

Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine

Nurullah Sezgin

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Şubat 2014

On Inversion In The Euclidean Geometry and Taxicab Geometry

Nurullah Sezgin

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics and Computer Science

February 2014

# Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine

Nurullah Sezgin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Münevver Özcan

Şubat 2014

## ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Nurullah Sezgin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

**İkinci Danışman** : -

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

**Üye** : Prof. Dr. Ziya AKÇA

**Üye** : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

**Üye** : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

**Üye** : Doç. Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmada Öklidyen Düzlem üzerinde tanımlı Evritim (Inversion) dönüşümü incelenmiştir.

İlk bölümde Evritimin tanımı ve genel özellikleri verildikten sonra bir noktanın evriği sentetik ve analitik olarak gösterilmiştir. Daha sonra sırasıyla doğruların, çemberlerin ve açılarının evrikleri incelenip bunlarla ilgili bazı önemli teoremlere yer verilmiştir. Son olarak Çifte Oran kavramı üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde ise öncelikle gerekli bazı tanımlara yer verilmiştir. Ardından Öklidyen düzlemdeki evritim ile ilgili kavramların, Taksi düzlemi için karşılıkları T-evritim adı altında araştırılmıştır. Öklidyen düzlemde bir noktanın evriğini inşa ederken kullanılan sentetik yöntem, Taksi düzleminde kullanılamamıştır. Bu sebeple yeni bir yöntem belirlenmiş ve bir noktanın T-evriği ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son olarak ise doğruların T-evriği üzerinde çalışılmıştır.

Taksi Düzleminde Öklid düzlemine göre daha ayrıntılı bir inceleme yapmak gerektiğinden ikinci bölümde nokta ve doğrunun T-evriğini incelemekle yetinilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Evritim, T-evritim

## SUMMARY

In this thesis, inversion which is defined in the Euclidean plane was examined.

In the first chapter after definition and general properties of inversion are given, inverse of a point was synthetically and analytically examined. Then respectively inverse of lines, circles and angles were searched and some important theorems related with these subjects were mentioned. At last cross ratio was emphasized.

In the second chapter firstly some necessary definitions were given. Then concepts of inversion which are defined in The Euclidean plane were investigated in Taxicab plane and denoted by T-inversion. Sythetic method used for building inverse of a point on Euclidean plane couldn't be used on Taxicab plane. Thus, a new method was designated and analysed T-inverse of a point in deed. Finally, T-inverse of line was studied.

According to Euclidean plane, on Taxicab plane subjects must be examined detailed. Therefore in the second chapter , only inverse of point and line was studied.

**Keywords:** Inversion, T-inversion

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, akademik anlamda bilgi ve fikirleriyle bana yön vererek beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Sayın Prof. Dr. Münevver Özcan

hocama ve her türlü desteği esirgemedi den fedakarlıkta bulunan aileme teşekkür ederim.

Eskişehir 2014

Nurullah Sezgin

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	v
<b>SUMMARY</b> .....	vi
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	vii
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	ix
<b>GİRİŞ</b> .....	xii
<b>1. ÖKLİDYEN DÜZLEMDE EVRİTİM</b> .....	1
1.1 Evritim .....	1
1.2 Bir Noktanın Evriği .....	3
1.3 Bir Noktanın Evriğinin Analitik Olarak İncelenmesi .....	4
1.4 Doğruların Evriği .....	6
1.5 Çemberlerin Evriği .....	10
1.6 Açıların Evriği .....	17
1.7 Evritimin Uzaklık ile İlişkisi .....	21
<b>2. TAKSİ DÜZLEMDE EVRİTİM</b> .....	25
2.1 Taksi Evritim (T-Evritim) .....	28
2.2 Bir Noktanın T-Evriği .....	32
2.3 Bir Noktanın T-Evriğinin Analitik Olarak İncelenmesi .....	41
2.4 Bir Noktanın T-Evriğini İnşa Ederken Kullanılan Sentetik Yöntemin Analitik Olarak İncelenmesi .....	42
2.5 Doğruların T-Evriği .....	51
<b>SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	58
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ</b> .....	59



## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 $\mathcal{C}$ evritim çemberi, $P$ noktası ve evriği olan $P'$ noktası.....	2
1.2 $\mathcal{C}$ nin içindeki bir $P$ noktasının evriği .....	3
1.3 $\mathcal{C}$ nin dışındaki bir $P$ noktasının evriği .....	4
1.4 $O, P$ ve $P'$ noktalarının koordinatları .....	4
1.5 (a) $P$ ve $Q$ noktalarının her ikisi de $\mathcal{C}$ nin içinde ise $\triangle OPQ$ ve $\triangle OQ'P'$ üçgenlerinin benzerliği .....	6
1.5 (b) $P$ ve $Q$ noktalarının biri $\mathcal{C}$ nin içinde diğeri dışında ise $\triangle OPQ$ ve $\triangle OQ'P'$ üçgenlerinin benzerliği .....	6
1.6 (a) $\mathcal{C}$ ile ayrık olan $\ell$ doğrusunun evriği .....	8
1.6 (b) $\mathcal{C}$ ye teğet olan $\ell$ doğrusunun evriği.....	8
1.6 (c) $\mathcal{C}$ yi iki noktada kesen $\ell$ doğrusunun evriği .....	8
1.7 $\alpha$ çemberine $O$ noktasında teğet olan $\ell$ doğrusunun evriği .....	9
1.8 $O$ noktasından geçmeyen bir çemberin evriği .....	11
1.9 (a) $\mathcal{C}$ ye teğet olan $\alpha$ çemberinin evriği .....	12
1.9 (b) $\mathcal{C}$ ile iki noktada kesişen $\alpha$ çemberinin evriği.....	12
1.9 (c) $\mathcal{C}$ ye dik olan $\alpha$ çemberinin evriği .....	12
1.9 (d) $\mathcal{C}$ ile aynı merkeze sahip olan $\alpha$ çemberinin evriği.....	12
1.10 $\mathcal{C}$ ye dik olan çemberin evriği .....	14
1.11 Sonuç 1.5.7.....	15
1.12 $O$ noktasının $\ell$ üzerinde olduğu durum .....	16
1.13 $O$ noktasının $\ell$ üzerinde olmadığı durum .....	17
1.14 Çember yayına $P$ noktasında teğet olan ışın .....	18
1.15 $\gamma(P, U)$ çember yayı ve $\overline{PQ}$ ışını arasındaki açı .....	18
1.16 $\gamma(P, U)$ ve $\gamma'(P, D)$ çember yayları arasındaki açı .....	19
1.17 $\gamma(P, U)$ ve $\overline{PP'}$ arasındaki açının, $\gamma'(P', U')$ ve $\overline{P'P}$ arasındaki açığa eşitliği..	20
1.18 $\gamma_1(P, U_1)$ ve $\gamma_2(P, U_2)$ arasındaki açının, $\gamma_1'(P', U_1')$ ve $\gamma_2'(P', U_2')$ arasındaki açığa eşitliği.....	21

## ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.19 İki nokta arasındaki Öklidyen uzaklığın evriği .....	22
2.1 İki nokta arasındaki Öklidyen uzaklık .....	25
2.2 İki nokta arasındaki Taksi uzaklığı .....	26
2.3 $O$ merkezli $r$ yarıçaplı bir taksi çemberi.....	27
2.4 Analitik düzlemde doğru çeşitleri .....	28
2.5 1.Durum: $\overline{OP}$ yatay bir doğru iken $\mathcal{C}_r$ nin dışındaki bir $P$ noktasının T-evriği.....	30
2.6 2.Durum: $\overline{OP}$ ayıraç doğrusu iken $\mathcal{C}_r$ nin dışındaki bir $P$ noktasının T-evriği.....	31
2.7 3.Durum: $\overline{OP}$ yataysal bir doğru iken $\mathcal{C}_r$ nin dışındaki bir $P$ noktasının T-evriği.....	32
2.8 İki üçgenin benzerliği.....	33
2.9 Taksi Düzleminde benzer olmayan iki üçgen .....	34
2.10 Taksi Düzleminde benzer iki üçgen .....	35
2.11 $P$ , $\mathcal{C}_r$ nin dışında ve $O$ merkezinden geçen yatay doğru üzerinde bir nokta ise T-evriğinin inşası .....	37
2.12 $P$ , $\mathcal{C}_r$ nin dışında ve $O$ merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta ise T-evriğinin inşası.....	38
2.13 $P$ , $\mathcal{C}_r$ nin içinde ve $O$ merkezinden geçen dikey doğru üzerinde bir nokta ise T-evriğinin inşası .....	39
2.14 $P$ , $\mathcal{C}_r$ nin içinde ve $O$ merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta ise T-evriğinin inşası.....	40
2.15 $P=(4,1)$ noktasının T-evriğinin inşası .....	48
2.16 $P=(-1,-1/2)$ noktasının T-evriğinin inşası .....	50
2.17 $\mathcal{C}_r$ ile ayrık dikey doğrulardan biri olan $d$ doğrusunun T-evriği .....	52
2.18 $\mathcal{C}_r$ ye teğet dikey doğrulardan biri olan $d$ doğrusunun T-evriği .....	53

## ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.19 $\mathcal{C}_r$ yi iki noktada kesen dikey doğrulardan biri olan $d$ doğrusunun T-evriği	53
2.20 $\mathcal{C}_r$ ile ayrık ve ayıraç doğrularından biri olan $d$ doğrusunun T-evriği.....	54
2.21 $\mathcal{C}_r$ nin bir kenarı üzerinde bulunan ve ayıraç doğrularından biri olan $d$ doğrusunun T-evriği .....	55
2.22 $\mathcal{C}_r$ yi iki noktada kesen ve ayıraç doğrularından biri olan $d$ doğrusunun T-evriği.....	55
2.23 $\mathcal{C}_r$ ile ayrık dikeysel doğrulardan biri olan $d$ doğrusunun T-evriği.....	56
2.24 $\mathcal{C}_r$ ye teğet dikeysel doğrulardan biri olan $d$ doğrusunun T-evriği.....	57
2.25 $\mathcal{C}_r$ yi iki noktada kesen dikeysel doğrulardan biri olan $d$ doğrusunun T-evriği.....	57

## GİRİŞ

Öklidyen Düzlem üzerinde tanımlı Evritim (Inversion) dönüşümü bu çalışmanın konusunu oluşturmaktadır.

İlk bölümde Öklidyen Düzlem için Evritimin tanımı ve genel özellikleri verildikten sonra noktanın, doğrunun, çemberin ve açının evriği verilip, ardından uzaklıkla evritimin ilişkisinden bahsedilmiştir. İlk bölüm varlığı bilinen kavramların araştırılması ve belli bir düzen içinde sunulmasından ibarettir.

İkinci bölüm ise Öklidyen Düzlem için Evritim ile ilgili bilinen kavramların Taksi Düzlemine aktarılmaya çalışılmasıdır. Bunun için gerekli bazı tanımlara yer verilecektir. Taksi düzleminde evritim T-evritim adı altında araştırılmıştır. Öklidyen düzlemde bir noktanın evriğini inşa ederken kullanılan sentetik yöntem, Taksi düzleminde kullanılamamıştır. Bu sebeple yeni bir yöntem belirlenmiş ve bir noktanın T-evriği ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son olarak ise doğruların T-evriği üzerinde çalışılmıştır.

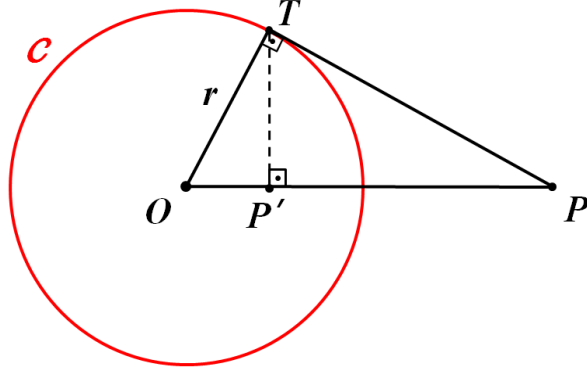
## 1.ÖKLİDYEN DÜZLEMDE EVRİTİM (İNVERSİYON)

### 1.1 Evritim

Evritim (Evirtim), İversive Geometri içerisindeki İversion kavramının Türkçe karşılığıdır. Öklid Düzlemindeki dönüşümlerin bir tür çalışması olan Evritim, çember üzerinde tanımlı olduğundan "Çemberlerde Evritim" olarak da adlandırılır. Evritim çembere göre yansıma olarak da düşünülebilir. Evritim açıları ve çifte oramı koruduğu gibi çemberi çembere, çemberi doğruya ya da doğruyu çembere dönüştürebilir. Daha önce çalışılmış konulardan farklı dönüşüm örneklerine sahip olan evritimi, geometrideki bir çok problemin çözümünde uygulamak mümkündür.

**Notasyon:**  $O$  merkezli  $r$  yarıçaplı çember  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$  olsun. Diğer çemberlerden ayırt edilebilmesi için Evritim Çemberi  $\mathcal{C}$  ile gösterilmektedir. Diğer çemberler  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  olarak adlandırılmaktadır.

**Tanım 1.1.1:**  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$  çemberine göre *Evritim*,  $I_{O,r}$  ile gösterilsin. Her  $P \neq O$  için,  $d_E(O, P) d_E(O, P') = r^2$  koşulunu sağlayan  $\overrightarrow{OP}$  ışını üzerindeki  $P'$  noktasına  $P$  nin *evriği* denir ve  $I_{O,r}(P) = P'$  şeklinde gösterilir.  $O$  noktasına *evritim merkezi (kutbu)*,  $\mathcal{C}$  çemberine *evritim çemberi*,  $r$  yarıçapına *evritim yarıçapı*,  $r^2$  sayısına da *evritim kuvveti* denir (Yağcı, 2006) (Şekil 1.1).



Şekil 1.1.  $\mathcal{C}$  evritim çemberi,  $P$  noktası ve evriği olan  $P'$  noktası

Bir  $P$  noktasının evriği  $P'$  olduğunda,  $P'$  noktasının evriğinin de  $P$  olması gerektiği  $d_E(O, P) d_E(O, P') = r^2$  koşulundan kolayca görülebilir. Bu da yarı dönme ve simetrilere benzer olarak evritim dönüşümünün involusyonun da 2 olduğunu gösterir.

$P$  noktası eğer  $\mathcal{C}$  nin iç bölgesinde ise  $d_E(O, P) < r$  dir.

$$d_E(O, P) d_E(O, P') = r^2$$

olması için  $d_E(O, P') > r$  olmalıdır. Bu sebeple evritim çemberinin içinde bulunan noktaların evrikleri çemberin dışında olur. Benzer şekilde evritim çemberinin dışında kalan noktaların evriklerinin çemberin içinde yer aldığı söylenebilir.

Eğer  $P$  noktası  $\mathcal{C}$  nin üzerinde ise  $d_E(O, P) = r$  dir.  $d_E(O, P) d_E(O, P') = r^2$  koşulunun sağlanması için  $d_E(O, P') = r$  olması gerekir. Böylelikle  $P = P'$  olur. Yani evritim çemberi üzerinde bulunan bir noktanın evriği yine kendisi olmaktadır. Bu önermenin tersi de sağlanır.  $P = P'$  olsun. Buradan  $(d_E(O, P))^2 = r^2$  ve dolayısıyla  $d_E(O, P) = r$  elde edilir. Bu da  $P$  noktasının evritim çemberi üzerinde bulunduğunun bir göstergesidir.

Evritim  $O$  noktasında tanımlı değildir. Dolayısıyla tanım kümesi düzlemin tamamını içermez. Ayrıca evritim örten de değildir. Çünkü  $I_{O,r}(P) = O$  olacak şekilde bir  $P$  noktası yoktur. Bu tür eksiklikleri gidermek için düzleme  $\infty$  noktası (sonsuzdaki bir nokta) ilave edilerek düzlem genişletilmektedir.  $I_{O,r}(O) = \infty$  ve  $I_{O,r}(\infty) = O$  şek-

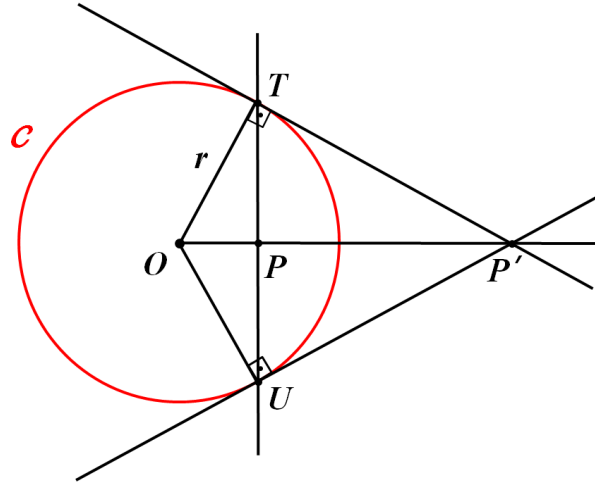
linde tanımlandığında  $O$  ve  $\infty$  noktaları birbirine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla Evritim genişletilmiş düzlemin bir dönüşümü olur.

## 1.2 Bir Noktanın Evriği

Evritim çemberi üzerinde bulunan noktalar ile  $O$  noktasının evriği daha önce incelendiğinden, bu kısımda evritim çemberi içindeki  $O$  dan farklı noktalar ile çemberin dışındaki noktaların evrikleri araştırılmaktadır.

### 1.2.1. $P$ noktasının $\mathcal{C}$ nin içinde olması halinde evriğinin inşası

$P$  noktası  $\mathcal{C}$  nin içinde  $O$  dan farklı bir nokta olsun.  $\overrightarrow{OP}$  ışımına  $P$  noktasında dik olacak şekilde bir doğru çizilsin. Bu doğrunun evritim çemberini kestiği noktalar  $T$  ve  $U$  olsun.  $\mathcal{C}$  çemberine  $T$  ve  $U$  noktalarındaki teğetler çizilsin. Bu iki teğetin  $\overrightarrow{OP}$  ışım üzerindeki kesiştikleri nokta,  $P'$  noktasıdır (Şekil 1.2.).

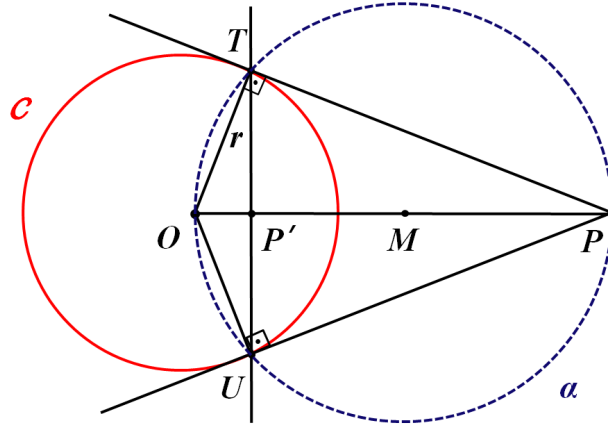


Şekil 1.2.  $\mathcal{C}$  nin içindeki bir  $P$  noktasının evriği

### 1.2.2. $P$ noktasının $\mathcal{C}$ nin dışında olması halinde evriğinin inşası

$\mathcal{C}$  nin dışında bir nokta  $P$  ve  $\overline{OP}$  doğru parçasının orta noktası  $M$  olsun.  $\alpha$ ,  $M$  merkezli  $d_E(M, P)$  yarıçaplı bir çember olsun.  $\mathcal{C}$  ile  $\alpha$  çemberi iki noktada kesişecek-

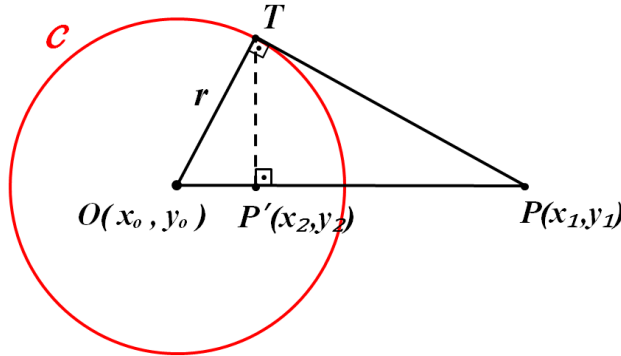
tır. Bu iki noktaya da  $T$  ve  $U$  denilsin.  $\overline{TU}$  doğru parçasıyla  $\overline{OP}$  doğru parçasının kesiştiği nokta,  $P'$  noktasıdır (Şekil 1.3.).



Şekil 1.3.  $C$  nin dışındaki bir  $P$  noktasının evriği

### 1.3 Bir Noktanın Evriğinin Analitik Olarak İncelenmesi

$I_{O,r}$  bir evritim ve bir  $P$  noktasının evriği  $P'$  olmak üzere  $P'$  noktasının koordinatları, evritim yarıçapı ve  $P$  nin koordinatları cinsinden analitik olarak belirlenebilir.  $O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x_1, y_1)$  ve  $P' = (x_2, y_2)$  noktaları evritimin tanımından doğrudadır (Şekil 1.4.).



Şekil 1.4.  $O, P$  ve  $P'$  noktalarının koordinatları



Analistik düzlemde bir doğru parçasını belli oranda bölen noktaların koordinatları ile parçaların uzunlukları arasında

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{d_E(O, P')}{d_E(O, P)} \quad (1)$$

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{d_E(O, P')}{d_E(O, P)} \quad (2)$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan birinci eşitlik düzenlenerek

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{d_E(O, P')d_E(O, P)}{d_E(O, P)d_E(O, P)}$$

yazılabilir. Daha sonra işlem sürdürülürse

$$x_2 - x_0 = \frac{d_E(O, P')d_E(O, P)(x_1 - x_0)}{(d_E(O, P))^2},$$

$$x_2 - x_0 = \frac{r^2(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$$

$$x_2 = \frac{r^2(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + x_0,$$

elde edilir. İkinci eşitlikte de benzer işlem uygulandığında

$$y_2 = \frac{r^2(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + y_0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P'(x_2, y_2) = \left( \frac{r^2(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + x_0, \frac{r^2(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + y_0 \right)$$

sonucuna ulaşılır.  $O = (0, 0)$  başlangıç noktası seçilirse

$$P'(x_2, y_2) = \left( \frac{r^2 x_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2}, \frac{r^2 y_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2} \right)$$

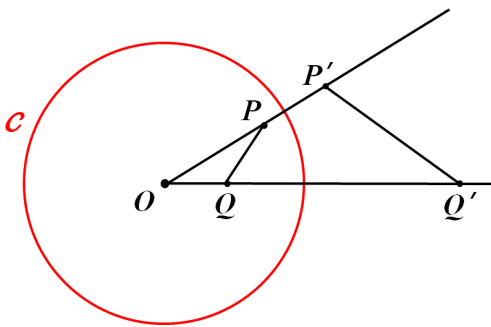
olur.

## 1.4 Doğruların Evriği

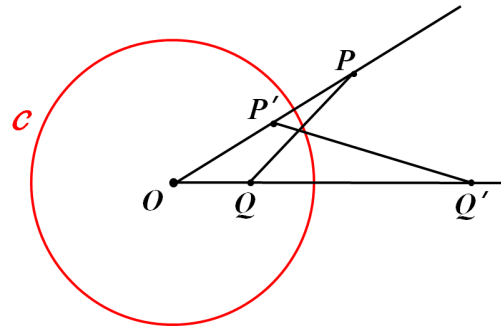
Evritim dönüşümünden doğruların nasıl etkilendiği bu kısımda incelenmektedir. Ancak ilk olarak ispatlarda kullanılmakta olan önemli bir yardımcı teorem verilecektir.

**Yardımcı Teorem 1.4.1:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $P, Q$  noktalarının evrikleri sırasıyla  $P', Q'$  olsun.  $P$  ve  $Q$  noktaları  $O$  merkezi ile doğrudan değilse,  $\triangle OPQ$  üçgeni  $\triangle OQ'P'$  üçgeni ile benzerdir.

**İspat:** Evritim tanımından  $P, Q$  noktaları ve evrikleri olan  $P', Q'$  noktaları için,  $d_E(O, P)d_E(O, P') = r^2$  ve  $d_E(O, Q)d_E(O, Q') = r^2$  eşitlikleri yazılır. Buradan  $d_E(O, P)/d_E(O, Q) = d_E(O, Q')/d_E(O, P')$  orantısı elde edilir. Ayrıca  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$  ve  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'}$  olduğundan,  $\angle POQ = \angle P'OQ'$  eşitliği mevcuttur.  $\triangle OPQ$  üçgeni ve  $\triangle OQ'P'$  üçgeninin bir açısı eşit, ayrıca bu eşit açının bulunduğu kenarlarda birbiriyle orantılıdır. Bu da kenar-açı-kenar benzerlik kriterine göre  $\triangle OPQ$  üçgeni ve  $\triangle OQ'P'$  üçgeninin benzer olması demektir. Bu teorem için mümkün olan iki durum aşağıda gösterilmektedir (Şekil 1.5.(a), Şekil 1.5.(b)).□



Şekil 1.5.(a)  $P$  ve  $Q$  noktalarının her ikisi de  $\mathcal{C}$  nin içinde ise  $\triangle OPQ$  ve  $\triangle OQ'P'$  üçgenlerinin benzerliği



Şekil 1.5.(b)  $P$  ve  $Q$  noktalarının biri  $\mathcal{C}$  nin içinde diğeri dışında ise  $\triangle OPQ$  ve  $\triangle OQ'P'$  üçgenlerinin benzerliği

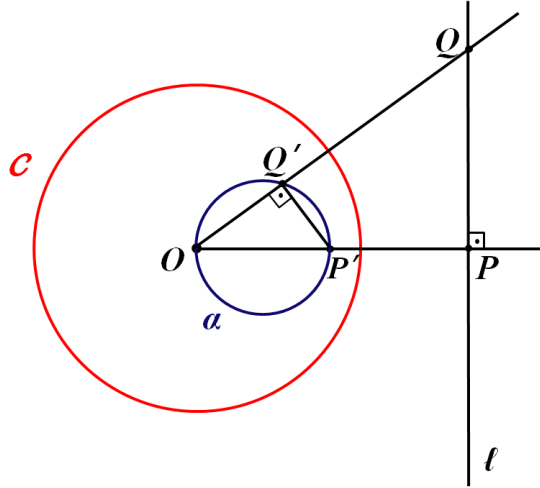
Artık doğruların evritim altında nasıl şekilleneceği incelenebilir.

**Teorem 1.4.2:** Evritim çemberinin merkezinden geçmeyen herhangi bir doğrunun evriği, evritim çemberinin merkezini içeren bir çemberdir.

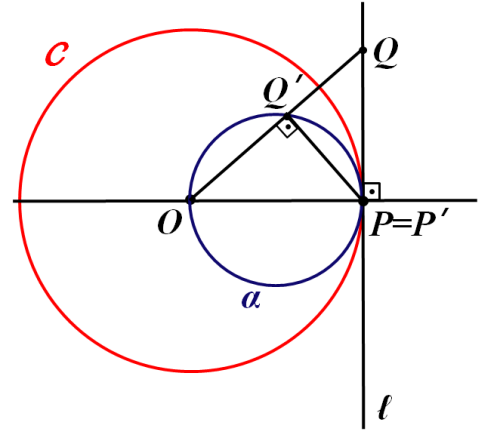
**İspat:**  $O$  noktasından  $\ell$  doğrusuna bir dik çizilsin ve doğruyu kestiği nokta  $P$  olsun.  $\overline{OP'}$  çap olacak şekilde çizilen çember de  $\alpha$  olsun.  $I_{O,r}(\ell \cup \{\infty\}) = \alpha$  olduğu gösterilmelidir.

$Q$ ,  $\ell$  üzerinde bir nokta olsun. Eğer  $Q = P$  ise,  $Q'$  noktasının  $\alpha$  çemberi üzerinde olduğu açıktır. O halde  $Q \neq P$  olsun. Yardımcı Teorem 1.4.1 den dolayı  $\triangle OPQ \cong \triangle OQ'P'$  olduğundan,  $\angle OPQ = \angle OQ'P' = 90^\circ$  dir.  $\angle OQ'P'$  açısı,  $\overline{OP'}$  çapını gördüğünden ve  $90^\circ$  olduğundan  $\alpha$  çemberi üzerinde bir çevre açıdır. Ayrıca  $I_{O,r}(\infty) = O$  olduğundan,  $I_{O,r}$  altında  $(\ell \cup \{\infty\})$  nin  $\alpha$  çemberine dönüştüğü görülür. İspatı tamamlamak için  $\alpha$  çemberi üzerindeki her noktanın  $(\ell \cup \{\infty\})$  nin bir noktasının görüntüsü olduğu gösterilmelidir.  $R$ ,  $\alpha$  üzerindeki bir nokta olsun.  $R = O$  ise,  $R = O = I_{O,r}(\infty)$  dir.  $R \neq O$  ise,  $\angle ORP'$  ve  $\angle OPR'$  birer dik açı oluşturur (Yardımcı Teorem 1.4.1). Bundan dolayı  $R'$   $\ell$  üzerindedir ve  $Q = R'$  olduğundan  $R = I_{O,r}(Q)$  olur.  $\square$

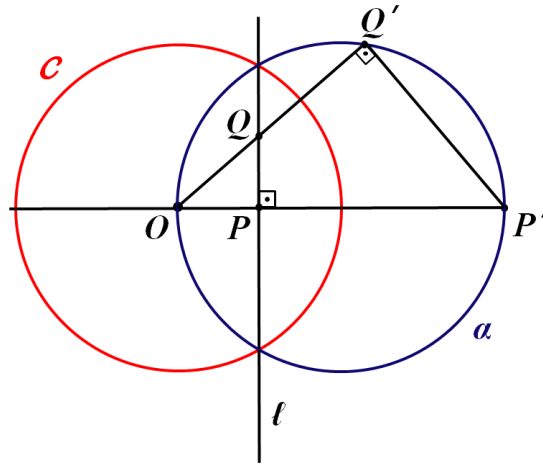
Aşağıda  $\ell$  ve  $\mathcal{C}$  nin birbirine göre farklı konumları için şekiller gösterilmektedir (Şekil 1.6.(a), Şekil 1.6.(b), Şekil 1.6.(c)).



Şekil 1.6.(a)  $C$  ile ayrık olan  $l$  doğrusunun evriği



Şekil 1.6.(b)  $C$  ye teğet olan  $l$  doğrusunun evriği



Şekil 1.6.(c)  $C$  yi iki noktada kesen  $l$  doğrusunun evriği

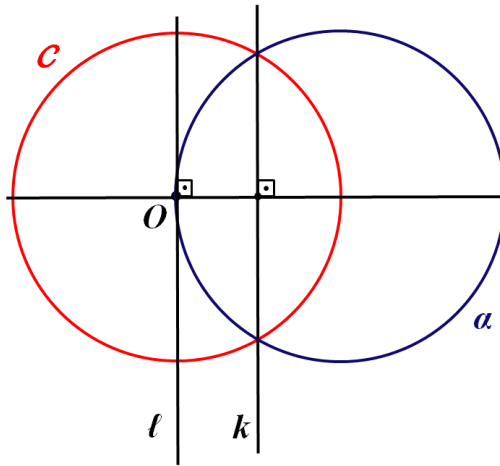
Şekillerden de görüleceği üzere evriği alınan bir doğruyla evritim çemberinin kesişim noktaları varsa bu noktaların evrikleri kendileri olur. Ayrıca doğru  $C$  nin dışındaysa evriği olan çember  $C$  nin içinde olur. Teorem 1.4.2 den yola çıkarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 1.4.3:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $\alpha$   $O$  noktasından geçen bir çember ise  $\alpha$  çemberinin evriği  $O$  noktasından geçmeyen bir doğrudur (Venema, 2012).

**Yardımcı Teorem 1.4.4:**  $I_{O,r}$  bir evritim olsun.  $O$  noktasından geçen bir doğrunun evriği kendisidir.

**Teorem 1.4.5:**  $I_{O,r}$  bir evritim olsun. Bir  $\ell$  doğrusu  $\alpha$  çemberine  $O$  noktasında teğet ise  $\alpha$  çemberinin  $I_{O,r}$  evritimine göre görüntüsü  $\ell$  doğrusuna paralel bir doğrudur.

**İspat:**  $\ell$  doğrusu  $O$  noktasından geçtiği için evriği, Yardımcı Teorem 1.4.4 gereği kendisidir. Yine Sonuç 1.4.3 gereği  $O$  noktasından geçen bir çemberin evriği  $O$  noktasından geçmeyen bir doğru olacağından,  $\alpha$  çemberinin görüntüsü  $O$  noktasından geçmeyen bir  $k$  doğrusudur.  $\ell$  doğrusu ile  $\alpha$  çemberi sadece  $O$  noktasında kesişirler.  $O$  noktası ise evriği sonsuzda olan bir noktadır. Dolayısıyla  $\ell$  ve  $k$  doğruları ancak sonsuzda kesişir. Bu da öklid düzlemi için düşünüldüğünde  $\ell$  ve  $k$  doğrularının paralel olması anlamına gelir (Şekil 1.7.).□



Şekil 1.7.  $\alpha$  çemberine  $O$  noktasında teğet olan  $\ell$  doğrusunun evriği

## 1.5 Çemberlerin Evriği

Evritim dönüşümüne göre doğrular ve çemberler arasında sıkı bir ilişki vardır.  $\alpha$  bir çember ya da doğru ise,  $\alpha$  nın evriği de ancak bir çember ya da doğru olabilir. Yani  $\alpha$  bir çember iken ya bir çembere, ya da bir doğruya dönüşebileceği gibi  $\alpha$  nın bir doğru olması durumunda da ya bir doğruya ya da bir çembere dönüşebilir. Bu da evritimin çemberler ve doğruları koruduğunun, başka bir şekle dönüştürmediğinin bir göstergesidir. Doğruların evriği incelenirken Sonuç 1.4.3 de çemberlerin evritiminden de bahsedilmişti. Bu sonuca göre,  $O$  noktasından geçen bir çemberin evriği  $O$  noktasından geçmeyen bir doğru idi. Bu kısımda ise çemberlerin evriği ile ilgili diğer durumlar incelenmektedir.

**Teorem 1.5.1:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $\alpha$ ,  $O$  noktasından geçmeyen bir çember olsun.  $I_{O,r}(\alpha)$  da  $O$  noktasından geçmeyen bir çemberdir.

**İspat:**  $\alpha$  nın merkezi  $A$ , yarıçapı ise  $s$  olsun.  $A = O$  ise,  $I_{O,r}(\alpha)$  nın da  $O$  merkezli ve  $r^2/s$  yarıçaplı bir çember olduğunu görmek kolaydır.  $A \neq O$  olsun. Bu durumda  $\overleftrightarrow{OA}$  doğrusu  $\alpha$  yı  $Q$  ve  $R$  diye adlandırılabilir iki noktada kesecektir.  $Q$  ve  $R$  noktalarının görüntüleri  $Q'$  ve  $R'$  ise çapı  $\overline{Q'R'}$  doğru parçası olan çember  $\beta$  olsun. Gösterilmesi gereken  $I_{O,r}(\alpha) = \beta$  olduğudur. Bunun gösterilmesi demek " $Q$  ve  $R$  den farklı olan bir  $P$  noktasının  $\alpha$  üzerinde olması için gerek ve yeter şart evriği olan  $P'$  noktasının  $\beta$  üzerinde olmasıdır." ifadesinin doğruluğunun gösterilmesidir. İspatta  $\mu(\angle QPR)$  ifadesi  $\angle QPR$  açısının ölçümünü,  $\sigma(\triangle OPR)$  ifadesi de  $\triangle OPR$  üçgeninin iç açılar toplamını göstermek için kullanılmıştır.

( $\Rightarrow$ )  $P$ ,  $\alpha$  üzerinde  $Q$  ve  $R$  den farklı olan bir nokta olsun.  $\angle QPR$  açısı çapı gören bir çevre açısı olduğundan  $\mu(\angle QPR) = 90^\circ$  dir. Yardımcı Teorem 1.4.1 aracılığıyla  $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$  ve  $\triangle ORP \sim \triangle OP'R'$  benzerliklerinden söz edilebilir. Dolayısıyla  $\angle OPQ \cong \angle OQ'P'$ ,  $\angle ORP \cong \angle OP'R'$  ve  $\angle POR \cong \angle P'OQ'$  eşlikleri

yazılabilir. Buradan açı ölçümleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
 \mu(\angle QPR) &= \sigma(\triangle OPR) - \mu(\angle ORP) - \mu(\angle OPQ) - \mu(\angle POR), \\
 &= \sigma(\triangle OP'Q') - \mu(\angle OP'R') - \mu(\angle OQ'P') - \mu(\angle P'OQ'), \\
 &= \mu(\angle R'P'Q') = 90^\circ \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

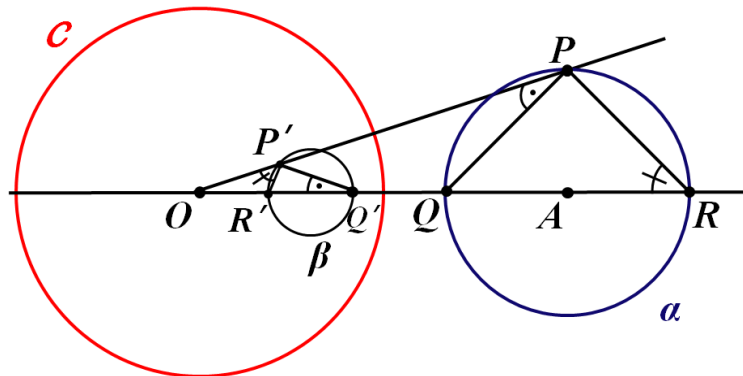
$\angle R'P'Q'$  açısı bir dik açı olduğundan  $\beta$  çemberinin çapını gören bir çevre açıdır. Dolayısıyla  $P'$ ,  $\beta$  üzerindedir.

( $\Leftarrow$ )  $\beta$  üzerinde  $Q'$  ve  $R'$  noktalarından farklı olan ve  $I_{O,r}(P) = P'$  koşulunu sağlayan bir nokta  $P'$  olsun.  $\mu(\angle R'P'Q') = 90^\circ$  dir. Yardımcı Teorem 1.4.1 aracılığıyla  $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$  ve  $\triangle ORP \sim \triangle OP'R'$  benzerlikleri vardır. Dolayısıyla  $\angle OPQ \cong \angle OQ'P'$ ,  $\angle ORP \cong \angle OP'R'$  ve  $\angle POR \cong \angle P'OQ'$  eşlikleri yazılabilir.

Buradan

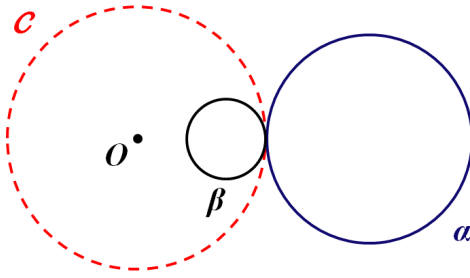
$$\begin{aligned}
 \mu(\angle R'P'Q') &= \sigma(\triangle OP'Q') - \mu(\angle OP'R') - \mu(\angle OQ'P') - \mu(\angle P'OQ'), \\
 &= \sigma(\triangle OPR) - \mu(\angle ORP) - \mu(\angle OPQ) - \mu(\angle POR), \\
 &= \mu(\angle QPR) = 90^\circ \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

$\angle QPR$  açısı  $\beta$  çemberinin çapını gören bir çevre açıdır ve  $P$ ,  $\alpha$  üzerindedir. O halde  $Q$  ve  $R$  den farklı olan bir  $P$  noktasının  $\alpha$  üzerinde olması için gerek ve yeter şart evriği olan  $P'$  noktasının  $\beta$  üzerinde olmasıdır (Şekil 1.8.). $\square$

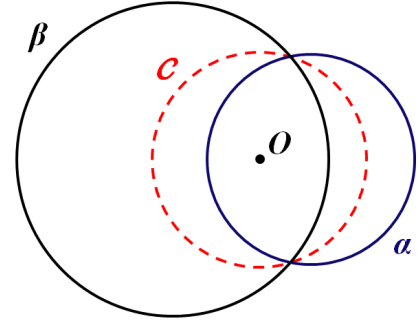


Şekil 1.8.  $O$  noktasından geçmeyen bir çemberin evriği

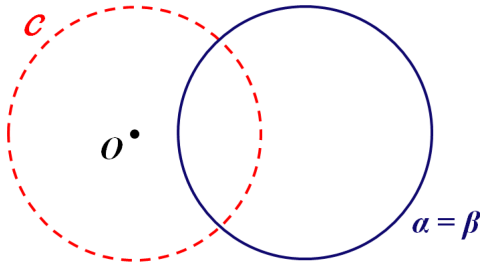
Teorem 1.5.1 için evriği alınan  $\alpha$  çemberi hareket ettirilirse veya boyutu değiştirilirse  $\beta$  görüntü çemberi için farklı durumlar ortaya çıkar. Bu durumlardan bazıları aşağıda gösterilmektedir.



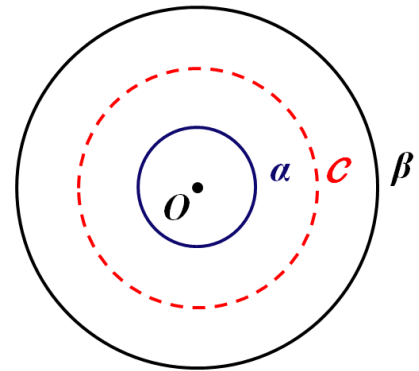
Şekil 1.9.(a)  $C$  ye teğet olan  $\alpha$  çemberinin evriği



Şekil 1.9.(b)  $C$  ile iki noktada kesişen  $\alpha$  çemberinin evriği



Şekil 1.9.(c)  $C$  ye dik olan  $\alpha$  çemberinin evriği



Şekil 1.9.(d)  $C$  ile aynı merkeze sahip olan  $\alpha$  çemberinin evriği

Şimdi ise bir noktanın kuvveti ve iki çemberin diklik şartını içeren tanımlara yer verilecektir.

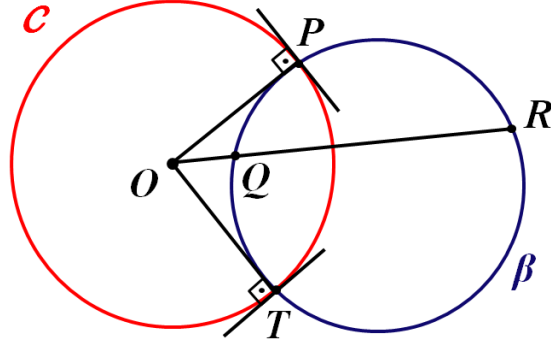


**Tanım 1.5.2:**  $\beta$  bir çember ve  $O$ ,  $\beta$  üzerinde olmayan bir nokta olsun.  $O$  dan geçen ve  $\beta$  yı kesen herhangi bir  $\ell$  doğrusu seçilsin.  $\ell$ ,  $\beta$  yı  $Q$  ve  $R$  gibi iki noktada kesiyor ise  $O$  noktasının kuvveti  $d_E(O, Q)d_E(O, R)$  çarpımı olarak tanımlanır.  $\ell$  nin  $\beta$  ya  $P$  noktasında teğet olması halinde ise  $O$  noktasının kuvveti  $(d_E(OP))^2$  olarak ifade edilir (Venema, 2012).

**Tanım 1.5.3:**  $\alpha$  ve  $\beta$  iki çember olsun. Bu çemberler iki noktada kesişiyor ve teğet doğruları kesişim noktalarında birbirine dik ise  $\alpha$  ve  $\beta$  çemberleri birbirine diktir denir (Venema, 2012).

**Teorem 1.5.4:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $\beta$ ,  $\mathcal{C}$  den farklı bir çember olsun.  $\beta$ ,  $\mathcal{C}$  ye dik ise  $I_{O,r}(\beta) = \beta$  dir (Teorem  $\beta$  nin noktalarının  $I_{O,r}$  evritimine göre sabit kaldığını ileri sürmez. Aslında  $\beta$  nin  $\mathcal{C}$  nin içinde kalan parçasının,  $\mathcal{C}$  nin dışındaki parçasına dönüştüğünü belirtir.).

**İspat:**  $\beta$  nin evritim çemberini kestiği iki nokta  $P$  ve  $T$  olsun. Teğet ve çemberin yarıçapı dik olduğundan  $\overleftrightarrow{OP}$  ve  $\overleftrightarrow{OT}$   $\beta$  ya teğettir. Ayrıca  $O$  merkezi  $\beta$  nin dışındadır ve üzerinde değildir.  $I_{O,r}(P) = P$  ve  $I_{O,r}(T) = T$  olduğu bilinmektedir.  $\beta$  nin bir diğer noktası  $Q$  ise  $\overleftrightarrow{OQ}$   $\beta$  yı iki noktada kesen ve ikinci noktası  $R$  olan bir sekant doğrusudur.  $O$  noktasının  $\beta$  ya göre kuvveti  $d_E(O, Q)d_E(O, R) = (d_E(O, P))^2 = r^2$  olarak tanımlanır. Buradan  $I_{O,r}(Q) = R$  ve  $I_{O,r}(R) = Q$  elde edilir. Böylelikle  $\beta$  daki her noktanın görüntüsü  $\beta$  daki diğer bir noktadır ve  $\beta$  daki her nokta  $\beta$  nin diğer bir noktasının görüntüsüdür. Diğer bir deyişle,  $I_{O,r}(\beta) = \beta$  dir (Şekil 1.10.)□



Şekil 1.10.  $\mathcal{C}$  ye dik olan çemberin evriği

**Teorem 1.5.5:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $\beta$ ,  $\mathcal{C}$  den farklı bir çember olsun.  $I_{O,r}(Q) = Q'$  ve  $Q \neq Q'$  olmak üzere  $Q$ ,  $\beta$  üzerinde iken  $Q'$  de  $\beta$  üzerinde ise  $\mathcal{C}$ ,  $\beta$  ya diktir.

**İspat:**  $Q$  ve  $Q'$   $\mathcal{C}$  nin karşı taraflarında olduğundan,  $\beta$  çemberi  $\mathcal{C}$  yi  $P$  ve  $T$  gibi iki noktada kesmelidir.  $P$  noktası  $\mathcal{C}$  üzerinde olduğundan  $(d_E(OP))^2 = r^2$  dir. Ayrıca  $d_E(O, Q)d_E(O, Q') = r^2$  eşitliği de mevcuttur.  $\beta$  ya göre  $O$  noktasının kuvveti iyi tanımlıdır. Bu sebeple  $\overleftrightarrow{OP}$  doğrusu  $\beta$  ya teğet olmalıdır.  $\mathcal{C}$  nin bir yarıçapının  $\beta$  ya teğet olması,  $\mathcal{C}$  nin  $\beta$  ya dik olmasını gerektirir.  $\square$

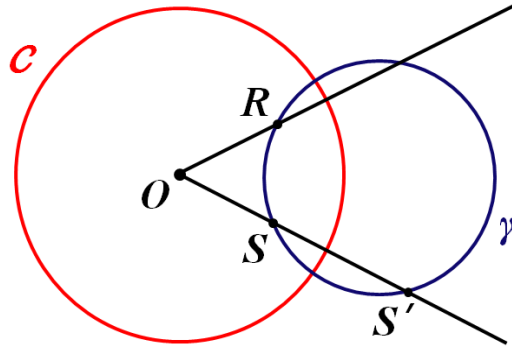
Teorem 1.5.4 e karşılık Teorem.1.5.5 daha güçlüdür. Bu iki teoremden ise aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 1.5.6:**  $I_{O,r}$  evritim ve  $\beta$  bir çember olsun.  $\mathcal{C}$  nin  $\beta$  ya dik olması için gerek ve yeter şart  $I_{O,r}(\beta) = \beta$  olmasıdır (Venema, 2012).

Dik çemberler inşa edilmek istendiğinde ise izleyen sonuç önemli olmaktadır.

**Sonuç 1.5.7:**  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$  olmak üzere  $I_{O,r}$  bir evritim olsun.  $R$  ve  $S$ ,  $\mathcal{C}$  nin içinde ancak  $\mathcal{C}$  nin aynı çapı üzerinde olmayan iki nokta ise  $R$  ve  $S$  nin üzerinde olduğu  $\mathcal{C}$  ye dik olan bir tek  $\gamma$  çemberi vardır (Venema, 2012).

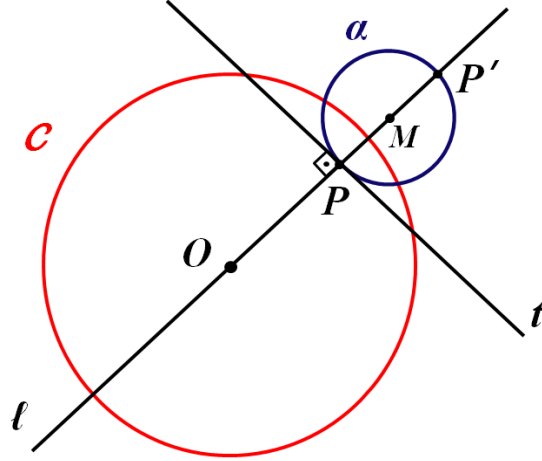
**İspat:**  $R$  ve  $S$  aynı çap üzerinde olmadığından, hiçbiri  $O$  noktasına eşit değildir. Bunu  $R$ ,  $S$  ve  $S' = I_{O,r}(S)$  noktalarının doğrusal olmaması takip eder. Üç nokta bir tek çember belirteceğinden bu çember  $\gamma$  olsun. Teorem 1.5.5 ten  $\gamma$  çemberi  $\mathcal{C}$  evritim çemberine diktir (Şekil 1.11.).□



Şekil 1.11. Sonuç 1.5.7

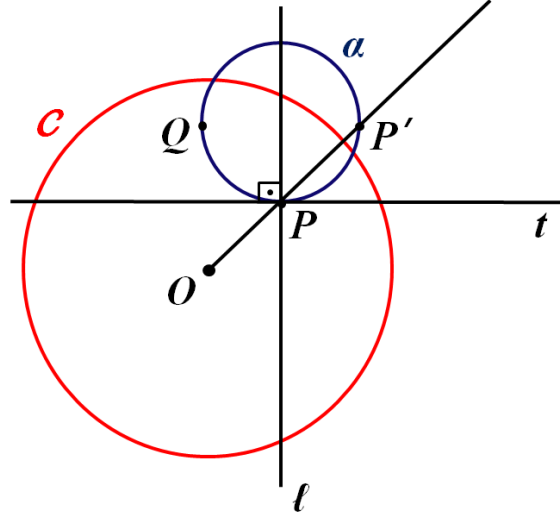
**Teorem 1.5.8:**  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$  olmak üzere  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $P$ ,  $\mathcal{C}$  nin içinde  $O$  dan farklı bir nokta olsun.  $O$  noktasından geçmeyip  $P$  den geçen her  $t$  doğrusu için,  $t$  ye  $P$  de teğet ve  $\mathcal{C}$  ye dik olan bir tek  $\alpha$  çemberi vardır.

**İspat:**  $\ell$ ,  $P$  den geçen ve  $t$  ye dik bir doğru olsun. Buna göre  $O$  noktasının  $\ell$  üzerinde olduğu ve olmadığı iki durum incelenecektir.  $O$  noktası  $\ell$  üzerinde olsun.  $I_{O,r}(P) = P'$  noktası da  $\ell$  üzerindedir.  $\overline{PP'}$  doğru parçasının orta noktası  $M$  ve  $M$  merkezli,  $d_E(M, P)$  yarıçaplı çember  $\alpha$  olsun. Teorem 1.5.5 gereği  $\alpha$ ,  $\mathcal{C}$  evritim çemberine diktir. Dolayısıyla oluşturulan yapıdan açıkça görülür ki  $t$  doğrusu  $\alpha$  ya  $P$  de teğettir (Şekil 1.12.).



Şekil 1.12.  $O$  noktasının  $\ell$  üzerinde olduğu durum

$O$  noktası  $\ell$  üzerinde olmasın.  $I_{O,r}(P) = P'$  noktası da  $\ell$  üzerinde değildir.  $P'$  noktasının  $\ell$  doğrusuna göre yansıması  $Q = \rho_{\ell}(P')$  olarak tanımlansın.  $P$ ,  $P'$  ve  $Q$  noktaları doğrusal değildir. Bu üç noktadan bir tek çember geçeceğinden bu çember  $\alpha$  olsun.  $P$  ve  $P'$  noktalarının  $\alpha$  üzerinde olması,  $\alpha$  nın  $C$  ye dik olmasını gerektirir (Teorem 1.5.5).  $P'$  ve  $Q$  noktalarının  $\alpha$  üzerinde olması ise  $\alpha$  nın merkezinin  $\ell$  üzerinde oluşunu gösterir.  $P$  nin  $\alpha$  üzerinde ve  $\alpha$  nın merkezinin de  $t$  ye  $P$  de dik olan  $\ell$  doğrusu üzerinde olmasından dolayı,  $t$  nin  $P$  de  $\alpha$  ya teğet olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanmış olur (Şekil 1.13.)□



Şekil 1.13.  $O$  noktasının  $\ell$  üzerinde olmadığı durum

## 1.6 Açıların Evriği

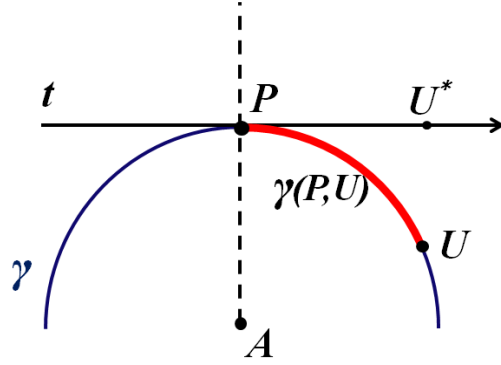
Evritimin koruduğu özelliklerden biri de açılardır. Açıların çemberler veya doğrular arasında olması bu gerçeği değiştirmez. Tüm durumlarda bir açı ile evriği olan açı birbirine eşittir. Bunu göstermeden önce açı kavramının ne anlama geldiğinin tanımlanması gerekir. Ancak çemberler söz konusu olduğunda çember yayları ile çalışılacağından öncelikli olarak çember yayları ifade edilmektedir.

**Notasyon:**  $\gamma$ , merkezi  $A$  ve üzerindeki bir nokta  $P$  olan bir çember olsun.  $A$  merkezine göre  $P$  nin tam karşısında olmayacak şekilde  $\gamma$  üzerinde ikinci bir  $U$  noktası seçilsin.  $\gamma$  üzerinde  $P$  den  $U$  ya çember yayını göstermek için  $\gamma(P, U)$  notasyonu kullanılacaktır.

$$\gamma(P, U) = \{P, U\} \cup \{Q \mid Q, \gamma \text{ üzerinde ve } \angle PAU \text{ açısı içindedir}\}$$

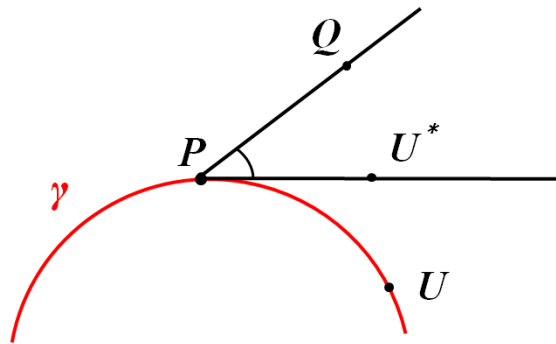
$\gamma$  ya  $P$  noktasında teğet doğru  $t$  olsun.  $U$  ve  $U^*$   $\overleftrightarrow{AP}$  nin aynı tarafında olacak şekilde  $t$  üzerinde bir  $U^*$  noktası seçilsin. Buradan  $\overrightarrow{PU^*}$  ışını  $P$  noktasında  $\gamma(P, U)$  yayına teğet olur. Böylelikle çember yayı  $P$  noktasında bir teğet ışını belirlemiş

olur. Çember yayı olan açılar incelenirken bu teğet ışınlarından faydalanılmaktadır (Şekil 1.14.).



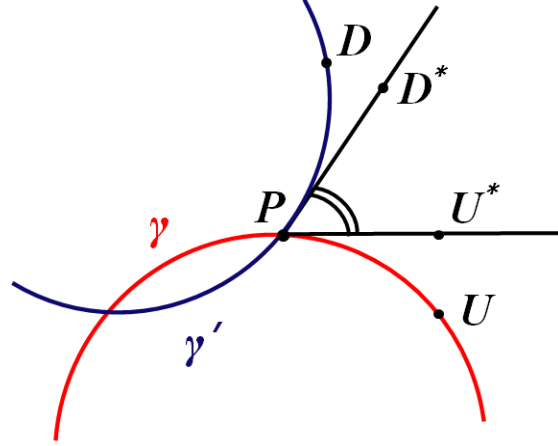
Şekil 1.14. Çember yayına  $P$  noktasında teğet olan ışın

**Tanım 1.6.1:**  $\gamma(P,U)$  çember yayı ve  $\overrightarrow{PQ}$  ışını arasındaki açı  $\angle U^*PQ$  açısıdır (Şekil 1.15.).



Şekil 1.15.  $\gamma(P,U)$  çember yayı ve  $\overrightarrow{PQ}$  ışını arasındaki açı

$\gamma'$  bir ikinci çember ve  $D$ ,  $\gamma'$  üzerinde bir nokta ise  $\gamma(P,U)$  ve  $\gamma'(P,D)$  çember yayları arasındaki açı  $\angle U^*PD^*$  açısıdır (Venema, 2012) (Şekil 1.16.).



Şekil 1.16.  $\gamma(P, U)$  ve  $\gamma'(P, D)$  çember yayları arasındaki açı

Artık açıların evritim ile olan ilişkisi incelenebilir.

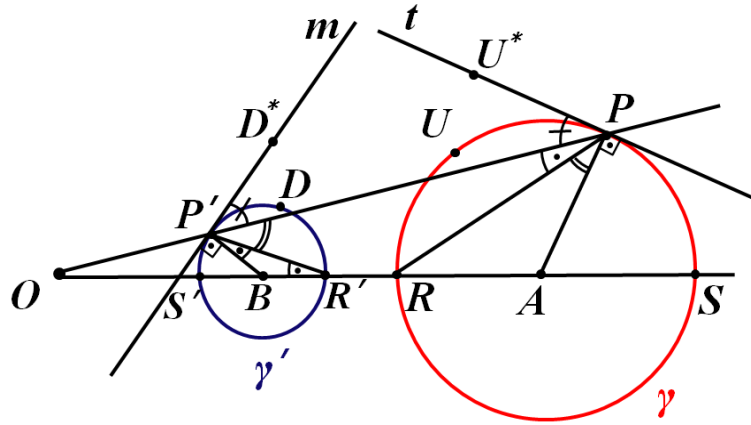
**Teorem 1.6.2:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $\gamma$  merkezi  $A$  olan bir çember olsun.  $\gamma$  üzerinde  $A$  merkezine göre tam karşılıklı olmayacak şekilde  $P$  ve  $U$  noktaları seçilsin.  $\gamma(P, U)$  ve  $\overrightarrow{PP'}$  arasındaki açı,  $\gamma'(P', U')$  ve  $\overrightarrow{P'P}$  arasındaki açıya eşittir.

**İspat:**  $A = O$  ise,  $\gamma$  ve  $\mathcal{C}$  çemberleri ya özdeş ya da ayrıktırlar. Birinci durumda sonuç anlamsız bir şekilde çıkar. İkinci durumda ise  $I_{O,r}(\gamma)$ ,  $\gamma$  ve  $\mathcal{C}$  ile eş merkezli bir çemberdir. Buradan incelenen iki açının da dik ve dolayısıyla eşit olduğu görülür.

O halde  $A \neq O$  olsun.  $\overleftrightarrow{OA}$  doğrusunun  $\gamma$  çemberini kestiği noktalar  $R$  ve  $S$ ,  $R'$  ile  $S'$  de sırasıyla bu noktaların evrikleri olsun.  $I_{O,r}(\gamma) = \gamma'$  ise  $\gamma'$  nün bir çember olduğu Teorem 1.5.1 den söylenebilir.  $\gamma'$  çemberinin merkezi  $B$  ile ve  $U$  nun evriği de  $D$  ile gösterilsin. Burada  $U$  nun evriği  $U'$  ile gösterilmeyerek karışıklıktan kaçınmak amaçlanmaktadır. Artık gösterilmesi gereken  $\angle PP'D^* \cong \angle P'PU^*$  dir.  $\angle BP'D^*$  ve  $\angle APU^*$  açılarının birer dik açı olduğu Şekil 1.17. den gözlemlenebilir. İstenilen sonuca ulaşmak için  $\angle BP'R' \cong \angle RPP'$  ve  $\angle R'P'P \cong \angle APR$  olduğu gösterilmelidir. Yardımcı teorem 1.4.1 gereği  $\triangle OP'R'$  üçgeni ile  $\triangle ORP$  üçgeni

benzerdir. Dolayısıyla  $\angle BR'P' \cong \angle RPP'$  ve  $\angle OP'R' \cong \angle ORP$  dir. Buradan  $\angle R'P'P \cong \angle ARP$  eşitliği bulunur.  $\Delta BP'R'$  ve  $\Delta ARP$  üçgenleri ikizkenar üçgen olduğundan  $\angle BR'P' \cong \angle BP'R'$  ve  $\angle ARP \cong \angle APR$  vardır.

Sonuç olarak  $\angle BR'P \cong \angle APP'$  eşitliğine ulaşılır. Bu da  $\angle PP'D^* \cong \angle P'PU^*$  olmasını gerektirir. Böylelikle ispat tamamlanır.  $\square$



Şekil 1.17.  $\gamma(P, U)$  ve  $\overrightarrow{PP'}$  arasındaki açının,  
 $\gamma'(P', U')$  ve  $\overrightarrow{P'P}$  arasındaki açığa eşitliği

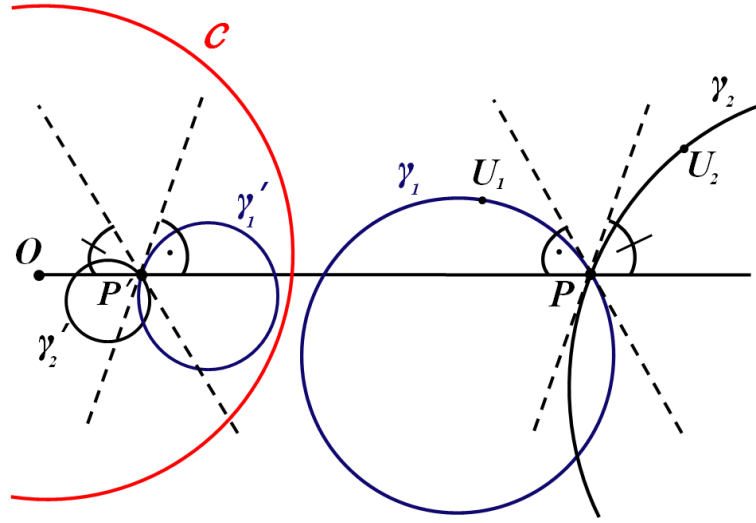
Gelecek iki teorem de Teorem 1.6.2 ile benzer bir yol takip edilerek ispatlanabilir.

**Teorem 1.6.3:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $\ell$   $O$  dan geçmeyen bir doğru olsun.  $\gamma'$   $\ell$  nin evriği olan bir çember,  $P$  ve  $U$  da  $\ell$  üzerinde farklı iki nokta ise  $\angle P'PU$  açısı  $\gamma'(P', U')$  ve  $\overrightarrow{P'P}$  arasındaki açığa eşittir (Venema, 2012).

Açıların evritim tarafından korunması demek her biri bir doğru veya çember olan iki eğri ele alındığında, bir noktadaki eğriler arasındaki açının o noktanın evriği olan noktadaki eğriler arasındaki açığa eş olması demektir. Bir çok özel durumdan kurtulmak için her biri bir doğru veya çember olan eğrilerin evriklerinin de bir doğru veya çember olmasına bağlı olarak çemberler üzerindeki yaylarla birlikte doğrular üzerindeki yaylar için de  $\gamma(P, U)$  notasyonu kullanılmaktadır.



**Teorem 1.6.4:**  $I_{O,r}$  bir evritim,  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  her biri bir doğru ya da bir çember olsun.  $U_1$  ve  $U_2$  sırasıyla  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  üzerinde,  $P$  ise her ikisi üzerinde bir nokta ise  $\gamma_1(P, U_1)$  ve  $\gamma_2(P, U_2)$  arasındaki açı,  $\gamma'_1(P', U'_1)$  ve  $\gamma'_2(P', U'_2)$  arasındaki açığa eşittir (Venema, 2012) (Şekil 1.18.).



Şekil 1.18.  $\gamma_1(P, U_1)$  ve  $\gamma_2(P, U_2)$  arasındaki açının,  $\gamma'_1(P', U'_1)$  ve  $\gamma'_2(P', U'_2)$  arasındaki açığa eşitliği

Bu teoremler sonucunda artık kesin olarak evritimin açıları koruduğu yani anti-conformal olduğu belirtilebilir. Bu özellik ise evritimin dikkate değer bir dönüştürme olduğunu gösterir.

## 1.7 Evritimin Uzaklık İle İlişkisi

Öklidyen uzaklığın evritim tarafından korunmadığı açıktır. Bu yüzden evritim bir izometri oluşturmaz. Ancak uzaklığın kendisi korunmasa da çifte oran olarak adlandırılan uzaklıkların bir kombinasyonu korunur. Bu sebeple evritimde uzaklık söz konusu olduğunda üzerinde durulması gereken kısım çifte orandır. Çifte orandan

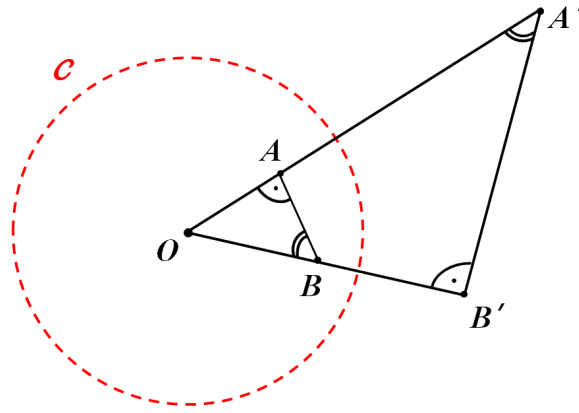
bahsedilmeden önce öklidyen uzaklığın evritim altında nasıl şekillendiğini inceleyen bir teorem aşağıda verilmektedir.

**Teorem 1.7.1:**  $I_{O,r}$  bir evritim olsun.  $A$  ve  $B$  noktalarının evrikleri sırasıyla  $A'$  ve  $B'$  ise

$$d_E(A', B') = \frac{r^2 d_E(A, B)}{d_E(O, A) d_E(O, B)}$$

dir (Yağcı, 2006).

**İspat:**



Şekil 1.19. İki nokta arasındaki Öklidyen uzaklığın evriği

Yardımcı teorem 1.4.1 gereği  $\triangle OAB$  üçgeni ile  $\triangle OA'B'$  üçgeni benzerdir. Buna göre;

$$\frac{d_E(A', B')}{d_E(A, B)} = \frac{d_E(O, A')}{d_E(O, B)}$$

vardır. Eşitliğin sağ tarafı

$$\frac{d_E(O, A)d_E(O, A')}{d_E(O, A)d_E(O, B)} = \frac{r^2}{d_E(O, A)d_E(O, B)}$$

şeklinde düzenlenirse,

$$\frac{d_E(A', B')}{d_E(A, B)} = \frac{r^2}{d_E(O, A)d_E(O, B)}$$

elde edilir. Buradan

$$d_E(A', B') = \frac{r^2 d_E(A, B)}{d_E(O, A)d_E(O, B)}$$

sonucuna ulaşılır□

**Tanım.1.7.2:**  $A, B, P$  ve  $Q$  birbirinden farklı dört nokta olsun. Bu dört noktanın belirttiği *çifte oran*

$$[AB, PQ] = \frac{d_E(A, P)d_E(B, Q)}{d_E(A, Q)d_E(B, P)}$$

şeklinde tanımlanır (Yağcı, 2006).

**Teorem 1.7.3:**  $I_{O,r}$  bir evritim ve  $O$  dan farklı dört nokta  $A, B, P, Q$  olsun. Bu noktaların evrikleri sırasıyla  $A', B', P', Q'$  ise  $[AB, PQ] = [A'B', P'Q']$  dir.

**İspat:**

$$[A'B', P'Q'] = \frac{d_E(A', P')d_E(B', Q')}{d_E(A', Q')d_E(B', P')}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r^2 d_E(A, P)}{d_E(O, A) d_E(O, P)} \frac{r^2 d_E(B, Q)}{d_E(O, B) d_E(O, Q)} \\
= & \frac{r^2 d_E(A, Q)}{d_E(O, A) d_E(O, Q)} \frac{r^2 d_E(B, P)}{d_E(O, B) d_E(O, P)} \\
& = \frac{d_E(A, P) d_E(B, Q)}{d_E(A, Q) d_E(B, P)} \\
& = [AB, PQ]
\end{aligned}$$

dır.  $\square$

Bu teorem açıkça gösterir ki evritim dönüşümü altında çifte oran korunur.

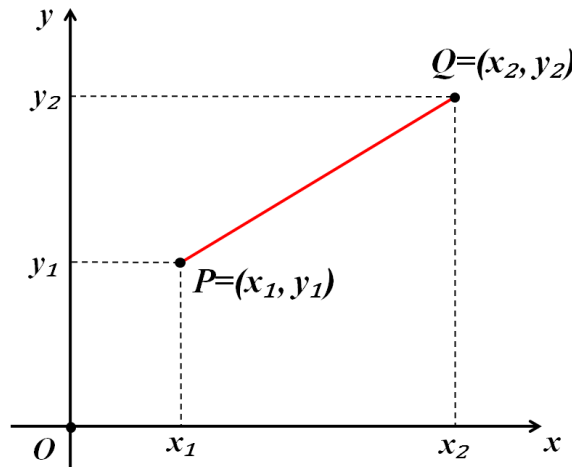
## 2.TAKSİ DÜZLEMİNDE EVRİTİM (İNVERSİON)

Bölüm.1 de Öklidyen düzlemin dönüşümlerinden biri olan evritim, ana hatlarıyla incelendi. Bu bölümde ise Evritimin Taksi düzlemindeki karşılığı veya diğer bir deyişle aktarılışı incelenmektedir. Ancak Öklidyen düzlemle karşılaştırıldığında, Taksi düzleminde daha ayrıntılı inceleme yapmak gerektiğinden burada nokta ve doğruların inversiyonunu incelemekle yetinilmiştir. Taksi düzleminde uzaklık fonksiyonu değişeceğinden burada Öklidyen Düzlem için kullanılan argümanların, Taksi Düzlemi için geçerli karşılıkları kullanılmaktadır.

Örneğin analitik düzlemde alınan  $P = (x_1, y_1)$  ve  $Q = (x_2, y_2)$  noktaları arasındaki *Öklidyen Uzaklık*

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı idi (Şekil 2.1.).



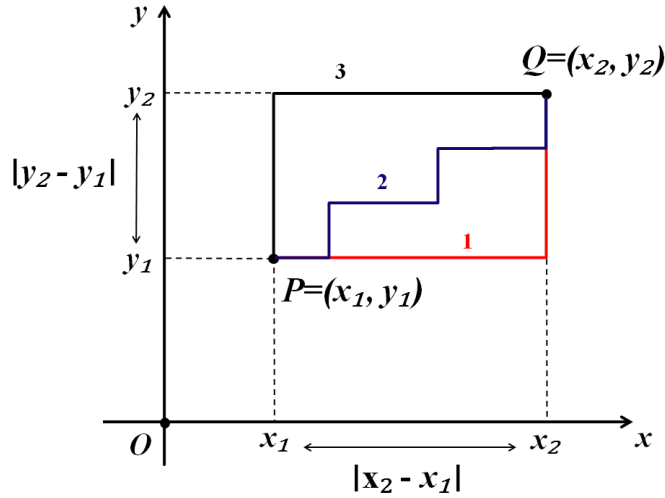
Şekil 2.1. İki nokta arasındaki Öklidyen uzaklık

H. Minkowski tarafından tanımlanan  $P = (x_1, y_1)$  ve  $Q = (x_2, y_2)$  noktaları arasındaki *Taksi Uzaklığı* ise

$$d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) \text{ olmak üzere}$$

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde gösterilen  $d_T$  taksi uzaklık fonksiyonu ile ifade edilir (Şekil 2.2.). K. Menger ve E. F. Krause daha sonra bu uzaklık fonksiyonunu kullanarak Taksi Geometriyi geliştirmişlerdir. (Krause, E.F., 1975)



Şekil 2.2. İki nokta arasındaki Taksi uzaklığı

$d_T$  taksi uzaklık fonksiyonu analitik düzlemde bir metrik belirtir. Ayrıca  $P = (x_1, y_1)$  ve  $Q = (x_2, y_2)$  noktalarından geçen doğrunun eğimi  $m$  ise,  $d_E$  ve  $d_T$  arasında

$$d_T(P, Q) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P, Q)$$

eşitliği mevcuttur (Kaya, 2006).

$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$  olduğundan burada eğer  $x_1 = x_2$  veya  $y_1 = y_2$  ise  $d_T(P, Q) = d_E(P, Q)$  olduğu açıktır. Yani  $P$  ile  $Q$  noktaları aynı yatay veya aynı dikey bir doğru üzerinde iken Taksi ve Öklidyen uzaklıklar birbirine eşittir.

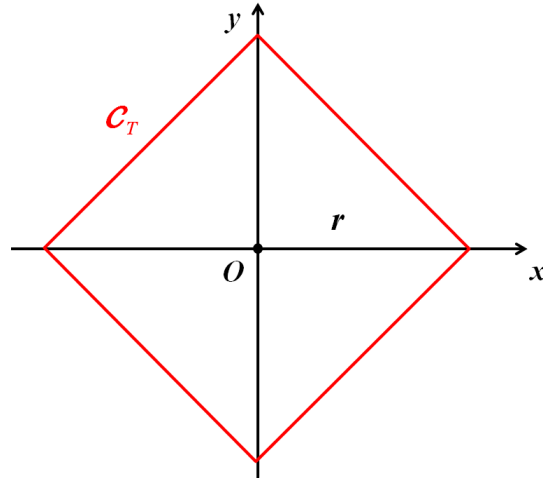
Evritim çemberler üzerinde tanımlı olduğundan Taksi Düzlemindeki çemberlerin durumu da önem arz eder. Bir *Taksi Çemberi* sabit bir noktaya eşit taksi uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir.  $M = (m_1, m_2)$ ,  $r \in R$  ve  $r > 0$  olmak üzere  $M$  merkezli,  $r$  yarıçaplı *Taksi Çemberi*

$$C_T = \{P \mid d_T(P, M) = r, r > 0\} = \{(x, y) \mid |x - m_1| + |y - m_2| = r, r > 0\}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak  $M = O = (0, 0)$  seçilirse

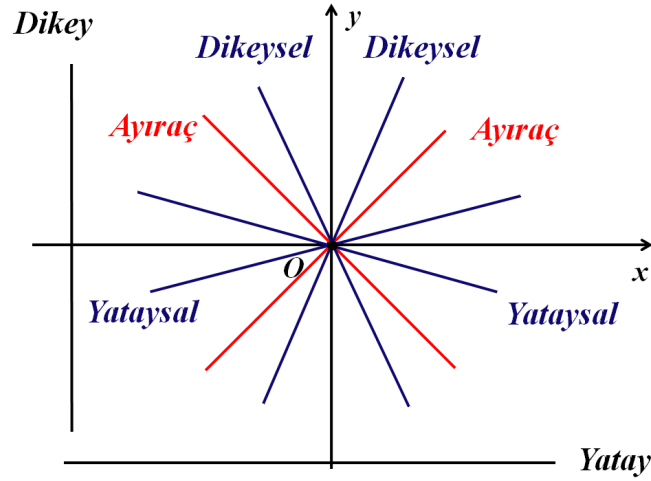
$$C_T = \{(x, y) \mid |x| + |y| = r, r > 0\}$$

olur.  $O$  merkezli  $r$  yarıçaplı bir taksi çemberi Şekil 2.3. de gösterilmektedir.



Şekil 2.3.  $O$  merkezli  $r$  yarıçaplı bir taksi çemberi

Analitik düzlemde doğrular ise şu şekilde sınıflandırılır. Bir  $l \dots ax + by + c = 0$  doğrusu verilsin.  $m = -\frac{a}{b}$  ve  $m$  eğim olmak üzere  $l$  doğrusuna,  $|m| = 0$  ise, *yatay doğru*;  $|m| = \infty$  ise, *dikey doğru*;  $|m| > 1$  ise, *dikeysel doğru*;  $|m| < 1$  ise, *yataysal doğru* ve  $|m| = 1$  ise, *ayıraç doğru* denir (Krause, 1975;Ekmekçi,2001) (Şekil 2.4.).



Şekil 2.4. Analitik düzlemde doğru çeşitleri

## 2.1 Taksi Evritim (T-evritim)

Gösterim kolaylığı açısından Öklidyen Düzlemde evritim çemberi için kullanılan notasyona benzer bir notasyon Taksi Düzlemi için de kullanılmaktadır.

**Notasyon:**  $O$  merkezli  $r_T$  yarıçaplı taksi çemberi  $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_T(O, r_T)$  olsun.  $\mathcal{C}_T$ , Taksi Düzleminde Evritim Çemberini ifade etmektedir.

**Tanım 2.1.1:**  $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_T(O, r_T)$  taksi evritim çemberi olmak üzere Taksi Düzleminde evritim  $I_{T(O, r_T)}$  ile gösterilsin. Her  $P \neq O$  için,  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  koşulunu sağlayan  $\overrightarrow{OP}$  ışını üzerindeki  $P'$  noktasına  $P$  nin *Taksi Evriği* ya da kısaca *T-evriği* denir.  $I_{T(O, r_T)}(P) = P'$  şeklinde gösterilir.  $O$  noktasına *T-evritim merkezi (kutbu)*,  $\mathcal{C}_T$  çemberine *T-evritim çemberi*,  $r_T$  yarıçapına *T-evritim yarıçapı*,  $(r_T)^2$  sayısına da *T-evritim kuvveti* denir.

Öklidyen Düzleme benzer şekilde bir  $P$  noktasının evriği  $P'$  noktası ise,  $P'$  noktasının evriği de  $P$  dir. Dolayısıyla Taksi Evritim dönüşümünün involusyonu da 2 dir. Yine açık olarak görülebilir ki T-evritim çemberinin içinde kalan noktaların T-evrikleri çemberin dışında, dışında kalan noktaların T-evrikleri de çemberin içinde olur.

$P$  noktasının  $\mathcal{C}_T$  üzerinde olması halinde ise,  $d_T(O, P) = r_T$  olur. Buradan  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  koşulunun sağlanması için  $d_T(O, P') = r_T$  olmalıdır.



Bu da  $P = P'$  olmasını gerektirir. Tersine  $P = P'$  olması durumu formülde yerine yazılacak olursa,  $(d_T(O, P))^2 = (r_T)^2$  ve dolayısıyla  $d_T(O, P) = r_T$  olur. Bu ise T-evriğine eşit olan noktaların  $\mathcal{C}_T$  üzerinde olması anlamına gelir.

Öklidyen Düzlemde tanım kümesini düzlemin tamamı yapmak ve döndürümü örten yapmak için sonsuzdaki bir nokta( $\infty$  noktası) ilave edilerek düzlem genişletilmiştir. Taksi Düzleminde de  $I_{T(O, r_T)}(O) = \infty$  ve  $I_{T(O, r_T)}(\infty) = O$  olacak biçimde  $O$  noktaya karşılık gelen  $\infty$  noktası ilave edilerek benzer işlem gerçekleştirilsin. Dolayısıyla  $O$  noktası ve T-evritim çemberi üzerindeki noktaların T-evrikleri tamamlanmış olur.

$\mathcal{C}_T$  nin içindeki  $O$  dan farklı noktalar ile  $\mathcal{C}_T$  nin dışında kalan noktaların T-evrikleri incelenmeden önce Öklidyen Düzlemde bir noktanın evriği inşa edilirken kullanılan sentetik yöntemin, Taksi Düzleminde bir noktanın T-evriğinin inşası için uygulanabilir olup olmadığının gösterilmesi gerekir.

Taksi çemberinde teğetler köşesel teğetler ve kenarsal teğetler olmak üzere ikiye ayrılır. Düzlemde bir  $\mathcal{C}$  taksi çemberi ile bir  $d$  doğrusu verilsin. " $d$ ,  $\mathcal{C}$  ye köşesel teğettir  $\iff d \cap \mathcal{C} = \{A\}$ ,  $\mathcal{C}$  nin bir köşesidir." Yani doğru ile taksi çemberi, çemberin bir tek köşe noktasında kesişiyorsa doğru taksi çembere *köşesel teğettir* denir.

" $d$ ,  $\mathcal{C}$  ye kenarsal teğettir  $\iff d \cap \mathcal{C} = a : a$ ,  $\mathcal{C}$  nin bir kenarıdır." Yani doğru ile taksi çemberi, çemberin bir tek kenarı boyunca kesişiyorsa doğru taksi çembere *kenarsal teğettir* denir. (Ekmekçi,2001)

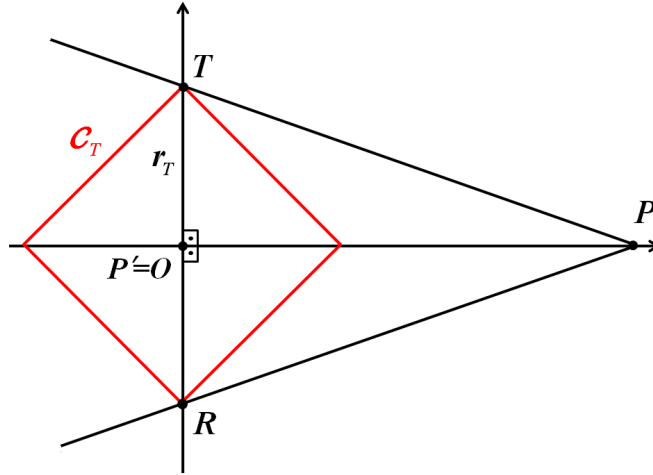
Aşağıda yapılan incelemede sadece köşesel teğetler incelenmektedir. Bahsedilen yöntemin Taksi Düzlemi için kısa bir hatırlatması şu şekildedir:

$\mathcal{C}_T$  nin dışında herhangi bir  $P$  noktası alınsın.  $P$  noktasından  $\mathcal{C}_T$  ye teğetler çizilsin. Çizilen bu teğetlerin çembere değme noktalarından  $\overrightarrow{OP}$  ışımına dikler inilsin. İnilen bu dikmelerin  $\overrightarrow{OP}$  ışımını kestiği nokta  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  koşulunu sağlayan  $P'$  noktası olmalıdır.

$\overleftarrow{OP}$  doğrusunun eğimine bağlı olacak şekilde  $P$  noktasının farklı konumları için

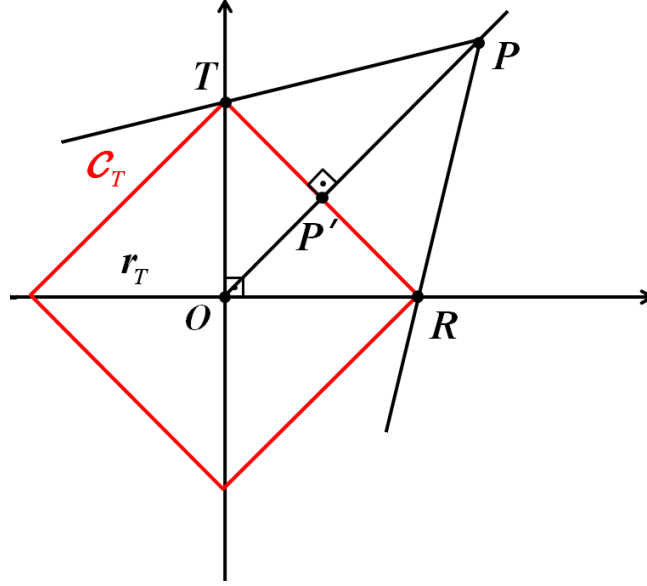
$P'$  noktaları bu yöntemle göre belirlenerek yöntemin doğru olup olmadığı aşağıda incelenmektedir.

**I. Durum:**  $\overleftrightarrow{OP}$  yatay bir doğru olsun. Bu doğru üzerinde  $\mathcal{C}_T$  nin dışındaki  $P$  noktalarından  $\mathcal{C}_T$  ye teğetler çizildikten sonra teğetlerin değme noktalarından  $\overleftrightarrow{OP}$  ışımına dikler inilsin. Dikler  $\overleftrightarrow{OP}$  ışımını  $O$  noktasında kesmektedir (Şekil 2.5.). Bu durumdaki her bir nokta için  $P' = O$  olur. Oysaki  $O$  noktası tanımda  $\infty$  noktasına karşılık tutulmuştur. Ayrıca  $d_T(O, P') = d_T(O, O) = 0$  olacağından  $r_T = 0$  olur. Bu ise bir çelişkidir.  $\overleftrightarrow{OP}$  nin dikey bir doğru olması halinde de benzer durum söz konusudur. Dolayısıyla bu durumda öklidyen düzlemdeki nokta evriğinin taksi karşılığı doğru değildir.



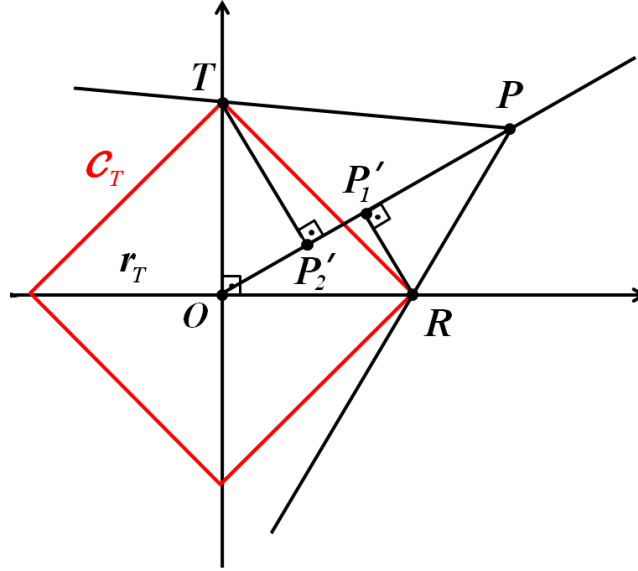
Şekil 2.5. 1. Durum:  $\overleftrightarrow{OP}$  yatay bir doğru iken  $\mathcal{C}_T$  nin dışındaki bir  $P$  noktasının  $T$ -evriği

**II. Durum:**  $\overleftrightarrow{OP}$  ayraç doğrularından biri olsun. Bu doğru üzerinde  $\mathcal{C}_T$  nin dışındaki  $P$  noktaları için teğetler çizilerek metod uygulandığında bu noktaların  $T$ -evrikleri  $\mathcal{C}_T$  üzerinde bir tek noktadır (Şekil 2.6.). Bu durumda  $d_T(O, P') = r_T$  olur ve  $d_T(O, P) = r_T$  olmasını gerektirir. Oysaki  $P$  noktaları  $\mathcal{C}_T$  nin dışında seçilmişti. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla yine evritim için bilinen sentetik yöntemin taksi karşılığı uygulanabilir değildir.



Şekil 2.6. 2.Durum:  $\overleftrightarrow{OP}$  ayıraç doğrusu iken  $C_T$  nin dışındaki bir  $P$  noktasının  $T$ -evriği

**III. Durum:**  $\overleftrightarrow{OP}$  yataysal bir doğru olsun. Bu doğru üzerinde  $C_T$  nin dışındaki bir  $P$  noktası için benzer işlem tekrarlandığında bu noktanın  $T$ -evriği  $P'_1$  ve  $P'_2$  gibi farklı iki noktadır (Şekil 2.7.). Bu ise fonksiyon tanımıyla çelişmektedir.  $\overleftrightarrow{OP}$  nin dikeysel bir doğru olması halinde de benzer durum söz konusudur. Böylece bu durum için de yine uygun bir taksit karşılık bulunamamaktadır.



Şekil 2.7. 3.Durum:  $\overleftrightarrow{OP}$  yataysal bir doğru iken  $C_T$  nin dışındaki bir  $P$  noktasının  $T$ -evriği

Bilindiği üzere bir önermenin yanlışlığının ispatı için bir örnek yeterlidir. İncelenen bu üç durum Taksi düzleminde bir noktanın T-evriğini inşa ederken kullanılan sentetik yöntemin, Öklidyen Düzlem için kullanılan metot ile aynı olamayacağını gösterir. Dolayısıyla Taksi Düzlemi için yeni bir yöntemin gerekliliği ortaya çıkar. Çalışmanın bu kısmında yeni bir yöntem belirlenmekte ve ayrıntılı olarak incelenmektedir. Artık bir noktanın T-evriği araştırılırken bu yöntem kullanılmaktadır.

## 2.2 Bir Noktanın T-evriği

Bu kısımda  $C_T$  nin içindeki  $O$  dan farklı noktalar ile  $C_T$  nin dışında kalan noktaların T-evrikleri incelenmektedir. Yatay veya dikey bir doğru üzerinde bulunan herhangi iki nokta arasındaki taksi uzaklığının öklidyen uzaklığa eşit olduğu daha önce ifade edilmişti. Bu durum göz önünde bulundurularak yatay veya dikey doğru üzerinde bulunup bulunmaması haline göre  $P$  noktasının T-evriği araştırılmaktadır. Öncelikli olarak araştırma esnasında kullanılmakta olan benzerlik kavramından bahsedilmektedir.

**Tanım 2.2.0.1:** Karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenlere *benzer üçgenler* denir. Öklidyen Düzlemdeki  $\triangle ABC$  ve  $\triangle DEF$  üçgenleri için

$$\mu(\widehat{A}) = \mu(\widehat{D})$$

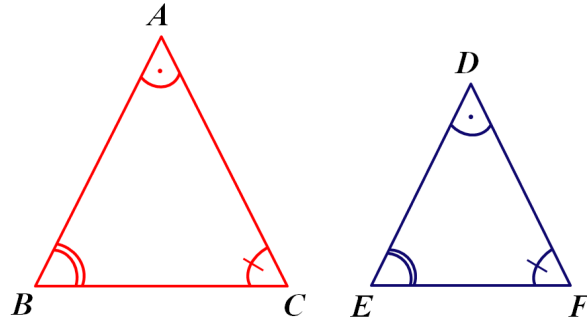
$$\mu(\widehat{B}) = \mu(\widehat{E})$$

$$\mu(\widehat{C}) = \mu(\widehat{F})$$

iken

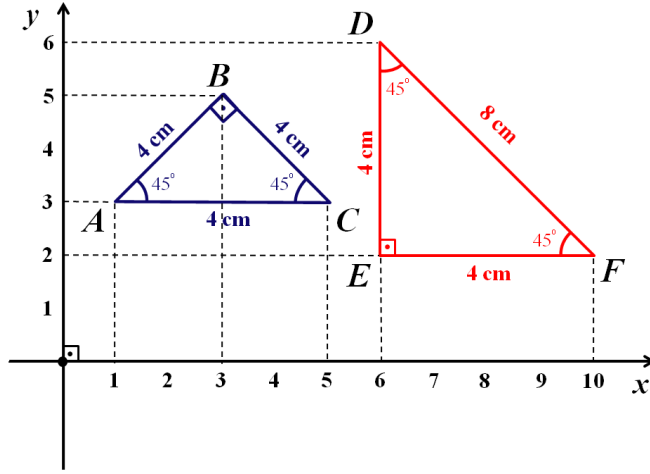
$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(E, F)} = \frac{d_E(A, C)}{d_E(D, F)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(D, E)} = k$$

ise  $\triangle ABC$  ve  $\triangle DEF$  üçgenleri benzerdir denir (Thales).  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  şeklinde gösterilir (Yazgan vd., 2012) (Şekil 2.8.).



Şekil 2.8. İki üçgenin benzerliği

Taksi Düzleminde ise üçgenlerde benzerlik tam anlamıyla sağlanmaz. Örneğin, Şekil 2.9. daki iki üçgenin karşılıklı açıları eşit olmasına karşın tüm kenarları orantılı değildir.



Şekil 2.9. Taksi Düzleminde benzer olmayan iki üçgen

Yani  $\triangle ABC$  ve  $\triangle DEF$  üçgenleri için,

$$\mu(\widehat{A}) = \mu(\widehat{D})$$

$$\mu(\widehat{B}) = \mu(\widehat{E})$$

$$\mu(\widehat{C}) = \mu(\widehat{F})$$

olduğu halde

$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(E, F)} = \frac{d_T(A, B)}{d_T(D, E)} \neq \frac{d_T(A, C)}{d_T(D, F)}$$

dir. Bu da benzerliğin bu üçgenler arasında sağlanmadığını gösterir.

Ancak bu çalışmada geliştirilen yeni yöntemde de kullanılan bir özel durum için Taksi Düzleminde benzerlikten söz edilebilir.

**Yardımcı Teorem 2.2.0.2:** Taksi Düzlemindeki dik üçgenlerin eğer dik kenarları yatay ve dikey doğrular üzerinde ve diğer açıları da karşılıklı olarak eşit ise bu üçgenler arasında benzerlik sağlanır.

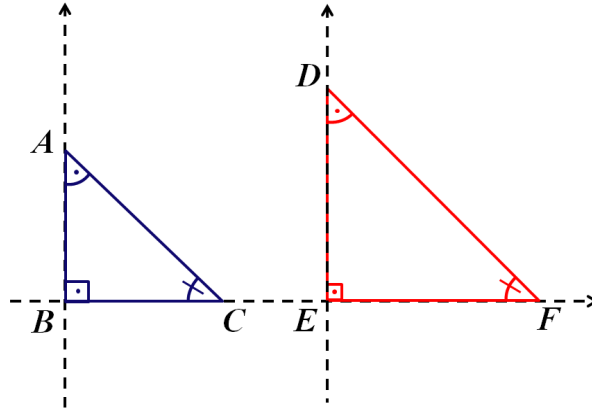
**İspat:**  $\triangle ABC$  ve  $\triangle DEF$  dik kenarları yatay ve dikey doğrular üzerinde olan herhangi iki dik üçgen olsun. Ayrıca

$$\mu(\widehat{A}) = \mu(\widehat{D})$$

$$\mu(\widehat{B}) = \mu(\widehat{E})$$

$$\mu(\widehat{C}) = \mu(\widehat{F})$$

eşitliği mevcut olsun.



Şekil 2.10. *Taksi Düzleminde benzer iki üçgen*

Gösterilmesi gereken

$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(E, F)} = \frac{d_T(A, B)}{d_T(D, E)} = \frac{d_T(A, C)}{d_T(D, F)} = k$$

dır. Üçgenlerin dik kenarları yatay ve dikey doğrular üzerinde olduğundan bu kenarların uzunlukları öklidyen uzaklığa eşittir. Bu sebeple dik kenarlar arasında

$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(E, F)} = \frac{d_T(A, B)}{d_T(D, E)} = k$$

eşitliği yazılabilir. Orantı kuralından

$$\frac{d_T(B, C)}{d_T(E, F)} = \frac{d_T(A, B)}{d_T(D, E)} = \frac{d_T(B, C) + d_T(A, B)}{d_T(E, F) + d_T(D, E)} = \frac{d_T(A, C)}{d_T(D, F)} = k$$

sonucuna ulaşılır. Bu da  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  olması anlamına gelir.  $\square$

Artık bir noktanın t-evriği incelenebilir.

### 2.2.1 P noktasının $\mathcal{C}_T$ nin dışında ve $O$ merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde olması halinde T-evriğinin inşası

$P$  noktası  $\mathcal{C}_T$  nin dışında bulunan ve  $O$  merkezinden geçen yatay doğru üzerinde olan bir nokta olsun. Dikey doğru üzerinde bulunduğunda da aynı özellikler geçerli olduğundan buradaki seçim önemsizdir ve bu hallerden birini incelemek yeterlidir.  $P$  noktasından  $\mathcal{C}_T$  ye teğetler çizilsin. Çizilen teğetler  $\overleftrightarrow{OP}$  doğrusuna göre simetriktir. Teğetlerden herhangi birinin  $\mathcal{C}_T$  ye değme noktası  $T$  olsun.  $\angle OPT \cong \angle OTP'$  olacak şekilde  $\overleftrightarrow{OP}$  ışını üzerindeki  $P'$  noktası alınsın. Ardından  $\overline{TP'}$  doğru parçası oluşturulsun. Yardımcı Teorem 2.2.0.2 gereği  $\Delta OPT \sim \Delta OTP'$  benzerliği mevcuttur.  $O$  halde bu iki üçgen arasında

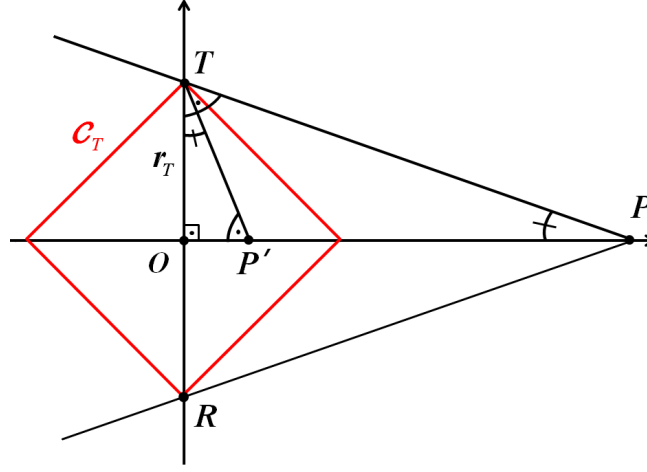
$$\frac{d_T(O, P')}{d_T(O, T)} = \frac{d_T(O, T)}{d_T(O, P)}$$

bağıntısı yazılabilir.  $d_T(O, T) = r_T$  olduğundan

$$\frac{d_T(O, P')}{r_T} = \frac{r_T}{d_T(O, P)}$$

olur. Buradan  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  sonucuna ulaşılır. Bu da  $P'$  noktasının  $P$  nin T-evriği olması anlamına gelir (Şekil 2.11.).

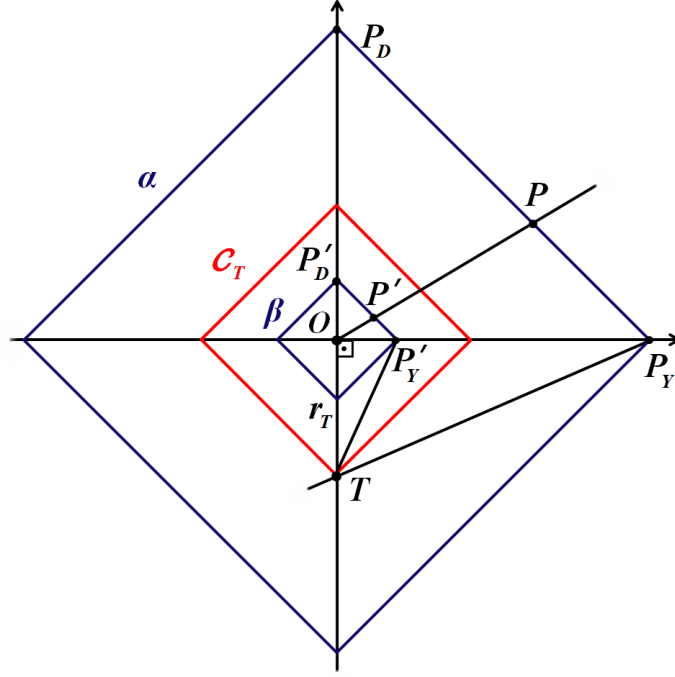




Şekil 2.11.  $P$ ,  $\mathcal{C}_T$  nin dışında ve  $O$  merkezinden geçen yatay doğru üzerinde bir nokta ise  $T$ -evriğinin inşası

### 2.2.2 $P$ noktasının $\mathcal{C}_T$ nin dışında ve $O$ merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde olmaması halinde $T$ -evriğinin inşası

$P$  noktası,  $\mathcal{C}_T$  nin dışında ve  $O$  merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta olarak seçilsin.  $O$  merkezli,  $d_T(O, P)$  yarıçaplı bir taksi çemberi  $\alpha$  olsun.  $P$ ,  $P_Y$  ve  $P_D$  doğrusal olacak şekilde  $\alpha$  nın  $O$  merkezinden geçen yatay doğruyu kestiği nokta  $P_Y$ , dikey doğruyu kestiği nokta ise  $P_D$  olsun.  $P$ ,  $P_Y$  ve  $P_D$  noktalarının  $T$ -evrikleri de sırasıyla  $P'$ ,  $P'_Y$  ve  $P'_D$  olsun.  $P$ ,  $P_Y$  ve  $P_D$   $\alpha$  üzerinde olduğundan  $d_T(O, P) = d_T(O, P_Y) = d_T(O, P_D)$  dir. Dolayısıyla  $P_Y$  veya  $P_D$  noktalarından herhangi biri seçilip 2.2.1 inşa etme yöntemiyle  $T$ -evriği bulunabilir. Seçilen noktanın  $P_Y$  olması halinde bu noktanın  $T$ -evriği olan  $P'_Y$  bulunur. Daha sonra  $O$  merkezli  $d_T(O, P'_Y)$  yarıçaplı bir taksi çemberi çizilerek  $\beta$  ile gösterilsin.  $d_T(O, P) = d_T(O, P_Y) = d_T(O, P_D)$  eşitliği mevcut olduğundan  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  koşulu gereği  $d_T(O, P') = d_T(O, P'_Y) = d_T(O, P'_D)$  eşitliği de vardır. Dolayısıyla  $\beta$  çemberi ile  $\overrightarrow{OP}$  ışınının kesiştiği nokta  $P$  nin  $T$ -evriği olan  $P'$  noktasıdır (Şekil 2.12.).



Şekil 2.12.  $P$ ,  $\mathcal{C}_T$  nin dışında ve  $O$  merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta ise  $T$ -evriğinin inşası

### 2.2.3 $P$ noktasının $\mathcal{C}_T$ nin içinde ve $O$ merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde olması halinde $T$ -evriğinin inşası

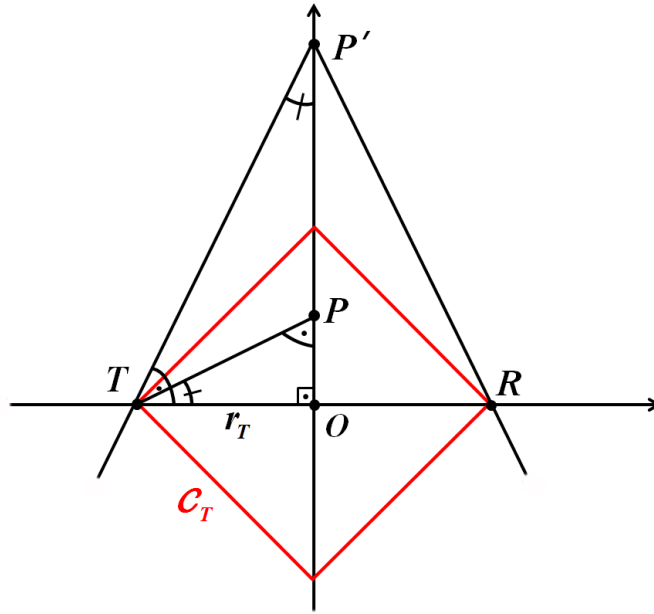
$P$  noktasının  $\mathcal{C}_T$  nin dışında olduğu duruma benzer şekilde burada da  $P$  nin  $O$  merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunduğu hallerden birini incelemek yeterlidir. O halde  $P$  noktası  $\mathcal{C}_T$  nin içinde bulunan ve  $O$  merkezinden geçen dikey doğru üzerinde olan bir nokta olsun.  $P$  dikey doğru üzerinde olduğundan bu nokta  $\mathcal{C}_T$  nin  $O$  dan geçen yatay doğru üzerindeki köşeleri ile birleştirilsin. ( $P$  yatay doğru üzerinde olsaydı  $\mathcal{C}_T$  nin dikey doğru üzerindeki köşeleri ile birleştirilecekti.) Bu köşelerden herhangi biri  $R$  olsun.  $\angle OPR \cong \angle ORP'$  olacak şekilde  $\overrightarrow{OP}$  ışını üzerindeki  $P'$  noktası alınsın. Yardımcı Teorem 2.2.0.2 gereği  $\triangle OPR \sim \triangle ORP'$  benzerliği mevcuttur. Buradan

$$\frac{d_T(O, P)}{d_T(O, R)} = \frac{d_T(O, R)}{d_T(O, P')}$$

eşitliği yazılabilir.  $d_T(O, R) = r_T$  olduğundan

$$\frac{d_T(O, P)}{r_T} = \frac{r_T}{d_T(O, P')}$$

olur ve bu ise  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  koşulunun gerçekleştiğini gösterir. Dolayısıyla  $P'$  noktasının  $P$  nin T-evriği olduğu sonucuna ulaşılır (Şekil 2.13.).

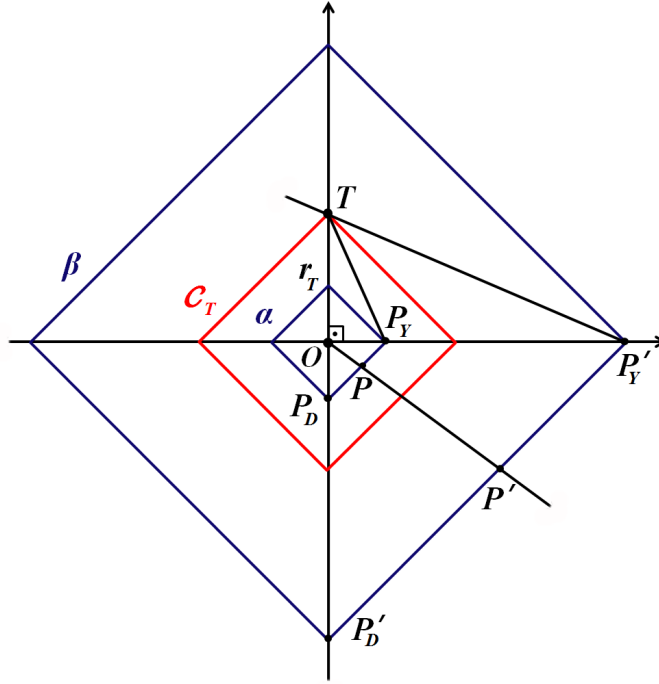


Şekil 2.13.  $P$ ,  $C_T$  nin içinde ve  $O$  merkezinden geçen dikey doğru üzerinde bir nokta ise T-evriğinin inşası

#### 2.2.4 P noktasının $C_T$ nin içinde ve $O$ merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde olmaması halinde T-evriğinin inşası

$P$  noktası,  $C_T$  nin içinde olan ve  $O$  merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta olarak belirlensin.  $O$  merkezli  $d_T(O, P)$  yarıçaplı bir

taksi çemberi  $\alpha$  olsun.  $P$ ,  $P_Y$  ve  $P_D$  doğrusal olacak şekilde  $\alpha$  nın  $O$  merkezinden geçen yatay doğruyu kestiği nokta  $P_Y$ , dikey doğruyu kestiği nokta ise  $P_D$  olsun.  $P$ ,  $P_Y$  ve  $P_D$  noktalarının T-evrikleri de sırasıyla  $P'$ ,  $P'_Y$  ve  $P'_D$  olsun.  $P$ ,  $P_Y$  ve  $P_D$   $\alpha$  üzerinde olduğundan  $d_T(O, P) = d_T(O, P_Y) = d_T(O, P_D)$  dir. Dolayısıyla  $P_Y$  veya  $P_D$  noktalarından herhangi biri seçilip 2.2.3 inşa etme yöntemiyle T-evriği bulunabilir. Seçilen noktanın  $P_Y$  olması halinde bu noktanın T-evriği olan  $P'_Y$  bulunur. Daha sonra  $O$  merkezli  $d_T(O, P'_Y)$  yarıçaplı bir taksi çemberi çizilerek  $\beta$  ile gösterilsin.  $d_T(O, P) = d_T(O, P_Y) = d_T(O, P_D)$  eşitliği mevcut olduğundan  $d_T(O, P) d_T(O, P') = (r_T)^2$  koşulu gereği  $d_T(O, P') = d_T(O, P'_Y) = d_T(O, P'_D)$  eşitliği de vardır. Dolayısıyla  $\beta$  çemberi ile  $\overrightarrow{OP}$  ışınının kesiştiği nokta  $P$  nin T-evriği olan  $P'$  noktasıdır (Şekil 2.14.).



Şekil 2.14.  $P$ ,  $C_T$  nin içinde ve  $O$  merkezinden geçen yatay veya dikey doğru üzerinde bulunmayan bir nokta ise T-evriğinin inşası

### 2.3 Bir Noktanın T-evriğinin Analitik Olarak İncelenmesi

$I_{T(O,r_T)}$  bir T-evritim ve bir  $P$  noktasının T-evriği  $P'$  olmak üzere  $P'$  noktasının koordinatları, T-evritim yarıçapı ve  $P$  nin koordinatları cinsinden analitik olarak belirlenebilir.

$O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x_1, y_1)$  ve  $P' = (x_2, y_2)$  koordinatlarına sahip noktalar olsun. Analitik düzlemde Öklidyen uzaklık için bir doğru parçasını belli oranda bölen noktaların koordinatları ile parçaların uzunlukları arasında

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{d_E(O, P')}{d_E(O, P)} \quad (1)$$

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{d_E(O, P')}{d_E(O, P)} \quad (2)$$

eşitlikleri vardır. (1) ve (2) de kullanılan koordinatlar aynı eksenler üzerinde olduğundan Öklidyen uzaklık Taksi uzaklığına eşittir. Dolayısıyla bu eşitlikler Taksi uzunluğu için de geçerlidir. O halde

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{d_T(O, P')}{d_T(O, P)} \quad (1)$$

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{d_T(O, P')}{d_T(O, P)} \quad (2)$$

dır. Birinci eşitlik düzenlenecek olursa

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{d_T(O, P')d_T(O, P)}{d_T(O, P)d_T(O, P)}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
x_2 - x_0 &= \frac{d_T(O, P')d_T(O, P)(x_1 - x_0)}{(d_T(O, P))^2}, \\
x_2 - x_0 &= \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}, \\
x_2 &= \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer durum ikinci eşitlik yoluyla  $y_2$  için de tekrarlandığında

$$y_2 = \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0, \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0 \right)$$

sonucuna ulaşılır.  $O = (0, 0)$  başlangıç noktası seçilerek

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2 x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}, \frac{r_T^2 y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \right)$$

özel durumu bulunur.

## 2.4 Bir Noktanın T-evriğini İnşa Ederken Kullanılan Sentetik Yöntemin Analitik Olarak İncelenmesi

Bu kısımda bir noktanın T-evriğini bulmak için geliştirilen sentetik yöntemin doğruluğu analitik yönden araştırılmaktadır.

$I_{T(O, r_T)}$  bir T-evritim ve  $P'$  noktası  $P$  nin T-evriği olmak üzere  $O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x_1, y_1)$  ve  $P' = (x_2, y_2)$  koordinatlarına sahip noktalar olsun.  $P$  noktası  $O$  dan farklı ve  $\mathcal{C}_T$  üzerinde olmayan herhangi bir nokta olarak seçilsin.  $O$  merkezli  $d_T(O, P)$  yarıçaplı taksi çemberi çizilsin ve  $\alpha$  ile gösterilsin.  $\alpha$  nın denklemi

$$|x - x_0| + |y - y_0| = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

dır.  $\alpha$  çemberi  $O$  merkezinden geçen yatay ve dikey doğrular ile toplam dört noktada kesişir.  $O$  merkezinden geçen yatay doğru  $y = y_0$ , dikey doğru  $x = x_0$  dir. Dolayısıyla  $\alpha$  nın denklemi ve  $x = x_0$  ortak çözümlürse

$$|y - y_0| = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

olur.

**1.Durum:**  $y > y_0$  olması halinde

$$\begin{aligned} y - y_0 &= |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| \\ y &= |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + y_0 \end{aligned}$$

dır. Çözüm  $P_D = (x_0, |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + y_0)$  noktasıdır.

**2.Durum:**  $y < y_0$  olması halinde

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) \\ y &= -(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) + y_0 \end{aligned}$$

dır. Buradan çözüm  $P_D = (x_0, -(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) + y_0)$  noktası elde edilir.

$\alpha$  nın denklemi ve  $y = y_0$  ortak çözümlürse

$$|x - x_0| = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

olur.

**1.Durum:**  $x > x_0$  olması halinde

$$\begin{aligned} x - x_0 &= |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| \\ x &= |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + x_0 \end{aligned}$$

dır.  $P_Y = (|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + x_0, y_0)$  noktası elde edilir.

**2.Durum:**  $x < x_0$  olması halinde

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) \\ x &= -(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) + x_0 \end{aligned}$$

dır. Buradan da sonuç olarak  $P_Y = (-(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) + x_0, y_0)$  noktası bulunur.

Bulunan bu dört noktadan herhangi biri seçilerek işleme devam edilebileceğinden buradaki seçim önemsizdir. Seçilen nokta  $P_D = (x_0, -(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) + y_0)$  olsun.  $P_D$  den  $\mathcal{C}_T$  ye teğetler çizilip Yardımcı Teorem 2.2.0.2 gereği benzer üçgenler oluşturulsun. Buna göre;  $\Delta OP_D T \sim \Delta OT P'_D$  benzerliği mevcuttur. O halde

$$\frac{d_T(O, T)}{d_T(O, P'_D)} = \frac{d_T(O, P_D)}{d_T(O, T)}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{r_T}{d_T(O, P'_D)} = \frac{|x_0 - x_0| + |-(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|) + y_0 - y_0|}{r_T}$$

olur ve

$$d_T(O, P'_D) = \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|}$$

elde edilir. Yarıçapı  $d_T(O, P'_D)$  uzunluğunda ve  $O$  merkezli bir taksit çemberi çizilerek  $\beta$  ile gösterilsin.  $\beta$  nın denklemi

$$|x - x_0| + |y - y_0| = \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|}$$

dir. Tanım 2.1.1 e göre  $P$  nin T-evriği olan nokta  $\overrightarrow{OP}$  ışını üzerinde olması gerektiğinden  $\overleftrightarrow{OP}$  doğrusunun denklemi bulunmalıdır. Buna göre  $\overleftrightarrow{OP}$  nin denklemi

$$y = \frac{(y_1 - y_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1$$

dir.  $P' = \overrightarrow{OP} \wedge \beta$  olduğundan bu iki denklem ortak çözülür.

$$\begin{aligned} |x - x_0| + \left| \frac{(y_1 - y_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)} + (y_1 - y_0) \right| &= \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|}, \\ |x - x_0| + \left| (y_1 - y_0) \left[ \frac{(x - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1 \right] \right| &= \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|}, \\ |x - x_0| + \left| (y_1 - y_0) \left[ \frac{x - x_1 + x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \right] \right| &= \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
| x - x_0 | + | (y_1 - y_0) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} | &= \frac{r_T^2}{| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |}, \\
| x - x_0 | + \frac{| y_1 - y_0 | | x - x_0 |}{| x_1 - x_0 |} &= \frac{r_T^2}{| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |}, \\
| x - x_0 | \left[ 1 + \frac{| y_1 - y_0 |}{| x_1 - x_0 |} \right] &= \frac{r_T^2}{| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
| x - x_0 | \frac{(| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |)}{| x_1 - x_0 |} &= \frac{r_T^2}{| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |}, \\
| x - x_0 | &= \frac{r_T^2 | x_1 - x_0 |}{(| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |)^2},
\end{aligned}$$

Buradan

$$| x_2 - x_0 | = \frac{r_T^2 | x_1 - x_0 |}{(| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |)^2}$$

elde edilir.  $O$ ,  $P$  ve  $P'$  noktaları incelenecek olursa; konumları  $O-P-P'$ ,  $O-P'-P$ ,  $P-P'-O$  ve  $P'-P-O$  durumlarından biri şeklinde olacağı görülür. Çünkü  $O$ ,  $P$  ve  $P'$  noktaları  $\overrightarrow{OP}$  ışını üzerindedir ve  $O$  noktası bu ışının başlangıç noktasıdır. Bu da  $O$  noktasının  $P$  ve  $P'$  arasında olamayacağını gösterir. Dolayısıyla  $O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x_1, y_1)$  ve  $P' = (x_2, y_2)$  koordinatlarına sahip noktalar olmak üzere; bu noktaların koordinatları için mümkün olan tüm durumlar

$x$  koordinatları için     $y$  koordinatları için

$$x_0 < x_1 < x_2 \qquad y_0 < y_1 < y_2$$

$$x_0 < x_2 < x_1 \qquad y_0 < y_2 < y_1$$

$$x_1 < x_2 < x_0 \qquad y_1 < y_2 < y_0$$

$$x_2 < x_1 < x_0 \qquad y_2 < y_1 < y_0$$

şeklinde. Yani  $x_1$  ve  $x_2$ ,  $x_0$  m aynı tarafındadır. Dolayısıyla  $| x_1 - x_0 |$  ve  $| x_2 - x_0 |$  mutlak değer dışına aynı işaretle çıkar. O halde

$$x_2 = \frac{r_T^2 (x_1 - x_0)}{(| x_1 - x_0 | + | y_1 - y_0 |)^2} + x_0$$

elde edilir.  $\beta$  nın denkleminde  $x_2$  yerine yazılarak  $y_2$  bulunur.

$$\left| \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0 - x_0 \right| + |y - y_0| = \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|}$$

$$|y - y_0| = \frac{r_T^2}{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|} - \frac{r_T^2 |x_1 - x_0|}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}$$

$$|y - y_0| = \frac{r_T^2 |x_1 - x_0| + r_T^2 |y_1 - y_0| - r_T^2 |x_1 - x_0|}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}$$

$$|y - y_0| = \frac{r_T^2 |y_1 - y_0|}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}$$

Buradan

$$|y_2 - y_0| = \frac{r_T^2 |y_1 - y_0|}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2}$$

elde edilir.

$x$  koordinatı için bahsedilen durumlara benzer şekilde  $y$  koordinatı için de aynı şeyler söylenebilir. Yani  $|y_2 - y_0|$  ve  $|y_1 - y_0|$  mutlak değer dışına aynı işaretlerle çıkar.  $y_2$  koordinatı da

$$y_2 = \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0, \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0 \right)$$

bulunur. Analitik incelemede bulunan formüle burada da ulaşılmış oldu. Burada özel olarak  $O = (x_0, y_0) = (0, 0)$  olarak seçilirse

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2 x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}, \frac{r_T^2 y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \right)$$

şeklinde bulunur. Böylelikle sentetik yöntemin doğruluğu analitik olarak da ispatlanmış oldu. Bu konuyla ilgili birkaç örnek aşağıda incelenmektedir.

**Örnek 2.4.1:** Merkezi  $O = (2, -1)$  noktası, yarıçapı 2 cm olan bir  $\mathcal{C}_T$  çemberine göre T-evritim  $I_{T(O, r_T)}$  olarak tanımlansın.  $P = (4, 1)$  noktasının T-evriğini bulunuz.

**Çözüm:**  $P$  noktasından geçen  $O$  merkezli taksi çemberi çizilsin ve  $\alpha$  ile gösterilsin.  $\alpha$  nın yarıçap uzunluğu  $d_T(O, P)$  dir.

$$d_T(O, P) = |2 - 4| + |1 - (-1)| = |-2| + |2| = 4$$

$\alpha$  nın denklemi  $|x - 2| + |y + 1| = 4$  tür.  $O$  merkezinden geçen yatay doğru  $y = -1$ , dikey doğru  $x = 2$  dir.  $\alpha$  çemberi ile bu doğrulardan herhangi birinin kesişimi olan bir nokta alınır.  $x = 2$  ile  $\alpha$  nın kesişimi bulunsun.

$$|2 - 2| + |y + 1| = 4 \implies |y + 1| = 4$$

Bu durumda ya  $y + 1 = 4$  ya da  $y + 1 = -4$  tür. Dolayısıyla  $y = 3$  ve  $y = -5$  elde edilir. O halde  $x = 2$  doğrusu ile  $\alpha$  çemberi  $(2, 3)$  ve  $(2, -5)$  noktalarında kesişir. Bu iki noktadan herhangi biri seçilerek  $P_D$  ile isimlendirilsin.  $P_D = (2, -5)$  olsun.  $P_D$  noktasından  $\mathcal{C}_T$  ye teğetler çizilip Yardımcı Teorem 2.2.0.2 gereği benzer iki üçgen oluşturulsun. Buna göre teğetin değme noktası  $T$  ve  $P_D$  nin T-evriği  $P'_D$  olmak üzere  $\triangle OP_D T \sim \triangle OTP'_D$  benzerliği mevcuttur. Buradan

$$\frac{d_T(O, T)}{d_T(O, P'_D)} = \frac{d_T(O, P_D)}{d_T(O, T)}$$

yazılabilir.  $d_T(O, T) = r_T = 2$  ve  $d_T(O, P_D) = |2 - 2| + |-1 - (-5)| = 4$  tür. Bulunan değerler denklemde yerine yazıldığında

$$\frac{2}{d_T(O, P'_D)} = \frac{4}{2} \implies d_T(O, P'_D) = 1$$

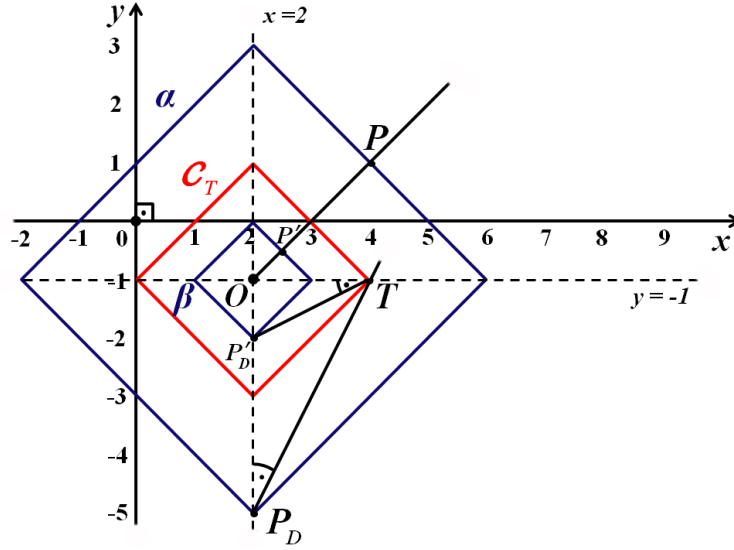
elde edilir.  $d_T(O, P'_D)$  uzunluğunu yarıçap kabul eden  $O$  merkezli bir taksi çemberi çizilerek  $\beta$  ile isimlendirilsin.  $P'_D$  noktasının  $\beta$  üzerinde olduğu açıktır.  $\beta$  nın denklemi  $|x - 2| + |y + 1| = 1$  dir. Ayrıca  $\overleftrightarrow{OP}$  doğrusunun denklemi

$$y = \frac{(1 - (-1))(x - 4)}{(4 - 2)} + 1 \implies y = x - 3$$

tür.  $P' = \overrightarrow{OP} \wedge \beta$  olduğundan  $|x - 2| + |y + 1| = 1$  ve  $y = x - 3$  denklemleri ortak çözümlür. Buna göre

$$|x - 2| + |x - 3 + 1| = 1 \implies |x - 2| = \frac{1}{2}$$

dir. Buradan  $x = 5/2$  ve  $x = 3/2$  elde edilir. Dolayısıyla  $(5/2, -1/2)$  ve  $(3/2, -3/2)$  noktalarına ulaşılır.  $(3/2, -3/2) \notin \overrightarrow{OP}$  olduğundan  $P' = (5/2, -1/2)$  dir (Şekil 2.15.).



Şekil 2.15.  $P = (4, 1)$  noktasının  $T$ -evriğinin inşası

Aynı sonuca verilen değerler formülde yerine yazılarak da ulaşılabilir.

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0, \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0 \right)$$

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{4(4 - 2)}{(|4 - 2| + |1 - (-1)|)^2} + 2, \frac{4(1 - (-1))}{(|4 - 2| + |1 - (-1)|)^2} + (-1) \right)$$

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{4 \cdot 2}{4^2} + 2, \frac{4 \cdot 2}{4^2} + (-1) \right)$$

$$P' = (x_2, y_2) = \left( \frac{5}{2}, \frac{-1}{2} \right).$$

**Örnek 2.4.2:** Merkezi  $O = (0, 0)$  noktası, yarıçapı 3 cm olan bir  $\mathcal{C}_T$  çemberine göre T-evritim  $I_{T(O, r_T)}$  olarak tanımlansın.  $P = (-1, -1/2)$  noktasının T-evriğini bulunuz.

**Çözüm:**  $d_T(O, P) = |0 - (-1)| + |0 - (-1/2)| = |1| + |1/2| = 3/2$  olmak üzere  $P$  noktasından geçen  $O$  merkezli  $\alpha$  çemberinin denklemi  $|x| + |y| = 3/2$  dir.  $O$  merkezinden geçen yatay doğru  $x$  eksenidir, dikey doğru da  $y$  eksenidir. Bu sebeple  $\alpha$  nın  $x$  ekseninde kestiği noktalar  $|x| + |y| = 3/2$  denkleminde  $y = 0$  için elde edilen sonuçtur. O halde  $y = 0$  için,  $|x| + |0| = 3/2 \implies |x| = 3/2$  olduğundan  $x = 3/2$  ve  $x = -3/2$  dir. Buradan  $(3/2, 0)$  ve  $(-3/2, 0)$  noktaları elde edilir.  $P_Y = (-3/2, 0)$  noktası olsun.  $P_Y$  noktası yatay ekseninde olduğundan,  $\mathcal{C}_T$  nin dikey eksenindeki köşeleriyle  $P_Y$  arasında doğru parçası oluşturulsun ve Yardımcı Teorem 2.2.0.2 gereği benzer iki üçgen meydana getirilsin. Buna göre  $\mathcal{C}_T$  nin doğru parçası çizilen köşesi  $T$  ve  $P_Y$  nin T-evriği  $P'_Y$  olmak üzere  $\triangle OP_Y T \sim \triangle OTP'_Y$  benzerliği vardır. Buradan

$$\frac{d_T(O, T)}{d_T(O, P'_Y)} = \frac{d_T(O, P_Y)}{d_T(O, T)}$$

yazılabilir.  $d_T(O, T) = r_T = 3$  ve  $d_T(O, P_Y) = |0 - (-3/2)| + |0 - 0| = 3/2$  dir. Bu değerler denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{3}{d_T(O, P'_Y)} = \frac{3/2}{3} \implies d_T(O, P'_Y) = 6$$

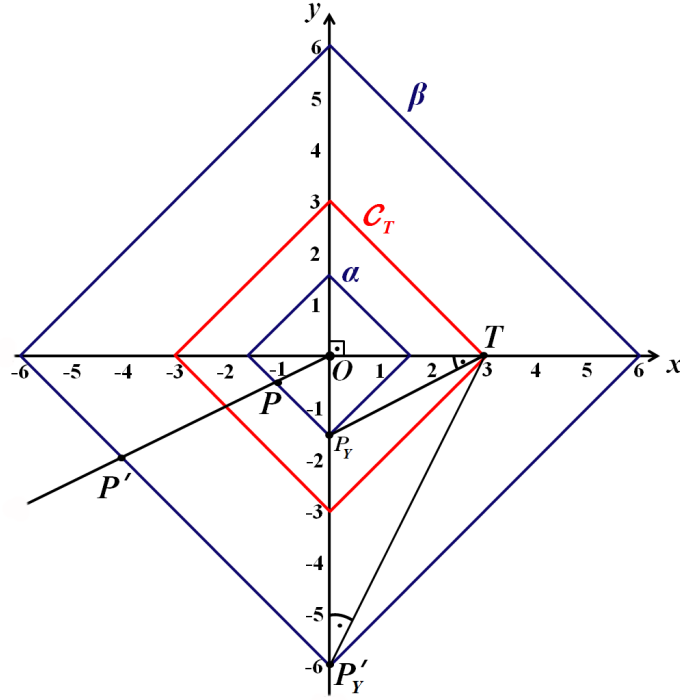
elde edilir.  $\beta$ ,  $d_T(O, P'_Y)$  yarıçaplı ve  $O$  merkezli bir taksit çemberi olsun. Buna göre  $\beta$  nın denklemi  $|x| + |y| = 6$  dir. Ayrıca  $\overleftrightarrow{OP}$  doğrusunun denklemi

$$y = \frac{(-1/2 - 0)(x - (-1))}{(-1 - 0)} + (-1/2) \implies y = x/2$$

dir.  $P' = \overleftrightarrow{OP} \cap \beta$  olduğundan  $|x| + |y| = 6$  ve  $y = x/2$  denklemleri ortak çözümlür. Buna göre

$$\begin{aligned} |x| + |x/2| = 6 &\implies |x| + \frac{|x|}{2} = 6 \\ \implies \left(1 + \frac{1}{2}\right) |x| = 6 &\implies \frac{3}{2} |x| = 6 \\ \implies |x| = 4 &\implies x = 4 \text{ ve } x = -4 \end{aligned}$$

tür. Bu  $x$  değerleri  $y = x/2$  denkleminde yerine yazıldığında  $y = 4/2 = 2$  ve  $y = -4/2 = -2$  değerleri elde edilir. Yani bu noktalar  $(4, 2)$  ve  $(-4, -2)$  dir.  $(4, 2) \notin \overleftrightarrow{OP}$  olduğundan  $P' = (-4, -2)$  noktasıdır (Şekil 2.16.).



Şekil 2.16.  $P = (-1, -1/2)$  noktasının  $T$ -evriğinin inşası

Aynı sonuca verilen değerler formülde yerine yazılarak da ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2 x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}, \frac{r_T^2 y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{3^2(-1)}{(|-1| + |-1/2|)^2}, \frac{3^2(-1/2)}{(|-1| + |-1/2|)^2} \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{-9}{4}, \frac{-9}{4} \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = (-4, -2).
 \end{aligned}$$

**Örnek 2.4.3:** Merkezi  $O = (0, 0)$  noktası, yarıçapı 4 cm olan bir  $C_T$  çemberine göre  $T$ -evritim için  $P = (-5, 2)$  noktasının  $T$ -evriğini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2 x_1}{(|x_1| + |y_1|)^2}, \frac{r_T^2 y_1}{(|x_1| + |y_1|)^2} \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{4^2(-5)}{(|-5| + |2|)^2}, \frac{4^2(2)}{(|-5| + |2|)^2} \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{16(-5)}{49}, \frac{16(2)}{49} \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{-80}{49}, \frac{32}{49} \right).
 \end{aligned}$$

**Örnek 2.4.4:** Merkezi  $O = (-2, -2)$  noktası, yarıçapı 5 cm olan bir  $\mathcal{C}_T$  çemberine göre T-evritim için  $P = (3, 4)$  noktasının T-evriğini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{r_T^2(x_1 - x_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + x_0, \frac{r_T^2(y_1 - y_0)}{(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|)^2} + y_0 \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{5^2(3 - (-2))}{(|3 - (-2)| + |4 - (-2)|)^2} + (-2), \frac{5^2(4 - (-2))}{(|3 - (-2)| + |4 - (-2)|)^2} + (-2) \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( \frac{25(5)}{(5+6)^2} + (-2), \frac{25(6)}{(5+6)^2} + (-2) \right) \\
 P' &= (x_2, y_2) = \left( -\frac{117}{121}, -\frac{92}{121} \right).
 \end{aligned}$$

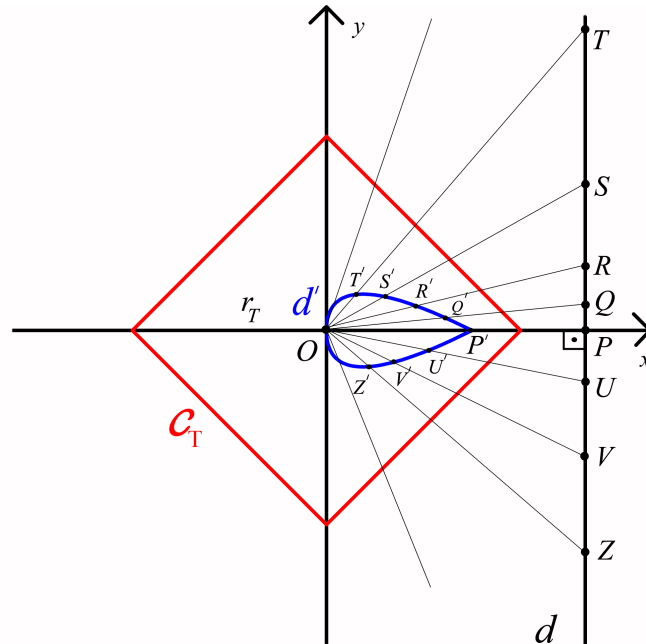
## 2.5 Doğruların T-Evriği

Öklidyen düzlemde evritim incelenirken doğrular eğimden bağımsız bir biçimde değerlendirilmiştir. Taksi Düzleminde eğer doğru T-evritim çemberinin merkezinden geçiyor ise benzer durum söz konusudur. Çünkü tanımdan da ulaşılabacağı üzere T-evritim çemberinin merkezinden geçen doğrunun evriği kendisidir ve dolayısıyla eğim önemsizdir. Ancak doğru T-evritim çemberinin merkezinden geçmiyor ise doğrular eğimlerine göre farklı özellikler göstermektedir. Bu doğruların T-evrikleri incelenirken eğime göre bir sınıflandırma yapılmaktadır. Ayrıca doğruları sentetik

yönden inceleme çok zaman alıcı ve karmaşık olduğundan analitik yönden inceleme yapılmış ve aynı eğim grubunda olan doğruların benzer şekillere sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu sebeple her eğim grubu için sembolik bir doğru alınarak bu doğruların T-evriği gösterilmiştir. Aşağıda gösterilmekte olan her şekil, seçilen doğru üzerinde alınan 2000 noktanın program yardımı ile T-evriklerinin koordinatları bulunduğundan sonra, yine bilgisayar programıyla koordinat kullanarak şekil çizdirme yöntemiyle meydana gelmiştir.

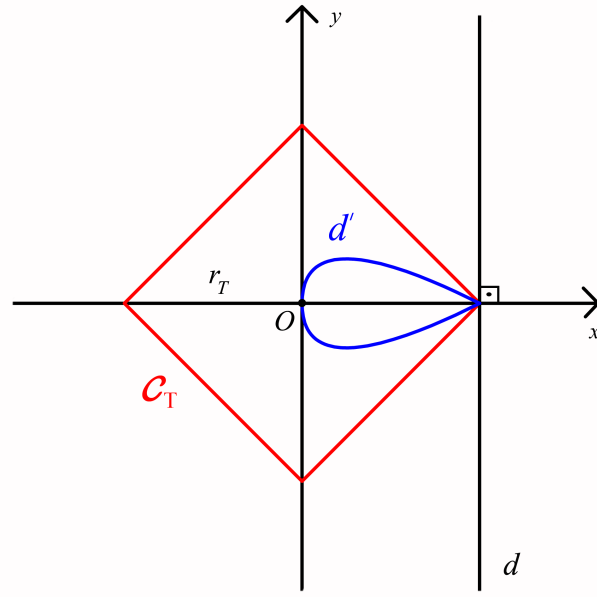
### 2.5.1 $|m| = 0$ veya $|m| = \infty$ olması halinde doğrunun T-evriği

$|m| = 0$  ise doğru yatay,  $|m| = \infty$  ise doğru dikeydir.  $I_{T(O,r_T)}$  bir T-evritim ve  $d$  doğrusunun T-evriği  $d'$  olmak üzere dikey bir doğrunun T-evriği farklı konumlar için aşağıda gösterilmektedir (Şekil 2.17.), (Şekil 2.18.), (Şekil 2.19.). Yatay doğrunun T-evriği ise bu şekil döndürüldüğünde elde edilen şekle benzer bir şekildir.

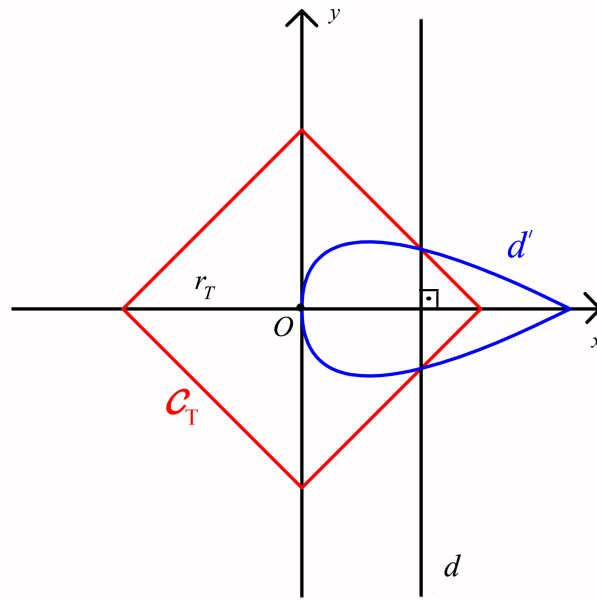


Şekil 2.17.  $C_T$  ile ayrıık dikey doğrulardan biri olan  $d$  doğrusunun T-evriği





Şekil 2.18.  $\mathcal{C}_T$  ye teğet dikey doğrulardan biri olan  $d$  doğrusunun  $T$ -evriği



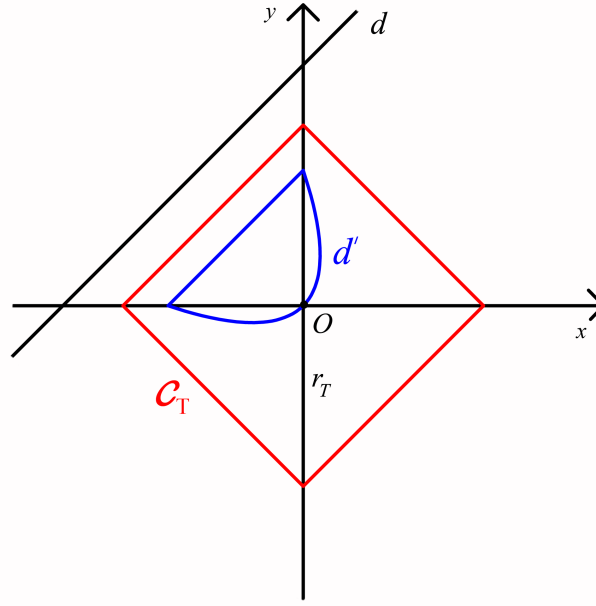
Şekil 2.19.  $\mathcal{C}_T$  yi iki noktada kesen dikey doğrulardan biri olan  $d$  doğrusunun  $T$ -evriği

Gösterilen bu üç durum, dikey bir doğrunun yatay düzlemde ötelenmesiyle oluş-

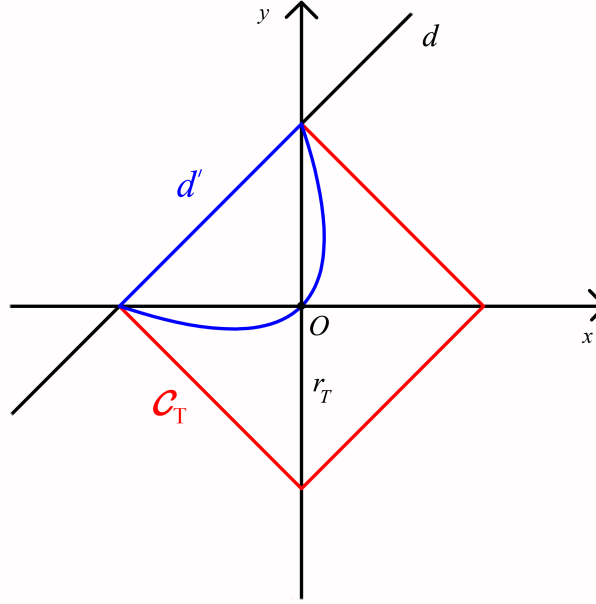
muştur. Tüm durumlarda doğruların T-evriklerinin şekilleri aynı kalmış sadece boyutu değişmiştir.

### 2.5.2 $|m| = 1$ olması halinde doğrunun T-evriği

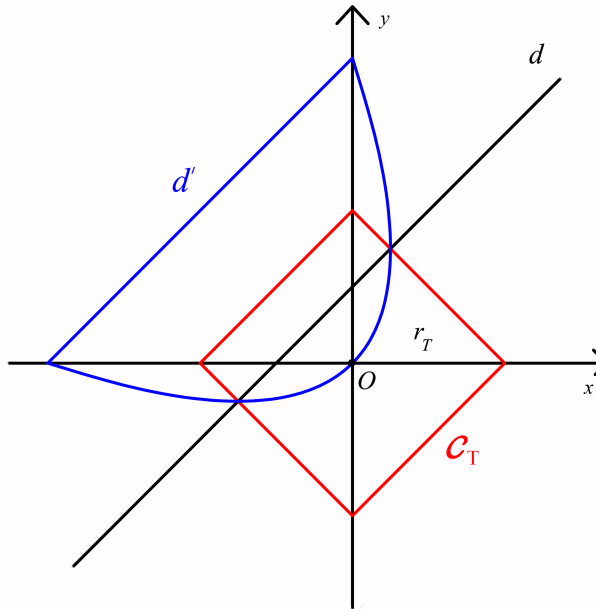
$|m| = 1$  ise doğru bir ayıraç doğrudur.  $I_{T(O,r_T)}$  bir T-evritim ve  $d$  doğrusunun T-evriği  $d'$  olmak üzere  $m = 1$  olan bir doğrunun T-evriği farklı konumlar için aşağıda gösterilmektedir (Şekil 2.20.), (Şekil 2.21.), (Şekil 2.22.).  $m = -1$  olan bir doğrunun T-evriği ise bu şekil döndürüldüğünde elde edilen şekle benzer bir şekildir.



Şekil 2.20.  $C_T$  ile ayırık ve ayıraç doğrularından biri olan  $d$  doğrusunun T-evriği



Şekil 2.21.  $C_T$  nin bir kenarı üzerinde bulunan ve ayıraç doğrularından biri olan  $d$  doğrusunun  $T$ -evriği

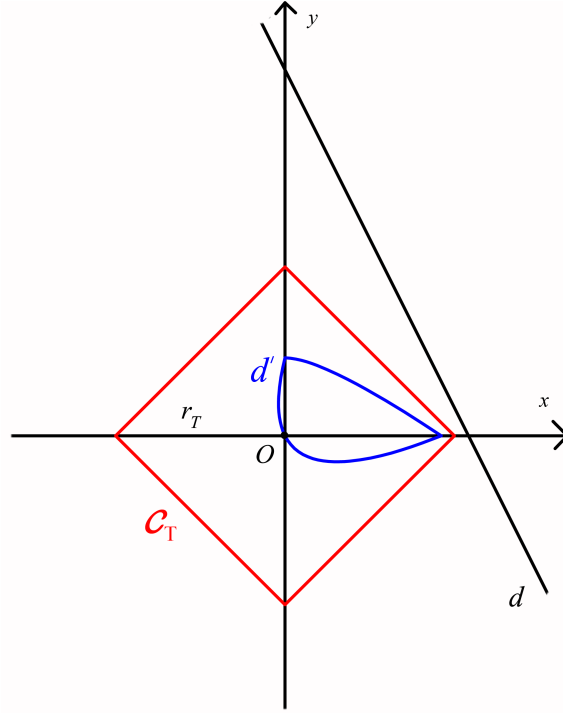


Şekil 2.22.  $C_T$  yi iki noktada kesen ve ayıraç doğrularından biri olan  $d$  doğrusunun  $T$ -evriği

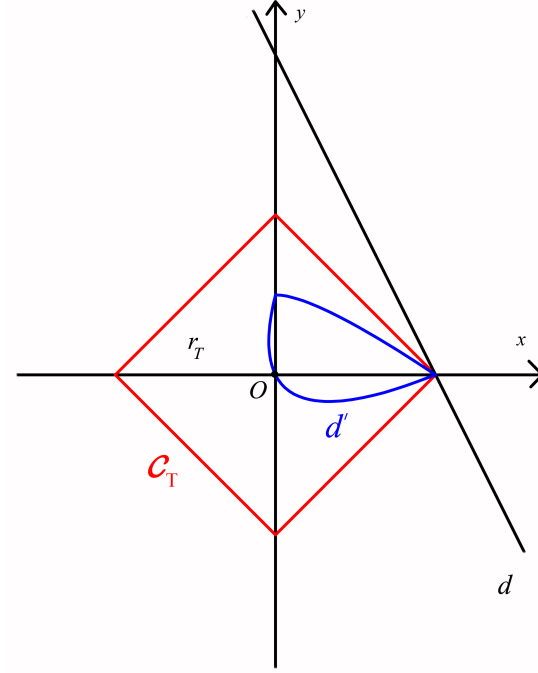
Bu kısım için de ayıraç doğrularından biri baz alınmış ve ötelenerek oluşturulan üç durum incelenmiştir. İncelenen durumlarda  $T$ -evriklerin şekilleri aynı kalarak sadece boyut değişmiştir.

### 2.5.3 $|m| < 1$ veya $|m| > 1$ olması halinde doğrunun T-evriği

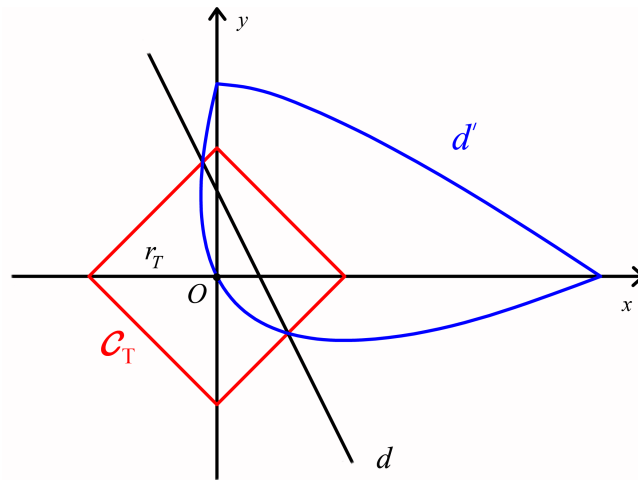
$|m| < 1$  ise doğru yataysal,  $|m| > 1$  ise doğru dikeyseldir.  $I_{T(O,r_T)}$  bir T-evritim ve  $d$  doğrusunun T-evriği  $d'$  olmak üzere, dikeysel bir doğrunun T-evriği farklı konumlar için aşağıda gösterilmektedir (Şekil 2.23.), (Şekil 2.24.), (Şekil 2.25.). Yataysal bir doğrunun T-evriği ise bu şekil döndürüldüğünde elde edilen şekle benzer bir şekildir.



Şekil 2.23.  $C_T$  ile ayrıık dikeysel doğrulardan biri olan  $d$  doğrusunun T-evriği



Şekil 2.24.  $C_T$  ye teğet dikeysel doğrulardan biri olan  $d$  doğrusunun  $T$ -evriği



Şekil 2.25.  $C_T$  yi iki noktada kesen dikeysel doğrulardan biri olan  $d$  doğrusunun  $T$ -evriği

Son kısımda da dikeysel bir doğrunun ötelenmesiyle meydana gelen durumlar incelenmiştir. Diğer eğim gruplarına benzer şekilde burada da doğruların  $T$ -evriklerinin şekilleri korunarak sadece boyutu değişmiştir.

## SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde ilk bölümde Öklidyen Düzlemde bir noktanın, doğrunun, çemberin ve açının evriğinin yansıma evritimle uzaklığın ilişkisinden bahsedildi. İkinci bölümde ise Taksi Düzleminde evritim T-evritim adı altında incelendi. Öklidyen Düzlemde kullanılan sentetik yöntem, Taksi Düzleminde kullanılmadığından yeni bir yöntem belirlendi ve ayrıntılı olarak incelendi. Taksi Düzleminde Öklid düzlemine göre daha ayrıntılı bir inceleme yapmak gerektiğinden ikinci bölümde nokta ve doğrunun T-evriğini incelemekle yetinildi. Bir taksi çemberin, açının ve bazı geometrik şekillerin T-evriklerinin incelenmesi ise çok daha kapsamlı ve zaman alan bir çalışma gerektirdiğinden bir başka çalışma konusu olabileceği düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

Venema, G.A., 2012, The Foundations of Geometry 2nd Edition, Pearson Education, Boston, 275-284.

Yağcı, M., 2006, Evritim, Matematik Dünyası Dergisi Sayı 1, 74-80.

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 2-5.

Kaya, R., 2006, Area Formula For Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon, 12, 4, 219-220.

Ekmekçi, S., 2001, Taksi Çemberleriyle İlgili Özellikler, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 5s, 19s.

Yazgan, M., Berber, T., İçen, M., Yıldırım, M., Taşkiran, M., Ünal, M., 2012, Lys Geometri, Pi Analitik Yayınları, 113s.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Inversive\\_geometry](http://en.wikipedia.org/wiki/Inversive_geometry).

<http://whistleralley.com/inversion/inversion.html>.

<http://mathworld.wolfram.com/Inversion.html>.