

NLS Denkleminin Yüksek Dereceli B-spline Fonksiyonlar Yardımıyla Sayısal Çözümü

Nurdan Köksal

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2014

Numerical Solution of the NLS Equation Using High Degree B-spline Functions

Nurdan Köksal

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics  
June 2014

# NLS Denkleminin Yüksek Dereceli B-spline Fonksiyonlar Yardımıyla Sayısal Çözümü

Nurdan Köksal

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Bülent Saka

Haziran 2014

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Nurdan Köksal' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “NLS Denkleminin Yüksek Dereceli B-spline Fonksiyonlar Yardımıyla Sayısal Çözümü” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Bülent Saka

**İkinci Danışman** : -

### **Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Doç. Dr. Bülent Saka

**Üye** : Prof. Dr. İdris Dağ

**Üye** : Doç. Dr. Dursun İrk

**Üye** : Doç. Dr. Yılmaz Dereli

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Ali Şahin

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışma lineer olmayan Schrödinger (NLS) denkleminin yüksek dereceli B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri hakkındadır.

İlk bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar verilmiştir. İlk olarak soliton hakkında bilgi verilerek, sonlu farklar ve kolokeyşin sonlu elemanlar yöntemi anlatılmıştır. Spline fonksiyon kavramı tanımlandıktan sonra kuintik B-spline, sektik B-spline ve septik B-spline fonksiyonlar hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak sonraki bölümlerde sayısal olarak çözülecek olan NLS denklemi tanıtılmıştır.

İkinci bölümde NLS denkleminin sayısal çözümü kuintik B-spline kolokeyşin yöntemi ile araştırılmıştır. Tek soliton çözümü, iki solitonun çarpışması ve solitonların oluşumu test problemleri önerilen metodun incelenmesinde kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde NLS denkleminin sayısal çözümü sektik B-spline kolokeyşin yöntemi ile araştırılmıştır. İkinci bölümde kullanılan test problemleri önerilen metodun incelenmesinde kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde NLS denkleminin sayısal çözümü septik B-spline kolokeyşin yöntemi ile araştırılmıştır. İkinci bölümde kullanılan test problemleri önerilen metodun incelenmesinde kullanılmıştır.

Son bölümde ise önerilen metotlar hakkında öneriler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: B-spline, sonlu elemanlar metodu, soliton, korunum kanunları

## SUMMARY

This thesis is deal with numerical solution of the nonlinear schrödinger (NLS) equation by using high-degree B-spline collocation finite element method.

In the first chapter, some definitions will be used in later chapters are given. In the first, giving information about soliton, finite difference and collocation finite element methods have been described. After defining the concept of spline functions we have given information about quintic, sextic and septic B-spline functions. Finally the NLS equation which will be solved numerically in the next chapter has been introduced.

In the second chapter the numerical solution of the NLS equation is obtained by the quintic B-spline collocation method. Test problems such as a single soliton solution, the interaction of two solitons and birth of solitons was used to examine the proposed method.

In the third chapter the numerical solution of the NLS equation is obtained by the sextic B- spline collocation method. The test problems in the second chapter are used to examine proposed method.

In the fourth chapter the numerical solution of the NLS equation is obtained by the septic B-spline collocation method. The test problems in the second chapter are used to examine proposed method.

In the last chapter recommendations are made about the proposed methods.

**Keywords:** B-spline, finite element method, soliton, conserved quantities

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca benden yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Bülent Saka ‘ya bana ayırdığı zaman ve sağladığı destek için teşekkürü borç bilirim. Ayrıca eşim İnan Köksal ‘a manevi desteği için gönülden teşekkürler.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
 1. TEMEL KAVRAMLAR .....	 1
1.1 Dalga teorisi .....	1
1.2 Lineer olmayan oluşum denklemleri .....	5
1.3 Korunum kanunları .....	7
1.4 Sonlu farklar-Sonlu elemanlar metotları .....	7
1.4.1 Sonlu farklar metodu .....	8
1.4.2 Sonlu elemanlar metodu .....	11
1.5 Spline fonksiyonlar .....	13
1.5.1 Kuintik B-spline interpolasyon polinomları .....	15
1.5.2 Sektik B-spline interpolasyon polinomları .....	18
1.5.3 Septik B-spline interpolasyon polinomları .....	20
1.6 Schrödinger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları .....	23
 2. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	 27
2.1 Schrödinger denkleminin sayısal çözümü için kuintik B-spline kolokeyşin metodu .....	 27
2.2 Başlangıç durumu .....	34
2.3 Test problemleri .....	36
2.3.1 Tek Soliton Çözümü .....	37
2.3.2 İki solitonun çarpışması .....	39
2.3.3 Solitonların oluşumu.....	41
2.4 Sonuç .....	44



## İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

### Sayfa

3. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SEKTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	46
3.1 Schrödinger denkleminin sayısal çözümü için sektik B-spline kolokeyşin metodu .....	46
3.2 Başlangıç durumu .....	53
3.3 Test problemleri .....	54
3.3.1 Tek Soliton Çözümü .....	54
3.3.2 İki solitonun çarpışması .....	57
3.3.3 Solitonların oluşumu.....	59
3.4 Sonuç .....	61
4. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	63
4.1 Schrödinger denkleminin sayısal çözümü için septik B-spline kolokeyşin metodu .....	63
4.2 Başlangıç durumu .....	66
4.3 Test problemleri .....	67
4.3.1 Tek Soliton Çözümü .....	67
4.3.2 İki solitonun çarpışması .....	70
4.3.3 Solitonların oluşumu.....	72
4.4 Sonuç .....	74
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	76
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	78

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b><u>Sekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
1.1 Basit bir dalga profili .....	1
1.2 Bir solitary dalgasının hareketi .....	3
1.3 Crank-Nicolson yaklaşımı .....	10
2.1 Tek soliton simülasyonu.....	37
2.2 $t=2,5$ zamanındaki hata .....	38
2.3 İki solitonun çarpışması .....	39
2.4 İki solitonun çarpışması .....	39
2.5 İki solitonun çarpışması .....	40
2.6 Zaman-Genlik grafiği .....	40
2.7 Duran soliton oluşumu .....	42
2.8 Duran soliton oluşumu .....	42
2.9 İlerleyen soliton oluşumu .....	44
2.10 İlerleyen soliton oluşumu .....	44
2.11 Başlangıç koşulu (2.29).....	44
2.12 Başlangıç koşulu (2.30).....	44
3.1 Tek soliton simülasyonu.....	55
3.2 $t=2,5$ zamanındaki hata .....	55
3.3 İki solitonun çarpışması .....	57
3.4 İki solitonun çarpışması .....	57
3.5 İki solitonun çarpışması .....	57
3.6 Zaman-Genlik grafiği .....	57
3.7 Duran soliton oluşumu .....	60
3.8 Duran soliton oluşumu .....	60
3.9 İlerleyen soliton oluşumu .....	61
3.10 İlerleyen soliton oluşumu .....	61
3.11 Başlangıç koşulu (2.29).....	61
3.12 Başlangıç koşulu (2.30).....	61
4.1 Tek soliton simülasyonu.....	68

## ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.2	$t=2,5$ zamanındaki hata ..... 68
4.3	İki solitonun çarpışması ..... 70
4.4	İki solitonun çarpışması ..... 70
4.5	İki solitonun çarpışması ..... 70
4.6	Zaman-Genlik grafiği ..... 70
4.7	Duran soliton oluşumu ..... 73
4.8	Duran soliton oluşumu ..... 73
4.9	İlerleyen soliton oluşumu ..... 74
4.10	İlerleyen soliton oluşumu ..... 74
4.11	Başlangıç koşulu (2.29)..... 74
4.12	Başlangıç koşulu (2.30)..... 74

## TABLOLAR DİZİNİ

<b><u>Tablo</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
1.1 Bölünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri.....	17
1.2 Bölünme noktalarındaki sektik B-spline değerleri.....	19
1.3 Bölünme noktalarındaki septik B-spline değerleri.....	21
2.1 Korunum sabitleri ve hata normları .....	38
2.2 $t=1$ zamanında genlik=1 için sonuçların karşılaştırması .....	38
2.3 $t=1$ zamanında genlik=2 için sonuçların karşılaştırması .....	39
2.4 İki soliton problemi için korunum sabitleri.....	41
2.5 $t=1$ de genlik=1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları .....	41
2.6 Duran solitonun korunum sabitleri, $A=1,78$ .....	42
2.7 İlerleyen solitonun korunum sabitleri, $A=1,78$ .....	43
3.1 Korunum sabitleri ve hata normları .....	56
3.2 $t=1$ zamanında genlik=1 için sonuçların karşılaştırması .....	56
3.3 $t=1$ zamanında genlik=2 için sonuçların karşılaştırması .....	57
3.4 İki soliton problemi için korunum sabitleri.....	58
3.5 $t=1$ de genlik=1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları .....	59
3.6 Duran solitonun korunum sabitleri, $A=1,78$ .....	60
3.7 İlerleyen solitonun korunum sabitleri, $A=1,78$ .....	61
4.1 Korunum sabitleri ve hata normları .....	69
4.2 $t=1$ zamanında genlik=1 için sonuçların karşılaştırması .....	69
4.3 $t=1$ zamanında genlik=2 için sonuçların karşılaştırması .....	70
4.4 İki soliton problemi için korunum sabitleri.....	71
4.5 $t=1$ de genlik=1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları .....	72
4.6 Duran solitonun korunum sabitleri, $A=1,78$ .....	73
4.7 İlerleyen solitonun korunum sabitleri, $A=1,78$ .....	74

## KISALTMALAR DİZİNİ

**Kısaltmalar** **Açıklama**

NLS	Nonlinear Schrödinger
KdV	Korteweg-de Vries

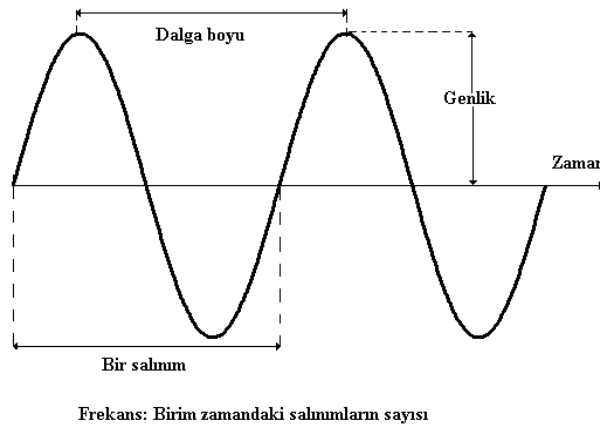
## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, İrk' ın (2007) tezinden de alıntılar yapılarak, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak dalgalar, lineer olmayan oluşum denklemleri ve korunum kanunları hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları özetlendikten sonra, spline fonksiyonların tanımı verilerek, tezde kullanılacak olan bazı B-spline interpolasyon polinomları tanıtılmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri araştırılacak olan, NLS denklemi başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtılmıştır.

#### 1.1 Dalga Teorisi

Dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, F., 1968).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, M., 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russell (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarakta tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılabilirler. Solitary dalgalarını keşfeden Russel, laboratuvarında su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

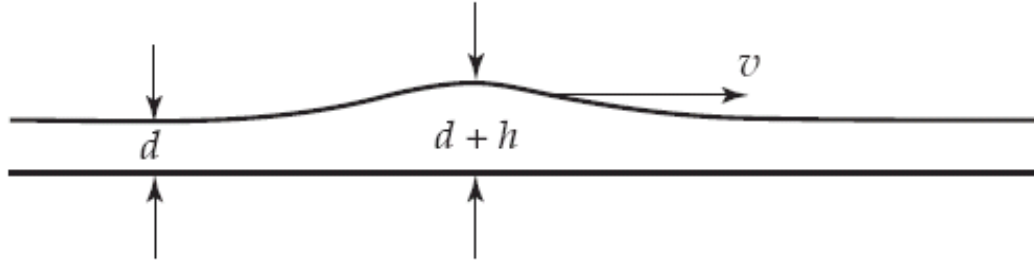
- (i) Solitary dalgaları  $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$  şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak

şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

- (iv)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d+h)} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bkz. Şekil 1.2).



Şekil 1.2: Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda olduğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederek elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

O yıllarda Russell'ın sonuçları deneysel olarak kalmış ve bir denklemin çözümü olarak solitary dalgaları elde edilememiştir. Bununla birlikte, bir denklemin çözümünü



veren solitary dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu olmuştur. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

formundan sıg su dalgalarının hareketi modelleyen denklem üzerine çalışmaya başlamışlardır. Denklemden

- $u(x, t)$ , dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$ , küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$ , dağılma parametresine,
- $\gamma$ , lineer olmayan parametreye,
- $T$ , yüzey gerilimine;
- $\rho$ , suyun yoğunluğuna;

karşılık gelmektedir. Korteweg ve de Vries, (1.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu göstermişlerdir. Buradaki  $\tilde{u}(x - vt)$  terimi, Russell'ın solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries, solitary dalgaların varlığını kanıtlamış olmuş ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınlamışlardır (Korteweg and de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky and Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters

saçılma dönüşüm metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarakta verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

Soliton çözümleri, hem analitik hemde sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerindeki çalışmalar daha da hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, laser fiziği, süperiletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chaohao, 1995). Solitonlar ayrıca uzun mesafelere yol alabildiğinden, teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır. 2006 yılında Harvard üniversitesi elektrik mühendisliğinde görevli olan Donhee Ham ve iki doktora öğrencisi David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından geliştirilen elektronik bir aygıt sayesinde, soliton dalgaları elde edilmiştir. Bu buluş ile normal dalgalar yerine soliton dalgalarının kullanılmasının yolu açılmıştır ve yakın gelecekte radar, iletişim sektörü gibi bir çok yerde solitonlar kullanılacaktır (Harvard Gazette archives, 2006).

## 1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri  $t$  zamanı olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri,  $K[u]$ ;  $u$  ve  $u$ 'nın  $x$  değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere

$$u_t = K[u] \quad (1.4)$$

formundadır. Eğer  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir.

Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise, mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok daldaki problemlerde gözlenmektedir. Aşağıda bu tip denklemlere bir kaç örnek verilmiştir (Zheng, 2004):

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda  $u(x, t)$ ,  $t$  zamanında  $x$  konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.5) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için bir model denklem olarakta kullanılmaktadır.

(ii) İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferini incelenirse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \nabla u) + f(u) \quad (1.6)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denkleminde ulaşılır.

Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) \quad (1.7)$$

formundaki lineer olmayan dalga denkleminde ulaşılabilir.

(iii) İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denkleminde ulaşılır:

$$u_t + \epsilon \Delta^2 u = \Delta \phi(u) \quad (1.8)$$

(1.8) denklemde  $\epsilon$  belirli bir küçük sabit ve genellikle  $\phi(u) = u^3 - u$  olarak alınmaktadır. (1.8) denkleminin dördüncü merteden bir oluşum denklemi olduğunu belirtelim. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.9)$$

formundaki meşhur KdV denklemdir.

### 1.3 Korunum Kanunları

(1.4) lineer olmayan oluşum denklemlerinin korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \quad (1.10)$$

formundadır. Burada  $\mathcal{T}[u]$  ve  $\mathcal{X}[u]$  sırasıyla,  $u$  ve  $u$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır.  $\mathcal{T}_t$  ve  $\mathcal{X}_x$  sırasıyla  $t$  ve  $x$  değişkenlerine göre tam türevi ifade ederler ve

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + \dots, \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlıdır.

(1.10) denkleminin  $x$  değişkenine göre, bir  $(A, B)$  aralığında integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = 0 \quad (1.12)$$

elde edilir.  $(B - A)$ 'nın periyodun tam katı olduğu veya  $u(x, t)$ 'nin  $x \rightarrow \mp\infty$  ve  $(A, B) = (-\infty, \infty)$  iken sifıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında, (1.12) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan  $t$  değişkenine göre integral alındığında

$$\int_A^B \mathcal{T} dx = \text{sabit}$$

hareket sabiti elde edilir (Fordy, 1990; Irk, 2007).

### 1.4 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferensiyel denklemler, kısmi türevli diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ile ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin

olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları bu yöntemlerden ikisidir.

### 1.4.1 Sonlu farklar metodu

Sonlu farklar metodunun temeli, bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a, b]$  tanım aralığı için,  $N$  bir pozitif tamsayı,  $h = \frac{b-a}{N}$  ve parçalanma noktaları

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda,  $U(x)$  fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere,  $U(x_i + h)$  ve  $U(x_i - h)$  ifadelerinin  $x_i$  noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i + h) = U(x_i) + hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots, \quad (1.13)$$

$$U(x_i - h) = U(x_i) - hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.14)$$

olarak bulunabilir. Sırasıyla, (1.13-1.14) eşitlikleri

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) - \dots, \quad (1.15)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.16)$$

olarak yazılabileceğinden  $U$  ifadesinin  $x_i$  noktasındaki birinci türevi

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.17)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i - h)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.18)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.17-1.18) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü

gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve  $\mathcal{O}(\cdot)$  ile gösterilir.

Eğer (1.14) eşitliği, (1.13) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} U_x(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - U(x_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_x(x_i) &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca, (1.13) ve (1.14) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} U_{xx}(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - 2U(x_i) + U(x_i - h))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_{xx}(x_i) &= \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

Benzer şekilde, iki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımları da Taylor serisi kullanılarak bulunabilir.  $N, M$  pozitif tamsayılar,  $a \leq x \leq b$ ,  $a' \leq y \leq b'$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $k = \frac{b'-a'}{M}$  ve parçalanma noktaları

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{ve} \quad y_j = a' + jk, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

olsun. Bu durumda,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre birinci türev için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.21)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.22)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.23)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (1.24)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (1.25)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + \mathcal{O}(k^2) \quad (1.26)$$

olarak bulunabilir. İkinci ve üçüncü türev için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde bulunabilir. Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995) incelenebilir.

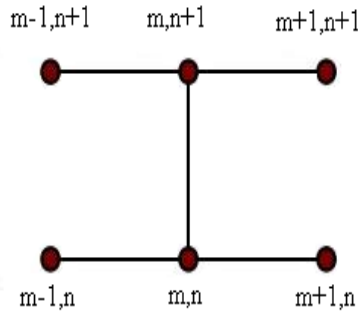
### Crank-Nicolson Metodu

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, zamana göre ikinci dereceden ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank and Nicolson, 1947). Crank ve Nicolson metotlarında, diferensiyel denklemin sonlu fark metoduyla sayısal çözümünü araştırmak için

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.27}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

Bir boyutlu problemler için Crank-Nicolson yaklaşımı Şekil 1.3'de gösterilmiştir.



Şekil 1.3: Crank-Nicolson yaklaşımı

Crank-Nicolson metodunun uygulanmasını basit bir örnek üzerinde incelersek,  $a$  reel bir sabit olmak üzere

$$u_t = au_{xx}$$

formundaki kısmi türevli diferensiyel denklem, konum artımı  $h$  ve zaman artımı  $\Delta t$  olmak üzere, ilgili türevler için sonlu fark yaklaşımlarının kullanılması sonucunda

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= a \frac{(u_{xx})_m^{n+1} + (u_{xx})_m^n}{2} \\ \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= \frac{a}{2} \left[ \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right] \end{aligned}$$

eşitliğine dönecektir.

#### 1.4.2 Sonlu elemanlar metodu

Sonlu farklar metodunda, üzerinde çalışılan tanım aralığı birbirlerinden farklı olan noktalar kümesi ile yer değiştirilirken, sonlu elemanlar metodunda, tanım bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan alt tanım bölgelerine ayrılır. Ayrıca sonlu elemanlar metodunda aranan çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları arasında bir takım farklılıklar vardır. Bu farklılıklar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Sonlu farklar metodunda, diferensiyel denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar metodunda ise diferensiyel denklemin çözümü için bir yaklaşım yapılır.
- Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar metodu ile çözümleri zordur. Ayrıca sonlu farklar metodu, problemin çözüm bölgesinin düzgün geometrik şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık, sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hemde düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir.
- Sonlu farklar metodunun en önemli özelliği uygulanmasının kolay olmasıdır.



- Bölünme noktaları arasındaki bir değer için, sonlu farklar metodu ile bir yaklaşım yapılamazken, sonlu elemanlar metodunda her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir.
- Sonlu elemanlar yaklaşımı, genelde sonlu farklar yaklaşımından daha iyidir. Fakat bu durum probleme bağlıdır ve aksi örnekler bulunabilir.
- Sonlu farklar metotlarını elde etmek için Taylor serileri yeterli olurken, sonlu elemanlar metotlarını elde etmek daha zor işlemler ve daha fazla bilgi gerektirir.

Ayrıntıya girmeden sonlu elemanlar metodunun temeli sayılan ağırlıklı rezidüler metodunu ve kolokeyşin metodunu inceleyelim.

### Ağırlıklı Rezidüler Metodu

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.28)$$

şeklinde ifade edilen bir diferensiyel denklemde;  $L$  bir lineer diferensiyel operatör,  $f(x)$  bilinen bir fonksiyon ve  $u(x)$  aranan çözüm olsun. (1.28) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında, aranan  $u(\cdot)$  ifadesi yerine

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.29)$$

formundaki  $\tilde{u}(\cdot)$  sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(1.29) eşitliğinde verilen  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonksiyonu, diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda,  $\phi_j(\cdot)$  fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemi sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidüler metodu,  $\tilde{u}(x)$  yaklaşık çözümünüyle orijinal denklem arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçüsü rezidü ile tanımlanır:

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x) \quad (1.30)$$

$W_j$  ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (1.30) ile verilen rezidü ifadesi;  $W_j(x)$  ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki integrali anılırsa

$$\int_{\Omega} W_j(x) R(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.31)$$

formunda  $N$  bilinmeyen  $N$  denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden  $a_j$  bilinmeyenleri bulunarak (1.29) eşitliğinde yerine yazılırsa  $\tilde{u}(x)$  yaklaşık çözümüne ulaşılır.

### Kolokeyşin Metodu

Kolokeyşin metodu, ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta  $W_j$  ağırlık fonksiyonları olarak

$$W_j = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.32)$$

fonksiyonları seçilir.  $R(x_j) = 0, j = 1, \dots, N$  olduğunda, (1.31) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşin metodu için çözüm, (1.29) eşitliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} L\tilde{u}(x) - f(x) &= 0 \\ L\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)\right) - f(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

formunda elde edilir (Lapidus and Pinder, 1982).

### 1.5 Spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayısı çoğaldıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda

ardı ardına gelen iki veri arasında birinci, ikinci, üçüncü yada daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır:

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır (yeterince türeve sahip).
- Spline fonksiyonlar, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve bilgisayar programlarının yapılması kolaydır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

Spline fonksiyonların bir özel hali B-spline fonksiyonlarıdır. Farklı dereceden B-spline fonksiyonları vardır. Örneğin 0. dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.34)$$

formunda tanımlanır. Burada

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty = -\lim_{i \rightarrow -\infty} x_i \quad (1.35)$$

B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesidir.  $B_i^0$  B-spline fonksiyonunun süreksiz olduğu açıktır. Diğer yandan sıçramanın olduğu her noktada

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) &= 1 = B_i^0(x_i) \\ \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) &= 0 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \right\} \text{ her } i \text{ ve } x_i \text{ için} \quad (1.36)$$

olduğundan  $B_i^0$  B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir. Yukarıdaki verilen iki eşitlikten dolayıda  $B_i^0(x)$  B-spline fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \text{Her } i \text{ ve } x_i \text{ için, } B_i^0(x) &\geq 0, \\ \text{Her } x \text{ için, } \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) &= 1 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

özelliklerini sağladığı ve sadece  $[x_i, x_{i+1})$  aralığında değer aldığı açıktır.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} B_i^k &= \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ k &= 1, 2, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.38)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir (Höllig, 2003).  $B_i^k$  B-spline fonksiyonu aynı nokta dizileri için tanımlı ve derecesi  $k$  olan spline fonksiyonlar için tabandır.

Ayrıca derecesi  $k$  olan B-spline fonksiyonu,  $-\infty < i < \infty$  ve

$$(x - x_{m+i})_+^k = \begin{cases} (x - x_{m+i})^k & , x_{m+i} \leq x \\ 0 & x_{m+i} > x \end{cases} \quad (1.39)$$

olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{k=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} (-1)^m (x - x_{m+i})_+^k \quad (1.40)$$

formülü kullanılarak elde edilebilir. (1.40) ifadesi,  $x \leq x_i$  ve  $x \geq x_{i+m+1}$  olduğunda  $B_i^k(x) = 0$  durumunu sağlar ve derecesi  $k$  olan B-spline,  $k-1$  kez sürekli türe ve sahip olur.

### 1.5.1 Kuintik B-spline interpolasyon polinomları

$[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.41)$$

düğüm noktaları kullanılarak  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  eşit uzunluklu  $N$  sonlu eleman ile ayrıştırılsın.  $\phi_m$  kuintik B-spline fonksiyonları, çözüm bölgesi  $[a, b]$

aralığının dışında 10 ilave düğüm noktası ile birlikte tanımlanır. Bu ilave düğüm noktaları

$$x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \text{ ve } x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5}$$

dir. Kuintik B-spline fonksiyonların bir kümesi  $\{\phi_{-2}, \dots, \phi_{N+2}\}$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975).

$\phi_m$  kuintik B-spline fonksiyonları,  $m = -2, -1, \dots, N + 2$  için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + \\ \quad 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + \\ \quad 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.42)$$

$\phi_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonu ve onun ilk üç türevi,  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığının dışında sıfırdır.  $'$ ,  $''$  ve  $'''$ ,  $x'$  e göre birinci, ikinci ve üçüncü türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığında  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$  ve  $\phi'''_m(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.1 de verilmiştir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\phi_m(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	60	-120	0	120	-60	0

Kuintik B-spline kolokeyşin metodunda, kuintik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonları olarak kullanılarak,  $U(x, t)$  analitik çözümü için yaklaşık çözüm

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (1.43)$$

formunda aranır.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 6 ardışık  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$  kuintik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde, 6 ardışık  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$  kuintik B-spline fonksiyonları dışındaki diğer tüm kuintik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından, bu eleman üzerindeki  $U_N$  yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (1.44)$$

eşitliğine indirgenecektir.

Tablo 1.1 ve (1.44) yaklaşık çözümünün kullanılması ile  $x_m$  bölünme noktasında  $U_N$  ve ilk üç türevi

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi'_j(x) \delta_j(t) = \frac{5}{h} (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\
U''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi''_j(x) \delta_j(t) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}), \\
U'''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi'''_j(x) \delta_j(t) = \frac{60}{h^3} (\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2})
\end{aligned} \tag{1.45}$$

olarak hesaplanabilir.

### 1.5.2 Sektik B-spline interpolasyon polinomları

$[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \tag{1.46}$$

düğüm noktaları kullanılarak  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  eşit uzunluklu  $N$  sonlu eleman ile ayrıştırılsın.  $\phi_m$  sektik B-spline fonksiyonları, çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığının dışında 12 ilave düğüm noktası ile birlikte tanımlanır. Bu ilave düğüm noktaları

$$x_{-6} < x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \quad \text{ve}$$

$$x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5} < x_{N+6}$$

dir. Sektik B-spline fonksiyonların bir kümesi  $\{\phi_{-3}, \dots, \phi_{N+2}\}$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975).

$\phi_m$  sektik B-spline fonksiyonları,  $m = -3, -2, \dots, N+2$  için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.47)$$

$\phi_m(x)$  sektik B-spline fonksiyonu ve onun ilk üç türevi,  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığının dışında sıfırdır. ' , ' ' ve ' ' ' ,  $x$  ' e göre birinci, ikinci ve üçüncü türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığında  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$  ve  $\phi'''_m(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.2: Bölünme noktalarındaki sektik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m(x)$	0	1	57	302	302	57	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	6	150	240	-240	-150	-6	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	120	120	-960	960	-120	-120	0

Sektik B-spline kolokeyşin metodunda, sektik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonları olarak kullanılarak,  $U(x, t)$  analitik çözümü için yaklaşık çözüm

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+2} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (1.48)$$

formunda aranır.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 7 ardışık  $\phi_{m-3}$ ,  $\phi_{m-2}$ ,  $\phi_{m-1}$ ,  $\phi_m$ ,  $\phi_{m+1}$ ,  $\phi_{m+2}$ ,  $\phi_{m+3}$  sektik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elamanı üzerinde, 7 ardışık  $\phi_{m-3}$ ,  $\phi_{m-2}$ ,  $\phi_{m-1}$ ,  $\phi_m$ ,  $\phi_{m+1}$ ,  $\phi_{m+2}$ ,  $\phi_{m+3}$  sektik B-spline fonksiyonları dışındaki



diğer tüm sektik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından, bu eleman üzerindeki  $U_N$  yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-3}^{m+3} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (1.49)$$

eşitliğine indirgenecektir.

Tablo 1.2 ve (1.49) yaklaşık çözümünün kullanılması ile  $x_m$  bölünme noktasında  $U_N$  ve ilk üç türevi

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi'_j(x) \delta_j(t) = \frac{6}{h} (\delta_{m+2} + 25\delta_{m+1} + 40\delta_m - 40\delta_{m-1} - 25\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \\ U''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi''_j(x) \delta_j(t) = \frac{30}{h^2} (\delta_{m+2} + 9\delta_{m+1} - 10\delta_m - 10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \\ U'''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi'''_j(x) \delta_j(t) = \frac{120}{h^3} (\delta_{m+2} + \delta_{m+1} - 8\delta_m + 8\delta_{m-1} - \delta_{m-2} - \delta_{m-3}) \end{aligned} \quad (1.50)$$

olarak hesaplanabilir.

### 1.5.3 Septik B-spline interpolasyon polinomları

$[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.51)$$

düğüm noktaları kullanılarak  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$  eşit uzunluklu  $N$  sonlu eleman ile ayrıştırılsın.  $\phi_m$  septik B-spline fonksiyonları, çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığının dışında 14 ilave düğüm noktası ile birlikte tanımlanır. Bu ilave düğüm noktaları

$$x_{-7} < x_{-6} < x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \quad \text{ve}$$

$$x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5} < x_{N+6} < x_{N+7}$$

dir. Septik B-spline fonksiyonların bir kümesi  $\{\phi_{-3}, \dots, \phi_{N+3}\}$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975).

$\phi_m$  septik B-spline fonksiyonları,  $m = -3, -2, \dots, N + 3$  için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}], \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.52)$$

$\phi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonu ve onun ilk üç türevi,  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığının dışında sıfırdır. ' , ' ' ve ' ' ' ,  $x$  ' e göre birinci, ikinci ve üçüncü türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığında  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$  ve  $\phi'''_m(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.3 de verilmiştir.

Tablo 1.3: Bölünme noktalarındaki septik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m(x)$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	7	392	1715	0	-1715	-392	-7	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	210	1680	-3990	0	3990	-1680	-210	0

Septik B-spline kolokeyşin metodunda, septik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonları olarak kullanılarak,  $U(x, t)$  analitik çözümü için yaklaşık çözüm

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (1.53)$$

formunda aranır.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 8 ardışık  $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}, \phi_{m+4}$  septik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde, 8 ardışık  $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}, \phi_{m+4}$  septik B-spline fonksiyonu dışındaki diğer tüm septik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından, bu eleman üzerindeki  $U_N$  yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (1.54)$$

eşitliğine indirgenecektir.

Tablo 1.3 ve (1.54) yaklaşık çözümünün kullanılması ile  $x_m$  bölünme noktasında  $U_N$  ve ilk üç türevi

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t) = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + \\ &\quad 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi'_j(x) \delta_j(t) = \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + \\ &\quad 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ U''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi''_j(x) \delta_j(t) = \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + \\ &\quad 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U'''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi'''_j(x) \delta_j(t) = \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - \\ &\quad 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

olarak hesaplanabilir.

## 1.6 Schrödinger Denklemleri, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 2, 3 ve 4 de,

$$iU_t + U_{xx} + q|U|^2 U = 0 \quad (1.56)$$

formundaki Schrödinger denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışılacaktır. Bu denkleminde  $x$  ve  $t$  indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre kısmi türevleri göstermekte olup,  $i = \sqrt{-1}$  ve  $q$  reel bir parametredir. Burada  $U$  kompleks değerli bir fonksiyondur.

NLS denklemleri, plazmalardaki dalgaları, su dalgalarını, görsel titreşimlerin yayılması gibi pek çok fiziksel olayı tanımlar. Bu denklem, yeterince büyük  $x$  ler için türevleri göz ardı edilen bir  $U(x, t_0)$  başlangıç koşulu kullanılarak ters saçılma metodu ile analitik olarak çözülmüştür (Karpman et al., 1969; Zakharov et al., 1972; Scott et al., 1973). Bu metot, sadece kompakt destekli başlangıç verileri için uygulanabilir olduğundan, NLS denkleminin analitik çözümü genel başlangıç şartları için bilinmemektedir.  $\tanh$  fonksiyonu, Adomian ayrıştırma ve değişken iterasyon gibi metotlar ile NLS denkleminin yaklaşık-analitik çözümleri verilmiştir (Khuri, 2004; El-Sayed et al., 2006; Wazwaz, 2008). Bu yüzden, NLS denklemini çözmek için değişik sayısal metotlar uygulanmıştır. Bu amaçla, değişik dereceden spline fonksiyonlar, etkili ve doğru sayısal yöntemler geliştirerek NLS denkleminin çözümlerini bulmak için de kullanılmıştır (Gardner et al., 1993; Robinson, 1997; Dağ, 1999; Sheng et al., 2001; Saka, 2012).

Bölüm 2, 3 ve 4 de, (1.56) formundaki Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} U(a, t) &= 0, & U(b, t) &= 0, \\ U_x(a, t) &= 0, & U_x(b, t) &= 0, \\ U_{xx}(a, t) &= 0, & U_{xx}(b, t) &= 0, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.58)$$

sınır ve başlangıç şartları kullanılacaktır. Buradaki  $f(x)$  fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir.

$r(x, t)$  ve  $s(x, t)$  reel değerli fonksiyonlar olmak üzere  $U$  çözümü

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) \quad (1.59)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlara ayrıştırılıp, (1.56) denkleminde yerine yazıldığında

$$s_t - r_{xx} - q(r^2 + s^2)r = 0, \quad (1.60)$$

$$r_t + s_{xx} + q(r^2 + s^2)s = 0. \quad (1.61)$$

formunda reel diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

Schrödinger denklemi için korunum kanunları

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( |U_x|^2 - \frac{1}{2}q|U|^4 \right) dx \quad (1.62)$$

formundadır. Sayısal metodun doğruluğu, verilen bölünme noktalarındaki analitik ve sayısal değerlerin hesaplanmasının ardından  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları ve korunum kanunları yardımıyla incelenecektir.  $r(x, t)$  ve  $s(x, t)$  için yaklaşık çözümler, kuintik, sektik ve septik B-spline fonksiyonlar  $\phi_m(x)$  ve zamana bağlı  $\delta_m$ ,  $\sigma_m$  parametrelerine bağlı olarak sırasıyla

$$\begin{aligned} s_N(x, t) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t) \phi_m(x), & r_N(x, t) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \sigma_m(t) \phi_m(x), \\ s_N(x, t) &= \sum_{m=-3}^{N+2} \delta_m(t) \phi_m(x), & r_N(x, t) &= \sum_{m=-3}^{N+2} \sigma_m(t) \phi_m(x), \\ s_N(x, t) &= \sum_{m=-3}^{N+3} \delta_m(t) \phi_m(x), & r_N(x, t) &= \sum_{m=-3}^{N+3} \sigma_m(t) \phi_m(x) \end{aligned}$$

formunda aranacaktır. Buradaki  $s_N(x, t)$ ,  $r_N(x, t)$  yaklaşık çözümlerinin  $x_m$  bölünme noktasındaki  $r_m$ ,  $s_m$  değerleri ve türevleri  $r'_m$ ,  $s'_m$ ,  $r''_m$ ,  $s''_m$ , kuintik B-spline fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
s_m &= s(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
s'_m &= s'(x_m) = \frac{5}{h} (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\
s''_m &= s''(x_m) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}), \\
r_m &= r(x_m) = \sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}, \\
r'_m &= r'(x_m) = \frac{5}{h} (\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}), \\
r''_m &= r''(x_m) = \frac{20}{h^2} (\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}),
\end{aligned} \tag{1.63}$$

sektik B-spline fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
s_m &= s(x_m) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
s'_m &= s'(x_m) = \frac{6}{h} (\delta_{m+2} + 25\delta_{m+1} + 40\delta_m - 40\delta_{m-1} - 25\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \\
s''_m &= s''(x_m) = \frac{30}{h^2} (\delta_{m+2} + 9\delta_{m+1} - 10\delta_m - 10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \\
r_m &= r(x_m) = \sigma_{m-3} + 57\sigma_{m-2} + 302\sigma_{m-1} + 302\sigma_m + 57\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}, \\
r'_m &= r'(x_m) = \frac{6}{h} (\sigma_{m+2} + 25\sigma_{m+1} + 40\sigma_m - 40\sigma_{m-1} - 25\sigma_{m-2} - \sigma_{m-3}), \\
r''_m &= r''(x_m) = \frac{30}{h^2} (\sigma_{m+2} + 9\sigma_{m+1} - 10\sigma_m - 10\sigma_{m-1} + 9\sigma_{m-2} + \sigma_{m-3})
\end{aligned} \tag{1.64}$$

ve septik B-spline fonksiyonlar için

$$s_m = s(x_m) = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},$$

$$s'_m = s'(x_m) = \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

$$s''_m = s''(x_m) = \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

$$r_m = r(x_m) = \sigma_{m-3} + 120\sigma_{m-2} + 1191\sigma_{m-1} + 2416\sigma_m + 1191\sigma_{m+1} + 120\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3},$$

$$r'_m = r'(x_m) = \frac{7}{h} (-\sigma_{m-3} - 56\sigma_{m-2} - 245\sigma_{m-1} + 245\sigma_{m+1} + 56\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3}),$$

$$r''_m = r''(x_m) = \frac{42}{h^2} (\sigma_{m-3} + 24\sigma_{m-2} + 15\sigma_{m-1} - 80\sigma_m + 15\sigma_{m+1} + 24\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3})$$

(1.65)

dir.

## BÖLÜM 2

### SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, üç test problemi kullanılarak hata normları, korunum sabitleri ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

#### 2.1 Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda Schrödinger denkleminin kuintik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır. ° zamana göre türev ve

$$z_m = (\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2 + (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2$$

olmak üzere, (1.60) ve (1.61) denklemlerinde (1.63) değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\delta}_{m-2} + 26\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 66\overset{\circ}{\delta}_m + 26\overset{\circ}{\delta}_{m+1} + \overset{\circ}{\delta}_{m+2} - \frac{20}{h^2} (\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + \\ 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}) - qz_m(\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{m-2} + 26\overset{\circ}{\sigma}_{m-1} + 66\overset{\circ}{\sigma}_m + 26\overset{\circ}{\sigma}_{m+1} + \overset{\circ}{\sigma}_{m+2} + \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + \\ 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) + qz_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) = 0 \end{aligned}$$

birinci mertebeden  $(2N + 2)$  diferensiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametreleri ve bunların zamana göre türevleri Crank-Nicolson formülü (1.27) yardımıyla

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2} \quad (2.2)$$

ve

$$\overset{\circ}{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_m = \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t} \quad (2.3)$$



olarak ifade edilir. Bu ifadeler (2.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^{n+1} - 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^{n+1} - 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^{n+1} - 26\delta_{m+1}^n + \\
& \delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n) - \frac{10}{h^2} (\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 2\sigma_{m-1}^{n+1} + 2\sigma_{m-1}^n - 6\sigma_m^{n+1} - 6\sigma_m^n + 2\sigma_{m+1}^{n+1} + \\
& 2\sigma_{m+1}^n + \sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n) - \frac{1}{2}qz_m (\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^n + 66\sigma_m^{n+1} + \\
& 66\sigma_m^n + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^n + \sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n) = 0, \\
& \frac{1}{\Delta t} (\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n + 26\sigma_{m-1}^{n+1} - 26\sigma_{m-1}^n + 66\sigma_m^{n+1} - 66\sigma_m^n + 26\sigma_{m+1}^{n+1} - 26\sigma_{m+1}^n + \\
& \sigma_{m+2}^{n+1} - \sigma_{m+2}^n) + \frac{10}{h^2} (\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n + 2\delta_{m-1}^{n+1} + 2\delta_{m-1}^n - 6\delta_m^{n+1} - 6\delta_m^n + 2\delta_{m+1}^{n+1} + \\
& 2\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n) + \frac{1}{2}qz_m (\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^{n+1} + \\
& 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^{n+1} + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n) = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

sistemi bulunur. Bu sistem  $m = 0, \dots, N$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{m-2}^{n+1} + 52h^2\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m-1}^{n+1} + 132h^2\delta_m^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_m^{n+1} + \\
& 52h^2\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m+1}^{n+1} + 2h^2\delta_{m+2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{m+2}^{n+1} = \\
& 2h^2\delta_{m-2}^n - \beta_{m1}\sigma_{m-2}^n + 52h^2\delta_{m-1}^n - \beta_{m2}\sigma_{m-1}^n + 132h^2\delta_m^n - \beta_{m3}\sigma_m^n + \\
& 52h^2\delta_{m+1}^n - \beta_{m2}\sigma_{m+1}^n + 2h^2\delta_{m+2}^n - \beta_{m1}\sigma_{m+2}^n,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_{m1}\delta_{m-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m-2}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{m-1}^{n+1} + 52h^2\sigma_{m-1}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_m^{n+1} + 132h^2\sigma_m^{n+1} - \\
& \beta_{m2}\delta_{m+1}^{n+1} + 52h^2\sigma_{m+1}^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{m+2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m+2}^{n+1} = \\
& \beta_{m1}\delta_{m-2}^n + 2h^2\sigma_{m-2}^n + \beta_{m2}\delta_{m-1}^n + 52h^2\sigma_{m-1}^n + \beta_{m3}\delta_m^n + 132h^2\sigma_m^n + \\
& \beta_{m2}\delta_{m+1}^n + 52h^2\sigma_{m+1}^n + \beta_{m1}\delta_{m+2}^n + 2h^2\sigma_{m+2}^n
\end{aligned}$$

olarak yeniden düzenlenirse,  $(2N + 10)$  bilinmeyenli  $(2N + 2)$  cebirsel denklemden

oluşan bir sistem elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
& \beta_{m1} = -20\Delta t - dh^2\Delta t, \quad \beta_{m2} = -40\Delta t - 26dh^2\Delta t, \\
& \beta_{m3} = 120\Delta t - 66dh^2\Delta t, \quad d = qz_m, \quad m = 0, \dots, N
\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sisteminde  $\delta_{-2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}$  eleman parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece  $(2N+2) \times (2N+2)$  boyutlu 11 band matris sistemi elde edilir. (1.57) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden (1.63) değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(s_N)_x(a, t) &= \delta_{-2} + 10\delta_{-1} - 10\delta_1 - \delta_2 = 0, \\
(s_N)_{xx}(a, t) &= \delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2 = 0, \\
(s_N)_x(b, t) &= \delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2} = 0, \\
(s_N)_{xx}(b, t) &= \delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2} = 0, \\
(r_N)_x(a, t) &= \sigma_{-2} + 10\sigma_{-1} - 10\sigma_1 - \sigma_2 = 0, \\
(r_N)_{xx}(a, t) &= \sigma_{-2} + 2\sigma_{-1} - 6\sigma_0 + 2\sigma_1 + \sigma_2 = 0, \\
(r_N)_x(b, t) &= \sigma_{N+2} + 10\sigma_{N+1} - 10\sigma_{N-1} - \sigma_{N-2} = 0, \\
(r_N)_{xx}(b, t) &= \sigma_{N+2} + 2\sigma_{N+1} - 6\sigma_N + 2\sigma_{N-1} + \sigma_{N-2} = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{15}{2}\delta_0 - 5\delta_1 - \frac{3}{2}\delta_2, & \sigma_{-2} &= \frac{15}{2}\sigma_0 - 5\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_2, \\
\delta_{-1} &= -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2, & \sigma_{-1} &= -\frac{3}{4}\sigma_0 + \frac{3}{2}\sigma_1 + \frac{1}{4}\sigma_2, \\
\delta_{N+1} &= \frac{1}{4}\delta_{N-2} + \frac{3}{2}\delta_{N-1} - \frac{3}{4}\delta_N, & \sigma_{N+1} &= \frac{1}{4}\sigma_{N-2} + \frac{3}{2}\sigma_{N-1} - \frac{3}{4}\sigma_N \\
\delta_{N+2} &= -\frac{3}{2}\delta_{N-2} - 5\delta_{N-1} + \frac{15}{2}\delta_N, & \sigma_{N+2} &= -\frac{3}{2}\sigma_{N-2} - 5\sigma_{N-1} + \frac{15}{2}\sigma_N
\end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
F_1 &= 2h^2\delta_{-2}^n - \beta_{m1}\sigma_{-2}^n + 52h^2\delta_{-1}^n - \beta_{m2}\sigma_{-1}^n + 132h^2\delta_0^n - \\
&\quad \beta_{m3}\sigma_0^n + 52h^2\delta_1^n - \beta_{m2}\sigma_1^n + 2h^2\delta_2^n - \beta_{m1}\sigma_2^n, \\
F_2 &= \beta_{m1}\delta_{-2}^n + 2h^2\sigma_{-2}^n + \beta_{m2}\delta_{-1}^n + 52h^2\sigma_{-1}^n + \beta_{m3}\delta_0^n + \\
&\quad 132h^2\sigma_0^n + \beta_{m2}\delta_1^n + 52h^2\sigma_1^n + \beta_{m1}\delta_2^n + 2h^2\sigma_2^n, \\
F_3 &= 2h^2\delta_{-1}^n - \beta_{m1}\sigma_{-1}^n + 52h^2\delta_0^n - \beta_{m2}\sigma_0^n + 132h^2\delta_1^n - \\
&\quad \beta_{m3}\sigma_1^n + 52h^2\delta_2^n - \beta_{m2}\sigma_2^n + 2h^2\delta_3^n - \beta_{m1}\sigma_3^n, \\
F_4 &= \beta_{m1}\delta_{-1}^n + 2h^2\sigma_{-1}^n + \beta_{m2}\delta_0^n + 52h^2\sigma_0^n + \beta_{m3}\delta_1^n + \\
&\quad 132h^2\sigma_1^n + \beta_{m2}\delta_2^n + 52h^2\sigma_2^n + \beta_{m1}\delta_3^n + 2h^2\sigma_3^n,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
F_{2N-1} &= 2h^2\delta_{N-3}^n - \beta_{m1}\sigma_{N-3}^n + 52h^2\delta_{N-2}^n - \beta_{m2}\sigma_{N-2}^n + 132h^2\delta_{N-1}^n - \\
&\quad \beta_{m3}\sigma_{N-1}^n + 52h^2\delta_N^n - \beta_{m2}\sigma_N^n + 2h^2\delta_{N+1}^n - \beta_{m1}\sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N} &= \beta_{m1}\delta_{N-3}^n + 2h^2\sigma_{N-3}^n + \beta_{m2}\delta_{N-2}^n + 52h^2\sigma_{N-2}^n + \beta_{m3}\delta_{N-1}^n + \\
&\quad 132h^2\sigma_{N-1}^n + \beta_{m2}\delta_N^n + 52h^2\sigma_N^n + \beta_{m1}\delta_{N+1}^n + 2h^2\sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N+1} &= 2h^2\delta_{N-2}^n - \beta_{m1}\sigma_{N-2}^n + 52h^2\delta_{N-1}^n - \beta_{m2}\sigma_{N-1}^n + 132h^2\delta_N^n - \\
&\quad \beta_{m3}\sigma_N^n + 52h^2\delta_{N+1}^n - \beta_{m2}\sigma_{N+1}^n + 2h^2\delta_{N+2}^n - \beta_{m1}\sigma_{N+2}^n, \\
F_{2N+2} &= \beta_{m1}\delta_{N-2}^n + 2h^2\sigma_{N-2}^n + \beta_{m2}\delta_{N-1}^n + 52h^2\sigma_{N-1}^n + \beta_{m3}\delta_N^n + \\
&\quad 132h^2\sigma_N^n + \beta_{m2}\delta_{N+1}^n + 52h^2\sigma_{N+1}^n + \beta_{m1}\delta_{N+2}^n + 2h^2\sigma_{N+2}^n
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olmak üzere, (2.5) denklem sisteminden  $m = 0$  için,

$$\begin{aligned}
&2h^2\delta_{-2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{-2}^{n+1} + 52h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{-1}^{n+1} + 132h^2\delta_0^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_0^{n+1} + \\
&52h^2\delta_1^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_1^{n+1} + 2h^2\delta_2^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_2^{n+1} = F_1, \\
&-\beta_{m1}\delta_{-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-2}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{-1}^{n+1} + 52h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_0^{n+1} + 132h^2\sigma_0^{n+1} - \\
&\beta_{m2}\delta_1^{n+1} + 52h^2\sigma_1^{n+1} - \beta_{m1}\delta_2^{n+1} + 2h^2\sigma_2^{n+1} = F_2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$m = 1$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{-1}^{n+1} + 52h^2\delta_0^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_0^{n+1} + 132h^2\delta_1^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_1^{n+1} + \\
& 52h^2\delta_2^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_2^{n+1} + 2h^2\delta_3^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_3^{n+1} = F_3, \\
& -\beta_{m1}\delta_{-1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_0^{n+1} + 52h^2\sigma_0^{n+1} - \beta_{m3}\delta_1^{n+1} + 132h^2\sigma_1^{n+1} - \\
& \beta_{m2}\delta_2^{n+1} + 52h^2\sigma_2^{n+1} - \beta_{m1}\delta_3^{n+1} + 2h^2\sigma_3^{n+1} = F_4
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$m = N - 1$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{N-3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N-3}^{n+1} + 52h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N-2}^{n+1} + 132h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{N-1}^{n+1} + \\
& 52h^2\delta_N^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_N^{n+1} + 2h^2\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N-1}, \\
& -\beta_{m1}\delta_{N-3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-3}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{N-2}^{n+1} + 52h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{N-1}^{n+1} + 132h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \\
& \beta_{m2}\delta_N^{n+1} + 52h^2\sigma_N^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{N+1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$m = N$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N-2}^{n+1} + 52h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N-1}^{n+1} + 132h^2\delta_N^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_N^{n+1} + \\
& 52h^2\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N+1}^{n+1} + 2h^2\delta_{N+2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N+2}^{n+1} = F_{2N+1}, \\
& -\beta_{m1}\delta_{N-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{N-1}^{n+1} + 52h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_N^{n+1} + 132h^2\sigma_N^{n+1} - \\
& \beta_{m2}\delta_{N+1}^{n+1} + 52h^2\sigma_{N+1}^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{N+2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N+2}^{n+1} = F_{2N+2}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

yazılır. (2.7) eleman parametreleri (2.10-2.13) ifadelerinde yerlerine yazılıp düzenlenirse, ilk dört denklem

$$\begin{aligned}
& 108h^2\delta_0^{n+1} + (\frac{15}{2}\beta_{m1} - \frac{3}{4}\beta_{m2} + \beta_{m3})\sigma_0^{n+1} + 120h^2\delta_1^{n+1} + (-5\beta_{m1} + \frac{5}{2}\beta_{m2})\sigma_1^{n+1} + \\
& 12h^2\delta_2^{n+1} + (-\frac{1}{2}\beta_{m1} + \frac{1}{4}\beta_{m2})\sigma_2^{n+1} = F_1, \\
& (-\frac{15}{2}\beta_{m1} + \frac{3}{4}\beta_{m2} - \beta_{m3})\delta_0^{n+1} + 108h^2\sigma_0^{n+1} + (5\beta_{m1} - \frac{5}{2}\beta_{m2})\delta_1^{n+1} + 120h^2\sigma_1^{n+1} + \\
& (\frac{1}{2}\beta_{m1} - \frac{1}{4}\beta_{m2})\delta_2^{n+1} + 12h^2\sigma_2^{n+1} = F_2, \\
& \frac{101}{2}h^2\delta_0^{n+1} + (-\frac{3}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2})\sigma_0^{n+1} + 135h^2\delta_1^{n+1} + (\frac{3}{2}\beta_{m1} + \beta_{m3})\sigma_1^{n+1} + \\
& \frac{105}{2}h^2\delta_2^{n+1} + (\frac{1}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2})\sigma_2^{n+1} + 2h^2\delta_3^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_3^{n+1} = F_3, \\
& (\frac{3}{4}\beta_{m1} - \beta_{m2})\delta_0^{n+1} + \frac{101}{2}h^2\sigma_0^{n+1} - (\frac{3}{2}\beta_{m1} + \beta_{m3})\delta_1^{n+1} + 135h^2\sigma_1^{n+1} + (\frac{1}{4}\beta_{m1} - \beta_{m2})\delta_2^{n+1} + \\
& \frac{105}{2}h^2\sigma_2^{n+1} - \beta_{m1}\delta_3^{n+1} + 2h^2\sigma_3^{n+1} = F_4
\end{aligned} \tag{2.14}$$

ve son dört denklem

$$\begin{aligned}
& 12h^2\delta_{N-3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N-3}^{n+1} + \frac{105}{2}h^2\delta_{N-2}^{n+1} + (\beta_{m2} + \frac{1}{4}\beta_{m1})\sigma_{N-2}^{n+1} + 135h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \\
& (\frac{3}{2}\beta_{m1} + \beta_{m3})\sigma_{N-1}^{n+1} + \frac{101}{2}h^2\delta_N^{n+1} + (\beta_{m2} - \frac{3}{4}\beta_{m1})\sigma_N^{n+1} = F_{2N-1}, \\
& -\beta_{m1}\delta_{N-3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-3}^{n+1} - (\frac{1}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2})\delta_{N-2}^{n+1} + \frac{105}{2}h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - (\frac{3}{2}\beta_{m1} + \beta_{m3})\delta_{N-1}^{n+1} + \\
& 135h^2\sigma_{N-1}^{n+1} + (\frac{3}{4}\beta_{m1} - \beta_{m2})\delta_N^{n+1} + \frac{101}{2}h^2\sigma_N^{n+1} = F_{2N}, \\
& 12h^2\delta_{N-2}^{n+1} + (-\frac{1}{2}\beta_{m1} + \frac{1}{4}\beta_{m2})\sigma_{N-2}^{n+1} + 120h^2\delta_{N-1}^{n+1} + (-5\beta_{m1} + \frac{5}{2}\beta_{m2})\sigma_{N-1}^{n+1} + \\
& 108h^2\delta_N^{n+1} + (\frac{15}{2}\beta_{m1} - \frac{3}{4}\beta_{m2} + \beta_{m3})\sigma_N^{n+1} = F_{2N+1}, \\
& (\frac{1}{2}\beta_{m1} - \frac{1}{4}\beta_{m2})\delta_{N-2}^{n+1} + 12h^2\sigma_{N-2}^{n+1} + (5\beta_{m1} - \frac{5}{2}\beta_{m2})\delta_{N-1}^{n+1} + 120h^2\sigma_{N-1}^{n+1} + \\
& (-\frac{15}{2}\beta_{m1} + \frac{3}{4}\beta_{m2} - \beta_{m3})\delta_N^{n+1} + 108h^2\sigma_N^{n+1} = F_{2N+2}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Buna göre (2.5) denklem sistemi,

$$F = Bd_n,$$

$$d_{n+1} = [\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \sigma_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}]^T$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} 108h^2 & a & 120h^2 & b & 12h^2 & c & & & & & & \\ -a & 108h^2 & -b & 120h^2 & -c & 12h^2 & 0 & & & & & \\ \frac{101}{2}h^2 & d & 135h^2 & e & \frac{105}{2}h^2 & f & 2h^2 & \beta_{m1} & & & & \\ -d & \frac{101}{2}h^2 & -e & 135h^2 & -f & \frac{105}{2}h^2 & -\beta_{m1} & 2h^2 & 0 & & & \\ 2h^2 & \beta_{m1} & 52h^2 & \beta_{m2} & 132h^2 & \beta_{m3} & 52h^2 & \beta_{m2} & 2h^2 & \beta_{m1} & & \\ -\beta_{m1} & 2h^2 & -\beta_{m2} & 52h^2 & -\beta_{m3} & 132h^2 & -\beta_{m2} & 52h^2 & -\beta_{m1} & 2h^2 & 0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & 2h^2 & \beta_{m1} & 52h^2 & \beta_{m2} & 132h^2 & \beta_{m3} & 52h^2 & \beta_{m2} & 2h^2 & \beta_{m1} \\ & & -\beta_{m1} & 2h^2 & -\beta_{m2} & 52h^2 & -\beta_{m3} & 132h^2 & -\beta_{m2} & 52h^2 & -\beta_{m1} & 2h^2 \\ & & & 0 & 2h^2 & \beta_{m1} & \frac{105}{2}h^2 & f & 135h^2 & e & \frac{101}{2}h^2 & d \\ & & & & -\beta_{m1} & 2h^2 & -f & \frac{105}{2}h^2 & -e & 135h^2 & -d & \frac{101}{2}h^2 \\ & & & & & 0 & 12h^2 & c & 120h^2 & b & 108h^2 & a \\ & & & & & & -c & 12h^2 & -b & 120h^2 & -a & 108h^2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$Ad_{n+1} = F \tag{2.16}$$

matris formunda elde edilmiş olur. Burada

$$\begin{aligned} a &= \frac{15}{2}\beta_{m1} - \frac{3}{4}\beta_{m2} + \beta_{m3}, & b &= -5\beta_{m1} + \frac{5}{2}\beta_{m2}, \\ c &= -\frac{1}{2}\beta_{m1} + \frac{1}{4}\beta_{m2}, & d &= -\frac{3}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2}, \\ e &= \frac{3}{2}\beta_{m1} + \beta_{m3}, & f &= \frac{1}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2}, \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2h^2 & -\beta_{m1} & 52h^2 & -\beta_{m2} & 132h^2 & -\beta_{m3} & 52h^2 & -\beta_{m2} & 2h^2 & -\beta_{m1} & & & \\ \beta_{m1} & 2h^2 & \beta_{m2} & 52h^2 & \beta_{m3} & 132h^2 & \beta_{m2} & 52h^2 & \beta_{m1} & 2h^2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 2h^2 & -\beta_{m1} & 52h^2 & -\beta_{m2} & 132h^2 & -\beta_{m3} & 52h^2 & -\beta_{m2} & 2h^2 & -\beta_{m1} \\ & & & \beta_{m1} & 2h^2 & \beta_{m2} & 52h^2 & \beta_{m3} & 132h^2 & \beta_{m2} & 52h^2 & \beta_{m1} & 2h^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$d_n = [\delta_{-2}^n, \sigma_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \sigma_{-1}^n, \delta_0^n, \sigma_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \sigma_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n, \sigma_{N+2}^n]^T$$

dir. Sınır parametreleri  $\delta_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\delta_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\delta_{N+1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+1}^{n+1}$ ,  $\delta_{N+2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+2}^{n+1}$ , her zaman adımında (2.7) ifadelerinden hesaplanabilir.

## 2.2 Başlangıç Durumu

$\delta_m^{n+1}$  ve  $\sigma_m^{n+1}$  parametrelerini, (2.16) denklem sisteminden elde edebilmek için  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için  $s(x, 0)$  ve  $r(x, 0)$  başlangıç koşullarından  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Başlangıç koşulu için (1.43) kullanılarak

$$\begin{aligned} s_N(x, 0) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m^0 \phi_m(x) \\ r_N(x, 0) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \sigma_m^0 \phi_m(x) \end{aligned} \tag{2.17}$$

yazılabilir. Bu sistemdeki  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  belirlenecek parametrelerdir. Başlangıç koşullarının bölünme noktalarındaki değerleri kullanılarak  $\delta$  parametresi için,

$$\begin{aligned} s(x_0, 0) &= \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2, \\ s(x_1, 0) &= \delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3, \\ s(x_2, 0) &= \delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4, \\ &\vdots \\ s(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-3} + 26\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1} + 26\delta_N + \delta_{N+1}, \\ s(x_N, 0) &= \delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

ve aynı şekilde  $\sigma$  parametresi içinde,

$$\begin{aligned}
r(x_0, 0) &= \sigma_{-2} + 26\sigma_{-1} + 66\sigma_0 + 26\sigma_1 + \sigma_2, \\
r(x_1, 0) &= \sigma_{-1} + 26\sigma_0 + 66\sigma_1 + 26\sigma_2 + \sigma_3, \\
r(x_2, 0) &= \sigma_0 + 26\sigma_1 + 66\sigma_2 + 26\sigma_3 + \sigma_4, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
r(x_{N-1}, 0) &= \sigma_{N-3} + 26\sigma_{N-2} + 66\sigma_{N-1} + 26\sigma_N + \sigma_{N+1}, \\
r(x_N, 0) &= \sigma_{N-2} + 26\sigma_{N-1} + 66\sigma_N + 26\sigma_{N+1} + \sigma_{N+2}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$N + 5$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan sistemler elde edilir. Bu denklem sistemlerinde türevli sınır koşulları kullanılır ve  $\delta_{-2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{N+2}$  parametreleri yok edilirse,  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan lineer denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin çözümü Thomas algoritmaları (Rosenberg, 1969) ile kolayca elde edilebilir. Sınır koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{5}{h} (\delta_2 + 10\delta_1 - 10\delta_{-1} - \delta_{-2}) &= 0, \\
\frac{20}{h^2} (\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2}) &= 0, \\
\frac{5}{h} (\sigma_2 + 10\sigma_1 - 10\sigma_{-1} - \sigma_{-2}) &= 0, \\
\frac{20}{h^2} (\sigma_2 + 2\sigma_1 - 6\sigma_0 + 2\sigma_{-1} + \sigma_{-2}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{5}{h} (\delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) &= 0, \\
\frac{20}{h^2} (\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) &= 0, \\
\frac{5}{h} (\sigma_{N+2} + 10\sigma_{N+1} - 10\sigma_{N-1} - \sigma_{N-2}) &= 0, \\
\frac{20}{h^2} (\sigma_{N+2} + 2\sigma_{N+1} - 6\sigma_N + 2\sigma_{N-1} + \sigma_{N-2}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

yazılır. Buradan elde edilen



$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{15}{2}\delta_0 - 5\delta_1 - \frac{3}{2}\delta_2, & \sigma_{-2} &= \frac{15}{2}\sigma_0 - 5\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_2, \\
\delta_{-1} &= -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2, & \sigma_{-1} &= -\frac{3}{4}\sigma_0 + \frac{3}{2}\sigma_1 + \frac{1}{4}\sigma_2, \\
\delta_{N+1} &= \frac{1}{4}\delta_{N-2} + \frac{3}{2}\delta_{N-1} - \frac{3}{4}\delta_N, & \sigma_{N+1} &= \frac{1}{4}\sigma_{N-2} + \frac{3}{2}\sigma_{N-1} - \frac{3}{4}\sigma_N, \\
\delta_{N+2} &= -\frac{3}{2}\delta_{N-2} - 5\delta_{N-1} + \frac{15}{2}\delta_N, & \sigma_{N+2} &= -\frac{3}{2}\sigma_{N-2} - 5\sigma_{N-1} + \frac{15}{2}\sigma_N
\end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.18) ve (2.19) sistemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$A = \begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & \\ 25, 25 & 67, 5 & 26, 25 & 1 & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & 1 & 26, 25 & 67, 5 & 25, 25 \\ & & & 6 & 60 & 54 \end{bmatrix},$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$b = [s(x_0), s(x_1), \dots, s(x_{N-1}), s(x_N)]^T,$$

$$\sigma^0 = [\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_N^0]^T,$$

$$c = [r(x_0), r(x_1), \dots, r(x_{N-1}), r(x_N)]^T$$

olmak üzere, her iki eleman parametresi için matris formunda

$$A\delta^0 = b \quad \text{ve} \quad A\sigma^0 = c \tag{2.23}$$

denklem sistemleri elde edilir. Dolayısıyla her iki eleman parametresi içinde ayrı ayrı  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde 5 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur.

### 2.3 Test Problemleri

Bu kısımda, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde edebilmek için bir önceki kısımda tanımlanan sayısal yöntemin güvenilirliğini görebilmek için üç test problem çalışıldı.

### 2.3.1. Tek Soliton Çözümü

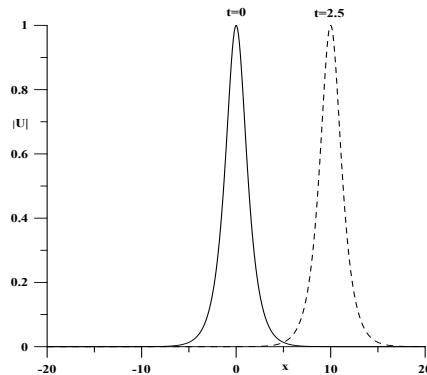
Schrödinger denkleminin tek soliton çözümü

$$U(x, t) = \alpha \left( \frac{2}{q} \right)^{1/2} \exp i \left\{ \frac{1}{2} Sx - \frac{1}{4} (S^2 - \alpha^2) t \right\} \operatorname{sech} \alpha (x - St) \quad (2.24)$$

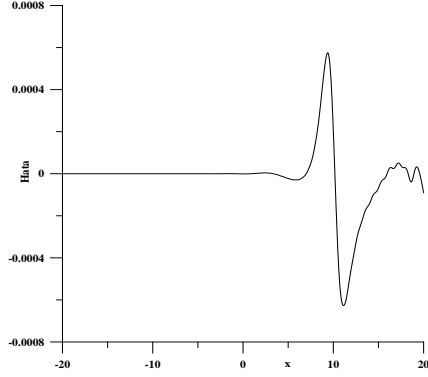
ile verilir. Bu çözüm,  $S$  hızıyla ilerleyen ve büyüklüğü  $\alpha$  reel parametresine bağlı bir solitonu gösterir. Tek soliton çözümünün simülasyonu bazı sayısal metotlar ile herhangi bir problem olmaksızın çalışılmıştır. Mevcut bazı çalışmalarla aynı sonuçları elde edebilmek için hesaplamalar,  $-20 \leq x \leq 20$  aralığı içinde  $q = 2$ ,  $S = 4$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$ ,  $\Delta t = 0,005$ ,  $h = 0,05$  parametreleri ile yapılmıştır.  $\alpha = 1$  olmak üzere kompleks değerli  $U$  fonksiyonunun modülü

$$|U| = \operatorname{sech}(x - 4t), \quad (2.25)$$

şeklinde herhangi bir değişme olmaksızın 4 hızıyla sağa doğru ilerleyen bir soliton gösterir. Simülasyon  $t = 2,5$  zamanına kadar çalıştırıldı.  $L_\infty$ ,  $L_2$  hata normları ve farklı korunum sabitleri Tablo 2.1 de gösterilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, hata normları algoritmanın çalışması esnasında çok küçük kalmıştır. Bu yüzden solitonun yayılması iyi bir şekilde gerçekleşmiştir. İlerleyen solitonun modülünün simülasyonu  $t = 0$  ve  $t = 2,5$  zamanlarında Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Hata (sayısal çözüm–analitik çözüm) dağılımı  $t = 2,5$  zamanında Şekil 2.2 de verilmiştir. Şekle bakıldığında, maksimum hatanın solitonun tepe konumu olan  $x = 10$  civarında ortaya çıktığı görülmektedir. Önerilen metotla simülasyon esnasında  $C_1$  korunum sabiti değişmezken,  $C_2$  sabiti  $2 \times 10^{-7}$  den az bir değişimle elde edilmiştir.



Şekil 2.1: Tek soliton simülasyonu

Şekil 2.2:  $t = 2.5$  zamanındaki hata

Tablo 2.1: Korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$C_1$	$C_2$	$L_\infty$	$L_2$
0, 0	2, 0	7, 3333333	0, 0000	0, 0000
0, 5	2, 0	7, 3333334	0, 0002	0, 0002
1, 0	2, 0	7, 3333334	0, 0003	0, 0004
1, 5	2, 0	7, 3333335	0, 0004	0, 0006
2, 0	2, 0	7, 3333335	0, 0005	0, 0008
2, 5	2, 0	7, 3333335	0, 0006	0, 0009

Tablo 2.2:  $t = 1$  zamanında genlik = 1 için sonuçların karşılaştırması

$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0, 05	0, 005	0, 0003	0, 0000000	0, 0000000
0, 3125	0, 02	0, 002	0, 0000000	0, 0000063
0, 03	0, 005	0, 0003	0, 0000000	0, 0000000
0, 05	0, 001	0, 00001	0, 0000000	0, 0000000
0, 08	0, 002	0, 00003	0, 0000000	0, 0000000
0, 3125	0, 0026	0, 006	0, 0000000	0, 0000198

Tablo 2.2 ve 2.3 de genlik 1 ve 2 için farklı zaman ve konum adımları alınarak  $L_\infty$  hata normu ile  $\hat{C}_1$  ve  $\hat{C}_2$  nin değerleri verilmiştir.  $C_{10}$  ve  $C_{20}$   $t = 0$  zamanındaki  $C_1$  ve  $C_2$  nin değerleri olmak üzere  $\hat{C}_1 = \frac{C_1 - C_{10}}{C_{10}}$ ,  $\hat{C}_2 = \frac{C_2 - C_{20}}{C_{20}}$  dir. Mevcut metotla elde edilen korunum sabitlerinin ilgili hatalarının küçük olduğu hesaplanan sonuçlardan anlaşılmaktadır.

Tablo 2.3:  $t = 1$  zamanında genlik = 2 için sonuçların karşılaştırması

$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0,1	0,005	0,0007	0,0000000	0,0000000
0,1563	0,0048	0,002	0,0000000	0,0000026
0,015	0,005	0,001	0,0000000	0,0000001
0,02	0,0025	0,0003	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0001	0,0000	0,0000000	0,0000000
0,07	0,012	0,006	0,0000000	0,0000027

### 2.3.2 İki solitonun çarpışması

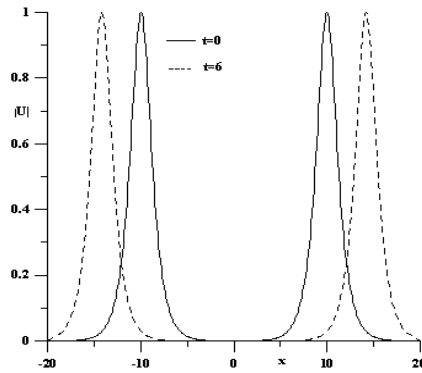
İki solitonun çarpışması

$$U_j(x, 0) = \alpha_j \left( \frac{2}{q} \right)^{1/2} \exp i \left\{ \frac{1}{2} S(x - x_j) \right\} \operatorname{sech} \alpha_j (x - x_j), \quad j = 1, 2 \quad (2.26)$$

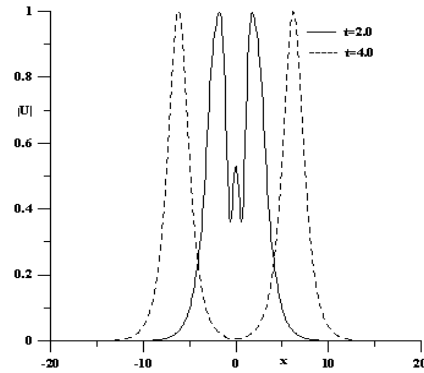
ile verilir. Burada

$$U(x, 0) = U_1(x, 0) + U_2(x, 0) \quad (2.27)$$

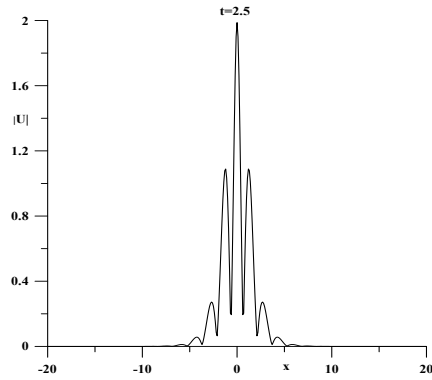
başlangıç koşuluyla zıt yönde hareket eden iki solitonun çarpışması  $-20 \leq x \leq 20$  çözüm bölgesi içinde  $q = 2$ ,  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,01$ ,  $\alpha_1 = 1,0$ ,  $S_1 = -4,0$ ,  $x_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $S_2 = 4,0$ ,  $x_2 = -10$  parametreleri ile gözlemlenmiştir.



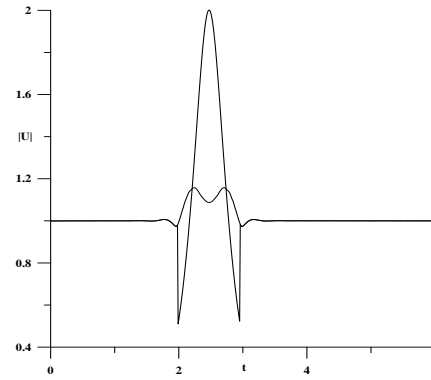
Şekil 2.3: İki solitonun çarpışması



Şekil 2.4: İki solitonun çarpışması



Şekil 2.5: İki solitonun çarpışması



Şekil 2.6: Zaman-Genlik grafiği

Yukarıdaki başlangıç koşulu (2.27) ve parametreler daha önceki mevcut çalışmalarla aynı olarak seçilmiştir. Bu başlangıç koşulu, 1 eşit genliğe sahip iki soliton tanımlar ve bu iki solitondan biri  $x = -10$  konumu civarında diğeri ise  $x = 10$  konumu civarında yerleşmiştir. 4 hızına sahip aynı büyüklükteki iki solitonun ters yönde hareketi gözlemlenmiştir. Program  $t = 6$  zamanına kadar çalıştırılmış ve iki solitonun birbiriyle çarpışması Şekil 2.3-2.5 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması çözüm bölgesinin ortasında meydana gelmiştir. Bu durum  $t = 2, 5$  zamanında Şekil 2.5 de verilmiştir. Aynı zamanda, bu solitonların çarpışmadan sonraki biçimlerinin aynı kaldığı Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 e bakarak söylenebilir.

Tablo 2.4 de iki soliton problemi için korunum sabitlerinin değerleri farklı zamanlar için verilmiştir. Algoritmanın çalışması boyunca,  $C_1$  sabit kalırken,  $C_2$  başlangıç durumuna göre  $0, 116 \times 10^{-2}$  den daha az bir değişime uğramıştır. Çarpışmanın ardından  $C_2$  korunum sabiti başlangıçtaki değerine dönmektedir. Bu yüzden, mevcut algoritma ile korunum sabitlerinin tatmin edici bir biçimde bulunduğu söylenebilir. Çarpışmanın daha iyi gözlemlenebilmesi için zamana karşı solitonların genlikleri Şekil 2.6 da gösterilmiştir.

Tablo 2.4: İki soliton problemi için korunum sabitleri

Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0, 0	4, 00000	14, 66666	3, 5	4, 00000	14, 66667
0, 5	4, 00000	14, 66667	4, 0	4, 00000	14, 66667
1, 0	4, 00000	14, 66667	4, 5	4, 00000	14, 66667
1, 5	4, 00000	14, 66667	5, 0	4, 00000	14, 66667
2, 0	4, 00000	14, 66663	5, 5	4, 00000	14, 66667
2, 5	4, 00000	14, 66556	6, 0	4, 00000	14, 66672
3, 0	4, 00000	14, 66665			

$t = 1$  zamanında genlik= 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.5:  $t = 1$  de genlik = 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları

$h$	$\Delta t$	Zaman	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0, 1	0, 01	1, 5	0, 000000	0, 00000
		2, 5	0, 000000	-0, 00008
		3, 5	0, 000000	0, 00000
		4, 5	0, 000000	0, 00000

### 2.3.3 Solitonların oluşumu

(a) **Duran soliton oluşumu:**  $U(x, 0)$  başlangıç koşuluyla, eğer

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, 0) dx \geq \pi \quad (2.28)$$

ise, zamanla bir soliton ortaya çıkacağı, aksi takdirde soliton oluşmayacağı teorik olarak bilinmektedir. Bu kısımda aynı gözlemi Maxwell başlangıç koşulu

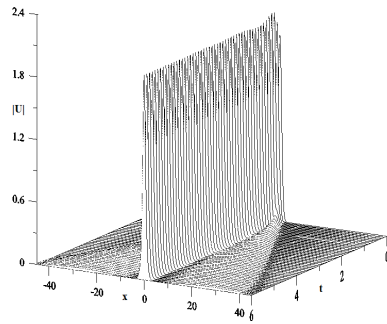
$$U(x, 0) = Ae^{-x^2} \quad (2.29)$$

yi kullanarak  $C = A\sqrt{\pi}$  için yapmaya çalışılacak. Böylece (2.29) başlangıç koşuluyla  $A \geq \sqrt{\pi} = 1, 7725$  için solitonun oluşacağı,  $A < \sqrt{\pi}$  için ise solitonun oluşmayacağı tahmin edilmektedir.

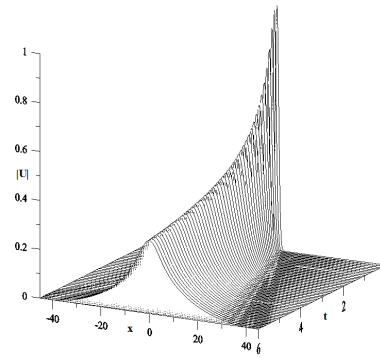
Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesinde  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,04$ ,  $A = 1,1,78$  ve  $q = 2$  parametrelerinin kullanılmasıyla incelenmiştir. Program, solitonun üretildiği  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Solitonun maksimumu Şekil 2.7 de gösterilmiştir. Bu şekle baktığımızda,  $A = 1,78$  ile elde edilen solitonun genliğinin  $\sqrt{\pi} = 1,7725$  den daha büyük olduğu söylenebilir. Şekil 2.8 e baktığımızda ise,  $A = 1$  ile elde edilen başlangıç titreşimlerinin zamanla söndüğü görülür.

$A = 1,78$  için korunum sabitlerinin analitik değerleri  $C_1 = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3,97100$  ve  $C_2 = \frac{1}{4}A^2(2\sqrt{2} - qA^2)\sqrt{\pi} = -4,92562$  olarak hesaplanmıştır. Mevcut algoritma ile elde edilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri ise Tablo 2.6 da verilmiştir. Bu verilere baktığımızda  $A = 1,78$  için  $C_1$  değerinin analitik değer ile aynı kaldığı,  $C_2$  nin ise biraz değiştiği söylenebilir.

Tablo 2.6: Duran solitonun korunum sabitleri, $A = 1,78$					
Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3,97100	-4,2562	7	3,97100	-4,93287
1	3,97100	-4,93240	8	3,97100	-4,93279
2	3,97100	-4,93377	9	3,97100	-4,93289
3	3,97100	-4,93326	10	3,97100	-4,93306
4	3,97100	-4,93335	15	3,97100	-4,93375
5	3,97100	-4,93346	20	3,97100	-4,93304
6	3,97100	-4,93298	30	3,97100	-4,93445



Şekil 2.7: Duran soliton oluşumu



Şekil 2.8: Duran soliton oluşumu

**(b) İlerleyen soliton oluşumu:** Önceki test problemindeki parametreler kullanılarak ilerleyen soliton oluşumu

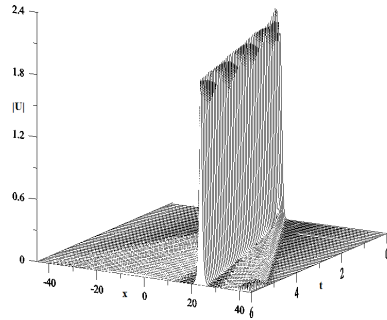
$$U(x, 0) = Ae^{-x^2+2ix} \quad (2.30)$$

Maxwell başlangıç koşulu ile araştırılmıştır. Böylece  $A = 1,78$  iken 2 yüksekliğine ve 4 hızına sahip hareketli soliton zaman içinde gelişmiştir.  $t = 6$  zamanında,  $x$  pozitif doğrultuda hareket eden solitonun tepe noktasının konumu  $x = 24$  olarak kaydedilmiştir. Böylece sayısal hız  $v = \text{alınan mesafe/zaman} = 24/6$  olarak bulunur. İlerleyen solitonun korunum sabitlerinin analitik değerleri  $A = 1,78$  ve  $q = 2$  için  $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 = 3,97100$  ve  $C_2 = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}qA^4 = 10,95838$  olarak hesaplanmıştır. İlerleyen soliton Şekil 2.9 ve 2.10 da çizilmiştir. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 2.7 de verilmiştir. Görüldüğü gibi,  $C_1$  sabit kalmış,  $C_2$  ise  $1,951 \times 10^{-2}$  den daha az bir değişiklik ile bulunmuştur. Başlangıç koşulunda  $A = 1$  kullanılırsa, Şekil 2.10 dan da görüldüğü gibi, yine solitonun zamanla söndüğü görülmektedir.  $A = 1$  ve  $A = 1,78$  ( $A = 1,78$  nokta ve  $A = 1$  çizgi) için Şekil 2.11 ve Şekil 2.12 de hem duran hemde ilerleyen solitonların maksimumları gösterilmiştir.

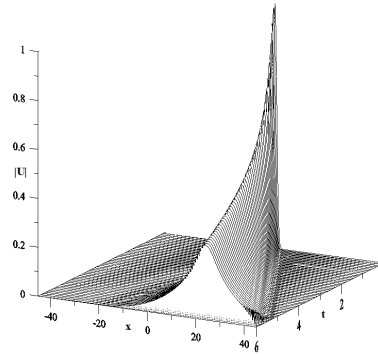
Tablo 2.7: İlerleyen solitonun korunum sabitleri,  $A = 1,78$

Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3,97100	10,95837	7	3,97100	10,97496
1	3,97100	10,97104	8	3,97100	10,97452
2	3,97100	10,97294	9	3,97100	10,97467
3	3,97100	10,97289	10	3,97100	10,97557
4	3,97100	10,97336	15	3,97100	10,97222
5	3,97100	10,97374	20	3,97100	10,97533
6	3.97100	10,97592	30	3,97100	10,97788

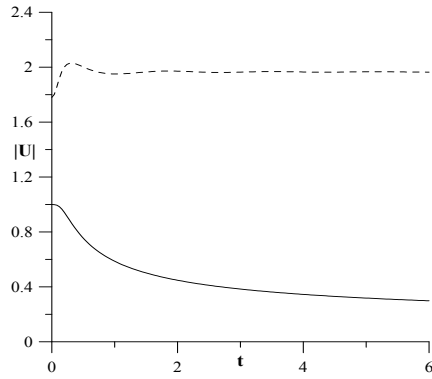




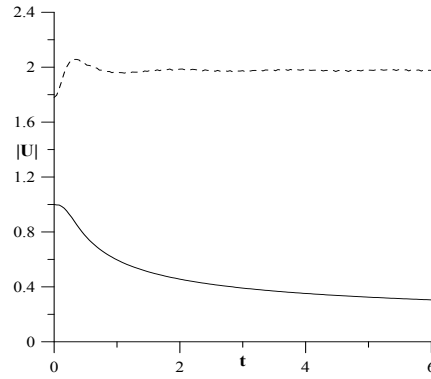
Şekil 2.9: İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 2.10: İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 2.11: Başlangıç koşulu (2.29)



Şekil 2.12: Başlangıç koşulu (2.30)

## 2.4 Sonuç

Bu bölümde, kuintik B-spline kolokeyşin metodu ile sınırlı bir aralıkta Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Schrödinger denkleminde, zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson metodu ve konum ayrıştırması için de kuintik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Böylece bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı sınır koşulları kullanılarak eşitlendikten sonra, elde edilen denklem sistemi fortran kodları kullanılarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında her bir zaman adımında iç iterasyon yardımıyla iyileştirme de yapılmıştır. Tek soliton çözümü, iki solitonun çarpışması ve soliton oluşumu gibi standart test problemleri ile verilen metodun güvenilirliği kanıtlanmıştır. Sonuçlar analitik değerler ile karşılaştırılmıştır. Korunum sabitlerini hesaplarken genelleştirilmiş yamuklar yöntemi kullanmamıza rağmen, tablolardanda görüldüğü gibi bu sabitler programın çalışması boyunca yeterince korunmuştur. Hata dağılımı çeşitli zamanlar için hesaplanmış,  $C_1$  sabitinde değişiklik olmazken  $C_2$  sabitinde çok az değişiklik olduğu

görülmüştür. Aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması sonrasında bile her iki dalganın şekli değişmeksizin aynı kalmıştır. Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesi üzerinde  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,04$ ,  $A = 1,1,78$  ve  $q = 2$  parametreleri kullanılarak incelenmiş, solitonun maksimumu  $\sqrt{\pi} = 1,7725$  den daha büyük bir genlikle zaman içinde gelişmiş. Genel olarak, kuintik B-spline kolokeyşin metodunun kullanılması sonucunda bulunan korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere yakın olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak incelenen üç test problemine göre, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz kuintik B-spline kolokeyşin metodunun farklı denklemler içinde güvenilir bir şekilde kullanılabileceği söylenebilir.

### BÖLÜM 3

## SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SEKTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin sektik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, üç test problemi kullanılarak hata normları, korunum sabitleri ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

### 3.1 Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Sektik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda Schrödinger denkleminin sektik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır.  $\circ$  zamana göre türev ve

$$z_m = (\sigma_{m-3} + 57\sigma_{m-2} + 302\sigma_{m-1} + 302\sigma_m + 57\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2})^2 + (\delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2$$

olmak üzere, (1.60) ve (1.61) denklemlerinde (1.64) değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \circ\delta_{m-3} + 57\circ\delta_{m-2} + 302\circ\delta_{m-1} + 302\circ\delta_m + 57\circ\delta_{m+1} + \circ\delta_{m+2} - \frac{30}{h^2}(\sigma_{m+2} + \\ & 9\sigma_{m+1} - 10\sigma_m - 10\sigma_{m-1} + 9\sigma_{m-2} + \sigma_{m-3}) - qz_m(\sigma_{m-3} + 57\sigma_{m-2} + \\ & 302\sigma_{m-1} + 302\sigma_m + 57\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} & \circ\sigma_{m-3} + 57\circ\sigma_{m-2} + 302\circ\sigma_{m-1} + 302\circ\sigma_m + 57\circ\sigma_{m+1} + \circ\sigma_{m+2} + \frac{30}{h^2}(\delta_{m+2} + \\ & 9\delta_{m+1} - 10\delta_m - 10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}) + qz_m(\delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + \\ & 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) = 0 \end{aligned}$$

birinci mertebeden  $(2N + 2)$  diferensiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametreleri ve bunların zamana göre türevleri olan (2.2-2.3) ifadeleri (3.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n + 57\delta_{m-2}^{n+1} - 57\delta_{m-2}^n + 302\delta_{m-1}^{n+1} - 302\delta_{m-1}^n + 302\delta_m^{n+1} - 302\delta_m^n + \\
& 57\delta_{m+1}^{n+1} - 57\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n) - \frac{15}{h^2} (\sigma_{m-3}^{n+1} + \sigma_{m-3}^n + 9\sigma_{m-2}^{n+1} + 9\sigma_{m-2}^n - 10\sigma_{m-1}^{n+1} - \\
& 10\sigma_{m-1}^n - 10\sigma_m^{n+1} - 10\sigma_m^n + 9\sigma_{m+1}^{n+1} + 9\sigma_{m+1}^n + \sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n) - \frac{1}{2}qz_m (\sigma_{m-3}^{n+1} + \sigma_{m-3}^n + \\
& 57\sigma_{m-2}^{n+1} + 57\sigma_{m-2}^n + 302\sigma_{m-1}^{n+1} + 302\sigma_{m-1}^n + 302\sigma_m^{n+1} + 302\sigma_m^n + 57\sigma_{m+1}^{n+1} + \\
& 57\sigma_{m+1}^n + \sigma_{m+2}^{n+1} + \sigma_{m+2}^n) = 0, \\
& \frac{1}{\Delta t} (\sigma_{m-3}^{n+1} - \sigma_{m-3}^n + 57\sigma_{m-2}^{n+1} - 57\sigma_{m-2}^n + 302\sigma_{m-1}^{n+1} - 302\sigma_{m-1}^n + 302\sigma_m^{n+1} - 302\sigma_m^n + \\
& 57\sigma_{m+1}^{n+1} - 57\sigma_{m+1}^n + \sigma_{m+2}^{n+1} - \sigma_{m+2}^n) + \frac{15}{h^2} (\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n + 9\delta_{m-2}^{n+1} + 9\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^{n+1} - \\
& 10\delta_{m-1}^n - 10\delta_m^{n+1} - 10\delta_m^n + 9\delta_{m+1}^{n+1} + 9\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n) + \frac{1}{2}qz_m (\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n + \\
& 57\delta_{m-2}^{n+1} + 57\delta_{m-2}^n + 302\delta_{m-1}^{n+1} + 302\delta_{m-1}^n + 302\delta_m^{n+1} + 302\delta_m^n + 57\delta_{m+1}^{n+1} + \\
& 57\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n) = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sistemi bulunur. Bu sistem  $m = 0, \dots, N$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{m-3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{m-3}^{n+1} + 114h^2\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m-2}^{n+1} + 604h^2\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{m-1}^{n+1} + \\
& 604h^2\delta_m^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_m^{n+1} + 114h^2\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m+1}^{n+1} + 2h^2\delta_{m+2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{m+2}^{n+1} = \\
& 2h^2\delta_{m-3}^n - \beta_{m1}\sigma_{m-3}^n + 114h^2\delta_{m-2}^n - \beta_{m2}\sigma_{m-2}^n + 604h^2\delta_{m-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{m-1}^n + \\
& 604h^2\delta_m^n - \beta_{m3}\sigma_m^n + 114h^2\delta_{m+1}^n - \beta_{m2}\sigma_{m+1}^n + 2h^2\delta_{m+2}^n - \beta_{m1}\sigma_{m+2}^n,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m-3}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + 114h^2\sigma_{m-2}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + 604h^2\sigma_{m-1}^{n+1} - \\
& \beta_{m3}\delta_m^{n+1} + 604h^2\sigma_m^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{m+1}^{n+1} + 114h^2\sigma_{m+1}^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{m+2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m+2}^{n+1} = \\
& \beta_{m1}\delta_{m-3}^n + 2h^2\sigma_{m-3}^n + \beta_{m2}\delta_{m-2}^n + 114h^2\sigma_{m-2}^n + \beta_{m3}\delta_{m-1}^n + 604h^2\sigma_{m-1}^n + \\
& \beta_{m3}\delta_m^n + 604h^2\sigma_m^n + \beta_{m2}\delta_{m+1}^n + 114h^2\sigma_{m+1}^n + \beta_{m1}\delta_{m+2}^n + 2h^2\sigma_{m+2}^n
\end{aligned}$$

olarak yeniden düzenlenirse,  $(2N + 12)$  bilinmeyenli  $(2N + 2)$  cebirsel denklemden

oluşan bir sistem elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}\beta_{m1} &= -30\Delta t - dh^2\Delta t, \quad \beta_{m2} = -270\Delta t - 57dh^2\Delta t, \\ \beta_{m3} &= 300\Delta t - 302dh^2\Delta t, \quad d = qz_m, \quad m = 0, \dots, N\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sisteminde  $\delta_{-3}^{n+1}, \sigma_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}$  eleman parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece  $(2N+2) \times (2N+2)$  boyutlu 13 band matris sistemi elde edilir. (1.57) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden (1.64) değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(s_N)(a, t) &= \delta_{-3} + 57\delta_{-2} + 302\delta_{-1} + 302\delta_0 + 57\delta_1 + \delta_2 = 0, \\ (s_N)_x(a, t) &= \delta_2 + 25\delta_1 + 40\delta_0 - 40\delta_{-1} - 25\delta_{-2} - \delta_{-3} = 0, \\ (s_N)_{xx}(a, t) &= \delta_2 + 9\delta_1 - 10\delta_0 - 10\delta_{-1} + 9\delta_{-2} + \delta_{-3} = 0, \\ (s_N)_x(b, t) &= \delta_{N+2} + 25\delta_{N+1} + 40\delta_N - 40\delta_{N-1} - 25\delta_{N-2} - \delta_{N-3} = 0, \\ (s_N)_{xx}(b, t) &= \delta_{N+2} + 9\delta_{N+1} - 10\delta_N - 10\delta_{N-1} + 9\delta_{N-2} + \delta_{N-3} = 0, \\ (r_N)(a, t) &= \sigma_{-3} + 57\sigma_{-2} + 302\sigma_{-1} + 302\sigma_0 + 57\sigma_1 + \sigma_2 = 0, \\ (r_N)_x(a, t) &= \sigma_2 + 25\sigma_1 + 40\sigma_0 - 40\sigma_{-1} - 25\sigma_{-2} - \sigma_{-3} = 0, \\ (r_N)_{xx}(a, t) &= \sigma_2 + 9\sigma_1 - 10\sigma_0 - 10\sigma_{-1} + 9\sigma_{-2} + \sigma_{-3} = 0, \\ (r_N)_x(b, t) &= \sigma_{N+2} + 25\sigma_{N+1} + 40\sigma_N - 40\sigma_{N-1} - 25\sigma_{N-2} - \sigma_{N-3} = 0, \\ (r_N)_{xx}(b, t) &= \sigma_{N+2} + 9\sigma_{N+1} - 10\sigma_N - 10\sigma_{N-1} + 9\sigma_{N-2} + \sigma_{N-3} = 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= -\frac{100}{9}\delta_0 + 10\delta_1 + \frac{19}{9}\delta_2, & \delta_{N+1} &= \frac{1}{8}\delta_{N-3} + \frac{17}{8}\delta_{N-2} + \frac{15}{8}\delta_{N-1} - \frac{25}{8}\delta_N, \\
\delta_{-2} &= \frac{20}{9}\delta_0 - \delta_1 - \frac{2}{9}\delta_2, & \delta_{N+2} &= -\frac{17}{8}\delta_{N-3} - \frac{225}{8}\delta_{N-2} - \frac{55}{8}\delta_{N-1} + \frac{305}{8}\delta_N, \\
\delta_{-1} &= -\frac{1}{9}\delta_0 + \delta_1 + \frac{1}{9}\delta_2, & \sigma_{N+1} &= \frac{1}{8}\sigma_{N-3} + \frac{17}{8}\sigma_{N-2} + \frac{15}{8}\sigma_{N-1} - \frac{25}{8}\sigma_N, \\
\sigma_{-3} &= -\frac{100}{9}\sigma_0 + 10\sigma_1 + \frac{19}{9}\sigma_2, & \sigma_{N+2} &= -\frac{17}{8}\sigma_{N-3} - \frac{225}{8}\sigma_{N-2} - \frac{55}{8}\sigma_{N-1} + \frac{305}{8}\sigma_N, \\
\sigma_{-2} &= \frac{20}{9}\sigma_0 - \sigma_1 - \frac{2}{9}\sigma_2, \\
\sigma_{-1} &= -\frac{1}{9}\sigma_0 + \sigma_1 + \frac{1}{9}\sigma_2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
F_1 &= 2h^2\delta_{-3}^n - \beta_{m1}\sigma_{-3}^n + 114h^2\delta_{-2}^n - \beta_{m2}\sigma_{-2}^n + 604h^2\delta_{-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{-1}^n + \\
&\quad 604h^2\delta_0^n - \beta_{m3}\sigma_0^n + 114h^2\delta_1^n - \beta_{m2}\sigma_1^n + 2h^2\delta_2^n - \beta_{m1}\sigma_2^n, \\
F_2 &= \beta_{m1}\delta_{-3}^n + 2h^2\sigma_{-3}^n + \beta_{m2}\delta_{-2}^n + 114h^2\sigma_{-2}^n + \beta_{m3}\delta_{-1}^n + 604h^2\sigma_{-1}^n + \\
&\quad \beta_{m3}\delta_0^n + 604h^2\sigma_0^n + \beta_{m2}\delta_1^n + 114h^2\sigma_1^n + \beta_{m1}\delta_2^n + 2h^2\sigma_2^n, \\
F_3 &= 2h^2\delta_{-2}^n - \beta_{m1}\sigma_{-2}^n + 114h^2\delta_{-1}^n - \beta_{m2}\sigma_{-1}^n + 604h^2\delta_0^n - \beta_{m3}\sigma_0^n + \\
&\quad 604h^2\delta_1^n - \beta_{m3}\sigma_1^n + 114h^2\delta_2^n - \beta_{m2}\sigma_2^n + 2h^2\delta_3^n - \beta_{m1}\sigma_3^n, \\
F_4 &= \beta_{m1}\delta_{-2}^n + 2h^2\sigma_{-2}^n + \beta_{m2}\delta_{-1}^n + 114h^2\sigma_{-1}^n + \beta_{m3}\delta_0^n + 604h^2\sigma_0^n + \\
&\quad \beta_{m3}\delta_1^n + 604h^2\sigma_1^n + \beta_{m2}\delta_2^n + 114h^2\sigma_2^n + \beta_{m1}\delta_3^n + 2h^2\sigma_3^n, \\
F_5 &= 2h^2\delta_{-1}^n - \beta_{m1}\sigma_{-1}^n + 114h^2\delta_0^n - \beta_{m2}\sigma_0^n + 604h^2\delta_1^n - \beta_{m3}\sigma_1^n + \\
&\quad 604h^2\delta_2^n - \beta_{m3}\sigma_2^n + 114h^2\delta_3^n - \beta_{m2}\sigma_3^n + 2h^2\delta_4^n - \beta_{m1}\sigma_4^n, \\
F_6 &= \beta_{m1}\delta_{-1}^n + 2h^2\sigma_{-1}^n + \beta_{m2}\delta_0^n + 114h^2\sigma_0^n + \beta_{m3}\delta_1^n + 604h^2\sigma_1^n + \\
&\quad \beta_{m3}\delta_2^n + 604h^2\sigma_2^n + \beta_{m2}\delta_3^n + 114h^2\sigma_3^n + \beta_{m1}\delta_4^n + 2h^2\sigma_4^n,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
F_{2N-1} &= 2h^2\delta_{N-4}^n - \beta_{m1}\sigma_{N-4}^n + 114h^2\delta_{N-3}^n - \beta_{m2}\sigma_{N-3}^n + 604h^2\delta_{N-2}^n - \beta_{m3}\sigma_{N-2}^n + \\
&\quad 604h^2\delta_{N-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{N-1}^n + 114h^2\delta_N^n - \beta_{m2}\sigma_N^n + 2h^2\delta_{N+1}^n - \beta_{m1}\sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N} &= \beta_{m1}\delta_{N-4}^n + 2h^2\sigma_{N-4}^n + \beta_{m2}\delta_{N-3}^n + 114h^2\sigma_{N-3}^n + \beta_{m3}\delta_{N-2}^n + 604h^2\sigma_{N-2}^n + \\
&\quad \beta_{m3}\delta_{N-1}^n + 604h^2\sigma_{N-1}^n + \beta_{m2}\delta_N^n + 114h^2\sigma_N^n + \beta_{m1}\delta_{N+1}^n + 2h^2\sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N+1} &= 2h^2\delta_{N-3}^n - \beta_{m1}\sigma_{N-3}^n + 114h^2\delta_{N-2}^n - \beta_{m2}\sigma_{N-2}^n + 604h^2\delta_{N-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{N-1}^n + \\
&\quad 604h^2\delta_N^n - \beta_{m3}\sigma_N^n + 114h^2\delta_{N+1}^n - \beta_{m2}\sigma_{N+1}^n + 2h^2\delta_{N+2}^n - \beta_{m1}\sigma_{N+2}^n, \\
F_{2N+2} &= \beta_{m1}\delta_{N-3}^n + 2h^2\sigma_{N-3}^n + \beta_{m2}\delta_{N-2}^n + 114h^2\sigma_{N-2}^n + \beta_{m3}\delta_{N-1}^n + 604h^2\sigma_{N-1}^n + \\
&\quad \beta_{m3}\delta_N^n + 604h^2\sigma_N^n + \beta_{m2}\delta_{N+1}^n + 114h^2\sigma_{N+1}^n + \beta_{m1}\delta_{N+2}^n + 2h^2\sigma_{N+2}^n,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olmak üzere, (3.3) denklem sisteminden  $m = 0$  için,

$$\begin{aligned}
&2h^2\delta_{-3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{-3}^{n+1} + 114h^2\delta_{-2}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{-2}^{n+1} + 604h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{-1}^{n+1} + \\
&604h^2\delta_0^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_0^{n+1} + 114h^2\delta_1^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_1^{n+1} + 2h^2\delta_2^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_2^{n+1} = F_1, \\
&-\beta_{m1}\delta_{-3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-3}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{-2}^{n+1} + 114h^2\sigma_{-2}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{-1}^{n+1} + 604h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \\
&\beta_{m3}\delta_0^{n+1} + 604h^2\sigma_0^{n+1} - \beta_{m2}\delta_1^{n+1} + 114h^2\sigma_1^{n+1} - \beta_{m1}\delta_2^{n+1} + 2h^2\sigma_2^{n+1} = F_2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$m = 1$  için,

$$\begin{aligned}
&2h^2\delta_{-2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{-2}^{n+1} + 114h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{-1}^{n+1} + 604h^2\delta_0^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_0^{n+1} + \\
&604h^2\delta_1^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_1^{n+1} + 114h^2\delta_2^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_2^{n+1} + 2h^2\delta_3^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_3^{n+1} = F_3, \\
&-\beta_{m1}\delta_{-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-2}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{-1}^{n+1} + 114h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_0^{n+1} + 604h^2\sigma_0^{n+1} - \\
&\beta_{m3}\delta_1^{n+1} + 604h^2\sigma_1^{n+1} - \beta_{m2}\delta_2^{n+1} + 114h^2\sigma_2^{n+1} - \beta_{m1}\delta_3^{n+1} + 2h^2\sigma_3^{n+1} = F_4
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$m = 2$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{-1}^{n+1} + 114h^2\delta_0^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_0^{n+1} + 604h^2\delta_1^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_1^{n+1} + \\
& 604h^2\delta_2^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_2^{n+1} + 114h^2\delta_3^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_3^{n+1} + 2h^2\delta_4^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_4^{n+1} = F_5, \\
& -\beta_{m1}\delta_{-1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_0^{n+1} + 114h^2\sigma_0^{n+1} - \beta_{m3}\delta_1^{n+1} + 604h^2\sigma_1^{n+1} - \\
& \beta_{m3}\delta_2^{n+1} + 604h^2\sigma_2^{n+1} - \beta_{m2}\delta_3^{n+1} + 114h^2\sigma_3^{n+1} - \beta_{m1}\delta_4^{n+1} + 2h^2\sigma_4^{n+1} = F_6
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$m = N - 1$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{N-4}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N-4}^{n+1} + 114h^2\delta_{N-3}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N-3}^{n+1} + 604h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{N-2}^{n+1} + \\
& 604h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{N-1}^{n+1} + 114h^2\delta_N^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_N^{n+1} + 2h^2\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N-1}, \\
& -\beta_{m1}\delta_{N-4}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-4}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{N-3}^{n+1} + 114h^2\sigma_{N-3}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{N-2}^{n+1} + 604h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - \\
& \beta_{m3}\delta_{N-1}^{n+1} + 604h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_N^{n+1} + 114h^2\sigma_N^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{N+1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$m = N$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{N-3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N-3}^{n+1} + 114h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N-2}^{n+1} + 604h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{N-1}^{n+1} + \\
& 604h^2\delta_N^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_N^{n+1} + 114h^2\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N+1}^{n+1} + 2h^2\delta_{N+2}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N+2}^{n+1} = F_{2N+1}, \\
& -\beta_{m1}\delta_{N-3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-3}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{N-2}^{n+1} + 114h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{N-1}^{n+1} + 604h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \\
& \beta_{m3}\delta_N^{n+1} + 604h^2\sigma_N^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{N+1}^{n+1} + 114h^2\sigma_{N+1}^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{N+2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N+2}^{n+1} = F_{2N+2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılır. (3.5) eleman parametreleri (3.8-3.12) denklemlerinde yerlerine yazılıp düzen-

lenirse, ilk altı denklem

$$\begin{aligned}
& 768h^2\delta_0^{n+1} - \left(\frac{100}{9}\beta_{m1} - \frac{20}{9}\beta_{m2} - \frac{8}{9}\beta_{m3}\right)\sigma_0^{n+1} + 624h^2\delta_1^{n+1} + \\
& (10\beta_{m1} + \beta_{m3})\sigma_1^{n+1} + 48h^2\delta_2^{n+1} + \left(\frac{28}{9}\beta_{m1} - \frac{2}{9}\beta_{m2} + \frac{1}{9}\beta_{m3}\right)\sigma_2^{n+1} = F_1,
\end{aligned}$$



$$\left(\frac{100}{9}\beta_{m1} - \frac{20}{9}\beta_{m2} - \frac{8}{9}\beta_{m3}\right)\delta_0^{n+1} + 768h^2\sigma_0^{n+1} - (10\beta_{m1} + \beta_{m3})\delta_1^{n+1} +$$

$$624h^2\sigma_1^{n+1} - \left(\frac{28}{9}\beta_{m1} - \frac{2}{9}\beta_{m2} + \frac{1}{9}\beta_{m3}\right)\delta_2^{n+1} + 48h^2\sigma_2^{n+1} = F_2,$$

$$\frac{5362}{9}h^2\delta_0^{n+1} + \left(\frac{20}{9}\beta_{m1} - \frac{1}{9}\beta_{m2} + \beta_{m3}\right)\sigma_0^{n+1} + 716h^2\delta_1^{n+1} - (\beta_{m1} - \beta_{m2} - \beta_{m3})\sigma_1^{n+1} +$$

$$\frac{1136}{9}h^2\delta_2^{n+1} - \left(\frac{2}{9}\beta_{m1} - \frac{10}{9}\beta_{m2}\right)\sigma_2^{n+1} + 2h^2\delta_3^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_3^{n+1} = F_3,$$

$$- \left(\frac{20}{9}\beta_{m1} - \frac{1}{9}\beta_{m2} + \beta_{m3}\right)\delta_0^{n+1} + \frac{5362}{9}h^2\sigma_0^{n+1} + (\beta_{m1} - \beta_{m2} - \beta_{m3})\delta_1^{n+1} + 716h^2\sigma_1^{n+1} +$$

$$\left(\frac{2}{9}\beta_{m1} - \frac{10}{9}\beta_{m2}\right)\delta_2^{n+1} + \frac{1136}{9}h^2\sigma_2^{n+1} - \beta_{m1}\delta_3^{n+1} + 2h^2\sigma_3^{n+1} = F_4,$$

$$\frac{1024}{9}h^2\delta_0^{n+1} - \left(\frac{1}{9}\beta_{m1} - \beta_{m2}\right)\sigma_0^{n+1} + 606h^2\delta_1^{n+1} + (\beta_{m1} + \beta_{m3})\sigma_1^{n+1} + \frac{5438}{9}h^2\delta_2^{n+1} +$$

$$\left(\frac{1}{9}\beta_{m1} + \beta_{m3}\right)\sigma_2^{n+1} + 114h^2\delta_3^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_3^{n+1} + 2h^2\delta_4^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_4^{n+1} = F_5,$$

$$\left(\frac{1}{9}\beta_{m1} - \beta_{m2}\right)\delta_0^{n+1} + \frac{1024}{9}h^2\sigma_0^{n+1} - (\beta_{m1} + \beta_{m3})\delta_1^{n+1} + 606h^2\sigma_1^{n+1} - \left(\frac{1}{9}\beta_{m1} + \beta_{m3}\right)\delta_2^{n+1} +$$

$$\frac{5438}{9}h^2\sigma_2^{n+1} - \beta_{m2}\delta_3^{n+1} + 114h^2\sigma_3^{n+1} - \beta_{m1}\delta_4^{n+1} + 2h^2\sigma_4^{n+1} = F_6$$

ve son dört denklem

$$2h^2\delta_{N-4}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{N-4}^{n+1} + 114.25h^2\delta_{N-3}^{n+1} + \left(\beta_{m2} + \frac{1}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_{N-3}^{n+1} + 608.25h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \left(\beta_{m3} + \frac{17}{8}\beta_{m1}\right)$$

$$\sigma_{N-2}^{n+1} + 607.75h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \left(\beta_{m3} + \frac{15}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + 107.75h^2\delta_N^{n+1} + \left(\beta_{m2} - \frac{25}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_N^{n+1} = F_{2N-1},$$

$$-\beta_{m1}\delta_{N-4}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-4}^{n+1} - \left(\beta_{m2} + \frac{1}{8}\beta_{m1}\right)\delta_{N-3}^{n+1} + 114.25h^2\sigma_{N-3}^{n+1} - \left(\beta_{m3} + \frac{17}{8}\beta_{m1}\right)\delta_{N-2}^{n+1} + 608.25h^2$$

$$\sigma_{N-2}^{n+1} - \left(\beta_{m3} + \frac{15}{8}\beta_{m1}\right)\delta_{N-1}^{n+1} + 607.75h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \left(\beta_{m2} - \frac{25}{8}\beta_{m1}\right)\delta_N^{n+1} + 107.75h^2\sigma_N^{n+1} = F_{2N},$$

$$12h^2\delta_{N-3}^{n+1} + \left(\frac{1}{8}\beta_{m2} - \frac{9}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_{N-3}^{n+1} + 300h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \left(\frac{25}{8}\beta_{m2} - \frac{225}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_{N-2}^{n+1} + 804h^2\delta_{N-1}^{n+1} +$$

$$\left(\beta_{m3} + \frac{15}{8}\beta_{m2} - \frac{55}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + 324h^2\delta_N^{n+1} + \left(\beta_{m3} - \frac{25}{8}\beta_{m2} + \frac{305}{8}\beta_{m1}\right)\sigma_N^{n+1} = F_{2N+1},$$

$$- \left(\frac{1}{8}\beta_{m2} - \frac{9}{8}\beta_{m1}\right)\delta_{N-3}^{n+1} + 12h^2\sigma_{N-3}^{n+1} - \left(\frac{25}{8}\beta_{m2} - \frac{225}{8}\beta_{m1}\right)\delta_{N-2}^{n+1} + 300h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - \left(\beta_{m3} + \frac{15}{8}\beta_{m2} -$$

$$\frac{55}{8}\beta_{m1}\right)\delta_{N-1}^{n+1} + 804h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \left(\beta_{m3} - \frac{25}{8}\beta_{m2} + \frac{305}{8}\beta_{m1}\right)\delta_N^{n+1} + 324h^2\sigma_N^{n+1} = F_{2N+2}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Buna göre denklem sistemi,

$$F = Bd_n,$$

$$d_{n+1} = [\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \sigma_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}]^T$$

olmak üzere,

$$Ad_{n+1} = F \tag{3.13}$$

matris formunda elde edilmiş olur. Bu denklem sistemi Gauss eliminasyon yöntemiyle çözülür. Burada  $A$  ve  $B$  matrisleri Bölüm 2 de olduğu gibi yazılır ve

$$d_n = [\delta_{-3}^n, \sigma_{-3}^n, \delta_{-2}^n, \sigma_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \sigma_{-1}^n, \delta_0^n, \sigma_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \sigma_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n, \sigma_{N+2}^n]^T$$

dir. Sınır parametreleri  $\delta_{-3}^{n+1}, \sigma_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}$ ,

her zaman adımımda (3.5) denklemlerinden hesaplanabilir.

### 3.2 Başlangıç Durumu

$\delta_m^{n+1}$  ve  $\sigma_m^{n+1}$  parametrelerini, (3.13) denklem sisteminden elde edebilmek için  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için  $s(x, 0)$  ve  $r(x, 0)$  başlangıç koşullarından  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Başlangıç koşulu için (1.48) kullanılarak

$$\begin{aligned} s_N(x, 0) &= \sum_{m=-3}^{N+2} \delta_m^0 \phi_m(x) \\ r_N(x, 0) &= \sum_{m=-3}^{N+2} \sigma_m^0 \phi_m(x) \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazılabilir. Bu sistemdeki  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  belirlenecek parametrelerdir. Başlangıç koşullarının bölünme noktalarındaki değerleri kullanılarak  $\delta$  parametresi için,

$$\begin{aligned}
s(x_0, 0) &= \delta_{-3} + 57\delta_{-2} + 302\delta_{-1} + 302\delta_0 + 57\delta_1 + \delta_2, \\
s(x_1, 0) &= \delta_{-2} + 57\delta_{-1} + 302\delta_0 + 302\delta_1 + 57\delta_2 + \delta_3, \\
s(x_2, 0) &= \delta_{-1} + 57\delta_0 + 302\delta_1 + 302\delta_2 + 57\delta_3 + \delta_4, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
s(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-4} + 57\delta_{N-3} + 302\delta_{N-2} + 302\delta_{N-1} + 57\delta_N + \delta_{N+1}, \\
s(x_N, 0) &= \delta_{N-3} + 57\delta_{N-2} + 302\delta_{N-1} + 302\delta_N + 57\delta_{N+1} + \delta_{N+2}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

ve aynı şekilde  $\sigma$  parametresi içinde,

$$\begin{aligned}
r(x_0, 0) &= \sigma_{-3} + 57\sigma_{-2} + 302\sigma_{-1} + 302\sigma_0 + 57\sigma_1 + \sigma_2, \\
r(x_1, 0) &= \sigma_{-2} + 57\sigma_{-1} + 302\sigma_0 + 302\sigma_1 + 57\sigma_2 + \sigma_3, \\
r(x_2, 0) &= \sigma_{-1} + 57\sigma_0 + 302\sigma_1 + 302\sigma_2 + 57\sigma_3 + \sigma_4, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
r(x_{N-1}, 0) &= \sigma_{N-4} + 57\sigma_{N-3} + 302\sigma_{N-2} + 302\sigma_{N-1} + 57\sigma_N + \sigma_{N+1}, \\
r(x_N, 0) &= \sigma_{N-3} + 57\sigma_{N-2} + 302\sigma_{N-1} + 302\sigma_N + 57\sigma_{N+1} + \sigma_{N+2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$N + 6$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan sistemler elde edilir. Bu denklem sistemlerinde türevli sınır koşulları kullanılır ve  $\delta_{-3}$ ,  $\sigma_{-3}$ ,  $\delta_{-2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{N+2}$  parametreleri Bölüm 2 de olduğu gibi yok edilirse,  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan 6 sütun elemanlı köşegen denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin çözümü Thomas algoritmaları ile kolayca elde edilebilir.

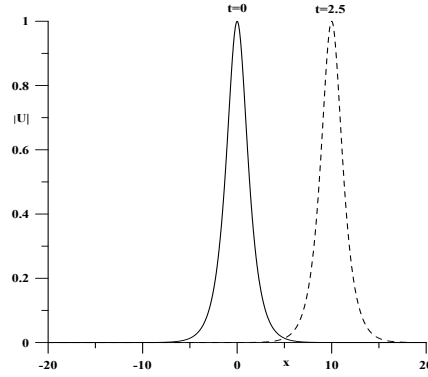
### 3.3 Test Problemleri

Bu kısımda, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde edebilmek için bir önceki kısımda tanımlanan sayısal yöntemin güvenilirliğini görebilmek için üç test problem çalışıldı.

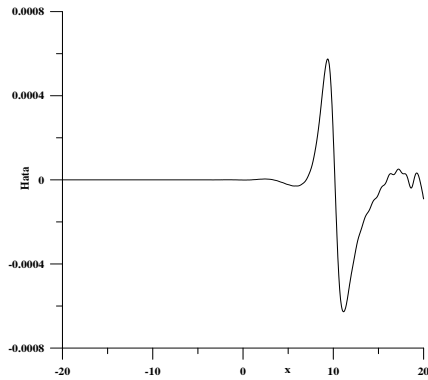
#### 3.3.1. Tek Soliton Çözümü

Schrödinger denkleminin tek soliton çözümü (2.24) ile verilir.  $\alpha = 1$  olmak üzere kompleks değerli  $U$  fonksiyonunun modülü (2.25), 4 hızıyla sağa doğru ilerleyen bir

soliton gösterir. Hesaplamalar,  $-20 \leq x \leq 20$  aralığı içinde  $q = 2$ ,  $S = 4$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$ ,  $\Delta t = 0,005$ ,  $h = 0,05$  parametreleri ile yapılmıştır. Simülasyon  $t = 2,5$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.  $L_\infty$ ,  $L_2$  hata normları ve farklı korunum sabitleri Tablo 3.1 de gösterilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, hata normları algoritmanın çalışması esnasında çok küçük kalmıştır. Bu yüzden solitonun yayılması iyi bir şekilde gerçekleşmiştir. İlerleyen solitonun modülünün simülasyonu  $t = 0$  ve  $t = 2,5$  zamanlarında Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Hata (sayısal çözüm—analitik çözüm) dağılımı  $t = 2,5$  zamanında Şekil 3.2 de verilmiştir. Şekle bakıldığında, maksimum hatanın solitonun tepe konumu olan  $x = 10$  civarında ortaya çıktığı görülmektedir. Önerilen metotla simülasyon esnasında  $C_1$  korunum sabiti değişmezken,  $C_2$  sabiti  $2 \times 10^{-7}$  den az bir değişimle elde edilmiştir.



Şekil 3.1: Tek soliton simülasyonu



Şekil 3.2:  $t = 2.5$  zamanındaki hata

Tablo 3.1: Korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$C_1$	$C_2$	$L_2$	$L_\infty$
0, 0	2, 0	7, 3333333	0, 0000	0, 0000
0, 5	2, 0	7, 3333334	0, 0002	0, 0002
1, 0	2, 0	7, 3333335	0, 0004	0, 0003
1, 5	2, 0	7, 3333335	0, 0006	0, 0004
2, 0	2, 0	7, 3333335	0, 0008	0, 0005
2, 5	2, 0	7, 3333335	0, 0010	0, 0006

Tablo 3.2:  $t = 1$  zamanında genlik = 1 için sonuçların karşılaştırması

$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0, 05	0, 005	0, 0003	0, 0000000	0, 0000000
0, 3125	0, 02	0, 0057	0, 0000000	0, 0000102
0, 03	0, 005	0, 0003	0, 0000000	0, 0000000
0, 05	0, 001	0, 00001	0, 0000000	0, 0000000
0, 08	0, 002	0, 00005	0, 0000000	0, 0000000
0, 3125	0, 0026	0, 0009	0, 0000000	0, 0000025

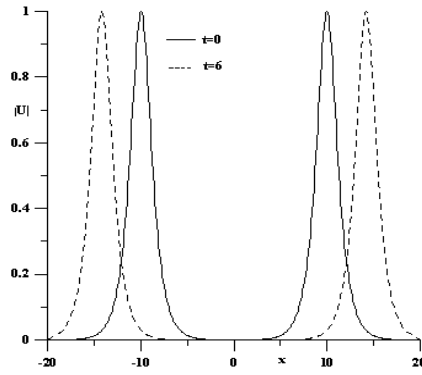
Tablo 3.2 ve 3.3 de genlik 1 ve 2 için farklı zaman ve konum adımları alınarak  $L_\infty$  hata normu ile  $\hat{C}_1$  ve  $\hat{C}_2$  nin değerleri verilmiştir.  $C_{10}$  ve  $C_{20}$   $t = 0$  zamanındaki  $C_1$  ve  $C_2$  nin değerleri olmak üzere  $\hat{C}_1 = \frac{C_1 - C_{10}}{C_{10}}$ ,  $\hat{C}_2 = \frac{C_2 - C_{20}}{C_{20}}$  dir. Mevcut metotla elde edilen korunum sabitlerinin ilgili hatalarının küçük olduğu hesaplanan sonuçlardan anlaşılmaktadır.

Tablo 3.3:  $t = 1$  zamanında genlik = 2 için sonuçların karşılaştırması

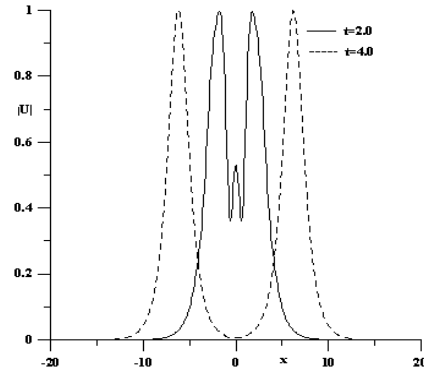
$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0,1	0,005	0,0011	0,0000000	-0,0000004
0,1563	0,0048	0,0013	0,0000000	0,0000001
0,015	0,005	0,0011	0,0000000	-0,0000004
0,02	0,0025	0,0003	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0001	0,0000005	0,0000000	0,0000000
0,07	0,012	0,0066	0,0000000	-0,0000272

### 3.3.2 İki solitonun çarpışması

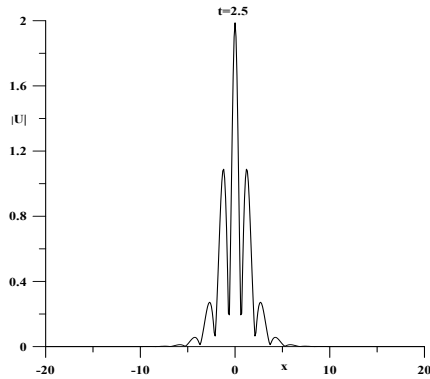
İki solitonun çarpışması (2.26) ile verilir. Burada (2.27) başlangıç koşuluyla zıt yönde hareket eden iki solitonun çarpışması  $-20 \leq x \leq 20$  çözüm bölgesi içinde  $q = 2$ ,  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,01$ ,  $\alpha_1 = 1,0$ ,  $S_1 = -4,0$ ,  $x_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $S_2 = 4,0$ ,  $x_2 = -10$  parametreleri ile gözlemlenmiştir.



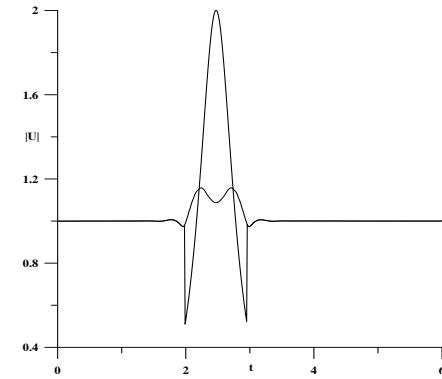
Şekil 3.3: İki solitonun çarpışması



Şekil 3.4: İki solitonun çarpışması



Şekil 3.5: İki solitonun çarpışması



Şekil 3.6: Zaman-Genlik grafiği

Yukarıdaki başlangıç koşulu (2.27) ve parametreler daha önceki mevcut çalışmalarla aynı olarak seçilmiştir. Bu başlangıç koşulu, 1 eşit genliğe sahip iki soliton tanımlar ve bu iki solitondan biri  $x = -10$  konumu civarında diğeri ise  $x = 10$  konumu civarında yerleşmiştir. 4 hızına sahip aynı büyüklükteki iki solitonun ters yönde hareketi gözlemlenmiştir. Program  $t = 6$  zamanına kadar çalıştırılmış ve iki solitonun birbiriyle çarpışması Şekil 3.3-3.5 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, aynı hızla sahip iki solitonun çarpışması çözüm bölgesinin ortasında meydana gelmiştir. Bu durum  $t = 2,5$  zamanında Şekil 3.5 de verilmiştir. Aynı zamanda, bu solitonların çarpışmadan sonraki biçimlerinin aynı kaldığı Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 e bakarak söylenebilir.

Tablo 3.4 de iki soliton problemi için korunum sabitlerinin değerleri farklı zamanlar için verilmiştir. Algoritmanın çalışması boyunca,  $C_1$  sabit kalırken,  $C_2$  başlangıç durumuna göre  $0,199 \times 10^{-2}$  den daha az bir değişime uğramıştır. Çarpışmanın ardından  $C_2$  korunum sabiti başlangıçtaki değerine dönmektedir. Bu yüzden, mevcut algoritma ile korunum sabitlerinin tatmin edici bir biçimde bulunduğu söylenebilir. Çarpışmanın daha iyi gözlemlenebilmesi için zamana karşı solitonların genlikleri Şekil 3.6 da gösterilmiştir.

Tablo 3.4: İki soliton problemi için korunum sabitleri					
Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0, 0	4, 00000	14, 66667	3, 5	4, 00000	14, 66667
0, 5	4, 00000	14, 66667	4, 0	4, 00000	14, 66667
1, 0	4, 00000	14, 66667	4, 5	4, 00000	14, 66667
1, 5	4, 00000	14, 66667	5, 0	4, 00000	14, 66667
2, 0	4, 00000	14, 66664	5, 5	4, 00000	14, 66669
2, 5	4, 00000	14, 66581	6, 0	4, 00000	14, 66780
3, 0	4, 00000	14, 66665			

$t = 1$  zamanında genlik= 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.5:  $t = 1$  de genlik = 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları

$h$	$\Delta t$	Zaman	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0,1	0,01	1,5	0,000000	0,000000
		2,5	0,000000	-0,000058
		3,5	0,000000	0,000000
		4,5	0,000000	0,000000

### 3.3.3 Solitonların oluşumu

**(a) Duran soliton oluşumu:** Bu kısımda Maxwell başlangıç koşulu (2.29) u kullanılarak  $C = A\sqrt{\pi}$  için gözlem yapmaya çalışılacak. (2.29) başlangıç koşuluyla  $A \geq \sqrt{\pi} = 1,7725$  için solitonun oluşacağı,  $A < \sqrt{\pi}$  için ise solitonun oluşmayacağı tahmin edilmektedir.

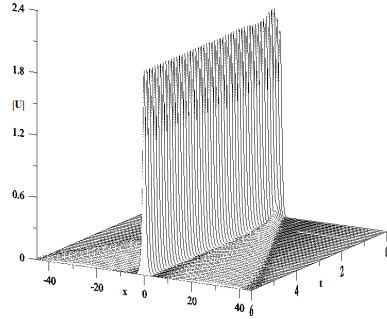
Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesinde  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,04$ ,  $A = 1$ ,  $1,78$  ve  $q = 2$  parametrelerinin kullanılmasıyla incelenmiştir. Program, solitonun üretildiği  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Solitonun maksimumu Şekil 3.7 de gösterilmiştir. Bu şekle bakıldığında,  $A = 1,78$  ile elde edilen solitonun genliğinin  $\sqrt{\pi} = 1,7725$  den daha büyük olduğu söylenebilir. Şekil 3.8 e bakıldığında ise,  $A = 1$  ile elde edilen başlangıç titreşimlerinin zamanla söndüğü görülebilir.

$A = 1,78$  için korunum sabitlerinin analitik değerleri  $C_1 = A^2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3,97100$  ve  $C_2 = \frac{1}{4}A^2(2\sqrt{2} - qA^2)\sqrt{\pi} = -4,92562$  olarak hesaplanmıştır. Mevcut algoritma ile elde edilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri ise Tablo 3.6 da verilmiştir. Bu verilere bakıldığında  $A = 1,78$  için  $C_1$  değerinin analitik değer ile aynı kaldığı,  $C_2$  nin ise biraz değiştiği söylenebilir.

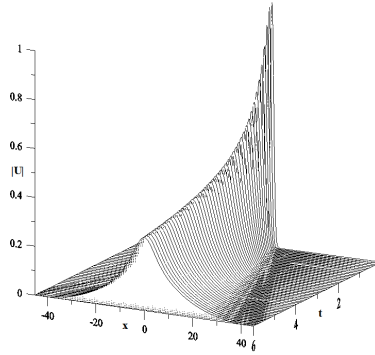


Tablo 3.6: Duran solitonun korunum sabitleri,  $A = 1,78$ 

Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3,97100	-4,92562	7	3,97100	-4,93218
1	3,97100	-4,93234	8	3,97100	-4,93208
2	3,97100	-4,93371	9	3,97100	-4,93228
3	3,97100	-4,93319	10	3,97100	-4,93258
4	3,97100	-4,93328	15	3,97100	-4,93353
5	3,97100	-4,93339	20	3,97100	-4,93288
6	3,97100	-4,93259	30	3,97100	-4,93431



Şekil 3.7: Duran soliton oluşumu



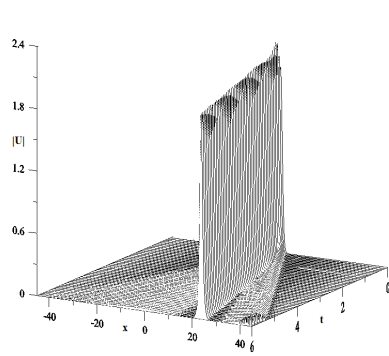
Şekil 3.8: Duran soliton oluşumu

**(b) İlerleyen soliton oluşumu:** Önceki test problemindeki parametreler kul-lanılarak ilerleyen soliton oluşumu (2.30) Maxwell başlangıç koşulu ile araştırılmıştır. Böylece  $A = 1,78$  iken 2 yüksekliğine ve 4 hızına sahip hareketli soliton zaman içinde gelişmiştir.  $t = 6$  zamanında,  $x$  pozitif doğrultuda hareket eden solito-nun tepe noktasının konumu  $x = 24$  olarak kaydedilmiştir. Böylece sayısal hız  $v = \text{alınan mesafe/zaman} = 24/6$  olarak bulunur. İlerleyen solitonun korunum sabitlerinin analitik değerleri  $A = 1,78$  ve  $q = 2$  için  $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 = 3,97100$  ve  $C_2 = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}qA^4 = 10,95838$  olarak hesaplanmıştır. İlerleyen soliton Şekil 3.9 ve 3.10 da çizilmiştir. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 3.7 de verilmiştir. Görüldüğü gibi,  $C_1$ ,  $3 \times 10^{-5}$  den daha az bir değişiklik ile bulunmuşken,  $C_2$  ise  $2,005 \times 10^{-2}$  den daha az bir değişiklik ile bulunmuştur. Başlangıç koşulunda  $A = 1$  kullanılırsa, Şekil 3.10 dan da görüldüğü gibi, yine solitonun zamanla söndüğü

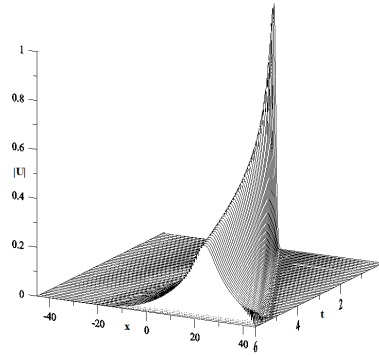
görülmektedir.  $A = 1$  ve  $A = 1,78$  ( $A = 1,78$  nokta ve  $A = 1$  çizgi) için Şekil 3.11 ve Şekil 3.12 de hem duran hemde ilerleyen solitonların maksimumları gösterilmiştir.

Tablo 3.7: İlerleyen solitonun korunum sabitleri,  $A = 1,78$

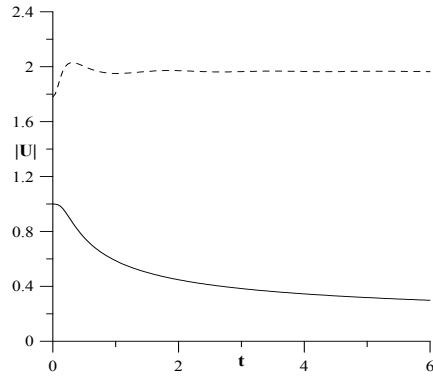
Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3,97100	10,95839	7	3,97100	10,97402
1	3,97100	10,97127	8	3,97101	10,97379
2	3,97100	10,97309	9	3,97101	10,97400
3	3,97100	10,97289	10	3,97101	10,97480
4	3,97100	10,97324	15	3,97104	10,97520
5	3,97100	10,97349	20	3,97104	10,97844
6	3,97100	10,97358	30	3,97103	10,97830



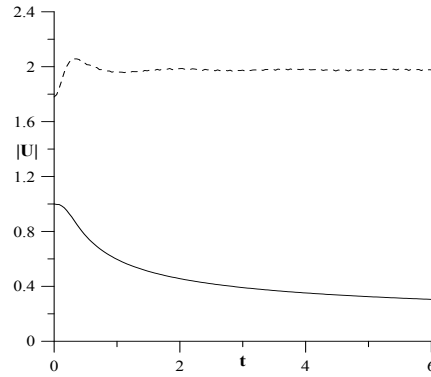
Şekil 3.9: İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 3.10: İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 3.11: Başlangıç koşulu (2.29)



Şekil 3.12: Başlangıç koşulu (2.30)

### 3.4 Sonuç

Bu bölümde, sektik B-spline kolokeyşin metodu ile sınırlı bir aralıkta Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Schrödinger denkleminde, zaman ayrıştır-

ması için Crank-Nicolson metodu ve konum ayrıştırması için de sektik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Böylece bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı sınır koşulları kullanılarak eşitlendikten sonra, elde edilen denklem sistemi fortran kodları kullanılarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında her bir zaman adımında iç iterasyon yardımıyla iyileştirme de yapılmıştır. Tek soliton çözümü, iki solitonun çarpışması ve soliton oluşumu gibi standart test problemleri ile verilen metodun güvenilirliği kanıtlanmıştır. Sonuçlar analitik değerler ile karşılaştırılmıştır. Korunum sabitleri hesaplanırken genelleştirilmiş yamuklar yöntemi kullanılmasına rağmen, tablolardan da görüldüğü gibi bu sabitler programın çalışması boyunca yeterince korunmuştur. Hata dağılımı çeşitli zamanlar için hesaplanmış,  $C_1$  sabitinde çok az değişiklik olurken,  $C_2$  sabitinde biraz daha fazla değişiklik olduğu görülmüştür. Aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması sonrasında bile her iki dalganın şekli değişmeksizin aynı kalmıştır. Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesi üzerinde  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,04$ ,  $A = 1,1,78$  ve  $q = 2$  parametreleri kullanılarak incelenmiş, solitonun maksimumu  $\sqrt{\pi} = 1,7725$  den daha büyük bir genlikle zaman içinde gelişmiş. Genel olarak, sektik B-spline kolokeyşin metodunun kullanılması sonucunda bulunan korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere yakın olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak incelenen üç test problemine göre, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz sektik B-spline kolokeyşin metodunun farklı denklemler için de güvenilir bir şekilde kullanılabileceği söylenebilir.

## BÖLÜM 4

### SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin septik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, üç test problemi kullanılarak hata normları, korunum sabitleri ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

#### 4.1 Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Septik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda Schrödinger denkleminin septik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır.  $\circ$  zamana göre türev ve

$$z_m = (\sigma_{m-3} + 120\sigma_{m-2} + 1191\sigma_{m-1} + 2416\sigma_m + 1191\sigma_{m+1} + 120\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3})^2 + (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2$$

olmak üzere, (1.60) ve (1.61) denklemlerinde (1.65) değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \circ\delta_{m-3} + 120\circ\delta_{m-2} + 1191\circ\delta_{m-1} + 2416\circ\delta_m + 1191\circ\delta_{m+1} + 120\circ\delta_{m+2} + \circ\delta_{m+3} - \\ & \frac{42}{h^2} (\sigma_{m-3} + 24\sigma_{m-2} + 15\sigma_{m-1} - 80\sigma_m + 15\sigma_{m+1} + 24\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3}) - qz_m (\sigma_{m-3} + \\ & 120\sigma_{m-2} + 1191\sigma_{m-1} + 2416\sigma_m + 1191\sigma_{m+1} + 120\sigma_{m+2} + \sigma_{m+3}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \circ\sigma_{m-3} + 120\circ\sigma_{m-2} + 1191\circ\sigma_{m-1} + 2416\circ\sigma_m + 1191\circ\sigma_{m+1} + 120\circ\sigma_{m+2} + \circ\sigma_{m+3} + \\ & \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) + qz_m (\delta_{m-3} + \\ & 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

birinci mertebeden  $(2N + 2)$  diferensiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir.  $\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametreleri ve bunların zamana göre türevleri olan (2.2-2.3) ifadeleri (4.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^{n+1} - 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^{n+1} - 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^{n+1} - 2416\delta_m^n + \\
& 1191\delta_{m+1}^{n+1} - 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^{n+1} - 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n) - \frac{21}{h^2} (\sigma_{m-3}^{n+1} + \sigma_{m-3}^n + \\
& 24\sigma_{m-2}^{n+1} + 24\sigma_{m-2}^n + 15\sigma_{m-1}^{n+1} + 15\sigma_{m-1}^n - 80\sigma_m^{n+1} - 80\sigma_m^n + 15\sigma_{m+1}^{n+1} + 15\sigma_{m+1}^n + 24\sigma_{m+2}^{n+1} + \\
& 24\sigma_{m+2}^n + \sigma_{m+3}^{n+1} + \sigma_{m+3}^n) - \frac{1}{2} qz_m (\sigma_{m-3}^{n+1} + \sigma_{m-3}^n + 120\sigma_{m-2}^{n+1} + 120\sigma_{m-2}^n + 1191\sigma_{m-1}^{n+1} + \\
& 1191\sigma_{m-1}^n + 2416\sigma_m^{n+1} + 2416\sigma_m^n + 1191\sigma_{m+1}^{n+1} + 1191\sigma_{m+1}^n + 120\sigma_{m+2}^{n+1} + 120\sigma_{m+2}^n + \\
& \sigma_{m+3}^{n+1} + \sigma_{m+3}^n) = 0, \\
& \frac{1}{\Delta t} (\sigma_{m-3}^{n+1} - \sigma_{m-3}^n + 120\sigma_{m-2}^{n+1} - 120\sigma_{m-2}^n + 1191\sigma_{m-1}^{n+1} - 1191\sigma_{m-1}^n + 2416\sigma_m^{n+1} - 2416\sigma_m^n + \\
& 1191\sigma_{m+1}^{n+1} - 1191\sigma_{m+1}^n + 120\sigma_{m+2}^{n+1} - 120\sigma_{m+2}^n + \sigma_{m+3}^{n+1} - \sigma_{m+3}^n) + \frac{21}{h^2} (\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n + \\
& 24\delta_{m-2}^{n+1} + 24\delta_{m-2}^n + 15\delta_{m-1}^{n+1} + 15\delta_{m-1}^n - 80\delta_m^{n+1} - 80\delta_m^n + 15\delta_{m+1}^{n+1} + 15\delta_{m+1}^n + 24\delta_{m+2}^{n+1} + \\
& 24\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n) + \frac{1}{2} qz_m (\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + \\
& 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^{n+1} + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^n + \\
& \delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n) = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

sistemleri bulunur. Bu sistem  $m = 0, \dots, N$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{m-3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{m-3}^{n+1} + 240h^2\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m-2}^{n+1} + 2382h^2\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{m-1}^{n+1} + 4832h^2\delta_m^{n+1} + \\
& \beta_{m4}\sigma_m^{n+1} + 2382h^2\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m3}\sigma_{m+1}^{n+1} + 240h^2\delta_{m+2}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m+2}^{n+1} + 2h^2\delta_{m+3}^{n+1} + \beta_{m1}\sigma_{m+3}^{n+1} = \\
& 2h^2\delta_{m-3}^n - \beta_{m1}\sigma_{m-3}^n + 240h^2\delta_{m-2}^n - \beta_{m2}\sigma_{m-2}^n + 2382h^2\delta_{m-1}^n - \beta_{m3}\sigma_{m-1}^n + 4832h^2\delta_m^n - \\
& \beta_{m4}\sigma_m^n + 2382h^2\delta_{m+1}^n - \beta_{m3}\sigma_{m+1}^n + 240h^2\delta_{m+2}^n - \beta_{m2}\sigma_{m+2}^n + 2h^2\delta_{m+3}^n - \beta_{m1}\sigma_{m+3}^n, \\
& -\beta_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m-3}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + 240h^2\sigma_{m-2}^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + 2382h^2\sigma_{m-1}^{n+1} - \beta_{m4}\delta_m^{n+1} + \\
& 4832h^2\sigma_m^{n+1} - \beta_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} + 2382h^2\sigma_{m+1}^{n+1} - \beta_{m2}\delta_{m+2}^{n+1} + 240h^2\sigma_{m+2}^{n+1} - \beta_{m1}\delta_{m+3}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m+3}^{n+1} = \\
& \beta_{m1}\delta_{m-3}^n + 2h^2\sigma_{m-3}^n + \beta_{m2}\delta_{m-2}^n + 240h^2\sigma_{m-2}^n + \beta_{m3}\delta_{m-1}^n + 2382h^2\sigma_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \\
& 4832h^2\sigma_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^n + 2382h^2\sigma_{m+1}^n + \beta_{m2}\delta_{m+2}^n + 240h^2\sigma_{m+2}^n + \beta_{m1}\delta_{m+3}^n + 2h^2\sigma_{m+3}^n
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak yeniden düzenlenirse,  $(2N + 14)$  bilinmeyenli  $(2N + 2)$  cebirsel denklemden

oluşan bir sistem elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}\beta_{m1} &= -42\Delta t - dh^2\Delta t, \quad \beta_{m2} = -1008\Delta t - 120dh^2\Delta t, \quad d = qz_m, \quad m = 0, \dots, N \\ \beta_{m3} &= -630\Delta t - 1191dh^2\Delta t, \quad \beta_{m4} = 3360\Delta t - 2416dh^2\Delta t\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sisteminde  $\delta_{-3}^{n+1}, \sigma_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}, \delta_{N+3}^{n+1}, \sigma_{N+3}^{n+1}$  eleman parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece  $(2N+2) \times (2N+2)$  boyutlu 15 band matris sistemi elde edilir. (1.57) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden (1.65) değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(s_N)(a, t) &= \delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 = 0, \\ (s_N)_x(a, t) &= -\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 = 0, \\ (s_N)_{xx}(a, t) &= \delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 = 0, \\ (s_N)(b, t) &= \delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\ (s_N)_x(b, t) &= -\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\ (s_N)_{xx}(b, t) &= \delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\ (r_N)(a, t) &= \sigma_{-3} + 120\sigma_{-2} + 1191\sigma_{-1} + 2416\sigma_0 + 1191\sigma_1 + 120\sigma_2 + \sigma_3 = 0, \\ (r_N)_x(a, t) &= -\sigma_{-3} - 56\sigma_{-2} - 245\sigma_{-1} + 245\sigma_1 + 56\sigma_2 + \sigma_3 = 0, \\ (r_N)_{xx}(a, t) &= \sigma_{-3} + 24\sigma_{-2} + 15\sigma_{-1} - 80\sigma_0 + 15\sigma_1 + 24\sigma_2 + \sigma_3 = 0, \\ (r_N)(b, t) &= \sigma_{N-3} + 120\sigma_{N-2} + 1191\sigma_{N-1} + 2416\sigma_N + 1191\sigma_{N+1} + 120\sigma_{N+2} + \sigma_{N+3} = 0, \\ (r_N)_x(b, t) &= -\sigma_{N-3} - 56\sigma_{N-2} - 245\sigma_{N-1} + 245\sigma_{N+1} + 56\sigma_{N+2} + \sigma_{N+3} = 0, \\ (r_N)_{xx}(b, t) &= \sigma_{N-3} + 24\sigma_{N-2} + 15\sigma_{N-1} - 80\sigma_N + 15\sigma_{N+1} + 24\sigma_{N+2} + \sigma_{N+3} = 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= -\frac{5320}{9}\delta_0 - \frac{7595}{9}\delta_1 - \frac{1736}{9}\delta_2 - \frac{40}{9}\delta_3, \\
\delta_{-2} &= \frac{2500}{81}\delta_0 + \frac{12005}{324}\delta_1 + \frac{605}{81}\delta_2 + \frac{49}{324}\delta_3, \\
\delta_{-1} &= -\frac{376}{81}\delta_0 - \frac{326}{81}\delta_1 - \frac{56}{81}\delta_2 - \frac{1}{81}\delta_3, \\
\sigma_{-3} &= -\frac{5320}{9}\sigma_0 - \frac{7595}{9}\sigma_1 - \frac{1736}{9}\sigma_2 - \frac{40}{9}\sigma_3, \\
\sigma_{-2} &= \frac{2500}{81}\sigma_0 + \frac{12005}{324}\sigma_1 + \frac{605}{81}\sigma_2 + \frac{49}{324}\sigma_3, \\
\sigma_{-1} &= -\frac{376}{81}\sigma_0 - \frac{326}{81}\sigma_1 - \frac{56}{81}\sigma_2 - \frac{1}{81}\sigma_3, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{1}{8}\delta_{N-3} - \frac{56}{8}\delta_{N-2} - \frac{326}{8}\delta_{N-1} - \frac{376}{8}\delta_N, \\
\delta_{N+2} &= \frac{49}{324}\delta_{N-3} + \frac{605}{81}\delta_{N-2} + \frac{12005}{324}\delta_{N-1} + \frac{2500}{81}\delta_N, \\
\delta_{N+3} &= -\frac{40}{9}\delta_{N-3} - \frac{1736}{9}\delta_{N-2} - \frac{7595}{9}\delta_{N-1} - \frac{5320}{9}\delta_N, \\
\sigma_{N+1} &= -\frac{1}{8}\sigma_{N-3} - \frac{56}{8}\sigma_{N-2} - \frac{326}{8}\sigma_{N-1} - \frac{376}{8}\sigma_N, \\
\sigma_{N+2} &= \frac{49}{324}\sigma_{N-3} + \frac{605}{81}\sigma_{N-2} + \frac{12005}{324}\sigma_{N-1} + \frac{2500}{81}\sigma_N, \\
\sigma_{N+3} &= -\frac{40}{9}\sigma_{N-3} - \frac{1736}{9}\sigma_{N-2} - \frac{7595}{9}\sigma_{N-1} - \frac{5320}{9}\sigma_N
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Bölüm 2 ve 3 de olduğu gibi (4.5) ifadeleri (4.3) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa  $(2N + 2)$  bilinmeyenli ve  $(2N + 2)$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu denklem sistemi Gauss eliminasyon yöntemiyle çözülür.

## 4.2 Başlangıç Durumu

$\delta_m^{n+1}$  ve  $\sigma_m^{n+1}$  parametrelerini, (4.3) denklem sisteminden elde edebilmek için  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için  $s(x, 0)$  ve  $r(x, 0)$  başlangıç koşullarından  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Başlangıç koşulu için (1.53) kullanılarak

$$\begin{aligned}
s_N(x, 0) &= \sum_{m=-3}^{N+3} \delta_m^0 \phi_m(x) \\
r_N(x, 0) &= \sum_{m=-3}^{N+3} \sigma_m^0 \phi_m(x)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

yazılabilir. Bu sistemdeki  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  belirlenecek parametrelerdir. Başlangıç koşullarının

bölünme noktalarındaki değerleri kullanılarak  $\delta$  parametresi için,

$$\begin{aligned}
s(x_0, 0) &= \delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3, \\
s(x_1, 0) &= \delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2416\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4, \\
s(x_2, 0) &= \delta_{-1} + 120\delta_0 + 1191\delta_1 + 2416\delta_2 + 1191\delta_3 + 120\delta_4 + \delta_5, \\
&\vdots \\
s(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2416\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2}, \\
s(x_N, 0) &= \delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve aynı şekilde  $\sigma$  parametresi içinde,

$$\begin{aligned}
r(x_0, 0) &= \sigma_{-3} + 120\sigma_{-2} + 1191\sigma_{-1} + 2416\sigma_0 + 1191\sigma_1 + 120\sigma_2 + \sigma_3, \\
r(x_1, 0) &= \sigma_{-2} + 120\sigma_{-1} + 1191\sigma_0 + 2416\sigma_1 + 1191\sigma_2 + 120\sigma_3 + \sigma_4, \\
r(x_2, 0) &= \sigma_{-1} + 120\sigma_0 + 1191\sigma_1 + 2416\sigma_2 + 1191\sigma_3 + 120\sigma_4 + \sigma_5, \\
&\vdots \\
r(x_{N-1}, 0) &= \sigma_{N-4} + 120\sigma_{N-3} + 1191\sigma_{N-2} + 2416\sigma_{N-1} + 1191\sigma_N + 120\sigma_{N+1} + \sigma_{N+2}, \\
r(x_N, 0) &= \sigma_{N-3} + 120\sigma_{N-2} + 1191\sigma_{N-1} + 2416\sigma_N + 1191\sigma_{N+1} + 120\sigma_{N+2} + \sigma_{N+3}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$N + 7$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan sistemler elde edilir. Bu denklem sistemlerinde türevli sınır koşulları kullanılır ve  $\delta_{-3}$ ,  $\sigma_{-3}$ ,  $\delta_{-2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{N+2}$ ,  $\delta_{N+3}$ ,  $\sigma_{N+3}$  parametreleri Bölüm 2 ve 3 de olduğu gibi yok edilirse,  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan 7 sütun elemanlı köşegen denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin çözümü Thomas algoritmaları ile kolayca elde edilebilir.

### 4.3 Test Problemleri

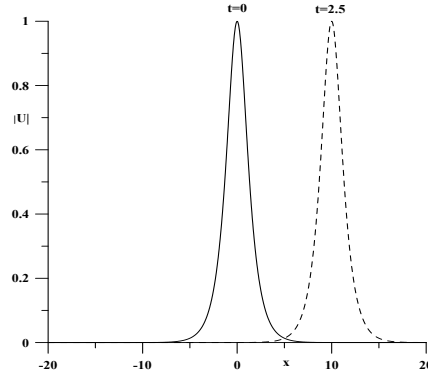
Bu kısımda, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde edebilmek için bir önceki kısımda tanımlanan sayısal yöntemin güvenilirliğini görebilmek için üç test problem çalışıldı.

#### 4.3.1. Tek Soliton Çözümü

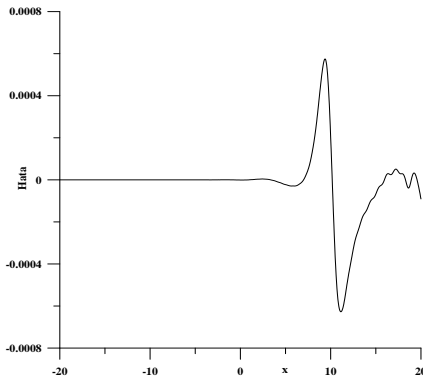
Schrödinger denkleminin tek soliton çözümü (2.24) ile verilir. Hesaplamalar,  $-20 \leq x \leq 20$  aralığı içinde  $q = 2$ ,  $S = 4$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$ ,  $\Delta t = 0,005$ ,  $h = 0,05$



parametreleri ile yapılmıştır.  $\alpha = 1$  olmak üzere kompleks değerli  $U$  fonksiyonunun modülü (2.25), 4 hızıyla sağa doğru ilerleyen bir soliton gösterir. Simülasyon  $t = 2,5$  zamanına kadar çalıştırıldı.  $L_\infty$ ,  $L_2$  hata normları ve farklı korunum sabitleri Tablo 4.1 de gösterilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, hata normları algoritmanın çalışması esnasında çok küçük kalmıştır. Bu yüzden solitonun yayılması iyi bir şekilde gerçekleşmiştir. İlerleyen solitonun modülünün simülasyonu  $t = 0$  ve  $t = 2,5$  zamanlarında Şekil 4.1 de gösterilmiştir. Hata (sayısal çözüm—analitik çözüm) dağılımı  $t = 2,5$  zamanında Şekil 4.2 de verilmiştir. Şekle bakıldığında, maksimum hatanın solitonun tepe konumu olan  $x = 10$  civarında ortaya çıktığı görülmektedir. Önerilen metotla simülasyon esnasında  $C_1$  korunum sabiti değişmezken,  $C_2$  sabiti  $2 \times 10^{-7}$  den az bir değişimle elde edilmiştir.



Şekil 4.1: Tek soliton simülasyonu



Şekil 4.2:  $t = 2,5$  zamanındaki hata

Tablo 4.1: Korunum sabitleri ve hata normları

Zaman	$C_1$	$C_2$	$L_\infty$	$L_2$
0, 0	2, 0	7, 3333333	0, 0000	0, 0000
0, 5	2, 0	7, 3333334	0, 0002	0, 0002
1, 0	2, 0	7, 3333334	0, 0003	0, 0004
1, 5	2, 0	7, 3333335	0, 0004	0, 0006
2, 0	2, 0	7, 3333335	0, 0005	0, 0008
2, 5	2, 0	7, 3333335	0, 0006	0, 0009

Tablo 4.2:  $t = 1$  zamanında genlik = 1 için sonuçlar

$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0, 05	0, 005	0, 0003	0, 0000000	0, 0000000
0, 3125	0, 02	0, 002	0, 0000000	0, 0000063
0, 03	0, 005	0, 0003	0, 0000000	0, 0000000
0, 05	0, 001	0, 00001	0, 0000000	0, 0000000
0, 08	0, 002	0, 00003	0, 0000000	0, 0000000
0, 3125	0, 0026	0, 006	0, 0000000	0, 0000198

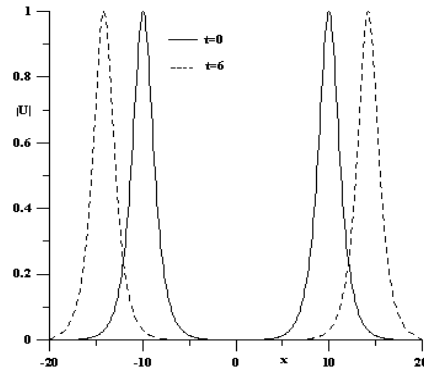
Tablo 4.2 ve 4.3 de genlik 1 ve 2 için farklı zaman ve konum adımları alınarak  $L_\infty$  hata normu ile  $\hat{C}_1$  ve  $\hat{C}_2$  nin değerleri verilmiştir.  $C_{10}$  ve  $C_{20}$   $t = 0$  zamanındaki  $C_1$  ve  $C_2$  nin değerleri olmak üzere  $\hat{C}_1 = \frac{C_1 - C_{10}}{C_{10}}$ ,  $\hat{C}_2 = \frac{C_2 - C_{20}}{C_{20}}$  dir. Mevcut metotla elde edilen korunum sabitlerinin ilgili hatalarının küçük olduğu hesaplanan sonuçlardan anlaşılmaktadır.

Tablo 4.3:  $t = 1$  zamanında genlik = 2 için sonuçlar

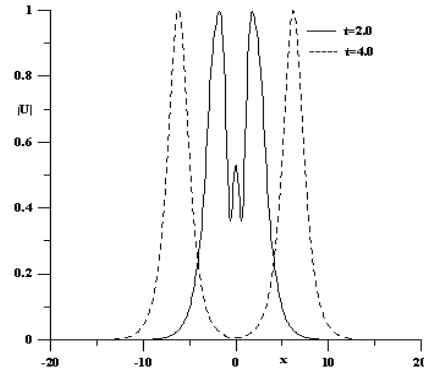
$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0,1	0,005	0,0007	0,0000000	0,0000000
0,1563	0,0048	0,002	0,0000000	0,0000026
0,015	0,005	0,001	0,0000000	0,0000001
0,02	0,0025	0,0003	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0001	0,0000	0,0000000	0,0000000
0,07	0,012	0,006	0,0000000	0,0000027

### 4.3.2 İki solitonun çarpışması

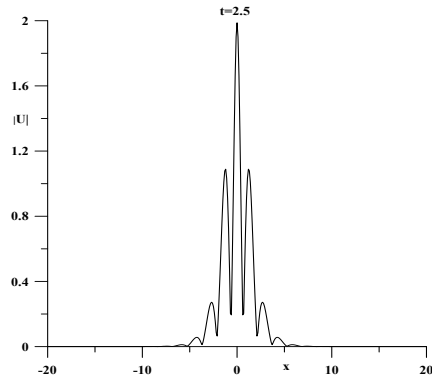
İki solitonun çarpışması (2.26) ile verilir. Burada (2.27) başlangıç koşuluyla zıt yönde hareket eden iki solitonun çarpışması  $-20 \leq x \leq 20$  çözüm bölgesi içinde  $q = 2$ ,  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,01$ ,  $\alpha_1 = 1,0$ ,  $S_1 = -4,0$ ,  $x_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $S_2 = 4,0$ ,  $x_2 = -10$  parametreleri ile gözlemlenmiştir.



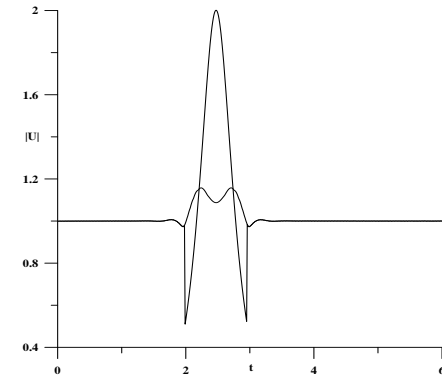
Şekil 4.3: İki solitonun çarpışması



Şekil 4.4: İki solitonun çarpışması



Şekil 4.5: İki solitonun çarpışması



Şekil 4.6: Zaman-Genlik grafiği

Yukarıdaki şart (2.27) ve parametreler daha önceki mevcut çalışmalarla aynı olarak seçilmiştir. Bu başlangıç koşulu, 1 eşit genliğe sahip iki soliton tanımlar ve bu iki solitondan biri  $x = -10$  konumu civarında diğeri ise  $x = 10$  konumu civarında yerleşmiştir. 4 hızına sahip aynı büyüklükteki iki solitonun ters yönde hareketi gözlemlenmiştir. Program  $t = 6$  zamanına kadar çalıştırılmış ve iki solitonun birbiriyle çarpışması Şekil 4.3-4.5 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması çözüm bölgesinin ortasında meydana gelmiştir. Bu durum  $t = 2, 5$  zamanında Şekil 4.5 de verilmiştir. Aynı zamanda, bu solitonların çarpışmadan sonraki biçimlerinin aynı kaldığı Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 e bakarak söylenebilir.

Tablo 4.4 de iki soliton problemi için korunum sabitlerinin değerleri farklı zamanlar için verilmiştir. Algoritmanın çalışması boyunca,  $C_1$  sabit kalırken,  $C_2$  başlangıç durumuna göre  $0,116 \times 10^{-2}$  den daha az bir değişime uğramıştır. Çarpışmanın ardından  $C_2$  korunum sabiti başlangıçtaki değerine dönmektedir. Bu yüzden, mevcut algoritma ile korunum sabitlerinin tatmin edici bir biçimde bulunduğu söylenebilir. Çarpışmanın daha iyi gözlemlenebilmesi için zamana karşı solitonların genlikleri Şekil 4.6 da gösterilmiştir.

Tablo 4.4: İki soliton problemi için korunum sabitleri					
Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0, 0	4, 00000	14, 66666	3, 5	4, 00000	14, 66667
0, 5	4, 00000	14, 66667	4, 0	4, 00000	14, 66667
1, 0	4, 00000	14, 66667	4, 5	4, 00000	14, 66667
1, 5	4, 00000	14, 66667	5, 0	4, 00000	14, 66667
2, 0	4, 00000	14, 66663	5, 5	4, 00000	14, 66667
2, 5	4, 00000	14, 66556	6, 5	4, 00000	14, 66672
3, 0	4, 00000	14, 66665			

$t = 1$  zamanında genlik= 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.5:  $t = 1$  de genlik = 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları

$h$	$\Delta t$	Zaman	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0,1	0,01	1,5	0,000000	0,000000
		2,5	0,000000	-0,00008
		3,5	0,000000	0,000000
		4,5	0,000000	0,000000

#### 4.3.3 Solitonların oluşumu

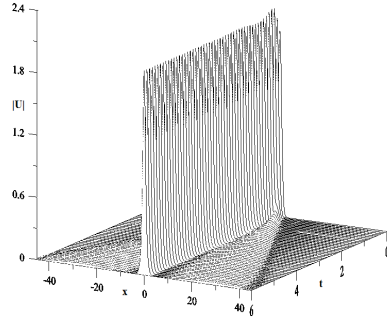
**(a) Duran soliton oluşumu:** Bu kısımda Maxwell başlangıç koşulu (2.29) u kullanılarak  $C = A\sqrt{\pi}$  için gözlem yapmaya çalışılacaktır. (2.29) başlangıç koşuluyla  $A \geq \sqrt{\pi} = 1,7725$  için solitonun oluşacağı,  $A < \sqrt{\pi}$  için ise solitonun oluşmayacağı tahmin edilmektedir.

Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesinde  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,04$ ,  $A = 1$ ,  $1,78$  ve  $q = 2$  parametrelerinin kullanılmasıyla incelenmiştir. Program, solitonun üretildiği  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Solitonun maksimumu Şekil 4.7 de gösterilmiştir. Bu şekle bakıldığında,  $A = 1,78$  ile elde edilen solitonun genliğinin  $\sqrt{\pi} = 1,7725$  den daha büyük olduğu söylenebilir. Şekil 4.8 e bakıldığında ise,  $A = 1$  ile elde edilen başlangıç titreşimlerinin zamanla söndüğü görülebilir.

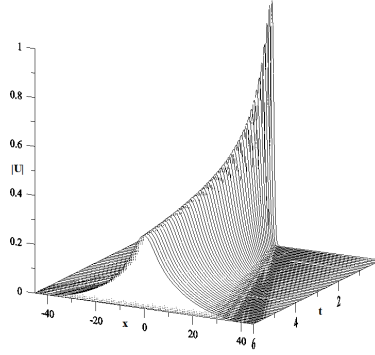
$A = 1,78$  için korunum sabitlerinin analitik değerleri  $C_1 = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3,97100$  ve  $C_2 = \frac{1}{4}A^2(2\sqrt{2} - qA^2)\sqrt{\pi} = -4,92562$  olarak hesaplanmıştır. Mevcut algoritma ile elde edilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri ise Tablo 4.6 da verilmiştir. Bu verilere baktığımızda  $A = 1,78$  için  $C_1$  değerinin analitik değer ile aynı kaldığı,  $C_2$  nin ise biraz değiştiği söylenebilir.

Tablo 4.6: Duran solitonun korunum sabitleri,  $A = 1,78$ 

Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3,97100	-4,92562	7	3,97100	-4,93287
1	3,97100	-4,93240	8	3,97100	-4,93279
2	3,97100	-4,93377	9	3,97100	-4,93289
3	3,97100	-4,93326	10	3,97100	-4,93306
4	3,97100	-4,93335	15	3,97100	-4,93375
5	3,97100	-4,93346	20	3,97100	-4,93304
6	3,97100	-4,93298	30	3,97100	-4,93445



Şekil 4.7: Duran soliton oluşumu



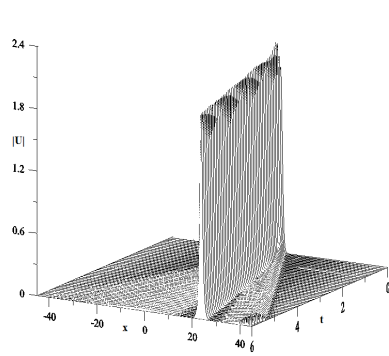
Şekil 4.8: Duran soliton oluşumu

**(b) İlerleyen soliton oluşumu:** Önceki test problemindeki parametreler kullanılarak ilerleyen soliton oluşumu (2.30) Maxwell başlangıç koşulu ile araştırılmıştır. Böylece  $A = 1,78$  iken 2 yüksekliğine ve 4 hızına sahip hareketli soliton zaman içinde gelişmiştir.  $t = 6$  zamanında,  $x$  pozitif doğrultuda hareket eden solitonun tepe noktasının konumu  $x = 24$  olarak kaydedilmiştir. Böylece sayısal hız  $v = \text{alınan mesafe/zaman} = 24/6$  olarak bulunur. İlerleyen solitonun korunum sabitlerinin analitik değerleri  $A = 1,78$  ve  $q = 2$  için  $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 = 3,97100$  ve  $C_2 = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}qA^4 = 10,95838$  olarak hesaplanmıştır. İlerleyen soliton Şekil 4.9 ve 4.10 da çizilmiştir. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 4.7 de verilmiştir. Görüldüğü gibi,  $C_1$  sabit kalmış,  $C_2$  ise %1.95 den daha az bir değişiklikle bulunmuştur. Başlangıç koşulunda  $A = 1$  kullanılırsa, Şekil 4.10 dan da görüldüğü gibi, yine solitonun zamanla söndüğü görülmektedir.  $A = 1$  ve  $A = 1,78$  ( $A = 1,78$

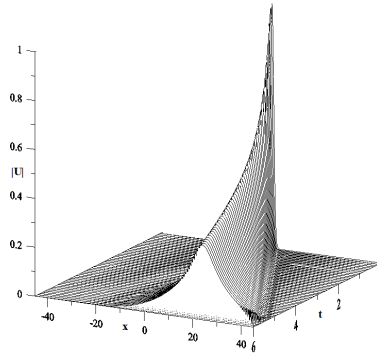
nokta ve  $A = 1$  çizgi) için Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 de hem duran hemde ilerleyen solitonların maksimumları gösterilmiştir.

Tablo 4.7: İlerleyen solitonun korunum sabitleri,  $A = 1,78$

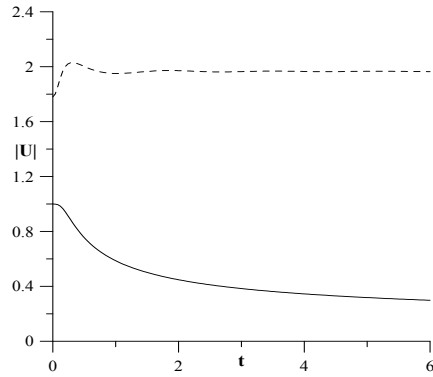
Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3,97100	10,95837	7	3,97100	10,97496
1	3,97100	10,97104	8	3,97100	10,97452
2	3,97100	10,97294	9	3,97100	10,97467
3	3,97100	10,97289	10	3,97100	10,97557
4	3,97100	10,97336	15	3,97100	10,97222
5	3,97100	10,97374	20	3,97100	10,97533
6	3,97100	10,97592	30	3,97100	10,97788



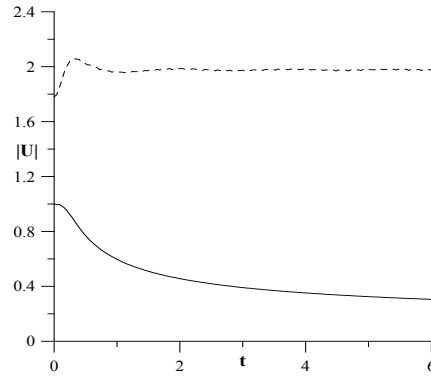
Şekil 4.9: İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 4.10: İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 4.11: Başlangıç koşulu (2.29)



Şekil 4.12: Başlangıç koşulu (2.30)

#### 4.4 Sonuç

Bu bölümde, septik B-spline kolokeyşin metodu ile sınırlı bir aralıkta Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Schrödinger denkleminde, zaman ayrıştır-

ması için Crank-Nicolson metodu ve konum ayrıştırması için de septik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Böylece bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı sınır koşulları kullanılarak eşitlendikten sonra, elde edilen denklem sistemi fortran kodları kullanılarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında her bir zaman adımında iç iterasyon yardımıyla iyileştirme de yapılmıştır. Tek soliton çözümü, iki solitonun çarpışması ve soliton oluşumu gibi standart test problemleri ile verilen metodun güvenilirliği kanıtlanmıştır. Sonuçlar analitik değerler ile karşılaştırılmıştır. Korunum sabitleri hesaplanırken genelleştirilmiş yamuklar yöntemi kullanılmasına rağmen, tablolardan da görüldüğü gibi bu sabitler programın çalışması boyunca yeterince korunmuştur. Hata dağılımı çeşitli zamanlar için hesaplanmış,  $C_1$  sabitinde değişiklik olmazken  $C_2$  sabitinde çok az değişiklik olduğu görülmüştür. Aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması sonrasında bile her iki dalganın şekli değişmeksizin aynı kalmıştır. Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesi üzerinde  $h = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,04$ ,  $A = 1,178$  ve  $q = 2$  parametreleri kullanılarak incelenmiş, solitonun maksimumu  $\sqrt{\pi} = 1,7725$  den daha büyük bir genlikle zaman içinde gelişmiş. Genel olarak, septik B-spline kolokeyşin metodunun kullanılması sonucunda bulunan korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere yakın olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak incelenen üç test problemine göre, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz septik B-spline kolokeyşin metodunun farklı denklemler içinde güvenilir bir şekilde kullanılabileceği söylenebilir.



## SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, NLS denkleminin yüksek dereceli B-spline fonksiyonlar kullanılarak sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümü araştırılmış, çözümlerin doğruluğu tek soliton çözümü, iki solitonun çarpışması ve solitonların oluşumu gibi test problemleri kullanılarak kontrol edilmiştir.

Birinci bölümde; soliton, lineer olmayan oluşum denklemleri ve korunum kanunları ile ilgili kısa bilgiler verildikten sonra, sonlu farklar, sonlu elemanlar ve spline kavramları ile birlikte sayısal çözümü araştırılacak olan NLS denklemi tanımlanmıştır. İkinci bölümde NLS denkleminin sayısal çözümü kuintik B-spline kolokeyşin yöntemi ile, üçüncü bölümde NLS denkleminin sayısal çözümü sektik B-spline kolokeyşin yöntemi ile, dördüncü bölümde ise NLS denkleminin sayısal çözümü septik B-spline kolokeyşin yöntemi ile araştırılmıştır. Bu bölümlerde esas amaç, yüksek dereceli B-spline fonksiyonlar kullanmanın NLS denkleminin sayısal çözümlerdeki etkisini görmektir. Ayrıca bazı fiziki olayları modelleyen denklemlerde konuma göre yüksek mertebeden türevler bulunduğu bilinmektedir. Bu şekilde içinde yüksek mertebeden türev bulunduran denklemler bizim önerdiğimiz yöntemlerle çözülebileceği test edildi. Sonuç olarak, önerdiğimiz yöntemler ilgili bazı denklemlere de güvenle uygulanabilecektir.

Bu bölümlerde ayrıca NLS denkleminin sayısal çözümlerinin doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir. Test problemlerinde, konum aralığı bölünme sayısı sabitken, zaman artım uzunluğu azaltıldığında ya da zaman artımı sabitken konum aralığı bölünme sayısı arttırıldığında, hata normlarında azalması gibi benzer sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca iki solitonun çarpışması test probleminde de çarpışmadan sonra solitonların genliklerinde fazla bir değişme olmadığı gözlenmiş, yani, çarpışma işleminden önce ve çarpışma işleminden sonra her durum için de büyük genlikli ve küçük genlikli solitonların şekilleri korunmuş, korunum sabitlerinin iyi bir şekilde elde edildiği görülmüş, böylece algoritmaların bu test problemini de iyi modellediği sonucuna varılmıştır. İlaveten solitonların oluşumu gibi test problemi de etkili bir şekilde incelenmiştir.

Sonuç olarak bu çalışmadan, kolokeyşin metotta yüksek dereceli B-spline fonksiyonlar kullanmak, hem yöntem kaynaklı uygulamadaki kolaylık hemde her üç yöntemin denklemin sayısal çözümlerinde verdiği iyi sonuçlar nedeniyle, benzer tipteki kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilecek uygun metotlar olduğu sonucuna varılabilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Chao hao, G., 1995, Soliton theory and its applications, Springer, 403 p.
- Crank J. and Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 43, 50–64.
- Crawford, F., 1968, Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3 Waves, Mcgraw-Hill College, 600 p.
- Dağ, İ., 1999, A quadratic B-spline finite element method for solving nonlinear Schrödinger equation, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 174, 247-258.
- El-Sayed, S.M. and Kaya, D., 2006, A numerical solution and an exact explicit solution of the NLS equation, Appl. Math. Comput., 172, 1315-1322.
- Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , <http://www.weizmann.ac.il/~home/fnfal/soliton.pdf>.
- Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: a survey of results, Manchester Univ Pr, 300 p.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, Physical Review Letters 19, 1095-1097.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Zaki, S.I. and Sharawi, Z., 1993, A Leapfrog algorithm and stability studies for the nonlinear Schrödinger equation, Arab. J. Sci. Eng., 18, 23-32.
- Harvard Gazette Archives, April 20, 2006, Solitons: next wave in electronics, <http://www.news.harvard.edu/gazette/2006/04.20/10-soliton.html>.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Karpman, V.I. and Krushkal, E.M., 1969, Modulated waves in nonlinear dispersive media, Soviet Phys. JETP, 28, 277-281.
- Khuri, S.A., 2004, A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type, Chaos, Solitons and Fractals, 20, 1037-1040.
- Korteweg, D.J and de Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Philosophical Magazine, 39, 422-443.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons, 677 p.
- Prenter, P. M., 1975, Splines and variational methods, John Wiley&Sons, 336 p.
- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement. of Science (John Murray, London) pp 311–390.
- Robinson, M.P., 1997, The solution of nonlinear Schrödinger equations using orthogonal spline collocation, Comput. Math. Appl., 33, 39-57.
- Rosenberg, V., 1969, Methods for solution of partial differential equations, 113, American Elsevier Publishing Inc., New York, 1969.
- Saka, B., 2012, A Quintic B-spline Finite Element Method for Solving the Nonlinear Schrödinger Equation, Phys. Wave Phenom., 20, 2, 107-117.
- Scott, A.C., Chu, F.Y.F. and McLaughlin, D.W., 1973, The soliton: A new concept in applied science, Proc. IEEE, 61, 1443-1483.
- Sheng, Q., Khaliq, A.Q.M. and Al-Said, E.A., 2001, Solving the generalized nonlinear Schrödinger equation via quartic spline approximation, J. Comput. Phys., 166, 400-417.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Smith, G.D., 1978, Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press, 304 p.

Thomas, J.W., 1995, Numerical partial differential equations, Springer, 437 p.

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, Pramana Journal of Physics 57(5), 841-847.

Wazwaz, A.M., 2008, A study on linear and nonlinear Schrödinger equations by the variational iteration method, Chaos, Solitons and Fractals.

Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D, 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, Physical Review Letters 15, 240-243.

Zakharov, V.E. and Shabat, A.B., 1972, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self modulation of waves in nonlinear media, Soviet Phys. JETP, 34, 62-69.

Zheng, S., 2004, Nonlinear evolution equations, Chapman & Hall/CRC, 304 p.