Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopileri Üzerine

Ramazan SAKA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Temmuz 2014

On Homotopies of Crossed Modules Morphisms

Ramazan SAKA

MASTER DISSERTATION
Department of Mathematics and Computer Science
July 2014

Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopileri Üzerine

Ramazan SAKA

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İ .İ lker AKÇA

Temmuz 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Ramazan SAKA' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopileri Üzerine** " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İ .İ lker AKÇA

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. İ .İ lker AKÇA

Üye : Doç. Dr. Enver USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Osman AVCIOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Çaprazlanmış modüller üzerine hazırlanan bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışmanın temelini olşturan homotopi ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Özellikle zincir komplekslerin morfizmleri arasında tanımlanan zincir homotopileri detaylı olarak incelenmiştir. İkinci bölümde değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise çaprazlanmış modül morfizmleri arasında derivasyon olarak isimlendirilen bir dönüşüm tanımlanmış ve bunun yardımıyla çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi elde edilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise iki çaprazlanmış modül verildiğinde, bunlar arasında tanımlanan morfizmlerin homotopilerinin bir denklik bağıntısı oluşturduğu ve morfizmler ile homotopilerin bir gruboid meydana getirdiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış modül, Zincir Kompleks, Derivasyon, Homotopi, Gruboid.

SUMMARY

This master thesis on the crossed modules consists of four chapters. In the first chapter we recall some basic notions about homotopy theory. Aspecially it is given the homotopy theory of chain complex morphisms. In the following chapter the notion of crossed module is given on the theory of commutative algebra. In the third section we define a map called derivation. This map is defined between the two crossed module morphisms. Using this derivation we define homotopy of crossed module morphisms. In the last chapter we show that homotopy of crossed module morphisms is an equivalance relation. Also we define a grouboid structure of crossed module morphisms and their homotopies.

Keywords: Crossed module, Chain complex, Derivation, Homotopy, Groupoid.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevk eden, yöneten ve tezim boyunca her türlü bilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın,

Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

Giriş

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J.H.C. Whitehead [12] tarafından tanımlanmıştır. Whitehead özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve ko-homoloji, cebirsel K-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinatör grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli rolü vardır. Çaprazlanmış modül kavramı, Whitehead tarafından grup yapısı üzerinde tanımlanmasından sonra cebir yapısı üzerine de aktarılmıştır. Cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin genel teorisi ile ilgili olarak T. Porter ve N. Shaumnu nın [9] ve [7] çalışmaları vardır.

Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin homotopisi R. Brown, P.J. Higgins [5] tarafından verilmiş ve daha ayrıntılı olarak J.F. Martins [8] tarafından incelenmiştir. Bu tezde değişmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin homotopisi tanımlanacaktır. Bir $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \to 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\partial} R$$

biçiminde bir zincir kompleks olarak ele alınabilir. Dolayısıyla çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi zincir kompleks morfizmlerinin homotopisi olarak incelenir. Buna göre çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi şu şekilde ifade edilebilir:

$\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ve $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ iki çaprazlanmış modül ve $f = (f_2, f_1)$ ile $g = (g_2, g_1)$ ise $\mathbf{C}$ ile $\mathbf{C}'$ arasında iki çaprazlanmış modül morfizmi olsun. f ile g arasındaki homotopi

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, bend right, "g_2"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] & R \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] \\
C' \arrow[r, "\partial'"'] & R'
\end{tikzcd}$$

diyagramından

$$g_1 - f_1 = \partial' s$$

$$g_2 - f_2 = s\partial$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$s : R \longrightarrow C'$$

dönüşümü olarak tanımlanır. Burada dikkat edilmesi gereken şey s nin bir cebir morfizmi olmayacağıdır.

Tezin ilk bölümünde çalışmanın temelini oluşturan homotopi ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Özellikle zincir komplekslerin morfizmleri arasında tanımlanan zincir homotopileri detaylı olarak incelenmiştir. İkinci bölümde değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise çaprazlanmış modül morfizmleri arasında derivasyon olarak isimlendirilen bir dönüşüm tanımlanmış ve bunun yardımıyla çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi elde edilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise iki çaprazlanmış modül verildiğinde, bunlar arasında tanımlanan morfizmlerin homotopilerinin bir denklik bağıntısı oluşturduğu ve morfizmler ile homotopilerin bir gruboid meydana getirdiği gösterilmiştir.

BÖLÜM 1

Homotopi

Giriş

Grupların çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi R. Brown-P.J. Higgins [5] tarafından verilmiş ve daha ayrıntılı olarak J.F. Martins [8] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotopi tanımlanacak ve değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmleri ile bunlar arasında tanımlanan homotopilerin bir gruboid oluşturduğu gösterilecektir.

1.1 Homotopi

X ile Y iki topolojik uzay ve $f,g : X \longrightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer $I = [0,1]$ olmak üzere bir

$$\begin{array}{rccc} \phi : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \mapsto & \phi(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu, $\phi(x,0) = f(x)$ ve $\phi(x,1) = g(x)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f ile g fonksiyonlarına homotopiktirler ve ϕ ye f ile g arasındaki homotopi denir.

Kamps K.H. ve Porter, T. [6] çalışmalarında homotopi kavramını kategoriler üzerine genelleştirmişlerdir. Bunun için ilk olarak homotopi tanımındaki $I = [0,1]$ in yerini tutan ve adına silindir obje denilen kavramı tanımlamışlardır. Şimdi bu tanımlar kısaca hatırlatılacaktır.

Tanım 1.1 (Silindir Funktoru) [6] $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ birim funktor olmak üzere, bir

$$\begin{array}{rccc} (\quad) \times I : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & X & \mapsto & X \times I \\ & f & \mapsto & f \times id_I \end{array}$$

funktoru için,

$$e_0 : Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow (\quad) \times I, \qquad e_1 : Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow (\quad) \times I \text{ ve } \qquad \sigma : (\quad) \times I \longrightarrow Id_{\mathcal{C}}$$

doğal dönüşümleri

$$\sigma e_0 = \sigma e_1 = id_{\mathcal{C}}$$

şartını sağlıyorsa $(\quad) \times I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoruna $\mathcal{C}$ üzerinde bir **I** silindiri ya da silindir funktoru denir. $(\quad) \times I$ funktoru bir X objesine uygulanırsa, bu $X \times I$ biçiminde gösterilir.

Örnek 1.1 Bir silindir için en temel örnek **Top** topolojik uzaylar kategorisi için verilebilir. Bir X topolojik uzayı üzerindeki

$$X \times I = X \times [0,1]$$

silindiri için, e_0, e_1 ve σ doğal dönüşümleri

$$\begin{array}{rccl} e_0(X): & X & \longrightarrow & X \times [0,1] \\ & x & \mapsto & e_0(X)(x) = (x,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} e_1(X): & X & \longrightarrow & X \times [0,1] \\ & x & \mapsto & e_1(X)(x) = (x,1) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} \sigma(X): & X \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \mapsto & \sigma(X)(x,t) = x \end{array}$$

olarak tanımlanır.

Artık bir **I**$=((\quad) \times I, e_0, e_1, \sigma)$ silindiri ile birlikte, bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki homotopi oluşturulabilir.

Tanım 1.2 [6] $\mathcal{C}$ bir kategori, X ile Y , $\mathcal{C}$ kategorisinin herhangi iki objesi ve $f, g : X \longrightarrow Y$ iki morfizm olsun. Eğer bir

$$\phi : X \times I \longrightarrow Y$$

morfizmi $\phi e_0(X) = f$ ve $\phi e_1(X) = g$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f ile g ye homotopiktir denir ve $f \simeq g$ biçiminde gösterilir, ϕ morfizmine de f ile g arasındaki homotopi denir.

Burada amacımız değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül morfizlerinin homotopisini tanımlamaktır. Çaprazlanmış modüller uzunluğu 1 olan zincir kompleksler olduğu için önce değişmeli cebirlerin zincir kompleks morfizmleri ve bunlar arasındaki morfizlerin homotopisi hatırlansın.

1.1.1 Değişmeli Cebirlerin Zincir Kompleks (Chain Complex) Kategorisi

k değişmeli birimli halka olmak üzere, $CAlg_k$ değişmeli k-cebirlerin kategorisi olsun. $CAlg_k$ nın objelerinin bir $\mathbf{C} = \{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ dizisine $CAlg_k$ kategorisinde dereceli obje denir. Eğer objelerin elemanları mevcutsa ve $x \in C_n$ ise x e n inci derecendir denir. $CAlg_k$ da $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ dereceli objeleri için bir $\mathbf{f} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ morfizmi $\{f_n : C_n \longrightarrow D_{n+r} : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde bir morfizmler dizisinden oluşuyorsa **f** morfizmine r inci derecedendir denir. Bir **C** dereceli objesi için $n \leq 0$ için $C_n = 0$ oluyorsa **C** ye pozitif, $n < 0$ için $C_n = 0$ oluyorsa **C** ye negatif olmayan ve $n \geq 0$ için $C_n = 0$ oluyorsa **C** ye negatif dereceli obje denir.

$CAlg_k$ kategorisi içinde $\mathbf{C} = \{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ bir dereceli obje ve $\mathbf{d} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ morfizmi her $n \in \mathbb{Z}$ için $d_{n-1}d_n = 0$ olacak şekilde -1 dereceli morfizm olmak üzere $(\mathbf{C}, \mathbf{d})$ ikilisine $CAlg_k$ kategorisinde bir zincir kompleksi denir, buna göre bir zincir kompleks

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow \cdots$$

şeklinde gösterilebilir ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $d_{n-1}d_n = 0$ dir.

C ve **D**, $CAlg_k$ kategorisinde iki zincir kompleks olsun.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} : \cdots \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "f_3"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[d, "f_0"] \\
\mathbf{D} : \cdots \arrow[r] & D_3 \arrow[r, "{d_3}'"'] & D_2 \arrow[r, "{d_2}'"'] & D_1 \arrow[r, "{d_1}'"'] & D_0
\end{tikzcd}$$

Her bir $n \in \mathbb{Z}$ için

$$f_{n-1}d_n = d'_n f_n$$

olacak şekildeki $\{f_n : C_n \longrightarrow D_n | n \in \mathbb{Z}\}$ morfizmlerin bir dizisine **C** ve **D** arasındaki zincir dönüşümü denir. Buna göre objeleri $CAlg_k$ kategorisindeki zincir kompleksler ve morfizmleri bunlar arasındaki zincir dönüşümleri olan bir kategori elde edilir. Bu kategoriyi $Ch(CAlg_k)$ ile göstereceğiz.

C ve **D** zincir kompleksleri için $\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$ direkt toplamı $(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_n = C_n \oplus D_n$ ve $\partial_n(x, y) = (d_n(x), d'_n(y))$ olmak üzere

$$\mathbf{C} \oplus \mathbf{D} : \cdots \longrightarrow (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_3 \xrightarrow{\partial_3} (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_2 \xrightarrow{\partial_2} (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_1 \xrightarrow{\partial_1} (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_0 \longrightarrow \cdots$$

şeklinde tanımlanır. **C** ve **D** için $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ tensör çarpımı ise

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_n = \sum_{i+j=n} C_i \otimes_k D_j$$

ve

$$\partial_n(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{\deg(x)} x \otimes d'(y)$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}:\cdots\longrightarrow(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})_3\xrightarrow{\partial_3}(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})_2\xrightarrow{\partial_2}(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})_1\xrightarrow{\partial_1}(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})_0\longrightarrow\cdots$$

biçimindedir.

Burada $I_1=k$, $I_0=k\oplus k$ ve $n\neq 0,1$ için $I_n=0$ alınarak ve aşikar olmayan mevcut tek ∂_1 diferensiyelini

$$\begin{array}{rccc}\partial_1: & I_1 & \longrightarrow & I_0\\ & x & \mapsto & (-x,x)\end{array}$$

şeklinde tanımlayarak *Ch(CAlg$_k$)* kategorisinin bir

$$\mathbf{I}:\cdots\longrightarrow 0\xrightarrow{0}I_1\xrightarrow{\partial_1}I_0\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

objesi tanımlanabilir. Bunu kullanarak $\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}$ tensör çarpımını oluşturalım.

$$\begin{array}{rcl}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{C})_n &=& \sum\limits_{i+j=n} I_i\otimes_k C_j\\ &=& (I_0\otimes C_n)\oplus(I_1\otimes C_{n-1})\\ &=& ((k\oplus k)\otimes C_n)\oplus(k\otimes C_{n-1})\\ &=& (k\otimes C_n)\oplus(k\otimes C_n)\oplus(k\otimes C_{n-1})\\ &\simeq& C_n\oplus C_n\oplus C_{n-1}\end{array}$$

bulunur. Burada

$$(x,y,z)\in C_n\oplus C_n\oplus C_{n-1}\simeq(I_0\otimes C_n)\oplus(I_1\otimes C_{n-1})$$

için $(x,y,z)=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)$ alınırsa, $a,b\in k$ için

$$\begin{array}{rcl}\partial_n(x,0,0) &=& \partial_n((a\oplus 0)\otimes x)\\ &=& \partial_0(a\oplus 0)\otimes x+(a\oplus 0)\otimes d_n(x)\\ &=& 0\otimes x+(a\oplus 0)\otimes d_n(x)\\ &=& (a\oplus 0)\otimes d_n(x)\\ &=& (d_n(x),0,0),\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\partial_n(0,y,0) &=& \partial_n((0\oplus b)\otimes y)\\ &=& \partial_0(0\oplus b)\otimes y+(0\oplus b)\otimes d_n(y)\\ &=& 0\otimes y+(0\oplus b)\otimes d_n(y)\\ &=& (0\oplus b)\otimes d_n(y)\\ &=& (0,d_n(y),0)\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}\partial_n(0,0,z) &=& \partial_n(a\otimes z)\\ &=& \partial_1(a)\otimes z+(-1)a\otimes d_{n-1}(z)\\ &=& (-a\oplus a)\otimes z\oplus(-a)\otimes d_{n-1}(z)\\ &=& (-a\otimes z)\oplus(a\otimes z)\oplus(-a\otimes d_{n-1}(z))\\ &=& (-z,z,-d_{n-1}(z))\end{array}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{array}{rcl}\partial_n(x,y,z) &=& (d_n(x),0,0)+(0,d_n(y),0)+(-z,z,-d_{n-1}(z))\\ &=& (d_n(x)-z,d_n(y)+z,-d_{n-1}(z))\end{array}$$

elde edilir. Buna göre

$$\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}:\cdots\longrightarrow(\mathbf{I}\otimes\mathbf{C})_n\xrightarrow{\partial_n}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{C})_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

objesi için $(\mathbf{I}\otimes\mathbf{C})_n = C_n\oplus C_n\oplus C_{n-1}$ ve $\partial_n(x,y,z) = (d_n(x)-z, d_n(y)+z, -d_{n-1}(z))$ biçimindedir. Ayrıca $(x,y,z)\in(\mathbf{I}\otimes\mathbf{C})_n = C_n\oplus C_n\oplus C_{n-1}$ için

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n(x,y,z) &= \partial_{n-1}(d_n(x)-z,d_n(y)+z,-d_{n-1}(z))\\
&= \begin{array}{l}(d_{n-1}(d_n(x)-z)-(-d_{n-1}(z)),\\ d_{n-1}(d_n(y)+z)+(-d_{n-1}(z)),-d_{n-2}(-d_{n-1}(z)))\end{array}\\
&= \begin{array}{l}(d_{n-1}d_n(x)-d_{n-1}(z)+d_{n-1}(z),\\ d_{n-1}d_n(y)+d_{n-1}(z)-d_{n-1}(z),d_{n-2}d_{n-1}(z))\end{array}\\
&= (d_{n-1}d_n(x),d_{n-1}d_n(y),d_{n-2}d_{n-1}(z))\\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

olur. O halde $\mathbf{I}\otimes\mathbf{C}$ bir zincir kompleksidir.

Tanım 1.3 [6] $\mathbf{C}$, *Ch(CAlg$_k$)* kategorisinin bir objesi olsun. $\mathbf{C}\times I$, her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$(C\times I)_n = C_n\oplus C_n\oplus C_{n-1}$$

ve diferensiyeli

$$\partial_n(x,y,z) = (d_n(x)-z,d_n(y)+z,-d_{n-1}(z))$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\begin{array}{rccc}
e_0(\mathbf{C}): & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}\times I\\
 & x & \mapsto & e_0(\mathbf{C})(x)=(x,0,0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
e_1(\mathbf{C}): & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}\times I\\
 & y & \mapsto & e_1(\mathbf{C})(y)=(0,y,0)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc}
\sigma(\mathbf{C}): & \mathbf{C}\times I & \longrightarrow & \mathbf{C}\\
 & (x,y,z) & \mapsto & \sigma(\mathbf{C})(x,y,z)=x+y
\end{array}$$

biçimindedir.

Yardımcı Teorem 1.4 **([6]) (i)** $\mathbf{C}\times I$, *CAlg$_k$* kategorisi üzerinde bir zincir kompleksidir.

(ii) e_0, e_1 ve σ, *Ch(CAlg$_k$)* kategorisinde birer morfizmdir.

(iii) $(\mathbf{C}\times I, e_0(\mathbf{C}), e_1(\mathbf{C}), \sigma(\mathbf{C}))$, *Ch(CAlg$_k$)* kategorisinde silindir objedir.

Tanım 1.5 [6]$f,g:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{D}$ iki zincir dönüşümü olsun.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}:\cdots \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, bend right, "g_3"'] \arrow[d, bend left, "f_3"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, bend right, "g_2"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] \arrow[dl, "h_2"'] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] \arrow[dl, "h_1"'] & C_0 \arrow[d, bend right, "g_0"'] \arrow[d, bend left, "f_0"] \arrow[dl, "h_0"'] \\
\mathbf{D}:\cdots \arrow[r] & D_3 \arrow[r, "{d_3}'"'] & D_2 \arrow[r, "{d_2}'"'] & D_1 \arrow[r, "{d_1}'"'] & D_0
\end{tikzcd}$$

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $g_n - f_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$ esitliğini sağlayacak şekildeki

$$h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$$

dönüşümlerinin $h = \{h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$ ailesine f ile g arasındaki zincir homotopisi denir.

Önerme 1.6 ([6]) $f, g : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ iki zincir dönüşümü olsun.

(a) Eğer $H : \mathbf{C} \times I \longrightarrow \mathbf{D}$, f ile g arasında bir homotopi ise $h(z) = H(0,0,z)$ olarak tanımlanan h dönüşümü, f ile g arasında bir zincir homotopisidir.

(b) Eğer h, f ile g arasında bir zincir homotopisi ise

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbf{C} \times I & \longrightarrow & \mathbf{D} \\ & (x,y,z) & \mapsto & H(x,y,z) = f(x) + g(y) + h(z) \end{array}$$

dönüşümü f ile g arasında bir homotopi oluşturur.

İspat: (a) $H : \mathbf{C} \times I \longrightarrow \mathbf{D}$, f ile g arasında bir homotopi olsun. Buna göre

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dotted, no head] & & C \times I \arrow[d, dotted, no head] & & D \arrow[d, dotted, no head] \\
C_n \arrow[rr, shift left, "e_0(C_n)"] \arrow[rr, shift right, "e_1(C_n)"'] \arrow[d, "d_n"'] & & C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \arrow[rr, "H_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & & D_n \arrow[d, "d_n{}'"'] \\
C_{n-1} \arrow[rr, shift left, "e_0(C_{n-1})"] \arrow[rr, shift right, "e_1(C_{n-1})"'] \arrow[d] & & C_{n-1} \oplus C_{n-1} \oplus C_{n-2} \arrow[rr, "H_{n-1}"] \arrow[d] & & D_{n-1} \arrow[d] \\
{} \arrow[d, dotted, no head] & & {} \arrow[d, dotted, no head] & & {} \arrow[d, dotted, no head] \\
{} & & {} & & {}
\end{tikzcd}
$$

$H_n(e_0(C_n)) = H_n(x,0,0) = f_n(x)$ ve $H_n(e_1(C_n)) = H_n(0,y,0) = g_n(y)$ dir. Ayrıca $(x,y,z) \in C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ için

$$
\begin{aligned}
H_n(x,y,z) &= H_n((x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)) \\
&= H_n(x,0,0)+H_n(0,y,0)+H_n(0,0,z)
\end{aligned}
$$

olduğu gözönüne alınırsa $H_n(0,0,z)$ ifadesini $h_{n-1}(z)$ ile gösterilsin yani $H_n(0,0,z) = h_{n-1}(z)$ olsun, bu durumda

$$H_n(x,y,z) = f_n(x) + g_n(y) + h_{n-1}(z)$$

olur, burada

$$
\begin{array}{rccc}
h_{n-1}: & C_{n-1} & \longrightarrow & D_n \\
& z & \mapsto & h_{n-1}(z)
\end{array}
$$

biçimindedir. Ayrıca H bir zincir morfizmi olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$
\begin{tikzcd}
C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \arrow[r, "H_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & D_n \arrow[d, "d_n{}'"] \\
C_{n-1} \oplus C_{n-1} \oplus C_{n-2} \arrow[r, "H_{n-1}"'] & D_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

diyagramı komütatif olmalıdır. Buna göre $(x,y,z) \in C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ için

$$\begin{tikzcd}
(x,y,z) \arrow[r, "H_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & H_n(x,y,z) \arrow[d, "d_n{}'"] \\
(d_n(x)-z, d_n(y)+z, -d_{n-1}(z)) \arrow[r, "H_{n-1}"'] & H_{n-1}(d_n(x)-z, d_n(y)+z, -d_{n-1}(z)) = d_n{}'(H_n(x,y,z))
\end{tikzcd}$$

diyagramından

$$H_{n-1}(d_n(x)-z, d_n(y)+z, -d_{n-1}(z)) = d'_n(H_n(x,y,z))$$

eşitliği elde edilir. Buna göre

$$f_{n-1}(d_n(x)-z) + g_{n-1}(d_n(y)+z) + h_{n-2}(-d_{n-1}(z)) = d'_n(f_n(x)+g_n(y)+h_{n-1}(z))$$

$$f_{n-1}d_n(x) - f_{n-1}(z) + g_{n-1}d_n(y) + g_{n-1}(z) - h_{n-2}d_{n-1}(z) = d'_nf_n(x) + d'_ng_n(y) + d'_nh_{n-1}(z)$$

olur. f ve g, **C** ile **D** arasında zincir morfizmleri olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için $f_{n-1}d_n = d'_nf_n$ ve $g_{n-1}d_n = d'_ng_n$ dir. O halde yukarıdaki eşitlik için

$$d'_nf_n\ (x) - f_{n-1}(z) + d'_ng_n\ (y) + g_{n-1}(z) - h_{n-2}d_{n-1}(z) = d'_nf_n(x) + d'_ng_n(y) + d'_nh_{n-1}(z)$$

yani

$$g_{n-1}(z) - f_{n-1}(z) = d'_nh_{n-1}(z) + h_{n-2}d_{n-1}(z)$$

bulunur. Buna göre her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{array}{rccc} h_n: & C_n & \longrightarrow & D_{n+1} \\ & z & \mapsto & h_n(z) \end{array}$$

dönüşümleri için

$$g_n(z) - f_n(z) = d'_{n+1}h_n(z) + h_{n-1}d_n(z)$$

eşitliği sağlanır. O halde $h(z) = H(0,0,z)$ dönüşümü f ile g arasında bir zincir homotopisidir.

(b) h, f ile g arasında bir zincir homotopisi olsun. Buna göre

$$H(x,y,z) = f(x) + g(y) + h(z)$$

biçiminde tanımlanan H dönüşümü $\mathbf{C} \times I$ ile **D** arasında bir zincir morfizmidir ve ayrıca

$$\begin{array}{rcccl} H(e_0(\mathbf{C}))(x) & = & H(x,0,0) & = & f(x) \\ H(e_1(\mathbf{C}))(y) & = & H(0,y,0) & = & g(y) \end{array}$$

bulunur. O halde H, f ile g arasında bir homotopi belirler. $\square$

Bu önermeye göre **C** ve **D** zincir kompleksleri arasındaki f ve g zincir dönüşümlerinin homotop olması, her $n \in \mathbb{Z}$ için $g_n - f_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$ esitliğini sağlayacak şekildeki $h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ dönüşümlerinin varlığına indirgenir.

BÖLÜM 2

Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller J.H.C. Whitehead [12] tarafından tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modüller, başta homotopi teori, grupların homolojisi ve kohomolojisi, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatöryel grup teori, diferensiyel geometri ve matematiksel fizik de dahil olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli role sahiptir. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını ise T. Porter [9], [10] tanımlamış ve bir çok özelliğini incelemiştir. Burada ilk olarak modül ve cebir kavramları tanıtılacak sonrasında ise gruplar ve değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ele alınacaktır. Bu bölümde verilecek temel kavramlar için [?], [?] ve [4] e bakılabilir.

2.1 Modül ve Cebirler

Tanım 2.1 *R* bir halka olsun. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & rm \end{array}$$

çarpımı ile

$$\begin{array}{rcl} r(m_1+m_2) & = & rm_1+rm_2 \\ (r_1+r_2)m & = & r_1m+r_2m \\ (r_1r_2)m & = & r_1(r_2m) \end{array}$$

şartlarını sağlayan bir M toplamsal abelyen gruba sol R-modül denir. Çarpım

$$\begin{array}{ccc} M \times R & \longrightarrow & M \\ (m,r) & \longmapsto & mr \end{array}$$

şeklinde sağdan tanımlı ise M bir sağ R-modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.1 *R* bir halka olmak üzere, herhangi bir A abelyen grubu $r \in R$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{ccc} R \times A & \longrightarrow & A \\ (r,a) & \longmapsto & ra = 0 \end{array}$$

tanımlaması ile bir R-modül yapısı oluşturur.

Tanım 2.2 R ve S iki halka olsun. Bir M abelyen grubu hem sol R-modül hem de sağ S-modül ve her $r \in R, m \in M$ ve $s \in S$ için

$$r(ms) \quad = \quad (rm)s$$

özelliğini sağlıyor ise M ye $(R-S)$-bimodül denir ve ${}_RM_S$ olarak gösterilir.

Tanım 2.3 M ve N, iki R-modül olsun.

$$f \quad : \quad M \longrightarrow N$$

fonksiyonu, her $x, y \in M$ ve $r \in R$ için,

$$\begin{array}{lcl} f(x+y) & = & f(x)+f(y) \\ f(rx) & = & rf(x) \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise $f : M \longrightarrow N$ ye bir R-modül homomorfizmi denir.

Tanım 2.4 M bir R-modül olsun. M', M nin alt grubu olmak üzere $m' \in M$ ve her $r \in R$ için $rm' \in M'$ ise M' ye M nin bir altmodülü denir.

Örnek 2.2 $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\text{Ç}ekf = \{m \in M : f(m) = 0\}$$

M nin alt modülüdür. Çünkü, Çekf, M nin alt grubu ve $m \in M$, $r \in R$ için

$$f(rm) = rf(m) = r0 = 0$$

olduğundan $rm \in$Çekf dir. Ayrıca,

$$f(M) = \{n \in N : n = f(m), m \in M\}$$

de N nin alt modülüdür. Çünkü $f(M)$, N nin alt grubu ve $n \in f(M)$, $r \in R$ için

$$nr = f(m)r = f(mr)$$

dir ve M bir R-modül olduğundan $mr \in f(M)$ dir. Dolayısıyla,

$$nr \in f(M)$$

elde edilir.

Tanım 2.5 R bir değişmeli halka, A,B ve G birer R-modül olmak üzere

$$f : A \times B \longrightarrow G$$

fonksiyonu,

$$\begin{array}{lcl} f(a+a',b) & = & f(a,b)+f(a',b) \\ f(a,b+b') & = & f(a,b)+f(a,b') \\ rf(a,b) & = & f(ra,b)=f(a,rb) \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise f ye R-bilineer fonksiyon denir.

Tanım 2.6 G bir grup ve S herhangi bir küme olmak üzere, her $x \in S$, g_1 ,$g_2 \in G$ için,

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \longrightarrow & S \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

fonksiyonu

$$e \cdot x = x \quad ve \quad (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$$

eşitliklerini sağlıyor ise bu fonksiyona G grubunun S kümesi üzerine sol etkisi denir. Sağ etki ise $x \cdot g$ olarak tanımlanır.

Örnekler :

1) S_n simetri grubunun $\mathfrak{I}_n = \{1,2,...,n\}$ kümesi üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} S_n \times \mathfrak{I}_n & \longrightarrow & \mathfrak{I}_n \\ (\sigma,x) & \longmapsto & \sigma(x) \end{array}$$

ile tanımlanır.

2) H bir G grubunun alt grubu olmak üzere, H nin G üzerine etkisi eşlenik fonksiyonu adı verilen

$$\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h,x) & \longmapsto & hxh^{-1} \end{array}$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

Tanım 2.7 k bir komütatif halka olsun. Bir M k-cebiri (k üzerinde bir M cebiri)

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \longrightarrow & M \\ (m_1, m_2) & \longmapsto & m_1 m_2 \end{array}$$

ve

$$(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir k-modüldür.

Tanım 2.8 R bir k-cebir ise R üzerinde A cebiri

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (a, a_1) & \longmapsto & a a_1 \end{array}$$

ve

$$(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir R-bimodüldür.

Örnekler :

1) Her halka bir $\mathbb{Z}$-cebirdir. Çünkü her R halkası bir toplamsal abelyan grup olduğundan bir $\mathbb{Z}$-modüldür ve $k \in \mathbb{Z}, r_1, r_2 \in R$ için

$$k(r_1 r_2) = (k r_1) r_2 = r_1 (k r_2)$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla R bir $\mathbb{Z}$-cebirdir.

2) V, bir F cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $Hom_F(V,V)$ endomorfizm halkası bir F-cebirdir. Şöyleki F aynı zamanda bir komütatif halkadır ve her C, R-modül , $r \in F, c \in C$ için, $cr = rc$ tanımlaması ile bir (F,F) bimodüldür. Bu durumda her $r \in F, a \in V$ ve $f \in Hom_F(V,V)$ için

$$\begin{array}{rcll} (rf)(a) & = & f(ar) & (f \text{ modül morfizmi}) \\ & = & f(ra) & (ar = ra) \\ & = & rf(a) & (f \text{ modül morfizmi}) \\ & = & (f(a))r & (f(a) \in V) \\ & = & (fr)(a) & (f \text{ modül morfizmi}) \end{array}$$

olduğundan $rf = fr$ gereğince $Hom_F(V,V)$ bir (F,F) bimodüldür. Ayrıca, $k \in F$, $f,g \in Hom_F(V,V)$ için

$$\begin{aligned} k(fg)(a) &= fg(ka) \\ &= f(g(ka)) \\ &= f(kg)(a) \end{aligned}$$

eşitliği bileşke fonksiyon ve modül morfizmi tanımlarından elde edilir. Dolayısıyla,

$$k(fg) = f(kg)$$

dir. Böylece $Hom_F(V,V)$ bir F-cebirdir.

Tanım 2.9 A bir R-cebir , $\emptyset \neq B \subset A$ olmak üzere $b,b' \in B$, $r \in R$ için

$$\begin{array}{ll} i) & bb' \in B \\ ii) & b - b' \in B \\ iii) & br \text{ ve } rb \in B \end{array}$$

ise B ye A nın altcebiri denir. Aynı zamanda B de bir R-cebirdir.

Tanım 2.10 M ve R , k-cebir olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r \cdot m \end{array}$$

dönüşümü her $k \in k,\ m,m' \in M,\ r,r' \in R$ için

$$\begin{array}{llllll} i) & k(r \cdot m) & = & (kr) \cdot m & = & r \cdot (km) \\ ii) & r \cdot (m + m') & = & r \cdot m + r \cdot m' & & \\ iii) & (r + r') \cdot m & = & r \cdot m + r' \cdot m & & \\ iv) & r \cdot\ (mm') & = & (r \cdot\ m)m' & = & m(r \cdot m') \\ v) & (rr') \cdot m & = & r(r' \cdot m) & & \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise bu dönüşüme bir sol etki (action) denir. $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r \cdot m$ ile gösterilir. Benzer şekilde sağ etki de tanımlanır ve $m \cdot r$ ile gösterilir.

2.2 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Tanım 2.11 $\partial : C \longrightarrow G$ bir grup homomorfizmi ve

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \longrightarrow & C \\ (g,c) & \longmapsto & g \cdot c \end{array}$$

G nin C üzerine etkisi ile birlikte her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için

$$ÇM1) \quad \partial(g \cdot c) \quad = \quad g\partial(c)g^{-1}$$

sağlanıyorsa C ye bir önçaprazlanmış (pre-crossed) modül denir. Ayrıca

$$ÇM2) \quad \partial c \cdot c' \quad = \quad cc'c^{-1}$$

şartı da sağlanıyor ise C ye bir çaprazlanmış modül denir ve (C, G, ∂) ile gösterilir. Burada ÇM2 şartına Peiffer koşulu adı verilir ve $c, c' \in C$ için

$$\langle c, c' \rangle = cc'c^{-1} - \partial c \cdot c'$$

eşitliğine de Peiffer komütatörü adı verilir.

Tanım 2.12 (C, G, ∂) ve(C', G', ∂') iki çaprazlanmış modül olsun. Her $c \in C$ ve $g \in G$ için

$$\varphi(g \cdot c) = \psi(g) \cdot \varphi(c)$$

ve

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\psi"] \\
C' \arrow[r, "\partial'"'] & G'
\end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif , yani

$$\psi(\partial(c) = \partial'(\varphi(c))$$

olacak şekilde $\varphi : C \longrightarrow C', \psi : G \longrightarrow G'$ homomorfizmleri varsa $(\varphi, \ \psi) : (C, G, \partial) \longrightarrow (C', G', \partial')$ morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.

Örnek 2.3 N, G grubunun normal altgrubu olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} iç: & N & \longrightarrow & G \\ & n & \longmapsto & n \end{array}$$

içine (inclusion) homomorfizmi ve

$$\begin{array}{rcll} G\times N & \longrightarrow & N & \\ (g,n) & \longmapsto & g\cdot n & = gng^{-1} \end{array}$$

şeklindeki G nin N üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \partial(g\cdot n) & = & \partial(gng^{-1}) \\ & & = & \partial(g)\partial(n)\partial(g^{-1}) \\ & & = & g\partial(n)g^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ç}M2) & \partial n\cdot n' & = & n\cdot n' \\ & & = & nn'n^{-1} \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.4 M bir $\mathbb{Z}G$-modül olmak üzere

$$\begin{array}{rrcl} \partial = 1: & M & \longrightarrow & G \\ & m & \longmapsto & 1_G \end{array}$$

aşikar (trivial) homomorfizimi ve

$$\begin{array}{rcll} G\times M & \longrightarrow & M & \\ (g,m) & \longmapsto & g\cdot m & = gm \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ç}M1) & \partial(g\cdot m) & = & \partial(gm) \\ & & = & 1 \\ & & = & g1g' \\ & & = & g\partial(m)g^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{Ç}M2) & \partial m\cdot m' & = & 1\cdot m' & \\ & & = & 1m' & \\ & & = & m'mm^{-1} & \\ & & = & mm'm^{-1} & (M \text{ abelyan grup}) \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.5 K bir grup ve $G = \{f_k : K \longrightarrow K\ ; f_k(k') = kk'k^{-1}\}$ kümesi K nın iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere,

$$\begin{array}{rrcl} \partial: & C & \longrightarrow & G \\ & k & \longmapsto & \partial(k) = f_k \end{array}$$

homomorfizmi

$$\begin{array}{rcll} G\times K & \longrightarrow & K & \\ (f_k,k) & \longmapsto & f_k\cdot k' & = kk'k^{-1} \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten

$$
\begin{aligned}
\text{Ç}M1)\quad \partial(f_k \cdot k') &= \partial(kk'k^{-1}) \\
&= \partial(k)\partial(k')\partial(k^{-1}) \\
&= f_k\partial(k')\partial(k)^{-1} \\
&= f_k\partial(k')f_k^{-1}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\text{Ç}M2)\quad \partial k \cdot k' &= f_k \cdot k' \\
&= kk'k^{-1}
\end{aligned}
$$

dir.

2.3 Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarak görülebilir. k sıfırdan farklı birimi olan komütatif halka olmak üzere k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı aşagıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.13 R birimli bir k-cebir olsun. $\partial : C \longrightarrow R$ bir R-cebir morfizmi ve

$$
\begin{array}{rcl}
R \times C & \longrightarrow & C \\
(r,c) & \longmapsto & r \cdot c
\end{array}
\qquad \text{ve} \qquad
\begin{array}{rcl}
C \times R & \longrightarrow & R \\
(c,r) & \longmapsto & c \cdot r
\end{array}
$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

$$
\begin{aligned}
\text{Ç}M1)\quad \partial(r \cdot c) &= r\partial(c) \\
\partial(c \cdot r) &= \partial(c)r
\end{aligned}
$$

sağlanıyorsa C cebirine R üzerinde bir önçaprazlanmış (pre-crossed) modül denir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\text{Ç}M2)\quad \partial c \cdot c' &= cc' \\
c \cdot \partial c' &= cc'
\end{aligned}
$$

şartıda sağlanıyor ise R üzerinde C cebrine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir. Burada ÇM2 şartına Peiffer koşulu adı verilir ve $c, c' \in C$ için

$$\langle c, c' \rangle = cc' - \partial c \cdot c'$$

eşitliğine de Peiffer komütatörü adı verilir.

Tanım 2.14 (C,R,∂) ve (C',R',∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{aligned}\theta(r\cdot c) &= \psi(r)\cdot\theta(c)\\ \theta(c\cdot r) &= \theta(c)\cdot\psi(r)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\theta"'] & R \arrow[d, "\psi"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif, yani

$$\partial'\theta(c) = \psi\partial(c)$$

olacak şekilde $\theta : C \longrightarrow C'$ve $\psi : R \longrightarrow R'$ k-cebir morfizmleri varsa

$$(\theta,\ \psi) : (C,R,\partial) \longrightarrow (C',R',\partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir. O halde $R = R'$ve ψ birim dönüşüm ise, θ bir R-cebir morfizmi olduğundan $\theta(r\cdot c) = r\theta(c)$ dir ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\theta"'] & R \arrow[d, "\psi"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif olduğundan yani

$$\partial'\theta(c) = \partial(c)$$

sağlandığından θ bir çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

Örnek 2.6 R bir k-cebriri ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{aligned} \text{iç} :\ I &\longrightarrow R\\ i &\longmapsto i\end{aligned}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} R\times I & \longrightarrow & I \\ (r,i) & \longmapsto & r\cdot i = ri \end{array}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmı modül aksiyomları

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Ç}M1) & \partial(r\cdot i) & = & \partial(ri) & = & ri & = & r\partial(i) \\ \text{Ç}M2) & \partial i\cdot i' & = & i\cdot i' & = & ii' & & \end{array}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla $(I,R,iç)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tersine , herhangi bir $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış R-modül verildiğinde , $\partial C = I$ nın R de ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 2.7 M herhangi bir R-bimodül olsun.

$$\begin{array}{ccc} M\times M & \longrightarrow & M \\ (m_1,m_2) & \longmapsto & m_1m_2 = 0 \end{array}$$

çarpımı tanımlanırsa M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{array}{cccc} 0: & M & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & 0(x)=0 \end{array}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi

$$\begin{array}{ccc} R\times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r\cdot m = rm \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{Ç}M1) & 0(r\cdot c) & = & 0(rm) & = & 0 & = & r0 & = & r0(m) \\ \text{Ç}M2) & 0m\cdot m' & = & 0\cdot m' & = & 0m' & = & 0 & = & mm' \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Tersine, $\partial : C \longrightarrow R$ herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde, Ç$ek\,\partial$ bir $R/\partial C$-modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.8 K bir cebir ve her $k,k'\in K$ için

$$R=\{f_k; f_k : K\longrightarrow K \;\; f_k(k')=kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{cccc} \partial: & K & \longrightarrow & R \\ & k & \longmapsto & f_k \end{array}$$

cebir homomorfizmi,

$$\begin{array}{rcll} R \times K & \longrightarrow & K & \\ (f_k, k') & \longmapsto & f_k \cdot k' & = kk' \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten

$$\begin{array}{llcl} \text{Ç}M1) & \partial(f_k \cdot k') & = & \partial(kk') \\ & & = & \partial(k)\partial(k') \\ & & = & f_k\partial(k') \\ \text{Ç}M2) & \partial k \cdot k' & = & f_k \cdot k' \\ & & = & kk' \end{array}$$

eşitlikleri elde edilir

Not : Yukarda verilen örneklerde sol etki kullanıldı. Çaprazlanmış modül aksiyomları benzer şekilde sağ etki kullanılarak da kolayca sağlanır.

Tezin bundan sonraki bölümlerinde yine sol etkiyi kullanılacaktır.

BÖLÜM 3

Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Grupların çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi R. Brown-P.J. Higgins [5] tarafından verilmiş ve daha ayrıntılı olarak J.F. Martins [8] tarafından incelenmiştir. Bu kısımda değişmeli **k**-cebir çaprazlanmış modül morfizmleri için homotopi 1.Bölüm de açıklanan zincir homotopisine göre tanımlanacaktır.

3.1 Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Bir $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C \stackrel{\partial}{\longrightarrow} R$$

biçiminde bir zincir kompleks olarak ele alınabilir. Dolayısıyla çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi zincir komplekslerin morfizmlerinin homotopisi olarak incelenir. Buna göre $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ iki çaprazlanmış modül ve $f = (f_2, f_1)$ ile $g = (g_2, g_1)$, $\mathbf{C}$ ile $\mathbf{C}'$ arasındaki çaprazlanmış modül morfizmi olsun. f ve g arasındaki homotopi

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, bend right, "g_2"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] & R \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] \\
C' \arrow[r, "\partial'"'] & R'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
g_1 - f_1 &= \partial' s \\
g_2 - f_2 &= s\partial
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir $s : R \longrightarrow C'$ dönüşümü olarak tanımlanır.

Tanım 3.1 $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ değişmeli $\mathbf{k}-$cebirlerin iki çaprazlanmış modülü ve $f = (f_2, f_1)$, $g = (g_2, g_1) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ iki çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Eğer

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_1 + \partial' s \\
g_2 &= f_2 + s\partial
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$s : R \longrightarrow C'$$

dönüşümü mevcutsa f ve g ye homotopiktir, s dönüşümüne de f ile g arasındaki homotopi denir ve $f \simeq g$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.2 $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ değişmeli $\mathbf{k}-$cebirlerin iki çaprazlanmış modülü ve $f = (f_2, f_1) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $r, r' \in R$ için

$$s(rr') = f_1(r) \cdot s(r') + f_1(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')$$

eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{k}$-lineer $s : R \longrightarrow C'$ dönüşümüne f_1-derivasyonu denir.

Önerme 3.3 $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ değişmeli $\mathbf{k}-$cebirlerin iki çaprazlanmış modülü ve $f = (f_2, f_1) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ve $s : R \longrightarrow C'$ bir f_1-derivasyonu olsun. Buna göre

$$\begin{array}{rccl} g_1 : & R & \longrightarrow & R' \\ & r & \mapsto & g_1(r) = f_1(r) + (\partial' s)(r) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} g_2 : & C & \longrightarrow & C' \\ & c & \mapsto & g_2(c) = f_2(c) + (s\partial)(c) \end{array}$$

dönüşümleri birer $\mathbf{k}-$cebir morfizmidir.

İspat: $r, r' \in R$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{aligned} g_1(r + r') &= f_1(r + r') + (\partial' s)(r + r') \\ &= f_1(r) + f_1(r') + \partial'(s(r) + s(r')) \\ &= f_1(r) + f_1(r') + \partial'(s(r)) + \partial'(s(r')) \\ &= [f_1(r) + (\partial' s)(r)] + [f_1(r') + (\partial' s)(r')] \\ &= g_1(r) + g_1(r'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(kr) &= f_1(kr) + (\partial' s)(kr) \\ &= kf_1(r) + \partial'(ks(r)) \\ &= kf_1(r) + k\partial'(s(r)) \\ &= k[f_1(r) + (\partial' s)(r)] \\ &= kg_1(r), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_1(rr') &= f_1(rr') + (\partial' s)(rr') \\ &= f_1(r)f_1(r') + \partial'(s(rr')) \\ &= f_1(r)f_1(r') + \partial'(f_1(r) \cdot s(r') + f_1(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')) \\ &= f_1(r)f_1(r') + \partial'(f_1(r) \cdot s(r')) + \partial'(f_1(r') \cdot s(r)) + \partial'(s(r)s(r')) \\ &= f_1(r)f_1(r') + f_1(r)\partial'(s(r')) + f_1(r')\partial'(s(r)) + \partial'(s(r))\partial'(s(r')) \\ &= f_1(r)f_1(r') + f_1(r)(\partial' s)(r') + f_1(r')(\partial')s(r) + (\partial' s)(r)(\partial' s)(r') \\ &= [f_1(r) + (\partial' s)(r)][f_1(r') + (\partial' s)(r')] \\ &= g_1(r)g_1(r') \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $g_1 : R \longrightarrow R'$ dönüşümü bir **k**-cebir morfizmidir. Benzer şekilde $c, c' \in C$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{rcl} g_2(c+c') & = & f_2(c+c') + (s\partial)(c+c') \\ & = & f_2(c) + f_2(c') + s(\partial(c) + \partial(c')) \\ & = & f_2(c) + f_2(c') + s(\partial(c)) + s(\partial(c')) \\ & = & [f_2(c) + (s\partial)(c)] + [f_2(c') + (s\partial)(c')] \\ & = & g_2(c) + g_2(c'), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g_2(kc) & = & f_2(kc) + (s\partial)(kc) \\ & = & kf_2(c) + s(k\partial(c)) \\ & = & kf_2(c) + ks(\partial(c)) \\ & = & k[f_2(c) + (s\partial)(c)] \\ & = & kg_2(c), \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} g_2(cc') & = & f_2(cc') + (s\partial)(cc') \\ & = & f_2(c)f_2(c') + s(\partial(cc')) \\ & = & f_2(c)f_2(c') + s(\partial(c)\partial(c')) \\ & = & f_2(c)f_2(c') + f_1(\partial(c)) \cdot s(\partial(c')) + f_1(\partial(c')) \cdot s(\partial(c)) + s(\partial(c))s(\partial(c')) \\ & = & f_2(c)f_2(c') + \partial' f_2(c) \cdot (s\partial)(c') + \partial' f_2(c') \cdot (s\partial)(c) + (s\partial)(c)(s\partial)(c') \\ & = & f_2(c)f_2(c') + f_2(c)(s\partial)(c') + f_2(c')(s\partial)(c) + (s\partial)(c)(s\partial)(c')) \\ & = & [f_2(c) + (s\partial)(c)][f_2(c') + (s\partial)(c')] \\ & = & g_2(c)g_2(c') \end{array}$$

bulunur. Yani $g_2 : C \longrightarrow C'$ dönüşümü bir **k**-cebir morfizmidir. $\square$

Önerme 3.4

$$\begin{array}{rrcl} g_1 : & R & \longrightarrow & R' \\ & r & \mapsto & g_1(r) = f_1(r) + (\partial' s)(r) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rrcl} g_2 : & C & \longrightarrow & C' \\ & c & \mapsto & g_2(c) = f_2(c) + (s\partial)(c) \end{array}$$

olmak üzere, $g = (g_2, g_1)$, $\mathbf{C}$ den $\mathbf{C}'$ ye bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat: i)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_2"'] & R \arrow[d, "g_1"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğunu yani $g_1\partial = \partial' g_2$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $c \in C$ için

$$\begin{aligned}
(g_1\partial)(c) &= f_1(\partial(c)) + (\partial' s)(\partial(c)) \\
&= \partial'(f_2)(c) + \partial'(s\partial(c)) \\
&= \partial'(f_2(c) + s\partial(c)) \\
&= \partial'(g_2(c)) \\
&= (\partial' g_2)(c)
\end{aligned}$$

olduğundan $g_1\partial = \partial' g_2$ dir.

ii) $r \in R$ ve $c \in C$ için $g_2(r \cdot c) = g_1(r) \cdot g_2(c)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
g_2(r \cdot c) &= f_2(r \cdot c) + (s\partial)(r \cdot c) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + s(\partial(r \cdot c)) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + s(r\partial(c)) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + f_1(r) \cdot (s\partial)(c) + f_1(\partial(c)) \cdot s(r) + s(r)s(\partial(c)) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + f_1(r) \cdot (s\partial)(c) + \partial' f_2(c) \cdot s(r) + s(r)s(\partial(c)) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + f_1(r) \cdot (s\partial)(c) + f_2(c)s(r) + s(r)s(\partial(c)) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + f_1(r) \cdot (s\partial)(c) + s(r)f_2(c) + s(r)s(\partial(c)) \\
&= f_1(r) \cdot f_2(c) + f_1(r) \cdot (s\partial)(c) + \partial'(s(r)) \cdot f_2(c) + \partial'(s(r)) \cdot s(\partial(c)) \\
&= f_1(r) \cdot [f_2(c) + (s\partial)(c)] + \partial'(s(r)) \cdot [f_2(c) + (s\partial)(c)] \\
&= [f_1(r) + (\partial' s)(r)] \cdot [f_2(c) + (s\partial)(c)] \\
&= g_1(r) \cdot g_2(c)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $g = (g_2, g_1)$, **C** den **C**$'$ ye bir çaprazlanmış modül morfizmidir. □

Sonuç 3.5 $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ değişmeli $\mathbf{k}-$cebirlerin iki çaprazlanmış modülü ve $f = (f_2, f_1)$, $g = (g_2, g_1) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ iki çaprazlanmış modül morfizmi için

$$s(rr') = f_1(r) \cdot s(r') + f_1(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')$$

f_1-derivasyonu f ile g arasında bir homotopidir.

3.2 Ön-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

$\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ herhangi iki ön-çaprazlanmış modül ve $f = (f_1, f_0)$ bir ön-çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$s(rr') = f_1(r) \cdot s(r') + f_1(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')$$

f_0-derivasyonu tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned}
g_1(r) &= f_1(r) + (\partial' s)(r) \\
g_2'(c) &= f_2(c) + (s\partial)(c)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda Önerme 3.4 gereği g_1 önçaprazlanmış modüller için de bir **k**-cebir morfizmidir.

Diğer yandan g_2' dönüşümünün bir **k**-cebir morfizmi olup olmadığı incelenirse, örneğin homomorfizm olma şartı kontrol edildiğinde,

$$\begin{array}{rcl} g_2'(cc') & = & f_2(cc') + (s\partial)(cc') \\ & = & f_2(c)f_2(c') + s(\partial(cc')) \\ & = & f_2(c)f_2(c') + s(\partial(c)\partial(c')) \\ & = & f_2(c)f_2(c') + f_1(\partial(c)) \cdot s(\partial(c')) + f_1(\partial(c')) \cdot s(\partial(c)) + s(\partial(c))s(\partial(c')) \\ & = & f_2(c)f_2(c') + \partial' f_2(c) \cdot (s\partial)(c') + \partial' f_2(c') \cdot (s\partial)(c) + (s\partial)(c)(s\partial)(c') \\ & \neq & f_2(c)f_2(c') + f_2(c)(s\partial)(c') + f_2(c')(s\partial)(c) + (s\partial)(c)(s\partial)(c')) \\ & \neq & [f_2(c) + (s\partial)(c)][f_2(c') + (s\partial)(c')] \\ & \neq & g_2'(c)g_2'(c') \end{array}$$

elde edilir ki sonuç olarak (C', R', ∂') bir çaprazlanmış modül olmadığı sürece, g_1' dönüşümü bir **k**-cebir morfizmi değildir. Dolayısıyla da (g_2', g_1) bir ön-çaprazlanmış modül morfizmi olmamakta hatta dolayısıyla da bir zincir dönüşümü de olmamaktadır.

Burada,

$$t' : C \longrightarrow \ker(\partial') \subset C'$$

şeklinde ve ayrıca,

$$t'(cc') = < f_2(c), s\partial(c') > + < f_2(c'), s\partial(c) > + t'(c)[f_2(c') + s\partial(c')] + t'(c')[f_2(c) + s\partial(c)] + t'(c)t'(c')$$

ve

$$t'(r \cdot c) = f_1(r) \cdot t'(c) + \partial' s(r) \cdot t(c) + \partial' s(r) \cdot f_2(c) - \partial' f_2(c) \cdot s(r) - < s(r), s\partial(c) >$$

şartlarını sağlayan bir t' dönüşümü tanımlansın.

Bu tanımlamalarla birlikte

$$g_2(c) \quad = \quad f_2(c) + (s\partial)(c) + t'(c)$$

şeklinde tanımlanacak g_2 dönüşümü için,

$$< c, c' > = cc' - \partial(c) \cdot c'$$

olduğu hatırlanacak olursa,

$$
\begin{aligned}
g_2(cc') &= f_2(cc') + (s\partial)(cc') + t'(cc') \\
&= f_2(c)f_2(c') + s(\partial(c)\partial(c')) + t'(cc') \\
&= f_2(c)f_2(c') + f_1(\partial(c)) \cdot s(\partial(c')) + f_1(\partial(c')) \cdot s(\partial(c)) + s(\partial(c))s(\partial(c')) \\
&\quad + < f_2(c), s\partial(c') > + < f_2(c'), s\partial(c) > + t'(c)[f_2(c') + s\partial(c')] \\
&\quad + t(c')[f_2(c) + s\partial(c)] + t'(c)'t(c') \\
&= f_2(c)f_2(c') + \partial' f_2(c) \cdot s\partial(c') + \partial' f_2(c') \cdot s\partial(c) + s\partial(c)s\partial(c') \\
&\quad + f_2(c)s\partial(c') - \partial' f_2(c) \cdot s\partial(c') + f_2(c')s\partial(c) - \partial' f_2(c') \cdot s\partial(c) \\
&\quad + t'(c)[f_2(c') + s\partial(c')] + t(c')[f_2(c) + s\partial(c)] + t'(c)'t(c') \\
&= f_2(c)f_2(c') + s\partial(c)s\partial(c') + f_2(c)s\partial(c') + f_2(c')s\partial(c) \\
&\quad + t'(c)[f_2(c') + s\partial(c')] + t(c')[f_2(c) + s\partial(c)] + t'(c)'t(c') \\
&= [f_2(c) + (s\partial)(c) + t'(c)][f_2(c') + (s\partial)(c') + t'(c')] \\
&= g_2(c)g_2(c')
\end{aligned}
$$

olup g_2 bir **k**-cebir homomorfizmi olacaktır.

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
(g_1\partial)(c) &= g_1(\partial(c)) \\
&= f_1(\partial(c)) + (\partial' s)(\partial(c)) \\
&= \partial'(f_2)(c) + \partial'(s\partial(c)) \\
&= \partial'(f_2)(c) + \partial'(s\partial(c)) + \partial'(t(c)) \qquad (t(c) \in Ker(\partial')) \\
&= \partial'(f_2(c) + s\partial(c) + t(c)) \\
&= \partial'(g_2(c)) \\
&= (\partial' g_2)(c)
\end{aligned}
$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned}
g_2(r\cdot c) &= f_2(r\cdot c)+(s\partial)(r\cdot c)+t(r\cdot c)\\
&= f_1(r)\cdot f_2(c)+s(\partial(r\cdot c))+t(r\cdot c)\\
&= f_1(r)\cdot f_2(c)+s(r\partial(c))+t(r\cdot c)\\
&= f_1(r)\cdot f_2(c)+f_1(r)\cdot(s\partial)(c)+f_1(\partial(c))\cdot s(r)+s(r)s(\partial(c))\\
&\quad +f_1(r)\cdot t'(c)+\partial' s(r)\cdot t(c)+\partial' s(r)\cdot f_2(c)-\partial' f_2(c)\cdot s(r)-<s(r),s\partial(c)>\\
&= f_1(r)\cdot f_2(c)+f_1(r)\cdot(s\partial)(c)+\partial' f_2(c)\cdot s(r)+s(r)s\partial(c)\\
&\quad +f_1(r)\cdot t'(c)+\partial' s(r)\cdot t(c)+\partial' s(r)\cdot f_2(c)-\partial' f_2(c)\cdot s(r)\\
&\quad -s(r)s\partial(c)+(\partial' s)(r)\cdot(s\partial)(c)\\
&= f_1(r)\cdot f_2(c)+f_1(r)\cdot(s\partial)(c)+f_1(r)\cdot t'(c)\\
&\quad +\partial' s(r)\cdot t'(c)+\partial' s(r)\cdot f_2(c)+(\partial' s)(r)\cdot(s\partial)(c)\\
&= [f_1(r)+(\partial' s)(r)]\cdot[f_2(c)+(s\partial)(c)+t(c)]\\
&= g_0(r)\cdot g_1(c)
\end{aligned}$$

olup (g_2,g_1) bir ön-çaprazlanmış modül morfizmidir.

Sonuç 3.6 Buna göre $f=(f_2,f_1)$ ile $g=(g_2,g_1)$ ön-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotop olabilmesi için,

$$\begin{aligned}
g_1(r) &= f_1(r)+(\partial' s)(r)\\
g_2(c) &= f_2(c)+(s\partial)(c)+t'(c)
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde bir

$$s(rr')=f_1(r)\cdot s(r')+f_1(r')\cdot s(r)+s(r)s(r')$$

f_1-derivasyonu ile birlikte

$$t'(cc')=<f_2(c),s\partial(c')>+<f_2(c'),s\partial(c)>+t'(c)[f_2(c')+s\partial(c')]+t'(c')[f_2(c)+s\partial(c)]+t'(c)t'(c')$$

ve

$$t'(r\cdot c)=f_1(r)\cdot t'(c)+\partial' s(r)\cdot t(c)+\partial' s(r)\cdot f_2(c)-\partial' f_2(c)\cdot s(r)-<s(r),s\partial(c)>$$

özelliklerine sahip bir

$$t':C\longrightarrow \ker(\partial')\subset C'$$

dönüşümü mevcut olmalıdır.

BÖLÜM 4

Gruboid

Her morfizmi bir izomorfizm olan bir kategoriye bir grupoid denir. Bir grupoid çok objeli bir grup gibi düşünüleceğinden gruptan daha genel bir kavramdır. Bir grup bir tek objeli bir grupoid olarak düşünülebilir. Grupoid yapısı ilk olarak Brandt [2] tarafından tanımlanmıştır. Burada ilk olarak, grupoid kavramını [11] Tonks un açık tanımı ile verilecektir. Daha sonra objeleri değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmleri ve morfizmleri bunlar arasında tanımlanan homotopiler olan bir gruboid elde edilebiliceğini gösterilecektir.

Tanım 4.1 Bir $\mathbf{C}$ kategorisi; objelerinin sınıfı $Ob(\mathbf{C})$, morfizmlerinin sınıfı $Mor(\mathbf{C})$, kaynak ve hedef morfizmleri $s,t : Mor(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{C})$ ile obje morfizmi

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon & : & Ob(\mathbf{C}) & \to & Mor(\mathbf{C}) \\ & & x & \longmapsto & \varepsilon(x) = I_x \end{array}$$

ve $Mor(\mathbf{C}) \times Mor(\mathbf{C}) = \{(g,h) \in Mor(\mathbf{C}) \times Mor(\mathbf{C}) : s(h) = t(g)\}$ üzerinde tanımlı "." biçimindeki çarma işlemiyle birlikte aşağıdaki koşulları sağlayan bir yapıdır.

i) her $(g,h) \in Mor(\mathbf{C}) \times Mor(\mathbf{C})$ için $s(h.g) = s(g)$ ve $t(h.g) = t(h)$ dir,

ii) her $g,h,f \in Mor(C)$ ile $s(f) = t(h)$ ve $s(h) = t(g)$ için $f.(h.g) = (f.h).g$ dir,

iii) her $x \in Ob(\mathbf{C})$ için $s(I_x) = x = t(I_x)$ dir,

iv) her $g \in Mor(\mathbf{C})$ için $g.I_{s(g)} = g$ ve $I_{t(g)}.g = g$ dir.

Tanım 4.2 Obje ve morfizmlerinin sınıfı birer küme olan bir kategoriye **küçük kategori** denir.

4.1 Gruboid

Her morfizmi bir izomorfizm olan bir kategoriye bir grupoid denir. Bir grupoid çok objeli bir grup gibi düşünüleceğinden gruptan daha genel bir kavramdır. Bir grup bir tek objeli bir grupoid olarak düşünülebilir. Grupoid yapısı ilk olarak (Brandt, 1926) tarafından tanımlanmıştır. Burada grupoid kavramı (Tonks, 1993) un açık tanımı ile verilecektir.

Tanım 4.3 **G** bir kategori olmak üzere objeler sınıfı $Ob(\mathbf{G})$, morfizmler sınıfı $Mor(\mathbf{G})$, kaynak ve hedef dönüşümleri $s,t : Mor(\mathbf{G}) \to Ob(\mathbf{G})$, obje dönüşümü

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon & : & Ob(\mathbf{G}) & \longrightarrow & Mor(\mathbf{G}) \\ & & x & \longmapsto & \varepsilon(x) = I_x \end{array}$$

ters dönüşümü

$$\begin{array}{rcccl} i & : & Mor(\mathbf{G}) & \longrightarrow & Ob(\mathbf{G}) \\ & & g & \longmapsto & i(g) = g^{-1} \end{array}$$

ve $Mor(\mathbf{G}) \times Mor(\mathbf{G}) = \{(g,h) \in Mor(\mathbf{G}) \times Mor(\mathbf{G}) : s(h) = t(g)\}$ üzerinde tanımlı "." biçimindeki çarma işlemiyle birlikte aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda **G** kategorisi gruboid olarak isimlendirilir.

i) Her $(g,h) \in Mor(\mathbf{G}) \times Mor(\mathbf{G})$ için $s(h.g) = s(g)$ ve $t(h.g) = t(h)$ dir,

ii) her $g,h,f \in Mor(\mathbf{G})$ ile $s(f) = t(h)$ ve $s(h) = t(g)$ için $f.(h.g) = (f.h).g$ dir,

iii) her $x \in Ob(\mathbf{G})$ için $s(I_x) = x = t(I_x)$ dir,

iv) her $g \in Mor(\mathbf{G})$ için $g.I_{s(g)} = g$ ve $I_{t(g)}.g = g$ dir,

v) her $g \in Mor(\mathbf{G})$ için $s(g) = t(g^{-1}), t(g) = s(g^{-1})$ ve $g^{-1}.g = I_{s(g)}$ ile $g.g^{-1} = I_{t(g)}$ olacak şekilde bir $g^{-1} \in Mor(\mathbf{G})$ tersi mevcuttur.

Örnek 4.1 Her grup gruboid yapılabilir.

Kabul edelim ki G bir grup olsun. C nin tek objesi $*$, $C(*,*) = G$ ve işlem grup işlemidir. G bir grup olduğundan birleşme ve birim eleman özeliğini sağlar. Dolayısıyla C bir kategoridir. C nin her morfizmi izomorfizm olduğundan (yani G nin elemanlarının tersi olduğundan) C bir gruboiddir.

Örnek 4.2 Bir X kümesi kendi üzerinde gruboid olarak düşünülebilir. Burada $s = t = I_X$ ve her elemanı birim morfizmdir. Bütün elemanları birim olan bu tür gruboidlere **boş (null) gruboid** denir. Her $x \in X$ için sadece bir 1_X dönüşümü vardır. Bu dönüşümlerin bileşkesi de $1_X.1_X = 1_X$ olacağından başka da işlemi yoktur.

Örnek 4.3 X bir küme ve G bir grup olsun. $X \times G \times G$ yapısı X üzerinde aşağıdaki gibi bir gruboid oluşturur. Kaynak ve hedef dönüşümleri $s(x,g,y) = x$, $t(x,g,y) = y$, ters dönüşüm

$i(x,g,y) = (x,g,y)^{-1} = (y,g^{-1},x)$, obje dönüşümü $\varepsilon(x,g,y) = (x,1,y)$ ve kısmi çarpım işlemi $(z,h,y)(y,g,x) = (z,hg,x)$ şeklindedir. Dolayısıyla $(X \times G \times G, X, s, t, i, \varepsilon, m)$ bir gruboid olur. Bu gruboide **aşikar gruboid** denir.

Örnek 4.4 X bir küme olsun. O halde X obje kümesi ve $X \times X$ morfizm kümesi olacak şekilde bir gruboid vardır. Burada (x,y) ikilisi $x \mapsto y$ morfizmini göstermektedir. Çok basit ve sıradan görünmesine karşın bu gruboidin uygulamada kilit bir rolü vardır. Bunun bir nedeni, eğer G, $X \times X$ in bir alt gruboidi ve X üzerinde tam ise o zaman G, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu da her $x \in X$, $(x,x) \in X \times X$ için $(x,y) \in G$ ise $(y,x) \in G$ ve $(z,y),(y,x) \in G$ ise $(z,x) \in G$ demektir.

Örnek 4.5 X bir küme olmak üzere $R \subset X \times X$ denklik bağıntısı X üzerinde bir gruboiddir. Burada morfizmler kümesi $Mor(R) = R = \{(x,y) \mid x,y \in X\}$ ve objeler kümesi $Ob(R) = X$ olmak üzere kaynak ve hedef dönüşümleri sırasıyla

$$\begin{array}{rcllcl} s & : & R & \longrightarrow & X \\ & & (x,y) & \longmapsto & s(x,y) = x \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcllcl} t & : & R & \longrightarrow & X \\ & & (x,y) & \longmapsto & t(x,y) = y, \end{array}$$

ters dönüşüm

$$\begin{array}{rcllcl} i & : & R & \longrightarrow & R \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x,y)^{-1} = (y,x) \end{array}$$

, obje dönüşümü

$$\begin{array}{rcllcl} e & : & X & \longrightarrow & R \\ & & x & \longmapsto & I_X \end{array}$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$\begin{array}{rcllcl} m & : & R \times R & \longrightarrow & R \\ & & (x,y),(y,z) & \longmapsto & (x,y)(y,z) = (x,z) \end{array}$$

şeklindedir. Böylece $(Mor(R), Ob(R), s, t, i, e, m)$ bir gruboid oluşturur.

Örnek 4.6 Topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki homeomorfizmler kategorisi bir gruboid oluşturur. Gerçekten, morfizmler kümesi topolojik uzaylar arası homeomorfizmler, yani; $Mor(G) = \{f \mid f : X \to Y$ homeomorfizmler, X, Y topolojik uzaylar$\}$ ve objelerin kümesi $Ob(G) = \{X \mid X$ bir topolojik uzay$\}$ olmak üzere, $f \in Mor(G)$, $f : X \to Y$ için kaynak ve hedef dönüşümleri $s(f) = X$, $t(f) = Y$, ters dönüşüm

$$\begin{array}{rcllcl} i & : & Mor(G) & \longrightarrow & Ob(G) \\ & & f & \longmapsto & f^{-1} \end{array}$$

obje morfizmi

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon & : & X & \longrightarrow & Mor(G) \\ & & X & \longmapsto & \varepsilon(X) = I_X \end{array}$$

ve kısmi çarpım işlemi $Mor(G) \times Mor(G) = \{(f,g) \in Mor(G) \times Mor(G) : t(h) = s(g)\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} m & : & Mor(G) \times Mor(G) & \longrightarrow & Mor(G) \\ & & (f,g) & \longmapsto & g.f \end{array}$$

ile tanımlıdır. Böylece $(Mor(G), Ob(G), s, t, i, e, m)$ bir gruboid oluşturur.

Yardımcı Teorem 4.4 (E,R,δ) ve (E',R',δ') herhangi iki çaprazlanmış modül ve $f = (f_2, f_1)$ bir ön-çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} 0_s : & R & \longrightarrow & E' \\ & r & \mapsto & 0_s(r) = 0_{E'} \end{array}$$

bir f_1-derivasyondur.

İspat:

$$\begin{array}{rcl} 0_s(rr') & = & 0_{E'} \\ & = & 0_{E'} + 0_{E'} + 0_{E'} \\ & = & f_1(r) \cdot 0_{E'} + f_1(r') \cdot 0_{E'} + 0_{E'} 0_{E'} \\ & = & f_1(r) \cdot 0_s(r') + f_1(r') \cdot 0_s(r) + 0_s(r) 0_s(r') \end{array}$$

olup f_1-derivasyon şartı sağlanmış olur. □

Yardımcı Teorem 4.5 (E,R,δ) ve (E',R',δ') herhangi iki çaprazlanmış modül, $f = (f_2, f_1)$ ve $g = (g_2, g_1)$ çaprazlanmış modül morfizmleri ve s bir f_1-derivasyon olmak üzere $f \simeq g$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rccl} -s : & R & \longrightarrow & E' \\ & r & \mapsto & -s(r) = -(s(r)) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $-s$ dönüşümü bir g_1-derivasyondur.

İspat:

$$\begin{array}{rcl} -s(rr') & = & -(s(rr')) \\ & = & -(f_1(r) \cdot s(r') + f_1(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')) \\ & = & -(f_1(r) \cdot s(r')) - (f_1(r') \cdot s(r)) - (s(r)s(r')) \\ & = & -(f_1(r) \cdot s(r')) - (f_1(r') \cdot s(r)) - s(r)s(r') + s(r)s(r') - s(r)s(r') \\ & = & -(f_1(r) \cdot s(r')) - ((\delta' s)(r) \cdot s(r')) - (f_1(r') \cdot s(r)) - ((\delta' s)(r') \cdot s(r)) \\ & & +s(r)s(r') \\ & = & -(f_1(r) + (\delta' s)(r)) \cdot s(r') - (f_1(r) + (\delta' s)(r)) \cdot s(r) + s(r)s(r') \\ & = & (f_1(r) + (\delta' s)(r)) \cdot -s(r') + (f_1(r) + (\delta' s)(r)) \cdot -s(r) + s(r)s(r') \\ & = & g_1(r) \cdot -s(r') + g_1(r') \cdot -s(r) + s(r)s(r') \\ & = & g_1(r) \cdot -s(r') + g_1(r') \cdot -s(r) + ((-s(r))(-s(r'))) \end{array}$$

olup $-s$ bir g_1-derivasyondur. □

Yardımcı Teorem 4.6 (E,R,δ) ve (E',R',δ') herhangi iki çaprazlanmış modül, $f=(f_2,f_1)$, $g=(g_2,g_1)$ ve $h=(h_2,h_1)$ çaprazlanmış modül morfizmleri, s bir f_1 derivasyon ve s' bir g_1 derivasyon olacak şekilde $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ morfizmleri verilsin.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrr, "\delta"] \arrow[d, bend right, "h_1"'] \arrow[d, "g_2"] \arrow[d, bend left, "f_1"] & & & R \arrow[llld, bend right, "s'"'] \arrow[llld, "s"] \arrow[d, bend right, "h_0"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, bend left, "f_0"] \\
C' \arrow[rrr, "\delta'"'] & & & R'
\end{tikzcd}$$

Bu durumda,

$$\begin{array}{rccl}
s \ominus s' : & R & \longrightarrow & E' \\
 & r & \mapsto & (s \ominus s')(r) = s(r) + s'(r)
\end{array}$$

şeklinde tanımlanan $s \ominus s'$ dönüşümü bir f_1-derivasyondur.

İspat: Öncelikle $f \simeq g$ olduğundan dolayı

$$g_1 = f_1 + \delta' s$$

$$g_2 = f_2 + s\delta$$

ve ayrıca $g \simeq h$ olduğundan dolayı da,

$$h_1 = g_1 + \delta' s'$$

$$h_2 = g_2 + s'\delta$$

eşitlikleri mevcuttur.

Ayrıca s bir f_1-derivasyon olup,

$$s(rr') = f_1(r) \cdot s(r') + f_1(r') \cdot s(r) + s(r)s(r')$$

ve s' bir g_1-derivasyon olup,

$$s'(rr') = g_1(r) \cdot s'(r') + g_1(r') \cdot s'(r) + s'(r)s'(r')$$

şeklinde tanımlıdır.

O halde $s \ominus s'$ için f_1-derivasyon şartı incelenirse,

$$\begin{aligned}
(s \ominus s')(rr') &= s(rr') + s'(rr') \\
&= f_1(r)\cdot s(r') + f_1(r')\cdot s(r) + s(r)s(r') + g_1(r)\cdot s'(r') \\
&\quad + g_1(r')\cdot s'(r) + s'(r)s'(r') \\
&= f_1(r)\cdot s(r') + f_1(r')\cdot s(r) + s(r)s(r') + (f_1(r) + \delta' s(r))\cdot s'(r') \\
&\quad + (f_1(r') + \delta' s(r'))\cdot s'(r) + s'(r)s'(r') \\
&= f_1(r)\cdot s(r') + f_1(r')\cdot s(r) + s(r)s(r') + f_1(r)\cdot s'(r') + \delta' s(r)\cdot s'(r') \\
&\quad + f_1(r')\cdot s'(r) + \delta' s(r')\cdot s'(r) + s'(r)s'(r') \\
&= f_1(r)\cdot s(r') + f_1(r')\cdot s(r) + s(r)s(r') + f_1(r)\cdot s'(r') + s(r)s'(r') \\
&\quad + f_1(r')\cdot s'(r) + s(r')s'(r) + s'(r)s'(r') \\
&= f_1(r)\cdot (s(r') + s'(r')) + f_1(r')\cdot (s(r) + s'(r)) \\
&\quad + (s(r) + s'(r))(s(r') + s'(r')) \\
&= f_1(r)\cdot s \ominus s'(r') + f_1(r')\cdot s \ominus s'(r) + (s \ominus s')(r)(s \ominus s')(r')
\end{aligned}$$

olup $s \ominus s'$ bir f_1-derivasyondur. $\square$

Teorem 4.7 (E,R,δ) ve (E',R',δ') herhangi iki çaprazlanmış modül, $f = (f_2, f_1)$ ve $g = (g_2, g_1)$ çaprazlanmış modül morfizmleri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
g_1(r) &= f_1(r) + (\delta' s)(r) \\
g_2(e) &= f_2(e) + (s\delta)(e)
\end{aligned}$$

"$f \simeq g \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(r) = f_1(r) + (\delta' s)(r) \\ g_2(e) = f_2(e) + (s\delta)(e) \end{cases}$ olacak şekilde bir $s : R \longrightarrow E'$ derivasyonu vardır"

şeklinde tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: i) Yansıma Özelliği:

Yardımcı Teorem 4.4 de tanımlı 0_s f_1-derivasyonu ele alınacak olursa,

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= f_1(r) + 0_R \\
&= f_1(r) + (\delta' 0_s)(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(e) &= f_2(e) + 0_{E'} \\
&= f_2(e) + (0_s\delta)(e)
\end{aligned}$$

olup $f \simeq f$ elde edilir.

ii) Simetri Özelliği:

$f \simeq g$ olsun. Bu durumda tanım gereği,

$$\begin{aligned}
g_1(r) &= f_1(r) + (\delta' s)(r) \\
g_2(e) &= f_2(e) + (s\delta)(e)
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir s f_1-derivasyonu mevcuttur.

Eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılır ve ayrıca Yardımcı Teorem 4.5 de tanımlanan $-s$ dönüşümünün bir g_1-derivasyon olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f_1(r) &= g_1(r) - (\delta' s)(r) \\ &= g_1(r) + \delta'(-s(r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(e) &= g_2(e) - (s\delta)(e) \\ &= g_2(e) + (-s(\delta(e)) \end{aligned}$$

olup $g \simeq f$ elde edilir.

iii) Geçişme Özelliği:

$f \simeq g$ ve $g \simeq h$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g_1(r) &= f_1(r) + (\delta' s)(r) \\ g_2(e) &= f_2(e) + (s\delta)(e) \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} h_1(r) &= g_1(r) + (\delta' s')(r) \\ h_2(e) &= g_2(e) + (s'\delta)(e) \end{aligned}$$

olacak şekilde s, s' f_1-derivasyonları mevcuttur.

Eşitliklerde gerekli düzenlemeler yapılır ve $s \ominus s'$ nün bir f_1-derivasyon olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} h_1(r) &= f_1(r) + (\delta' s)(r) + (\delta' s')(r) \\ & f_1(r) + \delta'(s(r) + s'(r)) \\ & f_1(r) + \delta'(s \ominus s')(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(e) &= f_2(e) + (s\delta)(e) + (s'\delta)(e) \\ & f_2(e) + s(\delta(e)) + s'(\delta(e)) \\ & f_2(e) + (s \ominus s')\delta(e) \end{aligned}$$

olup $f \simeq h$ elde edilir.

O halde

“$f \simeq g \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(r) = f_1(r) + (\delta' s)(r) \\ g_2(e) = f_2(e) + (s\delta)(e) \end{cases}$ olacak şekilde bir $s : R \longrightarrow E'$ derivasyonu vardır”

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $\square$

Teorem 4.8 $\mathbf{C} = (C, R, \partial)$ ve $\mathbf{C}' = (C', R', \partial')$ değişmeli cebirlerin herhangi iki çaprazlanmış modülü olsun. Objeleri $\mathbf{C}$ ile $\mathbf{C}'$ çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizmler ve morfizmleri bunlar arasında tanımlanan homotopiler olan bir gruboid elde edilebilir.

İspat: $\mathbf{C} = (C,R,\partial)$ ile $\mathbf{C}' = (C',R',\partial')$ değişmeli $\mathbf{k}-$cebirlerin iki çaprazlanmış modülü olsun. $\mathbf{C}$ den $\mathbf{C}'$ ye giden çaprazlanmış modül morfizmlerinin kümesini $\mathcal{O}$ ve bunlar arasındaki homotopilerin kümesini de $\mathcal{H}$ ile gösterelim. $f = (f_2, f_1)$, $g = (g_2, g_1), h = (h_2, h_1) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ çaprazlanmış modül morfizmleri $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ olacak şekilde verilsin. Yani $f, g, h \in \mathcal{O}$ olsun.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, bend right, "h_2"'] \arrow[d, "g_2"] \arrow[d, bend left, "f_2"] & R \arrow[d, bend right, "h_1"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[d, bend left, "f_1"] \arrow[dl, bend right, "s'"'] \arrow[dl, "s"] \\
C' \arrow[r, "\partial'"'] & R'
\end{tikzcd}$$

Buna göre $f \simeq g$ olduğundan dolayı

$$g_1 = f_1 + \partial' s$$

$$g_2 = f_2 + s\partial$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde bir $s : R \longrightarrow C'$ homotopisi ve $g \simeq h$ olduğundan dolayı

$$h_1 = g_1 + \partial' s'$$

$$h_2 = g_2 + s'\partial$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde bir $s' : R \longrightarrow C'$ homotopisi mevcuttur. O halde $s, s' \in \mathcal{H}$ dir. Buna göre

$$\begin{array}{rccc} s \ominus s' : & R & \longrightarrow & C' \\ & r & \mapsto & (s \ominus s')(r) = s(r) + s'(r) \end{array}$$

olarak tanımlanan $s \ominus s'$ için

$$\begin{array}{ccccc} h_1 & = & g_1 + \partial' s' & = & f_1 + \partial'(s \ominus s') \\ h_2 & = & g_2 + s'\partial & = & f_2 + (s \ominus s')\partial \end{array}$$

elde edilir. Buradan $s \ominus s'$dönüşümünün $f = (f_2, f_1)$ ile $h = (h_2, h_1)$ morfizmleri arasında bir homotopi olduğu elde edilir. O halde $s \ominus s' \in \mathcal{H}$ olur. Buna göre $\mathcal{H}$ üzerinde

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (s, s') & \mapsto & s \ominus s' \end{array}$$

şeklinde tanımlanan bir işlem elde edilir. $0 : R \longrightarrow C'$, $0(r) = 0$ dönüşümü bir $f = (f_2, f_1)$ morfizmi için f den f ye homotopidir. Yani $s \ominus 0 = s$ olacak şekilde bir $0 \in \mathcal{H}$ mevcuttur. Ayrıca bir $s \in \mathcal{H}$, f ile $g \in \mathcal{O}$ morfizmleri arasında bir homotopi ise $(-s)(r) = -s(r)$ şeklinde tanımlanan $-s$ dönüşümü de g ile f arasında bir homotopi belirler. O halde

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (s, s') & \mapsto & s \ominus s' \end{array}$$

işlemi, obje kümesi $\mathcal{O}$ ve morfizm kümesi $\mathcal{H}$ olan $(\mathcal{H}, \mathcal{O})$ ikilisini gruboid yapar. $\square$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan bu tez çalışmasında değişmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi incelenmiştir. Ayrıca çaprazlanmış modül morfizmleri ve bunlar arasında tanımlanan homotopilerin bir gruboid oluşturduğ gösterilmiştir.

Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi gruplar üzerinde homoloji, ko-homoloji, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatöryel grup toeri ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli role sahiptir. 2-çaprazlanmış modül yapısı da çaprazlamış modül gibi bu alanlarda uygulama alanına sahip bir başka cebirsel yapı olarak incelenmektedir. Bu tezde incelenen homotopi kavramı, 2-çaprazlanmış modüllerin morfizmleri içde ele alınabilir. Dolayısıyla bu çalışma sonrasında 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisinin incelenmesi önerilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Atiyah M.F., Macdonald I.G., *Introduction to Commutative Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] Brandt H., *Uber eine Verallgememarungdes Gruppenbegriffers,* Math. Ann., 96, 360-366, 1926. 30

[3] Brown, K.S, *Cohomology of Groups,* Springer-Verlag.

[4] Brown, R. Higgins P.J, *On the Connection Between the Second Relative Homotopy Groups of Some Related Spaces,* Proc. London Math. Soc., 36 (3), 1978. 12

[5] Brown, R. Higgins P.J, *Tensor Product and Homotopies for w-groupoids and crossed complex,* Journal Pure Appl. Algebra, 47 (1), 1-33, 1987. 1, 3, 23

[6] Kamps K.H., Porter, T., *Abstact Homotopy and Simple homotopy Theory,* World Scientific, 1996. 3, 4, 7, 8

[7] Nizar, M.S., *Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras,* Bangor, 1992. 1

[8] Martins J.F., *The Fundamental 2-Crossed Complex of a Reduced CW-Complex,* Homology, Homotopy and Application, vol 13 (2), 129-157, 2011. 1, 3, 23

[9] Porter, T., *Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconceles,* J.Algebra, 109, 458-465, 1987. 1, 12

[10] Porter, T., *Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebra,* J. Algebra, 109, 415-429, 1987. 12

[11] Tonks, A., *Theory and applications of crossed complexes,* PhD. thesis, University of Wales, 1993. 30

[12] Whitehead, J.H.C., *Combinatorial Group Theory II,* American Mathematical Society, 1949.

1, 12