzaylar

Tanım 1.1.1: $\mathcal{P}$ noktalar kümesi, $\mathcal{L}$ elemanları doğrular olan $\mathcal{P}$ nin alt kümelerinin ailesi ve $\mathcal{I}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$ üzerinde "$(p, L) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow p \in L$" şeklinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere $S = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ geometrik yapısına üzerinde bulunma yapısı(incidence structure) denir. Eğer S aşağıdaki aksiyomları sağlarsa S ye **yaklaşık lineer uzay** denir.

$(YL1)$ Her doğru en az iki nokta kapsar.

$(YL2)$ Farklı iki noktadan en çok bir doğru geçer.

Tanım 1.1.2: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ yapısı üzerinde bulunma yapısı olsun. Eğer S aşağıdaki aksiyomları sağlarsa S ye **lineer uzay** denir.

(L_1) Farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

(L_2) Her doğru en az iki nokta kapsar.

Tanım 1.1.1 ve Tanım 1.1.2 den her lineer uzayın bir yaklaşık lineer uzay fakat her yaklaşık lineer uzayın bir lineer uzay olmadığı açıktır.

Bu bölüm boyunca $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ üzerinde bulunma yapısı kısaca $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ notasyonu ile gösterilecektir. Genel olarak noktalar $p, q, s, ...x, y, z$ küçük harflerle, doğrular ise $L, M, N, ..., X, Y, Z$ gibi büyük harflerle gösterilecektir. Farklı p ve q noktalarından geçen doğru pq ile gösterilecektir. Eğer farklı L ve M gibi doğrular bir noktada kesişiyorsa, bu nokta $L \cap M$ ile gösterilecektir.

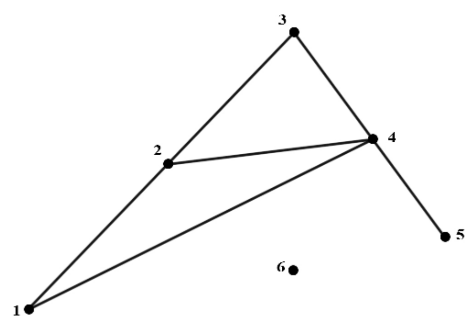
Bir $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzayının toplam nokta sayısı v, toplam doğru sayısı b, bir $p \in \mathcal{P}$ noktasından geçen doğru sayısı $b(p)$ ve bir $L \in \mathcal{L}$ doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı $v(L)$ ile gösterilir. $v, b, b(p), v(L)$ tamsayı değerlerine $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ **yaklaşık lineer uzayının parametreleri** denir. Eğer v ve b değerleri sonlu ise S ye **sonlu lineer uzay** denir. Ek olarak; $b(p) \in \mathbb{Z}$ değeri p noktasının derecesi olarak adlandırılırken $v(L) \in \mathbb{Z}$ değeri L doğrusunun derecesi olarak adlandırılır. Derecesi i olan bir nokta $i-$nokta ve derecesi i olan bir doğru $i-$doğru olarak adlandırılır.

$S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ sonlu bir yaklaşık lineer uzay, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_v\}$ ve $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_b\}$ olmak üzere

$$b(p_i) = b_i, \quad v(L_j) = v_j$$

ile gösterilecektir.

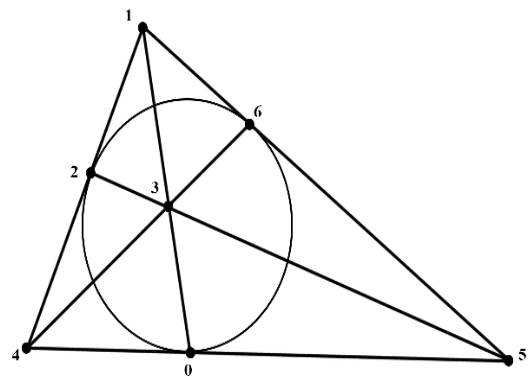
Örnek 1.1.1: $\mathcal{P} = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $\mathcal{L} = \{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$ olan yaklaşık lineer uzay Şekil 1.1 de gösterilmiştir.



Şekil 1.1: Yaklaşık lineer uzayı örneği

$\mathcal{P} = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $\mathcal{L} = \{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$ olmak üzere Şekil 1.1 incelendiğinde $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ de farklı iki noktanın en çok bir doğru üzerinde ve bir doğru üzerinde en az iki nokta olduğu açıkça görülmektedir. O halde; $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ üzerinde bulunma yapısında YL1 ve YL2 aksiyomları sağlanmaktadır. Dolayısıyla; $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir yaklaşık-lineer uzaydır.

Örnek 1.1.2: Toplam nokta sayısı ve toplam doğru sayısı $v = b = 7$ olan, her noktasının ve her doğrusunun derecesi $b_i = v_j = 3$ olan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayı Fano düzlemi olarak adlandırılmaktadır. Bu düzlem Şekil 1.2 de gösterilmiştir.



Şekil 1.2: Fano düzlemi

Şekil 1.2 incelendiğinde $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ nin farklı iki noktasının tam olarak bir doğru üzerinde ve her doğrusunun üzerinde en az iki nokta olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 1.1.3: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. $\forall\, p, q \in X$ ve $p \neq q$ olmak üzere p ve q noktalarına karşılık gelen pq doğrusu X tarafından kapsanıyor ise X e S nin bir **alt uzayı** denir. $\varnothing$ ve S ye S nin **has (öz) alt uzayları** denir. S nin diğer alt uzaylarına da **has olmayan alt uzaylar** denir.

Tanım 1.1.4: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzay ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. X i içeren en küçük alt uzaya X in **örtüsü** denir ve $< X >$ ile gösterilir.

Bir $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzayında $< S >= S$ ve $X = \varnothing$ ise $< \varnothing >= \varnothing$ dir. Üstelik $\forall\, p \in \mathcal{P}$ için $X = \{p\}$ ise $< p >= p$ dir.

Örnek 1.1.3: S lineer uzayı Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 de temsil edilen lineer uzaylar olsun. Şekil 1.2'i gözönüne alırsak $X = \{5, 6\}$ ise $< \{5, 6\} >= \{1, 5, 6\}$, $X = \{0, 3, 4\}$ ise $< \{0, 3, 4\} >= \{0, 3, 1, 4, 2, 5, 6\} = S$ dir. Şekil 1.1.deki uzaya bakarsak $X = \{1, 2, 5\}$ ise $< \{1, 2, 5\} >= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dir.

Örnek 1.1.3 dikkate alınarak, $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzayının örtüsü Tanım 1.1.4 ile karakterize edilmiştir.

Yardımcı Teorem 1.1.1: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzay ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. X in örtüsü X i içeren bütün alt uzayların arakesitidir. (Batten, 1986)

Tanım 1.1.5: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzay ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. $\forall x \in X$ için $x \notin < X \setminus \{x\} >$ ise X kümesine **bağımsız küme** denir.

Örnek1.1.4: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Şekil1.2 ile temsil edilen Fano düzlemi olsun. $X = \{1, 5, 6\} \subseteq \mathcal{P}$ gözönüne alalım. $\forall\ x \in X$ için $x \in < X \setminus \{x\} >$ olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde Tanım 1.1.5 gereğince X kümesi S de bağımsız küme değildir.

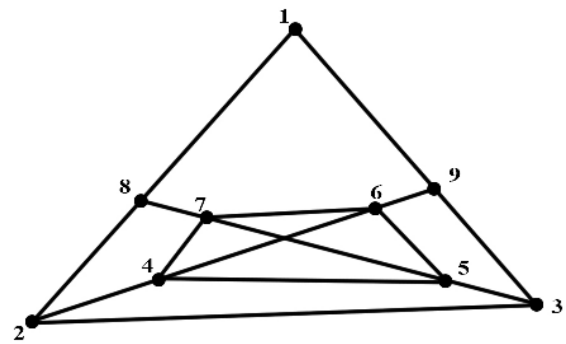
Örnek 1.1.4 dikkate alınarak, bir $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzayında bağımsız küme, örtüsünü oluşturacak yeterli noktaya sahip olan bir küme olarak da tanımlanır. Örnek 1.1.4 de $X = \{1, 5, 6\}$ kümesi, kendi örtüsünü üretmek için gerekli olan sayıdan fazla sayıda nokta kapsamaktadır. X in kendi örtüsünü üretebilmesi için 1 ve 5 noktaları yeterlidir. Bu nedenle; X bağımsız küme değildir.

Tanım 1.1.6: Bir S yaklaşık lineer uzayının noktalarının S yi üreten bir bağımsız alt kümesine S nin bir **bazı** denir.

Örnek 1.1.5: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzayı, şekil 1.2 de temsil edilen Fano düzlemi olsun. S nin $\{1, 2, 0\}$ ve $\{3, 5, 6\}$ nokta alt kümelerini gözönüne alalım. Tanım 1.1.5 ve Tanım 1.1.6 dikkate alınarak; $\{1, 2, 0\}$ ve $\{3, 5, 6\}$ nokta kümelerinin S nin iki bazı olduğu kolaylıkla gösterilir.

Bir uzayı üreten bir çok baz bulunabilir. Verilen bir uzayın bütün bazlarının eleman sayılarının aynı olması gerekmez.

Örnek 1.1.6: Aşağıda Şekil 1.3 de verilen yaklaşık lineer uzay için $\{4, 5, 6, 7\}$, $\{1, 8, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ nokta alt kümeleri S nin birer bazıdır ve bunların eleman sayıları farklıdır.



Şekil 1.3: Yaklaşık lineer uzay örneği

Tanım 1.1.7: S bir yaklaşık lineer uzay olsun. $min\{|B| : B, S \text{ nin bir bazı}\} - 1$ sayısına S **yaklaşık lineer uzayının boyutu** denir. Başka bir ifade ile;

$$boyS{=}min\{|B| : B, S \text{ nin bir bazı}\} - 1$$

dır.

Tanım 1.1.7 gereğince; bir doğru, bir nokta, $\varnothing$ den ibaret olan yaklaşık lineer uzayların boyutları sırasıyla $1, 0, -1$ dir.

Tanım 1.1.8: S sonlu lineer uzayında her noktadan tam olarak k tane doğru geçiyorsa S nin **noktasal regüleritesi** k; benzer şekilde her doğru üzerinde de tam olarak r tane nokta varsa **doğrusal regüleritesi** r dir denir. Doğrusal regüleritesi r, noktasal regüleritesi k olan lineer uzaya (k, r) −**regüler** denir.

Teorem 1.1.2: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı sonlu bir lineer uzay olsun. S doğrusal regüler ise noktasal regülerdir. (Batten, 1986)

İspat: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ doğrusal regüleritesi k olan v noktalı sonlu lineer uzay olsun. $p \in \mathcal{P}$ sabit bir nokta olmak üzere, p noktasından geçen doğrular üzerindeki noktalar uzayın tüm noktalarını verdiğinden,

$$v - 1 = b(p)(k - 1)$$

dir. Buradan,

$$b(p) = \frac{v-1}{k-1}$$

elde edilir. v ve k sabit değerler olduğundan $b(p)$ sabittir. Böylece S noktasal regülerdir. □

Tanım 1.1.9: Bir S lineer uzayının sabit bir noktasından geçen d adet doğru kümesine **d-demet;** S, v noktalı ve 1 adet $(v-1)-$doğru ve $v-1$ adet $2-$doğru kapsayan bir lineer uzay ise S ye **yaklaşık demet** denir.

Tanım 1.1.10: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ bir lineer uzay ve $\forall X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. Eğer $\forall\ x, y \in \mathcal{P}$ için $x \notin < X >$ ve $x \in < X \cup \{y\} >$iken $y \in < X \cup \{x\} >$ ise S lineer uzayı **değiştirme özelliğine sahiptir** denir.

Yardımcı Teorem 1.1.3: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ değiştirme özelliğine sahip bir lineer uzay olsun. Eğer $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bağımsız bir küme ve $x_{n+1} \notin \langle X \rangle$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ bağımsız bir kümedir. (Batten, 1986)

Yardımcı Teorem 1.1.4: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ değiştirme özelliğine sahip sonlu bir lineer uzay ise bu uzayın herhangi iki bazı aynı sayıda elemana sahiptir. (Batten, 1986)

Tanım 1.1.11: Bir S sonlu lineer uzayında iki doğru çakışık ya da hiç ortak noktaya sahip değilse bu iki doğruya **paralel doğrular** denir. Eğer L_1 ve L_2 paralel doğrular ise bu doğruların paralelliği $L_1 \parallel L_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.12: Bir S lineer uzayının aşikar olmayan maksimal alt uzayına S nin bir **hiperdüzlemi** denir.

Reel $5-$uzayın hiperdüzlemleri reel $4-$uzaylarıdır. Reel $2-$uzayın hiperdüzlemleri reel $1-$ uzaylardır. Reel $1-$ uzayın hiperdüzlemlerinin herbiri bir noktadır. Diğer bir ifadeyle bir doğrunun hiperdüzlemleri noktalar, bir noktanın hiperdüzlemleri boş kümedir. Boş kümenin hiperdüzlemi yoktur.

Fano düzleminin her bir doğrusu hiperdüzlemdir. Mertebesi 3 olan afin düzlemlerde de her bir doğru bir hiperdüzlem olarak ifade edilir.

Tanım 1.1.13: Her bir hiperdüzlemi 2 boyutlu olan bir lineer uzaya 3 **boyutlu lineer uzay** denir.

Bu tezde, 3−boyutlu bir lineer uzay için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

Bir 3−boyutlu lineer uzayda toplam düzlem sayısı d, bir p noktasından geçen toplam düzlem sayısı $d(p)$ ve bir L doğrusundan geçen toplam düzlem sayısı $d(L)$ ile gösterilecektir. Ayrıca 3−boyutlu lineer uzayda bir α düzlemine ait bir p noktasından geçen ve bu düzleme ait olan toplam doğru sayısı $b_\alpha(p)$, α düzlemine ait bir L doğrusu üzerindeki α ya ait toplam nokta sayısı $v_\alpha(L)$ ile gösterilecektir.

1.2 Sonlu Lineer Uzayın Temel Özellikleri

Tanım 1.2.1: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ bir lineer uzay, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_v\}$, $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_b\}$ ve

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 \ ; \ p_i \notin L_j \\ 1 \ ; \ p_i \in L_j \end{cases}$$

olsun. Buradaki r_{ij} değerlerine p_i noktasının L_j doğrusu üzerinde bulunma değeri denir ve $\mathcal{A} = [r_{ij}]_{vxb}$ matrisine de **üzerinde bulunma matrisi** denir.

Her lineer uzayı temsil eden bir üzerinde bulunma matrisi vardır. Bir $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ lineer uzayı temsil eden $\mathcal{A} = [r_{ij}]_{vxb}$ matrisi uzay hakkında bir takım bilgiler verir. Örneğin herhangi bir satırdaki birlerin sayısı bu satıra eşlenen noktadan geçen doğru sayısıdır. Ek olarak; herhangi bir sütundaki birlerin sayısı bu sütuna eşlenen doğru üzerindeki nokta sayısıdır.

Yardımcı Teorem 1.2.1: Bir $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzayın doğrusal regüleritesi s ve noktasal regüleritesi t ise $vt = bs$ dir. (Batten, 1986)

İspat: Üzerinde bulunma matrisi ile ispat kolayca yapılmaktadır.

Teorem 1.2.2: Eğer $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzay ise

$$\sum_{i=1}^{v} b(p_i) = \sum_{j=1}^{b} v(L_j)$$

dır. (Batten, 1986)

İspat: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzayını temsil eden bir üzerinde bulunma matrisi vardır. Bu matrisin satırlarındaki birlerin satır-satır toplanması, sütunlarındaki birlerin sütun-sütun toplanması ile istenilen eşitlik elde edilir.□

Teorem 1.2.3: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzay olsun. $\forall\ p_i \in \mathcal{P}$ için

$$v - 1 = \sum_{j=1}^{b} (v_j - 1).r_{ij}$$

dır. Üstelik;

$$v.(v-1) = \sum_{j=1}^{b} v_j.(v_j - 1)$$

dir. (Batten, 1986)

İspat: S sonlu lineer uzayın tüm noktaları bir p_i noktasından geçen doğru demeti üzerindedir. Bu demetteki herhangi bir L_j doğrusu üzerindeki p_i noktası hariç $v_j - 1$ adet nokta vardır. Böylece S nin toplam nokta sayısı

$$v - 1 = \sum_{j=1}^{b} (v_j - 1).r_{ij}$$

dır. Aynı zamanda S nin tüm noktalarını sayarken; S nin her doğrusu üzerindeki nokta ikililerini saymak, S nin tüm nokta ikililerini saymak ile eşit olduğundan

$$\binom{v}{2} = \sum_{j=1}^{b} \binom{v_j}{2}$$

dir. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$v.(v-1) = \sum_{j=1}^{b} v_j.(v_j - 1)$$

elde edilir.□

Teorem 1.2.4: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzay olsun. Bu durumda $p_i \notin L_j$ ise $b(p_i) \geq v_j$ dir. Eğer p_i noktasından geçen tüm doğrular L_j doğrusunu kesiyorsa $b(p_i) = v_j$ dir. (Batten, 1986)

İspat: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzay olsun. $p_i \notin L_j$ olduğundan, p_i noktaları ile L_j üzerindeki tüm noktaların birleşmesiyle v_j adet doğru meydana gelir. Bu taktirde $b(p_i) \geq v_j$ dir. □

Teorem 1.2.5: S sonlu lineer uzayının maksimum dereceli paralel iki doğrusu L_1 ve L_2 ise

$$b \geq v(L_1).v(L_2) + 2$$

dir. (Batten, 1986)

İspat: S sonlu lineer uzayının maksimum dereceli paralel iki doğrusu L_1 ve L_2 olduğundan L_1 ve L_2 doğrularının her ikisinide kesen doğru sayısı $v(L_1).v(L_2)$ dir. O halde S nin toplam doğru sayısı $b \geq v(L_1).v(L_2) + 2$ dır. □

Teorem 1.2.6: S sonlu lineer uzayının maksimum dereceli herhangi iki doğrusu L_1 ve L_2 olsun. Eğer $L_1 \cap L_2 = w$ olacak şekilde bir w noktası mevcut ise

$$b \geq (v(L_1) - 1).(v(L_2) - 1) + b(w)$$

dır. (Batten, 1986)

İspat: S nin maksimum dereceli iki doğrusu L_1, L_2 ve $w = L_1 \cap L_2$ olsun. L_1 ve L_2 doğrularının her ikisini kesen doğru sayısı

$$(v(L_1) - 1).(v(L_2) - 1) + b(w)$$

olarak bulunur. O halde S nin toplam doğru sayısı b ise

$$b \geq (v(L_1) - 1).(v(L_2) - 1) + b(w)$$

dir.□

Aşağıda sonlu lineer uzayların temel teoriminin ispatı verilecektir. Literatürde birçok ispatı vardır. İlk yapılan ispat Bruijin ve Erdös'ün 1948 deki ispatıdır. Fakat kıyaslama açısından daha kısa olan Fowler'in 1984 deki ispatı verilecektir.

Teorem 1.2.7: *S=(*$\mathcal{P}$*,*$\mathcal{L}$*),* b doğrulu ve v noktalı aşikar olmayan sonlu bir lineer uzay olsun. Bu taktirde $b \geq v$ dir. Eğer $b = v$ ise S ya bir yaklaşık demet ya da bir projektif düzlemdir. (Batten and Beutelspacher, 1993)

İspat: *S=($\mathcal{P}$,$\mathcal{L}$),* b doğrulu ve v noktalı aşikar olmayan sonlu bir lineer uzay olsun. S deki tüm p noktaları ve L doğruları için $b - b(p) > 0$ ve $v - v(L) > 0$ dır. $b \leq v$ olsun. Herhangi bir L doğrusu için $(v - v(L))/(b - v(L)) \geq v/b$ dir.

Herhangi bir p noktası ve L doğrusu için

$$\delta(p, L) = \begin{cases} 0, & p \notin L \\ 1, & p \in L \end{cases}$$

olsun.

Bir L doğrusu için

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \delta(p, L) = v(L)$$

ve bir p noktası için

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} \delta(p, L) = b(p)$$

dir. Böylece

$$v = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{b - b(p)}{b - b(p)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \delta(p, L)}{b - b(p)} \right)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $p \in L$ ise

$$\frac{1 - \delta(p, L)}{b - b(p)} \geq \frac{1 - \delta(p, L)}{b - v(L)} \tag{1.1.1}$$

dir. $p \notin L$ ise Teorem 1.2.4 gereğince $b(p) \geq v(L)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} v &\geq \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \delta(p, L)}{b - v(L)} \right) = \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 - \delta(p, L)}{b - v(L)} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{v - v(L)}{b - v(L)} \geq \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{v}{b} = v \end{aligned}$$

dir. Böylece yukarıdaki her yerde eşitlik vardır; $(v - v(L))/(b - v(L)) = v/b$ ve dolayısıyla $v = b$ olur. Ek olarak $p \notin L$ için (1.1.1) denklemindeki eşitsizlik $b(p) = v(L)$ olmasını gerektirir; böylece herhangi iki doğru kesişir. Buradan hareketle S bir projektif düzlem veya yaklaşık demettir. $\square$

1.3 Yarıafin Lineer Uzaylar

$p \notin L$ özelliğindeki bir (p, L) nokta-doğru çifti için p noktasından geçip L doğrusunu kesmeyen doğruların sayısı $\pi(p, L)$ ile gösterilir. En az bir dörtgen kapsayan bir lineer uzayın bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart $p \notin L$ özelliğindeki her (p, L) nokta-doğru çifti için $\pi(p, L) = 0$ olmasıdır. Benzer şekilde en az bir üçgen kapsayan bir lineer uzayın bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart $p \notin L$ özelliğindeki her (p, L) nokta-doğru çifti için $\pi(p, L) = 1$ olmasıdır.

I negatif olmayan tamsayıların kümesi olmak üzere S lineer uzayının $p \notin L$ özeliğindeki her (p, L) nokta-doğru çifti için $\pi(p, L) \in I$ ise S ye I-**yarıafin** denir. Herhangi bir sonlu lineer uzay uygun bir I kümesi için I-afindir. Yarıafin düzlemler $\{0, 1\}-$yarıafin lineer uzaylardır. $\{0, 1\}-$yarıafin düzlemlere, $\{0, 1\}-$**semiafin düzlem** de denir. $\{0, 1\}-$yarıafin lineer uzaylar için Kuiper-Dembowski Teoremi gözönüne alınmaktadır.

Kuiper-Dembowski Teoremi: Eğer S sonlu $\{0, 1\}-$yarıafin lineer uzaysa o zaman S aşağıdakilerden biridir:

a) Bir yaklaşık demet,

b) Bir projektif ya da afin düzlem,

c) Bir delinmiş projektif düzlem,

d) Sonsuzda bir nokta ilaveli bir afin düzlem

1.4 Afin ve Projektif Uzaylar

Tanım 1.4.1: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay olmak üzere aşağıdaki A_1, A_2 aksiyomları sağlanıyor ise S ye **afin düzlem** denir.

$A_1 : p \notin L_1$ olmak üzere $\forall\ p \in \mathcal{P}$ ve $\forall\ L_1 \in \mathcal{L}$ için $p \in L_2$ ve $L_1 \parallel L_2$ olacak şekilde bir tek $L_2 \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

A_2 : Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

A_1 aksiyomu paralellik aksiyomu olarak bilinir.

En az iki doğrulu ve paralellik aksiyomunu sağlayan lineer uzaylar doğrudaş olmayan üç nokta kapsayacağından bir afin uzaydır.

Yardımcı Teorem 1.4.1: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay ise, S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart, her $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $b(p) = n+1$, $v(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tam sayısının var olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir afin düzlem, $L, H \in \mathcal{L}$ olsun.

$p \notin L \cup H$ ise; $\exists\, p \in \mathcal{P} - (L \cup H)$ vardır.

a) L ve H paralel olsun. Bu durumda (A_1) aksiyomundan p noktasından $v(L) + 1 = v(H) + 1$ tane doğru geçer. Buradan $v(L) = v(H) = n$ ve $b(p) = n + 1$ bulunur. $v(L) \geq 2$ olduğundan $n \geq 2$ dir.

b) L ve H kesişen iki doğru olsun. Bu durumda da (A_1) den p noktasından $v(L) + 1 = v(H) + 1$ tane doğru geçer ve $v(L) = v(H) = n$ ve $b(p) = n + 1$ bulunur

Eğer $p \notin L \cup H$ olacak şekilde bir p noktası yoksa L ve H paralel olmak zorundadır ve S nin tüm doğruları iki noktalıdır. Buradan $v(L) = v(H) = n = 2$ ve $b(p) = n + 1 = 3$ eşitliği sağlanır.

($\Longleftarrow$) Diğer taraftan, S deki tüm p noktaları ve L doğruları için $b(p) = n + 1$ ve $v(L) = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. $p \notin L$ için L ye p noktasından bir tek paralel çizileceğinden (A_1) aksiyomu sağlanır. (A_2) aksiyomunun sağlandığı ise açıktır. Böylelikle S bir afin düzlemdir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.4.2: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay ise, S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart, $v = n^2$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tam sayısının var olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı bir afin düzlem; $L, H \in \mathcal{L}$ ve $p \notin L \cup H$ olsun. (A_1) aksiyomundan p den $v(L) + 1 = v(H) + 1$ tane doğru geçer. Buradan $v(L) = v(H) = n$ dir. Eğer bu şekilde bir p noktası yoksa, bu durumda kolayca görüleceği üzerine L ve H paraleldir ve S nin tüm doğrularının iki noktası vardır.

Herhangi bir p noktası ve Yardımcı Teorem 1.4.1 den dolayı bu noktadan geçen $n + 1$ tane doğru düşünüldüğünde S deki toplam nokta sayısı n^2 bulunur.

($\Longleftarrow$) Diğer taraftan S, v noktalı lineer uzayı için $v = n^2$ ve S nin tüm L doğruları için $v(L) = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S nin herhangi bir p

noktası için $b(p)(n-1) = n^2 - 1$, buradan da $b(p) = n + 1$ bulunur. Böylelikle S bir afin düzlemdir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.4.3: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay ise, S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart, $b = n^2 + n$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tam sayısının var olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir afin düzlem olsun. Yardımcı Teorem 1.4.2 den $v = n^2$ olacak şekilde $n \geq 2$, n tamsayısı vardır. Düzlemin n^2 noktası arasından seçilecek her iki farklı nokta bir doğru belirtir. Seçilecek toplam farklı iki nokta sayısı $\binom{n^2}{2}$ dir. Fakat seçilen farklı nokta çiftleri ortak doğru üzerinde seçilmişse aynı doğru elde edilir. Bir doğru üzerinde seçilecek farklı nokta çifti sayısı ise $\binom{n}{2}$ dir. Dolayısıyla düzlemdeki toplam doğru sayısı,

$$\frac{\binom{n^2}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{n^2(n^2-1)/2}{n(n-1)/2} = n^2 + n$$

dir.

($\Longrightarrow$) Diğer taraftan S, b doğrulu lineer uzay için $b = n^2+n$ ve S deki her L doğrusu için $v(L) = n$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S lineer uzayı doğrusal regüler olduğundan Teorem 1.1.2 den noktasal regülerdir. Herhangi bir L, $n-$doğrusu için $p \in L$ olmak üzere bu doğruyu kesen $(b(p)-1)n$ tane doğru vardır. L ye paralel doğru olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$(b(p)-1)n + 1 = n^2 + n$$

den , $n \mid (n^2 + n - 1)$ çelişkisi elde edilir. L ye paralel doğru olmak zorundadır. Buradan $b(p) \geq n + 1$ dir. Aynı zamanda

$$(b(p)-1)n + 1 < n^2 + n$$

dir. Dolayısıyla $b(p) = n+1$ olmak zorundadır. Yardımcı Teorem 1.4.1 den S bir afin düzlemdir. $\square$

Teorem 1.4.4: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı, b doğrulu bir lineer uzay ise aşağıdakilere denktir.

(i) S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart, her $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $b(p) = n+1$, $v(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tam sayısı vardır.

(ii) S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart, $v = n^2$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tam sayısı vardır.

(iii) S nin bir afin düzlem olması için gerek ve yeter şart, $b = n^2 + n$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tam sayısı vardır.

İspat: Yardımcı Teorem 1.4.1, Yardımcı Teorem 1.4.2 ve Yardımcı Teorem 1.4.3 den açıktır. $\square$

Teorem 1.4.4 den bir sonlu afin düzlem, nokta sayısı $v = n^2$, toplam doğru sayısı $b = n^2 + n$, $\forall L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olan $(n+1)-$ regüler bir lineer uzaydır.

Tanım 1.4.2: L ve L' bir afin düzlemin iki doğrusu olsun. $L = L'$ veya $L \cap L' = \varnothing$ ise L ve L' ye **paralel doğrular** denir ve $L \parallel L'$ ile gösterilir.

Bir afin düzlemin doğrular kümesi üzerinde tanımlı olan paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla; afin düzlemin herhangi bir $L \in \mathcal{L}$ doğrusu için L ye paralel tüm doğruların oluşturduğu küme L doğrusunun temsil ettiği bir denklik sınıfıdır. Bu bağlamda, farklı paralel doğru sınıfları afin düzlemin birer parçalanışını oluşturur. Bu her bir denklik sınıfının afin düzlemin tüm noktalarını kapsamasını gerektirir. Farklı denklik sınıflarına **paralel sınıf** denir.

Tanım 1.4.3: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay olmak üzere aşağıdaki P_1, P_2 aksiyomlarını sağlarsa S ye **projektif düzlem** denir.

P_1 : Herhangi farklı iki doğru ortak bir noktaya sahiptir,

P_2 : Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

En küçük projektif düzlem yedi noktalı olup Fano düzlemi olarak adlandırılır. P_1 aksiyomunu sağlayan fakat P_2 aksiyomunu sağlamayan bir sonlu lineer uzaya bozulmuş **(dejenere) projektif düzlem** denir.

$S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir afin düzlem olsun. $\mathcal{S}$ nin tüm farklı paralel doğru demetlerini göz önüne alalım. S nin her bir demeti için bu demetin tüm doğruları üzerine $\mathcal{P}$ ye ait olmayan ortak bir nokta ilave edildiğinde, afin düzleme her doğrultuda bir yeni (*ideal*) nokta katılmış olur. Böylece afin düzlemin genişletilmiş nokta kümesi $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{ideal\ noktalar\}$ elde edilir. Afin düzleme bu şekilde ideal noktalar katılırken her L doğrusu bir nokta ile genişletilir. L doğrusu ve L ye paralel olan tüm doğrular üzerine koyulan bu ideal nokta p_∞ ile gösterilsin. Tüm ideal noktaların üzerinde bulunduğu ideal doğru ,L_∞ ile gösterilerek, afin düzleme katılır. Böylece $S' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ sistemi elde edilir. Bu sisteme **afin düzlemin tamamlanmışı** denir.

Yardımcı Teorem 1.4.5: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı b doğrulu sonlu bir lineer uzay ise S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart, her $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $b(p) = n + 1$, $v(L) = n + 1$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir n tam sayısının var olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$ $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}), v$ noktalı bir projektif düzlem, $L, L' \in \mathcal{L}$ olsun. (P_2) aksiyomundan, bu iki doğrudan herhangi birisinin üzerinde olmayan bir p noktası vardır. Böyle bir nokta aracılığıyla L ve L' doğrularının üzerindeki noktalar arasında $1 - 1$ eşleme yapılabilir. Böylece $v(L) = n + 1$ sabittir ve (P_2) gereğince $n \geq 2$ dir. Aynı zamanda $b(p) = n + 1$ dir.

$(\Longleftarrow)$ Diğer taraftan S deki tüm p noktaları ve L doğrularına karşılık $b(p) = n + 1$ ve $v(L) = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. Bu durumda S de (P_1) ve (P_2) aksiyomlarının geçerli olduğu görülür. O halde S bir projektif düzlemdir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.4.6: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, v noktalı b doğrulu sonlu bir lineer uzay ise S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart, $v = n^2 + n + 1$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir n tam sayısının var olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$ $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}), v$ noktalı bir projektif düzlem olsun. Yardımcı Teorem 1.4.5 gereği $\forall p \in \mathcal{P}$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ ve $b(p) = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı vardır. S deki nokta sayısı bir noktadan geçen doğruların üzerindeki noktalar yardımıyla hesaplandığında $v = n^2 + n + 1$ bulunur.

$(\Longleftarrow)$ Diğer taraftan S, v noktalı lineer uzayı için $v = n^2 + n + 1$ ve S deki tüm L doğrularına karşılık $v(L) = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S nin bir p noktasından geçen doğrular yardımıyla $b(p)n + 1 = n^2 + n + 1$, $b(p) = n + 1$ bulunur. Buradan da S nin bir projektif düzlem olduğu açıktır. $\square$

Yardımcı Teorem 1.4.7: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı b doğrulu sonlu bir lineer uzay ise S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart, $b = n^2 + n + 1$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir n tam sayısının var olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow) S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı b doğrulu bir projektif düzlem olsun. Bir doğrunun üzerindeki noktalar yardımıyla o doğruyu kesen tüm doğrular bulunarak uzaydaki toplam doğru sayısı hesaplanabilir. Yardımcı Teorem 1.4.5 den S bir projektif düzlem ise $\forall p \in \mathcal{P}$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $b(p) = n + 1$, $v(L) = n + 1$, $n \geq 2$ olacak şekilde bir n tamsayısının var olduğu biliniyor. Buradan,

$$b = (b(p) - 1)(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$$

bulunur.

$(\Longleftarrow)$ Diğer taraftan S, b doğrulu lineer uzayı için $b = n^2 + n + 1$ ve S nin her bir L doğrusu için $v(L) = n + 1$ olacak şekilde bir $n \geq 2$, n tamsayısı var olsun. S doğrusal regüler olduğundan aynı zamanda noktasal regüler bir lineer uzaydır. Herhangi bir L doğrusuna paralel $a \geq 1$, a tane doğru olsun. Bu durumda L nin üzerindeki bir p noktası için,

$$(b(p) - 1)(n + 1) + 1 + a = n^2 + n + 1$$

bulunur. Buradan $b(p) \leq n$ olmalıdır. Aynı zamanda tüm doğruların derecesi $n + 1$ olduğundan $b(p) \geq n + 1$ dir. Bu durum çelişkidir. Dolayısıyla herhangi bir doğruya paralel olan bir doğru yoktur. Bu durumda L doğrusu üzerindeki noktalar yardımıyla,

$$(b(p) - 1)(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$$

bulunur. Buradan $b(p) = n + 1$ dir. Yardımcı Teorem 1.4.5 den S bir projektif düzlemdir. $\square$

Teorem 1.4.8: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$, v noktalı b doğrulu sonlu bir lineer uzay ise aşağıdakilere denktir.

(i) S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart, her $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $b(p) = n + 1$, $v(L) = n + 1$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde tam sayısı vardır.

(ii) S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart, $v = n^2 + n + 1$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde tam sayısı vardır.

(iii) S nin bir projektif düzlem olması için gerek ve yeter şart, $b = n^2 + n + 1$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde tam sayısı vardır.

İspat: Yardımcı Teorem 1.4.5, Yardımcı Teorem 1.4.6 ve Yardımcı Teorem 1.4.7 den ispat açıktır.

Teorem 1.4.8 den bir sonlu projektif düzlem, toplam nokta ve doğru sayısı $b = v = n^2 + n + 1$ olan ve $\forall\ L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ olan $(n + 1)-$regüler bir lineer uzaydır. Teoremde geçen n tamsayısına ilgili **projektif düzlemin mertebesi** denir. Her altdüzlemi bir projektif düzlem olan lineer uzaya **projektif uzay** denir.

Tanım 1.4.4: $S = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ n. mertebeden bir projektif düzlem ve $\varnothing \neq X \subset \mathcal{P}$ olsun. S den X in atılması ile elde edilen S-X yapısına X in S de **komplementi** denir.

n.mertebeden bir projektif düzlemde bir doğrunun komplementi nokta regüleritesi $n+1$, doğru regüleritesi n olan, n^2 noktalı ve n^2+n doğrulu bir sonlu lineer uzaydır. O halde n. mertebeden bir projektif düzlemde bir doğrunun komplementi n.mertebeden bir afin düzlemdir.

Teorem 1.4.9: Bir S' afin düzlemi bir S projektif düzlemi içine S' nün noktaları, S nin bir doğrusu d olmak üzere S-d nin noktaları olacak şekilde yerleştirilebilir. Eğer S' nün mertebesi n ise bu taktirde S nin mertebesi n dir. (Kaya, 1992)

Tanım1.4.5: Bir *S(t,k,v)* **Steiner sistemi**, aşağıdaki şartları sağlayan, blok denilen noktaların alt kümelerden oluşan v noktalı sonlu S lineer uzaydır.

i) Farklı t nokta $(t \geq 2)$ tam olarak bir blok tarafından kapsanır.

ii) Her blokta tam olarak k tane nokta vardır.

Örneğin Fano düzlemi bir *S(2,3,7)* Steiner sistemidir. Genel olarak n. mertebeden bir projektif düzlem aynı zamanda $S(2,n + 1,n^2 + n + 1)$ Steiner sistemidir.

Yardımcı teorem 1.4.10: Bir projektif uzayın herhangi bir alt uzayı bir projektif uzaydır. (Batten, 1986)

$\varnothing$, bir nokta, bir doğru aşikar porjektif alt uzay örnekleridir.

Yardımcı Teorem 1.4.11: Bir projektif uzayın herhangi iki doğrusu aynı sayıda noktaya sahiptir. (Batten, 1986)

İspat: L' ve L bir projektif uzayın iki farklı doğrusu olsun. Eğer L' ve L aynı projektif düzlemin içinde iseler aynı sayıda nokta kapsarlar. Eğer L' ve L aynı projektif düzlemin içinde değillerse L üzerinde bir p noktası, L' üzerinde bir q noktası seçelim ve bu noktalardan geçen doğruya da L'' diyelim. L ile L'' aynı projektif düzlem içinde olup aynı sayıda nokta kapsar. Bununla birlikte L' ve L'' de bir projektif düzlemin içindedir. Dolayısıyla bu iki doğruda aynı sayıda nokta kapsar. $\square$

Yardımcı Teorem 1.4.12: $S=(\mathcal{P},\mathcal{L})$, projektif uzayının herhangi bir alt uzayı $S' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ ve $p \notin S'$ olsun. Bu takdirde $< S' \cup \{p\} >$ alt uzayı $q \in S'$ olmak üzere bütün pq doğruları üzerindeki noktaların kümesidir. (Batten, 1986)

İspat: X, p den geçen S' yü kesen doğruların kapsadığı noktaların kümesi olsun. X in S' ve p üzerindeki en küçük alt uzay olduğu kolayca görülebilmektedir. Kabul edelim ki $S' \neq \varnothing$ olsun. q ve r, X in noktaları olsun. $qr \subseteq X$ olduğunu gösterelim.

Eğer p, q ve r doğrudaş ise X in tanımından $qr = pq \subseteq X$ dir. p, q ve r nin doğrudaş olmadığı farz edilsin. $pq \cap X = q'$ ve $pr \cap X = r'$ olsun. ($p = q'$ veya $r = r'$ hallerinin mümkün olduğuna dikkat edilmelidir.). Şimdi $\Pi = \langle \{p\} \cup \{q\} \cup \{r\} \rangle$ farklı olan q' ve r' noktalarını kapsayan bir düzlemdir. Dolayısıyla $q'r'$ doğrusu Π dedir. Aynı zamanda X kümesindedir. Son olarak s, qr nin herhangi bir noktası olsun, ps doğrusu Π dedir. Π bir projektif düzlem $s \in qr$ olup ps doğrusu $q'r'$ doğrusunu bir s' noktasında keser. Dolayısıyla $s' \in X$ olur ve böylece $s \in X$ olur. $\square$

Yardımcı Teorem 1.4.13: Bir S projektif uzayı değiştirme özelliğine sahiptir. (Batten, 1986)

Yardımcı Teorem 1.4.14: Bir S projektif $3-$uzayının herhangi iki düzlemi bir doğru boyunca kesişir. (Batten, 1986)

İspat: π ve π' S nin herhangi farklı iki projektif düzlemi olsun. π projektif düzleminde bir p noktası alalım ve p den geçen L_1 ve L_2 gibi iki doğru alalım. π', L_1 ve L_2 yi en az bir noktada keser. Bu noktalara q ve r dersek q ve r bir doğru belirtir ve bu doğru hem π hem de π' dedir. q ve r, π ve π'nün ortak noktalarıdır. Düzlemler farklı iken doğrunun dışında 3. nokta bulunmaz. $\square$

Tanım 1.4.6: S, n.mertebeden bir lineer uzay olsun. Eğer S nin her bir doğrusu bir tek paralel sınıfa aitse S nin paralel sınıflarının kümesine **paralelism** denir. $n \geq 3$ olmak üzere eğer

$i)$ S bir paralelisme sahiptir.

$ii)$ L ve L' ortak bir paralel sınıfın farklı doğruları ve $p \notin L \cup L'$, M ile M' de p den geçen doğrular, M, L ve L' yü kessin. Bu durumda M' de L yi keserse M', L' üyüde keser. Yani paralel iki doğrudan birini kesen diğerinide kesmek zorundadır.

$iii)$ Her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) \leq n$ ise S ye **n.mertebeden afin uzay** denir. Burada S yerine $\mathbb{A}$ kullanılabilir.

Bu tanımdan her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olduğu kolayca gösterilebilir. (Batten and Beutelspacher, 1993)

Teorem 1.4.15: S , n.mertebeden v noktalı b doğrulu d düzleme sahip 3 boyutlu projektif uzay ise aşağıdakiler geçerlidir:

$i)$ Herbir p noktası için, $b(p) = d(p) = n^2 + n + 1$

$ii)$ $p \in \alpha$, $L \in \alpha$ olmak üzere $b_\alpha(p) = v(L) = n + 1$ ve $v = n^3 + n^2 + n + 1$

$iii)$ $d(L) = n + 1$

$iv)$ $d = n^3 + n^2 + n + 1$, $b = n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1$

İspat:

$i)$ $3-$boyutlu projektif uzayda bir α düzlemi bu uzayın hiperdüzlemi olup toplam nokta sayısı $v(\alpha) = n^2 + n + 1$ dir.

α, S de bir düzlem ve p de α dışında bir nokta olmak üzere, $v(\alpha) = n^2 + n + 1$ ve yardımcı teorem 1.4.14 gereğinde farklı iki düzlem bir doğru boyunca kesiştiğinden p den $n^2 + n + 1$ tane doğru geçer. Bu durumda $b(p) = n^2 + n + 1$ dir.

p noktası α düzlemine ait doğruların dışında olduğundan bu doğruların herbiri ile p nin gerdiği alt uzay hiperdüzlemdir. Bundan dolayı $d(p) = n^2 + n + 1$ dir.

$ii)$ α herhangi bir düzlem olsun. α, n.mertebeden bir projektif düzlem olduğundan

$$b_\alpha(p) = v(L) = n + 1$$

dir.

Bir p noktası için $v - 1 = b(p)(v(L) - 1) = (n^2 + n + 1)n$ olduğundan

$$v = n^3 + n^2 + n + 1$$

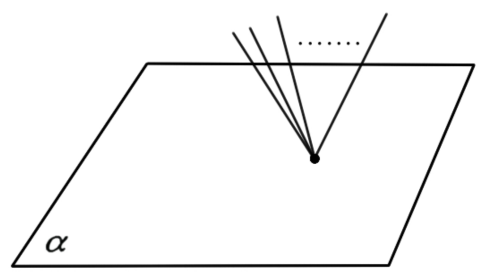
elde edilir.

$iii)$ L herhangi bir doğru olsun. $v(L) = n+1$ olduğundan L ye ait olmayan n^3+n^2 tane nokta vardır. L nin ait olduğu düzlemi α ile belirtirsek, α düzleminde L ye ait olmayan $n^2 + n + 1 - (n + 1) = n^2$ tane nokta vardır.

$$d(L) = \frac{n^3 + n^2}{n^2} = n + 1$$

olur.

$iv)$



Şekil 1.4: n mertebeden bir α düzlemi

α, n.mertebeden 3 boyutlu projektif uzayda bir düzlem olsun.

$p \in \alpha$ için $d(p) = n^2+n+1$ ve $b_\alpha(p) = n+1$ olduğundan p noktasından α düzlemine ait olmayan $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$ tane doğru geçer. $v(\alpha) = n^2 + n + 1$ gereğince α düzlemine ait olmayan doğru sayısı

$$(n^2 + n + 1)n^2$$

dir. α düzlemine ait doğru sayısıda $n^2 + n + 1$ olduğundan

$$b = (n^2 + n + 1)n^2 + n^2 + n + 1 = n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1$$

elde edilir. Aynı zamanda $\forall\ L \in \mathcal{L}$ için

$$b = \frac{\binom{v}{2}}{\binom{v(L)}{2}}$$

dir.

$L \in \alpha$, $v(L) = n+1$ ve $d(p) = n^2+n+1$ olduğu diğer şıklarda gösterildi.

O halde $(d(L)-1)(v(L)) + v(L) = n^3+n^2+n+1$ olup,

$$d = n^3+n^2+n+1$$

bulunur.

Teorem 1.4.15 den dolayı 3−boyutlu bir projektif uzayın noktasal regüleritesi n^2+n+1 doğrusal regüleritesi $n+1$ olan 3 boyutlu lineer uzay olduğu açıktır. (Batten and Beutelspacher, 1993)

Teorem 1.4.16: $\mathbb{A}$, n.mertebeden v noktalı, b doğrulu, d düzleme sahip 3 boyutlu afin uzay ise aşağıdakiler geçerlidir:

$i)$ Her α düzlemi, L doğrusu için $b_\alpha(p) = n+1$, $v(L) = n$ ve $v = n^3$

$ii)$ Herbir p noktası için, $b(p) = n^2+n+1$, $d(p) = n^2+n+1$

$iii)$ $d(L) = n+1$

$iv)$ $d = n^3+n^2+n$, $b = n^4+n^3+n^2$ (Batten and Beutelspacher, 1993)

İspat: S, n.mertebeden 3 boyutlu bir projektif uzay, α da S nin bir hiperdüzlemi ve S den bir π düzleminin atılması ile oluşan yapı S' olsun. $S' = \mathbb{A}$ dır.

$i)$ α, n.mertebeden bir projektif düzlem olduğundan $\mathbb{A}$ nın bir hiperdüzlemi α' bir afin düzlem olduğundan $b_{\alpha'}(p) = n+1$, $v(L) = n$ dir.

S de $v = n^3+n^2+n+1$ ve $|\pi| = n^2+n+1$ olup, $\mathbb{A}$ nın toplam nokta sayısı

$$n^3+n^2+n+1-(n^2+n+1) = n^3$$

tür.

S nin herhangi bir doğrusu ait olmadığı düzlemlerle bir tek noktada kesiştiğinden ve L doğrusu α ya ait ise, $\mathbb{A}$ nın herbir L doğrusu ile π nın ortak bir tek noktası olduğundan $v(L) = n$ dir.

ii) Bir p noktası için

$$v-1=b(p)(v(L)-1)\Longrightarrow n^3-1=b(p)(n-1)\Longrightarrow b(p)=n^2+n+1$$

dir.

p noktası π düzlemine ait olmadığından

$$d(p)=n^2+n+1$$

dir.

iii) $\mathbb{A}$ nın herbir L doğrusu π ya ait olmadığından $d(L)=n+1$ dir.

iv) S, 3 boyutlu projektif uzay ve $\mathbb{A}$ da 3 boyutlu afin uzay olduğundan

$$b=n^4+n^3+2n^2+n+1-(n^2+n+1)=n^4+n^3+n^2$$

dir. Aynı yolla

$$d=n^3+n^2+n+1-1=n^3+n^2+n$$

bulunur. □

1.5 Düzlemsel Uzaylar

Tanım 1.5: $S=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ bir lineer uzay ve elemanları düzlemler olarak adlandırılan $\mathcal{L}$ nin has alt uzaylarının bir kümesi Ω olsun. $S=(\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega)$ geometrik yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bir **düzlemsel (planar) uzay** olarak adlandırılır.

i) Herhangi üçü doğrudaş olmayan üç noktadan tam olarak bir düzlem geçer.

ii) Her düzlem doğrudaş olmayan üç nokta kapsar.

Eğer $S=(\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega)$ düzlemsel uzayı sonlu sayıda nokta, doğru ve düzleme sahip ise **sonlu düzlemsel uzay** olarak adlandırılır. Bir sonlu düzlemsel uzayın toplam nokta sayısı v, toplam doğru sayısı b ve toplam düzlem sayısı d ile gösterilir.

$S=(\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega)$ bir sonlu düzlemsel uzay olsun. S nin herhangi bir düzlemi α olmak üzere, S nin α düzlemine ait herhangi bir noktası p ve herhangi bir doğrusu l olsun. α düzlemi tarafından kapsanan p noktasından geçen doğru sayısı $b_\alpha(p)$ ile gösterilir. İlaveten, l doğrusu üzerindeki α düzlemine ait noktaların sayısı $v_\alpha(l)$ ile gösterilir.

Ayrıca, S nin l doğrusundan geçen düzlem sayısı $d(l)$ ile gösterilir. $v, b, d, b_\alpha(p), v_\alpha(l)$ ve $d(l)$ tamsayı değerlerine ise S nin **parametreleri** denir.

$S = (\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega)$ bir sonlu düzlemsel uzayı ve α düzlemi için, α düzlemi tarafından kapsanan doğruların kümesi L_α olmak üzere (α, L_α) bir liner uzaydır. S nin her α düzlemi için (α, L_α) lineer uzayının mertebesi $n(\alpha)$ olmak üzere, $n = \{\max\,[n(\alpha) : \alpha \in \Omega]\ \}$ tamsayı değerine $S = (\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega)$ **sonlu düzlemsel uzayının mertebesi** denir.

S nin bir düzlemi α ve α nın bir noktası p olsun. p noktasından geçen ve α düzlemi tarafından kapsanan doğruların kümesine p **merkezli doğru demeti** denir. Eğer her doğru demeti en az üç noktalı doğrular kapsıyor ise S ye **non-dejenere düzlemsel uzay** denir.

S düzlemlerinin ikişerli arakesitleri bir doğru olan n inci mertebeden bir düzlemsel uzay olsun. S nin herhangi bir p noktası için, p noktasından geçen doğruların kümesi noktalar kümesi ve p noktasından geçen düzlemler kümesi doğrular kümesi olarak tanımlanan S_p geometrik yapısı n inci mertebeden bir projektif düzlemdir. Bu durumda S ye **lokal projektif düzlemsel uzay** denir. Sonlu lokal projektif düzlemsel uzaylarda herhangi iki düzlemin arakesiti ya bir doğru ya da boş kümedir.

Sonlu düzlemsel uzaylar teorisindeki açık soru düzlemlerinin ikişerli arakesiti bir doğru olan sonlu düzlemsel uzayların sonlu projektif $3-$uzaya gömülüp gömülemeyeceği sorusudur. Alan yazında bu sorunun Napolitano, Metsch ve Beutelspacher tarafından cevaplandığı pek çok çalışma vardır. Alan yazındaki bu çalışmalarda göz önüne alınan özelikler, S sonlu düzlemsel uzayının bir noktasından geçen düzlem ve doğru geometrisi ile ilgili olup daha çok lokal ve nümerik özeliklerdir. Ancak, Anapa, Günaltılı ve Maldeghem (2009) tarafından yapılan **“ Planar and Affine Spaces”** başlıklı çalışmada düzlemler için paralellik aksiyomu olarak adlandırılan global bir koşul göz önüne alınarak düzlemsel uzaylar karakterize edilmiştir.

Düzlemsel lineer uzayda Ω kümesi düzlemlerden oluşmaktadır. Düzlemsel uzayların en baskın örnekleri afin ve projektif uzaylardır. Düzlemsel uzaylar açısından afin ve projektif düzlemlerin pek çok karakterizasyonu yapılmıştır. Örneğin; eğer bir düzlemsel uzayın tüm düzlemleri projektif düzlem ise o zaman uzay bir "**projektif uzay**"dır

(Veblen-Young 1910). Eğer uzayın tüm düzlemleri afin düzlem ve doğruların derecesi en az dört ise, uzay bir "**afin uzay**"dır. (Buekenhout,1969).

Bu tezde n inci mertebeden bir $S = (\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega)$ düzlemsel uzayının, ikişerli arakesitleri bir doğru olan düzlemlerin kümesi C olmak üzere, S nin her $p \notin C$ koşulunu sağlayan noktasından C ye en çok bir paralel doğrunun mevcut olması durumunda S düzlemsel uzayının temel özelikleri belirlenmiş ve karakterize edilmiştir.

BÖLÜM 2

(2,0,{0,1})-DÜZLEMSEL UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak $(2, 0, \{0, 1\})$-düzlemsel uzaylar tanımlanmış ve temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.1: $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ bir düzlemsel uzay ve S nin ikişerli arakesitleri bir doğru olan düzlemlerinin kümesi C olsun. S nin $p \notin C$ koşulunu sağlayan her p noktasından geçen C yi kesmeyen doğru sayısı 0 veya 1 ise S ye bir $(2, 0, \{0, 1\})-$ **düzlemsel uzay** denir.

Yardımcı Teorem 2.1 : S nin her düzlemi $\{0, 1\}-$ semiafin düzlemdir.

İspat: S nin bir düzlemi α ve α düzleminin $p \notin L$ koşulunu sağlayan nokta-doğru çifti (p, L) olsun. p noktasından geçen ve L doğrusu ile ayrık olan M ve K gibi en az iki doğrunun var olduğunu kabul edelim. $q \notin \alpha$ olacak şekilde bir q noktası seçelim. Bu durumda $q \notin L$ olacağından $\langle q, L\rangle$ düzlemi mevcuttur. s noktası L doğrusu üzerinde bir nokta olsun. Böylece, s ve q noktaları $\langle q, L\rangle$ düzlemi tarafından kapsanan iki farklı nokta olduğundan sq doğrusu üzerindeki tüm noktalarla birlikte $\langle q, L\rangle$ düzlemi tarafından kapsanır. Şimdi $\langle q, L\rangle$ ve α düzleminin dışında bir r noktasını gözönüne alalım. r noktasının seçiminden dolayı $r \notin sq$ dur. Bu S de $\langle r, sq\rangle$ düzleminin varlığını gerektirir. Bu durumda $\langle r, sq\rangle \cap \langle q, L\rangle = sq \in \alpha$ ve $p \notin \langle r, sq\rangle \cup \langle q, L\rangle$ dir. Bu ise M ve K doğrularının S de p noktasından geçip $\langle r, sq\rangle \cup \langle q, L\rangle$ kesmeyen iki doğru olduğunu gösterir. Bu S nin $(2, 0, \{0, 1\})$ $-$düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde kabul hatalı olup, S nin her düzlemi $\{0, 1\}$ semiafindir. $\square$

Yardımcı Teorem 2.1 ve Kuiper-Dembowski Teoremine göre S nin her bir düzlemi aşağıdakilerden biridir.

(a) Bir yaklaşık demet

(b) Bir projektif ya da afin düzlem

(c) Bir delinmiş projektif düzlem

(d) Sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem

Bu bölüm boyunca; S doğrusal regüler olmayan $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzay olarak kabul edilecektir. S nin maksimum doğru derecesine sahip olan doğruları **uzun doğru** olarak adlandırılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2: S nin bir α düzlemi tarafından kapsanan uzun doğrusu, α nın tüm doğruları ile en az bir ortak noktaya sahiptir.

İspat: S nin bir α düzlemini göz önüne alalım. S bir düzlemsel uzay olduğundan α herhangi üçü doğrudaş olmayan en az üç nokta kapsar. Bu nedenle, α da doğrudaş olmayan üç nokta olarak p, q ve r yi seçelim. p ve q noktalarından geçen pq doğrusunu K, r ve q noktalarından geçen rq doğrusunu M ile gösterelim. S doğrusal regüler olmadığından ve α en az bir uzun doğru kapsadığından M ve K doğrularını sırasıyla kısa ve uzun doğru olarak seçelim. Bu seçimimizden dolayı $v(K) - v(M) \geq 1$ dir. p, q ve r noktalarının seçiminden dolayı $r \notin K$ dır. Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı, α bir $\{0, 1\}-$semiafin düzlemdir. Bu nedenle; α düzlemi r noktasından geçen ve K doğrusu ile ayrık olan en çok bir doğru kapsar. O halde; r noktasından geçen ve K doğrusu ile ayrık olan bir L doğrusunun var olduğunu kabul edelim. S nin her doğrusu en az iki noktalı olduğundan, $t \in L$ ve $t \neq r$ koşulunu sağlayan bir t noktasını göz önüne alalım. α düzleminde t noktasından geçen doğru sayısı $b_\alpha(t) = v(K) + 1$ dir. Bu eşitliği, $v(K) - v(M) \geq 1$ eşitliğinde kullanarak, $b_\alpha(t) - v(M) \geq 2$ elde edilir. Bu eşitsizlik, α düzleminde t noktasından geçen M doğrusu ile ayrık en az iki doğrunun varlığını gerektirir. Bu ise α nın bir $\{0, 1\}-$semiafin düzlem olması ile çelişir. O halde; r noktasından geçen ve K doğrusu ile ayrık bir doğru yoktur. Bu ise α düzleminde uzun doğruların diğer her bir doğru ile en az bir ortak noktaya sahip olduğunu gerektirir. $\square$

Şimdi S nin düzlemlerinin özeliklerini ve birbirine göre konumlarını inceleyelim:

Yardımcı Teorem 2.3 : S de bir projektif düzlem π olsun. π düzlemi, S nin diğer düzlemlerinin her biri ile bir ortak doğruya sahiptir.

İspat: S nin $\pi \neq \theta$ koşulunu sağlayan bir θ düzlemini göz önüne alalım. $|\mathcal{P}_\pi \cap \mathcal{P}_\theta| \leq 1$ olduğunu kabul edelim. Kabulden dolayı π projektif düzlemi ile θ

düzlemi en çok bir q ortak noktaya sahiptir. π düzleminde q noktasından geçen bir L doğrusunu seçelim. Ayrıca π ve θ düzlemlerinin dışında bir s noktasını göz önüne alalım. $s \notin L$ olduğundan $< s, L >$ düzlemi mevcuttur ve $< s, L > \cap \pi = L$ dir. Öte yandan; θ düzleminde q noktasından geçen bir K doğrusu seçelim. θ bir düzlem olduğundan, K doğrusu üzerinde olmayan en az bir r noktası kapsar. Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı; θ düzlemi r noktasından geçen, K doğrusu ile ayrık bir K' doğrusu kapsar. S nin her doğrusunun üzerinde en az iki nokta mevcut olacağından, K doğrusu üzerinde q noktasından farklı bir t noktası mevcuttur. Üstelik; r ve t noktalarından geçen doğru üzerindeki tüm noktalarla birlikte θ düzlemi tarafından kapsanır. Böylece, S de $r \notin \pi \cup < s, L >$ olmak üzere; r noktasından geçen rt ve K' doğruları $\pi \cup < s, L >$ ile ayrıktır. Bu sonuç; S nin bir $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde $|\mathcal{P}_\pi \cap \mathcal{P}_\theta| > 1$ olmalıdır ki bu π ile θ nın bir ortak doğruya sahip olmasını gerektirir. $\square$

Yardımcı Teorem 2.4 : Sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemlerin ikişerli arakesitleri bir doğrudur.

İspat: σ ve σ' sonsuzdaki noktaları sırasıyla p_∞ ve p'_∞ olan sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemler olsunlar. $|\mathcal{P}_\sigma \cap \mathcal{P}_{\sigma'}| \leq 1$ olduğunu kabul edelim. Kabulden dolayı σ ile σ' düzlemlerinin arakesiti olan bir q noktası mevcuttur. σ düzleminde q noktasından geçen qp_∞ doğrusundan farklı bir M doğrusunu gözönüne alalım. σ düzlemi bir $\{0, 1\}-$semiafin düzlem olduğundan $s \notin M$ koşulunu sağlayan bir s noktasından geçen M doğrusuna paralel bir K doğrusu mevcuttur. Şimdi σ' düzleminde bir r noktası gözönüne alalım. $r \notin K$ olduğundan S de $< r, K >$ düzlemi mevcuttur. Öte yandan, σ' düzleminde r noktasından geçen rp_∞ dan farklı bir L afin doğrusunu ve L doğrusu üzerinde olmayan bir p noktasını gözönüne alalım. σ' düzlemi bir $\{0, 1\}-$semiafin düzlem olduğundan p noktasından geçen L doğrusu ile ayrık bir L' doğrusu kapsar. L doğrusu üzerinde en az iki nokta mevcut olduğundan $r \neq t, t \in L$ koşulunu sağlayan bir t noktası vardır. p ve t noktaları farklı iki nokta olduğundan pt doğrusu üzerindeki tüm noktalarla birlikte σ' düzlemi tarafından kapsanır. Böylece, $p \notin \sigma \cup < r, K >$ ve p noktasından geçen pt, L' doğruları $\sigma \cup < r, K >$ ile ayrık iki doğrudur. Bu sonuç S nin $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde kabul hatalı olup $|\mathcal{P}_\sigma \cap \mathcal{P}_{\sigma'}| > 1$ dir. Bu ise σ ve σ' düzlemlerinin bir doğru boyunca kesişmesini gerektirir. $\square$

Tanım 2.2: α ve β , S nin herhangi iki düzlemi olmak üzere $\alpha \parallel \beta \Longleftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$ veya $\alpha = \beta$ dır.

Yardımcı Teorem 2.5: S nin düzlemleri üzerindeki paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: **Yansıma** ve **simetri** özellikleri paralellik tanımından aşikar olarak mevcuttur. Bu nedenle geçişme özelliği gösterilecektir.

S nin α, β ve θ düzlemleri, $\alpha \parallel \beta$ ve $\beta \parallel \theta$ özelliklerine sahip olsunlar. $\alpha \parallel \theta$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\alpha \nparallel \theta$ olsun. Kabulden dolayı aşağıdaki iki durum söz konusudur.

Durum 1: $\alpha \cap \theta = \{p\}$, $p \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda α, β ve θ düzlemleri arasında $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \theta$ ve $\alpha \cap \theta = \{p\}$ ilişkisi vardır. α düzleminde p noktasından geçmeyen bir N doğrusunu ve β düzleminde de bir s noktası seçelim. Seçimimizden dolayı $s \notin N$ dir. S bir düzlemsel uzay olduğundan $< s, N >$ düzlemi mevcuttur. $< s, N >$ düzlemi ile β düzleminin arakesiti ya sadece s noktası ya da s noktasından geçen bir L doğrusudur.

İlk olarak; $< s, N > \cap \beta = \{s\}$ olduğunu kabul edelim. β düzleminde s noktasından geçen bir T doğrusu seçelim. β bir düzlem olduğundan, $q \notin T$ koşulunu sağlayan en az bir q noktasına sahiptir. Üstelik, Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı; q noktasından geçen ve T doğrusuna paralel olan en az bir T' doğrusuna da sahiptir. S nin her doğrusu en az iki noktalı olduğundan, T doğrusu üzerinde $r \neq s$ koşulunu sağlayan en az bir r noktası mevcuttur. β bir düzlem olduğundan, q ve r noktalarından geçen qr doğrusu üzerindeki tüm noktalarla birlikte β düzlemi tarafından kapsanır. Böylece; $q \notin < s, N > \cup \alpha$ koşulunu sağlayan q noktasından geçen qr ve T' doğruları mevcuttur. Üstelik; $qr \cap (\alpha \cup < s, N >) = \varnothing$ ve $T' \cap (\alpha \cup < s, N >) = \varnothing$ dir. Böylece, q noktasından geçen qr ve T' doğruları $\alpha \cup < s, N >$ ile ayrıktır. Bu ise S nin bir $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde $< s, N > \cap \beta = \{s\}$ kabulu yanlış olup $< s, N > \cap \beta = L \in \mathcal{L}$ dir.

$< s, N > \cap \beta = L$ doğrusunun s noktasından geçtiği aşikardır. Bununla birlikte; α ve θ düzlemleri β düzlemine paralel olduğundan $p = \alpha \cap \theta$ noktası da L

doğrusu üzerinde değildir. Böylece $p \notin L$ olduğundan S de $< p, L >$ düzlemi tek olarak mevcuttur. $< p, L >$ düzlemini β' ile gösterelim. İlk olarak; β' düzleminin α ve θ düzlemleri ile arakesitinin p noktası olduğunu kabul edelim. Yani; $\beta' \cap \alpha = \beta' \cap \theta = p$ olsun. Böylece $< s, N >, \beta$ ve β' düzlemleri L doğrusu üzerinde üç farklı düzlem iken β', α ve θ düzlemleride p noktası üzerinde üç farklı düzlemdir. α düzleminde N doğrusu üzerinde olmayan bir x noktası seçelim. α düzlemi, bir $\{0,1\}-$semiafin düzlem olduğundan, x noktasından geçen N doğrusuna paralel bir N' doğrusu kapsar. İlaveten; N doğrusu üzerinde bir z noktası seçelim. x ve z noktaları α düzleminin iki farklı noktası olduğundan, x ve z noktalarından geçen xz doğrusu üzerindeki tüm noktalarla birlikte α düzlemi tarafından kapsanır. Böylece; arakesit doğrusu L olan β ve β' düzlemlerinin dışında, x noktasından geçen xz ve N' doğruları $\beta \cup \beta'$ ile ayrıklardır. Bu ise S nin bir $(2, 0, \{0, 1\})-$ düzlemsel uzay olması ile çelişir. Bu çelişkiye $\beta' \cap \alpha = p = \beta' \cap \theta$ kabulü neden olmaktadır. O halde; β' düzlemi ile α ve θ düzlemlerinin arakesiti birer doğrudur. Bu doğrular $\alpha \cap \beta' = H$ ve $\theta \cap \beta' = K$ olsun. $\alpha \cap \theta = p$ olduğundan H ve K doğruları p noktasından geçen doğrulardır. Öte yandan; β' düzlemi L doğrusu ve L doğrusu üzerinde olmayan p noktası tarafından üretilen bir düzlem olduğundan $L \subseteq \beta'$ dır. Üstelik; $\alpha \parallel \beta$ ve $\theta \parallel \beta$ olduğundan $L \cap H = \varnothing$ ve $L \cap K = \varnothing$ dir. Böylece β' düzlemi p noktasından geçen L doğrusu ile ayrık H ve K doğrularını kapayan bir düzlemdir. Bu sonuç β' düzleminin bir $\{0, 1\}-$ semiafin düzlem olmamasını gerektirir. Bu ise Yardımcı Teorem 2.1 ile çelişir. O halde kabulumuz hatalı olup $\alpha \cap \theta = \{p\}$, $p \in \mathcal{P}$ olamaz.

Durum 2: $\alpha \cap \theta = \{L\}$, $L \in \mathcal{L}$ olsun. α, β ve θ düzlemlerinin birbirlerine göre konumları $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \theta$ ve $\alpha \cap \theta = L$ dir. α ve θ düzlemleri β düzlemine paralel olduğundan, $\alpha \cap \beta = \varnothing$ ve $\theta \cap \beta = \varnothing$ dir. Bu durumda β düzlemine ait herhangi bir p noktasından geçen ve $\alpha \cup \theta$ ile ayrık olan $b_\beta(p) \geq 2$ adet doğru mevcuttur. Bu ise S nin bir $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde bu durum söz konusu olamaz.

Durum 1 ve Durum 2 de elde edilen çelişkiler $\alpha \nparallel \theta$ kabulünden kaynaklanmaktadır. O halde kabul hatalı olup, $\alpha \parallel \theta$ dır. Böylece geçişme özelliği sağlanmış olur. $\square$

Tanım 2.3: S nin herhangi bir α düzlemi için; α ya paralel olan tüm düzlemlerin oluşturduğu kümeye α ya karşılık gelen **paralel düzlem sınıfı** denir ve $[\alpha]$ ile gösterilir. Farklı paralel düzlem sınıfları S nin bir ayrışımını oluşturur. Bu S nin her noktasının $[\alpha]$ düzlem sınıfına ait tam olarak bir düzlemi tarafından kapsanmasıdır.

Yardımcı Teorem 2.6: α, β ve θ düzlemleri S de $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \nparallel \theta$ ve $\beta \nparallel \theta$ koşullarını sağlasın. Eğer $\alpha \cap \theta \in \mathcal{L}$ ise $\beta \cap \theta \in \mathcal{L}$ dir.

İspat: S de $\alpha \cap \theta \in \mathcal{L}$ iken β ve θ düzlemlerinin arakesitinin bir doğru olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $|\mathcal{P}_\beta \cap \mathcal{P}_\theta| \leq 1$ olsun.

Durum 1: $|\mathcal{P}_\beta \cap \mathcal{P}_\theta| = 0$ olsun. Bu durumda S de α, β ve θ düzlemlerinin birbirlerine göre konumları ikişerli olarak $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $\beta \cap \theta = \varnothing$ ve $\alpha \cap \theta \in \mathcal{L}$ dir. Bu durumda β düzlemine ait herhangi bir p noktasından geçen ve $\alpha \cup \theta$ ile ayrık olan $b_\beta(p) \geq 2$ adet doğru mevcuttur. Bu ise S nin bir $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde bu durum söz konusu olamaz.

Durum 2: $|\mathcal{P}_\beta \cap \mathcal{P}_\theta| = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha \cap \theta \in \mathcal{L}$ iken $\beta \cap \theta \in \mathcal{P}$ dir. Dolayısıyla; $\beta \cap \theta = q$ olacak şekilde bir q noktası mevcuttur. β düzleminde q noktasından geçen bir H doğrusu gözönüne alalım. İlaveten, β düzleminde H doğrusunun üzerinde olmayan bir t noktası gözönüne alalım. β bir $\{0, 1\}-$semiafin düzlem olduğundan t noktasından geçen H ile ayrık bir T doğrusu mevcuttur. Öte yandan, H doğrusu üzerinde q noktasından farklı bir z noktası alalım. t ve z noktaları β düzleminde farklı noktalar olduğundan $tz \in \mathcal{L}$ mevcuttur. Bu durumda, tz ve T doğruları t noktasından geçip $\alpha \cup \theta$ ile ayrık iki doğrudur. Bu sonuç S nin $(2, 0, \{0, 1\})-$ düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde kabul hatalı olup, $\theta \cap \beta \in \mathcal{L}$ dir. $\square$

Yardımcı Teorem 2.7: S nin her paralel düzlem sınıfı sadece afin düzlem kapsar.

İspat: α düzlemi S nin afin düzlem olmayan bir düzlemi olsun. Yardımcı Teorem 2.5 den dolayı, S de α düzlemine paralel olan tüm düzlemlerden oluşan bir paralel düzlem sınıfı vardır. Bu düzlem paralel sınıfını $[\alpha]$ ile gösterelim. $\beta \notin [\alpha]$ olacak şekilde S nin bir β düzlemini gözönüne alalım. Bu $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ olmasını gerektirir. O halde α ile β düzlemlerinin arakesiti bir doğrudur. Üstelik; Yardımcı Teorem 2.6 dan dolayı β düzleminin $[\alpha]$ paralel düzlem sınıfına ait tüm düzlemler ile arakesiti de bir doğru olur. α düzlemi afin olmayan bir düzlem olduğundan bu arakesit doğrularından en az biri uzun doğru olacaktır. Bu durumda β düzlemi diğer doğrular ile ayrık en az bir uzun doğru kapsar. Bu ise Yardımcı Teorem 2.2 ile çelişir. Bu çelişki α nın afin düzlem olmamasından elde edilmiştir. O halde α afin düzlem olmalıdır. Üstelik $[\alpha]$ nın her düzlemi de afin olmalıdır. $\square$

Yardımcı Teorem 2.8: S nin bir paralel düzlem sınıfına ait olmayan herhangi bir doğrusu, paralel düzlem sınıfının her düzlemi ile bir ortak noktaya sahiptir.

İspat: Yardımcı Teorem 2.7 den dolayı S nin α afin düzlemini kapsayan paralel düzlem sınıfı $[\alpha]$ olsun. Şimdi $\alpha' \in [\alpha]$ ve $p \notin \alpha \cup \alpha'$ koşulunu sağlayan p noktası ve α' düzlemini gözönüne alalım. S nin p noktasından geçen α düzlemini bir q noktasında kesen, fakat α' düzlemi ile ayrık olan bir doğrusu L olsun. α düzleminde q noktasından geçen bir M doğrusu seçelim. $L \wedge M = q$ olduğundan $\langle L, M\rangle$ düzlemi mevcuttur. Bu durumda $\langle L, M\rangle \cap \alpha = M$ dir. α' düzleminde bir r noktası seçelim. $\alpha \cap \alpha' = \varnothing$ ve $\alpha' \cap L = \varnothing$ olduğundan $r \notin \langle L, M\rangle \cup \alpha$ dır. Üstelik $b_{\alpha'}(r) \geq 2$ adet doğru $\langle L, M\rangle \cup \alpha$ ile ayrıktır. Bu S nin $(2, 0, \{0, 1\})-$ düzlemsel uzay olması ile çelişir. O halde kabul hatalı olup, $L \cap \alpha' \neq \varnothing$ olmalıdır. $\square$

Sonuç 2.1: Yardımcı Teorem 2.5 den dolayı, S nin farklı paralel düzlem sınıfları S nin bir parçalanışını oluşturur. Bu S nin tüm noktalarının α düzlemine karşılık gelen paralel sınıfı tarafından kapsanmasıdır. S nin her noktası α düzlemine karşılık gelen düzlem sınıfına ait tam olarak bir düzlem tarafından kapsanır.

Sonuç 2.2: Yardımcı Teorem 2.3, 2.4 ve 2.6 dan S nin herhangi iki düzlemi bir doğru boyunca kesişir.

Yardımcı Teorem 2.9: $n \geq 2$, $n \in Z^+$ olmak üzere S nin doğru derecesi n ya da $n + 1$ dir.

İspat: S nin bir L doğrusunu ve bu doğru üzerindeki düzlemlerini göz önüne alalım. Kabul edelim ki S nin doğru derecesi $n + 1$, n ve $n - 1$ olsun. L doğrusunu üzerinde bulunduran α ve β düzlemlerini göz önüne alalım. α düzleminde $(n)-$ dereceli bir M doğrusunu ve β düzleminde $(n - 1)$ dereceli bir N doğrusunu seçelim.

Durum 1: $v(L) = n - 1$ olsun. Bu durumda, $z \notin L \cup M$ olacak şekilde bir z noktası seçelim. Yardımcı Teorem 2.1 den L ile ayrık z den geçen bir K doğrusu vardır. $z \in M$ ve $v(M) = n$ olduğundan $b_\alpha(z) = n$ dir. Bu K doğrusu ile M doğrusunun bir ortak noktaya sahip olmasını gerektirir. Öte yandan, α bir $\{0,1\}-$ semiafin düzlem olduğundan, M doğrusu ile L doğrusuda bir ortak noktaya sahiptir. Diğer taraftan; S nin doğru dereceleri $n+1, n$ veya $n-1$ olduğundan, S de en az bir $(n+1)$ dereceli doğru vardır. Bu doğruyu M' ile gösterelim. Eğer $M' \subseteq \alpha$ ise $v(M') = n+1$ olduğundan α düzlemi M doğrusu üzerinde olmayan $(n+1)$ dereceli en az bir adet u noktası kapsar. $v(L) = n-1$ olduğundan u noktasından geçen L doğrusu ile ayrık 2 doğru mevcut olur ki bu α nın $\{0,1\}-$ semiafin olması ile çelişir. O halde $M' \subsetneq \alpha$ dır. Benzer nedenden dolayı $M' \notin \beta$ dır. Dolayısıyla $M' \subsetneq \alpha \cup \beta$ dır. O halde M' doğrusu $M \cap L$ noktasından geçen bir $(n+1)-$ doğru olsun. M' ve L doğruları kesiştiklerinden dolayı S de bir düzlem belirtirler. Bu düzlem θ olsun. $M'_{n+1} \subseteq \theta$ olduğundan θ düzleminin M' doğrusu üzerinde olmayan tüm noktaları $(n+1)$ derecelidir. Şimdi θ düzleminde L ve M' doğruları üzerinde olmayan bir p noktası seçelim. $b_\theta(p) = n+1$ olduğundan p noktasından geçen L doğrusu ile ayrık iki doğru mevcuttur ki bu θ düzleminin $\{0,1\}$ $-$semiafin olması ile çelişir. O halde kabul hatalı olup $v(L) = n$ dir.

Durum 2: Kabul edelim ki β düzleminde L ve N doğruları ayrık olsunlar. $q \notin N \cup L$ olacak şekilde bir q noktası seçelim. Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı β düzleminde q noktasından geçen N ile ayrık bir L' doğrusu vardır. $v(N) = n-1$ olduğundan $b_\beta(q) = n$ dir. Öte yandan $v(L) = n$ ve $b_\beta(q) = n$ olduğundan L' doğrusu L doğrusu ile bir noktada kesişir. Böylece L ve L' doğruları $L \cap L'$ noktasından geçip N ile ayrıktır. Bu sonuç Yardımcı Teorem 2.1 ile çelişir. Böylece q noktasından geçen her doğru L ve N doğrularını birer noktada kesmelidir. Bu $v(L) = v(N) = n$ olmasını gerektirir. Bu ise N doğrusunun $(n-1)$ dereceli olması ile çelişir. O halde kabulumüz hatalı olup, $N \cap L \neq \varnothing$ dir. Bu ise her $(n-1)$ dereceli doğrunun L doğrusunu β da bir noktada kesmesini gerektirir.

$L \cap N = r$ olsun. S nin her doğrusu en az iki noktalı olduğundan $s \in L$, $s \neq r$ olacak şekilde bir s noktasını gözönüne alalım. Yardımcı Teorem 2.1 den s noktasından geçen N ile ayrık bir L'' doğrusu mevcuttur ve $v(L'') = n-1$ dir. Şimdi α düzleminde $w \notin L$ koşulunu sağlayan bir w noktası seçelim. Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı w noktasından geçen L doğrusu ile ayrık bir M' doğrusu mevcuttur. Bu $b_\alpha(w) = n+1$ olmasını gerektirir. Teorem1.2.4 den dolayı w noktasından geçmeyen bir M'' $(n+1)-$ doğru mevcuttur. M'', S nin uzun doğrusu olduğundan, M'' doğrusu,

α düzlemindeki tüm doğrular ile kesişir. $M'' \cap L = t$ olsun. Öte yandan, β düzleminde t noktasından geçen en az bir $(n-1)$ dereceli N' doğrusu mevcuttur. $M'' \cap N' \neq \varnothing$ olduğundan $\langle M'', N' \rangle$ bir düzlem belirtir. $v(M'') = n+1$ olduğundan $\langle M'', N' \rangle$ düzleminde M'' ve N' doğruları dışında $(n+1)$ dereceli en az bir a noktası vardır. Bu durumda $\langle M''$,$N' \rangle$ düzleminde, a noktasından geçip N'_{n-1} doğrusu ile ayrık olan iki doğru kapsar. Bu durum Yardımcı Teorem 2.1 ile çelişir. O halde kabul hatalı olup $v(N) = n-1$ değildir. Bu ise S nin $(n-1)$ dereceli doğru kapsamadığını gösterir. □

Sonuç 2.3: S nin n mertebeli her düzlemi n ya da $n+1$ nokta derecelidir.

İspat: Yardımcı Teorem 2.2 ve 2.8 den açıktır.□

Yardımcı teorem 2.10: S mertebesi n olan en az bir π projektif düzlem kapsarsa, π ye ait olmayan her nokta n^2+n+1 nokta derecesine sahiptir.

İspat: Kabul edelim ki π mertebesi n olan bir projektif düzlem ve $L \notin \pi$ bir doğru olsun. Şimdi $z \in L$ ve $p \in \pi$ koşullarını sağlayan z ve p noktalarını göz önüne alalım. p nin seçiminden dolayı $\langle p, L \rangle$ düzlemi mevcuttur. Yardımcı Teorem 2.3 den dolayı, $\langle p, L \rangle \cap \pi = K$ olacak şekilde bir K doğrusu vardır. Üstelik, K doğrusu, S nin π tarafından kapsanan bir uzun doğrusudur. Bu durumda L ve K doğruları $\langle p, L \rangle$ tarafından kapsanan ve $L \cap K = \emptyset$ olan S nin iki farklı doğrularıdır. Bu sonuç Yardımcı Teorem 2.2 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup, S nin π ile ayrık doğrusu yoktur. Bu π ye ait olmayan bir z noktasından geçen her doğrunun π ile bir ortak noktaya sahip olmasını gerektirir. Böylece $z \in \mathcal{P}$ noktası n^2+n+1 nokta derecesine sahip olur. □

Sonuç 2.4: S en az iki projektif düzlem kapsarsa, S nin nokta regüleritesi n^2+n+1 dir.

Yardımcı teorem 2.11: S nin her doğrusu tam olarak $n+1$ adet düzlem üzerindedir.

İspat: S de mertebesi n olan bir α afin düzlemini gözönüne alalım. Yardımcı Teorem 2.6 ve Yardımcı Teorem 2.7 den dolayı, S de α afin düzlemine karşılık gelen bir düzlem paralel sınıfı mevcuttur. Bu paralel düzlem sınıfını $[\alpha]$ ile temsil edelim. Şimdi $L \notin [\alpha]$ koşunulu sağlayan bir L doğrusu seçelim. Yardımcı Teorem 2.8 den dolayı, L doğrusu $\alpha \in [\alpha]$ ile bir ortak noktaya sahiptir. Bu nokta p olsun. α mertebesi n olan bir afin düzlem olduğundan α düzlemi p noktasından geçen $n+1$ adet doğru kapsar. Öte yandan; S bir düzlemsel uzay olduğundan bu $n+1$ adet doğrunun her biri ile L doğrusu tam olarak bir düzlem belirtir. Böylece S de L doğrusu boyunca kesişen $n+1$ adet düzlem elde edilir. Bu sonuç, S nin herhangi bir L doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ adet düzlem olduğunu gösterir. $\square$

BÖLÜM 3

(2,0,{0,1})-DÜZLEMSEL UZAYLARIN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzaylar kapsamış oldukları düzlem türlerine göre karakterize edilmiştir.

Yardımcı teorem 3.1: Eğer S sadece afin düzlem ve delinmiş projektif düzlem kapsar ise S bir doğrusu eksik projektif uzaydır.

İspat: : S, düzlemleri afin ve delinmiş projektif düzlem olan bir $(2, 0, \{0, 1\})-$ düzlemsel uzayı olsun. Yardımcı Teorem 2.9 dan, S nin doğru derecesi n ya da $n + 1$ dir. S de bir $(n + 1)-$doğru L olsun. S nin düzlemleri delinmiş projektif düzlem veya afin düzlem olduğundan, L doğrusundan geçen tüm düzlemler delinmiş projektif düzlemdir. Yardımcı Teorem 2.11 den dolayı; L doğrusu üzerinde $n + 1$ adet delinmiş projektif düzlem mevcuttur. O halde, S nin toplam nokta sayısı;

$$v_s = (n + 1)(n^2 - 1) + n + 1 = n^3 + n^2$$

dir.

Şimdi S de bir M $(n)-$doğrusunu gözönüne alalım. M yi üzerinde bulunduran her bir düzlem, ya bir afin düzlem ya da bir delinmiş projektif düzlemdir. M doğrusunu üzerinde bulunduran afin düzlem sayısı a olsun. O halde;

$$v_s = a(n^2 - n) + (n + 1 - a)n^2 + n \qquad (3.1.1)$$

$$n^3 + n^2 = a(n^2 - n) + (n + 1 - a)n^2 + n \qquad (3.1.2)$$

eşitliği mevcuttur. (3.1.2) eşitliğinden $a = 1$ elde edilir. O halde, M doğrusu tam olarak bir afin düzlem ve n adet delinmiş projektif düzlem tarafından kapsanır.

S nin bir α afin düzlemini gözönüne alalım. Yardımcı Teorem 2.5 ve Yardımcı Teorem 2.7 den S de, α düzlemine karşılık gelen bir paralel düzlem sınıfı mevcuttur. Bu düzlem paralel sınıfı $[\alpha]$ ile gösterilsin. S nin toplam nokta sayısı n^3+n^2 olduğundan $[\alpha]$ tam olarak $n + 1$ paralel düzlem içerir.

$(n)-$ dereceli doğrudan geçen sadece bir afin düzlem olduğundan, S nin her bir $(n)-$doğrusu $[\alpha]$ nın tam olarak bir düzlemi tarafından kapsanır. Yani S tam olarak bir adet paralel düzlem sınıfına sahiptir. S nin diğer tüm doğruları, bu paralel afin düzlem sınıfının içermediği $(n+1)$ dereceli doğrulardır.

M' doğrusu $(n+1)-$ doğru olsun. Ayrıca, α düzlemi tarafından kapsanan bir $(n)-$ doğru seçelim. Bu doğruyu K ile gösterelim. Sonuç 2.1 den, M' doğrusu düzlem paralel sınıfındaki her bir afin düzlemi bir noktada keser. Bu M' doğrusu K doğrusu ile bir noktada kesişir. Bundan dolayı $\langle M', K\rangle$ düzlemi mevcuttur ve bu delinmiş bir projektif düzlemdir. Yani $M' \subseteq \langle M', K\rangle$ dir.

Yardımcı Teorem 2.11 den, M' doğrusundan geçen $(n+1)$ tane delinmiş projektif düzlem mevcuttur. Bu düzlemlerin her biri tam olarak $(n)-$doğrulu bir paralel sınıfa sahiptir. Bu delinmiş projektif düzlemler tarafından kapsanan $(n)-$ dereceli doğruların oluşturduğu paralel doğru sınıflarının her birine sonsuzda bir nokta ilave ederek S yi genişletelim. Üstelik S ye bu $n+1$ yeni noktayı üzerinde bulunduran doğruyuda ilave edelim. Böylece S nin toplam nokta sayısı n^3+n^2+n+1 olan, $n+1$ doğru reguler ve üstelik herhangi iki doğrusu kesişen bir $S\,'$ uzayına genişletilir. Üstelik bu $S\,'$ uzayı bir $3-$boyutlu projektir uzaydır. Böylece $S - S\,'$ bir $(n+1)$ dereceli doğrudur. O halde S, bir doğrusu eksik $3-$ boyutlu projektif uzaydır. □

Yardımcı teorem 3.2: Eğer S sadece afin düzlem ve sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem kapsarsa, S sonsuzda bir nokta ilaveli afin uzaydır.

İspat: S düzlemleri afin ve sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem olan bir $(2,0,\{0,1\})-$düzlemsel uzay olsun. Yardımcı Teorem 2.9 dan, S nin doğru derecesi n ya da $n+1$ dir. S de bir $(n+1)-$ doğru L olsun. S nin düzlemleri sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem veya afin düzlem olduğundan, L doğrusundan geçen tüm düzlemler sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemlerdir. O halde, S nin noktalarının toplam sayısı

$$v_S = (n+1)(n^2-n)+n+1 = n^3+1$$

bulunur.

Şimdi S de bir M $(n)-$doğrusunu gözönüne alalım. M doğrusundan geçen her düzlem ya bir afin düzlem ya da sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemdir.

M doğrusundan geçen afin düzlem sayısı a olsun. O halde;

$$v_s = a(n^2 - n) + (n + 1 - a)(n^2 + 1 - n) + n \qquad (3.1.3)$$

$$n^3 + 1 = a(n^2 - n) + (n + 1 - a)(n^2 + 1 - n) + n \qquad (3.1.4)$$

eşitliği mevcuttur. (3.1.4) eşitliğinden $a = n$ elde edilir. Böylece, M doğrusu tam olarak n adet afin düzlem ve bir adet sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem tarafından kapsanır.

S nin toplam nokta sayısı $n^3 + 1$ ve her afin düzlem n^2 noktalı olduğundan S, tam olarak ikişerli ayrık n adet afin düzlem ve bu düzlemlerin dışında bir noktaya sahiptir. Bu nokta q olsun. Yardımcı Teorem 2.8 ve Sonuç 2.1 den q noktasından geçen doğruların sayısı n^2 dir. Kabul edelim ki q noktasından geçen en az bir tane $(n)-$doğru olsun. x, q dan geçen $(n)-$doğrularının sayısı olsun.

$$n^3 + 1 = x(n - 1) + (n^2 - x)n + 1 \qquad (3.1.5)$$

(3.1.5) eşitliğinden;

$$x = 0 \qquad (3.1.6)$$

bulunur. Bundan dolayı varsayımımız yanlış olup, q dan geçen tüm doğrular $n + 1$ doğru derecelidir.

$$v_S = b(q)n + 1 = n^3 + 1$$

dir.

O halde, $(n+1)-$doğrularının kümesi tam olarak q dan geçen doğruların kümesidir. Bu durumda $S - \{q\}$ bir afin uzay ve S sonsuzda bir nokta ilaveli bir afin uzaydır. $\square$

Yardımcı Teorem 3.3: Eğer S sadece projektif düzlem ve delinmiş projektif düzlem kapsarsa, S bir noktası eksik projektif uzaydır.

İspat: S, projektif düzlem ve delinmiş projektif düzlem içeren $(2, 0, \{0, 1\})-$düzlemsel uzayı olsun. Yardımcı Teorem 2.9 dan, S nin doğru derecesi n ya da $n + 1$ dir. Kabul edelim ki M doğrusu , $(n)-$doğru olsun. S sadece projektif düzlem ve delinmiş projektif düzlemler içerdiğinden, M doğrusundan geçen tüm düzlemler delinmiş projektif düzlemdir. O halde S nin noktalarının toplam sayısı

$$v_S = (n+1)(n^2) + n = n^3 + n^2 + n$$

elde edilir.

S de $n+1$ dereceli L doğrusunu seçelim. L doğrusu üzerindeki projektif düzlem sayısı a olsun. Bu durumda;

$$v_S = a(n^2 + n + 1 - n - 1) + (n + 1 - a)(n^2 + n - n - 1) + n + 1 \tag{3.1.7}$$

$$n^3 + n^2 + n = an^2 + (n + 1 - a)(n^2 - 1) + n + 1 \tag{3.1.8}$$

eşitliği mevcuttur. (3.1.8) eşitliğinden $a = n$ elde edilir. O halde L doğrusu, n adet projektif düzlem ve bir adet delinmiş projektif düzlem tarafından kapsanır.

S en az iki projektif düzlem içerdiğinden, Sonuç 2.3 den S nin nokta derecesi n^2+n+1 dir. S nin herhangi bir p noktasını gözönüne alalım. p noktasından geçen $(n)-$ doğrunun sayısı a olsun.

$$v = a(n-1) + (n^2 + n + 1 - a)n + 1 \tag{3.1.9}$$

$$n^3 + n^2 + n = a(n-1) + (n^2 + n + 1 - a)n + 1 \tag{3.1.10}$$

dir. (3.1.10) eşitliğinden $a = 1$ bulunur.

Buradan S nin her noktası tam olarak bir adet $(n)-$ doğru üzerindedir. S nin bir M $(n)-$ doğrusunu seçelim. M doğrusuna paralel olan tüm doğruların oluşturduğu $\pi(M)$ kümesini gözönüne alalım. S nin her noktası tam olarak bir adet $(n)-$doğru üzerinde olduğundan, $\pi(M)$ tek olarak mevcuttur ve üstelik;

$$|\pi(M)|\, n = n^3 + n^2 + n \tag{3.1.11}$$

$$|\pi(M)| = n^2 + n + 1 \tag{3.1.12}$$

bulunur.

S de, $\pi(M)$ e karşılık gelen paralel sınıfa sonsuzda bir nokta ilave edilerek, S n^3+n^2+n+1 noktalı bir S' düzlemsel uzaya genişletilir. $S'-S$ bir nokta olduğundan, S bir noktası eksik projektif $3-$uzaydır. □

Yardımcı teorem 3.4: Eğer S nin düzlemleri afin düzlem, delinmiş projektif düzlem ve sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem ise S sonsuzda bir doğrulu afin uzaydır.

İspat: S düzlemleri afin düzlem, delinmiş projektif düzlem ve sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem olan $(2,0,\{0,1\})-$ düzlemsel uzay olsun. S nin bir α afin düzlemini ve π delinmiş projektif düzlemini gözönüne alalım. Sonuç 2.1 den S de α afin düzleminin temsil ettiği bir düzlem paralel sınıfı vardır. Sonuç 2.2 ve Yardımcı Teorem 2.7 den dolayı, π delinmiş projektif düzlemi $[\alpha]$ düzlem sınıfına ait her bir düzlemle bir ortak doğruya sahiptir. Şimdi $\alpha \cap \pi$ doğrusunu ve $z \in \alpha \cap \pi$ noktasını gözönüne alalım. $\alpha \cap \pi$ doğrusu α afin düzlemi tarafından kapsandığından S nin z noktasından geçen ve α düzlemi tarafından kapsanan $n+1$ adet $(n)-$doğru vardır. Öte yandan, Yardımcı Teorem 2.9 dan dolayı, S nin z noktasından geçen α afin düzlemi tarafından kapsanmayan n^2 adet doğrusu mevcuttur. Buradan, z noktasından geçen toplam n^2+n+1 adet doğru mevcuttur.

S nin her bir delinmiş projektif düzlemi aynı zamanda sonsuzda bir $(n)-$doğrulu afin düzlemdir. O halde, π sonsuzda bir $(n)-$doğrulu afin düzlemdir. π nin sonsuzdaki doğrusunu L ile gösterelim. L nin her bir noktası ile z noktasını birleştiren ve π tarafından kapsanan n adet doğrunun derecesi $n+1$ dir. Buradan hareketle, z noktasından geçen ve π delinmiş projektif düzlemi tarafından kapsanan S nin tam olarak bir adet $(n)-$doğrusu vardır.

S en az bir adet sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem kapsadığından, tekrar Sonuç 2.2 kullanılarak, π delinmiş projektif düzlemi ile bir ortak $(n+1)-$doğruya sahip β sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemi mevcuttur. β sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemini $\pi \cap \beta$ doğrusu z noktasından geçen bir $(n+1)-$ doğru olacak şekilde seçelim. β sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem olduğundan, z noktasından geçen ve β tarafından kapsanan S nin tam olarak bir adet $(n+1)-$doğrusu mevcuttur ki bu doğru $\pi \cap \beta$ dır. Böylece z noktasından geçen tam olarak n adet $(n+1)-$doğru vardır. O halde S nin toplam nokta sayısı;

$$n.n + (n^2 + 1).(n - 1) + 1 = n^3 + n$$

olarak bulunur.

S den π sonsuzda bir $(n)-$doğrulu afin düzleminin sonsuzdaki L doğrusunu atarak elde edilen, $S - \{L\}$ uzayının toplam nokta sayısı n^3 olup her doğrusu n noktalıdır. Bu $S - \{L\}$ nin afin uzay olmasını gerektirir. O halde; S sonsuzda bir afin doğru ilaveli afin uzaydır. □

Yardımcı teorem 3.5: Eğer S nin düzlemleri sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem ve projektif düzlem ise, S sonsuzda bir projektif doğru ilaveli afin uzaydır.

İspat: S düzlemleri sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem ve projektif düzlem olan bir $(2, 0, \{0, 1\})-$ düzlemsel uzay olsun. Yardımcı Teorem 2.9 dan, S nin doğru derecesi n ya da $n+1$ dir. S de bir $(n)-$doğru M olsun. S nin düzlemleri ya projektif düzlem ya da sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlem olduğundan, M doğrusu üzerinde olan tüm düzlemler sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemdir. Bu sonuçtan hareketle, S nin toplam nokta sayısı

$$v = (n + 1)(n^2 + 1 - n) + n = n^3 + n + 1$$

olarak bulunur.

Şimdi S nin bir $(n+1)-$doğrusunu gözönüne alalım. Bu doğruyu L ile gösterelim. L doğrusudan geçen projektif düzlemlerin sayısı a olsun. Bu durumda;

$$n^3 + n + 1 = a(n^2 + n + 1 - n - 1) + (n + 1 - a)(n^2 + 1 - n - 1) + n + 1 \qquad (3.1.13)$$

$$n^3 + n + 1 = an^2 + (n + 1 - a)(n^2 - n) + n + 1 \qquad (3.1.14)$$

eşitliği mevcuttur. (3.1.14) eşitliğinden $a = 1$ elde edilir. O halde S nin her bir $(n + 1)-$doğrusu tam olarak bir π projektif düzlemi tarafından kapsanır.

Şimdi S de π den farklı bir π' projektif düzleminin var olduğunu kabul edelim. Yardımcı Teorem 2.3 den dolayı, π ile π'düzlemleri bir doğru boyunca kesişir. Üstelik, bu $\pi \cap \pi'$ doğrusu $n + 1$ doğru derecesine sahiptir. Bu sonuç S nin her bir $(n + 1)-$doğrusunun tam olarak bir projektif düzlem üzerinde olmasıyla çelişir. Bu çelişki, S nin tam olarak bir projektif düzlem içermesi ile ortadan kalkar. O halde S tam olarak bir adet projektif düzlem kapsar. Öte yandan, π sonsuzda bir L projektif doğru ilaveli afin düzlem olduğundan, π düzleminden L doğrusu çıkartıldığında bir afin düzlem elde edilir. O halde $S' = S - \{L\}$ tüm düzlemleri afin düzlem olan bir uzaydır. Böylece S sonsuzda bir projektif doğru ilaveli afin uzaydır. □

Yardımcı teorem 3.6: Eğer S en az iki projektif düzlem, delinmiş projektif düzlemler ve tam olarak bir adet sonsuzda bir nokta ilaveli bir afin düzlem içerirse, S bir afin doğrusu eksik projektif uzaydır.

İspat: S en az iki projektif düzlem, tam olarak bir adet sonsuzda bir nokta ilaveli bir afin düzlem ve delinmiş projektif düzlem içeren bir $(2, 0, \{0, 1\})-$ düzlemsel uzay olsun. S nin sonsuzda bir nokta ilaveli afin düzlemi σ ve sonsuzdaki noktası p_∞ olsun. p_∞ noktasından geçen ve σ düzlemi tarafından kapsanan L doğrusunu gözönüne alalım. Şimdi S de σ ile L ortak doğrusuna sahip olan bir θ delinmiş projektif düzlemini seçelim. L doğrusu üzerinde $z \neq p_\infty$ olacak şekilde bir z noktasını gözönüne alalım. S en az iki projektif düzlem içerdiğinden, Sonuç 2.4 den dolayı z noktası S de $n^2 + n + 1$ nokta derecesine sahiptir.

σ, sonsuzda bir nokta ilaveli bir afin düzlem olduğundan, z noktasından geçen ve σ düzlemi tarafından kapsanan n adet $(n)-$doğru mevcuttur. Ayrıca L doğrusu, σ düzlemi tarafından kapsanan ve z noktasından geçen yegane $(n+1)-$doğrudur.

θ delinmiş projektif düzlemi aynı zamanda sonsuzda bir $(n)-$doğru ilaveli afin düzlem olduğundan, θ tarafından kapsanan sonsuzda bir afin doğru mevcuttur. Bu afin doğruyu K ile gösterelim. Ayrıca $p_\infty \in L$ ve $L \subseteq \theta \cap \sigma$ olduğundan $p_\infty \in K$ dır. Öte yandan, θ bir $\{0, 1\}-$semiafin düzlem ve $z \notin K$ olup, θ düzlemi z noktasından geçen ve K doğrusu ile ayrık olan tam olarak bir adet $(n)-$doğru kapsar. O halde, θ düzleminde z noktasından geçen ve K doğrusu ile tam olarak bir ortak noktaya sahip olan tüm doğrular $(n+1)-$ doğrudur. Böylece, θ düzlemi z noktasından geçen tam olarak n adet $(n+1)-$doğru ve tam olarak bir adet $(n)-$doğru kapsar. S en az iki projektif düzlem içerdiğinden, Yardımcı Teorem 2.3 den $\theta \cap \sigma$ dan geçen en az bir projektif düzlem vardır. Bundan dolayı; z noktasından geçen tam olarak $n+1$ adet

$(n)-$doğru vardır. O halde S nin noktalarının toplam sayısı :

$$v_S = 1 + (n+1)(n-1) + n^2(n) = n^3 + n^2$$

elde edilir.

S nin her bir noktası tam olarak $n+1$ adet $(n)-$doğru üzerinde olduğundan, S de tam olarak ayrık $n+1$ adet paralel doğru sınıfı mevcuttur. Her bir paralel doğru sınıfı üzerine sonsuzda bir nokta ilave edersek, S ye sonsuzda tam olarak $n+1$ adet nokta ilave etmiş oluruz. Üstelik sonsuzdaki bu $n+1$ noktadan geçen M doğrusunu da S ye ilave edersek, S nin tüm doğruları $(n+1)-$doğru ve tüm düzlemleri projektif düzlem olur. Böylece $S' = S \cup \{M\}$ bir üç boyutlu projektif uzay olur. O halde S sonsuzda bir projektif doğru ilaveli afin düzlemdir. $\square$

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada $(2,0,\{0,1\})-$ düzlemsel uzaylar tanımlanarak temel özelikleri incelenmiştir. Temel özelikler göz önüne alınarak $(2,0,\{0,1\})-$ düzlemsel uzaylar aşağıdaki teorem ile karakterize edilimiştir:

Teorem: S , $(2,0,\{0,1\})-$ düzlemsel uzayı aşağıdakilerden biridir:

(i) Projektif uzay

(ii) Bir noktası eksik projektif uzay

(iii) Bir doğrusu eksik projektif uzay

(iv) Bir afin doğrusu eksik projektif uzay

(v) Afin uzay

(vi) Sonsuzda bir nokta ilave edilmiş afin uzay

(vii) Sonsuzda bir doğru ilave edilmiş afin uzay

$(viii)$ Sonsuzda bir afin doğru ilave edilmiş afin uzaydır.

Bu teorem ile $(2,0,\{0,1\})-$ düzlemsel uzayların her bir düzleminin semi-afin düzlem olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışma gözönüne alınarak; $(2,0,\{0,2\})$ veya $(2,0,\{1,2\})-$ düzlemsel uzaylar tanımlanıp temelleri özelikleri belirlenerek karakterize edilebilir. Ayrıca, $S=(P,L,\Omega)$ bir düzlemsel uzayı, $p\in P$ için p den geçen düzlemler semi-afin düzlem olması koşulunda karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1]Anapa, P., Günaltılı, İ. and Maldeghem, H.V., 2009, Planar and Affine Spaces, Discrete Mathematics, 309, 2897-2904.

[2]Batten, L. M., 1986, Combinatorics of finite geometries, Combridge University Press.

[3]Batten, L. M. and Beutelspacher, A., 1993, The theory of linear spaces, Combinatorics of Points and Lines, Combridge University Press, Cambridge.

[4]Beutelspacher, A., 1984, Embedding finite planar spaces in projective spaces Finite Geometries (Winnipeg, Man., 1984), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Dekker, New York 103 (1985), 9-17.

[5]Beutelspacher, A., De Vito, P. and Lo Re, P. M., 1995, A characterization of linear spaces based on the number of transversals, Geom. Dedicata, 54, 255-261.

[6] de Bruijn, N. G. and Erdös, P., 1948, On a combinatorial problem. Indag. Math. 10, 421-423, and Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 51, 1277-1279.

[7]Buekenhout, F., 1969, Une caractérisation des espaces affines basée sur las notion de droite, Math Z, 111, 367-371.

[8]Dembowski, P., 1968, Finite Geometries, Springer-Verlag, New York.

[9]Durante, N., Lo Re, P.M. and Olanda, D., 2005, On Regular Planar Spaces of Type (k,n), Discrete Mathematics, 301, 66-73.

[10]Fowler, J. C., 1984, A short proof of Totten's classification of restricted linear spaces. Geom. Ded. 15, 413-422.

[11]Kaya, R., Projektif geometri, 1992, Anadolu Üniversitesi Fen-Ede. Fak. Yayınları.

[12]Metsch K., 1989, " Embedding finite planar spaces into 3-dimensional projective spaces. J. Vombin. Theory Ser A. 51, 161-168.

[13]Metsch, K., 1991, Linear Spaces with Few Lines, Springer-Verlang.

[14]Metsch, K., Embedding theorems for locally projective 3-dimensional linear spaces. Discrete Mathematics 174 (1997) 227-245.

[15]Napolitano V., 2009, " Note on Embedding a Class of Finite Planar Spaces into 3-Dimensional Projective Spaces", Results in Mathematics, 55, 487-491.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

[16]Teirlinck, L., 1986, Combinatorial properties of planar spaces and embeddability, J. Combin. Theory Ser. A, 43, 291-302.

[17]Veblen, O. and Young, J.W., 1910, Projective Geometry, Blaisdell, New York.