Bir Üçgenin Taksi İç Teğet Çemberi ve Taksi Çevrel Çemberi Üzerine

Enis Yurtoğlu

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Ağustos 2014

On The Taxicab Incircle and Taxicab Circumcircle of a Triangle

Enis Yurtoğlu

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

August 2014

Bir Üçgenin Taksi İç Teğet Çemberi ve Taksi Çevrel Çemberi Üzerine

Enis Yurtoğlu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Ağustos 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Enis Yurtoğlu' nun YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Bir Üçgenin Taksi İç Teğet Çemberi ve Taksi Çevrel Çemberi Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada, taksi düzlemde verilen bir üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberleri incelenmiştir.

Birinci bölümde taksi geometri ile ilgili bazı kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, herhangi bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olmayan bir üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise en az bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde bulunan bir üçgenin, taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberi üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Taksi Düzlem, Taksi Çember, Taksi Çevrel Çember, Taksi İç Teğet Çember

SUMMARY

In this thesis, taxicab circumcircle and taxicab incircle of a triangle in a taxicab plane are examined.

In the first section some concepts about taxicab geometry were given. In the second section taxicab circumcircle and taxicab incircle of a triangle whose any side does not lie on the separator lines were studied. In the third part, it is focused on taxicab circumcircle and taxicab incircle of a given triangle with at least a side of the triangle lies on a separator line.

Keywords: Taxicab Plane, Taxicab Circle, Taxicab Circumcircle, Taxicab Incircle

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ' ye

ve beni her zaman destekleyen

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Bu çalışmada taksi düzlemde verilen bir üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberi incelenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmayı diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için taksi düzlem geometrisinde bilinen bazı kavramlar ve özellikler özetlenmiştir.

İkinci bölüme, herhangi bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde bulunmayan ve taksi düzlemde verilen bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberinin bulunabilmesi için gereken koşullar verilerek başlanmıştır. Köşesel teğet olan taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberlerin yarıçapları arasındaki ilişki, bu üçgenin kenarlarının eğimleri cinsinden incelenmiştir. Sonrasında taksi iç teğet ve taksi çeverel çemberlerin merkezleri arasındaki taksi uzaklığın bu çemberlerin yarıçapları yardımıyla bulunuşu gösterilmiştir. Bu bölüm taksi düzlemde verilen bir üçgenin, taksi iç açıortay doğrularının kesim noktasının, bu üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi olduğu gösterilerek tamamlanmıştır.

Son bölümde ise en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde bulunan bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberinin bulunduğu gösterilmiştir. En az bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberlerin yarıçapları arasındaki ilişkiler bu üçgenin kenarlarının eğimleri cinsinden incelenmiştir. Daha sonra taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberlerin merkezleri arasındaki taksi uzaklığın çemberlerin yarıçapları yardımıyla bulunuşu gösterilmiştir. Son olarak taksi düzlemde verilen ve en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde bulunan bir üçgenin, taksi iç açıortay doğrularının kesim noktasının, taksi iç teğet çemberinin merkezi olduğu gösterilerek çalışma bitirilmiştir.

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Tezi anlaşılır kılmak için taksi düzlem geometride ve 3- boyutlu taksi uzay geometride bilinen bazı kavram ve özellikler bu bölümde özetlenmiştir.

1.1 Taksi Düzlem, 3-Boyutlu Taksi Uzay ve Uzaklık Fonksiyonları

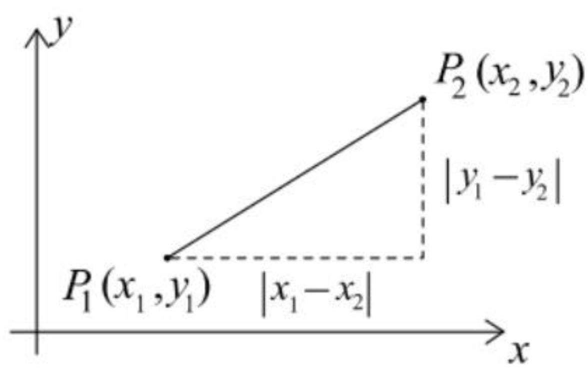
Taksi düzlemi $\mathbb{R}^2_T$ nin noktaları ve doğruları, Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$ nin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açılar da aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken, taksi uzaklık

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

ile tanımlıdır. Yani P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_T taksi uzaklığı, P_1 den P_2 ye en kısa yolun uzunluğu olarak, bu noktalardan koordinat eksenlerine paralel olarak çizilen doğru parçalarının birleşiminin uzunluğu olacaktır (Bkz Şekil 1.1) (Çolakoğlu, 2005).



Şekil 1.1. İki nokta arasındaki taksi uzaklık

3-boyutlu taksi uzay $\mathbb{R}^3_T$ de benzer biçimde tanımlanır. 3-boyutlu taksi uzay $\mathbb{R}^3_T$, 3-boyutlu analitik uzayda alınan $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları için tanımlı Öklidyen uzaklık fonksiyonu

$$d_E(P_1,P_2) \quad = \quad \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

yerine taksi metrik

$$d_T(P_1,P_2) \quad = \quad |x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|$$

kullanılarak elde edilir. Diğer bir ifadeyle, 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ de d_E yerine d_T alınarak oluşturulur.

Taksi düzlemde bilinen bazı temel kavram ve özellikler aşağıda özetlenmiştir.

Teorem 1.1 $P_1=(x_1,y_1)$ ve $P_2=(x_2,y_2)$ analitik düzlemde farklı iki nokta olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi m olmak üzere,

i. $m \in \mathbb{R}$ iken, $d_E(P_1,P_2)=\left(\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right).d_T(P_1,P_2)$

ii. $m \longrightarrow \infty$ iken, $d_E(P_1,P_2)=d_T(P_1,P_2)$

dir (Kaya, 2005) .

İspat Birbirinden farklı $P_1=(x_1,y_1)$ ve $P_2=(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m=\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}$ dir.

i. $m \in \mathbb{R}$ iken, $x_1 \neq x_2$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\frac{d_E(P_1,P_2)}{d_T(P_1,P_2)} &= \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|} \\
&= \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2 . \left(1+\frac{(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2}\right)}}{|x_1-x_2| . \left(1+\frac{|y_1-y_2|}{|x_1-x_2|}\right)} \\
&= \frac{|x_1-x_2| . \sqrt{1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2}}{|x_1-x_2| . \left(1+\left|\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right|\right)} \\
&= \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$d_E(P_1,P_2) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right).d_T(P_1,P_2)$$

ii. $m \longrightarrow \infty$ iken $x_1 = x_2$ dir. Buna göre,

$$\frac{d_E(P_1,P_2)}{d_T(P_1,P_2)} = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|} = \frac{\sqrt{(y_1-y_2)^2}}{|y_1-y_2|} = 1$$

bulunur. O halde,

$$d_E(P_1,P_2) = d_T(P_1,P_2)$$

dir. □

Teorem 1.2 $P_1 = (x_1,y_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2)$ analitik düzlemde farklı iki nokta olsun. Eğer $Q = (x,y)$, P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru üzerinde ve P_2 noktasından farklı bir nokta ise

$$\frac{d_E(P_1,Q)}{d_E(P_2,Q)} = \frac{d_T(P_1,Q)}{d_T(P_2,Q)}$$

dir (Özcan, Kaya, 2002) .

İspat $P_1 = Q$ ise eşitliğin sağlandığı açıktır.

$P_1 = (x_1,y_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. Teorem 1.1 gereğince $m \in \mathbb{R}$ iken

$$d_E(P_1,Q) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right).d_T(P_1,Q)$$

ve

$$d_E(P_2,Q) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right).d_T(P_2,Q)$$

olduğundan

$$\frac{d_E(P_1,Q)}{d_E(P_2,Q)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right).d_T(P_1,Q)}{\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right).d_T(P_2,Q)} = \frac{d_T(P_1,Q)}{d_T(P_2,Q)}$$

dir. $m \longrightarrow \infty$ iken

$$d_E(P_1,Q) = d_T(P_1,Q)$$

ve

$$d_E(P_2,Q) = d_T(P_2,Q)$$

olduğundan

$$\frac{d_E(P_1,Q)}{d_E(P_2,Q)} = \frac{d_T(P_1,Q)}{d_T(P_2,Q)}$$

bulunur. □

Teorem 1.3 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ analitik düzlemde farklı iki nokta olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l ve l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r) ise

$$d_E(P_1,P_2) = \left(\frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{|p|+|q|+|r|}\right).d_T(P_1,P_2)$$

dir (Akça, Kaya, 2004) .

İspat 3-boyutlu analitik uzayda farklı $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen l doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p,q,r) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

dir. Buna göre,

$$\frac{d_E(P_1,P_2)}{d_T(P_1,P_2)} = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2++(z_1-z_2)^2}}{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|} = \frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{|p|+|q|+|r|}$$

dir. O halde,

$$d_E(P_1,P_2) = \left(\frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{|p|+|q|+|r|}\right).d_T(P_1,P_2)$$

bulunur. □

1.2 Taksi Çemberi

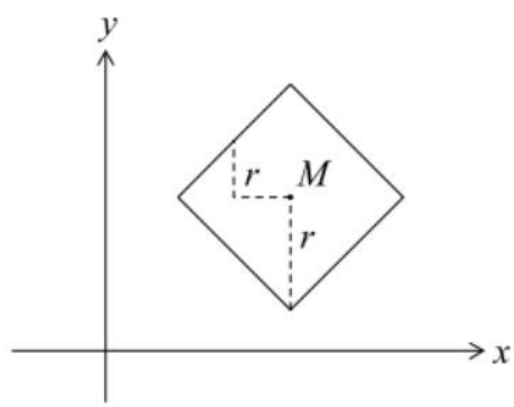
Taksi düzlemde sabit bir noktadan sabit bir taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine taksi çemberi denir. Sabit nokta taksi çemberin merkezini, sabit taksi uzaklığı da taksi çemberin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Tanım 1.4 Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı r olan taksi çember

$$C = \{(x,y) : |x-a| + |y-b| = r \ , \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

dir (Krause, 1986, Menger, 1952) .

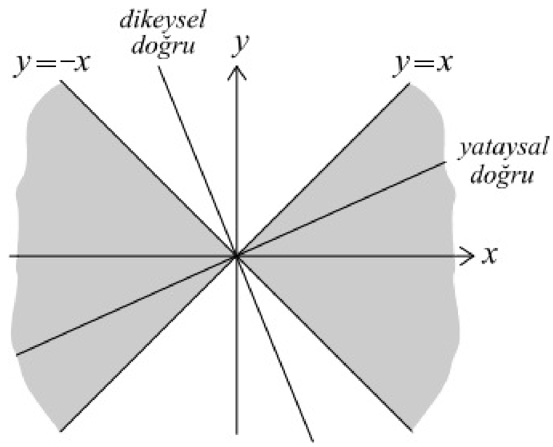
Taksi çemberleri, bir kenarının eğimi 1 ya da -1 olan karelerdir (Bkz Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Taksi çemberi

1.3 Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması

Tanım 1.5 Taksi düzlemde $l ... ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ ise l ye **yataysal doğru**, $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ ise l ye **dikeysel doğru** ve $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ ise l ye **ayıraç doğru** denir (Krause 1986). Bir yataysal doğru, x-eksenine paralel ise bu doğruya **yatay doğru** ve bir dikeysel doğru, y-eksenine paralel ise bu doğruya **dikey doğru** denir (Bkz Şekil 1.3).



Şekil 1.3. Doğruların sınıflandırılması

1.4 Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

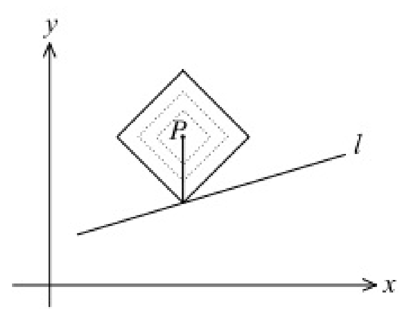
Tanım 1.6 Taksi düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığı, P nin l doğrusu üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır. Kısaca

$$d_T(P,l) = \min_{X\in l} d_T(X,P)$$

dir (Krause, 1986).

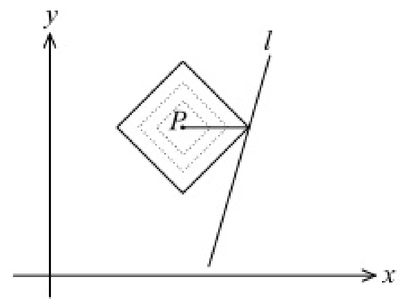
Taksi düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığını bulmak için izlenilebilecek başka bir yöntem de merkezi P noktası olan bir taksi çemberinin yarıçapını, çember doğruya değene kadar büyütmektir. Çember, doğruya değdiği anda çemberin yarıçapı, P noktasının l doğrusuna olan en kısa uzaklığı olur (Krause, 1986). O halde,

i) Eğer l yataysal bir doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan uzaklığı, P den l ye y-eksenine paralel uzaklıktır (Bkz Şekil 1.4).



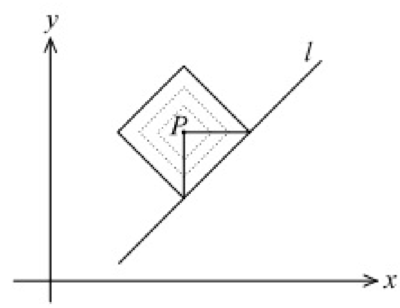
Şekil 1.4. Yataysal doğru

ii) Eğer l dikeysel bir doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan uzaklığı, P den l ye x-eksenine paralel uzaklıktır (Bkz Şekil 1.5).



Şekil 1.5. Dikeysel doğru

iii) Eğer l bir ayıraç doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan uzaklığı, P den l ye x-eksenine paralel veya y-eksenine paralel uzaklıktır (Bkz Şekil 1.6).



Şekil 1.6. Ayıraç doğrusu

Teorem 1.7 Taksi düzlemde herhangi bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının $l ... ax + by + c = 0$ denklemli doğruya olan taksi uzaklığı

$$d_T(P,l) \quad = \quad \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

olarak hesaplanır (Kaya, Akça, Günaltılı, Özcan, 2000) .

İspat Taksi düzlemde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının l doğrusuna olan uzaklığı

$$d_T(P,l) \quad = \quad \min_{X \in l} d(X,P)$$

ve X noktası, l doğrusuyla $x=x_0$ veya $y=y_0$ doğrusunun kesişim noktalarının biri olacağından hesaplamayla aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$d_T(P,l) = \begin{cases} \min\left\{\left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{b}\right|, \left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{a}\right|\right\}, & a\neq 0\neq b \text{ iken} \\ \left|\dfrac{by_0+c}{b}\right| & , \ a=0 \text{ ve } b\neq 0 \text{ iken} \\ \left|\dfrac{ax_0+c}{a}\right| & , \ a\neq 0 \text{ ve } b=0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\max\{|a|,|b|\}}$$

□

1.5 En Kısa Uzaklık Kümesi

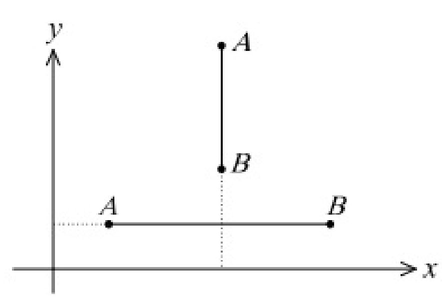
Tanım 1.8 Taksi düzlemde herhangi A ve B noktaları için

$$\left\{X\in\mathbb{R}_T^2 : d_T(A,X)+d_T(X,B)=d_T(A,B)\right\}$$

özelliğindeki tüm X noktalarının kümesine A ve B noktalarının **en kısa uzaklık kümesi** denir (Krause, 1986) .

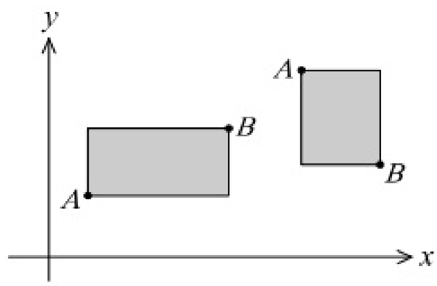
Teorem 1.9 Taksi düzlemde verilen farklı A ve B noktalarının en kısa uzaklık kümesi,

i. A ve B noktaları aynı apsis veya aynı ordinata sahipseler, AB doğru parçasıdır (Bkz Şekil 1.7-a).



Şekil 1.7-a. Aynı apsis veya aynı ordinata sahip noktaların en kısa uzaklık kümesi

ii. A ve B noktaları farklı apsis ve ordinata sahipseler, köşelerinin ikisi A ve B olan ayrıca kenarları eksenlere paralel olan dikdörtgensel bölgedir (Bkz Şekil 1.7-b).



Şekil 1.7-b. Farklı apsis ve ordinata sahip noktaların en kısa uzaklık kümesi

1.6 Taksi Düzlemde İki Noktanın Orta Kümesi

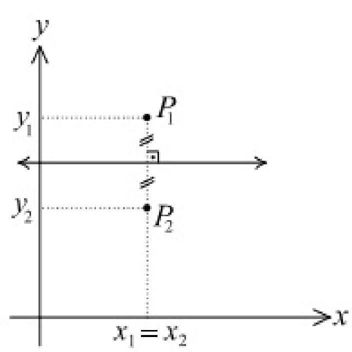
Tanım 1.10 Taksi düzlemde herhangi A ve B noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktaların geometrik yerine A ve B noktalarının **orta kümesi** denir. Bu küme

$$\{P = (x,y) : d_T\,(P,A) = d_T\,(P,B)\ ,\ x,y \in \mathbb{R}\}$$

dir (Krause, 1986).

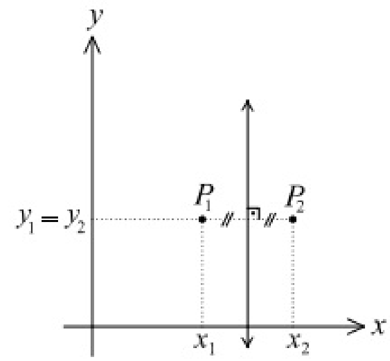
Teorem 1.11 Taksi düzlemde verilen farklı $P_1 = (x_1,y_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2)$ noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktaların kümesi

i) $x_1 = x_2$ ise $\left\{(x,y) : y = \dfrac{y_1+y_2}{2}\ ,\ x \in \mathbb{R}\right\}$ dir.



Şekil 1.8. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

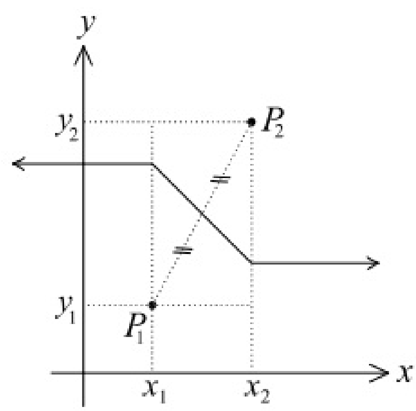
ii) $y_1 = y_2$ ise $\left\{(x,y) : x = \dfrac{x_1+x_2}{2}\ ,\ y \in \mathbb{R}\right\}$ dir.



Şekil 1.9. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

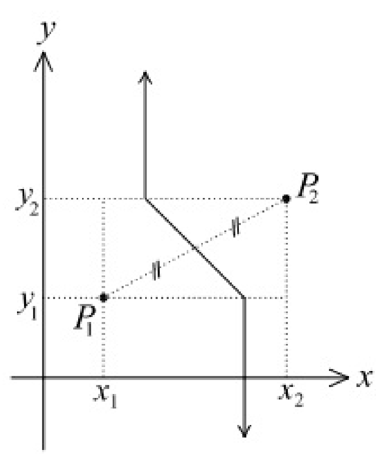
iii) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ ve

(a) $(x_2 - x_1) < (y_2 - y_1)$ ise $\left\{(x,y) : y = \frac{-x_1+x_2+y_1+y_2}{2},\ x \le x_1\right\}$, $\left\{(x,y) : y = \frac{x_1-x_2+y_1+y_2}{2},\ x_2 \le x\right\}$ ve $\left\{(x,y) : x+y = \frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2},\ x_1 < x < x_2\right\}$ kümelerinin birleşimidir.



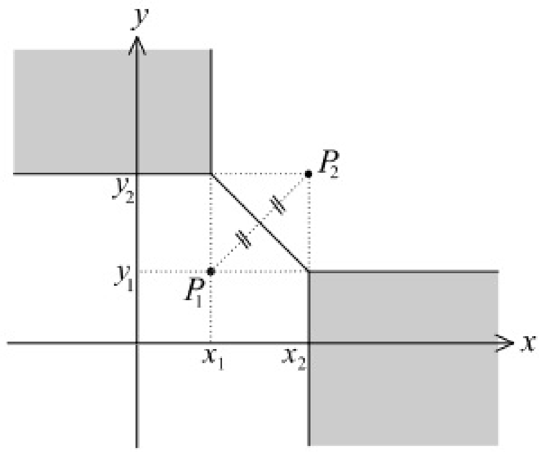
Şekil 1.10. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

(b) $(x_2 - x_1) > (y_2 - y_1)$ ise $\left\{(x,y) : x = \frac{x_1+x_2-y_1+y_2}{2},\ y \le y_1\right\}$, $\left\{(x,y) : x = \frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2},\ y_2 \le y\right\}$ ve $\left\{(x,y) : x+y = \frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2},\ y_1 < y < y_2\right\}$ kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.11. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

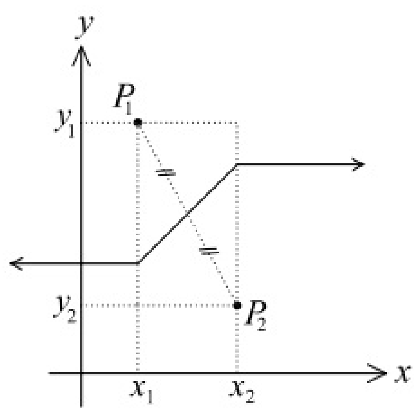
(c) $(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)$ ise $\{(x,y):\ x \le x_1,\ y_2 \le y\}$, $\{(x,y):\ x_2 \le x,\ y \le y_1\}$ ve $\left\{(x,y) : x + y = \frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2},\ x_1 < x < x_2\right\}$ kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.12. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

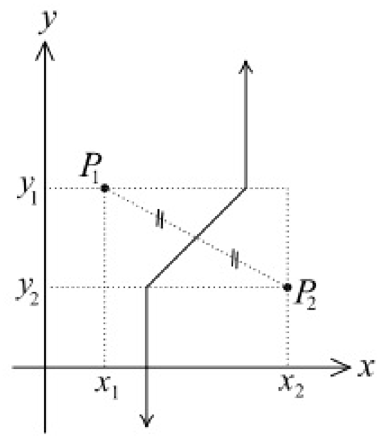
iv) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ ve

(a) $(x_2 - x_1) < (y_1 - y_2)$ ise $\left\{(x,y) : y = \frac{x_1-x_2+y_1+y_2}{2},\ x \le x_1\right\}$, $\left\{(x,y) : y = \frac{-x_1+x_2+y_1+y_2}{2},\ x_2 \le x\right\}$ ve $\left\{(x,y) : x - y = \frac{x_1+x_2-y_1-y_2}{2},\ x_1 < x < x_2\right\}$ kümelerinin birleşimidir.



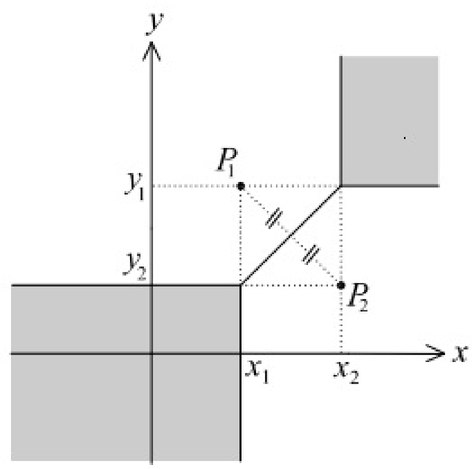
Şekil 1.13. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

(b) $(x_2 - x_1) > (y_1 - y_2)$ ise $\left\{(x,y) : x = \frac{x_1+x_2-y_1+y_2}{2},\ y \le y_2\right\}$, $\left\{(x,y) : x = \frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2},\ y_1 \le y\right\}$ ve $\left\{(x,y) : x - y = \frac{x_1+x_2-y_1-y_2}{2},\ y_2 < y < y_1\right\}$ kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.14. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

(c) $(x_2 - x_1) = (y_1 - y_2)$ ise $\{(x,y):\ x \leq x_1,\ y \leq y_2\}$, $\{(x,y):\ x_2 \leq x,\ y_1 \leq y\}$ ve $\left\{(x,y) : x - y = \frac{x_1+x_2-y_1-y_2}{2},\ x_1 < x < x_2\right\}$ kümelerinin birleşimidir (Çolakoğlu, 2005).

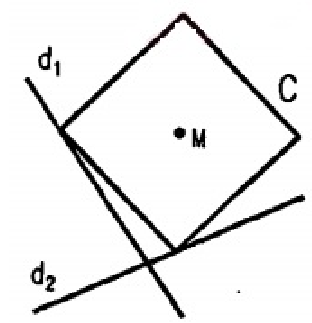


Şekil 1.15. Eşit uzaklıktaki noktalar kümesi

1.7 Taksi Düzleminde Teğetler

Tanım 1.12 Düzlemde bir C taksi çemberi ile bir d doğrusu verilsin. Doğru ile taksi çemberi, çemberin tek köşe noktasında kesişiyorsa doğru taksi çembere **köşesel teğettir** denir (Ekmekçi, 2001) (Bkz Şekil 1.16).

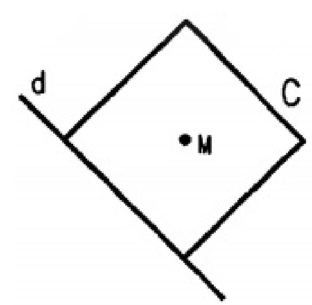
$$d,\ C \text{ ye köşesel teğettir} \Leftrightarrow d \cap C = \{A\} \text{ ve } A,\ C \text{ nin bir köşesidir.}$$



Şekil 1.16. Köşesl teğet

Tanım 1.13 Düzlemde bir C taksi çemberi ile bir d doğrusu verilsin. Doğru ile taksi çemberi, çemberin bir tek kenarı boyunca kesişiyorsa doğru taksi çembere **kenarsal teğettir** denir (Ekmekçi, 2001) (Bkz Şekil 1.17).

$$d, C \text{ ye kenarsal teğettir} \Leftrightarrow \ d \cap C = a \text{ ve } a : C \text{ nin bir kenarıdır.}$$

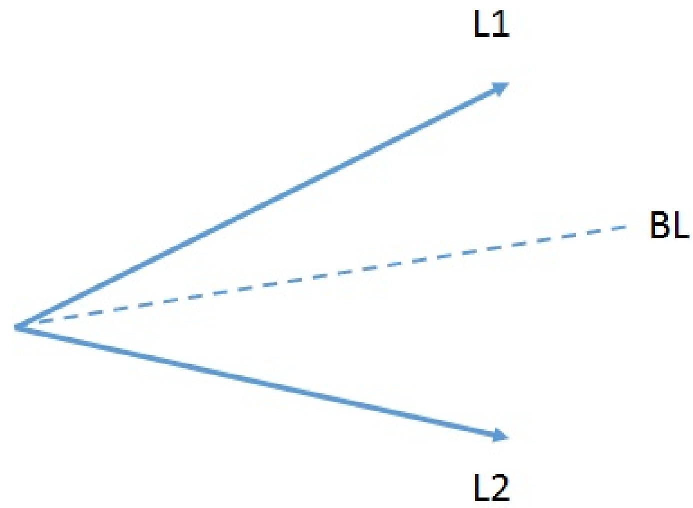


Şekil 1.17. Kenarsal teğet

1.8 Taksi İç Açıortay Doğrusu

Tanım 1.14 Taksi düzlemde verilen bir açının, kollarına eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesine **taksi iç açıortay doğrusu** denir (Bkz Şekil 1.18).

$$BL \ = \ \left\{X = (x,y) \in R^2 : d_T(X,L_1) = d_T(X,L_2)\right\}$$



Şekil 1.18. Taksi iç açıortay doğrusu

1.9 Taksi Düzlemin İzometrileri

Tanım 1.15 $f : R_T^2 \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} R_T^2$ fonksiyonu her $A,B \in R^2$ için $d_T(A,B) = d_T(f(A), f(B))$ ise f ye taksi düzlemin izometrisi denir.

Teorem 1.16 Taksi düzlemde bütün ötelemeler izometridir (Kocayusufoğlu, Özdamar 1998).

Teorem 1.17 R_T^2 deki izometrik dönmelerin kümesi $R_\theta = \left\{\theta : \theta = k.\frac{\pi}{2},\ k = 0,1,2,3\right\}$ dir (Kocayusufoğlu, Özdamar 1998).

BÖLÜM 2

TAKSİ DÜZLEMİNDE BİR ÜÇGENİN İÇ TEĞET VE ÇEVREL ÇEMBERİ

Bu bölümde (Ermiş, Gelişgen, Kaya 2012) esas alınarak, taksi düzlemde herhangi bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olmayan bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberleri incelenmiştir.

Tanım 2.1 Üçgenin içinde kalan ve üçgenin kenarlarına teğet olan çembere bu üçgenin **iç teğet çemberi** denir. Üçgenin köşelerinden geçen çembere ise bu üçgenin **çevrel çemberi** denir.

Taksi düzlemde, üçgenler kenarlarının eğimlerine göre sekiz farklı grupta sınıflandırılabilir.

i) Üçgenin tüm kenarları yataysal (*dikeysel*) doğrular üzerindedir.

ii) Üçgenin iki kenarı, yataysal (*dikeysel*) doğrular üzerinde, diğer kenarı dikeysel (*yataysal*) doğru üzerindedir.

iii) Üçgenin iki kenarı, ayıraç doğrular üzerinde, diğer kenarı yataysal (*dikeysel*) ya da yatay (*dikey*) doğru üzerindedir.

iv) Üçgenin bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde, diğer iki kenar yataysal (*dikeysel*) doğrular üzerindedir.

v) Üçgenin bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde, diğer kenar yataysal doğru üzerinde ve üçüncü kenar dikeysel doğru üzerindedir.

vi) Üçgenin bir kenarı dikey doğru üzerinde, diğer kenar yatay doğru üzerinde ve üçüncü kenar yataysal (*dikeysel*) doğru veya ayıraç doğrusu üzerindedir.

vii) Üçgenin bir kenarı dikey (*yatay*) doğru üzerinde, diğer iki kenar yataysal (*dikeysel*) doğru üzerindedir.

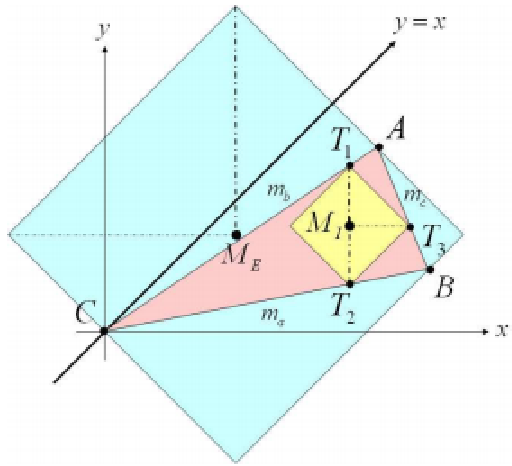
viii) Üçgenin bir kenarı dikey (*yatay*) doğru üzerinde, diğer kenar yataysal doğru üzerinde ve üçüncü kenar dikeysel doğru üzerindedir.

Aşağıdaki teoremde taksi düzlemde verilen bir üçgenin, taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberinin var olup olamama durumu incelenecektir.

Teorem 2.2 *Bir üçgenin taksi iç teğet çemberinin ve taksi çevrel çemberinin varolması için gerek ve yeter şart bu üçgenin iki kenarının yataysal (dikeysel) doğru diğer kenarın ise dikeysel (yataysal) doğru üzerinde bulunmasıdır.*

İspat Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin BC, AC ve AB kenarlarının eğimleri sırasıyla m_a, m_b ve m_c olsun. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin, taksi çevrel çemberi ve taksi iç teğet çemberi bulunsun. Bu durumda bu üçgenin, köşelerinden geçen ve eğimleri ∓ 1 olan doğru parçalarından oluşan taksi çevrel çemberi vardır. Ayrıca bu üçgen tümüyle taksi çevrel çemberinin içinde kalmaktadır. O halde üçgenin köşeleri, taksi çemberinin farklı kenarları üzerinde ve bu üçgenin iki köşesi taksi çemberinin komşu kenarları üzerindedir. (Kenarlarından en az birinin ayıraç doğrusu üzerinde bulunması bölüm 3 de incelenmiştir.) Bu sebeple üçgenin iki köşesi, eğimi 1 veya -1 olan doğrular, üçüncü köşe ise eğimi -1 ya da 1 olan doğru üzerinde olacaktır. A, B ve C köşeleri, sırasıyla eğimleri -1, $+1$ ve -1 olan doğrular üzerinde olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenini ele alalım. C köşesi -1 eğimli doğru üzerinde ve B köşesi $+1$ eğimli doğru üzerinde olduğundan, C noktasını sabit tutup B noktasını $+1$ eğimli doğru üzerinde gezdirirsek $m_a > -1$ olacaktır. B noktasını sabit tutup C noktasını gezdirirsek $m_a < 1$ olacaktır. O halde $|m_a| < 1$ olup BC kenarı yataysal doğru olacaktır. Benzer şeklide A köşesi -1 eğimli doğru üzerinde ve B köşesi $+1$ eğimli doğru üzerinde olduğundan, A noktasını sabit tutup B noktasını $+1$ eğimli doğru üzerinde gezdirirsek $m_c < -1$ olacaktır. B noktasını sabit tutup A noktasını gezdirirsek $m_c > 1$ olacaktır. Bu durumda $|m_c| > 1$ dir. Yani AB kenarı dikeysel doğrudur. Üçüncü kenar AC ise yataysal ya da dikeysel doğru üzerinde bulunacaktır.

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberi mevcut olsun. Yani üç köşesi, bu üçgenin kenarları üzerinde olan ve tümüyle üçgenin içinde kalan bir taksi çember vardır. O halde taksi iç teğet çemberin, üçgenin kenarları üzerinde bulunan bu üç köşesi, eğimleri ± 1ve 0 ya da ∞ olan doğrular üzerinde olmalıdır. Böylece iki farklı durum elde edilir (Bkz Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Herhangi bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde bulunmayan bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberi

Durum I: Taksi iç teğet çemberin köşeleri, eğimleri 1, -1 ve ∞ olan doğrular üzerinde bulunsun. AC, BC ve AB kenarları üzerinde bulunan bu noktalar sırasıyla T_1, T_2, T_3 olarak alınsın. Eğer T_1 ve T_2 dikey doğru üzerinde ise iç teğet çemberinin üçgenin dışında kalmaması için $|m_b| < 1$ ve $|m_a| < 1$ olacaktır. Ayrıca iç teğet çemberin bu üçgenin içinde olması gerektiği için $|m_c| > 1$ olmalıdır.

Durum II: İç teğet çemberin köşeleri eğimleri -1, 1 ve 0 olan doğrular üzerinde olsun ve bu noktalar T_1, T_2, T_3 ile gösterilsin. Bu noktalar sırasıyla AC, BC ve AB kenarları üzerinde olsun. Eğer T_1 ve T_2 yatay doğru üzerinde ise $|m_a| > 1$ ve $|m_b| > 1$ dir. Aksi halde iç teğet çemberinin kenarının bir kısmı üçgenin dışında kalır. Ayrıca iç teğet çemberin bu üçgenin içinde olması gerektiği için $|m_c| < 1$ olmalıdır.

Şimdi tersine, iki kenarı yataysal diğer kenar dikeysel doğru üzerinde bulunan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni ele alınsın. Üçgenin köşelerinden geçen, eğimleri 1 ve -1 olan doğrular çizilebilir. Böylece üçgeni çevreleyen taksi çevrel çemberi elde edilir. Üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, üçgenin iç açı ortaylarının arakesit noktasıdır. Bu arakesit noktasından çizilen ∞ ve 0 eğimli doğruların üçgeni kestiği noktalar taksi iç teğet çemberinin üç köşe noktasıdır. Bu noktalar üçgenin kenarlarının üzerinde olduğundan iç teğet çemberi bu noktalardan çizilen ± 1 eğimli doğru parçalarının birleşimidir. $\square$

Çalışmanın geri kalan kısmında, $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin C köşesi, üçgenin yataysal (*dikeysel*) kenarlarının kesim noktası olarak kabul edilecektir. Analitik düzlemin tüm ötelemeleri, taksi düzlemin izometrileri olduğundan, üçgenin bir köşesi orijin olarak alınabilir. Bu sebeple C köşesini orijinde alacağız. Üçgenin A ve B köşeleri birbirleriyle yer değiştirirse çalışma boyunca tüm fonksiyonel ilişkilerdeki m_a ve m_b eğimleri de birbiriyle yer değiştirilmelidir.

2.1 Taksi Çevrel Çember Ve Taksi İç Teğet Çemberin Yarıçapları Arasındaki İlişki

Teorem 2.3 *$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin AB, BC ve CA kenarlarının eğimleri sırasıyla m_c, m_a, m_b ve bu kenarların taksi uzunlukları sırasıyla c, a ve b olsun. Bu üçgenin* **r** *yarıçaplı iç teğet çemberi ve* **R** *yarıçaplı çevrel çemberi varsa*

$$\delta(m_a, m_b) = \begin{cases} m_a, & a > b \\ m_b, & a < b \end{cases}$$

iken

$$\rho(m_a, m_b, m_c) = \frac{|m_b - m_a||\delta(m_a,m_b) - m_c|}{\max\{|1+\delta(m_a,m_b)|,|1-\delta(m_a,m_b)|\}|\max\{m_a,m_b\}(1-m_c)+\min\{m_a,m_b\}(1+m_c)-2m_c|}$$

olmak üzere

$$\frac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} = \begin{cases} \rho(m_a, m_b, m_c), & |m_a| < 1, |m_b| < 1 \text{ ve } |m_c| > 1 \\ \rho(-m_a^{-1}, -m_b^{-1}, -m_c^{-1}), & |m_a| > 1, |m_b| > 1 \text{ ve } |m_c| < 1 \end{cases}$$

dir.

İspat Durum I : BC, AC ve AB kenarlarının eğimleri sırasıyla m_a, m_b, m_c iken $|m_a| < 1$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| > 1$ olan bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni alınsın (Bkz Şekil 2.1). Bu üçgenin yataysal kenarları iki temel durumda incelenecektir.

a) Üçgenin yataysal kenarları düzlemin aynı bölgesi üzerinde olması durumu (Bkz Şekil 2.1).

$x_b > x_a > 0$ ve $y_a > y_b > 0$ olacak şekilde $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ noktalarını ele alınsın yani üçgenin yataysal kenarları düzlemin aynı bölgesi üzerinde olsun (Bkz Şekil 2.1). Taksi çevrel çember $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin kenarlarından geçtiği için taksi çevrel çemberin merkezi M_E nin A ve B noktalarına olan taksi uzaklığı eşit olacaktır. $M_E = (p, k)$ olarak alınırsa bu noktanın A ve

B noktasına olan taksi uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_t(B, M_E,) &= d_t(A, M_E) \\
|x_b - p| + |y_b - k| &= |x_a - p| + |y_a - k| \\
x_b - p + k - y_b &= x_a - p + y_a - k \\
2k &= x_a - x_b + y_a + y_b \\
k &= \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde M_E nin C noktasına yani orijine olan taksi uzaklığı, M_E nin A noktasına olan taksi uzaklığına eşit olacaktır.

$$\begin{aligned}
d_t(M_E, C) &= d_t(M_E, A) \\
|0 - p| + |0 - k| &= |p - x_a| + |k - y_a| \\
p + k &= x_a - p + y_a - k \\
2p + 2\left(\frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}\right) &= x_a + y_a \\
2p + x_a - x_b + y_a + y_b &= x_a + y_a \\
2p &= x_b - y_b \\
p &= \frac{x_b - y_b}{2}
\end{aligned}$$

O halde taksi çevrel çemberin merkezi

$$M_E = \left(\frac{x_b - y_b}{2}, \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}\right)$$

şeklinde bulunur. M_E nin C ye olan uzaklığı aynı zamanda taksi çevrel çemberin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= d_t(M_E, C) \\
&= \left|\frac{x_b - y_b}{2} - 0\right| + \left|\frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2} - 0\right| \\
&= \frac{x_b - y_b}{2} + \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2} \\
&= \frac{x_a + y_a}{2}
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\mathbf{R} = \frac{x_a + y_a}{2} = \frac{x_a\left(1 + \dfrac{y_a}{x_a}\right)}{2} = \frac{x_a(1 + m_b)}{2}$$

dir. Taksi iç teğet çember, $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenine köşesel teğettir. O halde taksi iç teğet çemberin bu üç köşesi sırasıyla $y = m_c(x - x_a) + y_a$, $y = m_a x$ ve $y = m_b x$ denklemleriyle verilen $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları üzerinde bulunur. T_1 ve T_2 sırasıyla $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğruları üzerinde alınsın. Üçgenin iki kenarı yataysal doğru üzerinde ve taksi iç teğet çember üçgenin tümüyle içinde olduğundan T_1 ve T_2 aynı dikey doğru üzerindedir. O halde $t \in R^+$ için $T_1 = (t, m_b t)$ ve $T_2 = (t, m_a t)$ dir. Taksi iç teğet çemberin merkezi $M_I = (t, l)$ olarak kabul edilsin. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi M_I nın T_1 ve T_2 noktalarına olan taksi uzaklığı eşit olacaktır.

$$\begin{aligned}
d_t(M_I, T_2) &= d_t(M_I, T_1) \\
|t - t| + |l - m_a t| &= |t - t| + |l - m_b t| \\
l - m_a t &= m_b t - l \\
2l &= m_b t + m_a t \\
l &= \frac{t\,(m_b + m_a)}{2}
\end{aligned}$$

O halde taksi iç teğet çemberin merkezi

$$M_I = \left(t, \frac{t\,(m_b + m_a)}{2}\right)$$

şeklinde bulunur. M_I nın T_1 e olan taksi uzaklığı aynı zamanda taksi iç teğet çemberin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= d_t(M_I, T_1) \\
&= |t - t| + \left|\frac{(tm_b + tm_a)}{2} - m_b t\right| \\
&= m_b t - \frac{(tm_b + tm_a)}{2} \\
&= \frac{(tm_b - tm_a)}{2} \\
&= \frac{t\,(m_b - m_a)}{2}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak taksi iç teğet çemberin yarıçapı

$$\mathbf{r} = \frac{t\,(m_b - m_a)}{2}$$

şeklinde hesaplanır. Taksi iç teğet çemberin köşe noktaları T_1, T_2 ve T_3 olduğudan, bu noktaların taksi uzaklıkları birbirine eşittir. $T_3 = (q, w)$ iken bu eşitlikleri yazarak T_3 noktasının bileşenleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned}
d_t(T_2,T_3) &= d_t(T_1,T_3)\\
|t-q|+|m_at-w| &= |t-q|+|m_bt-w|\\
q-t+w-m_at &= q-t+m_bt-w\\
2w &= m_bt+m_at\\
w &= \frac{m_bt+m_at}{2}\\
&= \frac{(m_b+m_a)\,t}{2}
\end{aligned}$$

T_3 ve M_I nın arasındaki taksi uzaklık iç teğet çemberinin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned}
d_t(M_I,T_3) &= \mathbf{r}\\
|t-q|+\left|\frac{t\,(m_b+m_a)}{2}-\frac{(m_b+m_a)\,t}{2}\right| &= \frac{t\,(m_b-m_a)}{2}\\
q-t &= \frac{t\,(m_b-m_a)}{2}\\
q &= t+\frac{t\,(m_b-m_a)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak T_3 noktası

$$T_3 = \left(t+\frac{t\,(m_b-m_a)}{2},\frac{(m_b+m_a)\,t}{2}\right)$$

şeklinde bulunur. T_3, $y=m_c(x-x_a)+y_a$ denklemli doğru üzerinde bulunduğu için bu nokta doğru denklemini sağlayacaktır. O halde T_3 noktası doğru denkleminde yazılırsa t

$$\begin{aligned}
y &= m_c(x-x_a)+y_a\\
\frac{(m_b+m_a)\,t}{2} &= m_c(t+\frac{t\,(m_b-m_a)}{2}-x_a)+y_a\\
\frac{(m_b+m_a)\,t}{2}-m_ct-m_c\frac{t\,(m_b-m_a)}{2} &= y_a-m_cx_a\\
t\left(\frac{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}{2}\right) &= x_a(\frac{y_a}{x_a}-m_c)\\
t &= \frac{2x_a\,(m_b-m_c)}{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$\mathbf{R} = \frac{x_a\,(1+m_b)}{2} \quad \text{ve} \quad \mathbf{r} = \frac{t\,(m_b-m_a)}{2}$$

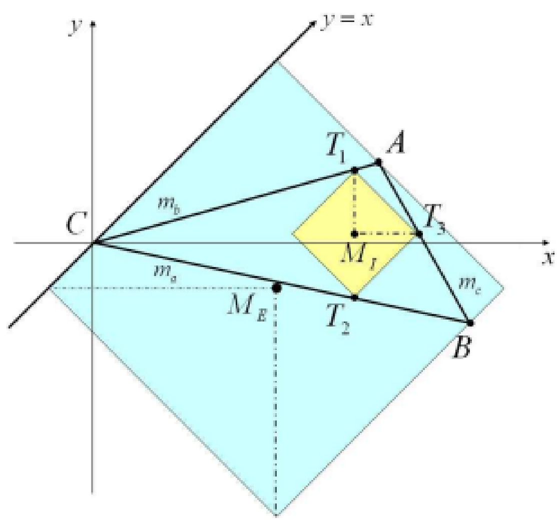
arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \frac{2x_a\left(m_b-m_c\right)\left(m_b-m_a\right)}{2\left(m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)\right)}\cdot\frac{(1+m_b)}{(1+m_b)} \\
&= \frac{x_a\left(1+m_b\right)\left(m_b-m_c\right)\left(m_b-m_a\right)}{(1+m_b)\left[m_b+m_a-2m_c-m_cm_b+m_cm_a)\right]} \\
&= \frac{2\mathbf{R}\left(m_b-m_c\right)\left(m_b-m_a\right)}{(1+m_b)\left[m_b\left(1-m_c\right)+m_a\left(m_c+1\right)-2m_c\right]}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

b) Üçgenin yataysal kenarlarının düzlemin komşu bölgelerinde olması durumu (Bkz Şekil 2.2).

$\overset{\Delta}{ABC}$, $|m_a|<1$, $|m_b|<1$ ve $|m_c|>1$ olan bir üçgen yani üçgenin yataysal kenarları düzlemin komşu bölgelerinde olsun (Bkz Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Yataysal kenarları düzlemin komşu bölgelerinde olan bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberi

$x_b > x_a > 0$ ve $y_a > 0 > y_b$ olacak şekilde $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$ noktaları ele alınsın (Bkz Şekil 2.2). $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi çevrel çemberinin merkezi $M_E=(p,k)$ iken M_E nin A ve B

noktalarına olan taksi uzaklığı eşit olacaktır.

$$\begin{aligned} d_t(M_E,B) &= d_t(M_E,A) \\ |x_b - r| + |y_b - k| &= |x_a - p| + |y_a - k| \\ x_b - r + k - y_b &= x_a - p + y_a - k \\ 2k &= x_a - x_b + y_a + y_b \\ k &= \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2} \end{aligned}$$

Benzer şekilde taksi çevrel çemberin merkezinin C noktasına yani orijine olan taksi uzaklığı, B noktasının taksi çevrel çemberin merkezine olan taksi uzaklığına eşit olacaktır.

$$\begin{aligned} d_t(M_E,C) &= d_t(M_E,B) \\ |p - 0| + |k - 0| &= |p - x_b| + |k - y_b| \\ p - k &= x_b - p + k - y_b \\ 2p - 2\left(\frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}\right) &= x_b - y_b \\ 2p - x_a + x_b - y_a - y_b &= x_b - y_b \\ 2p &= x_a + y_a \\ p &= \frac{x_a + y_a}{2} \end{aligned}$$

O halde taksi çevrel çemberin merkezi

$$M_E = \left(\frac{x_a + y_a}{2}, \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}\right)$$

şeklinde bulunur. M_E nin A noktasına olan taksi uzaklığı aynı zamanda taksi çevrel çemberin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= d_t(A,M_E) \\ &= \left|x_a - \frac{x_a + y_a}{2}\right| + \left|y_a - \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}\right| \\ &= x_a - \frac{x_a + y_a}{2} + y_a - \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2} \\ &= \frac{2x_a - x_a - y_a + 2y_a - x_a + x_b - y_a - y_b}{2} \\ &= \frac{x_b - y_b}{2} \end{aligned}$$

R yi biraz daha düzenlersek aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$\mathbf{R} \;=\; \frac{x_b - y_b}{2} \;=\; \frac{x_b\left(1-\dfrac{y_b}{x_b}\right)}{2} \;=\; \frac{x_b\,(1-m_a)}{2}$$

Taksi iç teğet çemberinin üç köşesi sırasıyla $y = m_c(x - x_a) + y_a$, $y = m_a x$ ve $y = m_b x$ denklemleriyle verilen $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları üzerindedir. T_1 ve T_2 sırasıyla $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğruları üzerinde olsun. T_1 ve T_2 aynı dikey doğru üzerinde olduğundan, T_1 ve T_2 nin birinci bileşenleri aynı olup $t \in R^+$ için $T_1 = (t, m_b t)$ ve $T_2 = (t, m_a t)$ olur. Taksi iç teğet çemberin merkezi $M_I = (t, l)$ olarak alınsın. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi M_I nın T_1 ve T_2 noktalarına olan taksi uzaklığı birbirine eşit olacaktır.

$$\begin{aligned}
d_t(M_I, T_2) &= d_t(M_I, T_1) \\
|t-t| + |l - m_a t| &= |t-t| + |l - m_b t| \\
l - m_a t &= m_b t - l \\
2l &= m_b t + m_a t \\
l &= \frac{t\,(m_b + m_a)}{2}
\end{aligned}$$

O halde taksi iç teğet çemberin merkezi

$$M_I \;=\; \left(t, \frac{t\,(m_b + m_a)}{2}\right)$$

şeklindedir. M_I nın T_1 e olan taksi uzaklığı aynı zamanda taksi iç teğet çemberin yarıçapını verir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= d_t(M_I, T_1) \\
&= |t-t| + \left|\frac{(tm_b + tm_a)}{2} - m_b t\right| \\
&= m_b t - \frac{(tm_b + tm_a)}{2} \\
&= \frac{(tm_b - tm_a)}{2} \\
&= \frac{t\,(m_b - m_a)}{2}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak taksi iç teğet çemberinin yarıçapı

$$\mathbf{r} \;=\; \frac{t\,(m_b - m_a)}{2}$$

olarak hesaplanır. Böylece $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi ve yarıçapı

$$M_I \;=\; \left(t, \frac{(m_a + m_b)t}{2}\right) \text{ ve } \mathbf{r} \;=\; \frac{(m_b - m_a)\,t}{2}$$

şeklinde bulunur. Taksi iç teğet çember bir Öklidyen kare olduğu için iç teğet çemberin köşe noktaları olan T_1, T_2 ve T_3 arasındaki taksi uzaklıklar birbirine eşittir. Bu durumda $T_3 = (q,w)$ iken bu nokta aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
d_t(T_2,T_3) &= d_t(T_1,T_3) \\
|t-q|+|m_a t-w| &= |t-q|+|m_b t-w| \\
q-t+w-m_a t &= q-t+m_b t-w \\
2w &= m_b t+m_a t \\
w &= \frac{m_b t+m_a t}{2} \\
&= \frac{(m_b+m_a)\,t}{2}
\end{aligned}$$

$T\,3$ ve M_I arasındaki taksi uzaklık iç teğet çemberin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned}
d_t(M_I,T_3) &= \mathbf{r} \\
|t-q|+\left|\frac{t\,(m_b+m_a)}{2}-\frac{(m_b+m_a)\,t}{2}\right| &= \frac{t\,(m_b-m_a)}{2} \\
q-t &= \frac{t\,(m_b-m_a)}{2} \\
q &= t+\frac{t\,(m_b-m_a)}{2}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak T_3 noktası

$$T_3 = \left(t+\frac{(m_b-m_a)t}{2}, m_b t-\frac{(m_b-m_a)t}{2}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca bu nokta $y = m_c(x-x_b)+y_b$ denklemli doğru üzerinde bulunduğu için bu nokta doğru denkleminde yerine yazılırsa t

$$\begin{aligned}
y &= m_c(x-x_b)+y_b \\
\frac{(m_b+m_a)\,t}{2} &= m_c\Big(t+\frac{t\,(m_b-m_a)}{2}-x_b\Big)+y_b \\
\frac{(m_b+m_a)\,t}{2}-m_c t-m_c\frac{t\,(m_b-m_a)}{2} &= y_b-m_c x_b \\
t\left(\frac{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}{2}\right) &= x_b\Big(\frac{y_b}{x_b}-m_c\Big) \\
t &= \frac{2x_b\,(m_a-m_c)}{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}
\end{aligned}$$

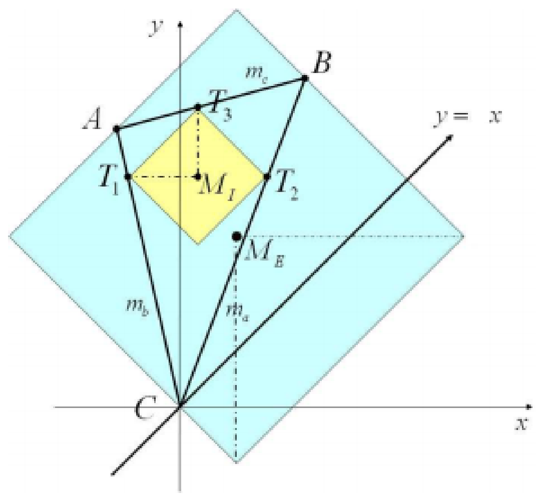
şeklinde bulunur. Böylece

$$\mathbf{R} = \frac{x_b(1-m_a)}{2} \text{ ve } \mathbf{r} = \frac{t(m_b-m_a)}{2}$$

arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \frac{2x_b(m_a-m_c)(m_b-m_a)}{2(m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a))}\cdot\frac{(1-m_a)}{(1-m_a)} \\
&= \frac{x_b(1-m_a)(m_a-m_c)(m_b-m_a)}{(1-m_a)[m_b+m_a-2m_c-m_cm_b+m_cm_a)]} \qquad \textbf{(2.1)} \\
&= \frac{2\mathbf{R}(m_a-m_c)(m_b-m_a)}{(1-m_a)[m_b(1-m_c)+m_a(m_c+1)-2m_c]}
\end{aligned}$$

şeklide bulunur. Şekil 2.2 deki gibi yerleştirilmiş $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni orijin etrafında $\frac{\pi}{2}$ derecelik açıyla döndürülürse Şekil 2.3 pozisyonundaki üçgen elde edilir.



Şekil 2.3. Dikeysel kenarları düzlemin komşu bölgelerinde olan bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberi

Durum II: $x_b > 0 > x_a$ ve $y_b > y_a > 0$ olacak şekilde $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ noktaları ele alınsın. Yani üçgenin iki kenarı dikeysel diğer kenarı ise yataysal doğru üzerinde olsun (Bkz Şekil 2.3). $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin merkezi $M_E = (p,k)$ olarak alınsın. M_E nin A ve B noktalarına olan taksi uzaklığı eşit olacaktır.

$$\begin{aligned}
d_t(A, M_E) &= d_t(B, M_E,) \\
|x_a - p| + |y_a - k| &= |x_b - p| + |y_b - k| \\
p - x_a + y_a - k &= x_b - p + y_b - k \\
2p &= x_a - y_a + x_b + y_b \\
p &= \frac{x_a - y_a + x_b + y_b}{2}
\end{aligned}$$

Aynı şekilde M_E nin C noktasına yani orijine olan taksi uzaklığı, M_E nin A noktasına olan taksi uzaklığına eşittir.

$$\begin{aligned} d_t(M_E,C) &= d_t(M_E,A) \\ |0-p|+|0-k| &= |p-x_a|+|k-y_a| \\ p+k &= p-x_a+y_a-k \\ 2k &= y_a-x_a \\ k &= \frac{y_a-x_a}{2} \end{aligned}$$

O halde taksi çevrel çemberin merkezi

$$M_E = \left(\frac{x_a-y_a+x_b+y_b}{2}, \frac{y_a-x_a}{2}\right)$$

şeklinde bulunur. M_E nin C ye olan taksi uzaklığı aynı zamanda taksi çevrel çemberin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= d_t(M_E,C) \\ &= \left|\frac{x_a-y_a+x_b+y_b}{2}-0\right|+\left|\frac{y_a-x_a}{2}-0\right| \\ &= \frac{x_a-y_a+x_b+y_b}{2}+\frac{y_a-x_a}{2} \\ &= \frac{x_b+y_b}{2} \end{aligned}$$

R yi biraz daha düzenlersek aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$\mathbf{R} = \frac{x_b+y_b}{2} = \frac{x_b\left(1+\dfrac{y_b}{x_b}\right)}{2} = \frac{x_b\,(1+m_a)}{2}$$

Taksi iç teğet çemberinin üç köşesi sırasıyla $y=m_c(x-x_b)+y_b$, $y=m_ax$ ve $y=m_bx$ denklemleriyle verilen $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları üzerinde bulunur. T_1 ve T_2 sırasıyla $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğruları üzerinde alınsın. Üçgenin iki kenarı dikeysel alındığı için T_1 ve T_2 noktaları yatay doğru üzerinde bulunmalıdır. O halde bu noktalar $t\in R^+$ için $T_1=(tm_b^{-1},t)$ ve $T_2=(tm_a^{-1},t)$ dir. Taksi iç teğet çemberin merkezi $M_I=(l,t)$ olarak alınsın. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi M_I nın T_1 ve T_2 noktalarına olan taksi uzaklıkları birbirine eşittir.

$$\begin{aligned}
d_t(M_I,T_1) &= d_t(M_I,T_2)\\
\left|l-tm_b^{-1}\right|+|t-t| &= \left|l-tm_a^{-1}\right|+|t-t|\\
l-tm_b^{-1} &= tm_a^{-1}-l\\
2l &= tm_b^{-1}+tm_a^{-1}\\
l &= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{m_a}+\frac{t}{m_b}\right)\\
&= \frac{t\,(m_b+m_a)}{2m_am_b}
\end{aligned}$$

O halde taksi iç teğet çemberin merkezi

$$M_I = \left(\frac{t\,(m_b+m_a)}{2m_am_b},t\right) = \left(\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right),t\right)$$

şeklinde bulunur. M_I nın T_2 ye olan taksi uzaklığı aynı zamanda taksi iç teğet çemberin yarıçapını verecektir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= d_t(M_I,T_1)\\
&= \left|\left(\frac{t}{2m_a}+\frac{t}{2m_b}\right)-\frac{t}{m_b}\right|+|t-t|\\
&= \frac{t}{2m_a}+\frac{t}{2m_b}-\frac{2t}{2m_b}\\
&= \frac{t}{2m_a}-\frac{t}{2m_b}\\
&= \frac{t}{2}\left(\frac{1}{m_a}-\frac{1}{m_b}\right)\\
&= \frac{t}{2}\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Taksi iç teğet çemberinin köşeleri T_1, T_2 ve T_3 noktalarının taksi uzaklıkları birbirine eşit olacaktır. $T_3=(q,w)$ iken bu noktayı bulmaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
d_t(T_1,T_3) &= d_t(T_2,T_3) \\
\left|tm_b^{-1}-q\right|+|t-w| &= \left|tm_a^{-1}-q\right|+|t-w| \\
q-tm_b^{-1}+w-t &= tm_a^{-1}-q+w-t \\
2q &= \frac{t}{m_a}+\frac{t}{m_b} \\
q &= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{m_a}+\frac{t}{m_b}\right) \\
&= \frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)
\end{aligned}$$

$T\,3$ ve M_I arasındaki taksi uzaklık, taksi iç teğet çemberin yarıçapını verir.

$$\begin{aligned}
d_t(M_I,T_3) &= \mathbf{r} \\
\left|\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)-\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)\right|+|t-w| &= \frac{t}{2}\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right) \\
w-t &= \frac{t}{2}\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right) \\
w &= t+\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak T_3 noktası

$$T_3 = \left(\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right), t+\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)\right)$$

şeklinde bulunur. T_3, $y=m_c(x-x_b)+y_b$ denklemli doğru üzerinde bulunduğu için bu nokta doğru denklemini sağlar. O halde bu nokta denklemde yerine yazılırsa t aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
y &= m_c(x - x_b) + y_b \\
t + \frac{t}{2}\left(m_a^{-1} - m_b^{-1}\right) &= m_c(\frac{t}{2}\left(m_a^{-1} + m_b^{-1}\right) - x_b) + y_b \\
t + \frac{tm_a^{-1}}{2} - \frac{tm_b^{-1}}{2} - \frac{tm_c m_a^{-1}}{2} - \frac{tm_c m_b^{-1}}{2} &= y_b - m_c x_b \\
t\left(1 + \frac{1}{2m_a} - \frac{1}{2m_b} - \frac{m_c}{2m_a} - \frac{m_c}{2m_b}\right) &= x_b(\frac{y_b}{x_b} - m_c) \\
t\left(\frac{2m_a m_b}{2m_a m_b} + \frac{m_b}{2m_a m_b} - \frac{m_a}{2m_b m_a} - \frac{m_c m_b}{2m_a m_b} - \frac{m_c m_a}{2m_b m_a}\right) &= x_b\left(m_a - m_c\right) \\
t\left(\frac{2m_a m_b + m_b - m_a - m_c m_b - m_c m_a}{2m_a m_b}\right) &= x_b\left(m_a - m_c\right) \\
t &= \frac{2x_b\left(m_a - m_c\right)\left(m_a m_b\right)}{2m_a m_b + m_b - m_a - m_c m_b - m_c m_a} \\
&= \frac{2x_b\left(m_a - m_c\right)\left(m_a m_b\right)}{-m_a\left(1 + m_c\right) + m_b\left(1 - m_c\right) + 2m_a m_b}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{R} = \frac{x_b\left(1 + m_a\right)}{2} \quad \text{ve} \quad \mathbf{r} = \frac{t}{2}\left(m_a^{-1} - m_b^{-1}\right)
$$

olduğundan **r** ve **R** arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= t\left(\frac{m_b - m_a}{2m_a m_b}\right) \\
&= \frac{2x_b\left(m_a - m_c\right)\left(m_a m_b\right)}{\left[-m_a\left(1 + m_c\right) + m_b\left(1 - m_c\right) + 2m_a m_b\right]} . \left(\frac{m_b - m_a}{2m_a m_b}\right) \\
&= \frac{x_b\left(m_a - m_c\right)\left(m_b - m_a\right)}{\left[-m_a\left(1 + m_c\right) + m_b\left(1 - m_c\right) + 2m_a m_b\right]} . \frac{\left(1 + m_a\right)}{\left(1 + m_a\right)} \\
& \frac{2\mathbf{R}\left(m_a - m_c\right)\left(m_b - m_a\right)}{\left(1 + m_a\right)\left[-m_a\left(1 + m_c\right) + m_b\left(1 - m_c\right) + 2m_a m_b\right]}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Şekil 2.2 deki gibi yerleştirilmiş $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni, orijin etrafında $\frac{\pi}{2}$ derecelik açıyla döndürülerek Şekil 2.3 pozisyonundaki üçgen elde edilmişti. Şekil-2.2 de BC ve AC yataysal doğrular, AB ise dikeysel doğru iken $\frac{\pi}{2}$ derecelik dönme sonrası oluşan Şekil 2.3 pozisyonundaki üçgende BC ve AC nin dikeysel doğrulara, AB nin ise yataysal doğruya dönüştüğü görülür. O halde denklem

(2.1)'de m_a, m_b ve m_c sırasıyla $-m_a^{-1}$, $-m_b^{-1}$ ve $-m_c^{-1}$ ile yer değiştirilerek yeniden yazılırsa

$$\frac{2\mathbf{R}\left(\frac{-1}{m_a}+\frac{1}{m_c}\right)\left(\frac{-1}{m_b}+\frac{1}{m_a}\right)}{\left(1+\frac{1}{m_a}\right)\left[\frac{-1}{m_b}\left(1+\frac{1}{m_c}\right)-\frac{1}{m_a}\left(\frac{-1}{m_c}+1\right)+\frac{2}{m_c}\right]}$$

$$\frac{2\mathbf{R}\left(\frac{m_a-m_c}{m_am_c}\right)\left(\frac{m_b-m_a}{m_am_b}\right)}{\left(\frac{m_a+1}{m_a}\right)\left[-\left(\frac{m_c+1}{m_bm_c}\right)-\left(\frac{m_c-1}{m_am_c}\right)+\frac{2}{m_c}\right]}$$

$$\frac{2\mathbf{R}\left(\frac{m_a-m_c}{m_am_c}\right)\left(\frac{m_b-m_a}{m_am_b}\right)}{\left(\frac{m_a+1}{m_a}\right)\left[-\frac{m_a}{m_a}\left(\frac{m_c+1}{m_bm_c}\right)-\frac{m_b}{m_b}\left(\frac{m_c-1}{m_am_c}\right)+\frac{m_am_b}{m_am_b}\frac{2}{m_c}\right]}$$

$$\frac{2\mathbf{R}\left(\frac{(m_a-m_c)(m_b-m_a)}{m_am_cm_am_b}\right)}{\left(\frac{m_a+1}{m_a}\right)\left[\left(\frac{-m_a(m_c+1)}{m_am_bm_c}\right)+\left(\frac{-m_b(m_c-1)}{m_bm_am_c}\right)+\frac{2m_am_b}{m_am_bm_c}\right]}$$

$$\frac{2\mathbf{R}\left(\frac{(m_a-m_c)(m_b-m_a)}{m_am_cm_am_b}\right)}{\left(\frac{m_a+1}{m_a}\right)\left[\left(\frac{-m_a(m_c+1)+m_b(1-m_c)+2m_am_b}{m_am_bm_c}\right)\right]}$$

$$\frac{2\mathbf{R}(m_a-m_c)(m_b-m_a)}{(1+m_a)[-m_a(1+m_c)+m_b(1-m_c)+2m_am_b]}$$

elde edilir. Denklem (2.1) m_a, m_b ve m_c sırasıyla $-m_a^{-1}$, $-m_b^{-1}$ ve $-m_c^{-1}$ ile yer değiştirilerek yeniden yazıldığında denklem (2.2) elde edildi. Bu sonuçla $\frac{\pi}{2}$ dönmesinin, taksi düzlemin bir izometrisi olduğu görülür. Bunun yanında, $|m_a|<1$, $|m_b|<1$ ve $|m_c|>1$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni $\frac{\pi}{2}$ dönmesi altında $|m_a|>1$, $|m_b|>1$ ve $|m_c|<1$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenine dönüştürüldü. Böylece **r** ve **R** ilişkisinde $|m_a|<1$, $|m_b|<1$ ve $|m_c|>1$ olan üçgenler için m_a, m_b ve m_c sırasıyla $-m_a^{-1}$, $-m_b^{-1}$ ve $-m_c^{-1}$ ile yer değiştirilirse $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin tüm pozisyonlarıyla ilgili ilişkiler bulunabilir. Yani üçgenin tüm pozisyonları hakkındaki ilişkiler kolayca genelleştirilebilir.

Örnek 2.1 Köşe noktaları $(6,4)$, $(10,-2)$ ve orijin olan üçgenin taksi iç teğet çemberinin yarıçapının, taksi çevrel çemberin çapına oranını üçgenin kenarlarının eğimleri cinsinden bulunuz.

Çözüm: Köşe noktaları $A=(6,4)$, $B=(10,-2)$ ve $C=(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin AB, AC ve BC kenarının eğimleri sırasıyla m_c, m_b ve m_a olarak alınısın. Bu durumda $m_c=-\frac{3}{2}$,

$m_a = -\dfrac{1}{5}$ ve $m_b = \dfrac{2}{3}$ tür. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin iki kenarı yataysal, diğer kenarı dikeysel doğru üzerinde bulunmaktadır. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin bir yarısı birinci bölgede diğer yarısı ise dördüncü bölgededir. Yani yataysal kenarlar düzlemin komşu bölgeleri üzerinde kalır. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin merkezinin $M_E = \left(\dfrac{x_a+y_a}{2}, \dfrac{x_a-x_b+y_a+y_b}{2}\right)$ ve yarıçapının $\mathbf{R} = \dfrac{x_b-y_b}{2}$ olarak bulunacağı Teorem 2.2 de gösterilmişti. O halde bu üçgenin taksi çevrel çemberi merkezi $M_E = (5,-1)$ ve yarıçapı $\mathbf{R}$ =6 dır. Benzer şekilde Teorem 2.2 den $t = \dfrac{2x_b\,(m_a-m_c)}{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}$ olmak üzere taksi iç teğet çemberin merkezini $M_I = \left(t, \dfrac{(m_a+m_b)t}{2}\right)$ ve yarıçapını $\mathbf{r} = \dfrac{(m_b-m_a)\,t}{2}$ olarak bulmuştuk. Böylece $t = \dfrac{780}{143}$ iken üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi $M_I = \left(\dfrac{780}{143}, \dfrac{182}{143}\right)$ yarıçapı ise $\mathbf{r} = \dfrac{26}{11}$ dir. O halde $\dfrac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} = \dfrac{13}{66}$ olarak elde edilir.

Teorem 2.2 de $\dfrac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} = \dfrac{(m_a-m_c)\,(m_b-m_a)}{(1-m_a)\,[m_b\,(1-m_c)+m_a\,(m_c+1)-2m_c]}$ şeklinde bulmuştu. Verilen değerler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} &= \frac{\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)}{\left(1+\frac{1}{5}\right)\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}+1\right)+2.\frac{3}{2}\right]} \\
&= \frac{\frac{13}{10}.\frac{13}{15}}{\frac{6}{5}\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{10}+3\right]} \\
&= \frac{\frac{13}{10}.\frac{13}{15}}{\frac{286}{50}} \\
&= \frac{13}{66}
\end{aligned}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

□

Örnek 2.2 Köşe noktaları $(6,5)$, $(8,2)$, ve orijin olan üçgenin taksi iç teğet çemberinin yarıçapının, taksi çevrel çemberin çapına oranını bulunuz.

Çözüm: Köşe noktaları $A = (6,5)$, $B = (8,2)$ ve $C = (0,0)$ olduğundan, $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni birinci bölgede ve iki kenarı yataysal, diğer kenarı dikeysel doğru üzerindedir. Yani üçgenin yataysal kenarları düzlemin aynı bölgesi üzerinde kalır. AB, AC ve BC kenarının eğimleri sırasıyla m_c, m_b ve m_a olarak alınsın. Bu durumda $m_c = -\frac{3}{2}$, $m_a = \frac{1}{4}$ ve $m_b = \frac{5}{6}$ dır. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi çevrel çemberinin merkezinin $M_E = \left(\frac{x_b - y_b}{2}, \frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}\right)$ ve yarıçapının $\mathbf{R} = \frac{x_a + y_a}{2}$ olarak bulunacağı Teorem 2.2 de gösterilmişti. O halde bu üçgenin taksi çevrel çemberinin merkezi $M_E = \left(3, \frac{5}{2}\right)$ ve yarıçapı $\mathbf{R} = \frac{11}{2}$ dir. Benzer şekilde Teorem 2.2 den $t = \frac{2x_a(m_b - m_c)}{m_b + m_a - 2m_c - m_c(m_b - m_a)}$ iken taksi iç teğet çemberin merkezini $M_I = \left(t, \frac{(m_a + m_b)t}{2}\right)$ ve yarıçapını $\mathbf{r} = \frac{(m_b - m_a)t}{2}$ bulmuştuk. Böylece $t = \frac{672}{119}$ iken üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi $M_I = \left(\frac{672}{119}, \frac{364}{119}\right)$ yarıçapı ise $\mathbf{r} = \frac{28}{17}$ dir. O halde $\frac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} = \frac{28}{187}$ olarak elde edilir.

Teorem 2.2 de $\frac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} = \frac{(m_b - m_c)(m_b - m_a)}{(1 + m_b)[m_b(1 - m_c) + m_a(m_c + 1) - 2m_c]}$ şeklinde bulunacağını gösterilmişti. Verilen değerleri bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} &= \frac{\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{5}{6}\right)\left[\frac{5}{6}\left(1 + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2} + 1\right) + 2.\frac{3}{2}\right]} \\
&= \frac{\frac{14}{6}.\frac{7}{12}}{\frac{11}{6}\left[\frac{25}{12} - \frac{1}{8} + 3\right]} \\
&= \frac{\frac{14}{6}.\frac{7}{12}}{\frac{11}{6}.\frac{119}{24}} \\
&= \frac{28}{187}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanabilir.□

2.2 Taksi Çevrel Çember Ve Taksi İç Teğet Çemberin Merkezleri Arası Taksi Uzaklık

Teorem 2.4 *$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin AB, BC ve CA kenarlarının eğimleri sırasıyla m_c, m_a ve m_b olsun. M_I, $\mathbf{r}$ yarıçaplı iç teğet çemberinin merkezi ve M_E ise $\mathbf{R}$ yarıçaplı çevrel çemberin merkezi olmak üzere*

$$\psi(m_a,m_b,m_c) = \min\left\{\left|\frac{m_a+m_b-2sgn(m_c)}{(m_b-m_a)}\mathbf{r}-\mathbf{R}\right|, \left|\frac{m_a+m_b-2sgn(m_c)}{(m_b-m_a)}\mathbf{r}-\left(1-\frac{2[(1-m_a)sgn(m_c)][m_b-m_c]}{[(1-m_b)sgn(m_c)][m_b-m_a]}\right)\mathbf{R}\right|\right\}$$

iken

$$d_T(M_I,M_E) = \begin{cases} \psi(m_a,m_b,m_c), & |m_a|<1, |m_b|<1 \text{ ve } |m_c|>1 \\ \psi\left(-m_a^{-1},-m_b^{-1},-m_c^{-1}\right), & |m_a|>1, |m_b|>1 \text{ ve } |m_c|<1 \end{cases}$$

dir.

İspat $x_b > x_a > 0$ ve $y_a > y_b$ olmak üzere köşeleri $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$ ve $C=(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni ele alınsın. Teorem 2.1 de $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberi ve taksi iç teğet çemberi bulunması için bu üçgenin iki kenarının yataysal (dikeysel) doğru, üçüncü kenarının ise dikeysel (yataysal) doğru üzerinde olması gerektiği gösterilmişti. Bu sebeple iki olası durum söz konusudur.

Durum I : $|m_a|<1$, $|m_b|<1$ ve $|m_c|>1$ (Bkz Şekil 2.1) yani üçgenin iki kenarı yataysal doğrular üzerinde diğer kenarı ise dikeysel doğru üzerinde bulunsun. Bu durumda $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin merkezi ve yarıçapı sırasıyla

$$M_E = \left(\frac{x_b-y_b}{2}, \frac{x_a-x_b+y_a+y_b}{2}\right) \text{ ve } \mathbf{R} = \frac{x_a+y_a}{2}$$

şeklinde bulunmuştu. Ayrıca

$$t = \frac{2x_a(m_b-m_c)}{m_a+m_b-2m_c+m_c(m_a-m_b)}$$

iken $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi ve yarıçapının sırasıyla aşağıdaki şekilde olduğunu gösterilmişti.

$$M_I = \left(t, \frac{(m_b+m_a)t}{2}\right) \text{ ve } \mathbf{r} = \frac{(m_b-m_a)t}{2}$$

O halde taksi çevrel çemberin ve taksi iç teğet çemberin merkezlerinin sırasıyla $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{r}$ cinsinden ifade edilmesi gerekli. İlk olarak çevrel çemberin merkezi ve yarıçapı incelensin.

$$
\begin{aligned}
m_c &= \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} \\
m_c\left(x_a - x_b\right) &= y_a - y_b \\
y_b - m_c x_b &= y_a - m_c x_a \\
x_b\left(\frac{y_b}{x_b} - m_c\right) &= x_a\left(\frac{y_a}{x_a} - m_c\right) \\
x_b\left(m_a - m_c\right) &= x_a\left(m_b - m_c\right) \\
x_b &= \frac{x_a\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)} \\
x_b\left(1 - m_a\right) &= \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\left(1 - m_a\right)x_a \\
x_b\left(1 - \frac{y_b}{x_b}\right) &= \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\left(1 - m_a\right)x_a\frac{\left(1 + m_b\right)}{\left(1 + m_b\right)} \\
x_b - y_b &= \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\frac{\left(1 - m_a\right)}{\left(1 + m_b\right)}x_a\left(1 + \frac{y_a}{x_a}\right) \\
x_b - y_b &= \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\frac{\left(1 - m_a\right)}{\left(1 + m_b\right)}\left(x_a + y_a\right) \\
\frac{x_b - y_b}{2} &= \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\frac{\left(1 - m_a\right)}{\left(1 + m_b\right)}\frac{\left(x_a + y_a\right)}{2} \\
&= \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\frac{\left(1 - m_a\right)}{\left(1 + m_b\right)}\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki işlemler yardımıyla M_E nin birinci bileşini ile **R** arasındaki ilişki gösterildi. Benzer şekilde M_E nin ikinci bileşeni ve **R** arasındaki ilişki,

$$
\begin{aligned}
\frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2} &= \frac{x_a + y_a}{2} - \frac{x_b - y_b}{2} \\
&= \mathbf{R} - \frac{\left(m_b - m_c\right)}{\left(m_a - m_c\right)}\frac{\left(1 - m_a\right)}{\left(1 + m_b\right)}\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Şimdi taksi iç teğet çemberin yarıçapı ve merkezleri arasındaki ilişki incelensin. M_I nın birinci bileşeni t ve yarıçapı arasındaki ilşki aşağıdaki şekilde bulunur.

$$
t = \frac{2\mathbf{r}}{\left(m_b - m_a\right)}
$$

Benzer şekilde yarıçap ile M_I nın ikinci bileşeni arasındaki de ilişki aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
\frac{(m_b+m_a)\,t}{2} &= \frac{t\,(m_b+m_a)}{2}\frac{(m_b-m_a)}{(m_b-m_a)} \\
&= \frac{(m_b+m_a)}{(m_b-m_a)}\frac{(m_b-m_a)\,t}{2} \\
&= \frac{(m_b+m_a)}{(m_b-m_a)}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberinin merkezleri arasındaki taksi uzaklık ise

$$\begin{aligned}
d &= d_T\,(M_E, M_I) \\
&= \left|t-\frac{x_b-y_b}{2}\right|+\left|\frac{(m_b+m_a)\,t}{2}-\frac{x_a-x_b+y_a+y_b}{2}\right| \\
&= \left|\frac{2}{(m_b-m_a)}\mathbf{r}-\frac{(m_b-m_c)}{(m_a-m_c)}\frac{(1-m_a)}{(1+m_b)}\mathbf{R}\right|+\left|\frac{(m_b+m_a)}{(m_b-m_a)}\mathbf{r}-\left(\mathbf{R}-\frac{(m_b-m_c)}{(m_a-m_c)}\frac{(1-m_a)}{(1+m_b)}\mathbf{R}\right)\right|
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Durum II : $|m_a|>1$, $|m_b|>1$ ve $|m_c|<1$ (Bkz Şekil - 2.3) yani üçgenin iki kenarı dikeysel doğrular diğer kenarı ise yataysal doğru üzerinde bulunsun. Bu durumda $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi çevrel çemberinin merkezi ve yarıçapı sırasıyla

$$M_E = \left(\frac{x_a-y_a+x_b+y_b}{2}, \frac{y_a-x_a}{2}\right) \quad \text{ve} \quad \mathbf{R} = \frac{x_b+y_b}{2}$$

idi.

$$t = \frac{2x_b\,(m_a-m_c)\,(m_a m_b)}{-m_a\,(1+m_c)+m_b\,(1-m_c)+2m_a m_b}$$

iken $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi ve yarıçapı sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunmuştu.

$$M_I = \left(\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right), t\right) \quad \text{ve} \quad \mathbf{r} = \frac{t}{2}\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)$$

O halde taksi çevrel çemberin ve iç teğet çemberin merkezleri sırasıyla **R** ve **r** cinsinden ifade edilmelidir. İlk olarak taksi iç teğet çemberinin merkezi ve yarıçapı arasındaki ilişki incelensin.

M_I nın birinci bileşeni ve $\mathbf{r}$ arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right) &= \frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)\frac{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)} \\
&= \frac{\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\frac{t\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}{2} \\
&= \frac{\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde M_I nın ikinci bileşeni ve $\mathbf{r}$ arasındaki ilişki ise

$$\begin{aligned}
t &= t\frac{2\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}{2\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)} \\
&= \frac{2}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\frac{t\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}{2} \\
&= \frac{2}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi de taksi çevrel çemberin merkezi ve yarıçapı incelensin.

$$
\begin{aligned}
m_c &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\
m_c\left(x_b - x_a\right) &= y_b - y_a \\
y_a - m_c x_a &= y_b - m_c x_b \\
x_a\left(\frac{y_a}{x_a} - m_c\right) &= x_b\left(\frac{y_b}{x_b} - m_c\right) \\
x_a\left(m_b - m_c\right) &= x_b\left(m_a - m_c\right) \\
x_a &= \frac{x_b\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)} \\
x_a\left(m_b - 1\right) &= \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\left(m_b - 1\right)x_b \\
x_a\left(\frac{y_a}{x_a} - 1\right) &= \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\left(m_b - 1\right)x_b\frac{\left(1 + m_a\right)}{\left(1 + m_a\right)} \\
y_a - x_a &= \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\frac{\left(m_b - 1\right)}{\left(1 + m_a\right)}x_b\left(1 + \frac{y_b}{x_b}\right) \\
y_a - x_a &= \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\frac{\left(m_b - 1\right)}{\left(1 + m_a\right)}\left(x_b + y_b\right) \\
\frac{y_a - x_a}{2} &= \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\frac{\left(m_b - 1\right)}{\left(1 + m_a\right)}\frac{\left(x_b + y_b\right)}{2} \\
&= \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\frac{\left(m_b - 1\right)}{\left(1 + m_a\right)}\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki işlemler yardımıyla M_E nin ikinci bileşini ile $\mathbf{R}$ arasındaki ilişki gösterildi. Benzer şekilde M_E nin birinci bileşeni ve $\mathbf{R}$ arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\frac{x_a + x_b - y_a + y_b}{2} &= \frac{y_b + x_b}{2} - \frac{y_a - x_a}{2} \\
&= \mathbf{R} - \frac{\left(m_a - m_c\right)}{\left(m_b - m_c\right)}\frac{\left(m_b - 1\right)}{\left(1 + m_a\right)}\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Böylece $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberinin merkezleri arasındaki uzaklık aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
d &= d_T\left(M_E, M_I\right) \\
&= \left|\frac{t}{2}\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)-\frac{x_a-y_a+x_b+y_b}{2}\right|+\left|t-\frac{y_a-x_a}{2}\right| \\
&= \left|\frac{\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\mathbf{r}-\mathbf{R}+\frac{\left(m_a-m_c\right)}{\left(m_b-m_c\right)}\frac{\left(m_b-1\right)}{\left(1+m_a\right)}\mathbf{R}\right|+\left|\frac{2}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\mathbf{r}-\frac{\left(m_a-m_c\right)}{\left(m_b-m_c\right)}\frac{\left(m_b-1\right)}{\left(1+m_a\right)}\mathbf{R}\right|
\end{aligned}
$$

□

Örnek 2.3 Köşe noktaları $(-1,2)$, $(2,4)$ ve orijin olan üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevel çemberinin merkezleri arasındaki taksi uzaklığı bu çemberlerin yarıçapları yardımıyla bulunuz.

Çözüm: Köşe noktaları $A=(-1,2)$, $B=(2,4)$ ve $C=(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin AB, AC ve BC kenarının eğimleri sırasıyla m_c, m_b ve m_a olarak alınsın. Bu durumda $m_c=\dfrac{2}{3}$, $m_b=-2$ ve $m_a=2$ dir. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin iki kenarı dikeysel, diğer kenarı yataysal doğru üzerinde bulunmaktadır. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin bir yarısı birinci bölgede diğer yarısı ise ikinci bölgededir. Teorem 2.2 de $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çember merkezinin $M_E=\left(\dfrac{x_a-y_a+x_b+y_b}{2},\dfrac{y_a-x_a}{2}\right)$ şeklinde bulunacağı gösterilmişti. O halde bu üçgenin taksi çevrel merkezi $M_E=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ olarak bulunur. Benzer şekilde Teorem 2.2 de $t=\dfrac{2x_b\left(m_a-m_c\right)\left(m_am_b\right)}{-m_a\left(1+m_c\right)+m_b\left(1-m_c\right)+2m_am_b}$ olmak üzere taksi iç teğet çemberin merkezi $M_I=\left(\dfrac{\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)t}{2},t\right)$ olarak bulunmuştu. Böylece $t=\dfrac{32}{9}$ iken üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi $M_I=\left(0,\dfrac{13}{3}\right)$ tür. Üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberinin merkezleri arasındaki taksi uzaklığı ise

$$
\begin{aligned}
d_T\left(M_E,M_I\right) &= \left|\frac{3}{2}-0\right|+\left|\frac{3}{2}-\frac{13}{3}\right| \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

olarak elde edilir. Teorem 2.3 de yarıçaplar yardımıyla, çemberlerin merkezleri arasındaki taksi uzaklığın

$$
d_T\left(M_E,M_I\right) = \left|\frac{\left(m_a^{-1}+m_b^{-1}\right)}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\mathbf{r}-\mathbf{R}+\frac{\left(m_a-m_c\right)}{\left(m_b-m_c\right)}\frac{\left(m_b-1\right)}{\left(1+m_a\right)}\mathbf{R}\right|+\left|\frac{2}{\left(m_a^{-1}-m_b^{-1}\right)}\mathbf{r}-\frac{\left(m_a-m_c\right)}{\left(m_b-m_c\right)}\frac{\left(m_b-1\right)}{\left(1+m_a\right)}\mathbf{R}\right|
$$

olduğu gösterilmişti.

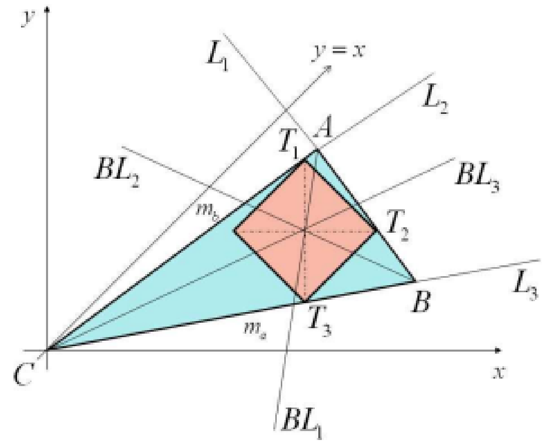
Teorem 2.2 de taksi çevrel çemberin yarıçapı $\mathbf{R} = \frac{x_b + y_b}{2}$ ve $t = \frac{2x_b(m_a - m_c)(m_a m_b)}{-m_a(1+m_c) + m_b(1-m_c) + 2m_a m_b}$ olmak üzere taksi iç teğet çemberin yarıçapı $\mathbf{r} = \frac{\left(m_a^{-1} - m_b^{-1}\right)t}{2}$ olarak hesaplamıştı. Bu durumda $\mathbf{R} = 3$ ve $t = \frac{32}{9}$ iken $\mathbf{r} = \frac{13}{6}$ dır. O halde verilen değerler yelerine konulduğu zaman

$$
\begin{aligned}
d_T(M_E, M_I) &= \left| \frac{\left(m_a^{-1} + m_b^{-1}\right)}{\left(m_a^{-1} - m_b^{-1}\right)} \mathbf{r} - \mathbf{R} + \frac{(m_a - m_c)}{(m_b - m_c)} \frac{(m_b - 1)}{(1 + m_a)} \mathbf{R} \right| + \left| \frac{2}{\left(m_a^{-1} - m_b^{-1}\right)} \mathbf{r} - \frac{(m_a - m_c)}{(m_b - m_c)} \frac{(m_b - 1)}{(1 + m_a)} \mathbf{R} \right| \\
&= \left| -3 + \frac{3}{2} \right| + \left| \frac{13}{3} - \frac{3}{2} \right| \\
& \quad \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

(2.3) ile aynı sonuç elde edilir.□

2.3 Taksi İç Açıortay Doğrularının Kesim Noktası

Bilindiği üzere Öklidyen geometride, iç açıortay doğrularının kesim noktası, iç teğet çemberinin merkezidir. Ayrıca açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktanın, bu açının kollarına olan uzaklıkları eşittir. Taksi uzaklık, Öklidyen uzaklıktan farklı olduğu için taksi açıortay doğrusu, Öklidyen açıortaydan farklıdır. Bu sebeple bir üçgenin taksi iç açıortay doğrularının kesim noktası, genellikle Öklidyen durumundan farklı olacaktır. Aşağıdaki teoremde bu özellik incelenecek.



Şekil 2.4. Taksi iç açıortay doğrularının kesim noktası

Teorem 2.5 *Bir üçgenin taksi iç açıortay doğrularının kesim noktası bu üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezidir.*

İspat Teorem 2.1 de bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin, taksi iç teğet çemberi olması için bu üçgenin iki kenarının yataysal doğrular, üçüncü kenarının ise dikeysel doğru üzerinde olması gerektiği gösterildi. Üçgenin AB, AC ve BC kenarlarını üzerinde bulunduran L_1, L_2 ve L_3 doğrularının denklemleri sırasıyla $y = m_c(x - x_a) + y_a$, $y = m_b\, x$ ve $y = m_a x$ dir. Taksi düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının tanımı kullanılarak taksi iç açıların açıortay doğruları BL_1, BL_2 ve BL_3 aşağıdaki şekilde bulunur.

$$BL_1 \quad = \quad \left\{X = (x, y) \in R^2 : d_T(X, L_1) = d_T(X, L_2)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X, L_1) \quad = \quad \frac{|y - m_c(x - x_a) - y_a|}{\max\{|-m_c|, |1|\}} \quad = \quad \frac{y - m_c(x - x_a) - y_a}{m_c}$$

ve

$$d_T(X, L_2) \quad = \quad \frac{|y - m_b x|}{\max\{|-m_b|, |1|\}} \quad = \quad m_b x - y$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X, L_1) \quad = \quad d_T(X, L_2) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y - m_c(x - x_a) - y_a}{m_c} = m_b x - y \\ &\Longrightarrow \quad y = \frac{m_c(1 + m_b)}{1 + m_c} x + \frac{y_a - m_c x_a}{1 + m_c} \end{aligned}$$

Böylece BL_1 doğrusunun denklemi

$$y \quad = \quad \frac{m_c(1 + m_b)}{1 + m_c} x + \frac{y_a - m_c x_a}{1 + m_c}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde BL_2 doğrusunun denklemi

$$BL_2 = \left\{X=(x,y)\in R^2 : d_T(X,L_1)=d_T(X,L_3)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_1) = \frac{|y-m_c(x-x_a)-y_a|}{\max\{|-m_c|,|1|\}} = \frac{y-m_c(x-x_a)-y_a}{m_c}$$

ve

$$d_T(X,L_3) = \frac{|y-m_a x|}{\max\{|-m_a|,|1|\}} = y-m_a x$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_1) = d_T(X,L_3) &\Longrightarrow \frac{y-m_c(x-x_a)-y_a}{m_c}=y-m_a x \\ &\Longrightarrow y-m_c(x-x_a)-y_a=m_c y-m_c m_a x \\ &\Longrightarrow y-m_c y=m_c x-m_c m_a x+y_a-m_c x_a \\ &\Longrightarrow y(1-m_c)=m_c(1-m_a)x+y_a-m_c x_a \\ &\Longrightarrow y=\frac{m_c(1-m_a)}{1-m_c}x+\frac{y_a-m_c x_a}{1-m_c} \end{aligned}$$

Böylece BL_2 doğrusunun denklemi

$$y = \frac{m_c(1-m_a)}{1-m_c}x+\frac{y_a-m_c x_a}{1-m_c}$$

şeklinde bulunur. Aynı işlemleri BL_3 içinde uygularsak

$$BL_3 = \left\{X=(x,y)\in R^2 : d_T(X,L_2)=d_T(X,L_3)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_2) = \frac{|y-m_b x|}{\max\{|-m_b|,|1|\}} = m_b x-y$$

ve

$$d_T(X,L_3) = \frac{|y-m_a x|}{\max\{|-m_a|,|1|\}} = y-m_a x$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_2) = d_T(X,L_3) &\Longrightarrow m_b x-y=y-m_a x \\ &\Longrightarrow m_b x+m_a x=2y \\ &\Longrightarrow \frac{(m_b+m_a)}{2}x=y \end{aligned}$$

Sonuç olarak BL_3 doğrusunun denklemi

$$y = \frac{(m_b+m_a)}{2}x$$

şeklinde bulunur. BL_1, BL_2, ve BL_3 denklemlerinden oluşan lineer denklem sistemi çözülsün. BL_1 ve BL_2 doğruları ortak çözülürse

$$\begin{aligned}
\frac{m_c(1+m_b)}{1+m_c}x+\frac{y_a-m_cx_a}{1+m_c} &= \frac{m_c(1-m_a)}{1-m_c}x+\frac{y_a-m_cx_a}{1-m_c} \\
\frac{m_c(1+m_b)}{1+m_c}-\frac{m_c(1-m_a)}{1-m_c}x &= \frac{y_a-m_cx_a}{1-m_c}-\frac{y_a-m_cx_a}{1+m_c} \\
x\left(\frac{m_c(1+m_b)(1-m_c)-m_c(1-m_a)(1+m_c)}{(1+m_c)(1-m_c)}\right) &= \frac{(y_a-m_cx_a)(1+m_c)-(1-m_c)(y_a-m_cx_a)}{(1-m_c)(1+m_c)} \\
xm_c(m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)) &= 2m_cx_a(m_b-m_c) \\
x &= \frac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu x, BL_3 doğrusunda yerine yazlırsa y,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{(m_b+m_a)}{2}x \\
&= \frac{(m_b+m_a)}{2}\frac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\dfrac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b+m_a-2m_c-m_c(m_b-m_a)}=t$ olarak alınırsa $x=t$ ve $y=\dfrac{(m_b+m_a)}{2}t$ olacaktır ki $\left(t,\dfrac{(m_b+m_a)}{2}t\right)$ noktası Teorem 2.2 den $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezidir.

İki kenarı dikeysel doğrular ve diğer kenarı yataysal doğru üzerinde olan üçgenler içinde ispat benzer şekilde yapılabilir. □

Örnek 2.4 Köşe noktaları $(-2,4)$, $(4,8)$ ve orijin olan üçgenin taksi iç açıortay doğrularının ortak noktasını bulunuz.

Çözüm: Köşeleri $A=(-2,4)$, $B=(4,8)$ ve $C=(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $m_a=2$, $m_b=-2$, $m_c=\dfrac{2}{3}$dir. O halde üçgenimizin iki kenarı dikeysel üçüncü kenarıda dikeysel doğru üzerindedir. AB, AC ve BC kenarlarını üzerinde bulunduran L_1, L_2 ve L_3 doğrularının denklemleride $y=\dfrac{2}{3}(x-4)+8$, $y=-2x$ ve $y=2x$ dir. Taksi düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının tanımı kullanılarak taksi iç açıların açıortay doğruları BL_1, BL_2 ve BL_3 araştırılacak.

$$BL_1 = \left\{X=(x,y)\in R^2 : d_T(X,L_1)=d_T(X,L_2)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_1) = \frac{\left|y-\frac{2}{3}(x-4)-8\right|}{\max\left\{\left|-\frac{2}{3}\right|,|1|\right\}} = \frac{2}{3}(x-4)+8-y$$

ve

$$d_T(X,L_2) = \frac{|y+2x|}{\max\{|2|,|1|\}} = \frac{y+2x}{2}$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_1) = d_T(X,L_2) &\implies \frac{2}{3}(x-4)+8-y = \frac{y+2x}{2} \\ &\implies y = \frac{-2x}{9}+\frac{32}{9} \end{aligned}$$

Böylece BL_1 doğrusunun denklemi

$$y = \frac{-2x}{9}+\frac{32}{9}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde BL_2 doğrusunun denklemi

$$BL_2 = \left\{X=(x,y)\in R^2 : d_T(X,L_1) = d_T(X,L_3)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_1) = \frac{\left|y-\frac{2}{3}(x-4)-8\right|}{\max\left\{\left|-\frac{2}{3}\right|,|1|\right\}} = \frac{2}{3}(x-4)+8-y$$

ve

$$d_T(X,L_3) = \frac{|y-2x|}{\max\{|-2|,|1|\}} = \frac{y-2x}{2}$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_1) = d_T(X,L_3) &\implies \frac{2}{3}(x-4)+8-y = \frac{y-2x}{2} \\ &\implies \frac{2}{3}(x-4)+8+x = \frac{y}{2}+y \\ &\implies \frac{5}{3}x+\frac{16}{3} = \frac{3y}{2} \\ &\implies \frac{10}{9}x+\frac{32}{9} = y \end{aligned}$$

Böylece BL_2 doğrusunun denklemi

$$y = \frac{10}{9}x+\frac{32}{9}$$

şeklinde bulunur. Aynı işlemleri BL_3 içinde uygularsak

$$BL_3 = \left\{X = (x,y) \in R^2 : d_T(X,L_2) = d_T(X,L_3)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_2) = \frac{|y+2x|}{\max\{|2|,|1|\}} = \frac{y+2x}{2}$$

ve

$$d_T(X,L_3) = \frac{|y-2x|}{\max\{|-2|,|1|\}} = \frac{y-2x}{2}$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_2) = d_T(X,L_3) &\Longrightarrow \frac{y+2x}{2} = \frac{y-2x}{2} \\ &\Longrightarrow 4x = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Sonuç olarak BL_3 doğrusunun denklemi

$$x = 0$$

BL_1, BL_2, ve BL_3 denklemlerinden oluşan lineer denklem sistemi çözülürse $\left(0, \frac{32}{9}\right)$ noktası bulunur.

Teorem 2.2 de $\frac{2x_b(m_a - m_c)(m_a m_b)}{-m_a(1+m_c) + m_b(1-m_c) + 2m_a m_b} = t$ alınmıştı ve taksi iç teğet çemberin merkezi $M_I = \left(\frac{t}{2}\left(m_a^{-1} + m_b^{-1}\right), t\right)$ şeklinde bulunmuştu. Bu durumda verilen değer yerine yazıldığında t

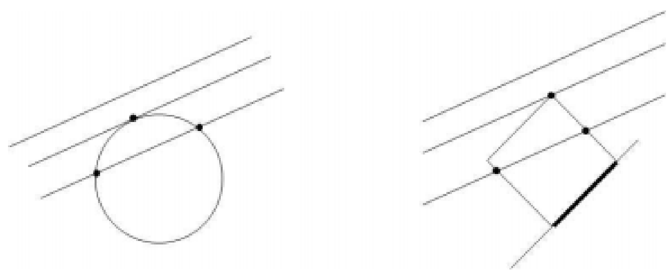
$$\begin{aligned} t &= \frac{2.4\left(2 - \frac{2}{3}\right)(2. - 2)}{-2\left(1 + \frac{2}{3}\right) - 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) - 2.2.2} \\ &= \frac{-\frac{128}{3}}{-\frac{10}{3} - \frac{2}{3} - 8} \\ &= \frac{-\frac{128}{3}}{-\frac{36}{3}} \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. O halde $M_I = \left(0, \frac{32}{9}\right)$ olarak bulunur bu da gösterir ki üçgenin taksi iç açı ortayların kesim noktası $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezidir.□

BÖLÜM 3

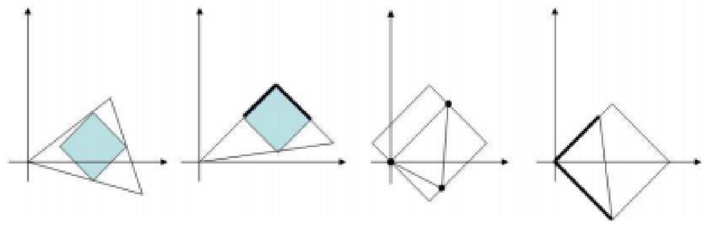
EN AZ BİR KENARI AYIRAÇ DOĞRU ÜZERİNDE BULUNAN BİR ÜÇGENİN TAKSİ İÇ TEĞET ÇEMBERİ VE TAKSİ ÇEVREL ÇEMBERİ

Bu bölümde (Ermiş, Gelişgen, Kaya 2012) esas alınarak, taksi düzlemde en az bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan bir üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberleri incelenmiştir. Öklidyen geometride bir doğru ile çember üç durumda bulunur. Bu durumlar, doğru çemberi kesmez, doğru çembere teğet yani tek noktada keser veya doğru çemberi iki noktada keser. Taksi düzlemde ise doğru ile çemberin kesiştikleri noktaların sayısı 0, 1, 2 yada ∞ dur (Bkz Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Doğru ve çemberin birbirine göre durumları

Bölüm 2 de, taksi düzlemde verilen bir üçgenin kenarlarına teğet olan taksi iç teğet çemberi ve üçgenin tüm köşelerinden geçen taksi çevrel çemberi ele alınmıştı. Bu bölümde ise kenarsal teğet kavramı tanımını kullanarak, en az bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde bulunan üçgenin taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberleri incelenecek. Önceki bölümde taksi çember ile dikeysel ya da yataysal doğrunun ortak tek bir noktası varsa, bu doğruların taksi çembere köşesel teğet olduğundan bahsedilmişti. Taksi çevrel çember, eğimleri ± 1 olan doğru parçalarının birleşimi olduğundan, kenarları her zaman ayıraç doğrular üzerinde olacaktır. Bir üçgenin kenarının eğimi $+1$ veya -1 ise bu kenar, taksi iç teğet çember ya da taksi çevrel çember ile bir doğru parçası boyunca çakışık olacaktır. Bu bölümde, bir doğru parçası tamamen ya da bir kısmı taksi çemberin bir kenarı üzerinde ise bu kavrama **kenarsal teğet** denilecektir (Ekmekçi, 2001). Bu tanım taksi düzlemde verilen bir üçgen için taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberlerinin oluşum durumlarının sayısını arttıracaktır. Bu tanım sebebiyle üçgenin en az bir kenarın ayıraç doğru üzerinde olması gerekmektedir (Bkz Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan üçgenler

Aşağıdaki teoremde, en az bir kenarı ayıraç doğrular üzerinde olan bir üçgenin, taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberi olması için gereken şartlar aranacak.

Teorem 3.1 *En az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde olan bir üçgenin her zaman taksi çevrel çemberi ve taksi iç teğet çemberi vardır.*

İspat $\overset{\Delta}{ABC}$ en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde olan bir üçgen olsun. Bu durumda iki ana durum söz konusudur.

1-) $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı ayıraç doğru üzerindedir (Bkz Şekil 3.3-a, Şekil 3.3-b).

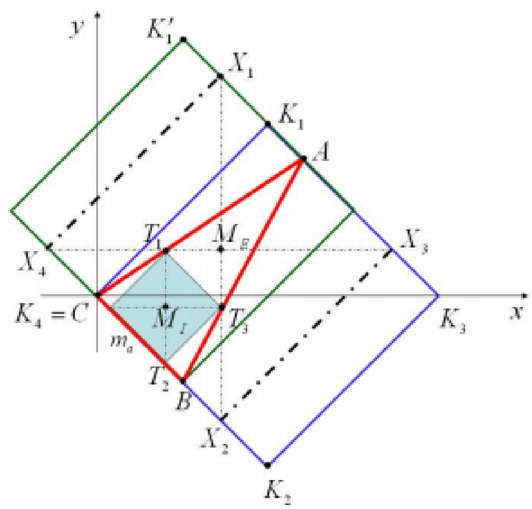
2-) $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı ayıraç doğru üzerindedir (Bkz Şekil 3.4).

Durum 1 : Taksi düzlemde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı ayıraç doğru üzerinde olsun. C köşesinin orijinde ve m_a nın, -1 (ya da 1) olduğu varsayılsın. Bu durumda BC kenarı $y=-x$ üzerindedir (Bkz Şekil 3.3). Bir taksi çevrel çember, üçgenin köşelerinden geçen eğimleri ∓ 1 olan doğru parçalarının bileşimidir. $m_a=-1$ ve üçgen bütünüyle taksi çevrel çemberin içinde kalacağından, üçgenin BC kenarı ile, taksi çevrel çemberin eğimi -1 olan kenarı, kenarsal teğet olacaktır. Bu durumda A köşesinin pozisyonuna göre iki alt durum oluşacaktır.

a-) A köşesi, BC yi içeren kenara göre çemberin karşı kenarı üzerindedir (Bkz Şekil 3.3-a).

Taksi çevrel çember üçgenin kenarlarından geçen ± 1 eğimli doğru parçalarının birleşimi ve üçgenin BC kenarının eğimi -1 olduğundan, üçgenin taksi çevrel çemberin içinde kalması için A köşesinden geçen -1 eğimli bir doğru çizilmelidir. Bu durumda aynı yarıçaplı ve BC

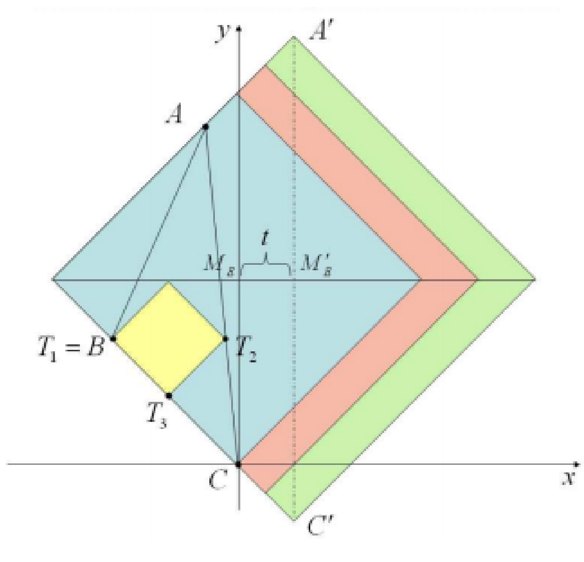
doğru parçası boyunca hareket eden sonsuz taksi çevrel çemberleri çizilebilir.



Şekil 3.3-a. Bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan aynı yarıçaplı sonsuz taksi çevrel çemberler ve iç teğet çember

b-) *A* köşesi, *BC* içeren kenara göre çemberin komşu kenarı üzerindedir (Bkz Şekil 3.3-b).

A köşesi, taksi çevrel çemberin *BC* yi içeren kenarının komşu kenarı üzerinde ise taksi çevrel çemberi oluşturmak için *A* noktasından $+1$ eğimli bir doğru çizilmelidir. Bu durumda merkezi yatay veya dikey doğrular boyunca hareket eden ve birbirinden farklı yarıçaplara sahip, sonsuz sayıda taksi çevrel çember oluşturulabilir. Bu alt durumdaki taksi çevrel çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığa **değişim miktarı** denilecek ve bu *t* olarak alınacak (Bkz Şekil 3.3-b).



Şekil 3.3-b. Bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan farklı yarıçaplı sonsuz taksi çevrel çemberler ve iç teğet çember

Taksi iç teğet çember, bir taksi çember ve tümüyle üçgenin içinde kalacağı için çember üçgenin AB, AC, ve BC kenarlarına sırasıyla köşesel, köşesel ve kenarsal teğettir. O halde üçgenin kenarlarına göre iki alt durum söz konusudur.

a-) Taksi iç teğet çemberin kenarı B veya C köşesinden geçer (Bkz Şekil 3.3.b).

BC kenarı -1 eğimli doğru üzerinde ve üçgenin AB ve AC kenarları dikeysel (yataysal) doğru üzerinde iken taksi iç teğet çemberin kenarlarının eğimleri ± 1 olduğu için çemberin bir köşesi üçgenin B köşesi olacatır. Bu noktaya T_1 denilsin. Taksi iç teğet çemberin tümüyle üçgenin içinde kalması gerektiğinden B köşesinden çizilen yatay doğrununun, üçgenin AC kenarını kestiği nokta, taksi çevrel çemberin ikinci köşesidir. Bu noktada T_2 olarak alınsın. T_1 ve T_2 noktalarından çizilen ± 1 eğimli doğruların kesiştikleri bölge bu üçgenin iç teğet çemberini oluşturur.

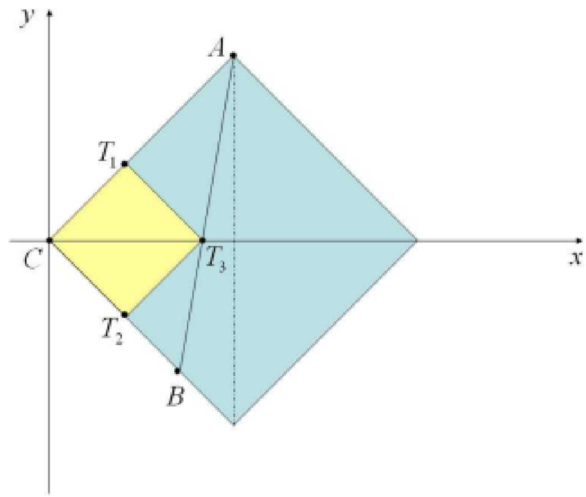
b-) Taksi iç teğet çemberin kenarı B ve C köşesinden geçmez.

Bu alt durumda üçgenin bir kenarı yataysal diğer kenarı ise dikeysel olmalıdır. Üçgenin AC kenarı yataysal BC kenarı dikeysel olarak alınsın. AC kenarı ile taksi iç teğet çember köşesel teğet olacağı için çemberin bu köşesine T_1 denilsin. İç teğet çemberin tamamıyla üçgenin içinde kalması gerektiğinden T_1 noktasından çizilen dikeysel doğrunun üçgenin BC kenarını kestiği yer taksi iç teğet çemberin ikinci köşesi olacaktır. Bu nokta da T_2 olarak alınsın. O halde T_1 ve T_2 noktalarından çizilen ± 1 eğimli doğruların kesiştikleri bölge bu üçgenin iç teğet çemberini oluşturur.

Durum 2 : Taksi düzlemde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı ayıraç doğru üzerinde olsun. C köşesini orijinde ve m_a nın -1, m_b nin 1 olduğunu varsayalım. Bu durumda BC kenarı $y = -x$ üzerinde ve AC kenarı $y = x$ üzerindedir (Bkz Şekil 3.4). Bir taksi çevrel çember, üçgenin köşelerinden geçen eğimleri ∓ 1 olan doğru parçalarının bileşimidir. $m_a = -1$ ve üçgen bütünüyle taksi çevrel çemberin içinde kalacağından, üçgenin BC kenarı ile, taksi çevrel çemberin eğimi -1 olan kenarı, kenarsal teğettir. $m_b = 1$ ve üçgen bütünüyle taksi çevrel çemberin içinde kalacağından, üçgenin AC kenarı ile, taksi çevrel çemberin eğimi 1 olan kenarı, kenarsal teğet olacaktır. Bu durumda $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni taksi çevrel çemberin içinde kalacak şekilde sonsuz sayıda farklı yarıçaplı çevrel çemberler çizilebilir (Bkz Şekil 3.4).

Taksi iç teğet çember, bir taksi çember ve tümüyle üçgenin içinde kalcağı için çember üçgenin AB, AC, ve BC kenarlarına sırasıyla köşesel, kenarsal ve kenarsal teğettir. Üçgenin BC

ve AC kenarları ayıraç doğrusu üzerinde olduğu için taksi iç teğet çemberin bir köşesi üçgenin C köşesi olacatır. Taksi iç teğet çemberin tümüyle üçgenin içinde kalması gerektiğinden C köşesinden çizilen yatay doğrununun, üçgenin AB kenarını kestiği nokta, taksi çevrel çemberin diğer köşesi olacaktır. Bu nokta T_3 olarak alınsın. Bu durumda C ve T_3 noktalarından çizilen ± 1 eğimli doğruların kesiştikleri bölge bu üçgenin iç teğet çemberini oluşturur (Bkz Şekil 3.4).



Şekil 3.4. İki kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan farklı yarıçaplı sonsuz taksi çevrel çemberler ve iç teğet çember

□

Aşağıdaki teoremde en az bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde bulunan bir üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberinin yarıçapları arasındaki ilişkileri bu üçgenin kenarlarının eğimleri yardımıyla inceleyeceğiz.

3.1 Taksi Çevrel Çember ve Taksi İç Teğet Çemberlerin Yarıçapları Arasındaki İlişki

Teorem 3.2 *$\overset{\Delta}{ABC}$ taksi düzlemde bir üçgen BC, AC ve AB kenarlarının eğimleri sırasıyla m_a, m_b ve m_c olsun. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin r yarıçaplı iç teğet çemberi, R yarıçaplı çevrel çemberi var ve t değişim miktarı ise*

$$\delta(m_a, m_b) = \begin{cases} m_a, & a > b \\ m_b, & a < b \end{cases}$$

iken

$$\rho(m_a, m_b, m_c) = \frac{|m_b - m_a||\delta(m_a,m_b) - m_c|}{\max\{|1+\delta(m_a,m_b)|,|1-\delta(m_a,m_b)|\}|\max\{m_a,m_b\}(1-m_c)+\min\{m_a,m_b\}(1+m_c)-2m_c|}$$

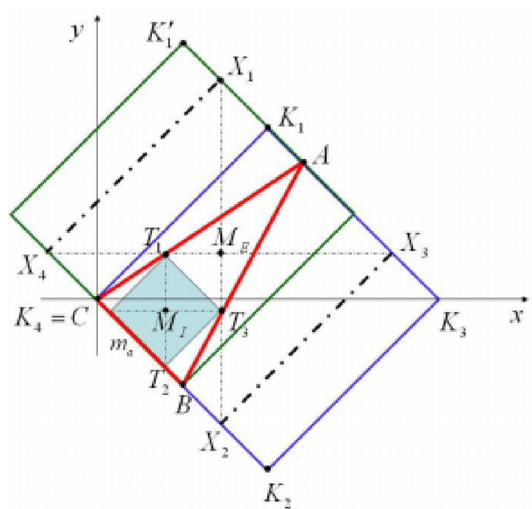
olmak üzere

$$\frac{\mathbf{r}}{2\mathbf{R}} = \begin{cases} \rho(m_a, m_b, m_c), & |m_a| \leq 1, |m_b| < 1 \text{ ve } |m_c| > 1 \\ \rho(-m_a^{-1}, -m_b^{-1}, -m_c^{-1}), & |m_a| \geq 1, |m_b| > 1 \text{ ve } |m_c| < 1 \end{cases}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{2(\mathbf{R}-\mathbf{t})} = \begin{cases} \rho(m_c, m_b, m_a), & |m_a| = 1, |m_b| < 1 \text{ ve } |m_c| < 1 \\ \rho(-m_c^{-1}, -m_b^{-1}, -m_a^{-1}), & |m_a| = 1, |m_b| > 1 \text{ ve } |m_c| > 1 \\ \rho(m_a, m_b, m_c), & |m_a| = 1, |m_b| = 1 \text{ ve } |m_c| < 1 \\ \rho(-m_a^{-1}, -m_b^{-1}, -m_c^{-1}), & |m_a| = 1, |m_b| = 1 \text{ ve } |m_c| > 1 \end{cases}$$

dir.

İspat Durum I : $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni bir kenarı ayıraç doğru, diğer kenarı yataysal doğru ve üçüncü kenarı dikeysel doğru üzerinde bulunan bir üçgen olsun. Teorem 3.1 de üçgenin olası bir pozisyonu gösterilmişti. $x_a > x_b > 0$, $y_a > 0 > y_b$ ve $m_a = -1$, $m_b < 1$, $m_c > 1$ olacak şekilde $A = (x_a, y_a)$ ve $B = (x_b, y_b)$ noktaları alınsın.



Şekil 3.5. Bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan aynı yarıçaplı sonsuz taksi çevrel çemberler ve iç teğet çember

Bu durumda taksi çevrel çemberin bir kenarı üçgenin BC kenarıyla çakışık ve üçgenin A köşesi, çemberin BC kenarını içeren kenarın karşısında olacaktır. O halde hepsi aynı yarıçapa sahip sonsuz sayıda taksi çevrel çemberler elde ederiz. Taksi çevrel çemberin bir köşesini C olarak alalım ve taksi çevrel çemberin üst köşesini K_1 kabul edelim. Bu durumda bu nokta, C noktasından geçen 1 eğimli doğru yani $y = x$ doğrusu ve A noktasından geçen -1 eğimli doğrunun ortak noktası olacağı için,

$$K_1 = \left(\frac{x_a + y_a}{2}, \frac{x_a + y_a}{2} \right)$$

dir. Benzer şekilde taksi çevrel çemberin alt köşesini B üst köşesini K_1' alalım. Bu durumda K_1' noktası $y = -x + x_a + y_a$ doğrusu üzerinde ve B noktasıyla apsisleri aynı olacağı için bu nokta

$$K_1' = (x_b, -x_b + x_a + y_a)$$

olarak elde edilir. Bütün taksi çevrel çemberlerin üst köşesine X_1 dersek her $\lambda \in [0,1]$ için $X_1 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_1'$ olacaktır (Bkz Şekil 3.5). K_1 ve K_1' noktalarını apsis veya oradinatları arasındaki uzaklığı p ile gösterisek.

$$p = \frac{x_a + y_a}{2} - x_b$$

şeklindedir. Buradan taksi çevrel çemberin tüm köşeleri aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\begin{aligned}
X_1 &= (\lambda p + x_b, -\lambda p + (-x_b + x_a + y_a)) \\
X_2 &= (\lambda p + x_b, -\lambda p - x_b) \\
X_3 &= \left(\lambda p + \frac{x_a + y_a}{2} + x_b, (1-\lambda)\, p\right) \\
X_4 &= ((1-\lambda)\, p, (1-\lambda)\, p)
\end{aligned}$$

Böylece $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin, X_i köşesine sahip olan taksi çevrel çemberinin merkezi X_1 ve X_2 nin orta noktası olup

$$M_E = (\lambda p + x_b, (1-\lambda)p)$$

dir. Ayrıca taksi çevrel çemberin yarıçapıda, X_1 ve M_E arasındaki uzaklıktan

$$\mathbf{R} = \frac{x_a + y_a}{2} = \frac{x_a\,(1+m_b)}{2}$$

olarak hesaplanır. Taksi iç teğet çemberinin üç köşesi, sırasıyla $y = m_c(x - x_a) + y_a$, $y = -x$ ve $y = m_b x$ denklemleriyle verilen $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları üzerindedir. T_1 ve T_2 sırsıyla $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğruları üzerinde olsun. $\gamma \in R^+$ için $T_1 = (\gamma, m_b\gamma)$ ve $T_2 = (\gamma, -\gamma)$ dir. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin, taksi iç teğet çemberinin merkezi T_1 ve T_2 noktalarının orta noktası olacağı için

$$M_I = \left(\gamma, \frac{(m_b - 1)\,\gamma}{2}\right)$$

dir. Taksi iç teğet çemberinin yarıçapı ise T_1 ve M_I arasınadki uzaklık olacağı için

$$\mathbf{r} = \frac{(m_b + 1)\,\gamma}{2}$$

olarak bulunur. Taksi iç teğet çemberinin üçüncü köşesi T_3 ve M_I nın ikinci bileşenleri aynıdır ve T_3 ile M_I arasındaki uzaklık iç teğet çemberinin yarıçapını verecektir. O halde

$T_3 = \left(w, \frac{(m_b-1)\gamma}{2}\right)$ noktasının birinci bileşeni

$$\begin{aligned}
|w-\gamma| + \left|\frac{(m_b-1)\gamma}{2} - \frac{(m_b-1)\gamma}{2}\right| &= d_T(M_I, T_3) \\
w-\gamma &= \frac{(m_b+1)\gamma}{2} \\
w &= \frac{(m_b+1)\gamma}{2} + \gamma \\
&= \frac{(m_b+3)\gamma}{2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $T_3 = \left(\frac{(m_b+3)\gamma}{2}, \frac{(m_b-1)\gamma}{2}\right)$ olduğundan ve bu nokta $y = m_c(x-x_a) + y_a$ üzerinde olduğundan nokta doğru denklemini sağlayacaktır. Bu sebeple T_3 noktası doğru denkleminde yazılırsa γ

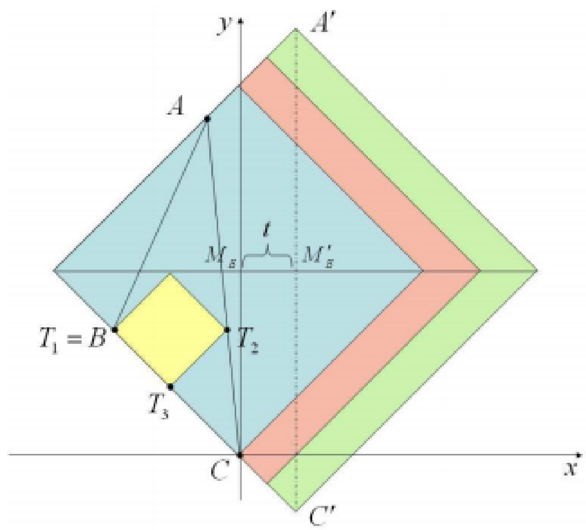
$$\begin{aligned}
y &= m_c(x-x_a) + y_a \\
\frac{(m_b-1)\gamma}{2} &= m_c\left(\frac{(m_b+3)\gamma}{2} - x_a\right) + y_a \\
\frac{(m_b-1)\gamma}{2} &= \frac{m_c(m_b+3)\gamma}{2} - x_a m_c + y_a \\
\frac{(m_b-1)\gamma}{2} - \frac{m_c(m_b+3)\gamma}{2} &= y_a - x_a m_c \\
\gamma\left(\frac{(m_b-1) - m_c(m_b+3)}{2}\right) &= x_a\left(\frac{y_a}{x_a} - m_c\right) \\
\gamma &= \frac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b - 1 - 3m_c - m_b m_c}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece **R** ve **r** arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \frac{(m_b+1)\gamma}{2} \\
&= \frac{(m_b+1)}{2} . \frac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b - 1 - 3m_c - m_b m_c} \\
&= \frac{(m_b+1)x_a(m_b-m_c)}{m_b - 1 - 3m_c - m_b m_c} \\
&= \frac{2\mathbf{R}(m_b-m_c)}{m_b - 1 - 3m_c - m_b m_c} \\
&= \frac{2\mathbf{R}(m_b-m_c)}{m_b - 3m_c - (1 + m_b m_c)}
\end{aligned}$$

l doğrusunun eğimi m ise bu doğrunun y-eksenine göre simetrisi bu doğrunun eğimini $-m$ ye dönüştürecektir. Bu sebeple $m_a = 1$, $m_b > -1$ ve $m_c < -1$ alındığı zamanda yukarıda bulunan yarıçapların ilişkisi geçerli kalır. $|m_a| = 1$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| > 1$ iken yarıçapların ilişkisinde m_a, m_b, m_c yerine $-m_a^{-1}, -m_b^{-1}, -m_c^{-1}$ değişikliği yapılırsa, $|m_a| = 1$, $|m_b| > 1$ ve $|m_c| < 1$ için yarıçapların ilişkisi bulunabilir.

Durum II : $\overset{\Delta}{ABC}$, $|m_a| = 1$, $|m_b| > 1$ ve $|m_c| > 1$ olan bir üçgen olsun (Bkz Şekil 3.6). $x_b < x_a < 0$ ve $0 < y_b < y_a$ olacak şekilde $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ ve $C = (0,0)$ noktalarını alalım.



Şekil 3.6. Bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan farklı yarıçaplı sonsuz taksi çevrel çemberler ve iç teğet çember

t değişim miktarı olarak kabul edilirse $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin, taksi çevrel çemberinin merkezi ve yarıçapı **t** parametresine bağlı olarak değişir. Burada **t,** x-eksenindeki değişim olduğundan M_E nin apsisi **t** olacaktır. Çevrel çemberin üst köşesi, A noktasından geçen 1 eğimli doğru ve $x = 0$ doğrusunun kesim noktasıdır. Çevrel çemberin üst köşesi ve C noktasının orta noktası M_E yi verecektir. O halde çevrel çemberin merkezi

$$M_E = \left(\mathbf{t}, \frac{-x_a + y_a}{2}\right)$$

dir. Taksi çevrel çemberin yarıçapı M_E ve C arasındaki uzaklıktan

$$\mathbf{R} = \mathbf{t} + \frac{-x_a + y_a}{2} = \mathbf{t} + \frac{x_a(m_b - 1)}{2}$$

şeklindedir. **R** nin son denkleminden $x_a = \dfrac{2(\mathbf{R} - \mathbf{t})}{(m_b - 1)}$ şeklinde bulunabilir. Taksi iç teğet çemberinin üç köşesi, sırasıyla $y = m_c(x - x_a) + y_a$, $y = -x$ ve $y = m_b x$ denklemleriyle verilen

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları üzerindedir. T_1 ve T_2 sırasıyla $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğruları üzerinde olsun. Bu durumda $T_1 = (x_b, y_b)$ ve $T_2 = (\frac{y_b}{m_b}, y_b)$ dir. Böylece $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin merkezi T_1 ve T_2 nin orta noktası olacaktır. Yani M_I

$$M_I = \left(\frac{x_b + \frac{y_b}{m_b}}{2}, y_b \right) = \left(\frac{x_b \left(m_b + \frac{y_b}{x_b} \right)}{2m_b}, y_b \right) = \left(\frac{x_b (m_b + m_a)}{2m_b}, y_b \right)$$

şeklindedir. Ayrıca T_1 ve M_I arasındaki taksi uzaklık iç teğet çemberinin yarıçapını verecektir. O halde $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} d_T (T_1, M_I) &= \left| \frac{x_b (m_b + m_a)}{2m_b} - x_b \right| + |y_b - y_b| \\ \mathbf{r} &= \frac{x_b (m_b + m_a)}{2m_b} - x_b \\ &= \frac{x_b (m_a - m_b)}{2m_b} \end{aligned}$$

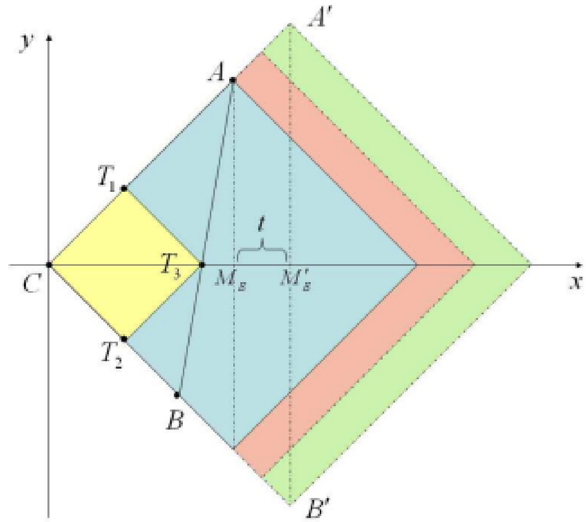
şeklide elde edilir. $m_c = \dfrac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$ olduğu için $x_b = x_a \left(\dfrac{m_c - m_b}{m_c - m_a} \right)$ dir. Böylece $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{r}$ arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{x_b (m_a - m_b)}{2m_b} \\ &= x_a \left(\frac{m_c - m_b}{m_c - m_a} \right) . \frac{(m_a - m_b)}{2m_b} \\ &= \frac{2 (\mathbf{R} - \mathbf{t})}{(m_b - 1)} . \left(\frac{m_c - m_b}{m_c - m_a} \right) . \frac{(m_a - m_b)}{2m_b} \\ &= \frac{2 (\mathbf{R} - \mathbf{t}) (m_c - m_b) (m_a - m_b)}{2m_b (m_b - 1) (m_c - m_a)} \end{aligned}$$

dir. m_a, m_b, m_c yerine sırasıyla $-m_a$, $-m_b$, $-m_c$ alındığı zamanda yukarıdaki ilişki yine geçerli kalır. $|m_a| = 1$, $|m_b| > 1$ ve $|m_c| > 1$ ilişkileri için m_a, m_b, m_c yerine $-m_a^{-1}, -m_b^{-1}, -m_c^{-1}$ alınırsa, $|m_a| = 1$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ durumları içinde yarıçapların ilişkisi bulunabilir.

Durum III : $\overset{\Delta}{ABC}$, $|m_a| = 1$, $|m_b| = 1$ ve $|m_c| > 1$ olan yani iki kenarı ayıraç doğru üzerinde olan bir üçgen olsun (Bkz Şekil 3.7). $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ ve $C = (0,0)$, $x_a > x_b > 0$ ve

$y_a > 0 > y_b$ olacak şekilde üç nokta alınsın.



Şekil 3.7. İki kenarı ayıraç doğrusu üzerinde olan farklı yarıçaplı sonsuz taksi çevrel çemberler ve iç teğet çember

Bu durumda, merkezleri AB kenarının eğimine göre dikey ya da yatay doğrular üzerinde hareket eden sonsuz sayıda taksi çevrel çemberler vardır. Yani $\mathbf{t}$, değişim miktarı olmak üzere, $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin $\mathbf{t}$ parametresine bağlı olarak değişen taksi çevrel çemberin merkezi

$$M_E \quad = \quad (x_a + \mathbf{t}, 0)$$

ve M_E ile C arasındaki taksi uzaklık çevrel çemberin yarıçapını verecektir. O halde $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} \quad = \quad x_a + \mathbf{t}$$

şeklindedir. Son denklemden $\mathbf{R} - \mathbf{t} = x_a$ olduğu açıktır. Taksi iç teğet çemberin üç köşesi, sırasıyla $y = m_c(x - x_a) + y_a$, $y = -x$ ve $y = x$ denklemleriyle verilen $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları üzerindedir. T_1 ve T_2 sırsıyla $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğruları üzerinde olsun. Bu durumda $\gamma \in R$ için $T_1 = (\gamma, \gamma)$ ve $T_2 = (\gamma, -\gamma)$ dır. Böylece $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin, taksi iç teğet çemberinin merkezi T_1 ve T_2 nin orta noktası olacağı için

$$M_I \quad = \quad (\gamma, 0)$$

ve T_1 ile M_I arasındaki taksi uzaklık iç teğet çemberinin yarıçapını vereceği için

$$\mathbf{r} \quad = \quad \gamma$$

olarak bulunur. $T_3 = (2\gamma, 0)$ ve T_3 noktası $y = m_c\,(x - x_a) + y_a$ üzerinde olduğundan bu nokta doğru denkleminde yazılırsa

$$\gamma \quad = \quad \frac{x_a\,(m_c - m_b)}{2m_c}$$

şeklinde bulunabilir. Böylece $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{t}$ arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \gamma \\ &= \frac{x_a(m_c-m_b)}{2m_c} \\ &= (\mathbf{R}-\mathbf{t})\frac{(m_c-m_b)}{2m_c} \\ &= \frac{(\mathbf{R}-\mathbf{t})|m_c-1|}{2|m_c|}\end{aligned}$$

Bu denklem, m_c yerine $-m_c$ alınırsa da geçerli kalacaktır. $|m_a|=1$, $|m_b|=1$ ve $|m_c|>1$ ilişkileri için m_a, m_b, m_c yerine $-m_a^{-1}, -m_b^{-1}, -m_c^{-1}$ alınırsa, $|m_a|=1$, $|m_b|=1$ ve $|m_c|<1$ durumları için gösterilebilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır. □

Örnek 3.1 Köşe noktaları $(2,2)$, $(1,-1)$ ve $(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç çemberinin yarıçapını ve taksi çevrel çemberinin yarıçapını bulunuz.

Çözüm : $A=(2,2)$, $B=(1,-1)$ ve $C=(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin kenarlarının eğimleri $m_a=-1$, $m_b=1$ ve $m_c=\dfrac{3}{2}$ olacaktır. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı ayıraç doğrusu üzerindedir ve sonsuz sayıda taksi çevrel çember bulabiliriz. Taksi çevrel çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığı $\mathbf{t}$ olarak alalım. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin merkezi

$$M_E = (2+t,0)$$

dir. M_E ve A noktası arasındaki taksi uzaklık $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin yarıçapını vereceği için

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}+2$$

olarak hesaplanır. $T_1=(k,k)$, $T_2=(k,-k)$ ve $T_3=(2k,0)$ noktalarını taksi iç teğet çemberin köşe noktaları olarak alalım. Bu durumda $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin merkezi

$$M_I = (k,0)$$

olarak bulunur. $T_3=(2k,0)$ noktası AB yani $y=\dfrac{3}{2}x-1$ deklemli doğru üzerinde bulunduğu için bu nokta doğru denkleminde yerine yazılırsa $k=\dfrac{1}{3}$ bulunur. Bulunan k değeri $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberin yarıçapını verecektir. Yani $\mathbf{r}=\dfrac{1}{3}$ tür. O halde $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{R}-\mathbf{t}$ arasındaki ilişki

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}-\mathbf{t}} = \frac{1}{6}$$

dir. Teorem 3.2 de verilen $\mathbf{r} = \dfrac{(\mathbf{R}-\mathbf{t})\,|m_c - 1|}{2\,|m_c|}$ ilişkisinde verilen değerler yerlerine yazıldığı zamanda

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}-\mathbf{t}} = \frac{1}{6}$$

şeklinde bulunacaktır.□

Sıradaki teoremde taksi iç teğet ve taksi çevrel çemberin merkezleri arasındaki ilişki verilecek.

3.2 Taksi Çevrel Çember Ve Taksi İç Teğet Çemberlerin Merkezleri Arasındaki Taksi Uzaklık

Teorem 3.3 *$\overset{\Delta}{ABC}$ taksi düzlemde en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde bulunan bir üçgen olsun. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin M_I merkezli, $\mathbf{r}$ yarıçaplı taksi iç teğet ve M_E merkezli, $\mathbf{R}$ yarıçaplı taksi çevrel çemberi varsa bu merkezler arası taksi uzaklık aşağıdaki gibi bulunur.*

$$d_T\,(M_E, M_I) = \mathbf{R}-\mathbf{r}$$

İspat $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ ve $C = (0,0)$ ayrıca $|m_a| = 1$, $|m_b| = 1$ ve $|m_c| > 1$ olan yani iki kenarı ayıraç doğru üzerinde olan bir ABC üçgeni alınsın (Bkz Şekil 3.7). Teorem 3.2 de $M_E = (x_a + \mathbf{t}, 0)$, $M_I = (\gamma, 0)$, $\mathbf{r} = \gamma$ ve $\mathbf{R} = x_a + \mathbf{t}$ olarak bulunacağı gösterilmişti. O halde çemberlerin merkezler arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} d_T\,(M_I, M_E) &= |x_a + \mathbf{t} - \gamma| + |0-0| \\ &= x_a + \mathbf{t} - \gamma \\ &= \mathbf{R}-\mathbf{r} \end{aligned}$$

şeklindedir. (Teorem 3.2 de verilen M_I ve M_E değerleri kullanılarak diğer durumlarda gösterilebilir.) □

Örnek 3.2 Köşe noktaları $(2,2)$, $(4,-4)$ ve $(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç çemberi ve taksi çevrel çemberinin merkezleri arasındaki taksi uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $A = (2,2)$, $B = (4,-4)$ ve $C = (0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin kenarlarının eğimleri $m_a = -1$, $m_b = 1$ ve $m_c = -3$ olacaktır. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı ayıraç doğrusu üzerindedir ve sonsuz sayıda taksi çevrel çember bulabiliriz. $\mathbf{t}$ taksi çevrel çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklık iken $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin merkezi

$$M_E = (\mathbf{t}+4,0)$$

dir. M_E ve A noktası arasındaki taksi uzaklık $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi çevrel çemberinin yarıçapını vereceği için

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}+4$$

olarak hesaplanır. $T_1=(k,k)$, $T_2=(k,-k)$ ve $T_3=(2k,0)$ noktaları taksi iç teğet çemberin köşe noktaları olarak alınsın. Bu durumda $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin merkezi

$$M_I = (k,0)$$

olarak bulunur. $T_3=(2k,0)$ noktası AB yani $y=-3x+8$ denklemli doğru üzerinde bulunduğu için bu nokta doğru denkleminde yerine yazılırsa $k=\frac{4}{3}$ bulunur. Bulunan k değeri $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin yarıçapını verecektir. O halde M_I ve M_E arasındaki taksi uzaklık

$$\begin{aligned} d_T(M_I,M_E) &= \left|\mathbf{t}+4-\frac{4}{3}\right|+|0-0| \\ &= \mathbf{t}+\frac{8}{3} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Teorem 3.3 de verilen

$$d_T(M_I,M_E) = \mathbf{R}-\mathbf{r}$$

ilişkisinde verilen değerler yerlerine yazıldığı zaman da

$$d_T(M_I,M_E) = \mathbf{t}+\frac{8}{3}$$

şeklinde bulunacaktır.□

Aşağıdaki teoremde, en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde bulunan bir üçgenin taksi iç açı ortay doğrularının kesişim noktasının, bu üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi olduğu gösterilmiştir.

3.3 Taksi İç Açıortay Doğrularının Kesim Noktası

Teorem 3.4 *$\overset{\Delta}{ABC}$ en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde bulunan bir üçgen olsun. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberi varsa iç teğet çemberin merkezi $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin iç açı ortaylarının kesişim noktasıdır.*

İspat BC, AC ve AB kenarlarının eğimleri sırasıyla m_a, m_b ve m_c olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni alınsın. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin en az bir kenarı ayıraç doğru üzerinde ise üçgenin kenarlarının eğimlerine göre altı farklı durum vardır ve bunlar,

i) $|m_a| = 1$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| > 1$

ii) $|m_a| = 1$, $|m_b| > 1$ ve $|m_c| < 1$

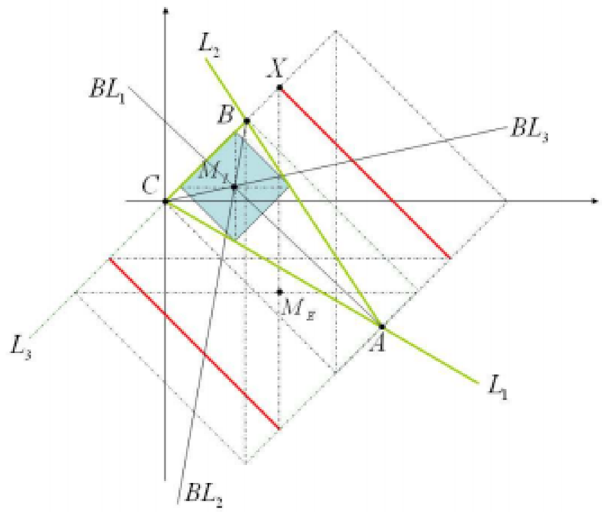
iii) $|m_a| = 1$, $|m_b| > 1$ ve $|m_c| > 1$

iv) $|m_a| = 1$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$

v) $|m_a| = 1$, $|m_b| = 1$ ve $|m_c| > 1$

vi) $|m_a| = 1$, $|m_b| = 1$ ve $|m_c| < 1$,

Durum i) $\overset{\Delta}{ABC}$, $|m_a| = 1$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| > 1$ olan bir üçgen olsun. $x_a > x_b > 0$ ve $y_b > 0 > y_a$ olan $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ ve $C = (0,0)$ noktaları alınsın (Bkz Şekil 3.8).



Şekil 3.8. En az bir kenarı ayıraç doğrusu üzerinde bulunan bir üçgenin taksi iç açıortay doğrularının kesim noktası

L_1, L_2 ve L_3 sırasıyla AC, AB ve BC doğrularını üzerinde bulunduran doğruları göstersin. L_1, L_2 ve L_3 doğrularının denklemleri sırasıyla $y = m_b x$, $y = m_c(x - x_a) + y_a$ ve $y = -x$ olacaktır. Taksi düzlemde bir noktanın doğruya olan uzaklık tanımı kullanılarak, taksi iç açıortay doğruları BL_1, BL_2 ve BL_3 aşağıdaki gibi bulunur.

$$BL_1 = \left\{X = (x,y) \in R^2 : d_T(X,L_1) = d_T(X,L_2)\right\};$$

olduğu için,

$$d_T(X,L_1) = \frac{|y - m_b x|}{\max\{|-m_b|,|1|\}} = y - m_b x$$

ve

$$d_T(X,L_2) = \frac{|y - m_c(x - x_a) - y_a|}{\max\{|-m_c|,|1|\}} = \frac{y - m_c(x - x_a) - y_a}{m_c}$$

denklemlerinin eşitlenmesinden BL_1 doğrusunun denklemi,

$$y = \frac{m_c(m_b - 1)}{m_c - 1}x + \frac{x_a(m_c - m_b)}{m_c - 1}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde BL_2 ve BL_3 denklemleri sırasıyla,

$$y = \frac{2m_c}{1 + m_c}x + \frac{x_a(m_c - m_b)}{m_c + 1} \quad \text{ve} \quad y = \frac{1 + m_b}{2}x \ \text{ dir.}$$

BL_1, BL_2 ve BL_3 denklemlerinden oluşan lineer denklem sistemleri çözülürse, çözüm BL_1, BL_2 ve BL_3 doğrularının geçtiği ortak nokta olur.

$$\left(\frac{2x_a(m_b - m_c)}{m_b - 3m_c - 1 - m_b m_c}, \frac{x_a(m_b - m_c)(m_b - 1)}{m_b - 3m_c - 1 - m_b m_c}\right)$$

Teorem 3.2 de $\dfrac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b-3m_c-1-m_bm_c}=\gamma$ olarak bulunmuştu. O halde BL_1, BL_2 ve BL_3 doğrularının geçtiği ortak noktayı $\left(\gamma,\dfrac{\gamma(m_b-1)}{2}\right)$ şeklinde yazabiliriz. $\left(\gamma,\dfrac{\gamma(m_b-1)}{2}\right)$ noktasının $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin merkezi olduğuda teorem 3.2 de gösterilmiştir.

Diğer durumların ispatı benzer şekilde verilebilir. □

Örnek 3.3 Köşe noktaları $(1,1)$, $(2,-2)$ ve $(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenin taksi iç açıortay doğrularının kesim noktasını bulunuz.

Çözüm : $A=(1,1)$, $B=(2,-2)$ ve $C=(0,0)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin kenarlarının eğimleri $m_a=-1$, $m_b=1$ ve $m_c=-3$ olacaktır. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin iki kenarı ayıraç doğrusu üzerindedir. L_1, L_2 ve L_3 sırasıyla AC, AB ve BC doğrularını üzerinde bulunduran doğruları göstersin. L_1, L_2 ve L_3 doğrularının denklemleri sırasıyla $y=x$, $y=-3x+4$ ve $y=-x$ olacaktır. Taksi düzlemde bir noktanın doğruya olan uzaklık tanımı kullanılarak, taksi iç açıortay doğruları BL_1, BL_2 ve BL_3 aşağıdaki gibi bulunur.

$$BL_1 = \left\{X=(x,y)\in R^2 : d_T(X,L_1)=d_T(X,L_2)\right\};$$

olduğu için,

$$d_T(X,L_1) = \frac{|y-x|}{\max\{|-1|,|1|\}} = y-x$$

ve

$$d_T(X,L_2) = \frac{|y+3x-4|}{\max\{|3|,|1|\}} = \frac{y+3x-4}{3}$$

denklemlerinin eşitlenmesinden BL_1 doğrusunun denklemi,

$$y = 3x-2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde BL_2 doğrusunun denklemi

$$BL_2 = \left\{X=(x,y)\in R^2 : d_T(X,L_1)=d_T(X,L_3)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_1) = \frac{|y-x|}{\max\{|-1|,|1|\}} = y-x$$

ve

$$d_T(X,L_3) = \frac{|y+x|}{\max\{|1|,|1|\}} = -y-x$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_1) = d_T(X,L_3) &\Longrightarrow y-x=-y-x \\ &\Longrightarrow y=0 \end{aligned}$$

Böylece BL_2 doğrusunun denklemi

$$y = 0$$

şeklinde bulunur. Aynı işlemleri BL_3 içinde uygularsak

$$BL_3 = \left\{X = (x,y) \in R^2 : d_T(X,L_2) = d_T(X,L_3)\right\}$$

olduğu için

$$d_T(X,L_2) = \frac{|y+3x-4|}{\max\{|3|,|1|\}} = \frac{y+3x-4}{3}$$

ve

$$d_T(X,L_3) = \frac{|y+x|}{\max\{|1|,|1|\}} = -y-x$$

denklemlerinin eşitlenmesinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} d_T(X,L_2) = d_T(X,L_3) &\Longrightarrow \frac{y+3x-4}{3} = -y-x \\ &\Longrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x+1 \end{aligned}$$

Sonuç olarak BL_3 doğrusunun denklemi

$$y = -\frac{3}{2}x+1$$

şeklinde hesaplanır. BL_1, BL_2, ve BL_3 denklemlerinden oluşan lineer denklem sistemi çözülürse $\left(\frac{2}{3},0\right)$ noktası bulunur.

Teorem 3.2 de $\frac{2x_a(m_b-m_c)}{m_b-3m_c-1-m_bm_c} = \gamma$ olarak bulunmuştu ve $\left(\gamma, \frac{\gamma(m_b-1)}{2}\right)$ noktasının $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin merkezi olduğu gösterilmişti. Verilen değerleri γ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma = \frac{2}{3}$ olarak bulunur. O halde $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç teğet çemberinin merkezi $\left(\frac{2}{3},0\right)$ şeklinde elde edilir ki bu durumda $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin taksi iç açıortaylarının kesim noktası bu üçgenin taksi iç teğet çemberinin merkezi olarak bulunur.$\square$

BÖLÜM 4

GÖRÜŞ VE ÖNERİLER

Taksi düzlemde verilen bir üçgenin taksi iç teğet çemberi ve taksi çevrel çemberinin oluşum durumları, çemberlerin merkezleri arasındaki taksi uzaklık ve yarıçapları arasındaki ilişkiler bu çalışmada incelenmiştir. Diğer bir ifadeyle Öklidiyen olmayan bir geometri çeşidinde alınımış bir üçgenin iç teğet ve çevrel çemberleri araştırılmıştır. Öklidyen olmayan başka bir geometri çeşidinde acaba iç teğet ve çevrel çemberlerin arasında, taksi geometrisine benzer bir ilişki bulunabilir mi sorusu merak uyandırıcıdır. Öklidyen olmayan ve taksi düzleminden farklı olan çin dama düzleminde verilen bir üçgenin, iç teğet ve çevrel çemberlerin oluşum durumunun, yarıçapları arasındaki ilişkilerin ve bu çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklıkların incelenmesi ilgi çekici olabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z., Kaya, R., 2004, On the Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic J., Vol. 27, No. 5, 521-532.

Çolakoğlu, H.B., 2005, Bazı Oklidyen Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri, OGÜ Yüksek Lisans Tezi 113s.

Ekmekçi, S., 2001, Taksi Çemberiyle İlgili Özellikler, OGÜ Doktora Tezi, 131s.

Ermiş, T.,Gelişgen Ö., Kaya R., 2012, On Taxicab Incircle and Circumcirle of a Triangle, KoG, Vol.16, 3-12.

Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, I., Özcan, M., 2000, General Equation for Taxicab Conics and Their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 135-148.

Kaya, R., 2006, Area Formula for Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon Journal, Vol 12, No.4, 219-220.

Kocayusufoğlu, İ., Özdmar, E., 1998, İsometries of Taxicab Geometry, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series. Al., V47., pp. 73-83.

Krause, E. F.,1986, Taxicab Geometry : An Adventure in Non-Euclidean Geometry, Dover Publications, Inc., New York.

Menger, K.,1952, You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, III.

Özcan, M., Kaya, R., 2002, On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, Missouri J. of Math. Sci.,14, 107-117.