

Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri için Kübik B-spline Quasi-
İnterpolasyon Metodu

Mehmet Ali Mersin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2014

B-spline Quasi-Interpolation Method for Numerical Solutions of some Partial
Differential Equations

Mehmet Ali Mersin

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

June 2014

Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri için Kübik B-spline Quasi-
İnterpolasyon Metodu

Mehmet Ali Mersin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Dursun İrk

Haziran 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mehmet Ali MERSİN'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri İçin B-spline Quasi-İnterpolasyon Metodu" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Dursun IRK

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Dursun IRK

Üye : Prof. Dr. İdris DAĞ

Üye : Doç. Dr. Bülent SAKA

Üye : Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, quasi spline interpolasyon metodu kullanılarak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar verilmiştir. İlk olarak soliton dalgalar hakkında kısa bilgiler verilmiş sonra lineer olmayan oluşum denklemleri, sonlu farklar metodu ve spline fonksiyonlar tanımlanmıştır. Son olarak, ikinci bölümde sayısal çözümleri araştırılacak olan equal width (EW) denklemi, regularized long wave (RLW) denklemi, modified equal width (MEW) denklemi ve modified regularized long wave (MRLW) denklemi, test problemleri ile birlikte tanıtılmıştır.

İkinci bölümde; EW, RLW, MEW ve MRLW denklemleri, konuma göre türevlere yaklaşım için Quasi spline interpolasyonu ve zaman parçalanması için de Crank-Nicolson metodu kullanılarak çözülmüştür. Solitary dalgalarını ve iki solitary dalgasının çarpışmasını içeren iki test problemi, analitik ve önerilen metod arasında karşılaştırma yapmak için kullanılmıştır.

Son bölümde ise sayısal metot kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgaları, Quasi spline interpolasyon, EW, RLW, MEW, MRLW

SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of some partial differential equations by using quasi spline interpolation.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. Firstly a brief history of soliton waves are given and the nonlinear evolution equation, finite difference method and spline functions are described. Then, equal width (EW) equation, regularized long wave (RLW) equation, modified equal width (MEW) equation and modified regularized long wave (MRLW) equation solved numerically in the next chapters are introduced together with their test problems.

In the next chapter; EW, RLW, MEW and MRLW equations are solved by using the derivative of the quasi-interpolation to approximate the space derivative of the dependent variable and Crank-Nicolson method for time. Two test problems including solitary waves and interaction of two solitary waves are used to compare between results of analytic and proposed methods.

In the last chapter, the results obtained by using the proposed method are discussed.

Keywords: Solitary waves, Quasi spline interpolation EW, RLW, MEW, MRLW

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, çalışmalarına yön veren,engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Dursun IRK' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımdaki önemli kararları alırken her zaman desteğini gördüğüm değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM'a teşekkürü borç bilirim.

Bu tezi her zaman beni destekleyen annem ve babama, sevgili eşim Efruz Özlem MERSİN'e ve biricik oğlum Çınar Dora MERSİN'e ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
0. GİRİŞ.....	1
1. TEMEL KAVRAMLAR	2
1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış.....	2
1.2 Sonlu Farklar Metodu	4
1.3 Spline ve Quasi Spline Fonksiyonlar.....	7
1.3.1 Spline fonksiyonlar	7
1.3.2 Quasi spline fonksiyonlar	9
1.4 Genel Denklem	11
1.4.1 Equal Width (EW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri..	12
1.4.2 Regularized Long Wave (RLW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri.....	15
1.4.3 Modified Equal Width (MEW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri.....	18
1.4.4 Modified Regularized Long Wave (MRLW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri	20
2. SAYISAL YÖNTEMİN UYGULANMASI	24
2.1 Metodun EW Denklemine Uygulanması.....	30
2.1.1 Solitary dalga oluşumu	30
2.1.2 İki solitary dalgasının çarpışması	34
2.2 Metodun RLW Denklemine Uygulanması	37
2.2.1 Solitary dalga oluşumu	37
2.2.2 İki solitary dalgasının çarpışması	42

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

	<u>Sayfa</u>
2.3 Metodun MEW Denklemine Uygulanması	45
2.3.1 Solitary dalga oluşumu	45
2.3.2 İki solitary dalgasının çarpışması	49
2.4 Metodun MRLW Denklemine Uygulanması.....	52
2.4.1 Solitary dalga oluşumu	52
2.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması	56
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	59
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	60

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Bir solitary dalgasının hareketi..... 4
2.1	$t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu 30
2.2	$h = 0,03, \Delta t = 0,05, c = 0,1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 32
2.3	$t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu 32
2.4	$h = 0,03, \Delta t = 0,05, c = 0,1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 34
2.5	İki solitary dalgasının çarpışması $t=0, t=16, t=30$ 35
2.6	Korunum sabiti için mutlak hatalar 36
2.7	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 37
2.8	$h = 0,125, \Delta t = 0,1, c = 0,1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 39
2.9	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 39
2.10	$h = 0,125, \Delta t = 0,1, c = 0,03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 41
2.11	$h = 0,125, \Delta t = 0,1, c = 0,03$ ve $-80 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 42
2.12	İki solitary dalgasının çarpışması $t=0, t=65, t=150$ 43
2.13	Korunum sabiti için mutlak hatalar 45
2.14	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 46
2.15	$h = 0,1, \Delta t = 0,2, A = 0,25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 47
2.16	$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu 48
2.17	$h = 0,1, \Delta t = 0,2, A = 1$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 49
2.18	İki solitary dalgasının çarpışması $t=0, t=35, t=80$ 50
2.19	Korunum sabiti için mutlak hatalar 51

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.20	$t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu 52
2.21	$h = 0,2, \Delta t = 0,025, c = 1$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 10$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 54
2.22	$t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu 54
2.23	$h = 0,2, \Delta t = 0,025, c = 0,25$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 10$ zamanındaki Analitik çözüm – Sayısal çözüm 56
2.24	İki solitary dalgasının çarpışması $t=0, t=35, t=60$ 57
2.25	Korunum sabiti için mutlak hatalar 58

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
2.1	<i>h</i> = 0,03, Δt = 0,05, <i>c</i> = 0,1 ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 31
2.2	<i>h</i> = 0,03, Δt = 0,05, <i>c</i> = 0,03 ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 33
2.3	İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 36
2.4	<i>h</i> = 0,125, Δt = 0,1, <i>c</i> = 0,1 ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 38
2.5	<i>h</i> = 0,125, Δt = 0,1, <i>c</i> = 0,03 ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 40
2.6	<i>h</i> = 0,125, Δt = 0,1, <i>c</i> = 0,03 ve $-80 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 42
2.7	İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 44
2.8	<i>h</i> = 0,1, Δt = 0,2, <i>A</i> = 0,25 ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 47
2.9	<i>h</i> = 0,1, Δt = 0,2, <i>A</i> = 1 ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 49
2.10	İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 51
2.11	<i>h</i> = 0,2, Δt = 0,025, <i>c</i> = 1 ve $0 \leq x \leq 100$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 53
2.12	<i>h</i> = 0,2, Δt = 0,025, <i>c</i> = 0,25 ve $0 \leq x \leq 100$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 55
2.13	İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 57

KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
EW	Equal Width
MEW	Modified Equal Width
MRLW	Modified Regularized Long Wave
RLW	Regularized Long Wave

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Ses, ısı, elektrostatik elektrodinamik akışkanlar mekaniği elastik veya kuantum mekaniği gibi birçok fiziksel durum başlangıç ve sınır şartları ile birlikte lineer olmayan kısmi türevli denklemler ile modellenir. EW, RLW, MEW ve MRLW denklemleride önemli birer denklem olup literatürde analitik ve sayısal çözümleri hakkında birçok çalışma mevcuttur. Başlangıç-sınır şartları ile bu tipi denklemleri içeren problemlerin bir çoğu analitik çözüme sahip olmadığından veya analitik çözümlerini bulmak zor olduğundan yüksek hızlı bilgisayarlarında kullanılmasıyla birlikte bir çok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden en önemlileri, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleridir. Sonlu farklar metodunda bir diferansiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarını yazılır. Sonlu elemanlar yönteminde ise problemin tanım bölgesi sonlu elemanlar adı verilen alt tanım bölgelerine bölünmektedir ve denklemin çözümü her bir elemanda basit polinom fonksiyonlar tarafından yaklaşık olarak aranmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde basit polinomlar yerine B-spline olarak adlandırılan parçalı polinom yaklaşımının yapılması oldukça yaygındır.

Bu çalışmada zamana göre parçalanma için sonlu farklar yönteminin bir uygulaması olan Crank-Nicolson yöntemi, konuma göre parçalanma için ise kübik B-spline fonksiyonlarının yararlandığı kübik B-spline quasi interpolasyon yöntemi kullanılacaktır. Önerilen yöntem sayısal çözümleri araştırılacak olan EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerini içeren genel bir denkleme uygulanacaktır.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavramlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak soliton-solitary dalgaları ve lineer olmayan oluşum denklemleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Sonlu farklar metodu özetlendikten sonra konum parçalanması için önerilen quasi spline interpolasyonu anlatılmıştır. Son olarak ise sayısal çözümleri araştırılacak olan, EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerini içeren genel denklem, başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtılmıştır. İlk bölümdeki temel kavramların bir çoğu (Irk, 2007) doktora çalışması ile (Keskin, 2010; Yılmaz 2012) yüksek lisans çalışmaları temel alınarak hazırlanmıştır. Ayrıntılı bilgi için ilgili çalışmalar ve verdikleri referanslar incelenebilir.

1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olan dalgalar, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar.

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar, ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, 1968).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar (genlikleri hızlarına bağlı olan dalgalar) olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

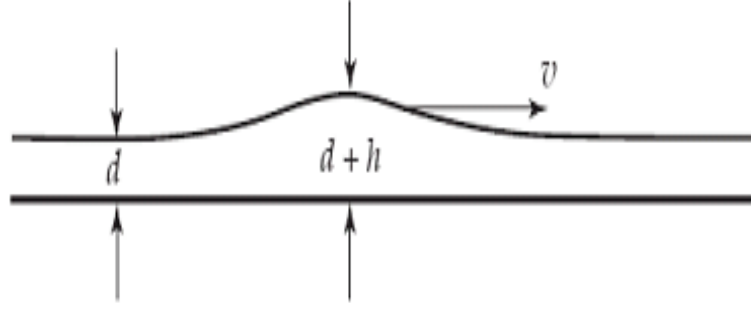
İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Solitary dalgalar soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarak tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarak da adlandırılırlar. Solitary dalgalarını keşfeden Russel, laboratuvarında su tankları oluşturmuş, su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

- (i) Solitary dalgaları $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$ şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam ederler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yaparlar.
- (iv) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir değiş ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bakınız Şekil 1.1).



Şekil 1.1 Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sınırlar arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederek elimizi çekeriz. Dolayısıyla sınırlarımız bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

1.2 Sonlu Farklar Metodu

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri ile

ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar metodu, bu yöntemlerden birisidir. Sonlu farklar metodu bir diferansiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferansiyel denklem bir fark denklemine dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a, b]$ tanım aralığı için, N bir pozitif tamsayı, $h = \frac{b-a}{N}$ ve parçalanma noktaları

$$x_m = a + mh, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda, $u(x)$ fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere, $u(x_m + h)$ ve $u(x_m - h)$ ifadelerinin x_m noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u(x_m + h) = u(x_m) + hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.2)$$

$$u(x_m - h) = u(x_m) - hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (1.3)$$

olarak bulunur. Sırasıyla, (1.2-1.3) eşitliklerinden $u_x(x_m)$ teriminin çekilmesi sonucunda

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) - \dots, \quad (1.4)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_m - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (1.5)$$

yazılabileceğinden u ifadesinin x_m noktasındaki birinci türevi

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} + \mathcal{O}(h) \Rightarrow (u_x)_m \approx \frac{u_{m+1} - u_m}{h}, \quad (1.6)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_m - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \Rightarrow (u_x)_m \approx \frac{u_m - u_{m-1}}{h} \quad (1.7)$$

formunda yaklaşık olarak bulunur. (1.6-1.7) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri

belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve $\mathcal{O}(\cdot)$ ile gösterilir.

Eğer (1.3) eşitliği, (1.2) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} u_x(x_m) &= \frac{u(x_m + h) - u(x_m - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ (u_x)_m &= \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunur.

Crank-Nicolson metodu

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, zamana göre ikinci dereceden ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank and Nicolson, 1947). Crank ve Nicolson metotlarında, diferansiyel denklemin sonlu fark metoduyla sayısal çözümünü araştırmak için

$$\begin{aligned} u_t &\approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\ uu_x &= \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. Burada Δt zaman artımıdır. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir. Dolayısıyla zaman ve konum değişkenleri içeren bir kısmi diferansiyel denklemin veya sistemin sayısal çözümü araştırılırken Crank-Nicolson yöntemi tercih edildiğinde zamana göre bir parçalanma yapılabilmektedir.

1.3 Spline ve Quasi Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonlar yapısal özellikleri ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması nedeniyle interpolasyon, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, eğri ve yüzey uydurma gibi birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

1.3.1 Spline fonksiyonlar

Spline fonksiyon ismi ilk defa 1946 da Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır (Schoenberg, 1946). Spline fonksiyonlar için teorik ve pratik uygulamalardaki gelişme 1960' lı yılların başında olmuştur. Bu tarihten sonra spline fonksiyonlar özellikle bir fonksiyona yaklaşım yapmak için yoğun olarak kullanılmaya başlamıştır. Bununla birlikte yaklaşım yapılan fonksiyonun özelliklerinden dolayı interpolasyon formüllerinin $[a, b]$ aralığının tamamına uygulanması her zaman istenilen sonucu vermeyebilir. Öyle ki yüksek dereceden polinomlar kullanılarak yapılan interpolasyonlardaki işlem hatalarının büyümesi sonucunda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Bazı durumlarda kullanılan noktaların sayısını arttırmak çözümün iraksamasına sebep olabilir. Ayrıca istenilen fonksiyon $[a, b]$ aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçları vermeyebilir. Bu gibi nedenlerden dolayı yüksek dereceden olmayan birinci, ikinci veya üçüncü dereceden polinom fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygun olur. O halde spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda birbirini örtmeyen alt aralıklarda daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır.

Reel sayıların monoton artan bir dizisi x_0, x_1, \dots, x_N 'e bağlı k . dereceden $S(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

(a.) $S(x)$, her $[x_m, x_{m+1}]$ ($m = 0, 1, \dots, N - 1$) aralığında k . ya da daha küçük dereceden bir polinomdur (Burada $x_0 = -\infty$ ve $x_{N+1} = \infty$ olabilir).

(b.) $S(x)$ ve kendisinin $1, 2, \dots, k-1$. basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve x_m ($m = 1, 2, \dots, N-1$) bölünme noktalarında süreklidir.

$k = 0$ için (b.) koşulu geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır. $k = 1$ için $S(x)$ polinomu kırık çizgilerden oluşur.

$S(x)$; $[x_{m-1}, x_m]$ ve $[x_m, x_{m+1}]$, $m = 1, 2, \dots, N-1$ aralıklarından her biri içinde derecesi k ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarakta verilebilir. $k > 0$ için k . dereceden bir $S(x)$ spline fonksiyonunun k . türevi bir adım fonksiyonudur. Farklı bir tanım olarak k . dereceden bir spline fonksiyonu bir adım fonksiyonunun k . basamaktan belirsiz integralidir.

Spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar yardımı ile sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir.
- Nümerik analiz ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılmasıyla köşegen baskın bant matrislere ulaşıldığından tersi alınabilen matrisler ortaya çıkar. Dolayısıyla spline fonksiyonlar kullanıldığında elde edilecek denklem sistemleri rahatlıkla çözülür.
- Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon; k . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilir.
- Düşük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

1.3.2 Quasi spline fonksiyonlar

$I = [a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması $h = \frac{b-a}{N}$ konum aralık artımı olmak üzere

$$X_N = x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N$$

formunda tanımlansın. Bu bölge üzerinde tanımlı olup derecesi d ve C^{d-1} özelliğine sahip olan spline fonksiyonları $S_d(X_N)$ ile gösterilsin. $S_d(X_N)$ spline fonksiyonların tabanı ise $J = \{1, 2, \dots, N + d\}$ olmak üzere Boor-Cox formülünden hesaplanabilen $\{B_j, j \in J\}$ B-spline fonksiyonları olsun (Farin, 2001).

(Farin, 2001) referansındaki Boor-Cox formülü kullanılarak $j \in J$ için B_j kübik B-spline fonksiyonları

$$B_j(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_j)^3 & , x \in [x_j, x_{j+1}) \\ (x - x_j)^2(x_{j+2} - x) + \\ (x - x_j)(x_{j+3} - x)(x - x_{j+1}) + & , x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ (x_{j+4} - x)(x - x_{j+1})^2 \\ (x - x_j)(x_{j+3} - x)^2 + \\ (x - x_{j+1})(x_{j+3} - x)(x_{j+4} - x) + & , x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ (x_{j+4} - x)^2(x - x_{j+2}) \\ (x_{j+4} - x)^3 & , x \in [x_j + 3, x_{j+4}) \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.9)$$

formülünden hesaplanır.

Quasi spline interpolasyonu

$$Q_d f = \sum_{j \in I} \mu_j B_j \quad (1.10)$$

formunda tanımlanmaktadır (Sablonnière, 2000; Sablonnière, 2005).

B_j yerine kübik B-spline fonksiyonlar kullanıldığında

$$Q_3 f = \sum_{j=1}^{N+3} \mu_j(f) B_j \quad (1.11)$$

kübik B-spline quasi interpolasyon için katsayılar

$$\begin{aligned}
\mu_1(f) &= f_0 \\
\mu_2(f) &= \frac{1}{18} (7f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) \\
\mu_j(f) &= \frac{1}{6} (-f_{j-3} + 8f_{j-2} - f_{j-1}), \quad j = 3, \dots, N+1 \\
\mu_{N+2}(f) &= \frac{1}{18} (2f_{N-3} + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) \\
\mu_{N+3}(f) &= f_N
\end{aligned} \tag{1.12}$$

olacaktır.

Quasi B-spline interpolasyonunun avantajı, türevler için yapılan yaklaşımın sonlu farklar yönteminde olduğu gibi bilinmeyen fonksiyonun bölünme noktalarındaki değerlerine bağlı olacak şekilde yapılmasıdır. Bir u fonksiyonunun, birinci ve ikinci türevleri için yaklaşımlar

$$Q_3u = \sum_{j=1}^{N+3} \mu_j(u)B_j \tag{1.13}$$

$$(Q_3u)' = \sum_{j=1}^{N+3} \mu_j(u)B_j' \tag{1.14}$$

$$(Q_3u)'' = \sum_{j=1}^{N+3} \mu_j(u)B_j'' \tag{1.15}$$

şeklinde olmaktadır. Bu yaklaşımlar kullanıldığında konuma göre birinci türev için $j = 2, \dots, N-2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Qu'(x_0) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{6}u_0 + 3u_1 - \frac{3}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 \right), \\
Qu'(x_1) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{3}u_0 - \frac{1}{2}u_1 + u_2 - \frac{1}{6}u_3 \right), \\
Qu'(x_j) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{12}u_{j-2} - \frac{2}{3}u_{j-1} + \frac{2}{3}u_{j+1} - \frac{1}{12}u_{j+2} \right), \\
Qu'(x_{N-1}) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{6}u_{N-3} - u_{N-2} - \frac{1}{2}u_{N-1} + \frac{1}{3}u_N \right), \\
Qu'(x_N) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{3}u_{N-3} + \frac{3}{2}u_{N-2} - 3u_{N-1} + \frac{11}{6}u_N \right)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

eşitlikleri ve konuma göre ikinci türev için ise $j = 2, \dots, N - 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Qu''(x_0) &= \frac{1}{h^2}(2u_0 - 5u_1 + 4u_2 - u_3), \\
Qu''(x_1) &= \frac{1}{h^2}(u_0 - 2u_1 + u_2), \\
Qu''(x_j) &= \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{6}u_{j-2} + \frac{5}{3}u_{j-1} - 3u_j + \frac{5}{3}u_{j+1} - \frac{1}{6}u_{j+2} \right), \quad (1.17) \\
Qu''(x_{N-1}) &= \frac{1}{h^2}(u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N), \\
Qu''(x_N) &= \frac{1}{h^2}(-u_{N-3} + 4u_{N-2} - 5u_{N-1} + 2u_N)
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılabacaktır (Zhu and Kang, 2010).

Bu konu üzerindeki ilk çalışmalar (De Boor and Fix, 1973) ve (Frederickson, 1971) tarafından yapılmıştır. Fransız matematikçi Paul Sablonnière quasi interpolasyon formüllerinin elde edilmesi konusunda temel çalışmalar yapmıştır (Sablonnière, 2000; Sablonnière, 2005). Zhu ve Wang kübik B-Spline Qİ kullanarak Burgers denkleminin sayısal şemasını sunmuştur (Zhu and Wang, 2009). Jiang ve Wang ise kübik B-Spline Qİ kullanarak Burgers denkleminin farklı bir çözümünü araştırmışlardır (Jiang and Wang, 2010). Burger-Fisher denkleminin sayısal çözümü kübik B-Spline Qİ metodu ile Zhu ve Kang tarafından araştırılmıştır (Zhu and Kang, 2010).

1.4 Genel Denklem

Bu çalışmada

$$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0 \quad (1.18)$$

formundaki lineer olmayan kısmi türevli denklemin sayısal çözümü araştırılacaktır. Denklemden α_1 , α_2 ve α_3 pozitif reel sabitleri, x ve t alt indisleri sırasıyla konum ve zamana göre türevi, p ise değeri 1 veya 2 olan bir pozitif tamsayıyı göstermektedir.

Solitary dalga çözümü için sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ şeklindedir. Bununla birlikte önerilen metodun uygulanabilmesi için konum aralığı $[a, b]$ seçilerek

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.19)$$

sınır şartları ve $f(x)$ daha sonra belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.20)$$

başlangıç şartı kullanılacaktır. Ayrıca sayısal çözümün analitik çözümle olan uyumunun kontrolü için ise

$$L_\infty = \max_m |u_m - u(x_m, t)| \quad (1.21)$$

hata normu kullanılacaktır. Burada u_m , x_m noktasındaki yaklaşık çözümü, $u(x_m, t)$ ise tam çözümü göstermektedir.

1.4.1 Equal Width (EW) denklemi, başlangıç ve sınır şartları ve test problemleri

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $p = 1$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.22)$$

formundaki EW denklemi elde edilir. Denkleminde μ reel sabiti, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir.

EW denklemi sıç su dalgaları ve ion akustik plazmalar gibi bir çok fiziksel olayı modellemektedir (Peregrine, 1966; Benjamin et.al., 1972). Denklem ilk kez Morrison tarafından lineer olmayan bir ortamda tek boyutlu bir dalganın yayılmasını modellemek için daha bilindik bir denklem olan RLW denkleminin yerine önerilmiştir (Morrison, et.al., 1981). EW denklemi, sınırlı sayıda başlangıç ve sınır şartları için analitik olarak çözülebildiğinden denklemin çözümü için birçok sayısal yöntem önerilmiştir. (Gardner and Gardner, 1992) adlı çalışmada kübik B-spline Galerkin metodu kullanılarak EW denkleminin sayısal çözümü solitary dalgasının yayılması ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemleri kullanılarak araştırılmıştır. (Zaki, 2000a) adlı çalışmada ise EW denkleminin sayısal çözümü en küçük kareler sonlu elemanlar metodu kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca (Zaki, 2001) çalışmasında Petrov Galerkin sonlu elemanlar metodu ile birlikte kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak EW denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışılmıştır. Kübik spline

kolokeyşin (Irk et.al., 2003) ve kübik B-Spline kolokeyşin (Saka et.al., 2003) metotları ile EW denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. EW denkleminin sayısal çözümü kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak (Raslan, 2004) adlı çalışmada ve kuartik B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar metodu kullanılarak (Raslan, 2005a) adlı çalışmada çalışılmıştır. (Esen, 2005) adlı çalışmada ise kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak lumped Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile EW denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Açık sonlu farklar metodu ile EW ve RLW denkleminin sayısal çözümü (Ramos, 2006) adlı çalışmada incelenmiştir. (Saka, 2006) adlı çalışmada ise denklemin sayısal çözümü için kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu önerilmiştir. EW denkleminin kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümü (Dağ et.al., 2007) adlı çalışmada çalışılmıştır. Kuartik B-Spline fonksiyonların kullanıldığı Galerkin metodu, Cosine Expansion tabanlı diferansiyel kuadrature metodu ve radial tabanlı meshless metotlarını içeren üç farklı yöntem ile EW denkleminin sayısal çözümü ise (Saka et.al., 2008a) adlı çalışmada incelenmiştir. Petrov–Galerkin metodu ile EW denkleminin çözümü (Roshan, 2011) adlı çalışmada çalışılmıştır. (Irk, 2012a) adlı çalışmada ise EW denkleminin kuadratik ve kübik B-Spline Galerkin çözümleri verilmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için makaleler ve verdikleri referanslar incelenebilir.

Solitary dalga oluşumu

EW denkleminin solitary dalga çözümü $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - ct]), a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.23)$$

formundadır (Morrison, et.al., 1981). (1.23) eşitliği, başlangıç anında tepe noktası x_0 noktasına karşılık gelen $3c$ genliğine ve c dalga hızına sahip bir solitary dalgasının $[a, b]$ konum aralığında soldan sağa doğru hareketini modellemektedir.

(1.23) eşitliğinde $t = 0$ alınırsa

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.24)$$

başlangıç şartı elde edilir.

Solitary dalga oluşumu için korunum sabitleri

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\
 C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\
 C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^3 dx
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

eşitlikleri ile verilir ve sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelmektedir (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin programın çalışma süresi boyunca sabit kalmaları beklenir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri, $[a, b]$ tanım aralığında yamuklar kuralı ile hesaplanacaktır. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{6c}{k}, \\
 C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\
 C_3 &= \frac{144c^3}{5k}
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

olarak bulunur.

İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(k[x - x_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(k[x - x_2]) \tag{1.27}$$

formunda modellenir (Morrison, et.al., 1981). (1.27) eşitliğinde c_1 ve c_2 sırasıyla dalgaların hızına karşılık gelmektedir. $c_1 > c_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında konum aralığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda, diğeri ise sağda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir.

Bu problemde korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left(\frac{c_1 + c_2}{k} \right), \\ C_2 &= \left(\frac{12}{k} + \frac{48k\mu}{5} \right) (c_1^2 + c_2^2), \\ C_3 &= \frac{144}{5k} (c_1^3 + c_2^3) \end{aligned} \quad (1.28)$$

olarak bulunur.

1.4.2 Regularized Long Wave (RLW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $p = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.29)$$

formundaki lineer olmayan RLW denklemi elde edilir. Denkleminde ε ve μ reel sabitler, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir.

(Peregrine, 1966) referansında ardışık dalgaların gelişimini modellemek için RLW denklemini önermiş ve denklemin sonlu farklar metodu ile ilk sayısal çözümlerini elde etmiştir. Benjamin ve arkadaşları (1972), RLW denkleminin dalga çözümlerini, daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin dalga çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir. (Eilbeck and McGuire, 1975) adlı çalışmada birinci ve ikinci mertebeden iki adımlı ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu farklar metotları kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Üç adımlı sonlu farklar yöntemi üzerinde daha ayrıntılı bir çalışma Eilbeck ve McGuire (1977), tarafından yapılmıştır. Jain ve Iskandar ise RLW denkleminin sayısal çözümünü farklı formdaki sonlu farklar metotlarını kullanarak araştırmışlardır (Jain and Iskandar, 1979). Kübik spline şekil fonksiyonları kullanılarak Galerkin metodu ile denklemin sayısal çözümü (Alexander and Morris, 1979) adlı makalede çalışılmıştır. Kübik B-spline Galerkin metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümü (Gardner and Gardner, 1990; Gardner and Dağ, 1995) adlı makalelerde araştırılmıştır. (Gardner et.al., 1995) adlı çalışmada kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak

Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümü yapılmıştır. RLW denkleminin sayısal çözümü, en küçük kareler sonlu elemanlar metodunun kullanıldığı (Gardner et.al., 1996) adlı çalışmada araştırılmıştır. (Gardner et.al., 1997) isimli çalışmada kuintik B-spline kullanılarak Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Dağ (2000), kuadratik B-spline kullanarak en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır. Kübik B-spline kullanılarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü ise Dağ ve Özer (2001) elde etmişlerdir. Doğan (2001,2002) kuadratik B-spline ve lineer şekil fonksiyonlarını kullanarak Petrov Galerkin ve Galerkin metotlarıyla RLW denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmıştır. Kübik B-Spline kolokeyşin ve kuintik B-spline Galerkin metotları ile RLW denkleminin sayısal çözümü ise (Dağ et.al., 2004, 2006) adlı çalışmalarda araştırılmıştır. Kübik spline kolokeyşin sonlu elemanlar yöntemi ile denklemin sayısal çözümü (Irk et.al.,2005) adlı makalede çalışılmıştır. Kübik B-Spline sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü Raslan (2005b) tarafından yapılmıştır. Septik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü ise kolokeyşin metodu ile araştırılmıştır (Soliman and Hussien, 2005). Kutluay ve Esen (2006), yaptıkları çalışmada, RLW denkleminin sayısal çözümü için bir sonlu farklar yöntemini ve aynı denklemin çözümü için kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak lumped Galerkin sonlu elemanlar metodunu önermişlerdir (Esen and Kutluay, 2006). Saka ve Dağ (2008), RLW denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline şekil fonksiyonları ile birlikte Galerkin metodunu kullanmışlardır. Saka ve arkadaşları 2008 yılında Kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanarak denklemin sayısal metodunu araştırmışlardır (Saka et.al., 2008b). RLW denkleminin sayısal çözümü kosinüs tabanlı diferansiyel quadrature yöntemiyle (Dağ et al., 2010) adlı çalışmada verilmiştir. (Saka et al., 2011) çalışmasında RLW denkleminin sayısal çözümü B-spline kolokeyşin algoritması kullanılarak araştırılmıştır. Irk (2012), RLW denkleminin sayısal çözümü için çok adımlı kuintik B-spline kolokeyşin yöntemini önermiştir. Daha ayrıntılı bilgi için makaleler ve verdikleri referanslar incelenebilir.

Solitary dalga oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin analitik çözümü $k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t]) \quad (1.30)$$

formunda yazılır (Peregrine, 1966). (1.30) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.31)$$

başlangıç şartı elde edilir.

RLW denkleminin için korunum sabitleri sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^3 + 3u^2) dx \end{aligned} \quad (1.32)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c}{k}, \\ C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\ C_3 &= \frac{36c^2}{5k} (4c + 5) \end{aligned} \quad (1.33)$$

olarak bulunur.

İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genlikli iki solitary

dalgasının çarpışma problemi $k_i = \sqrt{\frac{\varepsilon c_i}{4\mu(1 + \varepsilon c_i)}}$, $i = 1, 2$ olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(k_1 [x - x_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(k_2 [x - x_2]) \quad (1.34)$$

formunda modellenir. (1.34) eşitliğinde $c_1 > c_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Dolayısıyla parametreler uygun seçildiğinde genliği büyük olan dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra genliği ve hızı düşük olan öndeki dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Bu test problemi için korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right), \\ C_2 &= 12 \left(\frac{c_1^2}{k_1} + \frac{c_2^2}{k_2} \right) + \frac{48}{5} \mu (k_1 c_1^2 + k_2 c_2^2), \\ C_3 &= \frac{36c_1^2}{5k_1} (4c_1 + 5) + \frac{36c_2^2}{5k_2} (4c_2 + 5) \end{aligned} \quad (1.35)$$

olarak bulunur.

1.4.3 Modified Equal Width (MEW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alınırsa

$$u_t + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.36)$$

formundaki MEW denklemi elde edilir. Denkleminde ε ve μ reel sabit, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. MEW denkleminde EW denklemi gibi sıg su dalgaları ve ion akustik plazmalar gibi fiziksel olayları modellemektedir.

Zaki (2000b), kuintik B-spline sonlu elemanları kullanarak Petrov Galerkin metodu ile MEW denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır. 2005 yılında Evans ve Raslan denklemin sayısal çözümü için kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak kolokeyşin metodu ile denklemin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır (Evans and Raslan, 2005). Aynı denklemin sayısal çözümü ise kuintik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak Saka tarafından araştırılmıştır (Saka, 2007). Esen ve Kutluay

(2008) ise MEW denkleminin sayısal çözümü için sonlu farklar metodunu önermiştir. (Mohyud-Din et al., 2010) adlı çalışmada MEW denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. MEW denkleminin sayısal çözümü (Geyikli and Karakoç, 2011) adlı çalışmada septik B-Spline kolokeyşin metodu kullanılarak çalışılmıştır. (Karakoç and Geyikli, 2012) adlı çalışmada ise MEW denkleminin sayısal çözümü kübik B-spline lumped galerkin sonlu elemanlar yöntemiyle irdelenmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için makaleler ve verdikleri referanslar incelenebilir.

Solitary Dalga Oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli, $v = c$ dalga hızlı MEW denkleminin analitik çözümü $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - ct]), \quad (1.37)$$

olarak verilir (Gardner and Gardner, 1992). (1.37) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0]) \quad (1.38)$$

başlangıç şartı elde edilir.

(Olver, 1979) adlı çalışmada EW ve RLW denklemleri için verilen kütle, enerji ve momentuma karşılık gelen korunum sabitleri MEW denklemleri için ise

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^4 dx \end{aligned} \quad (1.39)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{A\pi}{k}, \\
C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3}, \\
C_3 &= \frac{4A^4}{3k}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

olarak bulunur.

İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ olmak üzere $A_1 = \sqrt{\frac{6c_1}{\varepsilon}}$ ve $A_2 = \sqrt{\frac{6c_2}{\varepsilon}}$ genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k[x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k[x - x_2]) \tag{1.41}$$

formunda modellenir. (1.41) eşitliğinde $A_1 > A_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır ve genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra önündeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişerek bir çarpışma gerçekleşecektir. Korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi}{k} (A_1 + A_2), \\
C_2 &= \frac{2}{k} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{2\mu k}{3} (A_1^2 + A_2^2), \\
C_3 &= \frac{4}{3k} (A_1^4 + A_2^4)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

olarak bulunur.

1.4.4 Modified Regularized Long Wave (MRLW) denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alınırsa

$$u_t + u_x + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0 \tag{1.43}$$

formundaki MRLW denklemi elde edilir. Denklemde ε ve μ reel sabit, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir.

MRLW denkleminin sayısal çözümü sonlu farklar yöntemi ile Khalifa ve meslektaşları tarafından (Khalifa et.al., 2007) adlı çalışmada araştırılmıştır. Denklemün solitary dalga çözümü (Raslan and Hassan,2009) adlı makalede kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline kullanılarak kolokeyşin yöntemiyle çalışılmıştır. (Raslan, 2009) adlı çalışmada ise MRLW denkleminin sayısal çözümü kuadratik B-spline kolokeyşin yöntemiyle araştırılmıştır. Raslan ve Danaf (2009) ise MRLW denkleminin çözümü için kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanmıştır. Denklemün sayısal çözümü (Haq et.al., 2010) adlı çalışmada kuartik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak incelenmiştir. (Irk and Keskin, 2012) adlı çalışmada MRLW denklemin sayısal çözümü için çok adımlı sonlu farklar metodu önerilmiştir. Dağ ve arkadaşları (2013), MRLW denkleminin genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemiyle sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Daha ayrıntılı bilgi için makaleler ve verdikleri referanslar incelenebilir.

Solitary Dalga Oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli, $v = c + 1$ dalga hızlı MRLW denkleminin analitik çözümü $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - (c + 1)t]), \quad (1.44)$$

olarak verilir. (1.44) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0]) \quad (1.45)$$

başlangıç şartı elde edilir.

MRLW denklemi için korunum sabitleri EW, RLW ve MEW denklemlerinin korunum sabitlerine benzer olarak

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\
C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\
C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^4 - \frac{6}{\varepsilon} \mu(u_x)^2 \right) dx
\end{aligned} \tag{1.46}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi A}{k}, \\
C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \\
C_3 &= \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2)
\end{aligned} \tag{1.47}$$

olarak bulunur.

İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $k_i = \frac{c_i}{\sqrt{\mu}(c_i + 1)}$, $A_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $i = 1, 2$ olmak üzere A_1 ve A_2 genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k_1 [x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k_2 [x - x_2]) \tag{1.48}$$

formunda modellenir. (1.48) eşitliğinde $A_1 > A_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga olan daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_2), \\
C_2 &= \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{3k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \\
C_3 &= \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 2

SAYISAL YÖNTEMİN UYGULANMASI

Bu bölümde, (1.18) kısmi diferansiyel denkleminin sayısal çözümü elde edilmiştir. Çözüm için zaman parçalanmasında Crank-Nicolson, konum parçalanmasında quasi kübik B-spline eşitlikleri kullanılmış ve çözümlerin doğruluğu iki test problemi için hata normları, korunum sabitleri hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

İlk bölümde verilen (1.18)

$$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi alımp Crank Nicolson zaman parçalanması uygulanırsa

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} + \alpha_2 \frac{(u^p u_x)^{n+1} + (u^p u_x)^n}{2} - \alpha_3 \frac{u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n}{\Delta t} = 0 \quad (2.1)$$

elde edilir. Lineerleştirme için

$$(u^p u_x)^{n+1} \approx (u^n)^p u_x^{n+1} + p u_x^n (u^n)^{p-1} u^{n+1} - p (u^n)^p u_x^n \quad (2.2)$$

eşitliği (2.1) denkleminde uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left(1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} u_x^n (u^n)^{p-1}\right) u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (u^n)^p) u_x^{n+1} - \alpha_3 u_{xx}^{n+1} \\ = \\ u^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} u_x^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (u^n)^p u_x^n - \alpha_3 u_{xx}^n \end{aligned} \quad (2.3)$$

bulunur. Denkleminde Δt zaman artımı için kullanılmıştır. Konum artımı için ise h kullanılacaktır. Ayrıca yapılacak işlemlerde

$u_m^n : (x_m, t_n)$ noktasındaki tam çözüme

$U_m^n : (x_m, t_n)$ noktasındaki yaklaşık çözüme

karşılık gelecektir. (2.3) denkleminde x_m bölünme noktalarında konuma göre birinci türev için ise $j = 2, \dots, N - 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Qu'(x_0) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{6}U_0 + 3U_1 - \frac{3}{2}U_2 + \frac{1}{3}U_3 \right), \\
Qu'(x_1) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{3}U_0 - \frac{1}{2}U_1 + U_2 - \frac{1}{6}U_3 \right), \\
Qu'(x_j) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{12}U_{j-2} - \frac{2}{3}U_{j-1} + \frac{2}{3}U_{j+1} - \frac{1}{12}U_{j+2} \right), \\
Qu'(x_{N-1}) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{6}U_{N-3} - U_{N-2} - \frac{1}{2}U_{N-1} + \frac{1}{3}U_N \right), \\
Qu'(x_N) &= \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{3}U_{N-3} + \frac{3}{2}U_{N-2} - 3U_{N-1} + \frac{11}{6}U_N \right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

eşitlikleri ve konuma göre ikinci türev için ise $j = 2, \dots, N - 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Qu''(x_0) &= \frac{1}{h^2} (2U_0 - 5U_1 + 4U_2 - U_3), \\
Qu''(x_1) &= \frac{1}{h^2} (U_0 - 2U_1 + U_2), \\
Qu''(x_j) &= \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{6}U_{j-2} + \frac{5}{3}U_{j-1} - 3U_j + \frac{5}{3}U_{j+1} - \frac{1}{6}U_{j+2} \right), \\
Qu''(x_{N-1}) &= \frac{1}{h^2} (U_{N-2} - 2U_{N-1} + U_N), \\
Qu''(x_N) &= \frac{1}{h^2} (-U_{N-3} + 4U_{N-2} - 5U_{N-1} + 2U_N)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

quasi spline eşitlikleri uygulanırsa denklem sistemi $m = 2, \dots, N - 2$ olmak üzere aşağıda verildiği gibi açık olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
&U_0^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_0^n (U_0^n)^{p-1} - \frac{11}{6h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_0^n)^p) - \alpha_3 \frac{2}{h^2} \right] + \\
&U_1^{n+1} \left[\frac{3}{h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_0^n)^p) + \alpha_3 \frac{5}{h^2} \right] + \\
&U_2^{n+1} \left[-\frac{3}{2h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_0^n)^p) - \alpha_3 \frac{4}{h^2} \right] + \\
&U_3^{n+1} \left[\frac{1}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_0^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] = \\
&U_0^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_0^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_0^n)^p (U_x)_0^n - \alpha_3 (U_{xx})_0^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_0^{n+1} \left[-\frac{1}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) - \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] + \\
& U_1^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_1^n (U_1^n)^{p-1} - \frac{1}{2h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) + \alpha_3 \frac{2}{h^2} \right] + \\
& U_2^{n+1} \left[\frac{1}{h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) - \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] + \\
& U_3^{n+1} \left[-\frac{1}{6h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) \right] = \\
& U_1^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_1^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_1^n)^p (U_x)_1^n - \alpha_3 (U_{xx})_1^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_{m-2}^{n+1} \left[\frac{1}{12h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{6h^2} \right] + \\
& U_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_m^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_m^n (U_m^n)^{p-1} + \alpha_3 \frac{3}{h^2} \right] + \\
& U_{m+1}^{n+1} \left[\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_{m+2}^{n+1} \left[-\frac{1}{12h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{6h^2} \right] = \\
& U_m^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_m^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_m^n)^p (U_x)_m^n - \alpha_3 (U_{xx})_m^n
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
& U_{N-3}^{n+1} \left[\frac{1}{6h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) \right] + \\
& U_{N-2}^{n+1} \left[-\frac{1}{h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) - \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] + \\
& U_{N-1}^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_{N-1}^n (U_{N-1}^n)^{p-1} - \frac{1}{2h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) + \alpha_3 \frac{2}{h^2} \right] + \\
& U_N^{n+1} \left[\frac{1}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) - \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] = \\
& U_{N-1}^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_{N-1}^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_{N-1}^n)^p (U_x)_{N-1}^n - \alpha_3 (U_{xx})_{N-1}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_{N-3}^{n+1} \left[-\frac{1}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_N^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] + \\
& U_{N-2}^{n+1} \left[\frac{3}{2h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_N^n)^p) - \alpha_3 \frac{4}{h^2} \right] + \\
& U_{N-1}^{n+1} \left[-\frac{3}{h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_N^n)^p) + \alpha_3 \frac{5}{h^2} \right] + \\
& U_N^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_N^n (U_N^n)^{p-1} + \frac{11}{6h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_N^n)^p) - \alpha_3 \frac{2}{h^2} \right] = \\
& U_N^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_N^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_N^n)^p (U_x)_N^n - \alpha_3 (U_{xx})_N^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen (2.6) denklem sistemi $N + 1$ bilinmeyen $N + 1$ denklemden oluşan bir sistemdir. Denklem sistemine sınır şartlarını uygulayabilmek için ilk ve son denklem sistemden çıkarılır. Bu durumda denklem sistemi $N + 1$ bilinmeyen $N - 1$ denklemden oluşan bir sisteme dönüşecektir.

Sınır Şartlarının Uygulanması

(2.6) sistemini çözümler kılma için

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

sınır şartı kullanılırsa

$$U_0^{n+1} = U_N^{n+1} = 0$$

eşitliğine ulaşılır. İlk ve son denklem silinip sınır şartlarında ilave edildiğinde (2.6)

ise $m = 3, \dots, N - 3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& U_1^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_1^n (U_1^n)^{p-1} - \frac{1}{2h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) + \alpha_3 \frac{2}{h^2} \right] + \\
& U_2^{n+1} \left[\frac{1}{h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) - \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] + \\
& U_3^{n+1} \left[-\frac{1}{6h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_1^n)^p) \right] = \\
& U_1^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_1^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_1^n)^p (U_x)_1^n - \alpha_3 (U_{xx})_1^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_1^{n+1} \left[-\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_2^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_2^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_2^n (U_2^n)^{p-1} + \alpha_3 \frac{3}{h^2} \right] + \\
& U_3^{n+1} \left[\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_2^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_4^{n+1} \left[-\frac{1}{12h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_2^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{6h^2} \right] = \\
& U_2^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_2^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_2^n)^p (U_x)_2^n - \alpha_3 (U_{xx})_2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_{m-2}^{n+1} \left[\frac{1}{12h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{6h^2} \right] + \\
& U_{m-1}^{n+1} \left[-\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_m^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_m^n (U_m^n)^{p-1} + \alpha_3 \frac{3}{h^2} \right] + \\
& U_{m+1}^{n+1} \left[\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_{m+2}^{n+1} \left[-\frac{1}{12h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_m^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{6h^2} \right] = \\
& U_m^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_m^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_m^n)^p (U_x)_m^n - \alpha_3 (U_{xx})_m^n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& U_{N-4}^{n+1} \left[\frac{1}{12h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-2}^n)^p) + \alpha_3 \frac{1}{6h^2} \right] + \\
& U_{N-3}^{n+1} \left[-\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-2}^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] + \\
& U_{N-2}^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_{N-2}^n (U_{N-2}^n)^{p-1} + \alpha_3 \frac{3}{h^2} \right] + \\
& U_{N-1}^{n+1} \left[\frac{2}{3h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-2}^n)^p) - \alpha_3 \frac{5}{3h^2} \right] = \\
& U_{N-2}^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_{N-2}^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_{N-2}^n)^p (U_x)_{N-2}^n - \alpha_3 (U_{xx})_{N-2}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_{N-3}^{n+1} \left[\frac{1}{6h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) \right] + \\
& U_{N-2}^{n+1} \left[-\frac{1}{h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) - \alpha_3 \frac{1}{h^2} \right] + \\
& U_{N-1}^{n+1} \left[1 + p\alpha_2 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_{N-1}^n (U_{N-1}^n)^{p-1} - \frac{1}{2h} \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 (U_{N-1}^n)^p) + \alpha_3 \frac{2}{h^2} \right] = \\
& U_{N-1}^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} (U_x)_{N-1}^n + \alpha_2 (p-1) \frac{\Delta t}{2} (U_{N-1}^n)^p (U_x)_{N-1}^n - \alpha_3 (U_{xx})_{N-1}^n
\end{aligned}$$

sistemi bulunur. Açıkça görüldüğü gibi denklem sistemi $N - 1$ denklem ve bilinmeyenler

$$U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, \dots, U_{N-1}^{n+1}$$

olmak üzere $N - 1$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. (2.7) sisteminin iteratif olarak çözülebilmesi için öncelikle

$$U_0^0, U_1^0, \dots, U_N^0$$

başlangıç değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu değerler bilindiğinde $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$U_0^{n+1}, U_1^{n+1}, \dots, U_N^{n+1}$$

bilinmeyenleri hesaplanabilir.

Başlangıç Durumu

Birinci bölümde genel denklem ile birlikte verilen

$$u(x, 0) = f(x)$$

başlangıç şartı x_m bölünme noktalarında

$$u_m^0 = f(x_m)$$

olarak yazılır ve bu değerler $t = 0$ anındaki başlangıç değerleri olarak alınır

$$U_m^0 = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

elde edilir. Bu değerlerin kullanılması ile istenen zamana kadarki bütün bilinmeyenler hesaplanır.

2.1 Metodun EW Denklemine Uygulanması

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $p = 1$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxt} = 0$$

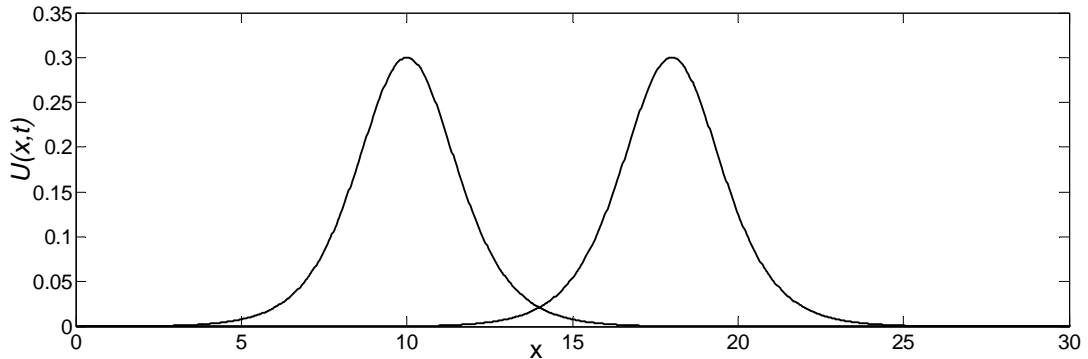
EW denklemini elde edilir.

2.1.1 Solitary dalga oluşumu

EW denkleminin solitary dalga çözümü ilk bölümde $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - ct]), a \leq x \leq b, t \geq 0$$

olarak verilmişti. Bu bölümde ilk olarak $\mu = 1$, $x_0 = 10$ parametreleri ve $0 \leq x \leq 30$ tanım aralığı seçilerek $3c$ genlikli solitary dalgasının $v = c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 80$ zaman aralığında incelenmiştir. $c = 0,1$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu (1.23) denkleminde verilen analitik çözüm yardımıyla Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Solitary dalgasının hızı $c = 0,1$ birim olduğundan $t = 80$ anında solitary dalgası 8 birim yol alacaktır. Dolayısıyla $t = 80$ anında solitary dalgasının tepe noktası Şekil 2.1 de görüldüğü gibi $x_0 + 80c = 18$ konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.1: $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu

Program $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,1$ seçimleriyle $t = 80$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri Tablo 2.1 de verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.26) eşitliklerinden

$$C_1 = \frac{6c}{k} = 1,2$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0,288$$

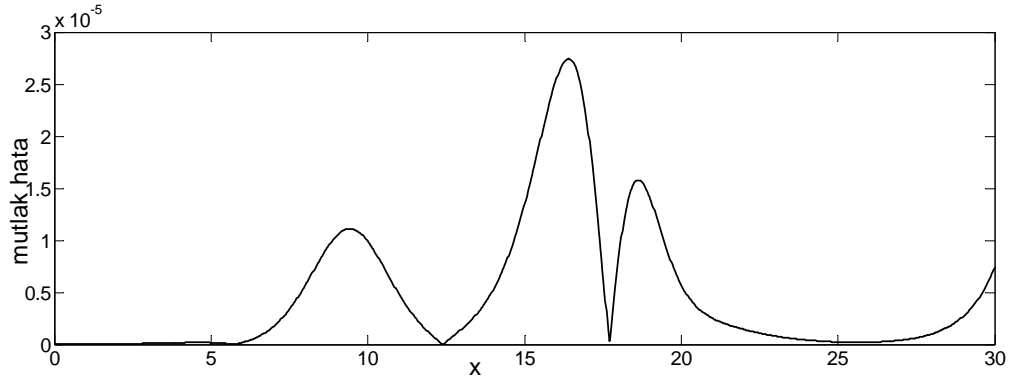
$$C_3 = \frac{144c^3}{5k} = 0,0576$$

olarak bulunur. Tablo 2.1 incelendiğinde korunum sabitlerinin analitik çözümler ile uyumlu ve maksimum hatanın da oldukça düşük olduğu görülmektedir.

Tablo 2.1: $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^5$	C_1	C_2	C_3
0	0	1,19994552	0,28799999	0,05760000
20	1,58	1,19998518	0,28799999	0,05760000
40	2,26	1,19999770	0,28799999	0,05760000
60	2,50	1,19999770	0,28799999	0,05760000
80	2,74	1,19998519	0,28799999	0,05760000

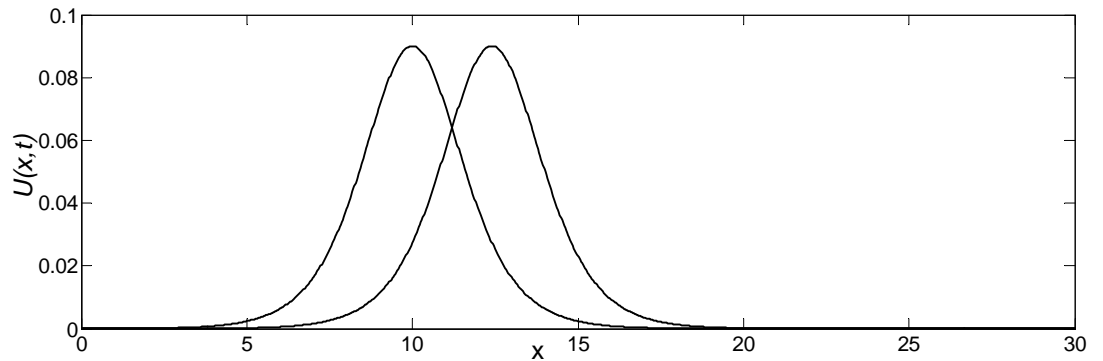
Program $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,1$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 30$ konum aralığında $t = 80$ zamanına kadar çalıştırılarak analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafik Şekil 2.2 de gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın Tablo 2.1 de verilen sonuçla uyumlu olduğu ve konum aralığının orta kısımlarında olduğu görülür. Maksimum hatanın aralığın baş ve son kısımlarında olmaması durumu sınır şartlarından kaynaklanan bir hatanın oluşmadığını göstermektedir.



Şekil 2.2: $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Solitary dalganın oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızını yani c değerini değiştirerek problem incelenmiştir. Bu durumda $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,03$ seçimleriyle program $t = 80$ anına kadar çalıştırılmıştır. $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu (1.23) analitik çözümü yardımıyla Şekil 2.3 de gösterilmiştir. Solitary dalgasının hızı $c = 0,03$ birim olduğundan $t = 80$ zamanında solitary dalgası 2,4 birim yol alabilecektir. Dolayısıyla $t = 80$ anında solitary dalgasının tepe noktası şekilden de görüldüğü gibi $x_0 + 80c = 12,4$ konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.3: $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu

Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri ise

$$C_1 = \frac{6c}{k} = 0,36$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0,02592$$

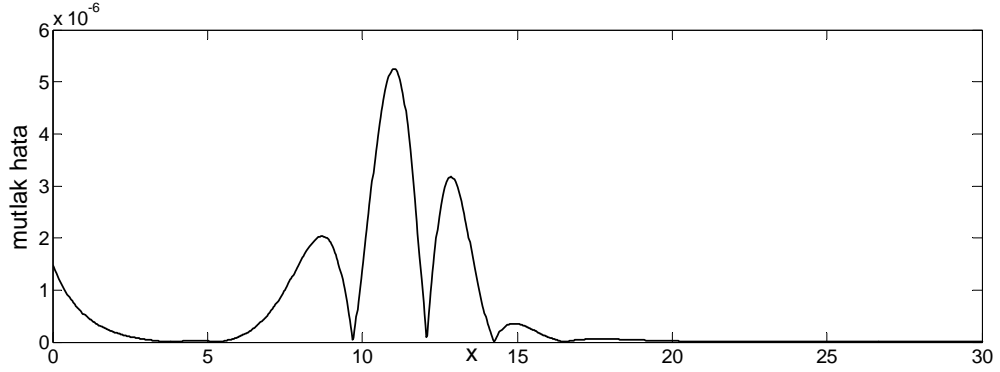
$$C_3 = \frac{144c^3}{5k} = 0,00156$$

olarak bulunur. $t = 0$ ve $t = 80$ zamanı arasındaki belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri Tablo 2.2 de verilmiştir. Tablo 2.2 incelendiğinde hata normlarının genliğin daha yüksek olduğu ilk duruma göre daha düşük olduğu görülür. Ayrıca korunum sabitleri analitik çözümler ile neredeyse aynı gelmektedir.

Tablo 2.2: $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^6$	C_1	C_2	C_3
0	0	0,35998365	0,02592000	0,00155520
20	8,97	0,35998205	0,02592000	0,00155520
40	4,93	0,35999014	0,02592000	0,00155520
60	4,27	0,35999458	0,02592000	0,00155520
80	5,25	0,35999701	0,02592000	0,00155520

$h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,03$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 30$ konum aralığında $t = 80$ zamanına kadar çalıştırılan programın analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafik Şekil 2.4. te verilmiştir. Mutlak hatayı veren Şekil 2.4 incelendiğinde, maksimum hatanın Tablo 2.2 de verilen L_∞ hatası ile uyumlu olduğu ve konum aralığının baş veya son kısmında gelmediği görülür.



Şekil 2.4: $h = 0,03$, $\Delta t = 0,05$, $c = 0,03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Sonuç olarak dalganın genliği 0.1 den 0.03'e düşürüldüğünde (yani genliği daha düşük olan soliton dalgasının modellenmesi incelendiğinde) hata oranının düştüğü tespit edilmiştir.

2.1.2 İki solitary dalgasının çarpışması

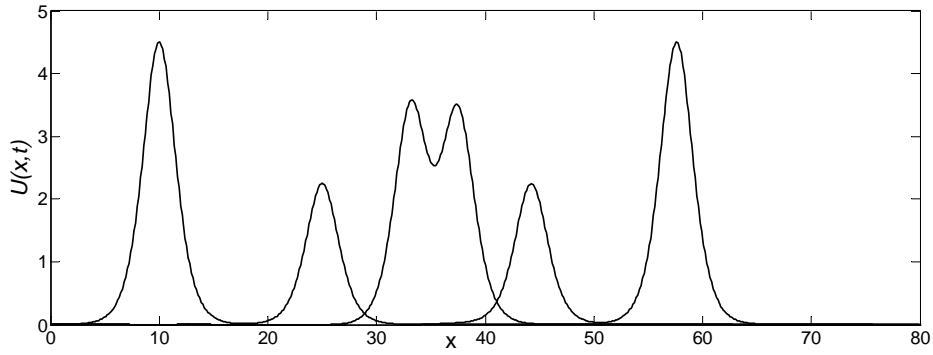
Birinci bölümde EW denklemi için verilen iki solitary dalganın çarpışması problemindeki (1.27) başlangıç şartında $x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $k = 0,5$, $c_1 = 1,5$ ve $c_2 = 0,75$ seçimleri yapıldığında

$$u(x, 0) = 4,5 \text{sech}^2(0,5[x - 10]) + 2,25 \text{sech}^2(0,5[x - 25]) \quad (2.8)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

(2.8) eşitliği $t = 0$ anında sırası ile genlikleri 4,5 ve 2,25 olan iki solitary dalgasını vermektedir. Genliği daha büyük olan ilk dalga tepe noktası $x = 10$ noktasına karşılık gelecek şekilde, genliği küçük olan ikinci dalga ise tepe noktası $x = 25$ noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiştir. Genliği daha büyük olan dalga diğer dalgaya göre geride harekete başlamasına rağmen bir müddet sonra daha hızlı olmasından dolayı küçük genlikli dalgaya yetişecektir. Solitary dalga özelliği sebebiyle de bir müddet sonra büyük genlikli dalga diğer dalgayı geçerek hareketine devam edecektir.

$h = \Delta t = 0,1$ ve $[0, 80]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 30$ zamanına kadar çalıştırılmış ve $t = 0, t = 16$ ve $t = 30$ zamanlarındaki dalgaların durumu Şekil 2.5 de verilmiştir. Şekil incelendiğinde dalgaların $t = 0$ anında yukarıda anlatıldığı gibi yerleştiği, yaklaşık $t = 16$ zamanında çarpışmanın gerçekleştiği ve $t = 30$ zamanında solitary dalgaların özelliklerinden biri olan dalgaların çarpıştıktan sonra şekillerini kaybetmeden yollarına devam etme durumları kolaylıkla gözlenebilmektedir.



Şekil 2.5: İki solitary dalgasının çarpışması, $t = 0, t = 16, t = 30$

(2.8) için korunum sabitlerinin tam değerleri (1.28) eşitliklerinden

$$C_1 = 6 \left(\frac{c_1 + c_2}{k} \right) = 12(1,5 + 0,75) = 27,$$

$$C_2 = \left(\frac{12}{k} + \frac{48k\mu}{5} \right) (c_1^2 + c_2^2) = 28,8(1,5^2 + 0,75^2) = 81,$$

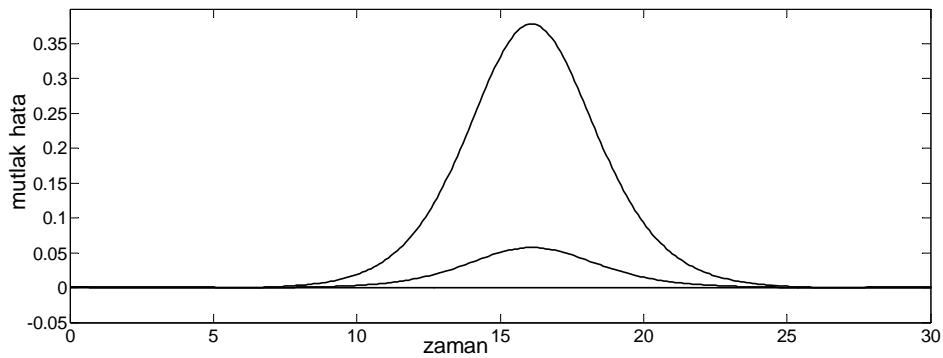
$$C_3 = \frac{144}{5k} (c_1^3 + c_2^3) = 57,6(1,5^3 + 0,75^3) = 218,7$$

olarak bulunur. Korunum sabitleri için sayısal değerler Tablo 2.3 de gösterilmiştir. Sayısal yöntem sonucunda elde edilen sonuçlar ile analitik değerlerin uyumlu oldukları görülmüştür. Zaman ve konum artım değerleri daha da küçük seçilirse korunum sabitlerindeki değişimlerde o derece küçülecektir.

Tablo 2.3: İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	C_1	C_2	C_3
0	26,99918216	81,00010780	218,70133799
6	26,99999487	80,99988301	218,70012445
12	26,99999508	80,98745118	218,62130755
18	26,99999508	80,96019925	218,44227950
24	26,99999508	80,99892574	218,69483025
30	26,99999507	81,00003234	218,70104125

Korunum sabitleri için mutlak hatalar ise Şekil 2.6 da verilmiştir. Şekil 2.6 da en büyük hata C_3 için sonra C_2 için ve en küçük hata ise C_1 için oluşmaktadır. Şekil 2.6 incelendiğinde hata normlarında yaklaşık $t = 10$ ile $t = 20$ zamanı arasında bir artış olduğu görülmektedir. Bunun sebebi belirtilen zaman aralığında çarpışma işleminin gerçekleşmesidir. Çarpışma işlemi sona erdikten sonra korunum sabitleri için hatalar düşmektedir.



Şekil 2.6: Korunum sabitleri için mutlak hatalar

2.2 Metodun RLW Denklemine Uygulanması

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 1$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0$$

RLW denklemi elde edilir.

2.2.1 Solitary dalga oluşumu

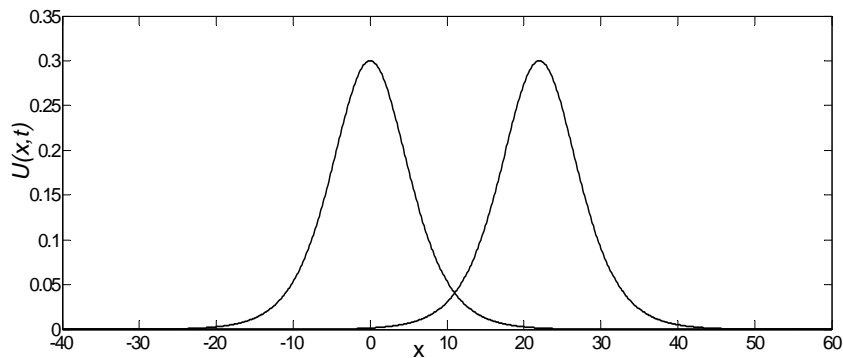
İlk bölümde $[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızlı RLW denkleminin solitary dalga çözümü $k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t])$$

formunda verilmişti. İlk olarak $\varepsilon = \mu = 1$, $x_0 = 0$ parametreleri ve $-40 \leq x \leq 60$ tanım aralığı seçilerek $3c$ genlikli, tepe noktası $x_0 = 0$ noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının $v = 1 + \varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. $c = 0,1$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu Şekil 2.7 de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 20$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 0 + [1 + 1.(0,1)] 20 = 22$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.7: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

Bu test probleminde konum artımı $h = 0,125$, zaman artımı $\Delta t = 0,1$ ve genlik $3c = 0,3$ olarak alınmıştır. Alınan parametrelere göre $0,3$ genlikli solitary dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.33) eşitliklerinden

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 3,979949748,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0,8104624941,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 2,579007437$$

olarak hesaplanır.

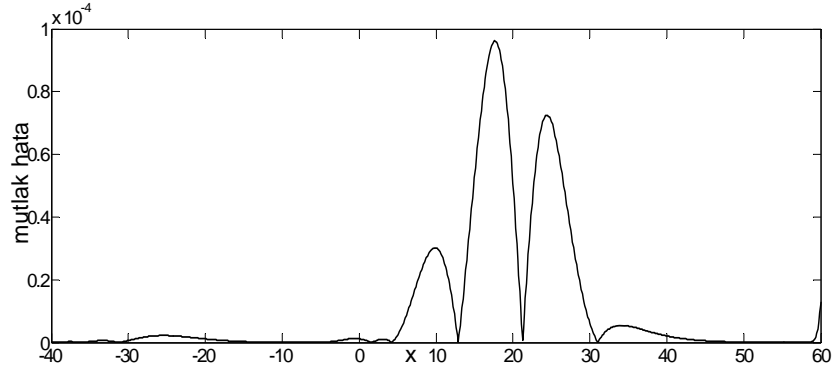
Program $t = 20$ oluncaya kadar çalıştırılmış ve çeşitli zamanlardaki L_∞ hata normuyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleri Tablo 2.4 de verilmiştir. Çalışma boyunca hesaplanan korunum sabitleri ile analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görülür. Tabloya göre L_∞ hata normları incelendiğinde hataların oldukça düşük olduğuda görülür.

Tablo 2.4: $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri

ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^5$	C_1	C_2	C_3
0	0	3,97992667	0,81046249	2,57900744
4	2,12	3,97992996	0,81046249	2,57900743
8	4,26	3,97992667	0,81046249	2,57900744
12	6,22	3,97992566	0,81046249	2,57900742
16	8,00	3,97991705	0,81046249	2,57900741
20	9,62	3,97988275	0,81046248	2,57900740

Şekil 2.8 de $t = 20$ anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik çizilmiştir. Maksimum hatanın Tablo 2.4 de verilen $9,62 \times 10^{-5}$ kadar olduğu ve konum aralığının orta kısımlarında olduğu görülmektedir.



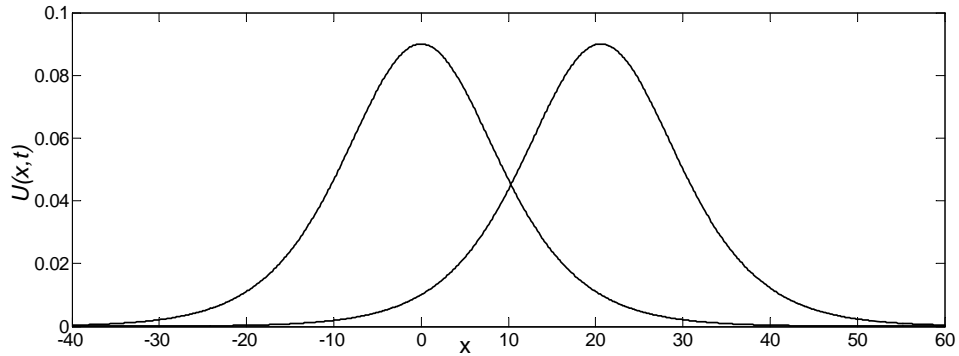
Şekil 2.8: $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Solitary dalgasının hareketi test probleminde ikinci olarak dalganın hızına etkisi olan c değeri değiştirilerek problem incelenmiştir. $c = 0,03$ alındığında $t = 0$ ve $t = 20$ zamanlarında oluşan dalgalar Şekil 2.9 da verilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 20$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 0 + [1 + 1.(0,03)] 20 = 20,6$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.9: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

$c = 0,03$ seçimi için korunum sabitlerinin analitik değerleri ise

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 2,109407500,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0,1273017186,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 0,3888059904$$

olarak bulunur.

Program $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,03$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri Tablo 2.5 de verilmiştir. Tablo 2.5 incelendiğinde $c = 0,1$ seçimine göre mutlak hatada bir artış olduğu görülür. Normal şartlarda c değerinin düşürülmesi dalganın genliğini düşüreceğinden hatada bir miktar azalma olması gerekirdi.

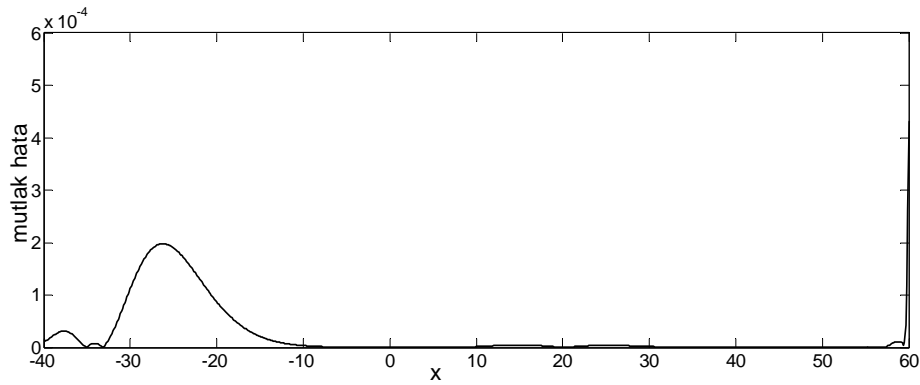
Tablo 2.5: $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için

korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0	0	2,10704672	0,12730126	0,38880465
4	2,30	2,10709771	0,12730112	0,38880407
8	2,21	2,10689617	0,12730112	0,38880405
12	2,12	2,10654963	0,12730111	0,38880397
16	2,14	2,10592816	0,12730109	0,38880365
20	4,32	2,10461363	0,12730104	0,38880235

Hatanın daha yüksek çıkma sebebini anlamak için $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,03$ seçimleri ile $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığında $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılan programın analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafik Şekil 2.10 da verilmiştir. Maksimum hatanın konum aralığının sonunda olduğu görülmektedir. Dolayısıyla sınır şartlarında bir problem olduğu anlaşılır.

Sınır şartlarından kaynaklı hatanın oluşması yani, hatanın konum aralığının sonunda görülmesinin sebebi dalganın yeterince sifıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanır. Bu sorunu gidermek için ya konum aralığı genişletilmelidir ya da problemde analitik sınır şartları kullanılmalıdır.



Şekil 2.10: $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

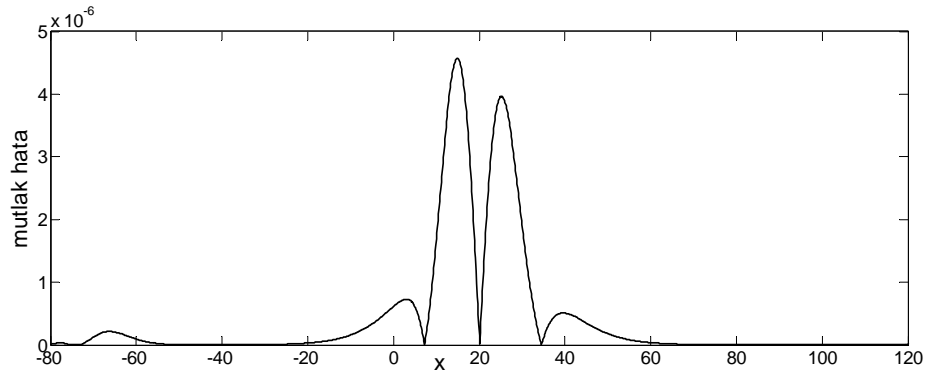
Hatayı düşürmek için konum aralığı $-80 \leq x \leq 120$ olarak genişletilerek program tekrar çalıştırılmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 2.6 da verilmiştir. Tablo incelendiğinde $t = 20$ anındaki hatanın $4,57 \times 10^{-6}$ olduğu görülür. Aralığın genişletilmediği duruma göre hatanın oldukça düştüğü görülür.

$-80 \leq x \leq 120$ konum aralığında $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılan programın analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafik Şekil 2.11 de verilmiştir. Konum aralığı değiştirildikten sonra program çalıştırıldığında hatanın azaldığı ve en büyük hatanın artık aralığın uç noktalarında değil aralığın orta noktalarında olduğu görülür.

Tablo ve şekil birlikte değerlendirildiğinde konum aralığı seçiminin önemi ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak konum aralığının seçimine bağlı olarak sınır şartlarının seçiminin solitary dalga test probleminde oldukça önemli olduğu görülmektedir.

Tablo 2.6: $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,03$ ve $-80 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^6$	C_1	C_2	C_3
0	0	2,10940502	0,12730172	0,38880599
4	0,88	2,10940516	0,12730172	0,38880599
8	1,79	2,10940511	0,12730172	0,38880599
12	2,71	2,10940507	0,12730172	0,38880599
16	3,65	2,10940508	0,12730172	0,38880599
20	4,57	2,10940502	0,12730172	0,38880599



Şekil 2.11: $h = 0,125$, $\Delta t = 0,1$, $c = 0,03$ ve $-80 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

2.2.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde RLW denklemi için verilen iki solitary dalganın çarpışma problemindeki (1.34) başlangıç şartında $x_1 = 20$, $x_2 = 65$, $c_1 = 2/3$ ve $c_2 = 0,1$ seçimleri

yapıldığıında

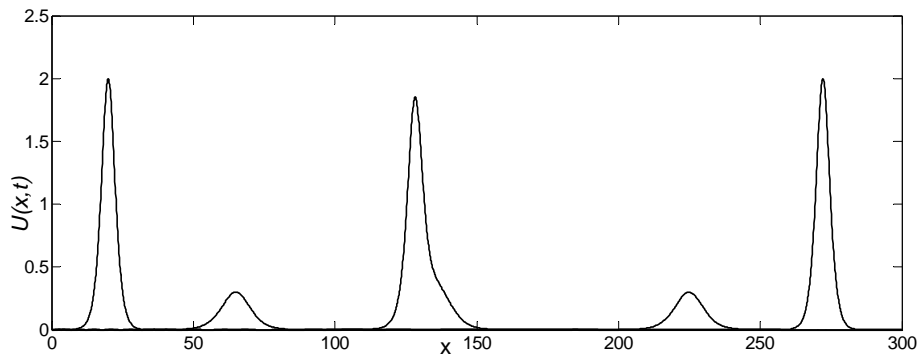
$$k_1 = \sqrt{\frac{2/3}{4(1+2/3)}} = \frac{1}{10}\sqrt{10} \text{ ve } k_2 = \sqrt{\frac{0,1}{4(1+0,1)}} = \frac{1}{\sqrt{44}}$$

olduğundan

$$u(x, 0) = 2\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{10}}{10}[x - 20]\right) + 0,3\text{sech}^2\left(\frac{1}{\sqrt{44}}[x - 65]\right) \quad (2.9)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır. (2.9) eşitliği tepe noktası $x = 20$ noktasında olan 2 genlikli ve tepe noktası $x = 65$ noktasında olan 0.3 genlikli iki solitary dalgasına karşılık gelmektedir. Zaman içerisinde dalgalar, genliği yüksek olanın daha hızlı olması sebebiyle çarpışacaktır. Solitary dalga özelliği sebebiyle çarpışma bir müddet sonra son bulacak ve dalgalar birbirinden ayrılacaktır.

$h = \Delta t = 0, 1$ ve $[0, 300]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 150$ zamanına kadar çalıştırılmış ve $t = 0, t = 65$ ve $t = 150$ zamanlarındaki dalgaların durumu Şekil 2.12 de verilmiştir. Şekil incelendiğinde çarpışmanın gerçekleştiği zamanın yaklaşık $t = 65$ civarı olduğu ve çarpışma sonrasında dalgaların kendi şekillerini korudukları görülmektedir.



Şekil 2.12: İki solitary dalgasının çarpışması $t = 0, t = 65, t = 150$

Belirtilen parametrelere göre korunum sabitlerinin tam değerleri (1.35) eşitlik-

lerinden

$$C_1 = 6 \left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right) \simeq 16,62906039,$$

$$C_2 = 12 \left(\frac{c_1^2}{k_1} + \frac{c_2^2}{k_2} \right) + \frac{48}{5} \mu (k_1 c_1^2 + k_2 c_2^2) \simeq 19,02518182,$$

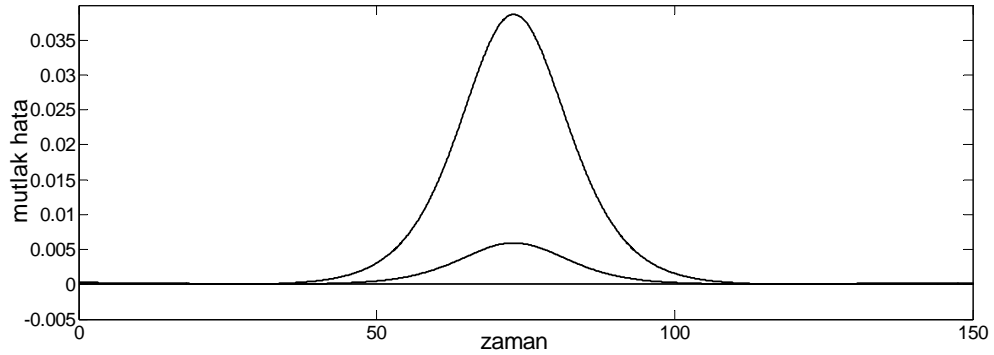
$$C_3 = \frac{36c_1^2}{5k_1} (4c_1 + 5) + \frac{36c_2^2}{5k_2} (4c_2 + 5) \simeq 80,16021942$$

olarak bulunur. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri ise Tablo 2.7 de $t = 150$ zamanına kadarki bazı zamanlar için verilmiştir. Sonuçların analitik çözümlere yakın olduğu görölmektedir. Korunum sabitlerinin analitik sonuçlara daha da yakın olması istenirse konum ve zaman artımları daha da küçültülebilir.

Tablo 2.7: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	C_1	C_2	C_3
0	16,62901975	19,02523346	80,16048477
30	16,62903736	19,02519099	80,16021819
60	16,62903725	19,02299037	80,14604732
90	16,62903719	19,02393162	80,15214565
120	16,62903854	19,02519877	80,16026810
150	16,62903891	19,02520778	80,16032521

Korunum sabitleri için mutlak hatalar ise Şekil 2.13 de verilmiştir. Şekil 2.13 de en büyük hata C_3 için sonra C_2 için ve en küçük hata ise C_1 için olmaktadır. Şekil 2.13 incelendiğinde korunum sabitlerinin mutlak hataları için yaklaşık $t = 50$ ile $t = 100$ zamanı arasında bir artışın olduğu görölmektedir. Bunun sebebi belirtilen zaman aralığında çarpışma işleminin gerçekteşmesidir. Çarpışma işlemi sona erdikten sonra korunum sabitleri için hataların oldukça düştüğü ve Şekil 2.13 ile Tablo 2.7 deki değerlerin tutarlı olduğu görölmür.



Şekil 2.13: Korunum sabitleri için mutlak hatalar

2.3 Metodun MEW Denklemine Uygulanması

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında

$$u_t + \alpha_2 u^2 u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0$$

MEW denklemi elde edilir.

2.3.1 Solitary dalga oluşumu

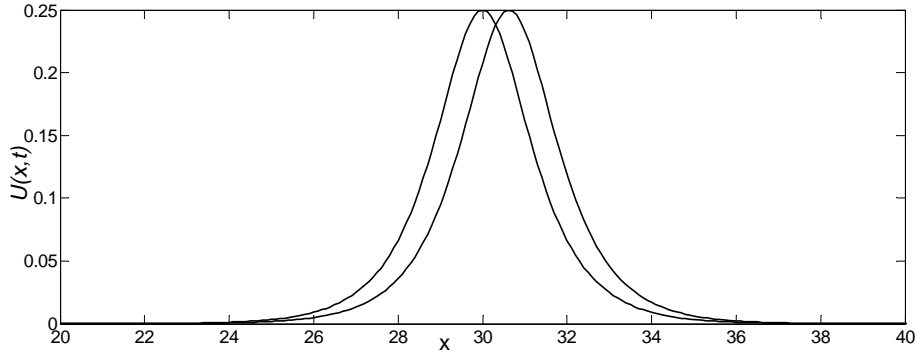
İlk bölümde $[a, b]$ aralığında tanımlı $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli, $v = c$ dalga hızlı MEW denkleminin solitary dalga çözümü $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - ct]),$$

olarak verilmiştir. İlk olarak $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ parametreleri ve $0 \leq x \leq 80$ tanım aralığı seçilerek $A = \sqrt{2c}$ genlikli, sola yerleştirilmiş tek dalganın $v = c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu $A = 0,25$ genlik değeri için Şekil 2.14 de gösterilmiştir. Dalganın genliği küçük seçildiğinden dolayı dalganın hızıda oldukça yavaştır. Dolayısıyla dalga çok az yol aldığından şeklin anlaşılır olabilmesi için konum aralığının küçük bir bölgesinde şekil çizilmiştir. Dalganın tepe noktası $t = 20$ zamanında tam olarak

$$x_0 + ct = 30 + \frac{(0,25)^2}{2} 20 = 30,625$$

noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.14: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

$A = 0,25$ seçimi yapıldığında korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{A\pi}{k} \simeq 0,7853981635,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 0,1666666667,$$

$$C_3 = \frac{4A^4}{3k} \simeq 0,00520833333$$

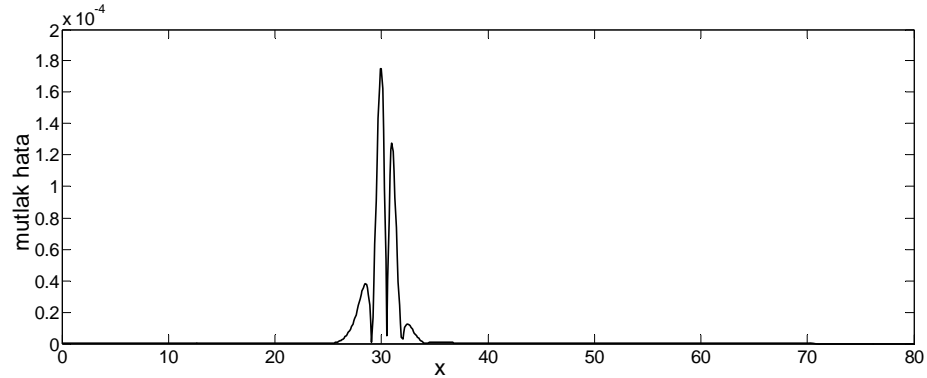
olarak hesaplanır.

Program $h = 0,1$, $\Delta t = 0,2$ ve $A = 0,25$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri Tablo 2.8 de verilmiştir. Tablo 2.8 incelendiğinde L_∞ hata normunun oldukça düşük olduğu ve korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri ile analitik değerlerinin hemen hemen aynı olduğu görülür.

Konum artımı $h = 0,1$, zaman artımı $\Delta t = 0,2$ ve $A = 0,25$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 80$ konum aralığında $t = 20$ oluncaya kadar program çalıştırılmış ve sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik Şekil 2.15 gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının orta noktaları civarında olduğu ve Tablo 2.8 de $t = 20$ anında verilen hata ile uyumlu olduğu görülür.

Tablo 2.8: $h = 0,1$, $\Delta t = 0,2$, $A = 0,25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^5$	C_1	C_2	C_3
0	0	0,78539816	0,16666544	0,00520833
4	3,35	0,78539816	0,16666545	0,00520833
8	6,86	0,78539816	0,16666546	0,00520833
12	1,05	0,78539816	0,16666548	0,00520833
16	1,40	0,78539816	0,16666550	0,00520833
20	1,75	0,78539815	0,16666553	0,00520833



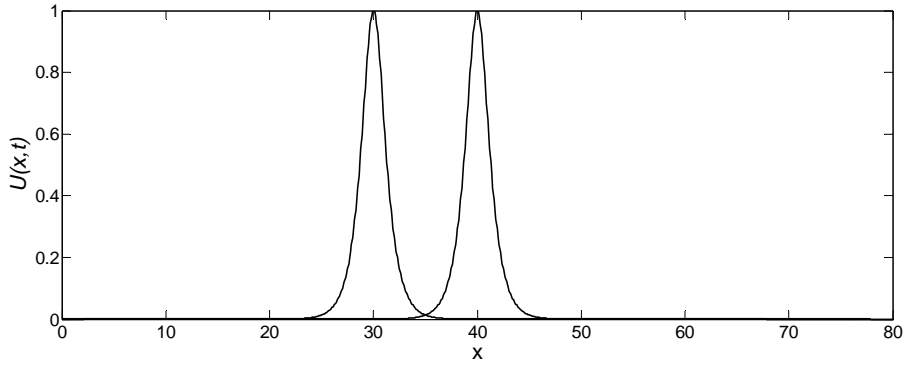
Şekil 2.15: $h = 0,1$, $\Delta t = 0,2$, $A = 0,25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

$t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu $A = 1$ genlik değeri için Şekil 2.16 da gösterilmiştir. Dalganın genliği ilk duruma göre daha büyük olduğundan dalga daha hızlı hareket edecektir. Dalganın tepe noktası $t = 20$ anında tam olarak

$$x_0 + ct = 30 + \frac{(1)^2}{2} 20 = 40$$

noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.16: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

$A = 1$ genlik seçimiyle korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{A\pi}{k} \simeq 3,141592654,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 2,666666667,$$

$$C_3 = \frac{4A^4}{3k} \simeq 1,333333333$$

olarak hesaplanır.

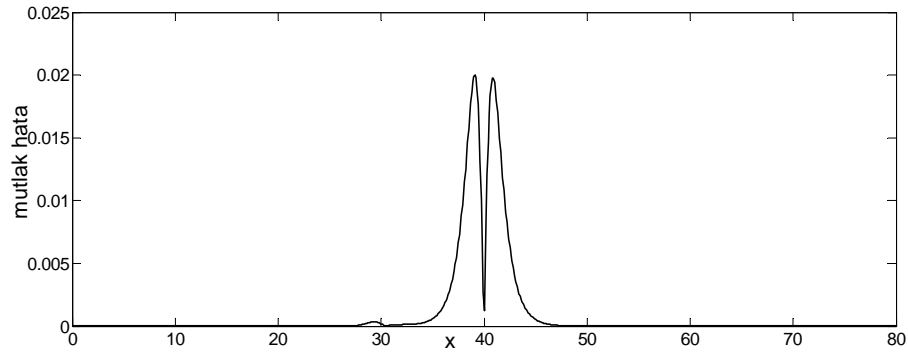
Program $h = 0,1$, $\Delta t = 0,2$ ve $A = 1$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri Tablo 2.9 da verilmiştir. Tablo 2.9 incelendiğinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumlu olduğu görülür. L_∞ hata normu ise diğer durumlara göre daha büyük çıkmıştır. Bunun sebebi dalganın genliğinin büyük olmasından kaynaklanmaktadır.

Konum artımı $h = 0,1$, zaman artımı $\Delta t = 0,2$ ve $A = 1$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 80$ konum aralığında $t = 20$ oluncaya kadar çalıştırılan program için sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik Şekil 2.17 gösterilmiştir. Mutlak hatanın aralığın orta kısımlarında olması sebebiyle sınır şartlarının hata üzerinde etkisinin olmadığı sonucuna varılır.

Tablo 2.9: $h = 0,1$, $\Delta t = 0,2$, $A = 1$ ve $0 \leq x \leq 80$ için

korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	L_∞	C_1	C_2	C_3
0	0	3,14159265	2,66664712	1,33333333
4	0,00428	3,14159254	2,66642043	1,33310549
8	0,00804	3,14159249	2,66619576	1,33288098
12	0,01194	3,14159244	2,66597136	1,33265665
16	0,01593	3,14159239	2,66574700	1,33243236
20	0,02000	3,14159233	2,66552274	1,33220817

Şekil 2.17 : $h = 0,1$, $\Delta t = 0,2$, $A = 1$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

2.3.2 İki solitary dalgasının çarpışması

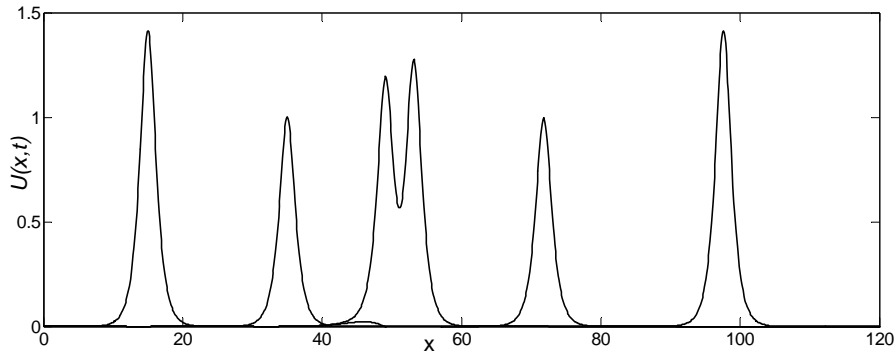
Birinci bölümde MEW denklemi için verilen iki solitary dalganın çarpışma problemindeki (1.41) başlangıç şartında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0,5$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 35$, seçimleri yapıldığında

$$A_1 = \sqrt{\frac{6c_1}{\varepsilon}} = \sqrt{2} \text{ ve } A_2 = \sqrt{\frac{6c_2}{\varepsilon}} = \sqrt{1}$$

olmak üzere

$$u(x, 0) = \sqrt{2}\operatorname{sech}(x - 15) + \operatorname{sech}(x - 35) \quad (2.10)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır. (2.10) başlangıç şartı genlikleri $\sqrt{2}$ ve 1 olan tepe noktaları sırası ile 15 ve 35 noktalarına karşılık gelecek şekilde yerleştirilen iki solitary dalgasına karşılık gelmektedir. $h = \Delta t = 0,1$ ve $[0, 120]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 80$ zamanına kadar çalıştırılarak $t = 0, t = 35$ ve $t = 80$ zamanlarındaki dalgalar Şekil 2.18 de verilmiştir. Şekilden görülebileceği gibi dalgalar çarpışma işleminden sonra şekillerinde bir değişiklik olmadan yollarına devam etmişlerdir.



Şekil 2.18: İki solitary dalgasının çarpışması $t = 0, t = 35, t = 80$

Korunum sabitlerinin tam değerleri ise $A_1 = \sqrt{2}$, $A_2 = 1$ ve $k = 1$ değerlerinin kullanılmasıyla

$$C_1 = \frac{\pi}{k} (A_1 + A_2) \simeq 7,584475592,$$

$$C_2 = \frac{2}{k} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{2\mu k}{3} (A_1^2 + A_2^2) \simeq 8,$$

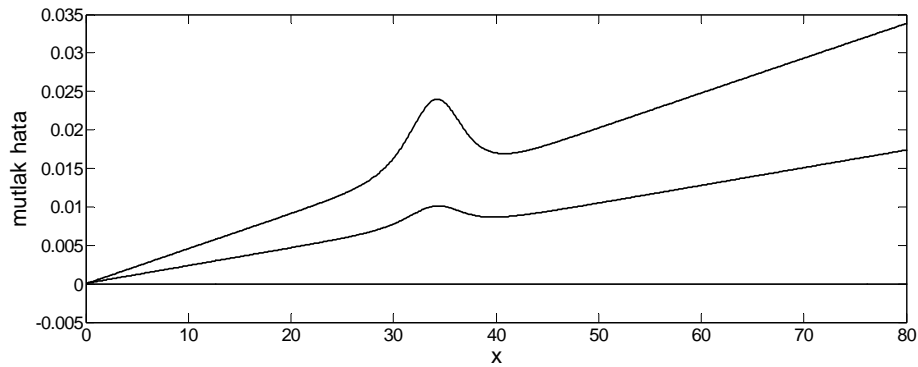
$$C_3 = \frac{4}{3k} (A_1^4 + A_2^4) \simeq 6,666666667$$

olarak bulunur. Belirtilen parametreler kullanılarak program çalıştırılıp belirli zamanlarda korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 2.10 da verilmiştir. Tablo incelendiğinde korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin tam sonuçlara yakın olduğu görülür.

Tablo 2.10: İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	C_1	C_2	C_3
0	7,58447473	7,99994141	6,66666681
10	7,58447501	7,99762402	6,66209330
20	7,58447458	7,99530503	6,65752481
30	7,58447396	7,99222357	6,65033850
40	7,58447643	7,99133355	6,64967113
50	7,58447395	7,98949760	6,64641007
60	7,58447317	7,98720690	6,64187358
70	7,58447273	7,98490857	6,63735099
80	7,58447233	7,98261431	6,63284051

Korunum sabitleri için mutlak hatalar ise Şekil 2.19 da verilmiştir. Şekil 2.19 de en büyük hata C_3 için sonra C_2 için ve en küçük hata ise C_1 için oluşmaktadır. Şekil incelendiğinde C_2 ve C_3 korunum sabitleri için hataların zaman içinde düzenli olarak arttığı ve düzenli olan bu artışın çarpışması sırasında bir miktar bozulduğu gözlenmektedir.



Şekil 2.19: Korunum sabitleri için mutlak hatalar

2.4 Metodun MRLW Denklemine Uygulanması

(1.18) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında

$$u_t + u_x + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0$$

MRLW denklemi elde edilir.

2.4.1 Solitary dalga oluşumu

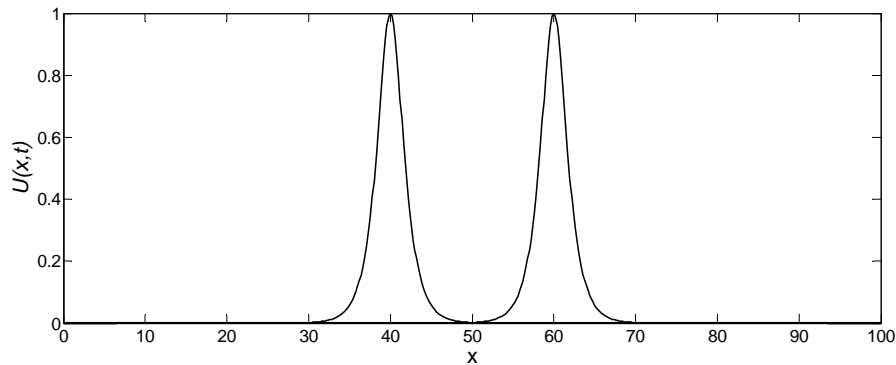
MRLW denkleminin tanıtıldığı ilk bölümde $[a, b]$ aralığında tanımlı $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli, $v = c + 1$ dalga hızlı MRLW denkleminin solitary dalga çözümü $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - (c+1)t]),$$

olarak verilmişti. Solitary dalga çözümünde ilk olarak $\varepsilon = 6$, $\mu = 1$, $x_0 = 40$ parametreleri ve $0 \leq x \leq 100$ tanım aralığı seçilmiş ve böylece $A = \sqrt{c}$ genlikli solitary dalgasının $v = c + 1$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 10$ zaman aralığında incelenmiştir. $c = 1$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu yukarıda verilen analitik çözüm yardımıyla Şekil 2.20 de gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi $t = 10$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + 10c + 10 = 60$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.20: $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu

Belirtilen parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri ise

$$C_1 = \frac{\pi A}{k} \simeq 4,442882938,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 3,299831644,$$

$$C_3 = \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \simeq 1,414213562$$

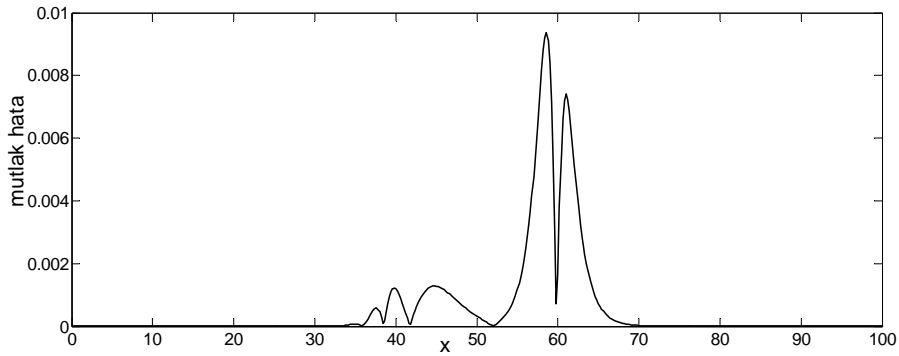
olarak bulunur.

Program konum artımı için $h = 0,2$ ve zaman artımı içinde $\Delta t = 0,025$ seçimleriyle $t = 10$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki L_∞ hata normu ile birlikte korunum sabitleri Tablo 2.11 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde korunum sabitlerinin analitik ozuimler ile uyumlu olduğu ve hata normunun ise kabul edilebilir olduğu gorulur.

$h = 0,2$, $\Delta t = 0,025$, $c = 1$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 100$ konum aralığında $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılan programın analitik ve sayısal ozuimleri arasındaki farkın mutlak değerini gosteren grafik Şekil 2.21 de çizilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının orta kısımlarında olduğu gorulur. Bu sebeple sınır Şartlarının maksimum hata üzerinde bir etkisinin bulunmadığı sonucuna varılır.

Tablo 2.11: $h = 0,2$, $\Delta t = 0,025$, $c = 1$ ve $0 \leq x \leq 100$ için korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	4,44288294	3,29977675	1,41426846
2	3,64	4,44288214	3,29977796	1,41423453
4	5,04	4,44288212	3,29976849	1,41422231
6	6,47	4,44288210	3,29975856	1,41421188
8	7,91	4,44288209	3,29974862	1,41420178
10	9,36	4,44288214	3,29973869	1,41419179



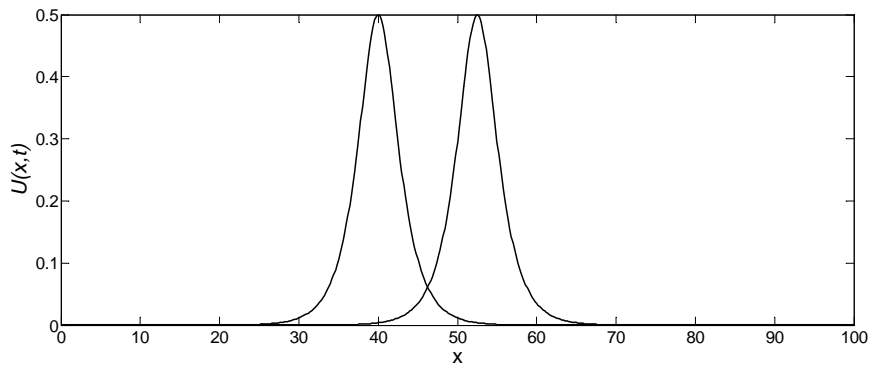
Şekil 2.21 : $h = 0,2$, $\Delta t = 0,025$, $c = 1$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 10$ zamanındaki

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Solitary dalganın oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızı yani c değeri değiştirilerek problem incelenmiştir. $c = 0,25$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu alt bölüm başında verilen solitary dalga çözümü yardımıyla Şekil 2.22 de gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi $t = 10$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + 10(c + 1) = 52,25$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.22: $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu

Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{\pi A}{k} \simeq 3,512407367,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 1,192569588,$$

$$C_3 = \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \simeq 0,1118033989$$

olarak bulunur.

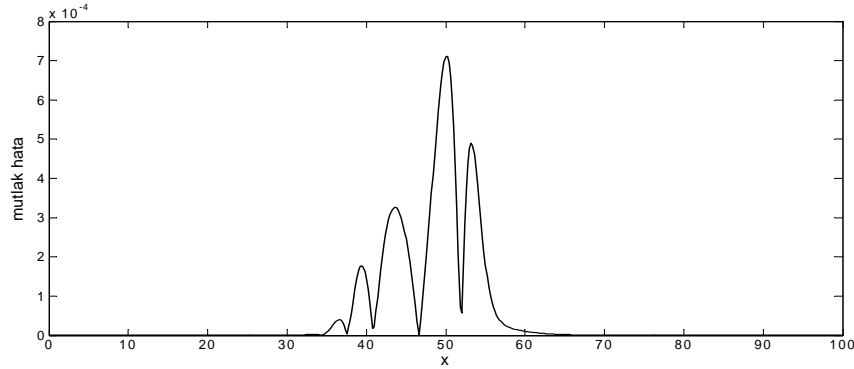
Bu durumda program $\varepsilon = 6, \mu = 1, x_0 = 40, h = 0,2, \Delta t = 0,025, c = 0,25$ seçimleriyle $t = 10$ anına kadar $0 \leq x \leq 100$ konum aralığında çalıştırılmış ve bazı zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri Tablo 2.12 de verilmiştir. Tablo 2.12 den kolaylıkla görülebileceği gibi hata normları düşük ve korunum sabitleri analitik czmler ile uyumludur. Ayrıca genliğin düşmesi sebebiyle de sonuçlar ilk duruma göre daha düşüktür.

$h = 0,2, \Delta t = 0,025, c = 0,25$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 100$ konum aralığında $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılan programın analitik ve sayısal czmleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafik ise Şekil 2.23 de verilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının ortalarında olduğu ve hatanın üzerinde sınır şartlarının etkisi olmadığı görülür.

Tablo 2.12: $h = 0,2, \Delta t = 0,025, c = 0,25$ ve $0 \leq x \leq 100$ için

korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0	0	3,51240733	1,19256819	0,11180480
2	3,15	3,51240732	1,19256828	0,11180461
4	4,81	3,51240732	1,19256837	0,11180442
6	5,73	3,51240731	1,19256839	0,11180432
8	6,46	3,51240731	1,19256838	0,11180427
10	7,12	3,51240731	1,19256836	0,11180423



Şekil 2.23: $h = 0,2$, $\Delta t = 0,025$, $c = 0,25$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 10$ zamanındaki

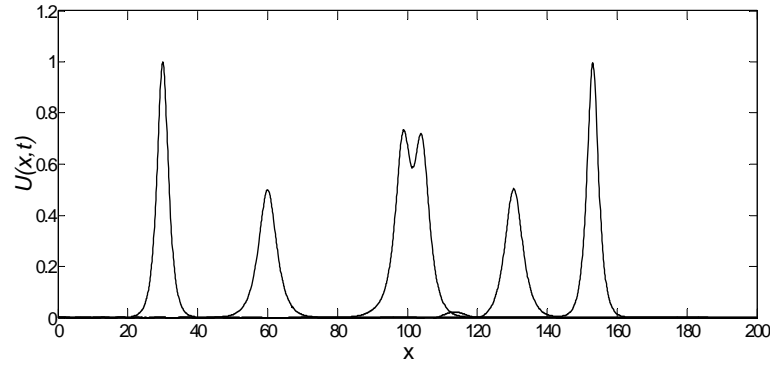
$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

2.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemindeki (1.48) başlangıç şartında $\varepsilon = 6$, $\mu = 1$, $x_1 = 30$, $x_2 = 60$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0,25$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0,5$, $k_1 = \sqrt{1/2}$ ve $k_2 = \sqrt{1/5}$ alındığında

$$u(x, 0) = \sqrt{1/2} \text{sech}(1[x - 30]) + \sqrt{1/5} \text{sech}(0,5[x - 60]) \quad (2.11)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır. Verilen başlangıç şartı, genlikleri $\sqrt{1/2}$ ve $\sqrt{1/5}$ olan tepe noktaları sırası ile 30 ve 60 noktalarına karşılık gelecek şekilde yerleştirilen iki solitary dalgasına karşılık gelmektedir. $h = \Delta t = 0,1$ ve $[0, 200]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 60$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar Şekil 2.24 de verilmiştir. Şekil incelendiğinde çarpışmanın yaklaşık $t = 35$ civarında olduğu ve bir müddet sonrada sona erdiği sonucuna varılır. Ayrıca çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında solitary dalgalarının şekillerinde bir bozulma olmadığı da gözlemlenir.



Şekil 2.24: İki solitary dalgasının çarpışması $t = 0, t = 35, t = 60$

Korunum sabitlerinin tam değerleri ise

$$C_1 = \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_2) \simeq 7,955290303,$$

$$C_2 = \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{3k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \simeq 4,492401234,$$

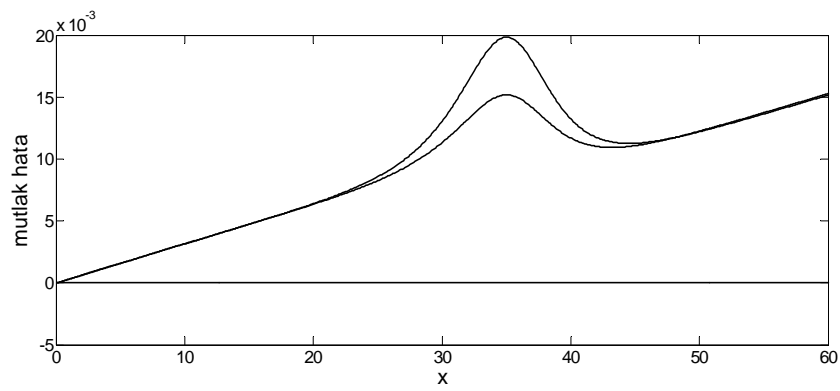
$$C_3 = \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2) \simeq 1,526016961$$

olarak bulunur. Korunum sabitleri için sayısal değerler ise Tablo 2.13 de gösterilmiştir. Sayısal yöntem sonucunda elde edilen sonuçlar ile analitik değerlerin oldukça uyumlu oldukları gözlemlenir.

Tablo 2.13: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	C_1	C_2	C_3
0	7,95529030	4,49241709	1,52603993
12	7,95529005	4,48861583	1,52223644
24	7,95528972	4,48457972	1,51797179
36	7,95528832	4,47751235	1,50672276
48	7,95528960	4,48069291	1,51430374
60	7,95528937	4,47712565	1,51086056

Korunum sabitleri için mutlak hatalar ise Şekil 2.25 de verilmiştir. Şekil 2.25 incelendiğinde en büyük hata C_3 için sonra C_2 için ve en küçük hata ise C_1 için oluşmaktadır. Ayrıca C_2 ve C_3 korunum sabitleri için hataların zaman içinde düzenli olarak arttığı ve bu artışın çarpışmanın gerçekleştiği zamanda bir miktar bozulduğu gözlenmektedir.



Şekil 2.25: Korunum sabitleri için mutlak hatalar

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerini kapsayan genel formdaki bir kısmi türevli diferansiyel denklemin sayısal çözümü araştırılmıştır. İlk olarak denklemin zamana göre parçalanması için Crank Nicolson yöntemi ve konuma göre ayrıştırma için ise kübik B-spline quasi interpolasyon yöntemi kullanılmıştır. Önerilen yöntemin avantajı sonlu farklar yönteminde olduğu gibi türevlere yaklaşım yapılarak bilinmeyen fonksiyonun direk hesaplanabilmesidir. Zamana ve konuma göre ayrıştırma yapıp denklem sistemi lineer hale getirildiğinde 5 bandlı bir sisteme ulaşılmıştır. Ulaşılan sistem $N+1$ denklem ve $N+1$ bilinmeyenden oluşmaktadır. Sınır şartlarını uygulamak için sistemdeki ilk ve son denklem silinmiş ve sınır şartları uygulanmıştır. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlendikten sonra genel denklemin katsayılarının özel seçimleri ile sırasıyla EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerinin sayısal çözümleri iki test problemi yardımıyla incelenmiştir.

Sayısal çözümler incelendikten sonra önerilen yöntemin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Sonuç olarak uygulama kolaylığı açısından sonlu elemanlar metoduna göre daha kolay bir metot olan quasi B-spline interpolasyon metodu denklemlerin sayısal çözümü için iyi sonuçlar vermiştir. Dolayısıyla önerilen yöntem ile benzer tipteki diğer kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümleri de araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alexander, M.E. and Morris, J.L.L. 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *Journal of Computational Physics* 30, 428-451.
- Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., 1972, Model Equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 272, 47-78.
- Crank J. and Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43, 50—64.
- Crawford, F., 1968, *Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3 Waves*, Mcgraw-Hill College, 600 p.
- Dağ, İ., 2000, Least squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,182, 205-215.
- Dağ, İ., Irk, D. and Sarı, M., 2012, The extended cubic B-spline algorithm for a modified regularized long wave equation, *Chinese Physics B*, 22, 040207.
- Dağ, İ. and Özer, M. N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling* 25, 221-231.
- Dağ, İ., Saka, B. and Irk, D., 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation* 159(2), 373–389.
- Dağ, İ., Saka, B. and Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 190(1-2), 532-547.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Dağ, İ., Irk, D. and Boz, A., 2007, Simulation of EW wave generation via Quadratic B-spline finite element method, *International Journal of Mathematics and Statistics* 1(A07), 46-59.
- Dağ, İ., Korkmaz A. and Saka, B., 2010, Cosine expansion-based differential quadrature algorithm for numerical solution of the RLW equation 26, 3, 544-560.
- De Boor, C. and G.Fix, 1973, Spline approximation by quasi-interpolants, *J. Approx. Theory* 8, 19-45.
- Doğan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 17, 485-494.
- Doğan, A., 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling* 26(7), 771-783.
- Eilbeck, J.C. and McGuire, G.R., 1975, Numerical study of the regularized long-wave equation I: numerical methods, *Journal of Computational Physics* 19, 43-57.
- Eilbeck, J.C. and McGuire, G. R., 1977, Numerical study of the regularized long-wave equation II: interaction of solitary waves, *Journal of Computational Physics* 23, 63-73.
- Esen, A., 2005, A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation* 168, 270-282.
- Esen, A. and Kutluay, S., 2006, Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation* 174, 833-845.
- Esen, A. and Kutluay, S., 2008, Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13, 1538-1546.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Evans D.J. and Raslan K.R., 2005, Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation. *International Journal of Computer Mathematics* 82(4), 445–455.
- Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , <http://www.weizmann.ac.il/~home/fnfal/soliton.pdf>.
- Farin, G., 2001, *Curves and Surfaces for CAGD*, fifth ed., Morgan Kaufman, San Francisco.
- Frederickson, P.O., 1971, Quasi interpolation, extrapolation, and approximation in the plane in *Proceedings of the Manitoba Conference on Numerical Mathematics*, Dept. Comput. Sci., University of Manitoba, 159-167.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, Solitary waves of the regularised long wave equation, *Journal of Computational Physics* 91, 441-459.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1992, Solitary waves of the equal width wave equation, *Journal of Computational Physics* 101, 218-223.
- Gardner, L. R. T. and Dağ, İ., 1995, The boundary-forced regularised long-wave equation, *Il Nuovo Cimento* 110 B N. 12, 1487-1496.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Dağ, İ., 1995, A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 11, 59-68.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 12(11), 795-804.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A. and Amein N.K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 147, 147-152.
- Geyikli, T. and Karakoç, S. B. G., 2011, Septic B-Spline Collocation Method for the Numerical Solution of the Modified Equal Width Wave Equation, *Applied Mathematics* 2, 739-749.
- Haq, F., Islam, S. and Tirmizi, S., 2010, A Numerical Technique for Solution of the MRLW Equation Using Quartic B-splines, *Applied Mathematical Modeling*. Vol. 34, 4151–4160.
- Irk, D., Saka, B. and Dağ, İ., 2003, Cubic spline method for the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18, 201-214.
- Irk, D., Dağ, İ. and Doğan, A., 2005, Numerical integration of the RLW equation using cubic splines, *Anziam Journal* 47, 131-142.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 148 s.
- Irk, D., 2012, B-spline Galerkin solutions for the equal width equation, *Physics of Wave Phenomena* 20, 2 , 122-130.
- Irk, D., 2012, Solitary wave solutions for the regularized long-wave equation, *Physics of Wave Phenomena* 20, 3, 174-183.
- Irk, D., and Keskin, P., 2012, Numerical Solution of the MRLW Equation Using Finite Difference Method, *International Journal of Nonlinear Science*, 14, 3, 355-361.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Jain, P.C. and Iskandar, L., 1979, Numerical solutions of the regularized long wave equation, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 20, 195-201.
- Jiang, Z. and Wang, R., 2010, An Improved Numerical Solution of Burgers' Equation by Cubic B-spline Quasi-interpolation 7:5,1013–1021.
- Karakoç, S. B. G., and Geyikli, T., 2012, Numerical Solution of the Modified Equal Width Wave Equation, *International Journal of Differential Equations* 2012, 587208.
- Keskin, P., 2010, Solitary dalga çözümüne sahip bazı KTD'lere sonlu farklar yöntemlerinin uygulanması, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 77 s.
- Khalifa, A.K., Raslan, K.R. and Alzubaidi, H.M., 2007, A finite difference scheme for the MRLW and solitary wave interactions, *Applied Mathematics and Computation* 189, 346-354.
- Kutluay, S. and Esen, A., 2006, A finite difference solution of the regularized long wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 1–14.
- Mohyud-Din, S. T., Yıldırım A., Berberler M. E. and Hosseini, M. M., 2010, Numerical Solution of Modified Equal Width Wave Equation, *World Applied Sciences Journal* 8 (7), 792-798.
- Morrison, P.J., Meiss, J.D. and Carey, J.R., 1981, Scattering of RLW solitary waves, *Physica* 11D, 324–336.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85, 143–159.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics* 25(2), 321-330.
- Ramos, J.I., 2006, Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations, *Applied Mathematics and Computation* 179, 622-638.
- Raslan, K.R., 2004, A computational method for the equal width equation, *International Journal of Computer Mathematics* 81(1), 63-72.
- Raslan, K.R., 2005a, Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation, *Applied Mathematics and Computation* 168, 795-805.
- Raslan, K.R., 2005b, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, *Applied Mathematics and Computation* 167(2), 1101-1118.
- Raslan, K.R., 2009, Numerical study of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) equation, *Chaos Solitons & Fractals*, 42(3), 1845-1853.
- Raslan, K.R. and Hassan, S. M., 2009, Solitary waves for the MRLW equation, *Applied Mathematics Letters* 22, 7, 984-989.
- Raslan, K.R. and El-Danaf, T.S., 2010, Solitary wave solutions of the MRLW equation using quintic B-splines, *Journal of King Sauri University, (Baskida)*.
- Roshan, T., 2011, A Petrov-Galerkin method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation* 218, 2730-2739.
- Sablonnière, P., 2000, Quasi-interpolants splines sobre particiones uniformes, in: *First Meeting in Approximation Theory of the University of Jaén, Ubeda, June 29-July 2, 2000, Prépublication IRMAR 00-38, Rennes.*

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Sablonnière, P., 2005, Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* 63, 211–222.
- Saka, B., Irk, D. and Dağ, İ., 2003, A numerical study of the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18, 99-196.
- Saka, B., 2006, A finite element method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation* 175, 730-747.
- Saka, B., 2007, Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method, *Mathematical and Computer Modelling* 45(9-10), 1096-1117.
- Saka, B. and Dağ, İ., 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24, 1339-1361.
- Saka, B., Dağ, İ., Dereli Y. and Korkmaz, A., 2008a, Three different methods for numerical solution of the EW equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 32, 556-566.
- Saka, B., Dağ, İ. and Irk, D., 2008b, Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation, *Anziam Journal* 49, 389-410.
- Saka, B., Şahin, A. and Dağ, İ., 2011, B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company 27, 3, 581-607.
- Schoenberg, I. J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.* vol. 4, pp. 45–99 and 112–141.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Soliman, A. A. and Hussien, M. H., 2005, Collocation solution for RLW equation with septic spline, *Applied Mathematics and Computation* 161, 623–636.
- Yılmaz, E., 2012, Solitary dalga çözümüne sahip bazı KTD'lere sonlu elemanlar yöntemlerinin uygulanması, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 88 s.
- Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics* 57(5), 841-847.
- Zaki, S. I., 2000a, A least squares finite element scheme for the EW equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 381-392.
- Zaki, S.I., 2000b, Solitary wave interactions for the modified equal width equation, *Computer Physics Communications* 126, 219-231.
- Zaki, S. I., 2001, Solitary waves induced by the boundary forced EW equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 4881-4887.
- Zhu, C. G. and Kang, W. S., 2010, Numerical solution of Burgers-Fisher equation by cubic B-spline quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation* 216, 2679-2686.
- Zhu, C. G. and Wang, R. H., 2009, Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation* 208, 1, 260–272.