f-Kenmotsu Manifoldlar ve Ricci Solitonlar Üzerine

Tolga Demirli

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2014

On the Ricci Solitons and *f*-Kenmotsu Manifolds

Tolga Demirli

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

June 2014

f-Kenmotsu Manifoldlar ve Ricci Solitonlar Üzerine

Tolga Demirli

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

Haziran 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Tolga Demirli'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "*f*-Kenmotsu Manifoldlar ve Ricci Solitonlar Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Cumali EKİCİ

İkinci Danışman **:** -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Melih TURĞUT

Üye : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlarında eğrilik tensörlerini, Ricci solitonlarını ve bazı eğrilik şartlarını incelemektir.

Öncelikle, Ricci solitonlar ve f-Kenmotsu manifoldlar üzerine daha önceden yapılan çalışmalar hakkında tarihsel bilgiler verilmiştir. Ardından, geriye kalan çalışmalar iki kısma ayrılırsa ilk kısımda bu tez çalışmasında kullanılacak olan temel kavramlar ve bazı teoremler ele alınmıştır. Devamında Kenmotsu manifoldlarında bazı eğrilik şartlarına göre Ricci solitonların λ sabitine bağlı olarak daralan, genişleyen ve değişmeyen olma durumları gösterilmiştir. Bunun yanı sıra f-Kenmotsu manifoldlar üzerine bazı tanımlar ve teoremler, eğrilik şartları ve bu şartlara göre Ricci solitonların hesaplamalarından oluşmaktadır. İkinci kısımda ise; semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlar üzerine bazı tanımlar ve teoremler verilip, eğrilik şartları ve bu şartlara göre Ricci solitonların λ sabiti ile f fonksiyonuna bağlı olarak sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca Ricci semi-simetrik f-Kenmotsu manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen değme metrik manifoldu, Eğrilikler, Metrik koneksiyon, Kenmotsu manifoldu, f-Kenmotsu manifoldu, Einstein manifoldu, Ricci solitonlar.

SUMMARY

The aim of this thesis study is to examine Ricci solitons on *f*-Kenmotsu manifold with the semi-symmetric non-metric connection and some curvature conditions on these manifolds.

Firstly, a short historical brief is given about previous studies related to *f*-Kenmotsu manifolds and Ricci solitons. Then, if rest part of this study is divided into two sections, firstly fundemantal notions and some theorems, that be used on this study, were indicated. After that, it is investigated that according to some curvature conditions Ricci solitons on Kenmotsu manifolds which are classified as shrinking, expanding and steady with respect to λ constant. Furthermore, some definitions and theorems, curvature conditions and Ricci solitons' calculations according to these conditions on *f*-Kenmotsu manifolds are claimed. In second section, some definitions and theorems are given related to *f*- Kenmotsu manifolds with semi-symmetric non-metric connection, curvature conditions and according to these conditions Ricci solitons are classified regards to *f* function and λ constant. Moreover, it is indicated that if *f*- Kenmotsu manifold is Ricci semi-symmetrik then it is also named as Einstein manifold.

Keywords: Almost almost contact metric manifold, Curvatures, Metric connection, Kenmotsu manifold, *f*-Kenmotsu manifold, Einstein manifold, Ricci solitons.

TEŞEKKÜR

f-Kenmotsu Manifoldlar ve Ricci Solitonlar Üzerine adlı bu tez çalışmamda, bana yardım ederek beni yönlendiren ve gerekli her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın

Doç. Dr. Cumali EKİCİ

hocama, çalışmam süresince her zaman yanımda olan değerli arkadaşlarıma ve her şeyim aileme destekleri için çok teşekkür ederim.

ESKİŞEHİR, 2014 Tolga DEMİRLİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
g	Skaler çarpma
d	Diferensiyel operatör
V	Reel vektör uzayı
ξ	Karakteristik vektör alanı
$[,]$	Lie bracket operatörü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^{∞} fonksiyonların uzayı
L_X	X vektör alanına göre Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
T_PM	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
∇	Riemann koneksiyonu
∇_X	X e göre kovaryant türev operatörü
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
τ	Skaler eğrilik
P	Projektif eğrilik tensörü
$\check{C}$	Quasi-konformal eğrilik tensörü
H	Konformal eğrilik tensörü
$\widetilde{\nabla}$	Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon
ϕ	$(1,1)-$ tipinde tensör alanı
Φ	2-temel form
η	1-form

BÖLÜM 1
GİRİŞ

1983 yılında, Değme geometride Ricci solitonlar üzerine araştırmalar yapılmaya başlanmıştır (Sharma and Sinha, 1983). 1988 yılındaki çalışması ile Hamilton tarafından, Einstein metriğinin bir genellemesi olan Ricci solitonlar hakkında bilgi verilmiştir (Hamilton, 1988). Ardından bu konu üzerinde yoğun bir şekilde durulmuştur (Tripathi, 2008; Bejan and Crasmareanu, 2011).

1972 yılında, Kenmotsu tarafından bazı özel şartları sağlayan ve Kenmotsu manifold olarak da bilinen değme Riemann manifoldları incelenmiştir (Kenmotsu, 1972). Ardından (Sharma, 2008) bu çalışmalar Lorentzian değme manifoldları üzerine yoğunlaştırıldı. Sharma'nın yürüttüğü çalışmalar doğrultusunda birtakım araştırmalar yapıldı (Bagewadi and Ingalahalli, 2012). Ayrıca Ricci soliton hesaplamaları f-Kenmotsu manifoldlar üzerinde gerçekleştirildi (Calin and Crasmareanu, 2010). Ardından Ricci solitonlar ve bazı eğrilik şartları arasındaki ilişkiler incelendi (Nagaraja and Premalatha, 2012).

1968 yılında, quasi-konformal eğrilik tensörü üzerine bazı incelemeler yapıldı (Yano and Sawaki, 1968). Ardından bazı matematikçiler tarafından semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar üzerine yoğunlaşıldı ve bu konuda birçok farklı yaklaşım geliştirildi (Liang, 1972; Pravanovic, 1975; Agashe and Chafle, 1992; Sengupta, et al., 2000).

1991 yılında, normal yerel konformal hemen hemen kosimplektik manifoldlar ile $f-$Kenmotsu manifoldlarında bazı eğrilik özellikleri incelendi ve bu tür manifoldlara bir geometrik yaklaşım kazandırıldı (Olszak and Rosca, 1991). Bu konu hakkında diğer bilim insanları tarafından Ricci semi-simetrik $f-$Kenmotsu manifoldlarının Einstein manifold olduğu ispatlandı (Yıldız, et al., 2013). 1997 yılında ise Zhen, Cabrerizo ve Fernandez tarafından $K-$değme manifoldlarının projektif flat olma koşulları incelendi ve bu yönde çalışmalar yürütüldü (Zhen, et al., 1997). Son olarak $K-$değme manifoldlarında Ricci solitonlar üzerine çalışıldı (Sharma, 2008).

Teorik fizikçiler tarafından da sicim teorisi ile ilgili Ricci soliton denklemi ele alınmıştır. Bu yöndeki ilk katkı, (Friedan, 1985) çalışması ile bazı yönlerini tartışan Friedan'a aittir. (M, g) bir Riemann manifold, V bir vektör alanı, S M üzerinde bir Ricci tensör ve λ sabit bir değer olmak üzere g metriği

$$L_V g + 2S + 2\lambda g = 0$$

şartını sağlıyorsa (g, V, λ) üçlüsüne Ricci soliton denir. Buna göre Ricci soliton λ sayısının negatif, sıfır veya pozitif olmasına göre daralan, değişmeyen veya genişleyen olarak adlandırılır. Kompakt bir manifold üzerinde bir Ricci soliton hem 2-boyutta hem de 3-boyutta sabit eğriliğe sahiptir (Hamilton, 1988; Ivey, 1993). Ayrıntılı olarak konu ile ilgili bazı çalışmalar Chow ve Knopf tarafından verilmiştir (Chow and Knopf, 2004).

Eğer $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu W_4 sınıfına ait ise bir M manifoldu üzerinde hemen hemen değme metrik yapıya bir trans-Sasakian yapı adı verilir (Oubina, 1985). 2012 yılında Turan, De ve Yıldız tarafından Ricci solitonlar ve gradient Ricci solitonlar 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlarda incelenmiştir (Yıldız, et al., 2013).

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Ricci solitonlar ve f-Kenmotsu manifoldlar üzerine daha önceden yapılmış olan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramları ve bazı teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde Kenmotsu manifoldlarında bazı eğrilik şartlarına göre Ricci solitonların λ sabitine bağlı olarak sınıflandırılması verilmiştir. Dördüncü bölüm f-Kenmotsu manifoldlar üzerine bazı tanım ve teoremler, eğrilik şartları ve bu şartlara göre Ricci solitonların hesaplamalarından oluşmaktadır. Beşinci bölümde semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlar üzerine bazı tanım ve teoremler verilip eğrilik şartları ve bu şartlara göre Ricci solitonların λ sabiti ile f fonksiyonuna bağlı olarak sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca Ricci semi-simetrik f-Kenmotsu manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu gösterilmiştir.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldlar ve Koneksiyonlar

Çalışmanın bu kısmında koneksiyon kavramı, koneksiyon kavramı yardımıyla tanımlanan diğer kavramlar, 1-form ve Lie operatörü verilmiştir.

Tanım 2.1.1. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{array} \tag{2.1}$$

fonksiyonu için

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1998; Spivak, 1979).

Tanım 2.1.3. $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $P \in E^n$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ E^n için standart baz ve $f : E^n \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\overrightarrow{v}_p[f]$ ye f nin $\overrightarrow{v}_p$ için yöne göre türevi denir. $\overrightarrow{v}_p[f]$ yöne göre türevi

$$\overrightarrow{v}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.4. M bir C^∞ manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. O halde her $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa ∇ ye M üzerinde Riemann (veya Levi-Civita) koneksiyonu adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.5. $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde vektör alanları iseler,

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre kovaryant türevi denir.

Burada $\{\partial_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}^n_v)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. M bir C^∞ $n-$manifold ve M üzerinde bir afin koneksiyon ∇ olsun.

$$\begin{aligned} Tor : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to Tor(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ koneksiyonunun torsiyon tensörü denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.7. V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{array}{rccc} [,]: & V\times V & \rightarrow & V \\ & (X,Y) & \rightarrow & [X,Y] \end{array}$$

dönüşümü de

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \equiv 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne V üstünde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.8. M bir C^∞ manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{array}{rccc} [,]: & \chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & (X,Y) & \rightarrow & [X,Y] \end{array}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa $[,]$ bir Lie operatörüdür (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.9. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre Lie türev operatörü olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984; Duggal and Bejancu, 1996):

i) $L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

ii) $L_X Y = [X, Y]\,, \quad \forall Y \in \chi(M)$

iii) $L_X g\,(Y, Z) = X\,(g\,(Y, Z)) - g\,([X, Y]\,, Z) - g\,([X, Z]\,, Y)\,, \forall X, Y$ ve $Z \in \chi(M)$.

Tanım 2.1.10.

$$\begin{array}{rlcl} d: & C(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \chi^*(\mathbb{E}^n) \\ & f & \rightarrow & df \end{array} \tag{2.2}$$

öyle ki, $\forall X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ için $df(X) = X\,[f]$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna diferensiyel operatör denir (Willmore, 1959).

Tanım 2.1.11. $P \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun.

$$w: \ \mathbb{E}^n \ \rightarrow \ \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w: \ \mathbb{E}^n \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

olacak şekilde

$$\pi: \ \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P) \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu mevcutsa w ya $\mathbb{E}^n$ üstünde $1-$form denir ve bu $1-$formların cümlesini $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Yardımcı Teorem 2.1.1. **(Poincare Teoremi)** M bir $n-$manifold ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. O zaman,

$$d^2 f = d(df) = 0 \tag{2.3}$$

dır (Hacısalihoğlu, 2004).

Yardımcı Teorem 2.1.2. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ de M üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Kuhnel, 2006).

Tanım 2.1.12. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $X\Lambda Y$ lineer operatörü

$$(X\Lambda Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır (Olszak and Rosca, 1991).

2.2 Eğrilik Tensörleri

Bu kısımda çalışmanın sonraki bölümlerinde sıkça kullanılacak olan eğrilik tensörleri tanımlanmış ve bununla ilgili bazı önemli teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z\text{-}\nabla_Y \nabla_X Z\text{-}\nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1, 3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına M nin Riemann eğrilik tensörü denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi 2003; Spivak, 1979).

Yardımcı Teorem 2.2.1. (M, g) bir Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

i) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$,

ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,

iii) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. Böylece $\forall X,Y\in\chi(M)$ için g Riemann metriği

$$g(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)\,g(e_i,Y) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (De and Shaikh, 2007).

Tanım 2.2.3. (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1,...,X_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$\begin{aligned} Q:\ \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ X &\rightarrow Q(X)=-\sum_{i=1}^{n} R(X_i,X)X_i \end{aligned} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M nin Ricci operatörü adı verilir. Ayrıca Q yardımı ile M nin Ricci eğrilik tensörü S,

$$\begin{aligned} S:\ \chi(M)\times\chi(M) &\rightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ (X,Y) &\rightarrow S(X,Y)=g(Q(X),Y) \end{aligned} \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanan $(0,2)$ tipinde bir tensördür. Eğer

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y)-\mu\eta(X)\,\eta(Y) \tag{2.10}$$

ise (M,g) manifolduna bir $\mu-$Einstein manifoldu denir**.** Eğer $\mu=0$ ise (M,g) manifoldu Einstein manifold olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.2.4. n-boyutlu M Riemann manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır (Oprea, 1997).

Tanım 2.2.5. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $T_P M$ tanjant uzayının bir bazı olmak üzere M nin skaler eğriliği

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.2.6. M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı 3-boyutlu R Riemann eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü, Q Ricci operatörü ve τ skaler eğriliği cinsinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= S(Y,Z)X - g(X,Z)QY + g(Y,Z)QX \\ &\quad -S(X,Z)Y - \frac{\tau}{2}[g(Y,Z)W - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız, et al., 2013).

Tanım 2.2.7. M bir $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu manifoldunda projektif eğrilik tensörü

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] \tag{2.14}$$

dir (Nagaraja and Premalatha, 2012). Ayrıca M, P projektif eğrilik tensörünün sıfır olması halinde projektif flat olarak adlandırılır (Yıldız, et al., 2013).

Tanım 2.2.8. M bir $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\check{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü a ve b sabit değerleri ile

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &\quad +g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &\quad -\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Tanım 2.2.9. M bir $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} H(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &\quad + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \end{aligned} \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanan H ye konformal eğrilik tensörü denir (Nagaraja and Premalatha, 2012).

2.3 Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen değme yapılar, hemen hemen değme metrikler ve hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1. M $(2n+1)$-boyutlu manifold, $\phi-(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-form olmak şartıyla eğer ϕ,ξ,η için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1 \\ \phi^2(X) &= -X + \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.17}$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (ϕ,ξ,η) yapısına, hemen hemen değme yapısı denir. M manifoldu da hemen hemen değme manifoldu adını alır (Yano and Kon, 1984).

Yardımcı Teorem 2.3.1. (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı için

$$\begin{aligned} &\textbf{i)} & \phi\xi &= 0 \\ &\textbf{ii)} & \eta(\phi X) &= 0 \\ &\textbf{iii)} & rank\phi &= 2n \end{aligned} \tag{2.18}$$

özellikleri sağlanır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.2. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için M üzerinde tanımlı bir g Riemann metriği

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{i)} & \eta(X) & = & g(X, \xi) \\ \textbf{ii)} & g(\phi X, \phi Y) & = & g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{array} \tag{2.19}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapısı, M manifolduna da hemen hemen değme metrik manifold denir (De, 2010).

Sonuç 2.3.1. (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı olsun.

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \tag{2.20}$$

ifadesi M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu için sonuç niteliğinde bir eşitliktir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.3. (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne yapının temel 2-formu denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.4. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Her bir η 1-formu için $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin değme yapısı ve M ye de değme manifoldu denir (Yano and Kon, 1984).

Yardımcı Teorem 2.3.2. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.22}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.5. M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanına Killing vektör alanı adı verilir. Böylece, X bir Killing vektör alanıdır ancak ve ancak $L_X g = 0$ dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.6. Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldu "değme metrik manifold" olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.7. $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı, g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapısına K-değme yapısı ve M ye de K-değme manifoldu adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Yardımcı Teorem 2.3.3. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. $\phi-(1,1)$ tipinde tensör alanı ve η 1-form olmak üzere

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi) Y &= \nabla_X \phi Y - \phi(\nabla_X Y) \\ (\nabla_X \eta) Y &= \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \end{aligned} \tag{2.23}$$

sağlanır (Shukla and Singh, 2010).

2.4 Kenmotsu Manifoldları ve Ricci Soliton

Bu kısımda Kenmotsu manifoldları ve Ricci Solitonlar hakkında genel bir bilgilendirme yapılmıştır. Bunun yanı sıra çalışmanın ilerleyen bölümlerinde yararlanılacak olan tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.4.1. ∇ Riemann koneksiyon olmak üzere (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısına sahip herhangi bir M hemen hemen değme metrik manifoldu

$$\begin{array}{llll} i) & (\nabla_X \phi) Y & = & g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi(X) \\ ii) & \nabla_X \xi & = & X - \eta(X)\xi \end{array} \tag{2.24}$$

şartlarını sağlıyorsa Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1971).

Tanım 2.4.2. M Kenmotsu manifold olmak üzere R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.1. M Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\eta(R(X,Y)Z) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X) \tag{2.26}$$

şeklinde ifade edilir (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Yardımcı Teorem 2.4.1. M Kenmotsu manifoldunda η 1- form olmak üzere

$$(\nabla_X \eta) Y = g(\phi X, \phi Y) \tag{2.27}$$

sağlanır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.2. M Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\begin{array}{llll} i) & R(X,Y)\xi & = & \eta(X)Y - \eta(Y)X \\ ii) & R(\xi,X)Y & = & \eta(Y)X - g(X,Y)\xi \\ iii) & R(\xi,X)\xi & = & X - \eta(X)\xi \end{array} \tag{2.28}$$

eşitlikleri yazılır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Tanım 2.4.3. M Kenmotsu manifold olmak üzere Q Ricci operatörü X vektör alanı cinsinden

$$QX = \eta(X)\xi - (\lambda + 1)X \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.3. M Kenmotsu manifold olmak üzere Q Ricci operatörü ξ vektör alanı cinsinden

$$Q\xi = -\lambda\xi \tag{2.30}$$

şeklinde verilir (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Tanım 2.4.4. M Kenmotsu manifold olmak üzere τ skaler eğriliği

$$\tau = -\lambda n - (n - 1) \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Tanım 2.4.5. M Kenmotsu manifold olmak üzere herhangi X ve Y vektör alanları için

$$S(X, Y) = \eta(X)\eta(Y) - (\lambda + 1)g(X, Y) \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanan S ye Ricci eğrilik tensörü adı verilir (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.4. M Kenmotsu manifold olmak üzere S Ricci tensörü X ve ξ vektör alanları cinsinden

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \tag{2.33}$$

şeklinde yazılır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

Tanım 2.4.6. (M, g) bir Riemann manifold, V bir vektör alanı, S de M üzerinde bir Ricci tensör, λ sabit bir değer ve g bir Riemann metrik olsun. g metriği

$$L_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \tag{2.34}$$

şartını sağlıyorsa (g, V, λ) üçlüsüne Ricci soliton denir. Burada Ricci solitonuna sırasıyla λ nın pozitif, negatif ve sıfır olması durumlarında genişleyen, daralan ve değişmeyen adı verilir (Nagaraja and Premalatha, 2012).

2.5 Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldları ve Ricci solitonlar hakkında genel bir bilgilendirme yapılmıştır. Bunun yanı sıra çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.5.1. M herhangi bir Kenmotsu manifold, ∇ Riemann koneksiyon ve η 1-form olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta\left(Y\right) X \tag{2.35}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}$ ye semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon adı verilir (Agashe and Chafle, 1992).

Yardımcı Teorem 2.5.1. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold, ξ M manifoldu üzerinde tanımlı karakteristik vektör alanı, $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon, $\phi - (1, 1)$ tipinde tensör alanı ve X, Y M üzerinde herhangi birer vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} i) \quad \left(\widetilde{\nabla}_X \phi\right) Y &= g(\phi X, Y)\xi - 2\eta(Y)\phi X \\ ii) \quad \widetilde{\nabla}_X \xi &= 2X - \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.36}$$

olur (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Yardımcı Teorem 2.5.2. *M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold, $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon, η 1-form ve X, Y M üzerinde herhangi birer vektör alanı olmak üzere*

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \eta\right) Y = g(\phi X, \phi Y) \tag{2.37}$$

eşitliği ifade edilir (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.2. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z &= 2\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X \\ &\quad + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Sonuç 2.5.1. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü hakkında

$$\begin{aligned} i) \quad \widetilde{R}(X,Y)\xi &= 0 \\ ii) \quad \widetilde{R}(\xi,X)Y &= -2\{g(Y,Z)\xi - \eta(Y)\eta(Z)\xi\} \\ iii) \quad \widetilde{R}(\xi,X)\xi &= 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

eşitlikleri sağlanır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.3. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda herhangi bir X vektör alanı için $\widetilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}X = -(\lambda + 2)X + \eta(X)\xi \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Sonuç 2.5.2. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda ξ karakteristik vektör alanı için $\widetilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}\xi = -(\lambda+1)\,\xi \tag{2.41}$$

dır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.4. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\widetilde{\tau}$ skaler eğriliği

$$\widetilde{\tau} = -\lambda n - (n-1)^2 \tag{2.42}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.5. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olmak üzere $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,Y) = -(\lambda+2)\,g(X,Y) + \eta(X)\,\eta(Y) \tag{2.43}$$

dır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.5. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1, ..., e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{R}(e_i, X)\,Y, e_i) \tag{2.44}$$

olarak tanımlanır (Agashe and Chafle, 1992).

Sonuç 2.5.3. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda tanımlı X ve ξ vektör alanları için $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,\xi) = -(\lambda+1)\,\eta(X) \tag{2.45}$$

şeklinde yazılır (Yıldız and Çetinkaya, 2013).

BÖLÜM 3

KENMOTSU MANİFOLDLARINDA RICCI SOLİTONLAR ve BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Bu bölümde Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı eğrilik çarpımları ve bu çarpımlara bağlı olarak Ricci solitonlar ile ilgili sonuçlar ve teoremler incelenmiştir.

3.1 Daralan Ricci Solitonlar

Bu kısımda $\lambda < 0$ olma şartına bağlı olarak Ricci solitonlar hesaplanmıştır.

(2.15) eşitliğinde $Z = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)\xi &= aR(X,Y)\xi + b[S(Y,\xi)X - S(X,\xi)Y \\ &\quad + g(Y,\xi)QX - g(X,\xi)QY] \\ &\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,\xi)X - g(X,\xi)Y] \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. (3.1) eşitliğinde (2.28), (2.29) ve (2.33) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)\xi &= a[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\ &\quad + b[-\lambda\eta(Y)X + \eta(Y)(\eta(X)\xi - (\lambda+1)X) \\ &\quad + \lambda\eta(X)Y - \eta(X)(\eta(Y)\xi - (\lambda+1)Y)] \end{aligned} \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)\xi &= a[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\ &\quad + b\lambda[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + b(\lambda+1)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \end{aligned} \tag{3.3}$$

yazılır. (3.3) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\check{C}(X,Y)\xi = [a + b(2\lambda+1) + \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)][\eta(X)Y - \eta(Y)X] \tag{3.4}$$

bulunur. (2.15) ve (2.19) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= g(aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &\quad + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \xi) \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Metriğin lineerlik özelliği ve (2.9) ifadesinin (3.5) denkleminde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= a\eta(R(X,Y)Z) - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)\eta(X) \\ &\quad - g(X,Z)\eta(Y)] + b[S(Y,Z)\eta(X) - S(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad + g(Y,Z)S(X,\xi) - g(X,Z)S(Y,\xi)] \end{aligned} \tag{3.6}$$

yazılır. (3.6) eşitliğinde (2.26), (2.32) ve (2.33) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= a[g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X)] \\ &\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] \\ &\quad + b[\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - (\lambda+1)g(Y,Z)\eta(X) \\ &\quad - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) + (\lambda+1)g(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad + g(Y,Z)\eta(X) - (\lambda+1)g(Y,Z)\eta(X) \\ &\quad - g(X,Z)\eta(Y) + (\lambda+1)g(X,Z)\eta(Y)] \end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. (3.7) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= -a[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] \\ &\quad - (2\lambda+1)b[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] \\ &\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. (3.8) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= -[a+b(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,Z)\eta(X) \\ &\quad -g(X,Z)\eta(Y)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur.

Kabul edelim ki M Kenmotsu manifoldu için

$$R(\xi,X)\check{C}=0 \tag{3.10}$$

şartı sağlanmış olsun. $\forall\ X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(\xi,X)\check{C}(Y,Z)W &= \check{C}(R(\xi,X)Y,Z)W+\check{C}(Y,R(\xi,X)Z)W \\ &\quad +\check{C}(Y,Z)R(\xi,X)W+\left(R(\xi,X)\check{C}\right)(Y,Z)W \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= R(\xi,X)\check{C}(Y,Z)W-\check{C}(R(\xi,X)Y,Z)W \\ &\quad -\check{C}(Y,R(\xi,X)Z)W-\check{C}(Y,Z)R(\xi,X)W \end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliği yazılabilir. (3.11) denkleminde (2.28) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)X-g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right)\xi \\ &\quad -\check{C}(\eta(Y)X-g(X,Y)\xi,Z)W-\check{C}(Y,\eta(Z)X-g(X,Z)\xi)W \\ &\quad -\check{C}(Y,Z)(\eta(W)X-g(X,W)\xi) \end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. (3.12) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)X-g(\check{C}(Y,Z)W,X)\xi-\eta(Y)\check{C}(X,Z)W \\ &\quad +g(X,Y)\check{C}(\xi,Z)W-\eta(Z)\check{C}(Y,X)W+g(X,Z)\check{C}(Y,\xi)W \\ &\quad -\eta(W)\check{C}(Y,Z)X+g(W,X)\check{C}(Y,Z)\xi \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) ifadesinin iki tarafı da ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)\eta(X)-\eta(Y)\eta(\check{C}(X,Z)W)+g(X,Z)\eta(\check{C}(Y,\xi)W) \\ &\quad +g(X,Y)\eta(\check{C}(\xi,Z)W)-\eta(Z)\eta(\check{C}(Y,X)W)-g(\check{C}(Y,Z)W,X) \\ &\quad -\eta(W)\eta(\check{C}(Y,Z)X)+g(W,X)\eta(\check{C}(Y,Z)\xi) \end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.9) ifadesi (3.14) denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & -\eta(X)[a+b\,(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g\,(Z,W)\,\eta\,(Y) \\
& -g\,(Y,W)\,\eta\,(Z)]-g(\check{C}\,(Y,Z)\,W,X)+\eta(Y)[a+b\,(2\lambda+1) \\
& +\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)]\,[g\,(Z,W)\,\eta\,(X)-g\,(X,W)\,\eta\,(Z)] \\
& -g\,(X,Y)\,[a+b\,(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g\,(Z,W) \\
& -\eta\,(W)\,\eta\,(Z)]+\eta(Z)[a+b\,(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)] \\
& [g\,(X,W)\,\eta\,(Y)-g\,(Y,W)\,\eta\,(X)]-g\,(X,Z)\,[\eta\,(W)\,\eta\,(Y)- \\
& g\,(Y,W)][a+b\,(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)] \\
& +\eta(W)[a+b\,(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g\,(X,Z)\,\eta\,(Y) \\
& -g\,(Y,X)\,\eta\,(Z)]-g\,(W,X)\,[a+b\,(2\lambda+1) \\
& +\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)]\,[\eta\,(Z)\,\eta\,(Y)-\eta\,(Y)\,\eta\,(Z)]
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

elde edilir. (3.14) ifadesinde gerekli işlemler gerçekleştirilir ve eşitlik düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & g(\check{C}\,(Y,Z)\,W,X)+[a+b\,(2\lambda+1)]\,[g\,(X,Y)\,g\,(W,Z) \\
& -g\,(X,Z)\,g\,(Y,Z)]+[\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g\,(X,Y)\,g\,(W,Z) \\
& -g\,(X,Z)\,g\,(Y,Z)]
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

bulunur. (2.15) ifadesi (3.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & g(aR\,(Y,Z)\,W+b[S\,(Z,W)\,Y-S\,(Y,W)\,Z \\
& +g\,(Z,W)\,QY-g\,(Y,W)\,QZ] \\
& -\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)\,[g\,(Z,W)\,Y-g\,(Y,W)\,Z]\,,X) \\
& +[a+b\,(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g\,(X,Y)\,g\,(W,Z) \\
& -g\,(X,Z)\,g\,(Y,Z)]
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

bulunur. (3.17) eşitliğinde metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= ag\left(R\left(Y,Z\right)W,X\right)+b[S\left(Z,W\right)g(Y,X)-S\left(Y,W\right)g(Z,X) \\
&\quad +g\left(Z,W\right)g(QY,X)-g\left(Y,W\right)g(QZ,X)] \\
&\quad -\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)\left[g\left(Z,W\right)g(Y,X)-g\left(Y,W\right)g(Z,X)\right] \\
&\quad +[a+b\left(2\lambda+1\right)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g\left(X,Y\right)g\left(W,Z\right) \\
&\quad -g\left(X,Z\right)g\left(Y,Z\right)]
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

olur. (3.18) eşitliği düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
0 &= ag\left(R\left(Y,Z\right)W,X\right)+b[S\left(Z,W\right)g(Y,X)-S\left(Y,W\right)g(Z,X) \\
&\quad +g\left(Z,W\right)S\left(X,Y\right)-g\left(Y,W\right)S\left(Z,X\right)] \\
&\quad +\left[a+b\left(2\lambda+1\right)\right]\left[g\left(X,Y\right)g\left(W,Z\right)-g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

elde edilir. (3.19) denkleminde $X=Y=e_i$ değişikliği yapılır ve $i=1,2,...,n$ için toplanırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= a\sum_{i=1}^{n}g\left(R\left(e_i,Z\right)W,e_i\right)+b\sum_{i=1}^{n}[S\left(Z,W\right)g(e_i,e_i)-S\left(e_i,W\right)g(Z,e_i) \\
&\quad +g\left(Z,W\right)S\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,W\right)S\left(Z,e_i\right)] \\
&\quad +\left[a+b\left(2\lambda+1\right)\right]\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(e_i,e_i\right)g\left(W,Z\right)-g\left(e_i,Z\right)g\left(e_i,W\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

yazılır. (2.11), (2.7), (2.12) ve (2.31) ifadeleri (3.20) denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= aS\left(Z,W\right)+bnS\left(Z,W\right)-2bS\left(Z,W\right) \\
&\quad +\left[a+b\left(2\lambda+1\right)\right]\left(n-1\right)g\left(W,Z\right)+b\left[-n\left(\lambda+1\right)+1\right]g\left(W,Z\right)
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[a+\left(n-2\right)b\right]S\left(Z,W\right)+\left[a+b\left(2\lambda+1\right)\right]\left(n-1\right)g\left(W,Z\right) \\
&\quad +b\left[-n\left(\lambda+1\right)+1\right]g\left(W,Z\right)
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

bulunur. (3.21) eşitliği düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\left[a+\left(n-2\right)b\right]S\left(Z,W\right) &= \{-\left[a+b\left(2\lambda+1\right)\right]\left(n-1\right) \\
&\quad -b\left[-n\left(\lambda+1\right)+1\right]\}g\left(W,Z\right)
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

elde edilir. (3.22) denkleminde $Z = W = e_i$ değişikliği yapılır ve $i = 1, 2, ..., n$ için toplanırsa

$$[a + (n-2)b] \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_1) = -[a + b(2\lambda + 1)](n-1)g(e_i, e_1) \qquad (3.23)$$

yazılır. (3.23) ifadesinde (2.12) ve (2.31) eşitlikleri kullanılırsa

$$[a + (n-2)b][-n(\lambda + 1) + 1] = -[a + b(2\lambda + 1)](n-1)n \qquad (3.24)$$

bulunur. (3.24) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \lambda(2bn(n-1) + n[a + (n-2)b]) &= (a+b)n(n-1) \\ &\quad - [a + (n-2)b](n-1) \end{aligned} \qquad (3.25)$$

olur. Eğer $[a + (n-2)b] = 0$ şartı sağlanırsa

$$\lambda = -\frac{(n-1)}{2} \qquad (3.26)$$

elde edilir. (3.26) eşitliğine göre $n \geq 2$ için λ negatif değerler alır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.1.1. Quasi konformal semi-simetrik Kenmotsu manifoldu M üzerinde $n \geq 2$ için Ricci soliton, $[a + (n-2)b] = 0$ şartı sağlandığı takdirde daralandır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

3.2 Genişleyen Ricci Solitonlar

Bu kısımda $\lambda > 0$ olma şartına bağlı olarak Ricci solitonlar hesaplanmıştır.

(2.14) ifadesinde $X = \xi$, $Y = X$ ve $Z = Y$ değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned} P(\xi, X)Y &= \eta(Y)X - g(X,Y)\xi - \frac{1}{n-1}\{-\lambda g(X,Y)\xi \\ &\quad -\eta(Y)\eta(X)\xi - (\lambda+1)\eta(Y)X\} \end{aligned} \qquad (3.27)$$

yazılır. (3.27) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} P(\xi, X) Y &= \frac{1}{n-1}\{[(\lambda+2-n) g(X, Y)-\eta(Y) \eta(X)] \xi \\ &-(\lambda+1-n) \eta(Y) X\} \end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.9) ifadesinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(\xi, X) Y\right) &= [a+b(2\lambda+1)+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)]\{\eta(X) \eta(Y) \\ &-g(X, Y)\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur. Ayrıca (3.9) ifadesine $Z=\xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X, Y) \xi\right) &= [a+b\lambda+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)]\{\eta(X) \eta(Y) \\ &-\eta(Y) \eta(X)\}+b[S(Y, \xi) \eta(X)-S(X, \xi) \eta(Y)] \end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) denkleminde (2.33) ifadesi kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\eta\left(\check{C}(X, Y) \xi\right) = +b[-\lambda \eta(X) \eta(Y)+\lambda \eta(X) \eta(Y)]$$

veya

$$\eta\left(\check{C}(X, Y) \xi\right)=0 \tag{3.31}$$

bulunur.

Kabul edelim ki M Kenmotsu manifoldu için

$$P(\xi, X) \check{C}=0 \tag{3.32}$$

şartı sağlanmış olsun. $\forall\ X, Y, Z, W \in M$ için

$$\begin{aligned} P(\xi, X) \check{C}(Y, Z) W &= \check{C}(P(\xi, X) Y, Z) W+\check{C}(Y, P(\xi, X) Z) W \\ &+\check{C}(Y, Z) P(\xi, X) W+\left(P(\xi, X) \check{C}\right)(Y, Z) W \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= P(\xi, X) \check{C}(Y, Z) W-\check{C}(P(\xi, X) Y, Z) W \\ &-\check{C}(Y, P(\xi, X) Z) W-\check{C}(Y, Z) P(\xi, X) W \end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitliği yazılabilir. (3.28) ifadesi (3.33) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{n-1}\{\left[(\lambda+2-n)\,g\left(X,\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)-\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)\eta\,(X)\right]\xi \\
&\quad -(\lambda-n+1)\,\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)X\}-\frac{1}{n-1}\check{C}([(\lambda+2-n)\,g\,(X,Y) \\
&\quad -\eta\,(Y)\,\eta\,(X)]\xi-(\lambda-n+1)\,\eta\,(Y)\,X,Z)W \\
&\quad -\frac{1}{n-1}\check{C}(Y,[(\lambda+2-n)\,g\,(X,Z)-\eta\,(Z)\,\eta\,(X)]\,\xi \\
&\quad -(\lambda-n+1)\,\eta\,(Z)\,X)W-\frac{1}{n-1}\check{C}\,(Y,Z)\,([(\lambda+2-n)\,g\,(X,W) \\
&\quad -\eta\,(W)\,\eta\,(X)]\xi-(\lambda-n+1)\,\eta\,(W)\,X)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
0 &= [(\lambda+2-n)\,g\left(X,\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)-\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)\eta\,(X)]\xi \\
&\quad -(\lambda-n+1)\,\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)X-\{(\lambda+2-n)\,g\,(X,Y) \\
&\quad -\eta\,(Y)\,\eta\,(X)\}\check{C}\,(\xi,Z)\,W+(\lambda-n+1)\,\eta\,(Y)\,\check{C}\,(X,Z)\,W \\
&\quad -[(\lambda+2-n)\,g\,(X,Z)-\eta\,(Z)\,\eta\,(X)]\,\check{C}\,(Y,\xi)\,W \\
&\quad +(\lambda-n+1)\,\eta\,(Z)\,\check{C}\,(Y,X)\,W \\
&\quad -[(\lambda+2-n)\,g\,(X,W)-\eta\,(W)\,\eta\,(X)]\,\check{C}\,(Y,Z)\,\xi \\
&\quad +(\lambda-n+1)\,\eta\,(W)\,\check{C}\,(Y,Z)\,\xi
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) eşitliğinin iki tarafı da ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\,g\left(X,\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)-\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)\eta\,(X) \\
&\quad -(\lambda-n+1)\,\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,W\right)\eta\,(X) \\
&\quad +(\lambda-n+1)\,\eta\left(\check{C}\,(X,Z)\,W\right)\eta\,(Y) \\
&\quad -[(\lambda+2-n)\,g\,(X,Y)-\eta\,(Y)\,\eta\,(X)]\,\eta\left(\check{C}\,(\xi,Z)\,W\right) \\
&\quad -[(\lambda+2-n)\,g\,(X,Z)-\eta\,(Z)\,\eta\,(X)]\,\eta\left(\check{C}\,(Y,\xi)\,W\right) \\
&\quad +(\lambda-n+1)\,\eta\left(\check{C}\,(Y,X)\,W\right)\eta\,(Z) \\
&\quad +(\lambda-n+1)\,\eta\left(\check{C}\,(Y,Z)\,X\right)\eta\,(W)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

bulunur. (3.9) ifadesi (3.35) denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & (\lambda+2-n)\, g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right) \\
& -(\lambda+2-n)\,[a+b\lambda+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,W)\,\eta(X)\,\eta(Z) \\
& -g(Z,W)\,\eta(X)\,\eta(Y)] - (\lambda+2-n)\, b[S(Z,W)\,\eta(X)\,\eta(Y) \\
& -S(Y,W)\,\eta(X)\,\eta(Z)] - [(\lambda+2-n)\, g(X,Y) \\
& -\eta(Y)\,\eta(X)]\{[a+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][\eta(W)\,\eta(Z)-g(Z,W)] \\
& +b[S(Z,W)+2\lambda\eta(W)\,\eta(Z)]\} \\
& +(\lambda+1-n)\,\{[a+b\lambda+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(X,W)\,\eta(Y)\,\eta(Z) \\
& -g(Z,W)\,\eta(X)\,\eta(Y)] \\
& +b[S(Z,W)\,\eta(X)\,\eta(Y)-S(X,W)\,\eta(Z)\,\eta(Y)]\} \qquad (3.36) \\
& -\{[(\lambda+2-n)\, g(X,Z)-\eta(Z)\,\eta(X)][a+b\lambda \\
& +\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,W)-\eta(Y)\,\eta(W)] - b[S(Y,W) \\
& +\lambda\eta(W)\,\eta(Y)]\} + (\lambda+1-n)\,\{[a+b\lambda \\
& +\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,W)\,\eta(X)\,\eta(Z)-g(X,W)\,\eta(Z)\,\eta(Y)] \\
& +b[S(X,W)\,\eta(Z)\,\eta(Y)-S(Y,W)\,\eta(Z)\,\eta(X)]\} \\
& +(\lambda+1-n)\,\{[a+b\lambda+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,X)\,\eta(W)\,\eta(Z) \\
& -g(Z,X)\,\eta(W)\,\eta(Y)] \\
& +b[S(Z,X)\,\eta(W)\,\eta(Y)-S(Y,X)\,\eta(Z)\,\eta(W)]\}
\end{aligned}
$$

olarak yazılır. (3.36) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\, g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right) + b\lambda\{g(Z,W)\,\eta(X)\,\eta(Y) \\
&\quad -g(Y,W)\,\eta(X)\,\eta(Z)\} + \{(\lambda+2-n)\,(a \\
&\quad +\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)) - (\lambda+1-n)\,(a+b\lambda \\
&\quad +\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))\}[g(Z,X)\,\eta(W)\,\eta(Y) \\
&\quad -g(Y,X)\,\eta(W)\,\eta(Z)] \qquad (3.37) \\
&\quad +(\lambda+2-n)\,(a+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))[g(Y,X)\,g(Z,W) \\
&\quad -g(Z,X)\,g(Y,W)] + (\lambda+2-n)\,b[g(Z,X)\,S(Y,W) \\
&\quad -g(Y,X)\,S(Z,W)] + (\lambda+1-n)\,b[S(Z,X)\,\eta(W)\,\eta(Y) \\
&\quad -S(Y,X)\,\eta(W)\,\eta(Z)]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.37) eşitliği

$$\begin{aligned}
k &= (a+b\lambda+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)) \\
l &= (a+\frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))
\end{aligned}$$

olacak şekilde yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\, g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right) + b\lambda\{g(Z,W)\,\eta(X)\,\eta(Y) \\
&\quad -g(Y,W)\,\eta(X)\,\eta(Z)\} + [(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda) \\
&\quad -(\lambda+1-n)\,k]\{g(Z,X)\,\eta(W)\,\eta(Y) - g(Y,X)\,\eta(W)\,\eta(Z)\} \\
&\quad +(\lambda+2-n)\,l\,[g(Y,X)\,g(Z,W) - g(Z,X)\,g(Y,W)] \\
&\quad +(\lambda+2-n)\,b\,[g(Z,X)\,S(Y,W) - g(Y,X)\,S(Z,W)] \\
&\quad +(\lambda+1-n)\,b\,[S(Z,X)\,\eta(W)\,\eta(Y) - S(Y,X)\,\eta(W)\,\eta(Z)] \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

bulunur.

(3.38) denkleminde bulunan $g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right)$ ifadesi (2.15) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right) &= g(aR(Y,Z)W + b[S(Z,W)Y - S(Y,W)Z \\
&\quad + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ] \\
&\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Z,W)Y - g(Y,W)Z], X)
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right) &= ag(R(Y,Z)W, X) \\
&\quad + b[S(Z,W)g(X,Y) - S(Y,W)g(X,Z) \\
&\quad + g(Z,W)S(Y,W) - g(Y,W)S(Z,X)] \\
&\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Z,W)g(X,Y) \\
&\quad - g(Y,W)g(X,Z)]
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

şeklinde hesaplanır. (3.39) ifadesi (3.38) denkleminde yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda + 2 - n)\{ag(R(Y,Z)W, X) \\
&\quad + b[S(Z,W)g(X,Y) - S(Y,W)g(X,Z) \\
&\quad + g(Z,W)S(X,Y) - g(Y,W)S(Z,X)] \\
&\quad - \frac{\tau}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Z,W)g(X,Y) - g(Y,W)g(X,Z)]\} \\
&\quad + [(\lambda + 2 - n)(l + 2b\lambda) - (\lambda + 1 - n)k]\{g(Z,X)\eta(W)\eta(Y) \\
&\quad - g(Y,X)\eta(W)\eta(Z)\} + b\lambda(g(Z,W)\eta(X)\eta(Y) \\
&\quad - g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)) \\
&\quad + (\lambda + 2 - n)l[g(Y,X)g(Z,W) - g(Z,X)g(Y,W)] \\
&\quad + (\lambda + 2 - n)b[g(Z,X)S(Y,W) - g(Y,X)S(Z,W)] \\
&\quad + (\lambda + 1 - n)b[S(Z,X)\eta(W)\eta(Y) - S(Y,X)\eta(W)\eta(Z)]
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & (\lambda+2-n)\, ag\,(R\,(Y,Z)\,W,X) \\
& +(\lambda+2-n)\, b[S\,(Z,W)\, g\,(X,Y) - S\,(Y,W)\, g\,(X,Z)] \\
& +bl\,(g\,(Z,W)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Y) - g\,(Y,W)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Z)) \\
& +(\lambda+2-n)\, b[g\,(Z,W)\, S\,(X,Y) - g\,(Y,W)\, S\,(Z,X)] \\
& +(\lambda+2-n)\,(a-l)\,[g\,(Z,W)\, g\,(X,Y) - g\,(Y,W)\, g\,(X,Z)] \\
& +[(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda) - (\lambda+1-n)\, k]\,[g\,(Z,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Y) \\
& -g\,(Y,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)] + (\lambda+2-n)\, l[g\,(Z,W)\, g\,(X,Y) \\
& -g\,(Y,W)\, g\,(X,Z)] \\
& +(\lambda+2-n)\, b\,(S\,(Z,W)\, g\,(X,Y) - S\,(Y,W)\, g\,(X,Z)) \\
& +(\lambda+1-n)\, b\,[S\,(Z,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Y) - S\,(Y,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)]
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

yazılır. (3.40) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & (\lambda+2-n)\, ag\,(R\,(Y,Z)\,W,X) + (\lambda+2-n)\, b[g\,(Z,W)\, S\,(X,Y) \\
& -g\,(Y,W)\, S\,(Z,X)] \\
& +bl\,(g\,(Z,W)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Y) - g\,(Y,W)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Z)) \\
& +(\lambda+2-n)\, a\,[g\,(Z,W)\, g\,(X,Y) - g\,(Y,W)\, g\,(X,Z)] \\
& +(\lambda+1-n)\, b\,[S\,(Z,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Y) - S\,(Y,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)] \\
& +[(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda) - (\lambda+1-n)\, k]\,[g\,(Z,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Y) \\
& -g\,(Y,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)]
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

şeklinde ifade edilir. (3.41) denklemine $X = Y = e_i$ değişikliği uygulanır ve

$i=1,2,...,n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\,a\sum_{i=1}^{n}g\left(R\left(e_i,Z\right)W,e_i\right) \\
&+(\lambda+2-n)\,b\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(Z,W\right)S\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,W\right)S\left(Z,e_i\right)\right] \\
&+bl\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(Z,W\right)\eta\left(e_i\right)\eta\left(e_i\right)-g\left(e_i,W\right)\eta\left(e_i\right)\eta\left(Z\right)\right) \\
&+(\lambda+2-n)\,a\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(Z,W\right)g\left(e_i,e_i\right)-g\left(e_i,W\right)g\left(e_i,Z\right)\right] \\
&+(\lambda+1-n)\,b\sum_{i=1}^{n}\left[S\left(Z,e_i\right)\eta\left(W\right)\eta\left(e_i\right)-S\left(e_i,e_i\right)\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)\right] \\
&+\left[(\lambda+2-n)\left(l+2b\lambda\right)-(\lambda+1-n)\,k\right]\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(Z,e_i\right)\eta\left(W\right)\eta\left(e_i\right)\right. \\
&\left.-g\left(e_i,e_i\right)\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

yazılır. (2.11), (2.7), (2.12) ve (2.31) ifadeleri (3.42) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\,aS\left(Z,W\right)+(\lambda+2-n)\,b\left(\tau g\left(Z,W\right)-S\left(Z,W\right)\right) \\
&+bl\left(g\left(Z,W\right)-\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)\right)+(\lambda+2-n)\,a\left(n-1\right)g\left(Z,W\right) \\
&+(\lambda+1-n)\,b\left(-\lambda\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)-\tau\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)\right) \\
&+\left[(\lambda+2-n)\left(l+2b\lambda\right)-(\lambda+1-n)\,k\right]\left(n-1\right)\left(\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. (3.43) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\left(a-b\right)S\left(Z,W\right)+\left[(\lambda+2-n)\,b\tau+b\lambda\right. \\
&\left.+(\lambda+2-n)\,a\left(n-1\right)g\left(Z,W\right)\right] \\
&-\{b\lambda+\left(n-1\right)\left[(\lambda+2-n)\left(l+2b\lambda\right)-(\lambda+1-n)\,k\right] \\
&+(\lambda+1-n)\,b\tau+\lambda\left(\lambda+1-n\right)\}b\eta\left(W\right)\eta\left(Z\right)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

bulunur. (3.44) ifadesinde $Z=W=e_i$ değişikliği uygulanır ve $i=1,2,...,n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\left(a-b\right)\sum_{i=1}^{n}S\left(e_i,e_i\right)+\left[(\lambda+2-n)\,b\tau+b\lambda\right. \\
&\left.+(\lambda+2-n)\,a\left(n-1\right)\right]\sum_{i=1}^{n}g\left(e_i,e_i\right)-\{b\lambda \\
&+\left(n-1\right)\left[(\lambda+2-n)\left(l+2b\lambda\right)-(\lambda+1-n)\,k\right] \\
&+(\lambda+1-n)\,b\tau+\lambda\left(\lambda+1-n\right)\}b\sum_{i=1}^{n}\eta\left(e_i\right)\eta\left(e_i\right)
\end{aligned}$$

veya

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)(a-b)\tau + [(\lambda+2-n)b\tau + b\lambda \\
&\quad + (\lambda+2-n)a(n-1)n] \\
&\quad -[b\lambda + (n-1)[(\lambda+2-n)(l+2b\lambda) \\
&\quad -(\lambda+1-n)k] + (\lambda+1-n)b\tau + \lambda(\lambda+1-n)b]
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

elde edilir. $a+(n-1)b=0$ alınır ve (3.45) denkleminde gerekli işlemler gerçekleştirilirse

$$
\lambda = \frac{n^4 - 3n^3 + 2n^2 - 1}{n^3 - n^2 - n} \tag{3.46}
$$

bulunur. (3.46) eşitliğine göre $n \geq 3$ için λ pozitif değerler alır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.2.1. $n-$boyutlu M Kenmotsu manifoldunda $P(\xi, X)C = 0$ şartının sağlandığı koşullarda $n \geq 3$ için Ricci soliton genişleyendir (Nagaraja and Premalatha, 2012).

3.3 Değişmeyen Ricci Solitonlar

Bu kısımda $\lambda = 0$ olma şartına bağlı olarak Ricci solitonlar hesaplanmıştır.

(2.16) ifadesinde $X = \xi$, $Y = X$ ve $Z = Y$ değişiklikleri yapılırsa

$$
\begin{aligned}
H(\xi, X)Y &= R(\xi, X)Y - \frac{1}{n-2}[S(X,Y)\xi - S(\xi,Y)X \\
&\quad + g(X,Y)Q\xi - g(\xi,Y)QX]
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

yazılır. (2.28), (2.32) ve (2.33) eşitlikleri (3.47) denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
H(\xi, X)Y &= \eta(Y)X - g(X,Y)\xi - \frac{1}{n-2}[\eta(X)\eta(Y)\xi \\
&\quad -(\lambda+1)g(X,Y)\xi + \lambda\eta(Y)X - \lambda g(X,Y)\xi \\
&\quad -\eta(Y)\eta(X)\xi + (\lambda+1)\eta(Y)X]
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

bulunur. (3.48) ifadesi düzenlenirse

$$H(\xi, X)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi - \frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(Y)X - g(X,Y)\xi] \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.49) eşitliğinin her iki tarafı ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \eta(H(\xi, X)Y) &= \eta(Y)\eta(X) - g(X,Y) - \frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -g(X,Y)] \end{aligned} \tag{3.50}$$

bulunur.

Kabul edelim ki M Kenmotsu manifoldu için

$$H(\xi, X)S = 0 \tag{3.51}$$

şartı sağlanmış olsun. $\forall\ X, Y, Z, W \in M$ için

$$S(H(\xi, X)Y, Z) + S(Y, H(\xi, X)Z) = 0 \tag{3.52}$$

yazılır. (2.32) ifadesi (3.52) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(H(\xi, X)Y)\eta(Z) - (\lambda+1)g(H(\xi, X)Y, Z) \\ &\quad +\eta(H(\xi, X)Z)\eta(Y) - (\lambda+1)g(H(\xi, X)Z, Y) \end{aligned} \tag{3.53}$$

şeklinde ifade edilir. (3.49) ve (3.50) ifadeleri (3.53) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T1 &= \eta(Y)\eta(X)\eta(Z) - g(X,Y)\eta(Z) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad -g(X,Y)\eta(Z)] + \eta(Y)\eta(X)\eta(Z) - g(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - g(X,Z)\eta(Y)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T2 &= (\lambda+1)\{\eta(Y)g(X,Z) - g(X,Y)\eta(Z) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(Y)g(X,Z) \\ &\quad -g(X,Y)\eta(Z)] + \eta(Z)g(X,Y) - g(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(Z)g(X,Y) - g(X,Z)\eta(Y)]\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T1 = T2 \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.54) eşitliği düzenlendiği takdirde

$$\begin{aligned} 0 = \; & (2 - \frac{4\lambda + 2}{n-2})\eta(Y)\eta(X)\eta(Z) + (-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})g(X,Y)\eta(Z) \\ & + (-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})g(X,Z)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.55}$$

bulunur. (3.55) ifadesinde $X = Y = e_i$ değişikliği yapılır ve $i = 1, 2, ..., n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned} 0 = \; & [2 - \frac{4\lambda + 2}{n-2}]\sum_{i=1}^{n}\eta(e_i)\eta(e_i)\eta(Z) + (-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})\sum_{i=1}^{n}g(e_i, e_i)\eta(Z) \\ & + (-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})\sum_{i=1}^{n}g(e_i, Z)\eta(e_i) \end{aligned} \tag{3.56}$$

olur. (3.56) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$[2 - \frac{4\lambda + 2}{n-2}]\eta(Z) + n(-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})\eta(Z) + (-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})\eta(Z) = 0$$

veya

$$[[2 - \frac{4\lambda + 2}{n-2}] + (n+1)(-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2})]\eta(Z) = 0 \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.57) eşitliğinde

$$\eta(Z) \neq 0$$

olduğundan

$$[2 - \frac{4\lambda + 2}{n-2}] + (n+1)(-1 + \frac{2\lambda + 1}{n-2}) = 0 \tag{3.58}$$

bulunur. (3.58) ifadesi düzenlenirse

$$\frac{2n\lambda - 2\lambda}{n-2} = \frac{n^2 - 4n + 3}{n-2} \tag{3.59}$$

veya

$$2\lambda(n-1) = (n-3)(n-1) \tag{3.60}$$

yazılır. (3.60) eşitliğinde λ yalnız bırakılırsa

$$\lambda = \frac{n-3}{2} \tag{3.61}$$

elde edilir. (3.61) ifadesine göre $n = 3$ için $\lambda = 0$ olur.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.3.1. M 3-boyutlu Kenmotsu manifoldunda Ricci soliton değişmeyendir ancak ve ancak $H(\xi, X)\, S = 0$ dır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

BÖLÜM 4

f-KENMOTSU MANİFOLD VE RICCI SOLİTONLAR

Bu bölümde, f-Kenmotsu manifoldları ve bu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir. Ayrıca bunlarla ilgili temel tanım ve kavramlar verilerek manifold üzerinde bazı eğrilik şartları ispatlanmıştır. Daha sonra f-Kenmotsu manifoldunda bir örnek incelenmiştir.

4.1 f-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda f-Kenmotsu manifoldları ile ilgili bazı tanımlar verilmiş ve birtakım sonuçlar ile teoremler incelenmiştir. Bunun yanı sıra f-Kenmotsu manifoldlarında eğrilik tensörleri verilmiştir.

Tanım 4.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu türevlenebilir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısına sahip hemen hemen değme manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$, $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $df \wedge \eta = 0$ olmak üzere

$$(\nabla_X \phi) Y = f(g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X) \tag{4.1}$$

şartını sağlayan (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı f-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Calin and Crasmareanu, 2010).

Tanım 4.1.2. $f = \alpha =$sabit ve sıfırdan farklı ise manifold $\alpha-$Kenmotsu olarak adlandırılır. $f = 1$ olması halinde manifold $1-$Kenmotsu bir başka deyişle Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Calin and Crasmareanu, 2010).

Tanım 4.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifold olmak üzere $f=0$ özel durumunda manifold kosimplektik olarak adlandırılır (Yıldız, et al., 2013).

Tanım 4.1.4. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifold ve $f^{'}=\xi f$ olmak üzere

$$f^2+f^{'}\neq 0$$

olduğunda manifold regüler olarak adlandırılır (Yıldız, et al., 2013).

Yardımcı Teorem 4.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifoldunda

$$\nabla_X\xi = f\left(X-\eta\left(X\right)\xi\right) \tag{4.2}$$

olur (Calin and Crasmareanu, 2010).

İspat (2.23) ifadesi (4.1) eşitliğinde kullanılırsa

$$\nabla_X\phi Y-\phi\left(\nabla_X Y\right)=f\left(g\left(\phi X,Y\right)\xi-\eta\left(Y\right)\phi X\right) \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) ifadesinde $Y=\xi$ değişikliği yapılıp (2.17), (2.18) ve (2.19) ifadeleri kullanılırsa

$$-\phi\left(\nabla_X\xi\right) = f\left(\eta\left(\phi X\right)\xi-\phi X\right) \tag{4.4}$$

bulunur. (4.4) denkleminde (2.18) eşitliği ele alınırsa

$$\phi\left(\nabla_X\xi\right) = f\left(\phi X\right) \tag{4.5}$$

yazılır. (4.5) denkleminin iki tarafına da ϕ operatörü uygulanırsa

$$\phi^2\left(\nabla_X\xi\right) = f\left(\phi^2 X\right) \tag{4.6}$$

olur. (2.17) ifadesi (4.6) eşitliğinde kullanılırsa

$$-\nabla_X\xi+\eta\left(\nabla_X\xi\right)\xi = f\left(-X+\eta\left(X\right)\xi\right) \tag{4.7}$$

yazılır. (4.7) denkleminde bulunan $\eta(\nabla_X \xi)\xi$ ifadesi (2.17) eşitliği kullanılarak

$$\eta(\nabla_X \xi)\xi = g(\nabla_X \xi, \xi)\xi \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabilir. (4.8) ifadesi koneksiyonun özelliği yardımıyla

$$\eta(\nabla_X \xi)\xi = Xg(\xi,\xi)\xi - g(\xi, \nabla_X \xi)\xi \tag{4.9}$$

biçiminde ifade edilebilir. (4.9) denkleminde metriğin simetrik olma özelliği ve (2.17) ifadesi kullanılırsa

$$2\eta(\nabla_X \xi)\xi = X[1]\xi$$

olur.

$$X[1] = 0$$

olduğundan

$$\eta(\nabla_X \xi)\xi = 0 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) eşitliği (4.7) denkleminde kullanılırsa

$$\nabla_X \xi = f(X - \eta(X)\xi)$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1.2. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu ve η 1-form olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \eta)Y = fg(\phi X, \phi Y) \tag{4.11}$$

şeklinde yazılır (Yıldız, et al., 2013).

İspat (2.23) ve (2.19) ifadeleri yardımıyla

$$(\nabla_X \eta)Y = \nabla_X g(Y, \xi) - g(\nabla_X Y, \xi) \tag{4.12}$$

yazılır. (4.12) denklemi koneksiyonun lineerlik özelliği kullanılarak

$$(\nabla_X \eta) Y = g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) - g(\nabla_X Y, \xi) \tag{4.13}$$

olur. (4.13) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$(\nabla_X \eta) Y = g(Y, \nabla_X \xi) \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.2) eşitliği (4.14) denkleminde kullanılırsa

$$(\nabla_X \eta) Y = g(Y, f(X - \eta(X)\xi)) \tag{4.15}$$

olur. (4.15) ifadesinde metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$(\nabla_X \eta) Y = f[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)]$$

veya

$$(\nabla_X \eta) Y = fg(\phi X, \phi Y)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu, η 1-form ve d diferensiyel operatör olsun. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$df \wedge \eta = 0 \implies df = f'\eta \text{ ve } X(f) = f'\eta(X) \tag{4.16}$$

sonucu ortaya çıkar (Olszak and Rosca, 1991).

Yardımcı Teorem 4.1.4. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)\xi = -\left(f^2 + f'\right)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilir (Calin and Crasmareanu, 2010).

İspat (2.6) eşitliğinde bulunan $\nabla_X \nabla_Y \xi$ terimi (4.2) ifadesi yardımıyla

$$\nabla_X \nabla_Y \xi = \nabla_X \left(f \left(Y - \eta \left(Y \right) \xi \right) \right) \tag{4.18}$$

şeklinde yazılır. (4.18) eşitliği koneksiyonun özelliği gereği

$$\nabla_X \nabla_Y \xi = X \left(f \right) Y - X \left(f \right) \eta \left(Y \right) \xi + f \nabla_X Y - f \nabla_X \eta \left(Y \right) \xi \tag{4.19}$$

olur. (4.19) denkleminde bulunan $f \nabla_X \eta \left(Y \right) \xi$ ifadesi koneksiyonun özelliğinden faydalanarak

$$f \nabla_X \eta \left(Y \right) \xi = f X \eta \left(Y \right) \xi + \eta \left(Y \right) f \nabla_X \xi \tag{4.20}$$

şeklinde bulunur. (4.20) ifadesinde (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$f \nabla_X \eta \left(Y \right) \xi = f X \eta \left(Y \right) \xi + \eta \left(Y \right) f \left(f \left(X - \eta \left(X \right) \xi \right) \right)$$

veya

$$f \nabla_X \eta \left(Y \right) \xi = f X \eta \left(Y \right) \xi + \eta \left(Y \right) f^2 X - \eta \left(Y \right) \eta \left(X \right) f^2 \xi \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitliği (4.19) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \xi &= X \left(f \right) Y - X \left(f \right) \eta \left(Y \right) \xi + f \nabla_X Y - f X \eta \left(Y \right) \xi \\ &\quad - \eta \left(Y \right) f^2 X + \eta \left(Y \right) \eta \left(X \right) f^2 \xi \end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} -\nabla_Y \nabla_X \xi &= -Y \left(f \right) X + Y \left(f \right) \eta \left(X \right) \xi - f \nabla_Y X + f Y \eta \left(X \right) \xi \\ &\quad + \eta \left(X \right) f^2 Y - \eta \left(Y \right) \eta \left(X \right) f^2 \xi \end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde ifade edilir. Son olarak (2.6) eşitliğinde bulunan $-\nabla_{[X,Y]} \xi$ terimi (4.2) ifadesi kullanılarak

$$-\nabla_{[X,Y]} \xi = -f \left\{ [X,Y] - \eta \left([X,Y] \right) \xi \right\} \tag{4.24}$$

şeklinde yazılır. (4.24) denklemi koneksiyonun özelliği gereği

$$-\nabla_{[X,Y]} \xi = -f \left\{ \nabla_X Y - \nabla_Y X - \eta \left(\nabla_X Y \right) \xi + \eta \left(\nabla_Y X \right) \xi \right\}$$

veya

$$-\nabla_{[X,Y]}\xi = -f\nabla_X Y + f\nabla_Y X + f\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi - f\eta\left(\nabla_Y X\right)\xi \tag{4.25}$$

olur. (4.25) eşitliğinde $f\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi$ ifadesi (2.23) denklemi kullanılarak

$$f\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi \;=\; f\left(\nabla_X \eta\left(Y\right)\right)\xi - f\left(\nabla_X \eta\right)Y\xi \tag{4.26}$$

şeklinde ifade edilir. (4.26) denklemi koneksiyonun özelliği ve (4.11) eşitliği yardımıyla

$$f\eta\left(\nabla_X Y\right)\xi = \; fX\eta\left(Y\right)\xi - f^2 g\left(\phi X, \phi Y\right)\xi \tag{4.27}$$

biçiminde yazılır. (4.27) eşitliğine $X = Y$ ve $Y = X$ değişiklikleri uygulanırsa

$$-f\eta\left(\nabla_Y X\right)\xi = -fY\eta\left(X\right)\xi + f^2 g\left(\phi X, \phi Y\right)\xi \tag{4.28}$$

olur. (4.27) ve (4.28) ifadeleri (4.25) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} -\nabla_{[X,Y]}\xi &= -f\nabla_X Y + f\nabla_Y X + fX\eta\left(Y\right)\xi - f^2 g\left(\phi X, \phi Y\right)\xi \\ &\quad -fY\eta\left(X\right)\xi + f^2 g\left(\phi X, \phi Y\right)\xi \end{aligned}$$

veya

$$-\nabla_{[X,Y]}\xi = -f\nabla_X Y + f\nabla_Y X + fX\eta\left(Y\right)\xi - fY\eta\left(X\right)\xi \tag{4.29}$$

ifadesi blunur. (4.22), (4.23) ve (4.29) eşitlikleri (2.6) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R\left(X,Y\right)\xi &= X\left(f\right)Y - X\left(f\right)\eta\left(Y\right)\xi + f\nabla_X Y - fX\eta\left(Y\right)\xi - f^2\eta\left(Y\right)X \\ &\quad +\eta\left(Y\right)\eta\left(X\right)f^2\xi - Y\left(f\right)X + Y\left(f\right)\eta\left(X\right)\xi - f\nabla_Y X \\ &\quad +fY\eta\left(X\right)\xi + f^2\eta\left(X\right)Y - \eta\left(Y\right)\eta\left(X\right)f^2\xi - f\nabla_X Y \\ &\quad +f\nabla_Y X + fX\eta\left(Y\right)\xi - fY\eta\left(X\right)\xi \end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. (4.30) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} R\left(X,Y\right)\xi &= X\left(f\right)Y - X\left(f\right)\eta\left(Y\right)\xi - Y\left(f\right)X \\ &\quad +Y\left(f\right)\eta\left(X\right)\xi + f^2\eta\left(X\right)Y - f^2\eta\left(Y\right)X \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.16) ifadesi (4.31) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= f'\eta(X)Y - f'\eta(X)\eta(Y)\xi - f'\eta(Y)X \\ &\quad + f'\eta(X)\eta(Y)\xi + f^2\eta(X)Y - f^2\eta(Y)X \end{aligned}$$

veya

$$R(X,Y)\xi = -\left(f^2 + f'\right)(\eta(Y)X - \eta(X)Y)$$

bulunur.

Bunun yanı sıra (4.17) eşitliğinde $X = \xi$ değişikliği yapılırsa

$$R(\xi,Y)\xi = -\left(f^2 + f'\right)(\eta(Y)\xi - Y) \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.17) ifadesinin iki tarafı da Z ile iç çarpılırsa

$$g(R(X,Y)\xi, Z) = -\left(f^2 + f'\right)(\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z)) \tag{4.33}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1.5. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu ve ξ M manifoldunda karakteristik vektör alanı olsun. Her $X \in \chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü

$$S(X,\xi) = -2\left(f^2 + f'\right)\eta(X) \tag{4.34}$$

eşitliğini sağlar (Yıldız, et al., 2013).

İspat (4.33) ifadesinde Riemann metriğinin özelliği kullanılarak

$$g(R(Y,X)\xi, Z) = -\left(f^2 + f'\right)(\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)) \tag{4.35}$$

yazılır. (4.35) denkleminde $Y = Z = e_i$ değişikliği uygulanır ve (2.11) ifadesinde yerine konulursa

$$S(X,\xi) = \sum_{i=1}^{3} -\left(f^2 + f'\right)(\eta(X)g(e_{i,}, e_{i,}) - \eta(e_{i,})g(X, e_{i,}))$$

veya

$$S(X,\xi) = -\left(f^2+f'\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\eta\left(X\right)g\left(e_{i,},e_{i,}\right)-\eta\left(e_{i,}\right)g\left(X,e_{i,}\right)\right) \tag{4.36}$$

eşitliği bulunur. (4.36) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$S(X,\xi) = -2\left(f^2+f'\right)\eta\left(X\right)$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1. Yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen (4.34) denkleminde $X=\xi$ değişikliği yapılırsa (2.17) ifadesi yardımıyla

$$S(\xi,\xi) = -2\left(f^2+f'\right) \tag{4.37}$$

bulunur (Calin and Crasmareanu, 2010).

Yardımcı Teorem 4.1.6. *M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldunda ξ karakteristik vektör alanı olmak üzere Q Ricci operatörü*

$$Q\xi = -2\left(f^2+f'\right)\xi \tag{4.38}$$

dır (Calin and Crasmareanu, 2010).

İspat (4.34), (2.9) ve (2.19) ifadeleri kullanılarak

$$g\left(Q\xi,X\right) = -2\left(f^2+f'\right)g\left(\xi,X\right)$$

ya da

$$g\left(Q\xi,X\right) = g\left(-2\left(f^2+f'\right)\xi,X\right) \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) eşitliği uygun düzenlemeyle

$$g\left(Q\xi+2\left(f^2+f'\right)\xi,X\right)=0 \tag{4.40}$$

şeklinde ifade edilir. (4.40) ifadesinde

$$X\neq 0$$

olduğundan

$$Q\xi + 2\left(f^2 + f'\right)\xi = 0 \tag{4.41}$$

olur. (4.41) denkleminde $Q\xi$ yalnız bırakılırsa

$$Q\xi = -2\left(f^2 + f'\right)\xi$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1.7. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu ve τ skaler eğrilik olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $S(X,Y)$ Ricci eğrilik tensörü

$$S(X,Y) = \left(\frac{\tau}{2} + f^2 + f'\right) g(X,Y) - \left(\frac{\tau}{2} + 3f^2 + 3f'\right)\eta(X)\eta(Y) \tag{4.42}$$

ifadesine eşittir (Yıldız, et al., 2013).

İspat (4.17) eşitliğine $Y = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$R(X,\xi)\xi = -\left(f^2 + f'\right)(X - \eta(X)\xi) \tag{4.43}$$

bulunur. (4.43) ifadesinin iki tarafı da Y ile iç çarpılırsa

$$g(R(X,\xi)\xi, Y) = -\left(f^2 + f'\right)(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \tag{4.44}$$

olarak hesaplanır. Metriğin özelliğinden yararlanarak

$$g(R(X,\xi)\xi, Y) = g(R(\xi,X)Y,\xi) = \check{R}(\xi, X, Y, \xi)$$

yazılır. (2.13) eşitliğinde $X = \xi$, $Y = X$ ve $Z = Y$ değişiklikleri uygulanıp eşitliğin iki tarafı da ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(R(X,\xi)\xi, Y) &= g(\xi,\xi)S(X,Y) - g(\xi,Y)S(X,\xi) + g(Y,X)S(\xi,\xi) \\ &\quad - g(X,\xi)S(\xi,Y) - \frac{\tau}{2}\left[g(X,Y)g(\xi,\xi) - g(X,\xi)g(Y,\xi)\right] \end{aligned} \tag{4.45}$$

olur. (4.45) eşitliğinde (2.17) ve (2.19) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(R\left(X,\xi\right)\xi,Y\right) &= S\left(X,Y\right)-\eta\left(Y\right)S\left(X,\xi\right)+g\left(Y,X\right)S\left(\xi,\xi\right) \\ &\quad -\eta\left(Y\right)S\left(\xi,Y\right)-\frac{\tau}{2}\left[g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right] \end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur. (4.34) ve (4.37) ifadeleri (4.46) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g\left(R\left(X,\xi\right)\xi,Y\right) &= S\left(X,Y\right)+2\left(f^2+f'\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-2\left(f^2+f'\right)g\left(Y,X\right) \\ &\quad +2\left(f^2+f'\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-\frac{\tau}{2}\left(g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) \end{aligned} \tag{4.47}$$

bulunur. (4.44) denklemi ile (4.47) ifadesi birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned} -\left(f^2+f'\right)\left(g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) &= S\left(X,Y\right)+4\left(f^2+f'\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \\ &\quad -2\left(f^2+f'\right)g\left(Y,X\right) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left(g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) \end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) eşitliğinde $S\left(X,Y\right)$ yalnız bırakılırsa

$$S\left(X,Y\right)=\left(f^2+f'\right)\left[-3\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)+g\left(Y,X\right)\right]+\frac{\tau}{2}\left(g\left(X,Y\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) \tag{4.49}$$

bulunur. (4.49) ifadesi düzenlenirse

$$S\left(X,Y\right)=\left(\frac{\tau}{2}+f^2+f'\right)g\left(X,Y\right)-\left(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f'\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.8. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. Her $X,Y\in\chi(M)$ vektör alanları için QX Ricci operatörü

$$QX=\left(\frac{\tau}{2}+f^2+f'\right)X-\left(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f'\right)\eta\left(X\right)\xi \tag{4.50}$$

şeklinde hesaplanır (Yıldız, et al., 2013).

İspat (2.19) ve (4.42) ifadeleri yardımıyla

$$S\left(X,Y\right)=g\left(\left(\frac{\tau}{2}+f^2+f'\right)X-\left(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f'\right)\eta\left(X\right)\xi,Y\right)=g\left(QX,Y\right) \tag{4.51}$$

olarak yazılabilir. (4.51) eşitliği uygun düzenlemeyle

$$g\left(QX,Y\right)-g((\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})X-(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\eta\left(X\right)\xi,Y)=0 \tag{4.52}$$

şeklinde ifade edilir. (4.52) eşitliğinde metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$g(QX-[(\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})X-(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\eta\left(X\right)\xi],Y)=0 \tag{4.53}$$

yazılır. (4.53) ifadesinde $Y\neq 0$ olduğundan

$$QX-[(\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})X-(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\eta\left(X\right)\xi]=0 \tag{4.54}$$

olur. (4.54) denkleminde QX yalnız bırakılırsa

$$QX=(\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})X-(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\eta\left(X\right)\xi$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1.9. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. Her $X,Y,Z\in\chi(M)$ için $R\left(X,Y\right)Z$ Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}R\left(X,Y\right)Z &= (\frac{\tau}{2}+2f^{2}+2f^{'})\left(X\Lambda Y\right)Z\\ &\quad -(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\left\{\eta\left(X\right)\left(\xi\Lambda Y\right)Z+\eta\left(Y\right)\left(X\Lambda\xi\right)Z\right\}\end{aligned} \tag{4.55}$$

şeklinde ifade edilir (Yıldız, et al., 2013).

İspat (4.42) ve (4.50) ifadeleri (2.13) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}R\left(X,Y\right)Z &= (\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})g\left(Y,Z\right)X-(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})g\left(Y,Z\right)\eta\left(X\right)\xi\\ &\quad -(\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})g\left(X,Z\right)Y+(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})g\left(X,Z\right)\eta\left(Y\right)\xi\\ &\quad +(\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})g\left(Z,Y\right)X-(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\eta\left(Z\right)\eta\left(Y\right)X\\ &\quad -(\frac{\tau}{2}+f^{2}+f^{'})g\left(Z,X\right)Y+(\frac{\tau}{2}+3f^{2}+3f^{'})\eta\left(Z\right)\eta\left(X\right)Y\\ &\quad -\frac{\tau}{2}\left\{g\left(Y,Z\right)X-g\left(X,Z\right)Y\right\}\end{aligned} \tag{4.56}$$

eşitliği elde edilir. (4.56) eşitliğinde gerekli işlemler yapılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\frac{\tau}{2}+f^2+f')\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right] \\ &\quad -(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f')\left[g(Y,Z)\eta(X)\xi-\eta(Z)\eta(X)Y\right] \\ &\quad -(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f')\left[\eta(Z)\eta(Y)X-g(X,Z)\eta(Y)\xi\right] \end{aligned} \tag{4.57}$$

bulunur. (2.5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g(Y,Z)X-g(X,Z)Y &= (X\Lambda Y)Z \\ g(Y,Z)\xi-\eta(Z)Y &= (\xi\Lambda Y)Z \\ \eta(Z)X-g(X,Z)\xi &= (X\Lambda\xi)Z \end{aligned} \tag{4.58}$$

elde edilir. (4.57) eşitliğinde (4.58) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\frac{\tau}{2}+2f^2+2f')(X\Lambda Y)Z \\ &\quad -(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f')\left\{\eta(X)(\xi\Lambda Y)Z+\eta(Y)(X\Lambda\xi)Z\right\} \end{aligned}$$

sonucu ortaya çıkar.

3-boyutlu f-Kenmotsu Manifoldu için Bir Örnek

(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ için standart koordinatlar olmak üzere

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z\neq 0\right\}$$

3−boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde

$$e_1=z^2\frac{\partial}{\partial x},\ e_2=z^2\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.59}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları her noktada birbirinden lineer bağımsızdır. g Riemann metriği

$$\begin{aligned} g(e_1,e_3) &= g(e_2,e_3)=g(e_1,e_2)=0 \\ g(e_1,e_1) &= g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1 \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall Z \in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(Z) = g(Z, e_3)$$

biçimindedir. ϕ $(1,1)$-tensör alanı

$$\phi(e_1) = -e_2,\ \phi(e_2) = e_1,\ \phi(e_3) = 0 \tag{4.60}$$

şeklinde tanımlanır. O halde

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e_1e_2 - e_2e_1 \\
&= z^2\frac{\partial}{\partial x}(z^2\frac{\partial}{\partial y}) - z^2\frac{\partial}{\partial y}(z^2\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= z^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(z^2)\frac{\partial}{\partial y} + z^4\frac{\partial}{\partial x} - z^2\frac{\partial}{\partial y}(z^2)\frac{\partial}{\partial x} - z^4\frac{\partial}{\partial y} \\
&= z^4\frac{\partial}{\partial x} - z^4\frac{\partial}{\partial y} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.61}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= e_2e_3 - e_3e_2 \\
&= z^2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= z^2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\frac{\partial}{\partial y} - z^2\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= -2z\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\frac{2}{z}e_2
\end{aligned} \tag{4.62}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
[e_1, e_3] &= e_1e_3 - e_3e_1 \\
&= z^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= z^2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\frac{\partial}{\partial x} - z^2\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= -2z\frac{\partial}{\partial x} \\
&= -\frac{2}{z}e_1
\end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilir. (2.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_2\right) &= e_1 g\left(e_3, e_2\right) + e_3 g\left(e_2, e_1\right) - e_2 g\left(e_1, e_3\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_3, e_2]\right) - g\left(e_3, [e_1, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_1, e_3]\right) \\ &= -\frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_1} e_3 = 0 \ , \ \nabla_{e_1} e_3 = \pm e_1 \ \text{ veya } \ \nabla_{e_1} e_3 = \pm e_3 \tag{4.64}$$

sonucu bulunur. $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_3\right) &= e_1 g\left(e_3, e_3\right) + e_3 g\left(e_3, e_1\right) - e_3 g\left(e_1, e_3\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_3, e_3]\right) - g\left(e_3, [e_1, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_1, e_3]\right) \\ &= e_1(1) - g\left(e_1, 0\right) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_1\right) - \frac{2}{z} g\left(e_3, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1} e_3 \neq \pm e_3 \ \text{ ve } \ \nabla_{e_1} e_3 = 0 \ \text{ veya } \ \nabla_{e_1} e_3 = \pm e_1 \tag{4.65}$$

verilir. $X = e_1, Y = e_3, Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_1\right) &= e_1 g\left(e_3, e_1\right) + e_3 g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_3\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_3, e_1]\right) - g\left(e_3, [e_1, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) \\ &= e_3(1) - \frac{2}{z} g\left(e_1, e_1\right) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_1, e_1\right) \\ &= -\frac{4}{z} \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece

$$\nabla_{e_1} e_3 \neq 0 \ \text{ ve } \ \nabla_{e_1} e_3 = -\frac{2}{z} e_1 \tag{4.66}$$

bulunur. (2.4) denkleminde $X = e_1, Y = e_2$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_2, e_3\right) &= e_1 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_1\right) - e_3 g\left(e_1, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_1, e_2]\right) \\ &= +\frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) + \frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) + g\left(e_3, 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1}e_2 = 0 \ , \ \nabla_{e_1}e_2 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_2 = \pm e_2 \tag{4.67}$$

yazılır. $X = e_1, Y = e_2$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1}e_2, e_2\right) &= e_1 g\left(e_2, e_2\right) + e_2 g\left(e_2, e_1\right) - e_2 g\left(e_1, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_2, e_2]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_1, e_2]\right) \\ &= e_1(1) - g\left(e_1, 0\right) - g\left(e_2, 0\right) + g\left(e_2, 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\nabla_{e_1}e_2 \neq \pm e_2 \text{ ve } \nabla_{e_1}e_2 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_2 = \pm e_1 \tag{4.68}$$

sonucuna ulaşılır. $X = e_1, Y = e_2$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1}e_2, e_1\right) &= e_1 g\left(e_2, e_1\right) + e_2 g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_2, e_1]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_1, e_2]\right) \\ &= e_2(1) - g\left(e_1, 0\right) - g\left(e_2, 0\right) + g\left(e_1, 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_{e_1}e_2 \neq \pm e_1 \text{ ve } \nabla_{e_1}e_2 = 0 \tag{4.69}$$

bulunur. Ayrıca (2.4) denkleminde $X = e_2, Y = e_3$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2}e_3, e_1\right) &= e_2 g\left(e_3, e_1\right) + e_3 g\left(e_1, e_2\right) - e_1 g\left(e_3, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_2, [e_3, e_1]\right) - g\left(e_3, [e_2, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_2, e_3]\right) \\ &= -\frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\nabla_{e_2}e_3 = 0 \ , \ \nabla_{e_2}e_3 = \pm e_2 \text{ veya } \nabla_{e_2}e_3 = \pm e_3 \tag{4.70}$$

şeklinde yazılır. $X=e_2, Y=e_3$ ve $Z=e_2$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_2}e_3, e_2\right) &= e_2 g\left(e_3, e_2\right) + e_3 g\left(e_2, e_2\right) - e_2 g\left(e_3, e_2\right) \\
&\quad - g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) - g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) \\
&= e_3(1) - \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) \\
&= -\frac{4}{z}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_{e_2}e_3 \neq 0 \ , \ \nabla_{e_2}e_3 \neq \pm e_3 \ \text{ve} \ \nabla_{e_2}e_3 = -\frac{2}{z}e_2 \tag{4.71}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.13) ifadesinde $X=e_3, Y=e_3, Z=e_1$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_3}e_3, e_1\right) &= e_3 g\left(e_3, e_1\right) + e_3 g\left(e_1, e_3\right) - e_1 g\left(e_3, e_3\right) \\
&\quad - g\left(e_3, [e_3, e_1]\right) - g\left(e_3, [e_3, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_3, e_3]\right) \\
&= -e_1(1) - \frac{2}{z} g\left(e_3, e_1\right) - \frac{2}{z} g\left(e_3, e_1\right) + g\left(e_1, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_3}e_3 = 0 \ , \ \nabla_{e_3}e_3 = \pm e_2 \ \text{veya} \ \nabla_{e_3}e_3 = \pm e_3 \tag{4.72}$$

şeklinde ifade edilir. $X=e_3, Y=e_3$ ve $Z=e_2$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_3}e_3, e_2\right) &= e_3 g\left(e_3, e_2\right) + e_3 g\left(e_2, e_3\right) - e_2 g\left(e_3, e_3\right) \\
&\quad - g\left(e_3, [e_3, e_2]\right) - g\left(e_3, [e_3, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_3, e_3]\right) \\
&= -e_2(1) - \frac{2}{z} g\left(e_3, e_2\right) - \frac{2}{z} g\left(e_3, e_2\right) + g\left(e_2, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\nabla_{e_3}e_3 \neq \pm e_2 \ \text{ve} \ \nabla_{e_3}e_3 = 0 \ \text{veya} \ \nabla_{e_3}e_3 = \pm e_3 \tag{4.73}$$

yazılır. $X=e_3, Y=e_3$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_3}e_3, e_3\right) &= e_3 g\left(e_3, e_3\right) + e_3 g\left(e_3, e_3\right) - e_3 g\left(e_3, e_3\right) \\
&\quad - g\left(e_3, [e_3, e_3]\right) - g\left(e_3, [e_3, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_3, e_3]\right) \\
&= e_3(1) + e_3(1) - e_3(1) - g\left(e_3, 0\right) - g\left(e_3, 0\right) + g\left(e_3, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\nabla_{e_3} e_3 \neq \pm e_3 \text{ ve } \nabla_{e_3} e_3 = 0 \tag{4.74}$$

sonucu ortaya çıkar. (2.4) ifadesi $X = e_2, Y = e_2$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2} e_2, e_3\right) &= e_2 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_2\right) - e_3 g\left(e_2, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_2, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) \\ &= -e_3(1) + \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) + \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) + g\left(e_3, 0\right) \\ &= +\frac{4}{z} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_2} e_2 = \frac{2}{z} e_3 \tag{4.75}$$

şeklinde ifade edilir. Öte yandan (2.4) ifadesi $X = e_1, Y = e_1$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_1} e_1, e_3\right) &= e_1 g\left(e_1, e_3\right) + e_1 g\left(e_3, e_1\right) - e_3 g\left(e_1, e_1\right) \\ &\quad - g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) - g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_1, e_1]\right) \\ &= -e_3(1) + \frac{2}{z} g\left(e_1, e_1\right) + \frac{2}{z} g\left(e_1, e_1\right) + g\left(e_3, 0\right) \\ &= +\frac{4}{z} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{2}{z} e_3 \tag{4.76}$$

bulunur. (2.4) ifadesi $X = e_3, Y = e_2$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3} e_2, e_1\right) &= e_3 g\left(e_2, e_1\right) + e_2 g\left(e_1, e_3\right) - e_1 g\left(e_3, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_3, [e_2, e_1]\right) - g\left(e_2, [e_3, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_3, e_2]\right) \\ &= -g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) + \frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu durumda

$$\nabla_{e_3} e_2 = 0 \ , \ \nabla_{e_3} e_2 = \pm e_2 \text{ veya } \nabla_{e_3} e_2 = \pm e_3 \tag{4.77}$$

sonucu ortaya çıkar. $X = e_3, Y = e_2$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3}e_2, e_2\right) &= e_3 g\left(e_2, e_2\right) + e_2 g\left(e_2, e_3\right) - e_2 g\left(e_3, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) - g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) \\ &= e_3\left(1\right) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) + \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Bu doğrultuda

$$\nabla_{e_3}e_2 \neq \pm e_2 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_2 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_3}e_2 = \pm e_3 \tag{4.78}$$

ifade edilir. $X = e_3, Y = e_2$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3}e_2, e_3\right) &= e_3 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_3\right) - e_3 g\left(e_3, e_2\right) \\ &\quad - g\left(e_3, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_3, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_3, e_2]\right) \\ &= e_2\left(1\right) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_2\right) - g\left(e_2, 0\right) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_{e_3}e_2 \neq \pm e_3 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_2 = 0 \tag{4.79}$$

bulunur. Yine (2.4) ifadesi $X = e_2, Y = e_1$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2}e_1, e_3\right) &= e_2 g\left(e_1, e_3\right) + e_1 g\left(e_3, e_2\right) - e_3 g\left(e_2, e_1\right) \\ &\quad - g\left(e_2, [e_1, e_3]\right) - g\left(e_1, [e_2, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_2, e_1]\right) \\ &= +\frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) + \frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) + g\left(e_3, 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_2}e_1 = 0 \text{ , } \nabla_{e_2}e_1 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_2}e_1 = \pm e_2 \tag{4.80}$$

olur. $X = e_2, Y = e_1$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2}e_1, e_2\right) &= e_2 g\left(e_1, e_2\right) + e_1 g\left(e_2, e_2\right) - e_2 g\left(e_2, e_1\right) \\ &\quad - g\left(e_2, [e_1, e_2]\right) - g\left(e_1, [e_2, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_2, e_1]\right) \\ &= e_1\left(1\right) - g\left(e_2, 0\right) - g\left(e_1, 0\right) + g\left(e_3, 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_{e_2}e_1 \neq \pm e_2 \text{ ve } \nabla_{e_2}e_1 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_2}e_1 = \pm e_1 \tag{4.81}$$

sonucuna ulaşılır. $X = e_2, Y = e_1$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_2}e_1, e_1) &= e_2 g(e_1, e_1) + e_1 g(e_1, e_2) - e_1 g(e_2, e_1) \\ &\quad - g(e_2, [e_1, e_1]) - g(e_1, [e_2, e_1]) + g(e_1, [e_2, e_1]) \\ &= e_2(1) - g(e_2, 0) - g(e_1, 0) + g(e_3, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\nabla_{e_2}e_1 \neq \pm e_1 \text{ ve } \nabla_{e_2}e_1 = 0 \tag{4.82}$$

olur. Bunun yanı sıra (2.4) ifadesi $X = e_3, Y = e_1$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3}e_1, e_2) &= e_3 g(e_1, e_2) + e_1 g(e_2, e_3) - e_2 g(e_3, e_1) \\ &\quad - g(e_3, [e_1, e_2]) - g(e_1, [e_3, e_2]) + g(e_2, [e_3, e_1]) \\ &= -g(e_3, 0) - \frac{2}{z} g(e_1, e_2) + \frac{2}{z} g(e_2, e_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_3}e_1 = 0 \text{ , } \nabla_{e_3}e_1 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_3}e_1 = \pm e_3 \tag{4.83}$$

yazılır. $X = e_3, Y = e_1$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3}e_1, e_1) &= e_3 g(e_1, e_1) + e_1 g(e_1, e_3) - e_1 g(e_3, e_1) \\ &\quad - g(e_3, [e_1, e_1]) - g(e_1, [e_3, e_1]) + g(e_1, [e_3, e_1]) \\ &= e_3(1) - g(e_3, 0) - \frac{2}{z} g(e_1, e_1) + \frac{2}{z} g(e_1, e_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_3}e_1 \neq \pm e_1 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_1 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_3}e_1 = \pm e_3 \tag{4.84}$$

olur. $X = e_3, Y = e_1$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3} e_1, e_3\right) &= e_3 g\left(e_1, e_3\right) + e_1 g\left(e_3, e_3\right) - e_3 g\left(e_3, e_1\right) \\ &\quad - g\left(e_3, [e_1, e_3]\right) - g\left(e_1, [e_3, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_3, e_1]\right) \\ &= e_1(1) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_1\right) - g\left(e_1, 0\right) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_3} e_1 \neq \pm e_3 \quad \text{ve} \quad \nabla_{e_3} e_1 = 0 \tag{4.85}$$

bulunur.

Sonuç olarak yaptığımız hesaplamalar doğrultusunda

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1} e_1 = \frac{2}{z} e_3, & \nabla_{e_2} e_1 = 0, & \nabla_{e_3} e_1 = 0, \\ \nabla_{e_1} e_2 = 0, & \nabla_{e_2} e_2 = \frac{2}{z} e_3, & \nabla_{e_3} e_2 = 0, \\ \nabla_{e_1} e_3 = -\frac{2}{z} e_1, & \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{2}{z} e_2, & \nabla_{e_3} e_3 = 0 \end{array} \tag{4.86}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.6) eşitliğinde (4.86) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} R\left(e_1, e_2\right) e_3 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_3 \\ &= -\frac{2}{z} \nabla_{e_1} e_2 + \frac{2}{z} \nabla_{e_2} e_1 \\ &= -\frac{2}{z} 0 + \frac{2}{z} 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.87}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.87) eşitliğinde e_1, e_2 ve e_3 ün döndürülmesi ile

$$\begin{aligned} R\left(e_1, e_2\right) e_2 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 \\ &= \frac{2}{z} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{e_2} 0 \\ &= -\frac{4}{z^2} e_1, \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned} R\left(e_2,e_1\right)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_1]}e_1 \\ &= \frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_3-\nabla_{e_1}0 \\ &= -\frac{4}{z^2}e_2, \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned} R\left(e_2,e_3\right)e_3 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3-\nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3-\nabla_{[e_2,e_3]}e_3 \\ &= \nabla_{e_2}0+\nabla_{e_3}(\frac{2}{z}e_2)+\frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_3 \\ &= e_3(\frac{2}{z})e_2+\frac{2}{z}\nabla_{e_3}e_2+\frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_3 \\ &= -\frac{2}{z^2}e_2+\frac{2}{z}(0)+\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_2) \\ &= -\frac{6}{z^2}e_2, \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned} R\left(e_3,e_2\right)e_2 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2-\nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2-\nabla_{[e_3,e_2]}e_2 \\ &= \nabla_{e_3}(\frac{2}{z}e_3)-\nabla_{e_3}0-\frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_2 \\ &= e_3(\frac{2}{z})e_3+\frac{2}{z}\nabla_{e_3}e_3-\frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_2 \\ &= -\frac{2}{z^2}e_3+\frac{2}{z}(0)-\frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3) \\ &= -\frac{6}{z^2}e_3, \end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned} R\left(e_2,e_3\right)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_3]}e_1 \\ &= \nabla_{e_2}0-\nabla_{e_3}0+\frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_1 \\ &= \frac{2}{z}(0) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
R\left(e_1,e_3\right)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3-\nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3-\nabla_{[e_1,e_3]}e_3 \\
&= \nabla_{e_1}0-\nabla_{e_3}(-\frac{2}{z}e_1)+\frac{2}{z}\nabla_{e_1}e_3 \\
&= -e_3(-\frac{2}{z})e_1+\frac{2}{z}\nabla_{e_3}e_1+\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1) \\
&= -\frac{2}{z^2}e_1+\frac{2}{z}(0)-\frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3) \\
&= -\frac{6}{z^2}e_1,
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}
R\left(e_1,e_3\right)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_2-\nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_2-\nabla_{[e_1,e_3]}e_2 \\
&= \nabla_{e_1}0-\nabla_{e_3}0+\frac{2}{z}\nabla_{e_1}e_2 \\
&= \frac{2}{z}(0) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
R\left(e_3,e_1\right)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{[e_3,e_1]}e_1 \\
&= \nabla_{e_3}(\frac{2}{z}e_3)-\nabla_{e_1}0-\frac{2}{z}\nabla_{e_1}e_1 \\
&= e_3(\frac{2}{z})e_3-\frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3) \\
&= -\frac{2}{z^2}e_3-\frac{4}{z^2}e_3 \\
&= -\frac{6}{z^2}e_3
\end{aligned} \tag{4.95}$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $S(e_i,e_j)=0$ olduğundan (2.8) ifadesinde (4.88) ve (4.93) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S\left(e_1,e_1\right) &= g\left(R\left(e_1,e_2\right)e_2,e_1\right)+g\left(R\left(e_1,e_3\right)e_3,e_1\right) \\
&= -\frac{4}{z^2}g\left(e_1,e_1\right)-\frac{6}{z^2}g\left(e_1,e_1\right) \\
&= -\frac{10}{z^2}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

olur. (2.8) ifadesinde (4.89) ve (4.90) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(e_2,e_2) &= g(R(e_2,e_1)e_1,e_2)+g(R(e_2,e_3)e_3,e_2) \\ &= -\frac{4}{z^2}g(e_2,e_2)-\frac{6}{z^2}g(e_2,e_2) \\ &= -\frac{10}{z^2} \end{aligned} \tag{4.97}$$

bulunur. Ayrıca (2.8) ifadesinde (4.91) ve (4.95) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(e_3,e_3) &= g(R(e_3,e_1)e_1,e_3)+g(R(e_3,e_2)e_2,e_3) \\ &= -\frac{6}{z^2}g(e_3,e_3)-\frac{6}{z^2}g(e_3,e_3) \\ &= -\frac{12}{z^2} \end{aligned} \tag{4.98}$$

bulunur. (4.87) ifadesi (2.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(e_1,e_2)e_3 &= R(e_1,e_2)e_3-\frac{1}{2}\{S(e_2,e_3)e_1-S(e_1,e_3)e_2\} \\ &= 0-\frac{1}{2}\{0e_1-0e_2\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.99}$$

bulunur. (4.93) ve (4.98) eşitlikleri (2.14) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(e_1,e_3)e_3 &= R(e_1,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{S(e_3,e_3)e_1-S(e_1,e_3)e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_1-\frac{1}{2}\{-\frac{12}{z^2}e_1-0e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_1+\frac{6}{z^2}e_1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.100}$$

olur. Son olarak (4.90) ve (4.98) eşitlikleri (2.14) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(e_2,e_3)e_3 &= R(e_2,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{S(e_3,e_3)e_2-S(e_2,e_3)e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_2-\frac{1}{2}\{-\frac{12}{z^2}e_2-0e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_2+\frac{6}{z^2}e_2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.101}$$

şeklinde bulunur.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki sonuç ifade edilir.

Sonuç 4.1.1. M, 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldu her koşulda $\xi-$projektif flattir (Yıldız, et al., 2013).

4.2 Ricci-semisimetrik 3-boyutlu f-Kenmotsu Manifoldları

Bu kısımda 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldlarının Ricci-semisimetrik olma koşulları incelenmiş ve bu koşullar altında aynı zamanda Einstein manifold oldukları gösterilmiştir.

Tanım 4.2.1. M bir f-Kenmotsu manifoldu olsun. $R(X,Y)$ M üzerinde herhangi iki X, Y tanjant vektörünün türevi, S de M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere eğer

$$R(X,Y).S = 0 \tag{4.102}$$

şartı sağlanırsa M f-Kenmotsu manifoldu Ricci-semisimetrik olarak adlandırılır (Yıldız, et al., 2013).

Kabul edelim ki M f-Kenmotsu manifoldu (4.102) şartını sağlamış olsun. O halde

$$S(R(X,Y)U,V) + S(U,R(X,Y)V) = 0 \tag{4.103}$$

yazılır. (4.103) denkleminde $X = U = \xi$ değişikliği gerçekleştirilirse

$$S(R(\xi,Y)\xi,V) + S(\xi,R(\xi,Y)V) = 0 \tag{4.104}$$

olur. (4.104) eşitliğinde (4.16) ifadesi kullanılırsa

$$S(-(f^2+f^{'})(\eta(Y)\xi - Y),V) + S(\xi,-(f^2+f^{'})(g(Y,V)\xi - Y\eta(V))) = 0$$

veya

$$
\begin{aligned}
0 &= -\left(f^2+f'\right)\left[S(Y,V)-\eta(Y)S(\xi,V)\right] \\
&\quad -\left(f^2+f'\right)\left[\eta(V)S(\xi,Y)-g(Y,V)S(\xi,\xi)\right]
\end{aligned} \tag{4.105}
$$

bulunur. (4.105) ifadesi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(f^2+f'\right)\left[\eta(Y)S(\xi,V)-S(Y,V)\right] \\
&\quad +\left(f^2+f'\right)\left[g(Y,V)S(\xi,\xi)-\eta(V)S(\xi,Y)\right]
\end{aligned} \tag{4.106}
$$

şeklinde yazılır. (4.106) eşitliğinde (4.34) ve (4.37) ifadeleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(f^2+f'\right)\left[-2\left(f^2+f'\right)\eta(Y)\eta(V)-S(Y,V)\right] \\
&\quad +\left(f^2+f'\right)\left[-2\left(f^2+f'\right)g(Y,V)+2\left(f^2+f'\right)\eta(V)\eta(Y)\right]
\end{aligned} \tag{4.107}
$$

elde edilir. (4.107) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$
-\left(f^2+f'\right)S(Y,V)=+2\left(f^2+f'\right)\left(f^2+f'\right)g(Y,V)
$$

veya

$$
S(Y,V)=-2\left(f^2+f'\right)g(Y,V) \tag{4.108}
$$

bulunur.

Buna göre Tanım 1.2.3., (2.10) ifadesi ve elde edilen bu hesaplar yardımıyla şu teorem ifade edilir.

Teorem 4.3.1. 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifold M eğer Ricci semi-simetrik ve regüler ise bir Einstein manifolddur (Yıldız, et al., 2013).

4.3 f-Kenmotsu Manifoldunda Ricci Solitonlar

Bu kısımda 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldlarında Ricci solitonlar incelenmiş ve λ sabit değerinin f fonksiyonu cinsinden ifadesi hesaplanmıştır. Ayrıca

λ sabitinin alacağı değere göre f-Kenmotsu manifoldunun Einstein manifold olma durumu verilmiştir.

Herhangi bir b fonksiyonu için (2.34) eşitliğinde $V = b\xi$ alınırsa

$$\left(L_{b\xi}g + 2S + 2\lambda g\right)(X, Y) = 0$$

veya

$$L_{b\xi}\left(g\left(X, Y\right)\right) + 2S\left(X, Y\right) + 2\lambda g\left(X, Y\right) = 0 \tag{4.109}$$

yazılır. (4.109) ifadesi Lie türev tanımı kullanılarak

$$g\left(\nabla_X b\xi, Y\right) + g\left(X, \nabla_Y b\xi\right) + 2S\left(X, Y\right) + 2\lambda g\left(X, Y\right) = 0 \tag{4.110}$$

biçiminde ifade edilir. (4.110) eşitliği metriğin lineerlik özelliği ve koneksiyon gereği

$$\begin{aligned} 0 &= bg\left(\nabla_X\xi, Y\right) + (Xb)\,\eta\left(Y\right) + bg\left(X, \nabla_Y\xi\right) \\ &\quad + (Yb)\,\eta\left(X\right) + 2S\left(X, Y\right) + 2\lambda g\left(X, Y\right) \end{aligned} \tag{4.111}$$

olur. (4.2) ifadesi (4.111) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} 0 &= bg(f\left\{X - \eta\left(X\right)\xi\right\}, Y) + (Xb)\,\eta\left(Y\right) + (Yb)\,\eta\left(X\right) \\ &\quad + bg(X, f\left\{Y - \eta\left(Y\right)\xi\right\}) + 2S\left(X, Y\right) + 2\lambda g\left(X, Y\right) \end{aligned} \tag{4.112}$$

bulunur. (4.112) denklemi metriğin lineerlik özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= bfg\left(X, Y\right) - bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) + (Xb)\,\eta\left(Y\right) + (Yb)\,\eta\left(X\right) \\ &\quad bfg\left(X, Y\right) - bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) + 2S\left(X, Y\right) + 2\lambda g\left(X, Y\right) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 &= 2fbg\left(X, Y\right) - 2fb\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) + (Xb)\,\eta\left(Y\right) + (Yb)\,\eta\left(X\right) \\ &\quad + 2S\left(X, Y\right) + 2\lambda g\left(X, Y\right) \end{aligned} \tag{4.113}$$

şeklinde yazılır. (4.113) ifadesine $Y = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 2fbg\left(X, \xi\right) - 2fb\eta\left(X\right)\eta\left(\xi\right) + (Xb)\,\eta\left(\xi\right) + (\xi b)\,\eta\left(X\right) \\ &\quad + 2S\left(X, \xi\right) + 2\lambda g\left(X, \xi\right) \end{aligned} \tag{4.114}$$

olur. (4.114) eşitliğinde (4.34) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 2fb\eta(X) - 2fb\eta(X) + (Xb) + (\xi b)\eta(X) \\ &\quad -4\left(f^2 + f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) \end{aligned} \tag{4.115}$$

bulunur. (4.115) eşitliği düzenlenirse

$$(Xb) + (\xi b)\eta(X) - 4\left(f^2 + f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0 \tag{4.116}$$

elde edilir. (4.116) ifadesine $X = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$(\xi b) + (\xi b)\eta(\xi) - 4\left(f^2 + f'\right)\eta(\xi) + 2\lambda\eta(\xi) = 0 \tag{4.117}$$

olur. (4.117) denklemi düzenlenirse

$$2(\xi b) - 4\left(f^2 + f'\right) + 2\lambda = 0 \tag{4.118}$$

biçiminde yazılır. (4.118) eşitliğinde $\xi\beta$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\xi\beta = 2\left(f^2 + f'\right) - \lambda \tag{4.119}$$

bulunur. (4.119) ifadesi (4.116) denkleminde yerine konulursa

$$(Xb) + \left(2\left(f^2 + f'\right) - \lambda\right)\eta(X) - 4\left(f^2 + f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0$$

veya

$$(Xb) + \left(-2\left(f^2 + f'\right) + \lambda\right)\eta(X) = 0 \tag{4.120}$$

elde edilir. (2.2) ifadesi (4.120) denkleminde kullanılırsa

$$db(X) + \left(-2\left(f^2 + f'\right) + \lambda\right)\eta(X) = 0 \tag{4.121}$$

olur. (4.121) eşitliği

$$\left(db + \left(-2\left(f^2 + f'\right) + \lambda\right)\eta\right)(X) = 0 \tag{4.122}$$

şeklinde yazılabilir. (4.122) ifadesinde

$$X \neq 0$$

olduğundan

$$db+\left(-2\left(f^{2}+f^{'}\right)+\lambda\right)\eta \;=\; 0 \tag{4.123}$$

bulunur. (4.123) denkleminde db ifadesi yalnız bırakılırsa

$$db \;=\; \left[2\left(f^{2}+f^{'}\right)-\lambda\right]\eta \tag{4.124}$$

elde edilir. (4.124) eşitliğinin iki tarafına da d operatörü uygulanırsa

$$d^{2}b \;=\; \left[2\left(f^{2}+f^{'}\right)-\lambda\right]d\eta \tag{4.125}$$

bulunur. (2.3) eşitliği (4.125) denkleminde kullanılırsa

$$\left[2\left(f^{2}+f^{'}\right)-\lambda\right]d\eta=0 \tag{4.126}$$

olur. (4.126) ifadesinde

$$d\eta\neq 0$$

olduğundan dolayı

$$2\left(f^{2}+f^{'}\right)-\lambda=0 \tag{4.127}$$

ve

$$\lambda=2\left(f^{2}+f^{'}\right) \tag{4.128}$$

eşitlikleri bulunur. (4.127) ifadesi (4.124) eşitliğinde kullanılırsa $db = 0$ bulunur. Bu durumda b sabit değerli bir fonksiyondur. b fonksiyonunun sabit olma özelliği (4.113) ifadesinde kullanılırsa

$$2fbg\left(X,Y\right)-2fb\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)+2S\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right) \;=\; 0 \tag{4.129}$$

şeklinde bulunur. (4.129) denkleminde $S\left(X,Y\right)$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$2S\left(X,Y\right)=-2fbg\left(X,Y\right)+2fb\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-2\lambda g\left(X,Y\right)=0 \tag{4.130}$$

olur. (4.130) eşitliğinde gerekli işlemler gerçekleştirilirse

$$S\left(X,Y\right)=\left(-fb-\lambda\right)g\left(X,Y\right)+fb\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$$

veya

$$S(X,Y) = -(fb+\lambda)\, g(X,Y) + fb\eta(X)\,\eta(Y) \tag{4.131}$$

bulunur.

Buna göre Tanım 1.2.3., (2.10) ifadesi ve elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki sonuç ve teorem ifade edilir.

Sonuç 4.3.1. 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldu M ayrıca $\mu-$Einstein manifolddur (Yıldız, et al., 2013).

Teorem 4.3.1. 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldunda V, ξ karakteristik vektör alanı ile lineer ise V, ξ nin bir sabit katı, g bir $\mu-$Einstein manifold ve $\lambda = 2\left(f^2 + f'\right)$ koşulu sağlandığı takdirde Ricci soliton genişleyendir (Yıldız, et al., 2013).

BÖLÜM 5

SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONEKSİYONLU f-KENMOTSU MANİFOLD VE RICCI SOLİTONLAR

Bu bölümde, semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlar ve bu manifoldlar üzerinde Ricci solitonları incelenmiştir. Daha sonra bunlarla ilgili temel tanım ve kavramlar verilerek manifold üzerinde bazı eğrilik şartları ispatlanmıştır. Ayrıca semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda bir örnek incelenmiştir.

5.1 Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu f-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlar ile ilgili bazı tanım ve teoremler incelenmiştir.

Tanım 5.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu türevlenebilir (ϕ, ξ, η, g), hemen hemen değme metrik yapısına sahip hemen hemen değme manifold olsun. Her $X, Y \in T(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$ ve $df \wedge \eta = 0$ olmak üzere

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \phi\right) Y = f\left(g\left(\phi X, Y\right)\xi - 2\eta\left(Y\right)\phi X\right) \tag{5.1}$$

şartını sağlayan (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı f-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.2. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifold olmak üzere eğer $f = 0$ özel durumunda ise manifold kosimplektik olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifold ve $f^{'} = \xi f$ olmak üzere

$$f^2 + f + 2f' \neq 0$$

olduğunda manifold regüler olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 5.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. ξ karakteristik vektör alanı için

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = f\left(2X - \eta\left(X\right)\xi\right) \tag{5.2}$$

olur.

İspat (2.23) ifadesinde (5.1) eşitliği kullanılırsa

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y - \phi\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right) = f\left(g\left(\phi X, Y\right)\xi - 2\eta\left(Y\right)\phi X\right) \tag{5.3}$$

şeklinde ifade edilir. (5.3) denkleminde $Y = \xi$ değişikliği yapıldığında

$$\widetilde{\nabla}_X \phi \xi - \phi\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right) \; = \; f\left(g\left(\phi X, \xi\right)\xi - 2\eta\left(\xi\right)\phi X\right) \tag{5.4}$$

yazılır. (5.3) denkleminde (2.17), (2.18) ve (2.19) ifadeleri kullanılırsa

$$\phi\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right) \; = \; 2f\left(\phi X\right) \tag{5.5}$$

bulunur. (5.5) ifadesinin iki tarafına da ϕ operatörü uygulanırsa

$$\phi^2\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right) \; = \; 2f\left(\phi^2 X\right) \tag{5.6}$$

şeklinde yazılır. (5.6) eşitliğinde (2.17) ifadesinden yararlanılırsa

$$-\widetilde{\nabla}_X \xi + \eta\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right)\xi = f\left(-2X + 2\eta\left(X\right)\xi\right) \tag{5.7}$$

olur. (5.7) denkleminde bulunan $\eta\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right)\xi$ ifadesi (2.35) ifadesi kullanılarak

$$\eta\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right)\xi \; = \; \eta\left(f\left(\nabla_X \xi + \eta\left(X\right)\right)\right)\xi \tag{5.8}$$

şeklinde yazılır. (5.8) denklemi düzenlenirse

$$\eta\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right)\xi = f\eta\left(\nabla_X \xi\right)\xi + f\eta\left(X\right)\xi \tag{5.9}$$

bulunur. (5.9) ifadesinde (4.10) eşitliği kullanılırsa

$$\eta\left(\widetilde{\nabla}_X \xi\right)\xi = f\eta\left(X\right)\xi \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) eşitliği (5.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$-\widetilde{\nabla}_X \xi + f\eta\left(X\right)\xi = -f\left(2X - 2\eta\left(X\right)\xi\right) \tag{5.11}$$

olur. (5.11) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = f\left(2X - \eta\left(X\right)\xi\right)$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 5.1.2. *M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu, $\phi - (1,1)$ tipinde tensör alanı ve η 1-form olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \eta\right)Y = fg\left(\phi X, \phi Y\right) \tag{5.12}$$

yazılır.

İspat (2.23) ifadesinde (2.35) eşitliği kullanılırsa

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \eta\right)Y = \nabla_X \eta\left(Y\right) + \eta\left(\eta\left(Y\right)\right)X - \eta\left(\nabla_X Y\right) - \eta\left(\eta\left(Y\right)\right)X \tag{5.13}$$

olur. (5.13) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \eta\right)Y = \nabla_X \eta\left(Y\right) - \eta\left(\nabla_X Y\right) \tag{5.14}$$

bulunur. (5.14) eşitliğinde (2.23) ve (4.11) ifadeleri kullanılırsa

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \eta\right)Y = fg\left(\phi X, \phi Y\right)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu, η 1-form ve d diferensiyel operatör olsun. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$df \wedge \eta = 0 \implies df = f' \text{ ve } X(f) = f'\eta(X) \tag{5.15}$$

sonucu ortaya çıkar.

Yardımcı Teorem 5.1.4. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \tag{5.16}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat (2.6) eşitliğinde bulunan $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi$ terimi (2.35) ifadesi kullanılarak

$$\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi = \nabla_X\left(\widetilde{\nabla}_Y\xi\right) + \eta\left(\widetilde{\nabla}_Y\xi\right)X \tag{5.17}$$

şeklinde yazılır. (5.17) denklemi (5.2) eşitliği ve koneksiyonun özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi &= X(f)(2Y - \eta(Y)\xi) + f\nabla_X(2Y - \eta(Y)\xi) \\ &\quad + \eta(f(2Y - \eta(Y)\xi))X\end{aligned} \tag{5.18}$$

şeklinde ifade edilir. (5.19) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi &= X(f)2Y - X(f)\eta(Y)\xi + 2f\nabla_XY - f\nabla_X\eta(Y)\xi \\ &\quad + 2f\eta(Y)X - f\eta(Y)X\end{aligned} \tag{5.19}$$

bulunur. (5.19) denkleminde (4.21) eşitliği yerine konulursa

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi &= X(f)2Y - X(f)\eta(Y)\xi + 2f\nabla_XY - fX\eta(Y)\xi \\ &\quad - \eta(Y)f^2X + \eta(Y)\eta(X)f^2\xi + f\eta(Y)X\end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.20) ifadesinde $X = Y$ ve $Y = X$ değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned}-\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi &= -Y(f)2X + Y(f)\eta(X)\xi - 2f\nabla_YX + fY\eta(X)\xi \\ &\quad + \eta(X)f^2Y - \eta(Y)\eta(X)f^2\xi - f\eta(X)Y\end{aligned} \tag{5.21}$$

bulunur. Son olarak (2.6) eşitliğinde bulunan $-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi$ terimi (5.2) ifadesi kullanılarak

$$-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi = -f\left\{2\left[X,Y\right]-\eta\left(\left[X,Y\right]\right)\xi\right\} \tag{5.22}$$

şeklinde yazılır. (5.22) ifadesinde Lie türev tanımı kullanılırsa

$$-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi = -f\{2\widetilde{\nabla}_XY-2\widetilde{\nabla}_YX-\eta\left(\widetilde{\nabla}_XY\right)\xi+\eta\left(\widetilde{\nabla}_YX\right)\xi\} \tag{5.23}$$

olur. (5.23) eşitliğinde (2.35) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi &= -2f\nabla_XY-2f\eta\left(Y\right)X+2f\nabla_YX+2f\eta\left(X\right)Y\\ &\quad+f\eta\left(\nabla_XY\right)\xi+f\eta\left(\eta\left(Y\right)X\right)\xi-f\eta\left(\nabla_YX\right)\xi-f\eta\left(\eta\left(X\right)Y\right)\xi\end{aligned} \tag{5.24}$$

şeklinde ifade edilir. (5.24) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi &= -2f\nabla_XY-2f\eta\left(Y\right)X+2f\nabla_YX+2f\eta\left(X\right)Y\\ &\quad+f\eta\left(\nabla_XY\right)\xi-f\eta\left(\nabla_YX\right)\xi\end{aligned} \tag{5.25}$$

bulunur. (5.25) denkleminde (4.27) ve (4.28) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi &= -2f\nabla_XY-2f\eta\left(Y\right)X+2f\nabla_YX+2f\eta\left(X\right)Y\\ &\quad+fX\eta\left(Y\right)\xi-f^2g\left(\phi X,\phi Y\right)\xi-fY\eta\left(X\right)\xi+f^2g\left(\phi X,\phi Y\right)\xi\end{aligned} \tag{5.26}$$

olur. (5.26) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi &= -2f\nabla_XY-2f\eta\left(Y\right)X+2f\nabla_YX+2f\eta\left(X\right)Y\\ &\quad+fX\eta\left(Y\right)\xi-fY\eta\left(X\right)\xi\end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.20), (5.21) ve (5.27) ifadeleri (2.6) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(X,Y\right)\xi &= X\left(f\right)2Y-X\left(f\right)\eta\left(Y\right)\xi+2f\nabla_XY-fX\eta\left(Y\right)\xi\\ &\quad-\eta\left(Y\right)f^2X+\eta\left(Y\right)\eta\left(X\right)f^2\xi+f\eta\left(Y\right)X\\ &\quad-Y\left(f\right)2X+Y\left(f\right)\eta\left(X\right)\xi-2f\nabla_YX+fY\eta\left(X\right)\xi\\ &\quad+\eta\left(X\right)f^2Y-\eta\left(Y\right)\eta\left(X\right)f^2\xi-f\eta\left(X\right)Y\\ &\quad-2f\nabla_XY-2f\eta\left(Y\right)X+2f\nabla_YX+2f\eta\left(X\right)Y\\ &\quad+fX\eta\left(Y\right)\xi-fY\eta\left(X\right)\xi\end{aligned} \tag{5.28}$$

bulunur. (5.28) denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)\xi &= X(f)2Y - X(f)\eta(Y)\xi - Y(f)2X \\ &\quad + Y(f)\eta(X)\xi + f^2\eta(X)Y - f^2\eta(Y)X \\ &\quad + f\eta(X)Y - f\eta(Y)X \end{aligned} \tag{5.29}$$

elde edilir. (5.15) ifadesi (5.29) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)\xi &= 2f'\eta(X)Y - f'\eta(X)\eta(Y)\xi - 2f'\eta(Y)X + f'\eta(X)\eta(Y)\xi \\ &\quad + f^2\eta(X)Y - f^2\eta(Y)X + f\eta(X)Y - f\eta(Y)X \end{aligned}$$

veya

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)(\eta(Y)X - \eta(X)Y)$$

elde edilir.

(5.16) ifadesinde $X = \xi$ değişikliği yapılırsa

$$\widetilde{R}(\xi,Y)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)(\eta(Y)\xi - Y) \tag{5.30}$$

bulunur. Ayrıca (5.16) ifadesinde $Y = \xi$ değişikliği yapılırsa

$$\widetilde{R}(X,\xi)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)(X - \eta(X)\xi) \tag{5.31}$$

olur. Bunun yanı sıra (5.16) ifadesinin iki tarafı da Z ile iç çarpılırsa

$$g\left(\widetilde{R}(X,Y)\xi, Z\right) = -\left(f^2 + f + 2f'\right)(\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z)) \tag{5.32}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.1.5. *M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü*

$$\widetilde{S}(X,\xi) = -2\left(f^2 + f + 2f'\right)\eta(X) \tag{5.33}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat (5.32) ifadesinde Riemann metriğinin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$g\left(\widetilde{R}\left(Y,X\right)\xi,Z\right)=-\left(f^{2}+f+2f'\right)\left(\eta\left(X\right)g\left(Y,Z\right)-\eta\left(Y\right)g\left(X,Z\right)\right) \tag{5.34}$$

yazılabilir. (5.34) eşitliğinde $Y=Z=e_i$ değişikliği uygulanır ve (2.11) ifadesinde yerine konulursa

$$\widetilde{S}(X,\xi)=\sum_{i=1}^{3}-\left(f^{2}+f+2f'\right)\left(\eta\left(X\right)g\left(Y,Z\right)-\eta\left(Y\right)g\left(X,Z\right)\right) \tag{5.35}$$

bulunur. (5.35) denklemi düzenlenirse

$$\widetilde{S}(X,\xi)\ =\ -\left(f^{2}+f+2f'\right)\sum_{i=1}^{3}\left(\eta\left(X\right)g\left(e_{i,},e_{i,}\right)-\eta\left(e_{i,}\right)g\left(X,e_{i,}\right)\right) \tag{5.36}$$

olur. (5.36) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{S}(X,\xi)=-2\left(f^{2}+f+2f'\right)\eta\left(X\right)$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.1. Yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen (5.33) denkleminde $X=\xi$ değişikliği yapılırsa

$$\widetilde{S}(\xi,\xi)=-2\left(f^{2}+f+2f'\right) \tag{5.37}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 5.1.6. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda $\widetilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}\xi=-2\left(f^{2}+f+2f'\right)\xi \tag{5.38}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat (5.33) eşitliğinde (2.9) ve (2.19) ifadeleri kullanılarak

$$g\left(\widetilde{Q}\xi,X\right)=-2\left(f^{2}+f+2f'\right)g\left(\xi,X\right)$$

veya

$$g\left(\widetilde{Q}\xi, X\right) = g\left(-2\left(f^2+f+2f'\right)\xi, X\right) \tag{5.39}$$

şeklinde yazılabilir. (5.39) ifadesinde metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$g\left(\widetilde{Q}\xi + 2\left(f^2+f+2f'\right)\xi, X\right) = 0 \tag{5.40}$$

olur. (5.40) eşitliğinde

$$X \neq 0$$

olduğundan

$$\widetilde{Q}\xi = -2\left(f^2+f+2f'\right)\xi$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.1.7. *M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu ve τ skaler eğrilik tensörü olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $\widetilde{S}(X,Y)$ Ricci eğrilik tensörü*

$$\widetilde{S}(X,Y) = \left(\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f'\right)g(X,Y) - \left(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f'\right)\eta(X)\eta(Y) \tag{5.41}$$

olarak verilir.

İspat (5.31) ifadesinin her iki tarafı Y ile iç çarpılırsa

$$g\left(\widetilde{R}(X,\xi)\xi, Y\right) = -\left(f^2+f+2f'\right)\left(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right) \tag{5.42}$$

hesaplanır. (2.13) eşitliğinde $X = \xi$, $Y = X$, $Z = Y$ değişiklikleri uygulanır ve eşitliğin iki tarafı da ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{R}}(\xi,X,Y,\xi) &= g(\xi,\xi)\widetilde{S}(X,Y) - g(\xi,Y)\widetilde{S}(X,\xi) + g(Y,X)\widetilde{S}(\xi,\xi) \\ &\quad - g(X,\xi)\widetilde{S}(\xi,Y) - \frac{\tau}{2}\left[g(X,Y)g(\xi,\xi) - g(X,\xi)g(Y,\xi)\right]\end{aligned} \tag{5.43}$$

olur. (5.43) eşitliğinde (2.17) ve (2.19) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{R}}(\xi,X,Y,\xi) &= \widetilde{S}(X,Y) - \eta(Y)\widetilde{S}(X,\xi) + g(Y,X)\widetilde{S}(\xi,\xi) \\ &\quad - \eta(X)\widetilde{S}(\xi,Y) - \frac{\tau}{2}\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right]\end{aligned} \tag{5.44}$$

bulunur. (5.33) ve (5.37) eşitlikleri (5.44) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{R}}(\xi, X, Y, \xi) &= \widetilde{S}(X,Y) + 2(f^2+f+2f')\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -2(f^2+f+2f')g(Y,X) + 2(f^2+f+2f')\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y))\end{aligned} \tag{5.45}$$

elde edilir. (5.42) denklemi ile (5.45) ifadesi birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned}-(f^2+f+2f')(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)) &= \widetilde{S}(X,Y) \\ &\quad +4(f^2+f+2f')\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -2(f^2+f+2f')g(Y,X) \\ &\quad -\frac{\tau}{2}(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y))\end{aligned} \tag{5.46}$$

bulunur. (5.46) ifadesinde $\widetilde{S}(X,Y)$ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(X,Y) &= -3(f^2+f+2f')\eta(X)\eta(Y) + (f^2+f+2f')g(Y,X) \\ &\quad +\frac{\tau}{2}(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y))\end{aligned} \tag{5.47}$$

yazılır. (5.47) eşitliği düzenlenirse

$$\widetilde{S}(X,Y) = \left(\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f'\right)g(X,Y) - \left(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f'\right)\eta(X)\eta(Y)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.1.8. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu olsun Her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $\widetilde{Q}X$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}X = (\frac{\tau}{2}+f^2+f^{'})X - (\frac{\tau}{2}+3f^2+3f^{'})\eta(Y)\xi \tag{5.48}$$

şeklinde hesaplanır.

İspat (5.41) ifadesi metriğin lineerlik özelliği kullanılarak

$$\widetilde{S}(X,Y) = g\left((\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f')X - (\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi, Y\right) \tag{5.49}$$

biçiminde yazılır. (5.49) ve (2.9) ifadeleri yardımıyla

$$g\left(\widetilde{Q}X,Y\right)-g\left((\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f')X-(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi,Y\right)=0 \tag{5.50}$$

bulunur. (5.50) ifadesi metriğin lineerlik özelliğinden

$$g\left(\widetilde{Q}X-[(\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f')X-(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi],Y\right)=0 \tag{5.51}$$

şeklinde yazılır. (5.51) eşitliğinde

$$Y\neq 0$$

olduğundan

$$\widetilde{Q}X-[(\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f')X-(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi]=0 \tag{5.52}$$

bulunur. (5.52) eşitliği düzenlenirse

$$\widetilde{Q}X=(\frac{\tau}{2}+f^2+f+2f')X-(\frac{\tau}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi$$

elde edilir.

3-boyutlu Semi-simetrik Metrik Olmayan f-Kenmotsu Manifoldu için Bir Örnek (Yıldız, et al., 2013)**.**

(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ için standart koordinatlar olmak üzere

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z\neq 0\right\}$$

$3-$boyutlu semi-simetrik metrik olmayan $f-$Kenmotsu manifoldunu düşünelim. M manifoldu üzerinde

$$e_1=z^2\frac{\partial}{\partial x},\ e_2=z^2\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.53}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları her noktada birbirinden lineer bağımsızdır. g Riemann metriği

$$\begin{aligned} g(e_1,e_3) &= g(e_2,e_3)=g(e_1,e_2)=0 \\ g(e_1,e_1) &= g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1 \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall Z \in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(Z) = g(Z, e_3)$$

biçimindedir. ϕ-$(1,1)$ tensör alanı

$$\phi(e_1) = -e_2,\ \phi(e_2) = e_1,\ \phi(e_3) = 0 \tag{5.54}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (2.35) ve (4.86) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \nabla_{e_1} e_1 + \eta(e_1) e_1 = \frac{2}{z} e_3, \\
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \nabla_{e_1} e_2 + \eta(e_2) e_1 = 0, \\
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 &= \nabla_{e_1} e_3 + \eta(e_3) e_1 = -\frac{2}{z} e_1 + e_1, \\
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 &= \nabla_{e_2} e_1 + \eta(e_1) e_2 = 0, \\
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= \nabla_{e_2} e_2 + \eta(e_2) e_2 = \frac{2}{z} e_3, \\
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 &= \nabla_{e_2} e_3 + \eta(e_3) e_2 = -\frac{2}{z} e_2 + e_2, \\
\widetilde{\nabla}_{e_3} e_1 &= \nabla_{e_3} e_1 + \eta(e_1) e_3 = 0, \\
\widetilde{\nabla}_{e_3} e_2 &= \nabla_{e_3} e_2 + \eta(e_2) e_3 = 0,
\end{aligned}$$

ve son olarak

$$\widetilde{\nabla}_{e_3} e_3 = \nabla_{e_3} e_3 + \eta(e_3) e_3 = e_3$$

bulunur. Yapılan hesaplar sonucunda

$$\begin{array}{lllllllll}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 & = & \frac{2}{z} e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 & = & 0, & \widetilde{\nabla}_{e_3} e_1 & = & 0, \\
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 & = & 0, & \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 & = & \frac{2}{z} e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_3} e_2 & = & 0, \\
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 & = & -\frac{2}{z} e_1 + e_1, & \widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 & = & -\frac{2}{z} e_2 + e_2, & \widetilde{\nabla}_{e_3} e_3 & = & e_3
\end{array} \tag{5.55}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.6) eşitliğinde (5.55) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_1, e_2\right) e_3 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 - \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 - \widetilde{\nabla}_{[e_1,e_2]}e_3 \\
&= -\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 + \widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 + \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 - \widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 \\
&= -\frac{2}{z}0 + 0 + \frac{2}{z}0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.56}$$

bulunur. Benzer şekilde (5.56) eşitliğinde e_1, e_2 ve e_3 ün döndürülmesi ile

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_1, e_2\right) e_2 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 - \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 - \widetilde{\nabla}_{[e_1,e_2]}e_2 \\
&= \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 - \widetilde{\nabla}_{e_2}0 \\
&= \frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1 + e_1) \\
&= (-\frac{4}{z^2} + \frac{2}{z})e_1,
\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_2, e_1\right) e_1 &= \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 - \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 - \widetilde{\nabla}_{[e_2,e_1]}e_1 \\
&= \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 - \widetilde{\nabla}_{e_1}0 \\
&= \frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_2 + e_2) \\
&= (-\frac{4}{z^2} + \frac{2}{z})e_2,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_2, e_3\right) e_3 &= \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3 - \widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 - \widetilde{\nabla}_{[e_2,e_3]}e_3 \\
&= \widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 + \widetilde{\nabla}_{e_3}(\frac{2}{z}e_2 - e_2) + \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 \\
&= -\frac{2}{z}e_2 + e_2 + e_3(\frac{2}{z})e_2 + \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2 \\
&\quad -\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2 + \frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_2 + e_2) \\
&= -\frac{2}{z}e_2 + e_2 - \frac{2}{z^2}e_2 + \frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_2 + e_2) \\
&= -\frac{6}{z^2}e_2 + e_2,
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_3,e_2\right)e_2 &= \widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2-\widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2-\widetilde{\nabla}_{[e_3,e_2]}e_2\\
&= \widetilde{\nabla}_{e_3}(\frac{2}{z}e_3)-\widetilde{\nabla}_{e_3}0-\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\\
&= e_3(\frac{2}{z})e_3+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\\
&= -\frac{2}{z^2}e_3+\frac{2}{z}e_3-\frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3)\\
&= -\frac{6}{z^2}e_3+\frac{2}{z}e_3,
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_2,e_3\right)e_1 &= \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1-\widetilde{\nabla}_{[e_2,e_3]}e_1\\
&= \widetilde{\nabla}_{e_2}0-\widetilde{\nabla}_{e_3}0+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1\\
&= \frac{2}{z}(0)\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_1,e_3\right)e_3 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_3]}e_3\\
&= \widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_3}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3\\
&= -\frac{2}{z}e_1+e_1+e_3(\frac{2}{z})e_1+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1\\
&\quad +\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)\\
&= -\frac{2}{z}e_1+e_1-\frac{2}{z^2}e_1+\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)\\
&= -\frac{6}{z^2}e_1+e_1,
\end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(e_1,e_3\right)e_2 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_3]}e_2\\
&= \widetilde{\nabla}_{e_1}0-\widetilde{\nabla}_{e_3}0+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2\\
&= \frac{2}{z}(0)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.63}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(e_3, e_1)\, e_1 &= \widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 - \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1 - \widetilde{\nabla}_{[e_3,e_1]}e_1 \\
&= \widetilde{\nabla}_{e_3}(\frac{2}{z}e_3) - \widetilde{\nabla}_{e_1}0 - \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 \\
&= e_3(\frac{2}{z})e_3 + \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3 - \frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3) \qquad (5.64)\\
&= -\frac{2}{z^2}e_3 + \frac{2}{z}e_3 - \frac{4}{z^2}e_3 \\
&= -\frac{6}{z^2}e_3 + \frac{2}{z}e_3
\end{aligned}$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $S(e_i, e_j) = 0$ özelliğinden faydalanarak (2.8) ifadesinde (5.57) ve (5.62) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(e_1, e_1) &= g\left(\widetilde{R}(e_1, e_2)\, e_2, e_1\right) + g\left(\widetilde{R}(e_1, e_3)\, e_3, e_1\right) \\
&= (-\frac{4}{z^2} + \frac{2}{z})g(e_1, e_1) + (-\frac{6}{z^2} + 1)g(e_1, e_1) \qquad (5.65)\\
&= -\frac{10}{z^2} + \frac{2}{z} + 1
\end{aligned}$$

bulunur. (2.8) ifadesinde (5.58) ve (5.59) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(e_2, e_2) &= g\left(\widetilde{R}(e_2, e_1)\, e_1, e_2\right) + g\left(\widetilde{R}(e_2, e_3)\, e_3, e_2\right) \\
&= (-\frac{4}{z^2} + \frac{2}{z})g(e_2, e_2) + (-\frac{6}{z^2} + 1)g(e_2, e_2) \qquad (5.66)\\
&= -\frac{10}{z^2} + \frac{2}{z} + 1
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.8) ifadesinde (5.60) ve (5.64) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(e_3, e_3) &= g\left(\widetilde{R}(e_3, e_1)\, e_1, e_3\right) + g\left(\widetilde{R}(e_3, e_2)\, e_2, e_3\right) \\
&= (-\frac{6}{z^2} + \frac{2}{z})g(e_3, e_3) + (-\frac{6}{z^2} + \frac{2}{z})g(e_3, e_3) \qquad (5.67)\\
&= -\frac{12}{z^2} + \frac{4}{z}
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.56) ifadesi (2.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(e_1,e_2)e_3 &= \widetilde{R}(e_1,e_2)e_3-\frac{1}{2}\{\widetilde{S}(e_2,e_3)e_1-\widetilde{S}(e_1,e_3)e_2\} \\
&= 0-\frac{1}{2}\{0e_1-0e_2\} \qquad (5.68)\\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. (5.62) ve (5.67) ifadeleri (2.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(e_1,e_3)e_3 &= \widetilde{R}(e_1,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{\widetilde{S}(e_3,e_3)e_1-\widetilde{S}(e_1,e_3)e_3\} \\
&= -\frac{6}{z^2}e_1+e_1-\frac{1}{2}\{(-\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z})e_1-0e_3\} \\
&= -\frac{6}{z^2}e_1+\frac{6}{z^2}e_1-\frac{2}{z}e_1 \\
&= -\frac{2}{z}e_1
\end{aligned}$$

olur. Son olarak (5.59) ve (5.67) ifadeleri (2.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(e_2,e_3)e_3 &= \widetilde{R}(e_2,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{\widetilde{S}(e_3,e_3)e_2-\widetilde{S}(e_2,e_3)e_3\} \\
&= -\frac{6}{z^2}e_2+e_2-\frac{1}{2}\{(-\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z})e_2-0e_3\} \\
&= -\frac{6}{z^2}e_2+\frac{6}{z^2}e_2-\frac{2}{z}e_2 \\
&= -\frac{2}{z}e_2
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki sonuç ifade edilir.

Sonuç 5.1.1. *M, semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldu genellikle $\xi-$projektif flat değildir.*

5.2 Ricci-semisimetrik 3-boyutlu Metrik Olmayan Koneksiyonlu f-Kenmotsu Manifoldları

Bu kısımda Ricci-semisimetrik metrik olmayan koneksiyonlu 3-boyutlu f-Kenmotsu Manifoldları incelenmiş ve bu koşullar altında aynı zamanda Einstein manifold oldukları gösterilmiştir.

M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{R}(X,Y)$ M üzerinde herhangi iki X,Y tanjant vektörünün türevi, $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere eğer

$$\widetilde{R}(X,Y).\widetilde{S}=0 \tag{5.69}$$

şartı sağlanırsa M semi-simetrik metrik olmayan f-Kenmotsu manifoldu Ricci-semisimetrik olarak adlandırılır. (5.69) ifadesi

$$\widetilde{S}(\widetilde{R}(X,Y)U,V)+\widetilde{S}(U,\widetilde{R}(X,Y)V)=0 \tag{5.70}$$

şeklinde yazılır. (5.70) eşitliğinde $X=U=\xi$ değişikliği gerçekleştirilirse

$$\widetilde{S}(\widetilde{R}(\xi,Y)\xi,V)+\widetilde{S}(\xi,\widetilde{R}(\xi,Y)V)=0 \tag{5.71}$$

olur. (5.71) denkleminde (5.30) ve (5.31) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{S}\left(-\left(f^2+f+2f'\right)\left(\eta(Y)\xi-Y\right),V\right) \\ &\quad +\widetilde{S}\left(\xi,-\left(f^2+f+2f'\right)\left(g(Y,V)\xi-Y\eta(V)\right)\right) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(f^2+f+2f'\right)\left[\eta(Y)\widetilde{S}(\xi,V)-\widetilde{S}(Y,V)\right] \\ &\quad -\left(f^2+f+2f'\right)\left[g(Y,V)\widetilde{S}(\xi,\xi)-\eta(V)\widetilde{S}(\xi,Y)\right] \end{aligned} \tag{5.72}$$

bulunur. (5.72) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= \left(f^2+f+2f'\right)\left[\eta(Y)\widetilde{S}(\xi,V)-\widetilde{S}(Y,V)\right] \\ &\quad +\left(f^2+f+2f'\right)\left[g(Y,V)\widetilde{S}(\xi,\xi)-\eta(V)\widetilde{S}(\xi,Y)\right] \end{aligned} \tag{5.73}$$

olur. (5.33) ve (5.37) eşitlikleri (5.73) ifadesinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} 0 &= \left(f^2+f+2f'\right)\left[-2\left(f^2+f+2f'\right)\eta(Y)\eta(V)-\widetilde{S}(Y,V)\right] \\ &\quad +\left(f^2+f+2f'\right)\left[-2\left(f^2+f+2f'\right)g(Y,V)\right. \\ &\quad \left.+2\left(f^2+f+2f'\right)\eta(V)\eta(Y)\right] \end{aligned} \tag{5.74}$$

elde edilir. (5.74) denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$-\left(f^2+f+2f'\right)\widetilde{S}(Y,V)=2\left(f^2+f+2f'\right)^2 g(Y,V)$$

veya

$$\widetilde{S}(Y,V)=-2\left(f^2+f+2f'\right)g(Y,V) \tag{5.75}$$

bulunur.

Buna göre Tanım 1.2.3., (2.10) ifadesi ve elde edilen bu hesaplar yardımıyla şu teorem ifade edilir.

Teorem 5.2.1. M, 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldu eğer Ricci semi-simetrik ve düzenli (regular) ise bir Einstein manifolddur.

5.3 Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu f-Kenmotsu Manifoldunda Ricci Solitonlar

Bu kısımda 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan f-Kenmotsu manifoldlarında Ricci solitonlar incelenmiş ve λ sabit değerinin f fonksiyonu cinsinden ifadesi hesaplanmıştır. Ayrıca λ sabitinin alacağı değere göre f-Kenmotsu manifoldunun Einstein manifold olma durumu verilmiştir.

Herhangi bir b fonksiyonu için (2.34) eşitliğinde $V=b\xi$ alınırsa

$$\left(L_{b\xi}g+2\widetilde{S}+2\lambda g\right)(X,Y)=0$$

veya

$$L_{b\xi}\left(g\left(X,Y\right)\right)+2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right)=0 \tag{5.76}$$

olur. (5.76) ifadesi Lie türev tanımı kullanılarak

$$g\left(\widetilde{\nabla}_X b\xi,Y\right)+g\left(X,\widetilde{\nabla}_Y b\xi\right)+2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right)=0 \tag{5.77}$$

yazılır. (5.77) eşitliği metriğin lineerlik özelliği ve koneksiyon gereği

$$\begin{aligned} 0 &= bg\left(\widetilde{\nabla}_X \xi,Y\right)+\left(Xb\right)\eta\left(Y\right)+bg\left(X,\widetilde{\nabla}_Y \xi\right) \\ &\quad +\left(Yb\right)\eta\left(X\right)+2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right) \end{aligned} \tag{5.78}$$

şeklinde ifade edilir. (5.2) ifadesi (5.78) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= bg(f\left\{2X-\eta\left(X\right)\xi\right\},Y)+\left(Xb\right)\eta\left(Y\right)+\left(Yb\right)\eta\left(X\right) \\ &\quad +bg(X,f\left\{2Y-\eta\left(Y\right)\xi\right\})+2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right) \end{aligned} \tag{5.79}$$

bulunur. (5.79) eşitliği metriğin lineerlik özelliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= 2bfg\left(X,Y\right)-bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)+\left(Xb\right)\eta\left(Y\right)+\left(Yb\right)\eta\left(X\right) \\ &\quad +2bfg\left(X,Y\right)-bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)+2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right) \end{aligned} \tag{5.80}$$

biçiminde yazılır. (5.80) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= 4bfg\left(X,Y\right)-2fb\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)+\left(Xb\right)\eta\left(Y\right)+\left(Yb\right)\eta\left(X\right) \\ &\quad +2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right) \end{aligned} \tag{5.81}$$

elde edilir. (5.81) ifadesine $Y=\xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 4bfg\left(X,\xi\right)-2bf\eta\left(X\right)\eta\left(\xi\right)+\left(Xb\right)\eta\left(\xi\right)+\left(\xi b\right)\eta\left(X\right) \\ &\quad +2\widetilde{S}\left(X,\xi\right)+2\lambda g\left(X,\xi\right) \end{aligned} \tag{5.82}$$

olur. (5.82) denkleminde (5.33) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 4bf\eta\left(X\right)-2bf\eta\left(X\right)+\left(Xb\right)+\left(\xi b\right)\eta\left(X\right) \\ &\quad -4\left(f^2+f+2f'\right)\eta\left(X\right)+2\lambda\eta\left(X\right) \end{aligned} \tag{5.83}$$

bulunur. (5.83) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= (Xb) + (\xi b)\,\eta(X) + 2bf\eta(X) \\ &\quad -4\left(f^2 + f + 2f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) \end{aligned} \tag{5.84}$$

hesaplanır. (5.84) ifadesinde $X = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$(\xi b) + (\xi b)\,\eta(\xi) + 2bf\eta(\xi) - 4\left(f^2 + f + 2f'\right)\eta(\xi) + 2\lambda\eta(\xi) = 0 \tag{5.85}$$

yazılır. (5.85) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$2(\xi b) + 2bf - 4\left(f^2 + f + 2f'\right) + 2\lambda = 0 \tag{5.86}$$

elde edilir. (5.86) eşitliği düzenlenirse

$$\xi\beta = 2\left(f^2 + f + 2f'\right) - bf - \lambda \tag{5.87}$$

hesaplanır. $\xi\beta$ ifadesi (5.84) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} 0 &= (Xb) + \left(2\left(f^2 + f + 2f'\right) - bf - \lambda\right)\eta(X) + 2bf\eta(X) \\ &\quad -4\left(f^2 + f + 2f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) \end{aligned}$$

veya

$$(Xb) + \left(-2\left(f^2 + f + 2f'\right) + bf + \lambda\right)\eta(X) = 0 \tag{5.88}$$

bulunur. (2.2) ifadesi (5.88) denkleminde kullanılırsa

$$\left(db + \left(-2\left(f^2 + f + 2f'\right) + bf + \lambda\right)\eta\right)(X) = 0 \tag{5.89}$$

elde edilir. (5.89) ifadesinde

$$X \neq 0$$

olduğundan

$$db + \left(-2\left(f^2 + f + 2f'\right) + bf + \lambda\right)\eta = 0 \tag{5.90}$$

olur. (5.90) denklemi düzenlenirse

$$db = \left[2\left(f^2 + f + 2f'\right) - bf - \lambda\right]\eta \tag{5.91}$$

olarak hesaplanır. (5.91) eşitliğinin iki tarafına da d operatörü uygulanırsa

$$d^2b = \left[2\left(f^2+f+2f'\right)-bf-\lambda\right]d\eta \tag{5.92}$$

bulunur. (2.3) ifadesi (5.92) eşitliğinde kullanılırsa

$$\left[2\left(f^2+f+2f'\right)-bf-\lambda\right]d\eta = 0 \tag{5.93}$$

yazılır. (5.93) ifadesinde

$$d\eta \neq 0$$

olduğundan

$$\left[2\left(f^2+f+2f'\right)-bf-\lambda\right] = 0 \tag{5.94}$$

ve

$$\lambda = 2\left(f^2+f+2f'\right)-bf \tag{5.95}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.94) eşitliği (5.91) ifadesinde kullanılırsa $db = 0$ bulunur. Bu durumda b sabit değerli bir fonksiyondur. b fonksiyonunun sabit olma özelliği (5.81) denkleminde kullanılırsa

$$4bfg\left(X,Y\right)-2fb\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)+2\widetilde{S}\left(X,Y\right)+2\lambda g\left(X,Y\right) = 0 \tag{5.96}$$

bulunur. (5.96) eşitliğinde $\widetilde{S}\left(X,Y\right)$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$2\widetilde{S}\left(X,Y\right) = -4bfg\left(X,Y\right)+2bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)-2\lambda g\left(X,Y\right) = 0 \tag{5.97}$$

olur. (5.76) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{S}\left(X,Y\right) = \left(-2bf-\lambda\right)g\left(X,Y\right)+bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$$

veya

$$\widetilde{S}\left(X,Y\right) = -\left(2bf+\lambda\right)g\left(X,Y\right)+bf\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \tag{5.98}$$

olarak hesaplanır.

Buna göre Tanım 1.2.3., (2.10) ifadesi ve elde edilen bu hesaplar yardımıyla şu sonuç ve teorem ifade edilir.

Sonuç 5.3.1. 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldu M aynı zamanda $\mu-$Einstein manifolddur.

Teorem 5.3.1. 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldunda herhangi bir $b \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olsun. V, ξ karakteristik vektör alanı ile lineer ise V, ξ nin bir sabit katı, g bir $\mu-$Einstein manifold ve $\lambda = 2\left(f^2 + f + 2f'\right) - bf$ koşulu sağlandığı takdirde Ricci soliton genişleyendir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, f-Kenmotsu manifoldları üzerinde Ricci solitonların incelenmesi, sınıflandırılması ve bazı eğrilik şartlarına göre Ricci solitonların adlandırılması yapıldı. İlk olarak Kenmotsu manifoldlarda Ricci soliton hesaplamaları gerçekleştirildi ve Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı eğrilik şartları çalışıldı. Ardından Kenmotsu manifoldunda yapılan bu hesaplamaların f-Kenmotsu manifoldlarında nasıl olduğu incelendi. f-Kenmotsu manifoldlar üzerinde yapılan çalışmalarla Ricci solitonlar için bazı hesaplar verildi. Daha sonra koneksiyondaki değişiklik ile f-Kenmotsu manifoldunda gerçekleştirilen Ricci soliton hesaplamaları ve bazı eğrilik şartları semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlarına uygulandı ğında ne gibi sonuçlarla karşılaşılabileceği araştırıldı. Burada λ ve f fonksiyonuna bağlı olarak Ricci solitonların genişleyen, daralan veya değişmeyen olma durumları incelendi.

Üç boyutlu Kenmotsu ve f-Kenmotsu manifoldlarda Ricci Solitonlar ile ilgili bazı eğrilik şartlarının özellikleri üzerine incelemeler yapılarak metrik ve koneksiyonun değiştirilmesi halinde yapılacak hesaplamalar ile ilgili bazı açık problemler bulunabilir. Ayrıca manifold ve koneksiyon değişimi yapıldı ğında karşımıza çıkabilecek problemlerin çözümü halinde ilgili bazı sınıflandırmalara ve geometrik yorumlara ulaşılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Agashe, S. and Chafle, R., 1992, A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, Indian Journal Pure Applications, 23, 6, 399-409.

Bagewadi, C. S. and Ingalahalli, G., 2012, Ricci solitons in α-Sasakain manifolds, ISRN Geometry, 13 p.

Bejan, C.L. and Crasmareanu, M., 2011, Ricci solitons in manifolds with quasi-constant curvature, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 78, 1, 235-243.

Boothby, W. M., 1986, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, Florida Inc., Second Edition, 430 p.

Călin, C. and Crasmareanu, M., 2010, From the Eisenhart problem to Ricci solitons in f-Kenmotsu manifolds, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 33, 3, 361–368.

Chen, B. Y., 1973, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker INY, 298 p.

Chow, B., Knopf, D., 2004, The Ricci flow: An introduction, Mathematical Surveys and Monographs, 110, A.M.S., 325 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

De, A., 2010, On Kenmotsu manifold, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2, 3, 1-6.

De, U. C. and Tripathi, M. M., 2003, Ricci tensor in 3-dimensional Trans-Sasakian manifolds, Kyungpook Mathematical Journal, 43, 247–255.

De, U. C. and Shaikh, A.A., 2007, Differential geometry of manifolds, Alpha Science International, 298 p.

De, U. C. and Sarkar, A., 2008, On three-dimensional Trans-Sasakian manifolds, Extracta Mathematicae, 23, 265–277.

Duggal, K. L. and Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Mathematics and its Applications, Dordrecht, 303 p.

Friedan, D., 1985, Non linear models in $(n+2)$-dimensions, Annals of Physics, 163, 318–419.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, 269 s.

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi, 251 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Hacısalihoğlu, H. H., 2004, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, 206 s.

Hamilton, R. S., 1988, The Ricci flow on surfaces, American Mathematical Society, 71, 237–262.

Ivey, T., 1993, Ricci solitons on compact 3-manifolds, Differential Geometry and its Applications, 3, 301–307.

Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, The Tohoku Mathematical Journal, 24, 93–103.

Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, 380 p.

Liang, K. C., 1972, A nonoscillation theorem for the superlinear case of second order differential equations, SIAM Journal on Applied Mathematics, 23, 4, 456-459.

Nagaraja, H. G. and Premalatha, C. R., 2012, Ricci solitons in Kenmotsu manifolds, Journal of Mathematical Analysis, 3, 2, 18–24.

Olszak, Z., Rosca, R., 1991, Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, Publicationes Mathematicae Debrecen, 39, 3, 315-323.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, 468 p.

Oprea, J., 1997, Differential geometry and its applications, Prentice-Hall, New Jersey Inc., 387 p.

Oubina, J. A., 1985, New class of almost contact metric manifolds, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 32, 187–193.

Prvanovic, M., 1975, On pseudo metric semi-symmetric connections, Publication De L Institut Mathematic Nouvelle Series, 18, 32, 157–164.

Sengupta, J., De, U. C. and Binh, T. Q., 2000, On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 31, 1659-1670.

Sharma, R. and B. B. Sinha, 1983, On para-A-Einstein manifolds, Publications De L'institut Mathematique, 34, 48, 211-215.

Sharma, R., 2008, Certain results on K-contact and (k,μ)-contact manifolds, Journal of Geometry, 89, 138–147.

Shukla, S. S. and Singh, D. D., 2010, On (ξ)-Trans-Sasakian manifolds, International Journal of Mathematical Analysis, 4, 49, 2401 - 2414.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Spivak, M., 1979, Differential geometry, Berkeley, CA: Publish or Perish Press, II., III., IV., 491 p.

Tripathi, M. M., 2008, Ricci solitons in contact metric manifolds, http://arxiv.org / abs / 0801.4222, 9 p.

Willmore, T.J., 1959, An introduction to differentiable geometry, Oxford University Press, 317 p.

Yano, K. and Sawaki, S., 1968, Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, Journal of Differential Geometry, 2, 2, 161-184.

Yano, K. and Kon, M., 1984, CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds, Birkhäuser Mathematics, 208 p.

Yıldız, A. and Çetinkaya, A., 2013, Kenmotsu manifolds with the semi-symmetric non-metric connection, preprint.

Yıldız, A., De, U. C. and Turan, M., 2013, On 3-dimensional f-Kenmotsu manifolds and Ricci solitons, Ukrainian Mathematical Journal, 65, 5, 620-628.

Zhen, G., Cabrerizo, J. L., Fernández, L. M. and Fernández, M., 1997, On ξ-conformally flat contact metric manifolds, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 28, 6, 725–734.