Kısmi Diferansiyel Denklemlerin
Q-Koşullu Simetrileri

Hacer Bozdağ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2014

Q-Conditional Symmetries
For Partial Differential Equations

Hacer Bozdağ

MASTER DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

June 2014

Kısmi Diferansiyel Denklemlerin
Q-Koşullu Simetrileri

Hacer Bozdağ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Filiz Taşcan

Haziran 2014

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim dalı yüksek lisans öğrencisi Hacer Bozdağ'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Q-Koşullu Simetrileri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç.Dr. Filiz TAŞCAN

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Prof. Doç.Dr. Bülent SAKA

Üye : Doç.Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Doç.Dr. Dursun IRK

Üye : Yard. Doç. Dr. Halis BİLGİL

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde, diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan Lie nokta simetrilerine dayanarak elde edilen Q-koşullu simetriler incelenmiştir. Q[u]=0 şartı eklenerek denklemin tanımlandığı manifoldun değiştirilmesi esasına dayanan bu yaklaşım ile bazı kısmi diferensiyel denklemler için Q-koşullu simetrileri araştırılmıştır. Lie simetrileri ile elde edilemeyen yeni simetriler bulmayı amaçlayan bu yaklaşımda bazı diferansiyel kısıtlar kullanılır.

Çalışmanın ilk bölümü olan giriş bölümünde konu hakkında genel bilgiler verilmiştir. Literatürden ve bu tezde neler yapıldığından söz edilmiştir

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, diğer bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar verilmiştir. Bu tanımlar uygulamalı matematiğin temeli olarak bilinir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde ise Lie simetri dönüşümleri ve onların bazı özellikleri verilmiştir. Örnek olarak, ısı iletim ve Burger denkleminin Lie simetrileri verilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise Q-koşullu simetriler ile ilgili tanımlamalar yapılmıştır ve farklı tipteki diferensiyel denklemler için bu yöntem uygulanmıştır. Bu bölümde sabit katsayılı bir diferensiyel denklem olan Burger denkleminin Q- koşullu simetrilerini bulunmuştur ve ayrıca Burger denkleminin bilinen klasik Lie simetrileri ile karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca sabit katsayılı Kolmogorov Petrovski denklemi ve Reaksiyon-Difüzyon denklemi, değişken katsayılı Bond Princing denklemi ve Dispersive Long dalgasına benzer bir diferensiyel denklem sisteminin Q- koşullu simetrilerini araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lie simetrisi, Q-koşullu simetri, klasik olmayan simetri, kısmi diferansiyel denklem

SUMMARY

This master thesis deals with Q-conditional symmetries which are based on classical Lie point symmetries using to solve the differential equations. The manifold of the defining equation change due to Q[u]=0 condition. Q-conditional symmetries for some partial differential equations will be examined. New symmetries which are not found in classical Lie symmetries may be obtained with differential constrictions.

The first chapter is introduction where general information are given. In this part, we mentioned literature and what we will do.

In the second chapter, basic definitions for the next chapters are given. These definitions are known as the fundamentals of applied mathematics.

In the third chapter, Lie symmetry transformations and some of their properties are given. Also, this method is applied for the well-known heat equation and Burger equation.

In the final chapter, Q-conditional symmetries which are different from the classic Lie point symmetries are introduced. Also, giving method are employed the differential equations in different types.

Conditional symmetries are searched for some equations. Some of them are constant coefficients; Burger equation, Kolmogorov Petrovski equation, Reaction-Diffusion equation, others are non-constant coefficient; Bond Princing equation. Also, Conditional symmetries of Burger equation are compared its classical Lie symmetries of Burger equations. Moreover, we get Q-conditional symmetries for the equation system that resemble Dispersive Long wave.

Keywords: Lie symmetries, Q-conditional symmetries, nonclassical symmetries, partial differential equations

TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, tez boyunca bana her türlü olanağı sağlayan danışmanım sayın

Doç. Dr. Filiz TAŞCAN' a,

tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen her kararımda yanımda olan annem

Sacide GÖRSEL' e,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen kardeşlerim

Reyhan ve Müberra BOZDAĞ' a

ve tüm dostlarıma ve özellikle tezi yazarken bana yardımcı olan

Gizem SEMERCİ'ye

en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hacer BOZDAĞ

ESKİŞEHİR, 2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
RD	Reaksiyon-Difüzyon Denklemi
RDC	Reaksiyon -Difüzyon Dağılım (Convection) Denklemi
LVD	Lotka-Volterra Difüzyon denklemi

BÖLÜM 1

$Bölüm 1$

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Uygulamalı matematik; matematik ve ilgili bilim dallarında bilim ve teknoloji alanına katkı sağlamayı amaçlayan temel ve teknolojik-mühendislik problemlerinin çözümü açısından araştırmalar yapan bir bilim dalıdır. Uygulamalı matematiğin insanlık tarihine katkısı yüzyıllardır devam etmektedir. İnsanların günlük hayatta karşılaştığı problemlere cevap verme isteğiyle ortaya çıkmış bir bilim dalıdır. Örneğin, uygulamalı matematiğin önemli bir alanı olan akışkanlar dinamiği; okyanuslarda, atmosferde, yer kabuğunda ve yeraltındaki fosil yakıtlar gibi birçok farklı alandaki çalışmalarla ilgilenmektedir. Bu çalışmalar sayesinde akışkanların ve hareketlerinin anlaşılması ile evrendeki varlığımız önem kazanır. Başka bir örnek daha verilmek istenirse, lineer olmayan sistemlerin önceden tahmin edilemeyen davranışlarını inceleyen kaotik dinamik alanı robotik, uçak mühendisliği ve biyomedikal araştırmalarıyla ilgilenir.

Matematiğin önemli bir dalı olan uygulamalı matematikte diferensiyel denklemler oldukça önemli bir yer tutmaktadır. İlk defa diferensiyel denklemler, Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından 17. yüzyılda çalışılmaya başlanmıştır. Euler, hesaplamalar ile ilgili çalışmalar yapmıştır. 18. yüzyılın sonunda ve 19. yüzyılın başında diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği tartışılmıştır. Peano ve Picard bu konu ile ilgili çalışmalar yaparak matematiksel fizikte önemli adımlar atmışlardır. Bazı diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunamaması sebebi ile 19. yüzyılda kişileri nümerik çözümler elde etmeye yönlendirmiştir. O yüzyıllarda teknolojinin fazla ilerlememiş olması ve hesaplamanın ilkel metodlarla yapılması bu konuda ilerlemeyi yavaşlatmıştır. Son yıllarda, geometri ve topoloji alanlarında da diferensiyel denklemler kullanılarak çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.

Diferensiyel denklemlerden özellikle kısmi diferensiyel denklemler ve diferensiyel denklem sistemleri, doğa bilimleri olarak da adlandırılan temel bilimlerde ve mühendisliğin her dalında pek çok uygulaması vardır. Kısmi diferensiyel denklemler genellikle fiziksel olayların yorumlanmasında ve analizinde ortaya çıkmıştır. Mesela bir telin titreşimi, elektrik devresindeki akım, cisimdeki ısının yayılımı, dalgaların yayılımı, popülasyondaki değişim ve daha birçok problemde diferensiyel denklemler kullanılır. Fiziksel bir olayda, kimyasal hesaplamalarda yada biyolojide ki çalışmalarda da ihtiyaç duyulan fiziksel model, matematiksel ifadelerle elde edilirken kısmi diferensiyel denklemlere ihtiyaç duyulur. Matematiksel modelde ki kısmi diferensiyel denklemler çözüldüğünde, problem analiz edilebilir ve yorumlanabilir.

Bir diferensiyel denklemin çözümünün bulunması çoğu zaman diferensiyel denklemin elde edilmesinden daha zordur. Bir diferensiyel denklemin çözümü bazen bir yada birkaç integral alarak çözülebilir iken bazen bu kadar kolay olmayabilir. Bütün diferensiyel denklemleri çözebilen bir yöntem yoktur. Bu sebep ile diferensiyel denklemlerin tiplerine göre uygun çözüm metodları geliştirilmiştir. Kimi zaman birkaç metodu arka arkaya uygulamak gerekebilir, kimi zaman uygun dönüşümler yapılarak çözüme ulaşılabilir, kimi zaman da analitik çözüm bulunamayabilir.

1870 yıllarında Sophus Lie, adi diferensiyel denklemleri ve çözümlerini incelemek amacıyla Lie grup tanımını ortaya koymuştur (Kiraz, 2007). Lie, adi diferensiyel denklem, eğer bir parametreli Lie grup dönüşümü altında değişmez (invaryant) kalıyorsa onun mertebesinin indirgenebileceğini göstermiştir. Bu bilgi integral dönüşümleri ile genişletilmiş ve birleştirilmiştir. Emmy Noether ve Lie'nin bu alandaki çalışmaları bu alanın temelini oluşturmaktadır. Daha sonraki yıllarda Élie Cartan da bu alan da çalışmalar yapmış bir matematikçidir.

Genel olarak, bir sistemin Lie nokta simetrisi, bir sistemin her bir çözümünü yine aynı sistemin diğer çözümleriyle eşleştiren yerel grup dönüşümüdür. Başka bir deyişle sistemin çözümler kümesini kendi kendine dönüştürür (Turgay, 2006).

$Q-$koşullu simetri alanındaki ilk çalışmalar Bluman ve Cole'a aittir (Hashemi and Nucci, 2013). Klasik Lie simetrilerinden farklı olarak bir diferensiyel denklem üzerine bazı kısıtlar koyarak diferensiyel denklemin Lie simetrilerini bulmayı amaçlar (Foursov and Vorob'ev, 1996). Bu sebeble, klasik Lie simetrilerinin genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Bu konudaki ilk çalışma lineer ısı denkleminin klasik olmayan simetrilerini bulmak için yapılmıştır (Chernia, 2010). Daha sonra ise lineer olmayan ısı denklemi için benzer çalışmalar yapılmıştır. Bu konuya Fushchich, Serov ve Chopik çalışmalarıyla katkı sağlamışlardır.

Özellikle, Lie yöntemi uygulanamayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde edebilmek ve nümerik hesaplamalar ile sonuçlara ulaşabilmek için $Q-$koşullu simetrilerini kullanmak oldukça kullanışlıdır (Chernia, 2010). Çünkü, $Q-$koşullu simetriler diferensiyel denklemin tanımlandığı manifoldun tamamında çözüm aramak yerine bu manifoldun alt manifoldlarında değişmez bırakan simetri grupları ile çözüm aramayı amaçlamaktadır. Alt manifold bazı diferensiyel koşullar (kısıtlar) yardımıyla oluşturulduğu için $Q-$koşullu simetri adı verilmiştir.

Klasik Lie simetrilerininin bulunması işleminden farklı olarak klasik olmayan simetriler bulunurken karşılaşılan belirleyici denklemler lineer olmayabilir (Turgay, 2006).

Bundan sonraki bölümde Q-koşullu simetrilerin uygulama alanındaki diferensiyel denklem kavramıyla ilgili genel tanımlamalar verilmiştir. Özet niteliğinde olan bu bilgiler sonraki bölümlerde sıklıkla adı geçecek tanımlardır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, Lie tarafından ortaya atılan klasik Lie simetrileri hatırlatılmıştır. Klasik simetri metodunun iyi kavranmış olunması bir sonraki bölümde verilen yöntemin kavranması açısından önem taşır. Lie yaklaşımının uygulanabilmesi için gerekli tanımlamaların ve teoremlerin verildiği bu bölümde yöntemin uygulaması olarak örnekler verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise hemen hemen her denkleme uygulanabilen güçlü bir teori olan Lie teorisinin çok yönlü olduğunun bir kanıtı olan $Q-$koşullu simetri yönteminden bahsedilmiştir. Bu yöntem kullanılarak sistematik bir çözüm algoritmasının üretilmesi için gerekli olan tanımlamalar verilmiştir. Literatürdeki çalışmalardan bazıları incelenip örnek olarak alınmıştır. Ayrıca bu bölümde, bu konu ile ilgili çalışılan denklemlerin dışında farklı tipteki diferensiyel denklemler incelenerek $Q-$koşullu simetrileri elde edilmiştir. Daha sonrasında bu teorinin diferensiyel denklem sistemlerine genişlitilebildiğinin uygulaması olarak mevcut çalışmalara ek olarak bazı sistemlere yöntem uygulanarak $Q-$koşullu simetriler bulunmuştur.

BÖLÜM 2

Bölüm2

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Temel bilimler, mühendislik ve ekonomi alanlarında kullanılan, fonksiyon veya fonksiyonların bir veya birden fazla değişkene göre türevlerini içeren matematiksel ifadelere diferensiyel denklem denilmektedir. Diferensiyel denklemler teorisi bir ve daha çok değişkenli fonksiyonlarla ilgili matematiksel modellerin analizini ve çözüm yöntemlerini kapsamaktadır. İlk olarak, bu kavram 1676 yılında Leibniz tarafından kullanılmıştır. Birçok bilimsel alanda problemlerin ifade edilmesi ve problemlerin değişkenlerinin, diğer değişkenlere göre değişiminin incelenmesi açısından oldukça önemlidir. Bu değişkenlerdeki değişimlerin hesaplamalara katılması daha genel ve daha hassas sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır. Bu sebeble bütün fen ve mühendislik bilim dallarındaki çeşitli problemlerde diferensiyel denklemlerin geniş bir uygulama alanı bulunmaktadır.

Bu bölümde diferensiyel denklem teorisi ile ilgili genel bilgiler ve tanımlamalar verilecektir. Bu bilgiler Lie ve $Q-$koşullu simetri teorisi için önemlidir.

Tanım 2.1: Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev varsa, bu değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi bulunan değişkene ise *bağımlı değişken* adı verilir (Özer ve Eser, 1996).

Tanım 2.2: Bir yada daha çok bağımlı değişkenin, bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içinde bulunduran denkleme *diferensiyel denklem* denir (Özer ve Eser, 1996).

Tanım 2.3: Bir diferensiyel denklemde eğer bir tek bağımsız değişken varsa denkleme *adi diferensiyel denklem*, birden fazla bağımsız değişken varsa *kısmi diferensiyel denklem* denir (Özer ve Eser, 1996).

Örnek 2.1:

$$y'' - y^2 y' - 12yx = 0$$

denklemi adi diferensiyel denklemdir; çünkü y bağımlı değişkeni sadece x bağımsız değişkenine bağlıdır.

Örnek 2.2:

$$u_{tt} + au_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad a, c; \ sabit$$

sönümlü dalga denklemi kısmi diferensiyel denkleme bir örnektir; çünkü burada u bağımlı değişkeni, x ve t bağımsız değişkenlerine bağlıdır.

Tanım 2.4: Diferensiyel denklem, bağımlı değişkene ve bağımsız değişkenin türevlerine göre bir polinom şekline getirilebiliyorsa, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (derecesine) *diferensiyel denklemin derecesi* denir.

Tanım 2.5: Bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine *diferensiyel denklemin mertebesi* denir (Özer ve Eser, 1996).

Genel olarak x bağımsız, y bağımlı değişkenli n-inci mertebeden bir adi diferensiyel denklem

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \text{yada} \qquad y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır (Özer ve Eser, 1996).

Tanım 2.6: Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesine denklemin mertebesi denir (Koca, 2001).

Tanım 2.7: Bir kısmi diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazıldığında katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonlarından oluşuyorsa (yani lineer ise) bu denkleme *lineer diferensiyel denklem*, aksi takdirde *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir (Koca, 2001).

$$p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u = s(x, y)$$

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y).$$

Örnek 2.3:

$$x^2 u_x - y^2 u_y = (x - y)u,$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

denklemleri birer lineerdiferensiyel denklem iken,

$$(u_x)^3 + u_y = 0,$$
$$u_x u_{xx} + u_y u_{yy} + u^2 = 0,$$

denklemleri de lineer olmayan diferensiyel denklemlerdir.

Tanım 2.8: Bir kısmi diferensiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer ise bu denkleme *yarı lineer denklem* denir (Çağlayan ve Çelebi, 2010).

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer kısmi diferensiyel denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir (Koca, 2001)

$$p(x, y, u)u_x + q(x, y, u)u_y = r(x, y, u)$$

$$A(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx}+B(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy}+C(x, t, u, u_x, u_y)u_{yy}+D(x, y, u, u_x, u_y)u = 0.$$

Örnek 2.4:

$$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin\ y,$$
$$u_y u_x - 3x^3 uu_{xy} + 2u_x - x^3 yu = 0,$$

denklemleri yarı lineer diferensiyel denklemlere örnek olarak verilmiştir. Her lineer denklem yarı lineerdir fakat her yarı lineer denklem, lineer olmayabilir.

Tanım 2.9: Yarı lineer bir denklemde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise, bu yarı lineer denkleme *hemen hemen lineer denklem* denir (Çağlayan ve Çelebi, 2010).

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden hemen hemen lineer kısmi diferensiyel denklemlerin genel formu aşağıdaki gibidir (Koca, 2001)

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Örnek 2.5:

$$x\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3 \left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = t + 1,$$
$$3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3 u_{zz} + 2zu_{xy} + u^2 u_x = xye^z,$$

denklemleri hemen hemen lineer diferensiyel denklem örnekleridir.

Tanım 2.10:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y) \tag{2.2}$$

denkleminde $G(x,y) = 0$ ise bu kısmi diferensiyel denkleme *homojen denklem*, $G(x,y) \neq 0$ ise *homojen olmayan denklem* denir (Koca, 2001).

Örnek 2.6:

$$x^2u_x - y^2u_y + u = 0,$$

$$u_{xx} - 3x^2u_{yy} + xyu_x = 0,$$

denklemleri birer homojen diferensiyel denklem iken,

$$u_x + u_y = xy,$$

$$uu_{xx} + u_y + u^2u_{xy} = (x-y)e^{xy},$$

denklemleri de homojen olmayan diferensiyel denklemlerdir.

Tanım 2.11: Eğer (2.2) diferensiyel denklemindeki A, B, C, D, E ve F fonksiyonları sabit veya sadece u değişkenine bağlı fonksiyonlar ise bu denkleme *sabit katsayılı diferensiyel denklem* denir, aksi takdirde böyle diferensiyel denklemlere *değişken katsayılı diferensiyel denklem* denir (Koca, 2001).

Örnek 2.7:

$$u_{xx} - u_{yy} - u_x + uu_y = 2\cos\,(3x+3y)$$

sabit katsayılı diferensiyel denklem iken

$$u_{xx} - (\tan\ x)\,u_x + u_{xx} = \frac{2y+1}{\cos^3\ x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

değişken katsayılı diferensiyel denklemdir.

Tanım 2.12: n. mertebeden bir diferensiyel denklem verilsin. Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu göz önüne alındığında, bu fonksiyon x in bir I aralığında verilmiş reel bir fonksiyon olsun ve bütün $x \in I$ değerleri için bu fonksiyonun n. mertebeden ve daha düşük mertebelerden türevleri bulunsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu verilen diferensiyel denklemde yerine yazıldığında denklem sağlanıyorsa $y = f(x)$ fonksiyonuna diferensiyel *denklemin çözümü* denir (Aydın ve diğerleri, 2005).

Adi diferensiyel denklemlerin genel çözümleri, diferensiyel denklemin mertebesi kadar keyfi sabit içerir ve bunlar her noktasından teğet doğruların çizilebildiği xy düzlemindeki eğri aileleridir.

Tanım 2.13: Bir kısmi diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona kısmi diferensiyel denklemin bir *özel çözümü* denir. Diğer taraftan bir kısmi diferensiyel denklemin mertebesi kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin *genel çözümü* denir (Koca, 2001).

Kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümleri ise denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir ve her noktasından teğet doğruların çizilebildiği eğri aileleridir.

Tanım 2.14: $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyon olsun. Eğer bütün mertebeden türevi var ve sürekli ise F düzgün (smooth) fonksiyondur (Debnath, 2004).

BÖLÜM 3

Bölüm3

BÖLÜM 3

LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİ

Dönüşüm grupları ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılda Sophus Lie tarafından başlatılmıştır. Lie, 1870 yılında diferensiyel denklemler için teğet dönüşümleri temel alan bir teori geliştirmiştir. Bu teori, 1960 yıllarında diferensiyel denklemlerin çözümlerinin beirlenmesinde uygulanmaya başlanmıştır. Lie yaklaşımı, denklemin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan, yerel dönüşüm gruplarının bulunmasıyla diferensiyel denklemin yeni çözümlerinin sistematik bir şekilde oluşturulmasına dayanan bir teoridir (Kiraz, 2007).

Lie'nin yaklaşımında, sürekli gruplar sonsuz küçük dönüşümler ile belirlenir ve bir sonsuz küçük üreteç verildiğinde grup dönüşümleri, nokta dönüşümlerinde olduğu gibi çözümünün varlığı sadece düzgün noktaların küçük komşuluklarında garanti olan Lie denklemleri ile bulunur. Bu kavram simetri grubu kavramıyla diferensiyel denklemlere genişletilebilir ve diferensiyel denklemlerin simetri grubu, türevlerdeki genişleme ile değişmez bırakan dönüşüm grupları olarak ele alınır (Kiraz, 2007).

Verilen kısmi diferensiyel denklem, dönüşümlerin Lie grupları altında değişmez (invaryant) kalıyorsa bu gruba kısmi diferensiyel denklemin Lie simetri grubu yada Lie simetrisi denir. Bir Lie simetri grubu, tüm bağımlı ve bağımsız değişkenlere bağlı olarak verilen dönüşümler altında diferensiyel denklemi değişmez bırakan bir sonsuz küçük üreteçle tanımlanır. Bu üreteç, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirini üreten bir tabanının lineer kombinasyonudur. Bu taban kullanılarak bulunan benzerlik dönüşümlerinden grup altında değişmez çözümler elde edilir. (Kiraz, 2007). Lie'nin önerdiği bu yöntemle, Lie simetrileri yardımıyla günümüze kadar birçok fiziksel problemin sonucu olan diferensiyel denklemlerin yeni çözümleri elde edilmiştir (Turgay, 2006).

Lie, bir adi diferensiyel denklemin bir parametreli dönüşüm grubu altında değişmez kalması halinde diferensiyel denklemin mertebesinin bir derece düşürülebileceğini göstermiştir. Mertebesi bir derece azaltılmış denklemin çözümlerinden orjinal denklemin çözümlerine geçmek mümkün olmaktadır. Bir diferensiyel denklemin çok parametreli simetri gruplarına sahip olması durumunda bu durum mertebenin daha çok azaltılmasına olanak tanınması anlamına gelmekle birlikte, diferensiyel denklemin sahip olduğu dönüşüm grubu çözümlenebilen grup şartlarına sahip olmadığı müddetçe mertebesi düşürülmüş denklemin çözümlerinden orjinal denklemin çözümlerine geçiş mümkün olmayabilir (Yakut, 2012).

Lie simetri teorisine, zamanla ilgi artmış ve Bluman ve Cole (1974), Clarkson ve Kruskal (1989), Bluman ve Kumei (1989), İbragimov (1985) , Olver (1986), tarafından yapılan çalışmalarla önemli sonuçlar elde edilmiş ve çeşitli uygulamalar geliştirilmiştir. Daha sonraki yıllarda diferensiyel cebir hesaplamaları kullanılarak bu uygulama bilgisayarlara aktarılmış ve bu konu ile ilgili birçok bilgisayar program yazılmıştır. Mathematica programı kullanılarak bu sistematik çözüm prosedürünün bilgisayara uygulanması da Hereman (1994), Baumann (2000) tarafından yapılmıştır (Kiraz, 2007).

Günümüzde simetri analizi, tamamen algoritmik bir yolla diferensiyel denklemlerin çözümlerininin türetildiği nadir teorilerden biridir ve ters saçılım (inverse scattering) teorisi ve Hirota tekniği gibi diğer çözüm işlemleri arasında seçkin bir konuma sahiptir. Lie teorisi diferensiyel denklemlerin hemen hemen tümüne uygulanabilmesine rağmen diğer teoriler genellikle tam olarak integrallenebilir denklemlerin çözümlerinde veya diğer bazı kısıtlamalar altında sonuç verirler (Kiraz,2007).

Bu açıdan Lie'nin teorisi güçlü ve çok yönlüdür. Simetri gruplar yardımıyla, sınır değer problemlerinin değişmez çözümlerine götüren sistematik prosedürle yeni çözümlere ulaşılabileceği gibi, adi diferensiyel denklemin mertebesinin düşürülmesi, kısmi diferensiyel denklemlerin değişken sayısının azaltılması ve adi diferensiyel denkleme indirgenmesi mümkün olmaktadır (Kiraz, 2007).

Bu bölümde, Lie simetrileri için temel bilgiler, yerel dönüşüm grupları, üreteçler, uzanım formülleri hakkında bilgiler verilmiştir. Ayrıca, iki tane denklemin klasik Lie simetrilerinin bulunuşu da eklenmiştir.

3.1 Grup

Tanım 3.1: G, boş olmayan herhangi bir küme ve ϕ, G nin elemanları üzerinde ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa G *ye grup* denir.

1) *Kapalılık özelliği:* G nin her a ve b elemanları için $\phi(a, b) \in G$ dir.

2) *Birleşme özelliği:* G nin her a, b ve c elemanları için

$$\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c). \tag{3.1}$$

3) *Birim eleman özelliği:* G nin her a elemanı için tek bir e birim elemanı vardır. Sembolik olarak;

$$\phi(a, e) = \phi(e, a) = a. \tag{3.2}$$

4) *Ters eleman özelliği:* G nin her bir a elemanı için buna karşılık gelen tek bir a^{-1} ters elemanı vardır. Sembolik olarak;

$$\phi\left(a, a^{-1}\right) = \phi\left(a^{-1}, a\right) = e. \tag{3.3}$$

Tanım 3.2: Eğer G deki her a, b elemanı için

$$\phi(a, b) = \phi(b, a) \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanıyorsa G ye *değişmeli (abelyan) grup* denir.

Tanım 3.3: Eğer G nin herhangi bir alt kümesindeki elemanlar ϕ işlemi ile grup oluşturuyorsa bu alt kümeye G nin bir *alt grubu* denir (Bluman and Kumei, 1989).

3.2 Dönüşüm Grupları

Tanım 3.4: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde bir nokta olsun. Her $x \in D$ için dönüşümün kümesi

$$x^* = X(x; \varepsilon) \tag{3.5}$$

şeklinde ve $S \subset \mathbb{R}$ bölgesinde $\phi(\varepsilon, \delta)$ dönüşümü ile ε parametresine bağlı olmak üzere , S bölgesindeki ε ve δ parametreleri yardımıyla tanımlı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa D bölgesi üzerindeki ϕ *dönüşüm grubu* denir.

1) S bölgesindeki her bir ε parametresi için dönüşümler D bölgesi üzerinde birebir olmalı ve özellikle x^*, D bölgesinde olmalı,

2) S bölgesi, ϕ dönüşümünün kuralları ile G grup formunu almalı,

3) Eğer $\varepsilon = e$ ise $x^* = x$ olmalıdır. Matematiksel gösterimi;

$$X(x;\varepsilon) = x. \tag{3.6}$$

4) Eğer $x^* = X(x;\varepsilon)$, $x^{**} = X(x^*;\delta)$ ise

$$x^{**} = X(x;\phi(\varepsilon,\delta)) \tag{3.7}$$

dır (Bluman and Kumei, 1989).

3.3 Bir Parametreli Lie Grup Dönüşümleri

Tanım 3.5: Dönüşüm gruplarını tanımlarken verilen aksiyomlara ek olarak aşağıda verilen aksiyomlar sağlanıyorsa ϕ dönüşümüne *bir parametreli Lie grup dönüşümü* denir.

5) ε sürekli bir parametre yani; S bölgesi $\mathbb{R}$ de bir aralık olsun. Genelliği bozmaksızın, e birim elemanına karşılık $\varepsilon = 0$ olmalı,

6) X, D bölgesinde x'e göre sonsuz defa türevlenebilmeli ve S bölgesinde ε un analitik fonksiyonu olmalı,

7) $\varepsilon \in S$ ve $\delta \in S$ olmak üzere $\phi(\varepsilon,\delta)$, ε ve δ un analitik fonksiyonu olmalıdır (Bluman and Kumei, 1989).

3.4 Sonsuz Küçük Dönüşümler

Tanım 3.6: Bir parametreli (ε) Lie grup dönüşümü, ϕ işlemiyle $\varepsilon = 0$ da tanımlı olsun.

$$x^* = X(x;\varepsilon) \tag{3.8}$$

$\varepsilon = 0$ komşuluğunda (3.8) eşitliği Taylor serisine açıldığında

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\left(\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \ldots \\ &= x + \varepsilon\left(\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada

$$\xi\left(x\right)=\frac{\partial X\left(x;\varepsilon\right)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{3.10}$$

olsun. $x+\varepsilon\xi\left(x\right)$ dönüşümüne (3.8) ile verilen Lie grup dönüşümünün *sonsuz küçük dönüşümü* ve $\xi\left(x\right)$ bileşenine grup dönüşümünün *sonsuz küçüğü* denir.

Yardımcı Teorem 3.1:

$$X\left(x;\varepsilon+\Delta\varepsilon\right)=X\left(X\left(x;\varepsilon\right);\phi\left(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\varepsilon\Delta\right)\right) \tag{3.11}$$

İspat:

$$\begin{aligned} X\left(X\left(x\right);\phi\left(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\varepsilon\Delta\right)\right) &= X\left(x;\phi(\varepsilon,\phi\left(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\varepsilon\Delta\right)\right) \\ &= X\left(x;\phi(\phi\left(\varepsilon,\varepsilon^{-1}\right),\varepsilon+\varepsilon\Delta\right)) \\ &= X\left(x;\phi(\varepsilon+\varepsilon\Delta\right) \\ &= X\left(x;\varepsilon+\varepsilon\Delta\right) \end{aligned}$$

Teorem 3.1: (Lie Birinci Temel Teoremi) (3.8) ile verilen Lie grup dönüşümü 1. mertebeden diferensiyel denklem sistemi için başlangıç değer probleminin çözümü Lie grup dönüşümüne eşdeğer olacak şekilde $\tau(\varepsilon)$ parametrizasyonu ile yapılır.

$$\tau=0 \quad iken \quad x^{*}=x \tag{3.12}$$

ile

$$\frac{dx^{*}}{d\tau}=\xi\left(x^{*}\right). \tag{3.13}$$

Özellikle

$$\tau\left(\varepsilon\right)=\int_{0}^{\varepsilon}\Gamma\left(\varepsilon^{'}\right)d\varepsilon^{'} \tag{3.14}$$

şeklindedir ve burada

$$\Gamma\left(\varepsilon\right)=\frac{\partial\phi\left(a,b\right)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=\left(\varepsilon^{-1},\varepsilon\right)} \tag{3.15}$$

ve

$$\Gamma\left(0\right)=1 \tag{3.16}$$

dir. Ayrıca ε^{-1}, ε nun ters elemanını gösterir (Bluman and Kumei, 1989).

3.5 Sonsuz Küçük Üreteç

Tanım 3.7:

$$X = X\left(x\right) = \xi\left(x\right)\nabla = \sum_{i=1}^{n}\xi^{i}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.17}$$

operatörüne (3.8) ile verilen bir parametreli Lie grup dönüşümünün *sonsuz küçük üreteci* denir. Burada ∇ gradient operatörüdür ve

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{3.18}$$

şeklinde gösterilir (Bluman and Kumei, 1989).

Her diferensiyellenebilen $F(x) = F(x_1, x_{2,}.., x_n)$ fonksiyonu için

$$XF(x) = \xi(x).\nabla F(x) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}$$

şeklindedir. Ayrıca $Xx = \xi(x)$ tir.

3.6 Değişmez (İnvaryant) Fonksiyon

Tanım 3.8: $F\left(x\right)$ her mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere (3.8) ile verilen Lie grup dönüşümünün *değişmez fonksiyonu* olması için gerek ve yeter şart (3.8) ile verilen herhangi bir Lie grup dönüşümü için

$$F\left(x^{*}\right) = F\left(x\right)$$

olmasıdır (Bluman and Kumei, 1989).

Eğer (3.8) ile verilen Lie grup dönüşümünün değişmez fonksiyonu $F(x)$ ise $F(x)$*'e bu dönüşümün değişmezi* denir ve $F(x)$, (3.8) ile verilen Lie dönüşümü altında *değişmezdir* denir.

Teorem 3.2: $F(x)$, (3.8) altında değişmezdir ancak ve ancak

$$XF(x) \equiv 0.$$

3.7 değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler ve Değişmez Noktalar

Tanım 3.9: (3.8) ile verilen bir parametreli Lie grup dönüşümü altında $F(x) = 0$ yüzeyi *değişmez yüzeydir* ancak ve ancak $F(x) = 0$ iken $F(x^*) = 0$ olmalıdır.

Tanım 3.10: $F(x, y) = 0$ eğrisi,

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \varepsilon) &= x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \varepsilon) &= y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.19}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümü altında ve

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.20}$$

sonsuz küçük üreteci ile *değişmez eğridir* ancak ve ancak $F(x, y) = 0$ iken $F(x^*, y^*) = 0$ olmalıdır.

Teorem 3.3: (i)Eğer yüzey $F(x) = x_n - f(x_1, x_2, ... x_{n-1})$ formunda yazılmış ise verilen Lie grup dönüşümü için değişmez yüzeydir ancak ve ancak

$$F(x) = 0 \text{ iken } XF(x) = 0$$

(ii)Eğer eğri $F(x, y) = y - f(x) = 0$ formunda yazılmış ise (3.19) dönüşümü için değişmez eğridir ancak ve ancak

$$XF(x, y) = \eta(x, y) - \xi(x, y)f^{'}(x) = 0 \tag{3.21}$$

olmalıdır.

Tanım 3.11: Verilen Lie grup dönüşümü için x noktası *değişmez noktadır* ancak ve ancak (3.8) ile verilen dönüşüm altında $x^* \equiv x$ olmalıdır.

Teorem 3.4: Verilen Lie grup dönüşümü için x noktası invaryant noktadır ancak ve ancak

$$\xi(x) = 0.$$

3.8 Total (Tam) Türev

Tanım 3.12: Aşağıdaki tanımlanan operatöre,

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + ... + y_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_n} + ... \tag{3.22}$$

total türev operatörü denir. $F(x, y, y_1, y_2, ..., y_\ell)$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{D}{Dx}F(x, y, y_1, y_2, ..., y_\ell) = F_x + y_1 F_y + y_2 F_{y_1} + y_3 F_{y_4} + ... + y_{\ell+1} F_{y_\ell} \tag{3.23}$$

şeklindedir(Bluman and Kumei, 1989).

3.9 Uzanım (Prolongasyon) Formülleri

Tanım 3.13:

$$\eta^0 = \eta\,(x, y)$$

olmak üzere

$$\eta^{(k)} = D^k \eta - \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} y_{k-j+1} D^j \xi, k \geq 1$$

şeklinde oluşturulan

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi\,(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\,(x, y, y_1)\,\frac{\partial}{y_1} + ... \\ &\quad ... + \eta^{(k)}\,(x, y, y_1, ..., y_k)\,\frac{\partial}{\partial y_k} \end{aligned} \tag{3.24}$$

değerine bir bağımlı, bir bağımsız değişken için k. *uzanım* adı verilir (Bluman and Anco, 2002).

3.9.1 Bir dağımlı ve bir bağımsız beğişken için uzanım formülleri

Teorem 3.5: x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere $y = y\,(x)$ olsun. (3.19) ile tanımlanan bir parametreli Lie grup dönüşümlerinin $(x, y, y_1, ..., y_k)$

uzayındaki k. uzanımları

$$\begin{aligned}
y_1^* &= Y_1(x,y,y_1;\varepsilon) \\
\vdots &= \quad \vdots \\
y_k^* &= Y_k(x,y,y_1,...,y_k;\varepsilon) \\
&= \frac{\dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + ... + y_k \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\dfrac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial y}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur, burada

$$\begin{aligned}
y_1^* &= Y_1 = Y_1(x,y,y_1;\varepsilon) \\
&= \frac{\dfrac{\partial Y(x;\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y(x;\varepsilon)}{\partial y}}{\dfrac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial y}}
\end{aligned}$$

ve

$$Y_{k-1} = Y_{k-1}(x,y,y_1,...,y_{k-1};\varepsilon)$$

şeklindedir.

(3.19) dönüşümünün, $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ sonsuz küçükleri ve (3.20) sonsuz küçük üreteci olmak üzere; k. uzanımı

$$\begin{aligned}
x^* &= X(x,y;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,y) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
y^* &= Y(x,y;\varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x,y) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
y_1^* &= Y_1(x,y,y_1;\varepsilon) = y_1 + \varepsilon\eta^{(1)}(x,y,y_1) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
\vdots & \quad \vdots \\
y_k^* &= Y_k(x,y,y_1,...,y_k;\varepsilon) = y_k + \varepsilon\eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k) + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir, burada k. uzanımın sonsuz küçükleri

$$\xi(x,y), \eta(x,y), \eta^{(1)}(x,y,y_1), ..., \eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k)$$

olur iken sonsuz küçük üretecide

$$X^{(k)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{(1)}(x,y,y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}+...$$

$$...+\eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k)\frac{\partial}{\partial y_k}$$

şeklinde olur. $k=1,2,...$ için uzanımın $\eta^{(k)}$ ile gösterilen sonsuz küçükleri

$$\eta^{(0)}=\eta(x,y)$$

olmak üzere

$$\eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k)=\frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx}-y_k\frac{D\xi(x,y)}{Dx}$$

formülü ile bulunur (Bluman and Anco, 2002).

Örnek: x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere $\eta_1^{(1)},\eta_2^{(1)},\eta^{(3)}$ sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= \eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y_1-\xi_y\left(y_1\right)^2\\
\eta^{(2)} &= \eta_{xx}+\left(2\eta_{xy}-\xi_{xx}\right)y_1+\left(\eta_{yy}-2\xi_{xy}\right)\left(y_1\right)^2\\
&\quad -\xi_{yy}\left(y_1\right)^3+\left(\eta_y-2\xi_x\right)y_2-3\xi_y y_1 y_2\\
\eta^{(3)} &= \eta_{xxx}+\left(3\eta_{xxy}-\xi_{xxx}\right)y_1+3\left(\eta_{xyy}-\xi_{xxy}\right)\left(y_1\right)^2\\
&\quad +\left(\eta_{yyy}-3\xi_{xyy}\right)\left(y_1\right)^3-\xi_{yyy}\left(y_1\right)^4+3\left(\eta_{xy}-\xi_{xx}\right)y_2\\
&\quad +3\left(\eta_{yy}-3\xi_{xy}\right)y_1y_2-6\xi_{yy}\left(y_1\right)^2y_2-3\xi_y\left(y_2\right)^2\\
&\quad +\left(\eta_y-3\xi_x\right)y_3-4\xi_y y_1 y_3
\end{aligned}$$

şeklindedir.

3.9.2 Bir bağımlı ve n bağımsız değişken için uzanım formülleri

u bağımlı değişken, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u=u(x)$ olmak üzere bir parametreli Lie grup dönüşümleri

$$x_i^*=X_i(x,u;\varepsilon)=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u)+o\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.25}$$

$$u^* = U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.26}$$

şeklinde verilsin. Burada $i = 1,2,...,n$ olmak üzere (x,u) uzayında sonsuz küçük üreteç

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

şeklindedir.

(3.25) ve (3.26) dönüşümlerinin k. uzanımı

$$\begin{aligned}
x_i^* &= X_i(x,u;\varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x,u) + o\left(\varepsilon^2\right)\\
u^* &= U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + o\left(\varepsilon^2\right)\\
u_i^* &= U_i(x,u,\partial u;\varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u) + o\left(\varepsilon^2\right)\\
\vdots &= \quad\vdots\\
u_{i_1i_2...i_k}^* &= U_{i_1i_2...i_k}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u;\varepsilon\right)\\
&= u_{i_1i_2...i_k} + \varepsilon\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u\right) + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $i = 1,2,...,n$ ve $l = 1,2,...,k$ için $i_l = 1,2,...,n$ şeklindedir ayrıca $k \geq 1$ dir. $\partial^k u$, u değişkeninin, x değişkenine göre bütün k. mertebeden kısmi türev bileşenlerini gösterir. k. uzanımın sonsuz küçükleri

$$\xi(x,u), \eta(x,u), \eta^{(1)}(x,u,\partial u), ..., \eta^{(k)}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u\right)$$

olur iken sonsuz küçük üreteci de

$$X^{(k)} = \xi^i\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}\frac{\partial}{u_i} + ... + \eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)}\frac{\partial}{u_{i_1i_2...i_k}}, k \geq 1$$

şeklinde olur.

$k \geq 2$ için uzanımın $\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)}$ sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned}
\eta_i^{(1)} &= D_i\eta - \left(D_i\xi_j\right)u_j, i = 1,2,...,n\\
\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)} &= D_{i_k}\eta_{i_1i_2...i_{k-1}}^{(k-1)} - \left(D_{i_k}\xi_j\right)u_{i_1i_2...i_{k-1}j}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve $l = 1,2,...,k$ için $i_l = 1,2,...,n$ şeklindedir (Bluman and Anco, 2002).

Örnek: x_1 ve x_2 bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_{11}^{(2)}$, $\eta_{12}^{(2)}, \eta_{22}^{(2)}$ sonsuz küçükleri

$$\eta_1^{(1)} = \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right] u_1 - \frac{\partial\xi^2}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial\xi^1}{\partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial\xi^2}{\partial u} u_1 u_2 \tag{3.27}$$

$$\eta_2^{(1)} = \frac{\partial\eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\right] u_2 - \frac{\partial\xi^1}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial\xi^2}{\partial u}(u_2)^2 - \frac{\partial\xi^1}{\partial u} u_1 u_2 \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{11}^{(2)} = {} & \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_1^2}\right] u_1 - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_1^2} u_2 \\
& + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right] u_{11} - 2\frac{\partial\xi^2}{\partial x_1} u_{12} - 2\frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_1\partial u} u_1 u_2 \\
& + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_1\partial u}\right](u_1)^2 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial u^2}(u_1)^3 \\
& - 3\frac{\partial\xi^1}{\partial u} u_1 u_{11} - \frac{\partial\xi^2}{\partial u} u_2 u_{11} - 2\frac{\partial\xi^2}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial u^2}(u_1)^2 u_2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{12}^{(2)} = {} & \eta_{21}^{(2)} \\
= {} & \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_1\partial x_2}\right] u_2 + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right] u_1 \\
& - \frac{\partial\xi^2}{\partial x_1} u_{22} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi^1}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\right] u_{12} - \frac{\partial\xi^1}{\partial x_2} u - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_1\partial u}(u_2)^2 \\
& + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2\partial u}\right] u_1 u_2 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2\partial u}(u_1)^2 \\
& - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial u^2}(u_1)^2 u_2 - 2\frac{\partial\xi^2}{\partial u} u_2 u_{12} \\
& - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial\xi^1}{\partial u} u_2 u_{11} - \frac{\partial\xi^2}{\partial u} u_1 u_{22}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{22}^{(2)} = {} & \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2^2}\right] u_2 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2^2} u_1 - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2} u_{12} \\
& + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\right] u_{22} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2\partial u}\right](u_2)^2 \\
& - 2\frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2\partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial u^2}(u_2)^3 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 \\
& - 3\frac{\partial\xi^2}{\partial u} u_2 u_{22} - \frac{\partial\xi^1}{\partial u} u_1 u_{22} - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial u} u_2 u_{12}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

şeklinde olur, burada

$$u_i = \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \qquad\qquad i,\ j = 1, 2$$
$$u_{i\ j} = \tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

dir.

3.9.3 m bağımlı ve n bağımsız değişken için uzanım formülleri

$u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ bağımlı değişkenler, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bağımsız değişkenler olmak üzere $u = u(x)$ ve $m \geq 2, n \geq 2$ olsun.

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + o(\varepsilon^2) \tag{3.32}$$

$$(u^\mu)^* = U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x, u) + o(\varepsilon^2) \tag{3.33}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümleri verilsin.

(3.32) ve (3.33) dönüşümlerinin k. uzanımı

$$\begin{aligned}
x_i^* &= X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + o(\varepsilon^2) \\
(u^\mu)^* &= U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x, u) + o(\varepsilon^2) \\
(u_i^\mu)^* &= U_i^\mu(x, u, \partial u; \varepsilon) = u_i^\mu + \varepsilon \eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) + o(\varepsilon^2) \\
\vdots &= \qquad \vdots \\
\left(u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu\right)^* &= U_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu\left(x, u, \partial u, ..., \partial^k u; \varepsilon\right) \\
&= u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu + \varepsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}\left(x, u, \partial u, ..., \partial u^k\right) + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\mu = 1, 2, ..., m$, $i = 1, 2, ..., n$ ve $l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ ayrıca $k \geq 2$ dir. $\partial^k u$, u nun x e göre bütün k. mertebeden kısmi türev bileşenlerini gösterir. k. uzanımın sonsuz küçük üreteci

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu} \frac{\partial}{u_i^\mu} + ... + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu} \frac{\partial}{u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu}, k \geq 1$$

şeklinde olur.

$k \geq 2$ için uzanımın $\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}$ şeklindeki sonsuz küçükleri

$$\eta_i^{(1)\mu} = D_i \eta^\mu - (D_i \xi_j) u_j^\mu \tag{3.34}$$

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu} = D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)\mu} - (D_{i_k} \xi_j) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}^\mu \tag{3.35}$$

şeklindedir burada $l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ dir.

n. mertebeden diferensiyel denkleme sonsuz küçük üreteci uygulayabilmek için n. uzanıma ihtiyaç vardır (Bluman and Kumei, 1989).

Örnek: x , y iki bağımsız değişken ve u, v iki bağımlı değişken olduğu durumdaki uzanım formüllerini elde edilmiştir. Buna göre x için total türev

$$D_x = \frac{\partial}{\partial u} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xy} \frac{\partial}{\partial v_y} + ...$$

olur. Sonsuz küçük üreteç ise

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v}$$

olarak bulunur. Terimlerin karışmaması için ξ^1 yerine ξ; ξ^2 yerine $\tau; \eta^1$ yerine $\eta; \eta^2$ yerine ϕ alınmıştır. Buna göre üretecin birinci uzanımı

$$X^{(1)} = X + \eta_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_y^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_y} + \phi_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial v_x} + \phi_y^{(1)} \frac{\partial}{\partial v_y}$$

şeklindedir. denklem (3.34) kullanılarak $\eta_x^{(1)}$ ve $\phi_x^{(1)}$ aşağıdaki şekilde bulunur

$$\begin{aligned} \eta_x^{(1)} &= D_x\eta - u_x\left(D_x\xi\right) - u_y\left(D_x\tau\right) \\ &= \left(\eta_x + u_x\eta_u + v_x\eta_v\right) - u_x\left(\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v\right) - u_y\left(\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v\right) \\ \phi_x^{(1)} &= D_x\phi - u_x\left(D_x\xi\right) - u_y\left(D_x\tau\right) \\ &= \left(\phi_x + u_x\phi_u + v_x\phi_v\right) - u_x\left(\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v\right) - u_y\left(\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Şimdi de denklem (3.35) kullanılarak $\eta_x^{(2)}$ hesaplanmış ve aşağıda verilmiştir

$$\begin{aligned} \eta_x^{(2)} &= D_x(\eta_x^{(1)}) - u_{xx}\left(D_x\xi\right) - u_{xy}\left(D_x\tau\right) \\ &= \begin{array}{l} D_x(\eta_x + u_x\eta_u + v_x\eta_v - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u - u_xv_x\xi_v - u_y\tau_x - u_yu_x\tau_u - u_yv_x\tau_v) \\ -u_{xx}\left(D_x\xi\right) - u_{xy}\left(D_x\tau\right) \end{array} \\ &= \begin{array}{l} \eta_{xx} + u_x\eta_{xu} + v_x\eta_{xv} + u_x(\eta_{ux} + u_x\eta_{uu} + v_x\eta_{uv}) + u_{xx}\eta_u + \\ +v_x(\eta_{vx} + u_x\eta_{vu} + v_x\eta_{vv}) + v_{xx}\eta_v - u_x\left(\xi_{xx} + u_x\xi_{ux} + v_x\xi_{vx}\right) \\ -u_{xx}\xi_x - u_x^2\left(\xi_{ux} + u_x\xi_{uu} + v_x\xi_{vu}\right) - 2\xi_u u_x u_{xx} - \xi_v(v_{xx}u_x + v_xu_{xx}) \\ -v_xu_x\left(\xi_{vx} + u_x\xi_{uv} + v_x\xi_{vv}\right) - u_y\left(\tau_{xx} + u_x\tau_{xu} + v_x\tau_{xv}\right) - u_{xy}\tau_x \\ -u_yu_x\left(\tau_{ux} + u_x\tau_{uu} + v_x\tau_{uv}\right) - \tau_u(u_{yx}u_x + u_yu_{xx}) \\ -v_xu_y\left(\tau_{vx} + u_x\tau_{vu} + v_x\tau_{vv}\right) - \tau_v(v_{xx}u_y + v_xu_{xy}) \\ -u_{xx}\left(\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v\right) - u_{xy}\left(\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v\right) \end{array} \end{aligned} \tag{3.37}$$

3.10 Örnekler

Uygulamalı matematikte önemli iki denklem olan ısı iletim denklemi ve Burger denklemi için klasik Lie simetri teorisinin uygulaması verilmiştir ve bu denklemlerin sonsuz küçük üreteçleri bulunmuştur.

3.10.1 Isı İletim Denklemi için Klasik Lie Simetrileri

Matematiksel fiziğin önemli bir denklemi olan ısı iletim denklemi

$$u_t = ku_{xx}$$

ısının nesne üzerinde belli bir konumda ve zamanda nasıl dağılacağını gösteren diferensiyel denklemdir. Bu denklemin klasik Lie simetrileri bulunmuştur. Bu diferensiyel denklem 2. mertebeden olduğu için 2. uzanım altında

$$X^{(2)} \{u_t - u_{xx} = 0\} = 0$$

değişmezdir, yani;

$$\eta_t^{(1)} - \eta_{xx}^{(2)} = 0$$

olur. $\eta_t^{(1)}$, $\eta_{xx}^{(2)}$ terimleri (3.28) ve (3.29) eşitliklerine göre düzenlenip ve u_t görülen yerlere u_{xx} yazıldığında

$$\begin{aligned}\eta_t + (\eta_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - \eta_{xx} - (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x \\ +\tau_{xx}u_{xx} - (\eta_{uu} - \xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_x u_{xx} + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} \\ -(\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_x u_{tx} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_x u_{tx} = 0\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

u nun kısmi türevlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla

$$
\begin{array}{ll}
u_x u_{xt} & \tau_u = 0 \\
u_{xt} & \tau_x = 0 \\
u_{xx}^2 & \tau_u = \tau_u \\
u_x^2 u_{xx} & \tau_{uu} = 0 \\
u_x u_{xx} & \xi_u = 2\tau_{xu} + 3\xi_u \\
u_{xx} & \tau_t - \eta_u = \tau_{xx} - \eta_u + 2\xi_x \\
u_x^3 & \xi_{uu} = 0 \\
u_x^2 & \eta_{uu} = 2\xi_{xu} \\
u_x & \xi_t = \xi_{xx} - 2\eta_{xu} \\
1 & \eta_t = \eta_{xx}
\end{array} \tag{3.38}
$$

belirleyici denklemleri elde edilir. Bu belirleyici denklem sistemindeki ilk iki denklemden τ sonsuz küçüğünün sadece t değişkenine bağlı olduğu görülür. Sistemin 5. denkleminden $\xi_u = 0$ olarak bulunur. Böylece sistemdeki 6. denklemden

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t \; x + c(t) \tag{3.39}$$

elde edilir, burada $c(t)$ integral sabitidir. Sistemin 8. denkleminden

$$\eta_{uu} = 0$$
$$\eta(x,t,u) = a(x,t)u + b(x,t)$$

elde edilir. Sistemdeki 6.ve 9. denklemden ve (3.39) ile verilen sonsuz küçük yardımıyla

$$a(x,t) = -\frac{1}{8}\tau_{tt} \; x^2 - \frac{1}{2}xc_t + d(t) \tag{3.40}$$

olarak bulunur. Sistemdeki son denklemden $a_t = a_{xx}$ ve $b_t = b_{xx}$ eşitlikleri elde edilir. (3.40) denklemi yardımıyla

$$a_t = a_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\tfrac{1}{8}\tau_{tt} \; x^2 - \tfrac{1}{2}xc_t + d(t)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\tfrac{1}{8}\tau_{tt} \; x^2 - \tfrac{1}{2}xc_t + d(t)\right)$$
$$-\tfrac{1}{8}\tau_{ttt} \; x^2 - \tfrac{1}{2}xc_{tt} + d_t(t) = -\tfrac{1}{4}\tau_{tt}$$
$$\tau_{ttt} = 0, \qquad c_{tt} = 0, \qquad 4d_t(t) = -\tau_{tt}$$

elde edilir. Bulunan fonksiyonların çözümleri ξ, τ ve η sonsuz küçüklerinde yerine yazıldığında ve katsayılar düzenlendiğinde $c_1, ..., c_6$ sabit katsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt \\
&\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2 \\
&\eta = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + b(x,t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan sonsuz küçükler X simetri üretecinde yerine yazılır ve c_i katsayılarına bağlı olarak X_i simetri üreteçleri

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial x, \qquad X_2 = \partial t, \qquad X_3 = u\partial u, \\
X_4 &= x\partial x + 2t\partial t, \qquad X_5 = 2t\partial x - xu\partial u, \\
X_6 &= 4tx\partial x + 4t^2\partial t - (x^2 + 2t)u\partial u
\end{aligned}$$

olarak belirlenir (San, 2011).

3.10.2 Burger Denklemi için Klasik Lie Simetrileri

Isı denklemine çok benzeyen fakat lineer olmayan bir boyutlu Burger denklemi

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 \tag{3.41}$$

olarak verilir. Bu denklemin klasik Lie simetrileri bulunmuştur. 2. mertebeden diferensiyel denklem olduğu için 2. uzanım altında değişmezdir. değişmezlik şartı Burger denklemine uygulanır. Elde edilen bu denklemde uygun uzanımlar ve u_t yerine $u_{xx} + u_x^2$ yazılmıştır. Daha sonra u değişkeninin kısmi türevlerinin katsayıları ile

$$\begin{aligned}
&\tau_u = \tau_x = 0 \\
&\xi_u + \tau_{xu} + \tau_x = 0 \\
&\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0 \\
&-\eta_u - \tau_t + \tau_{xx} - \eta_{uu} + 2\xi_{xu} + 2\xi_x = 0 \\
&-\xi_t - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} - 2\eta_x = 0 \\
&\eta_t - \eta_{xx} = 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

belirleyici denklemleri elde edilmiştir. Bu sistemdeki ilk denklemden τ sonsuz küçüğünün u ve x değişkenlerine, 2. denklemden ise ξ sonsuz küçüğünün u değişkenine bağlı olmadığı görülür. Sistemdeki 3.ve 4. denklemden

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \tfrac{1}{2}\tau_t\ x + c(t) \\ \eta(x,t,u) &= a(x,t)e^{-u} + b(x,t) \end{aligned} \tag{3.43}$$

olur. Sistemdeki 5. denklemden ise

$$b = -\frac{1}{8}\tau_{ttt}\ x^2 - \frac{1}{2}c_t(t)x + d_t(t)$$

bulunur. Son olarak sistemdeki son denklemden

$$\begin{gathered} \eta_t = \eta_{xx} \\ a_t(x,t)e^{-u} + b_t(x,t) = a_{xx}(x,t)e^{-u} + b_{xx}(x,t) \\ a_t(x,t) = a_{xx}(x,t), \qquad\qquad b_t(x,t) = b_{xx}(x,t) \end{gathered}$$

bulunur. ve buradan $b(x,t)$ fonksiyonunun çözümü

$$\begin{gathered} b_t(x,t) = b_{xx}(x,t) \\ \tfrac{\partial}{\partial t}\left(-\tfrac{1}{8}\tau_{tt}\ x^2 - \tfrac{1}{2}xc_t + d(t)\right) = \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\tfrac{1}{8}\tau_{tt}\ x^2 - \tfrac{1}{2}xc_t + d(t)\right) \\ -\tfrac{1}{8}\tau_{ttt}\ x^2 - \tfrac{1}{2}xc_{tt} + d_t(t) = -\tfrac{1}{4}\tau_{tt} \\ \tau_{ttt} = 0, \qquad c_{tt} = 0, \qquad d_t(t) = -\tfrac{1}{4}\tau_{tt} \end{gathered}$$

şeklindedir. Elde edilen son denklem sistemi çözüldüğünde sonsuz küçükler

$$\begin{aligned} &\xi = c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt \\ &\tau = c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2 \\ &\eta = a(x,t)e^u + (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan sonsuz küçükler yardımıyla c_i katsayılarına göre X_i üreteçleri

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial x, \qquad X_2 = \partial t, \qquad X_3 = \partial u, \\ X_4 &= x\partial x + 2t\partial t, \qquad X_5 = 2t\partial x - x\partial u, \\ X_6 &= 4tx\partial x + 4t^2\partial t - (x^2 + 2t)\partial u \end{aligned}$$

şeklindedir (San, 2011).

BÖLÜM 4

*Bölüm*4

BÖLÜM 4

Q-KOŞULLU SİMETRİ

Genel olarak, koşullu simetri, bir diferensiyel denklemin çözümlerinin belirli bir alt kümesindeki simetrilerine karşılık gelir. koşullu simetrileri inşa edebilmek için çok daha fazla detaya ve tanımlamaya ihtiyaç vardır. Bu klasik Lie simetrilerindeki tüm çözümlerin kümesinden daha geniş özelliklere sahip olan alt kümeyi seçme çalışması altında, denklemin çözüm kümesi için şartların yada kısıtların analitik tanımının verilmesi anlamına gelir.

Euler, Bateman, Lie, Smirnov, Sobolev (1932) ve daha birçok bilim insanı, lineer d'Alembert ve Laplace denklemlerinin tam çözümlerini inşa etmek için çözümlerin alt kümelerinin simetrilerini kullanmışlardır. Bluman ve Cole, lineer ısı denklemi için grup altında çözümlerin klasik olmayan metodunun invaryant olduğundan bahsetmişlerdir. Olver ve Rosenau (1986), Lie yöntemiyle elde edilemeyen bir boyutlu lineer olmayan akustik dalga denklemi için bunu inşa etmiştir. Clarkson ve Kruskal ise Boussinesqu denklemi için değişmez indirgenmesi için yeni yöntem önermiştir (Fushchych, 2002).

Bluman ve Cole, 1969 da ısı iletim denkleminin genel çözümünü bulmak için yaptığı çalışmalarda, kısmi diferensiyel denklemler için değişmez grup yardımıyla çözümlerin bulunabildiği yeni bir yöntem uyguladılar. Bu yöntem yazarlar tarafından, klasik Lie indirgeme metodu ile aralarında farklılık olduğunu ve simetrilerinin farklı olduğunu vurgulamak için "klasik olmayan" diye adlandırılmıştır. İlk kez kesin ve açık tanımlamalar "Lie değişmezlik tanımlarının genelleştirilmesi" olarak Fushchych tarafından 1987 yılında formüle edilmiştir. Sonraki yıllarda klasik olmayan değişmezlik şartını karşılamak için farklı yazarlar tarafından klasik olmayan simetri, koşullu simetri, $Q-$koşullu simetri ve indirgeme operatörü olarak adlandırılmıştır. $Q-$koşullu simetrilerin indirgeme ile bağlantısı ve uyumluluğu uzun süre tartışılmıştır. Günümüzde $Q-$koşullu simetri teorisinde herşey tam olarak keşfedilmemiştir. Genellikle sabit olmayan difüzyon terimleri ile genel iki bileşenli reaksiyon difüzyon denklemleri için $Q-$koşullu simetriler çalışılmıştır.

4.1 Giriş

Bu bölümde kısmi diferensiyel denklemler ve denklem sistemleri için $Q-$koşullu simetri çesitleri ve tanımları verilmiştir.

$\mathcal{L}$ diferensiyel denklemi, t ve x bağımsız değişkenlerinden ve u bağımlı değişkeninden oluşmak üzere r. mertebeden kısmi türevli denklem

$$\mathcal{L} = L(t, x, u_{(r)}) \tag{4.1}$$

olsun. Burada $u_{(r)}$, u fonksiyonunun t ve x değişkenlerine göre r'inci mertebeden türevidir. (4.1) denkleminin sonsuz küçük üreteci

$$Q \equiv \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u \tag{4.2}$$

formunda ifade edilebilir. Burada $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$ dır. Bu şart ile iki farklı durum ortaya çıkar, bu durumlar

1−) $\tau \neq 0$ ise genelliği bozmaksızın $\tau = 1$ alınır,

2−) $\tau = 0$ ve $\xi \neq 0$ ise yine genelliği bozmaksızın $\xi = 1$ alınır.

Aşağıdaki denklem birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklem

$$Q[u] \equiv \eta(t, x, u) - \tau(t, x, u)u_t - \xi(t, x, u)u_x \tag{4.3}$$

olup Q *operatorünün karakteristiği* olarak adlandırılır. $Q[u] = 0$ karakateristik kısmi diferensiyel denklemine de *değişmez yüzey şartı* denir.

Tanım 4.1: $Q_{(r)}L(t, x, u_{(r)})|_M = 0$ ise $L(t, x, u_{(r)})$ formundaki $\mathcal{L}$ kısmi diferensiyel denkleminin Q operatörüne göre koşullu değişmezdir. Buna *kosullu değişmezlik şartı (kriteri)* ve Q operatörüne de $\mathcal{L}$ denkleminin *koşullu simetri operatörü* denir. Burada $M = \{\mathcal{L}, \vartheta^{(r)}\}$ ve $\vartheta^{(r)}$, $Q[u] = 0$ kararteristik denkleminin bütün diferensiyel sonuçlarının kümesi tarafından tanımlanan manifoldu göstermektedir. Ayrıca, $Q_{(r)}$ sembolü Q operatörünün r. *uzanımıdır* (Ivanova, 2010).

Tanım 4.2: (t, x) bağımsız ve $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ $(m \geq 2)$ bağımlı değişken olmak üzere denklem sistemi ele alındığında bu denklem sisteminin k. $(k \geq 2)$ mertebeden olduğu varsayımı ile

$$u_t^i = F^i(t, x, u, u_x, ..., u_x^{(k_i)}), \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{4.4}$$

t ve x bağımsız değişkenler olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de tanımlı olsun. Burada F^i fonksiyonu değişkenlere karşılık gelen düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca u_t^i ve $u_x^{(j)}$ kısmi türevleri aşağıdaki gibidir

$$u_t^i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{ve} \quad u_x^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial^j u_1}{\partial x^j}, \frac{\partial^j u_2}{\partial x^j}, ..., \frac{\partial^j u_m}{\partial x^j} \right), \qquad j = 1, 2, ..., k_i. \tag{4.5}$$

Bilindiği gibi, değişmezlik şartını uygulayabilmek için gerekli olan manifold ($M = \{S_1 = 0, S_2 = 0, ..., S_m = 0\}$) şeklindedir ve

$$S_i = u_t^i - F^i(t, x, u, u_x, ..., u_x^{(k_i)}) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.6}$$

fonksiyonu, değişkenleri $t, x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{k}{u}$ uzanımlar uzayındadır. Burada $k = \max\{k_i = 1, ..., m\}$ ve $\underset{j}{u}; (j = 1, 2, ..., k)$ t ve x değişkenlerine göre j. mertebeden total türevdir.

Ayrıca, sonsuz küçük operatör

$$Q \equiv \xi^0(t, x, u)\partial_t + \xi^1(t, x, u)\partial_x + \eta^{(1)}(t, x, u)\partial_{u_1} + ... + \eta^{(m)}(t, x, u)\partial_{u_m} \tag{4.7}$$

şeklindedir. Daha önceden bahsedildiği gibi (4.6) denklemi sonsuz küçük operatör altında değişmezdir. değişmezlik şartı bu denklem sistemine uygulanırsa

$$Q_k \ S_i \equiv Q_k \ (u_t^i - F^i(t, x, u, u_x, ..., u_x^{(k_i)}))|_M = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{4.8}$$

olur. Burada Q_k operatörü Q operatörünün k. uzanımı olup katsayıları uzanım formülleri aracılığı ile hesaplanır.

Örnek olarak Q_2 operatörü

$$Q_2 \equiv Q + \eta_t^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{xx}^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + ...$$

şeklindedir.

Tanım 4.3: (4.6) formundaki sistemler için

$$Q_k \ S_i \equiv Q_k \ (u_t^i - F^i(t, x, u, u_x, ..., u_x^{(k_i)}))|_{M_1} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \tag{4.9}$$

değişmezlik şartı sağlanırsa, (4.8) operatörüne *1. tip $Q-$koşullu simetri* adı verilir, burada M_1 manifoldu, i_1 sabit ve i_1, $1 \le i_1 \le m$ olmak üzere $\{S_1 = 0, \ S_2 = 0, ..., \ S_m = 0, \ Q\,[u_{i_1}] = 0\}$ şeklindedir (Chernia, 2010).

Tanım 4.4: (4.6) formundaki sistemler için

$$Q_k \ S_i \equiv \ Q_k \ (u_t^i - F^i(t, x, u, u_x, ..., u_x^{(k_i)}))|_{M_p} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \qquad (4.10)$$

değişmezlik şartı sağlanırsa, (4.8) operatörüne *p. tip* $Q-$*koşullu simetri* adı verilir, burada M_p manifoldu $i_{1,...,} \ i_p$ sabit ve $i_{1,...,} \ i_p$, $1 \leq p \leq i_1 \leq m$ olmak üzere $\{S_1 = 0, \ S_2 = 0, ..., \ S_m = 0, \ Q[u_{i_1}] = 0, ..., \ Q\left[u_{i_p}\right] = 0\}$ şeklindedir (Chernia, 2010).

Tanım 4.5: (4.6) formundaki sistemler için

$$Q_k \ S_i \equiv Q_k \ (u_t^i - F^i(t, x, u, u_x, ..., u_x^{(k_i)}))|_{M_m} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \qquad (4.11)$$

değişmezlik şartı sağlanırsa, (4.8) operatörüne $Q-$*koşullu simetri (klasik olmayan simetri)* adı verilir, burada M_m manifoldu, $\{S_1 = 0, S_2 = 0, ..., S_m = 0, \ Q[u_1] = 0, ..., Q[u_m] = 0\}$ şeklindedir (Chernia, 2010)..

Bundan sonraki işlemlerde, işlem kolaylığı açısından, sonsuz küçük üreteçleri $\xi^0 = \tau$ ve $\xi^1 = \xi$ şeklinde kullanılacaktır. $Q[u] = 0$ olması $\tau u_t + \xi u_x = \eta$ olmasına karşılık gelirken, diğerleride benzer olarak yazılır.

Açıkça görülür ki $m = 1$ durumunda yukardaki tanımlar örtüşür ve tek oluşum denklemine karşılık gelir. Eğer $m > 1$ ise koşullu simetri operatörlerinin hiyeraşisi elde edilir. Kolayca görülebilir ki; $M_m \subset M_p \subset M_1 \subset M$ olur bu durum ilerde bir örnek ile daha ayrıntılı olarak gösterilecektir. 1. tip $Q-$koşullu simetri operatörü, p. tip $Q-$ koşullu simetri operatörü olurken, herbir Lie simetri operatörü otomatik olarak 1.tip ve p. tip $Q-$koşullu simetri operatörü olur.

Bir denklemin Q-koşullu simetrileri bulunur iken izlenecek algoritma: Algoritmanın ilk adımı; verilen kısmi diferensiyel denklem sistemi için araştırılmak istenen manifold üzerinde değişmezlik şartı uygulanır. İkinci adımda ise, değişmezlik şartı uygulandığında karşılaşılan ρ_t, ρ_x ve σ_{xx} gibi uzanımlar, oluşan yeni denklem sisteminde yerlerine yazılır. Algoritmanın üçüncü adımında, oluşan denklem u_x'in kuvvetlerine göre düzenlenir ve bu kuvvetlere karşılık gelen katsayıların herbiri sıfıra eşitlenerek lineer ve lineer olmayan denklemlerden oluşan denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemine *belirleyici denklem sistemi* denir. Algoritmanın son adımında ise belirleyici denklem sisteminin çözümleri bulunarak $Q-$koşullu simetri operatörleri elde edilir. Yukarıdaki algoritmayı bazı kısmi diferensiyel denklemlerin $Q-$koşullu simetri operatörlerini bulmak için kullanılmıştır. Literatürdeki çalışmalar genellikle reaksiyon difüzyon denklemleri ve difüzyon konveksiyon denklemleri için yapılmıştır ve burada algoritmanın uygulaması örnekler ile incelenmiştir. Ayrıca, bu algoritmayı, biz uygulamalı matematiğin önemli denklemlerinden olan Kolmogorav Petrovski, Bond Princing ve Dispersive Long denklemleri için uygulanmıştır.

4.2 Sabit Katsayılı Kısmi Diferensiyel Denklemler için Q-Koşullu Simetriler

Örnek 4.1: Sabit katsayılı bir kısmi diferensiyel denklem olan Burger denkleminin (Samokhin, 2014) $Q-$koşullu simetrilerini bulunacaktır.

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x \tag{4.12}$$

Burger denklemi için M_1 manifoldu $M_1 = \{S = 0,\ Q[u] = 0\}$ şeklinde seçilir ve burada S denklemi

$$S \equiv (u_t - u_{xx} - \lambda u u_x = 0) \tag{4.13}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca $Q\,[u] = 0$ şartında genelliği bozmaksızın $\tau = 1$ alındığında

$$u_t + \xi u_x = \eta \tag{4.14}$$

elde edilir. u_t ifadesi $\xi,\ u_x$ve η cinsinden S denkleminde yerine yazılır. 2. mertebeden olan bu diferensiyel denkleme Q_2 operatörü uygulanır

$$Q_2 S|_{M_1} \equiv Q_2(\eta - \xi u_x - u_{xx} - \lambda u u_x = 0)|_{M_1} \equiv 0. \tag{4.15}$$

ve bu denklem açık formda yeniden yazıldığında

$$\eta_t + \xi\eta_x + \eta\eta_u - \xi\eta_x^{(1)} - u_x(\xi_t + \xi\xi_x + \eta\xi_u) - \eta_{xx}^{(2)} - \lambda\eta u_x - \lambda u\eta_x^{(1)} = 0 \tag{4.16}$$

ifadesi elde edilir.

(3.36) ve (3.37) deki uzanım formüllerinde sonsuz küçükler $\xi^1 = \tau = 1$ ve $\xi^2 = \xi$ şeklinde seçilerek yazıldığında

$$\begin{aligned}
\eta_t^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial u} u_t - \frac{\partial \xi}{\partial t} u_x - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_t u_x \\
\eta_x^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial u} u_t - \frac{\partial \xi}{\partial t} u_x - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_t u_x
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{tt}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial u} u_t - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} u_x + \frac{\partial \eta}{\partial u} u_{tt} - 2\frac{\partial \xi}{\partial t} u_{tx} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial u} u_t u_x \\
&\quad + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} (u_1)^2 - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_x u_{tt} - 2\frac{\partial \xi}{\partial u} u_t u_{tx} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} (u_t)^2 u_x \\
\eta_{xt}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x}\right] u_2 + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} u_t + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] u_{tx} - 2\frac{\partial \xi}{\partial u} u_x u_{tx} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u}\right] u_t u_x - \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial u} + u_t \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\right] (u_x)^2 - \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_t \frac{\partial \xi}{\partial u}\right] u_{xx} \\
\eta_{xx}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right] u_x + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] u_{xx} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u}\right] (u_x)^2 - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial u^2} (u_x)^3 - 3\frac{\partial \xi}{\partial u} u_x u_{xx}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ifadeleri elde edilir. S denkleminden elde edilen ve u_{xx} ifadesinin eşiti (4.16) denkleminde yazılır. Oluşan denklemde $u_x^0,\ u_x^1,\ u_x^2$ ve u_x^3 terimlerinin herbirinin katsayısı 0 a eşitlenir ve böylece aşağıdaki belirleyici denklem sistemi oluşur.

$$\begin{aligned}
&\xi_{uu} = 0 \\
&2\xi\xi_u - 2\xi_{xu} + \eta_{uu} + 2\lambda u \xi_u = 0 \\
&2\xi\xi_x - 2\eta\xi_u + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} + \lambda\eta + \xi_t + \lambda u \xi_x = 0 \\
&\eta_{xx} - \eta_t - 2\eta\xi_x + \lambda u \eta_x = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Bu belirleyici denklem sisteminin ilk denkleminden ξ sonsuz küçüğü $a(x,t)$ ve $b(x,t)$ fonksiyonları keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\xi = a(x,t)u + b(x,t) \tag{4.20}$$

şeklindedir. Elde edilen bu ifade belirleyici denklem sisteminin 2. denkleminde yazılır ve denklem düzenlendiğinde

$$-u(2a^2(x,t) + 2\lambda a(x,t)) - 2b(x,t)a(x,t) + 2a(x,t)_x = \eta_{uu} \tag{4.21}$$

bulunur. Basitlik olması için,

$$A = -(2a^2(x,t) + 2\lambda a(x,t)) \tag{4.22}$$

$$B = 2a(x,t)_x - 2b(x,t)a(x,t). \tag{4.23}$$

olmak üzere A ve B kısaltmaları yapılarak, (4.21) denkleminin $c = c(x,t)$ ve $d = d(x,t)$ integral sabitleri olmak üzere çözümü

$$\begin{aligned} \eta_u &= A\frac{u^2}{2} + Bu + c \\ \eta &= A\frac{u^3}{6} + B\frac{u^2}{2} + cu + d. \end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklindedir.

η ve ξ sonsuz küçükleri için bulunan sonuçlar, (4.19) ile verilen belirleyici denklem sistemindeki 3.denklemde yerine yazılır. Oluşan denklemde u'nun kuvvetlerine göre düzenlenerek çözüm araştırılır. Bir takım hesaplamalardan sonra $a(x,t) = 0$ değeri bulunur. Dolayısıyla A ve B fonksiyonları $a(x,t)$ fonksiyonunu içerdiği için $A(x,t) = 0$, $B(x,t) = 0$ olur ve

$$\begin{aligned} b(x,t)_x &= -c \\ b(x,t) &= -\int c(x,t)dx \end{aligned} \tag{4.25}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca,

$$2b(x,t)c(x,t) - 3c(x,t)_x - \lambda d(x,t) - b(x,t)_t = 0 \tag{4.26}$$

denklemi elde edilir. Bulunan cebirsel ifadeler, son belirleyici denklemde yazılarak u'nun derecelerine göre katsayılar tekrar 0'a eşitlenir ve yeni bir denklem sistemi

$$\begin{aligned} c(x,t)_x &= 0 \\ c(x,t)_t + 2b(x,t)_x c(x,t) - \lambda d(x,t)_x &= 0 \\ -d(x,t)_{xx} + d(x,t)_t + 2d(x,t)b(x,t)_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) sistemindeki son denklemde $d = 0$ sınırlaması yapılırsa (4.27) sistemindeki ikinci denklemden

$$c(x,t)_t = -2b(x,t)_x c(x,t) \tag{4.28}$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede $b(x,t)_x$ in (4.25) denklemindeki eşiti yazılır ise,

$$c(x,t)_t = 2c(x,t)^2 \tag{4.29}$$

ifadesi elde edilir. $c(x,t)$ fonksiyonun çözümü için, her iki taraf t ye göre integre edildiğinde

$$c(x,t) = -\frac{1}{2t}\ , \qquad\qquad b(x,t) = -\frac{x}{2t} \tag{4.30}$$

bulunur. Sonuç olarak, (4.20) ve (4.24) denklemlerinden, sonsuz küçükler

$$\xi = \frac{x}{2t}\ , \quad \eta = -\frac{u}{2t} \tag{4.31}$$

olarak bulunur. Bulunan değerlere karşılık yazılan üreteç klasik Lie simetrilerinde bulunan üreteçlerden biridir, aynı zamanda bu üreteç $Q-$koşullu simetri üretecidir

$$Q = \frac{x}{2}\partial x + t\partial t - \frac{u}{2}\partial u. \tag{4.32}$$

Örnek 4.2: Bölüm 3 de klasik Lie simetrileri bulunan Burger denkleminin (San, 2011) $Q-$koşullu simetrilerini bulunarak karşılaştırma yapılacaktır.

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 \tag{4.33}$$

şeklindeki Burger denkleminin $Q[u] = 0$ şartı ile Q_2 operatörü altında değişmezdir. değişmezlik şartı uygulandıktan sonra elde edilen denklemde u_{xx} yerine $\eta - \xi u_x - u_x^2$ yazıldığında ve u_x terimlerinin derecelerine göre düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
&\xi_{uu} - \xi_u = 0\\
&2\xi_{xu} - 2\xi\xi_u - \eta_u - \eta_{uu} = 0\\
&\xi_{xx} + 4\xi_u\eta - 2\eta_{xu} - 2\xi\xi_x - 2\eta_x + \xi_t = 0\\
&-\eta_{xx} + \eta_t + 2\xi_x\eta = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

belirleyici denklemleri elde edilir.

Bu belirleyici denklemler, (3.42) de verilen belirleyici denklemlerden sayıca daha azdır. Ayrıca bu denklemlere bakıldığında klasik Lie simetrilerini bulmak için elde edilen denklemler lineer iken, Q- koşullu simetrilerini bulmak için elde edilen denklemlerden bazıları lineer değildir.

Bu belirleyici denklem sistemindeki ilk denkleme göre

$$\xi = a(t,x)e^u + b(t,x)$$

olur. Buna göre diğer üç denklem yeniden yazıldığında

$$\begin{aligned}
&2a_x - 2(ae^u + b)ae^u - \eta_u - \eta_{uu} = 0\\
&(a_{xx}e^u + b_{xx}) + 4ae^u\eta - 2\eta_{xu} - 2(a_xe^u + b_x)(ae^u + b) - 2\eta_x + (a_te^u + b_t) = 0\\
&-\eta_{xx} + \eta_t + 2(a_xe^u + b_x)\eta = 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi bu denklemerin çözümlerini doğrudan bulmak çok zordur. Bu üç denklemi sağlayan sonsuz küçükler için sonsuz küçük üreteç

$$Q = \partial t + (ae^u + b)\partial x + \eta\partial u.$$

şeklindedir. Bu denklem için 6 tane Lie simetrisi bulunabilirken, çok daha fazla koşullu simetrisi bulunur. Genelliği bozmaksızın $\tau = 1$ alındığı için bulunan üreteçler X_1, X_3 ve X_5 ile farklı olur. X_4 üretecindeki sonsuz küçükler $\xi = \frac{x}{2t}$ ve $\eta = 0$ şeklinde yazılır ve (4.34) denklemlerinde yerine yazıldığında denklemleri sağladığı görülür yani (4.34) sisteminin çözümlerinden biridir. O halde X_4 üreteci aynı zamanda koşullu simetri üreteçlerinden biridir. X_6 üretecindeki sonsuz küçüklerde benzer şekilde yazıldığında ise (4.34) sisteminin denklemlerinden bazılarını sağlamadığı görülür. Bu X_6 üretecinin $Q-$koşullu simetri yöntemi ile bulunamayacağı anlamına gelir.

Bu denklem için kısıtlar koyarak üreteçler bulmak mümkündür. Bu yüzden varsayalım ki $\eta_u = 0$ olsun. Bu durumda (4.35) denklem sistemindeki ilk denklemden $a(t,x) = 0$ bulunur. Böylece, 2. ve 3. denklemlerden

$$b_{xx} - 2b_x b - 2\eta_x + b_t = 0$$
$$-\eta_{xx} + \eta_t + 2b_x\eta = 0$$

bulunur. Burada yine bir varsayımla ($b_x = 0$) devam edildiğinde

$$2\eta_x = b_t$$
$$\eta_t = 0$$

olarak bulunur ve bu denklemler çözüldüğünde sonsuz küçükler

$$\xi = 2\alpha t, \qquad \eta = \alpha x$$

olur ve üreteç

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha t\frac{\partial}{\partial x} + \alpha x\frac{\partial}{\partial u}.$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak, bazı üreteçlerin klasik Lie simetrileri ile aynı olduğu görülürken bazılarının farklı olduğu görülmüştür.

Örnek 4.3: Bu örnekte u ya bağlı sabit katsayılı bir kısmi diferensiyel denklemin $Q-$koşullu simetrileri araştırılmıştır.

$$u_{xx} = F_0(u)u_t + F_1(u)u_x + F_2(u) \tag{4.36}$$

$F_0(u)$, $F_1(u)$ ve $F_2(u)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere lineer olmayan difüzyon denkleminin özel bir hali incelenmiştir (Chernia and Serov, 1997).

$$S \equiv (u_{xx} - F_0(u)u_t - F_1(u)u_x - F_2(u) = 0) \tag{4.37}$$

olmak üzere ve $Q\left[u\right] = 0$ koşulu ile M_1 manifoldu üzerinde bu kısmi diferensiyel denklemin Q$-$koşullu simetri operatörünü bulmak için $Q_2S|_{M_1} = 0$ değişmezlik koşulu uygulanmıştır.

$$Q_2S|_{M_1} = Q_2(u_{xx} - F_0(u)(\eta - \xi u_x) - F_1(u)u_x - F_2(u) = 0) = 0 \tag{4.38}$$

(4.38) eşitliğinin açık formu

$$\begin{aligned} \eta^2_{xx} &= F_0^{'}(u)\eta(\eta - \xi u_x) + F_0(u)(\eta_x\xi + \eta_t + \eta_u\eta - \\ &\quad -(\xi_x\xi + \xi_t + \xi_u\eta)u_x - \xi\eta^1_{xx}) + F_1^{'}(u)\eta u_x + F_1(u)\eta_x^{'} + F_2^{'}(u)\eta \end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklindedir. Önceki örneklerde yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak bu kısmi diferensiyel denklemin belirleyici denklem sistemi

$$\begin{aligned} &\xi_{uu} = 0 \\ &\eta_{uu} - 2\xi_u(F_1 - \xi F_0) - 2\xi_{xu} = 0 \\ &\eta(F_1 - \xi F_0)_u - (\xi_t + 2\xi\xi_x - 3\xi_u\eta)F_0 + \xi_x F_1 + 3\xi_u F_2 - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} = 0 \\ &\eta(\eta F_0 + F_2)_u - (2\xi_x - \eta_u)(\eta F_0 + F_2) + \eta_t F_0 + \eta_x F_1 - \eta_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

olarak elde edilir. Lineer ve lineer olmayan denklemlerden oluşan sistemin çözümü yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} \xi &= u + \lambda_4 \\ \eta &= P_3(u) \\ F_1 &= (u + \lambda_4)F_0 + 3\lambda_3 u + \lambda_2 \\ F_2 &= -P_3(u)(F_0 + \lambda_3) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir, burada

$$P_3(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 \;, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

ve $F_0(u)$ keyfi düzgün fonksiyondur. Bulunan sonsuz küçüklerle üreteç

$$Q = (u + \lambda_4)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + P_3(u)\frac{\partial}{\partial u}$$

olarak yazılır. $\tau = 0$ ve genelliği bozmaksızın $\xi = 1$ alındığında belirleyici denklem

$$\eta(\eta_x + \eta\eta_u - \eta F_1 - F_2)\ F_0^{\cdot} = (\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu} - \eta^2 F_1^{\cdot} - \eta F_2^{\cdot} + \eta_u F_2)F_0 + \eta + \eta_t F_0^2$$

şeklindedir. Bu belirleyici denklem çözüldüğünde

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{t}H(u) \\ F_0 &= \lambda_0\ H \\ F_1 &= \lambda_1\ H^{\cdot} + \lambda_0 H^{\cdot} \int \frac{du}{H(u)} \\ F_2 &= \lambda_2\ H H^{\cdot} \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir ve burada $H = H(u)$ keyfi düzgün fonksiyon olup bulunan üreteç aşağıdaki gibidir.

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{t}H(u)\frac{\partial}{\partial u}$$

Örnek 4.4: Lineer olmayan reaksiyon-difüzyon iletim denklemi (RD)

$$u_t = [A(u)u_x]_x + B(u)u_x + C(u)$$

şeklinde olup burada $A(u)$, $B(u)$ ve $C(u)$ düzgün fonksiyonlardır ve $u = u(t,x)$ dır. Bu denklemde bazı sınırlamalar yapılarak elde edilen

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + C(u), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.41}$$

denklemin $Q-$koşullu simetrileri incelenecektir (Chernia, 2007).

(4.41) denklemi,

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u \tag{4.42}$$

operatörü altında değişmezdir. değişmezlik şartı, denkleme uygulanmadan önce $u_t = \eta - \xi u_x$ eşitliği denklemde yazılır ve daha sonra bu şart uygulanır. Bulunan denklemde u_{xx} yerine (4.42) denkleminden ve $Q(u) = 0$ kısıtından elde edilen $u_{xx} =$

$\eta - \xi u_x - \lambda u_x - C(u)$ eşiti yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&\xi_{uu} = 0\\
&2\xi\xi_u - 2\xi_{xu} + \eta_{uu} + 2\lambda u\xi_u = 0\\
&2\xi\xi_x - 2\eta\xi_u + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} + \lambda\eta + \xi_t + \lambda u\xi_x + 3\xi_u C(u) = 0\\
&\eta_{xx} - \eta_t - 2\eta\xi_x + \lambda u\eta_x - \eta\eta_u - \eta C'(u) - 2\xi_x C(u) + \eta_u C(u) = 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

belirleyici denklem sistemi elde edilir. Bu belirleyici denklem sisteminin ilk denkleminden

$$\xi = a(t,x)u + b(t,x) \tag{4.44}$$

elde edilir. ξ sonsuz küçüğünün eşiti, (4.43) denklem sistemindeki ikinci denklemde yerine yazılır ve bu diferensiyel denklem çözüldüğünde

$$\eta = -\frac{1}{3}a(a+\lambda)u^3 + (a_x - ab)u^2 + d(t,x)u + e(t,x) \tag{4.45}$$

bulunur. Burada $a(t,x)$, $b(t,x)$, $d(t,x)$ ve $e(t,x)$ keyfi düzgün fonksiyonlardır. Burada $a(t,x)$ fonksiyonu için iki farklı durum söz konusudur. Bu durumlar sırası ile incelenecektir.

• $a \neq 0 \Longrightarrow \eta$ sonsuz küçüğü (4.43) eşitliğindeki 3. denklemde yerine yazıldığında; $C(u)$ fonksiyonunu u 'ya göre maksimum kübik (3. dereceden denklem) olabileceği görülmektedir, yani;

$$C(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 \tag{4.46}$$

şeklindedir, burada λ_i ,$i = 0,...3$ sabitleri $a(t,x)$, $b(t,x)$, $d(t,x)$ ve $e(t,x)$ fonksiyonları tarafından belirlenir. Eğer $\lambda_3 \neq 0$ iken elde edilen bilgiler ile belirleyici denklem sistemindeki 3. denklem düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
&2a^2 + a\lambda - 9\lambda_3 - \lambda^2 = 0,\\
&b(\lambda - 2a) = 3\lambda_2,\\
&d(\lambda - 2a) = -3a\lambda_1,\\
&e(\lambda - 2a) = -3a\lambda_0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

ilişkileri elde edilir. Eğer $\lambda_3 = 0$ ise (4.47) ile verilen ilişkilerdeki ilk denklemden $a = -\lambda$ yada $a = \frac{1}{2}\lambda$ olarak bulunur. $a = -\lambda$ değeri (4.47) denklem sisteminde yerine yazıldığında

$$\lambda_0 = -e, \qquad \lambda_1 = -d, \qquad \lambda_2 = \lambda b,$$

bulunur. Böylece, RDC denklemi

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + +\lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2$$

formunda iken sonsuz küçükler

$$\xi = -\lambda u + \tfrac{\lambda_2}{\lambda}$$
$$\eta = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2$$

ve sonsuz küçük üreteç

$$Q \equiv \partial t + \left(-\lambda u + \frac{\lambda_2}{\lambda}\right) \partial x + \left(\lambda_0 + \lambda_2 u^2\right) \partial u \tag{4.48}$$

olur.

Eğer $a = \frac{1}{2}\lambda$ ise (4.47) denklemlerinden $\lambda_2 = 0$ olması gerektiği görülür, bu yüzden $C(u)$ fonksiyonu lineerdir. Böylece reaksiyon difüzyon denklemi

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x \tag{4.49}$$

Burger denklemi olarak bilinen denkleme yada

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + \lambda_1 u \tag{4.50}$$

denklemine indirgenebilir. (4.49) denkleminde $a = \frac{1}{2}\lambda$ ve $C(u) = 0$ yerine yazıldığında $Q-$ koşullu simetrileri kolayca elde edilir. Belirleyici denklem sisteminde ξ ve η sonsuz küçükleri yerlerine yazılır. Bir takım hesaplamalar ve düzenlemelerle

$$\begin{aligned} a_t &= a_{xx} - 2aq_x \\ p_t &= b_{xx} - 2bq_x + \lambda a_x \\ q_t &= q_{xx} - 2qq_x - 2b_x \end{aligned} \tag{4.51}$$

elde edilen üçlü denklem sisteminin genel çözümü ile $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q = \partial t + \left(\frac{\lambda}{2}u + q\right) \partial_x + \left(a + bu - \frac{\lambda q}{2}u^2 - \frac{\lambda^2}{4}u^3\right) \partial_u \tag{4.52}$$

elde edilir. Benzer işlemler (4.50) denklemi için uygulanır ve sadece klasik Lie operatörleri elde edilir.

Eğer $\lambda_3 \neq 0$ ise (4.47) cebirsel denklem sistemi a, b, d ve e ye göre çözüldüğünde ve ξ ile η değerleri belirleyici denklem sisteminde yerine yazıldığında

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + +\lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 \tag{4.53}$$

formundaki RDC denkleminin

$$\begin{array}{c} \xi = pu - \frac{3\lambda_2}{2p-\lambda} \\ \eta = \frac{3p}{2p-\lambda}(\lambda_3 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0) \end{array} \tag{4.54}$$

genel çözümüne ulaşılır, burada p sabiti, $2p^2 + p\lambda + 9\lambda_3 - \lambda^2 = 0$ kuadratik denkleminin çözümüdür. O halde $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q = \partial t + \left(pu - \frac{3\lambda_2}{2p-\lambda}\right)\partial_x + \left(\frac{3p}{2p-\lambda}(\lambda_3 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0)\right)\partial_u \tag{4.55}$$

şeklindedir.

• $a = 0 \Longrightarrow$ (4.47) eşitliklerinin ilkinden $9\lambda_3 + \lambda^2 = 0$ ve $b\lambda = 3\lambda_2$ elde edilirken λ_0 ve λ_1 ile ilgili birşey söylenemez. Bu durumda $\lambda_0\lambda_1\lambda_3 = 0$ ve $\lambda_0\lambda_1\lambda_3 \neq 0$ durumlarını ayrı ayrı incelemek gerekir. $\lambda_0\lambda_1\lambda_3 = 0$ olduğu durumda sadece klasik Lie simetrileri üretilirken, $\lambda_0\lambda_1\lambda_3 \neq 0$ durumunda belirleyici denklemlerden

$$\begin{array}{l} \left(\frac{\lambda^2}{3\lambda_3} - 3\right) b_{xx} + 2bb_x + b_t = 0 \\ b_{xxx} - bb_{xx} + \lambda_1 b_x = 0 \\ \frac{\lambda^2}{3\lambda_3} b_{xxx} + b_x^2 + 3\lambda_1 b_x + \frac{\lambda_0\lambda_3}{\lambda} b = c_0 \end{array} \tag{4.56}$$

denklemleri elde edilir, burada $c_0 \in \mathbb{R}$ dir. Bu denklemlerin çözümü olan b(t,x) fonksiyonu yardımıyla elde edilen üreteç

$$Q = \partial t + b\partial_x + \left(\frac{\lambda}{\lambda_3} b_{xx} - b_x u\right)\partial_u \tag{4.57}$$

şeklindedir.

Örnek 4.5: Kolmogorov Petrovski denklemi

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-a), \qquad -1 \leq k \leq 1, \tag{4.58}$$

olarak bilinen bu denklemi $Q-$koşullu simetrileri araştıralım. Bu denklem 2. mertebeden olduğu için 2. uzanım altında ve $M = \{S = 0,\ Q\,[u] = 0\}$ manifoldu üzerinde değişmezdir. Bu denklem için elde edilen belirleyici denklemler

$$\begin{aligned}
&\xi_{uu}=0\\
&2\xi_{xu}-2\xi\xi_u-\eta_{uu}=0\\
&-3\xi_u u^2k+3\xi_u u^3-2\xi\xi_x-3\xi_u u^2-2\eta_{xu}+3\xi_u uk+2\eta\xi_u-\xi_t+\xi_{xx}=0\\
&-\eta_{xx}+\eta_t+\eta k-2\eta uk+3\eta u^2-2\xi_x u^2k+2\xi_x uk-\eta_u uk+\eta_u u^2k+2\xi_x\eta\\
&\qquad\qquad\qquad +2\xi_x u^3+\eta_u u^2-2\eta u-2\xi_x u^2-\eta_u u^3=0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

şeklindedir. Bu sistemin ilk iki denkleminden sonsuz küçükler

$$\begin{aligned}
&\xi=a(t,x)u+b(t,x)\\
&\eta=(a_x-ab)u^2-\tfrac{a^2}{3}u^3+c(t,x)u+d(t,x)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

bulunur. Sonsuz küçükler yardımıyla diğer (4.59) belirleyici denklem sistemindeki diğer iki denklem u değişkenin katsayılarına göre düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
&3a-\tfrac{2}{3}a^3=0\\
&-3ak-3a+2a(a_x-ab)+2aa_x=0\\
&2(ab_x+ba_x)+3ak-a_t+a_{xx}+2ac-4a_{xx}=0\\
&-2bb_x-b_t+b_{xx}+2ad-2c_x=0\\
&(a_x-ab)-\tfrac{a^2}{3}(2a_x-2k-2)-a^2(k+1)+2a_x=0\\
&\tfrac{2}{3}a_x^2+\tfrac{2}{3}aa_{xx}-\tfrac{2}{3}aa_t+(a_x-ab)2a_x-\tfrac{1}{3}(k+2b_x)+2c\\
&\qquad\qquad\qquad +a^2k-2a_xk+2b_x-2a_x=0\\
&-a_{xxx}+a_{xx}b+2a_xb_x+ab_{xx}+a_xt-a_tb-ab_t+(a_x-ab)\\
&\qquad\qquad (2b_x-k)-(2b_x+c)(k+1)+3d+2a_xk=0\\
&c_{xx}+c_t+2b_x(k+c)+2d(a_x-k-1)=0\\
&d_{xx}+d_t+d(k+2b_x)=0
\end{aligned} \tag{4.61}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Buradaki ilk denklemden iki farklı durum ((i) $a=0$ ve (ii) $a=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$) ortaya çıkar.

(i) durumu $a(t,x)=0$ değeri (4.61) sisteminde yerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
&-2bb_x - b_t + b_{xx} - 2c_x = 0\\
&-2c + 2b_x = 0\\
&-(2b_x + c)(k+1) + 3d = 0\\
&c_{xx} + c_t + 2b_x(k+c) - 2d(k+1) = 0\\
&d_{xx} + d_t + d(k+2b_x) = 0
\end{aligned}
$$

denklemlerine indirgenir. Burada genel çözümü bulabilmek için ilk olarak $k=-1$ durumunda çözüm yapılmıştır. Böylece 3. denklemden $d(t,x)=0$ bulunur iken 5. denklem yok olur. Ayrıca burada $b_t=0$ varsayımıyla devam edildiğinde 2. denklemden $c(t,x)=-b_x$ ve $c_t=0$ bulunur. Bilinenler yardımıyla denklemler çözüldüğünde

$$Q \equiv \partial t + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(1+e^{\sqrt{2}x})}{(1-e^{\sqrt{2}x})}\partial_x - 6\frac{e^{\sqrt{2}x}}{(1-e^{\sqrt{2}x})^2}u\partial u$$

üreteci bulunur. $k=1$ olarak seçildiğinde ise $d=2b_x$ olarak bulunur, bu durumda üreteç

$$Q \equiv \partial t + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(1+e^{\sqrt{2}x})}{(1-e^{\sqrt{2}x})}\partial_x - 6\frac{e^{\sqrt{2}x}}{(1-e^{\sqrt{2}x})^2}(u+2)\partial u$$

olarak bulunur.

(ii) durumu Eğer $a=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$ olarak alınır ve (4.61) sisteminde yazılırsa 2. denklemden $b(t,x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(k+1)$, 3. denklemden $c=-\frac{3}{2}k$ ve 4. denklemden ise $d=0$ değerleri bulunur. Böylece bu durumda $Q-$koşullu simetri üreteci

$$Q \equiv \partial t + \frac{1}{\sqrt{2}}(3u-a-1)\partial_x + \frac{3}{2}u(1-u)(u-a)\partial u$$

olarak bulunur.

Örnek 4.6: Reaksiyon difüzyon denkleminin özel bir hali olan

$$u_t = u_{xx} + B(u)u_x \tag{4.62}$$

denklemi için $Q-$ koşullu simetrileri araştırılmıştır. Burada $B(u)=\lambda_0+\lambda_1 u+\lambda_2 u^2$ olduğu durumda inceleme yapılmıştır. (4.62) 2. mertebeden diferensiyel denklem olduğu için 2. uzanım altında ve $M=\{S=0,\ Q[u]=0\}$ manifoldu üzerinde değişmezdir. değişmezlik şartı uygulandığında elde edilen belirleyici denklemler

$$
\begin{aligned}
&\xi_{uu} = 0\\
&-2\lambda_2\xi_u u^2 - 2\xi\xi_u + 2\xi_{xu} - \eta_{uu} - 2\lambda_1\xi_u u - 2\lambda_0\xi_u = 0\\
&-\lambda_1\xi_x u - 2\lambda_2\eta u - \lambda_0\xi_x - \lambda_2\xi_x u^2 - 2\xi\xi_x - \lambda_1\eta + 2\eta\xi_u - 2\eta_{xu} - \xi_t + \xi_{xx} = 0\\
&-\eta_{xx} + \eta_t - \lambda_1\eta_x u - \lambda_2\eta_x u^2 + 2\xi_x\eta - \lambda_0\eta_x = 0
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

şeklindedir. Bu denklem sistemindeki 1. ve 2. denklemden sonsuz küçükler

$$
\begin{aligned}
\xi &= a(t,x)u + b(t,x)\\
\eta &= -\tfrac{1}{6}a\lambda_2 u^4 - \tfrac{1}{3}a(\lambda_1 + a)u^3 - (ab + a\lambda_1 - a_x)u^2 + c(t,x)u + d(t,x)
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

bulunur. Bulunan sonsuz küçükler 3 denklemde yazıldığında ve u değişkeninin derecelerine göre düzenlendiğinde

$$\frac{1}{3}\lambda_2^2 a = 0$$

bulunur, yani $\lambda_3 \neq 0$ iken $a(t,x) = 0$ şeklindedir. Böylece diğer denklemler

$$
\begin{aligned}
\xi &= b(t,x)\\
\eta &= c(t,x)u + d(t,x)
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

sonsuz küçüklerine göre yeniden yazılılr ve düzenlenir ise

$$
\begin{aligned}
&b_x + 2c = 0\\
&-\lambda_2 b_x - 2\lambda_3 d - \lambda_2 c = 0\\
&-\lambda_0 b_x - 2bb_x - \lambda_1 d - b_t + b_{xx} - 2c_x = 0\\
&c_t + 2b_x c = 0\\
&d_t + 2b_x d = 0
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu sistemdeki 3. denklem hariç diğerlerinden

$$c = -\frac{1}{4(t+k(x))}, \qquad d = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\frac{1}{4(t+k(x))}, \qquad b_x = \frac{1}{2(t+k(x))}$$

bulunur. Böylece üretilen $Q-$koşullu simetri üreteci

$$Q \equiv \partial t + b\partial x - \left(\frac{u}{4(t+k(x))} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\frac{1}{4(t+k(x))}\right)\partial u$$

şeklindedir ve burada $b(x,t)$ fonksiyonu

$$-\lambda_0 b_x - 2bb_x + \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\lambda_3}b_x - b_t - b_{xx} = 0 \tag{4.67}$$

denklemini sağlamalıdır. Burada özel olarak $k(x) = \alpha$ (α *sabit*) seçildiğinde

$$b = \frac{x}{4(t+\alpha)} + \beta(t)$$

olarak bulunur ve (4.67) denklemi kullanılarak

$$-\left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\lambda_3}\right)\frac{1}{2(t+\alpha)} - 2\left(\frac{x}{4(t+\alpha)} + \beta(t)\right)\frac{1}{2(t+\alpha)} = \frac{x^2}{2(t+\alpha)^2} + \beta_t(t)$$

elde edilir. Bu adi diferensiyel denklem çözüldüğünde ise

$$\beta(t) = -\left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\lambda_3}\right)\frac{t}{2(t+\alpha)}$$

olarak bulunur. Böylece $Q-$ koşullu simetri üreteci

$$Q \equiv \partial t + \left(\frac{x}{4(t+\alpha)} - \left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\lambda_3}\right)\frac{t}{2(t+\alpha)}\right)\partial x - \left(\frac{u}{4(t+\alpha)} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\frac{1}{4(t+\alpha)}\right)\partial u$$

şeklindedir.

4.3 Değişken Katsayılı Kısmi Diferensiyel Denklemler için Q-Koşullu Simetriler

Örnek 4.7 Genelleştirilmiş Huxley denklemi olarak bilinen aşağıdaki denklemin klasik Lie simetrilerinden farklı olan $Q-$koşullu simetrileri bulunmuştur (Ivanova and Sophocleous, 2010).

$$u_t = u_{xx} + k(x)u^2(1-u) \tag{4.68}$$

$\tau \neq 0$ olduğu durumda genelliği bozmaksızın $\tau = 1$ olarak alınılabileceğinden bahsedilmişti, bu yüzden, (4.68) denklemi için aranan $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q = \partial t + \xi\partial x + \eta\partial u \tag{4.69}$$

formundadır.

Manifold üzerindeki $Q[u] = 0$ şartı ve $\tau = 1$ varsayımıyla $u_t = \eta - \xi u_x$ olarak yazılabilir. Böylece

$$\eta - \xi u_x - u_{xx} - k(x)u^2 + k(x)u^3 = 0 \tag{4.70}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, değişmezlik şartı altında

$$Q_{(2)}(\eta - \xi u_x - u_{xx} - k(x)u^2 + k(x)u^3) = 0 \tag{4.71}$$

yazılır ve (4.71) denkleminin açık formu

$$\begin{aligned}(\eta_t + \xi\eta_x + \eta\eta_u) - (\xi_t + \xi\xi_x + \eta\xi_u) - \xi\eta_x^{(1)} - \eta_{xx}^{(2)}&\\ -\xi k'(x)(1-u^2) - 2k(x)\eta u + 3k(x)\eta u^2 &= 0\end{aligned}$$

şeklindedir, buradaki $\eta_x^{(1)}$ ve $\eta_{xx}^{(2)}$ terimleri sırasıyla u_x ve u_{xx} terimlerinin uzanımlarıdır. Bu uzanımlar ($\tau = 1$ şartı altında) formüller yardımıyla hesaplanarak denklemde yerine konulduğunda ve u_x'in bir polinomu elde edilir. Bu polinom derecelerine göre düzenlendiğinde belirleyici denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}&\xi_{uu} = 0\\ &\eta_{uu} + 2\xi\xi_u - 2\xi_{xu} = 0\\ &\xi_t + 3k\xi_u u^2 - 3k\xi_u u^3 - \xi_{xx} + 2\xi\xi_x + \xi_{xx} - 2\eta\xi_u\\ &\qquad -k\eta_u u^2(1-u) + 2k\xi_x u^2(1-u) + \eta_{xx} - 2\xi_x\eta = 0\\ &3k\eta u^2 - \eta_t + k'\xi u^2(1-u) + 2k\eta u = 0\end{aligned} \tag{4.72}$$

şeklindedir. Bu denklem sistemi çözülerek $Q-$koşullu simetriler elde edilmiştir. (4.72) sisteminin ilk denklemin çözümü $\phi(x,t)$ ve $\psi(x,t)$ keyfi fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\xi_{uu} &= 0\\ \xi_u &= \phi(x,t)\\ \xi &= \phi(x,t)u + \psi(x,t)\end{aligned} \tag{4.73}$$

şeklinde bulunur. ξ fonksiyonu için bulunan eşitlik (4.72) sistemindeki 2.denklemde yerine yazıldığında

$$2(\phi u + \psi)\phi - \phi_x + \eta_{uu} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü ise

$$\begin{aligned}\eta_{uu} &= 2\phi_x - 2\phi^2 u - 2\phi\psi\\ \eta_u &= 2\phi_x u - \phi^2 u^2 - 2\phi\psi u + A(x,t)\\ \eta &= \phi_x u^2 - \tfrac{1}{3}\phi^2 u^3 - \phi\psi u^2 + A(x,t)u + B(x,t)\end{aligned} \tag{4.74}$$

şeklindedir. (4.72) sistemindeki diğer iki denklem, elde edilen η ve ξ fonksiyonlarının eşitlikleri yardımıyla yeniden yazılır ve u'nun kuvvetlerine göre düzenlendiğinde aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\phi^3 - 3k\phi = 0\\
&4\phi\phi_x - 2\phi^2\psi - 3k\phi = 0\\
&2\phi_x\psi - \phi_t + 2\phi\psi_x + 2\phi A - 3\phi_{xx} = 0\\
&2\psi\psi_x - 2\phi B + 2A_x - \psi_{xx} + \psi_t = 0\\
&k\phi\psi - \tfrac{2}{3}\phi^2\phi_x + \tfrac{1}{3}k\phi^2 - 3k\phi_x - k'\phi = 0\\
&2\psi_x B - B_{xx} + B_t = 0\\
&A_{xx} - 2\psi_x A - A_t - 2\phi_x B + 2kB = 0\\
&\phi_{xxx} - 2\phi_x A + 2\phi\psi\psi_x + kA - \phi_{xx}\psi - 4\phi_x\psi_x\\
&\qquad\qquad -\phi\psi_{xx} + 2k\psi_x - \phi_{tx} + \phi\psi_t + \phi_t\psi - 3kB \quad = \quad 0\\
&\tfrac{2}{3}\phi^2\psi_x - \tfrac{2}{3}\phi\phi_{xx} + \tfrac{2}{3}\phi\phi_t - \tfrac{8}{3}\phi_x^2 - 2k\psi_x\\
&\qquad\qquad -2kA + 2\phi\phi_x\psi + 2k\phi_x + k'\phi - k'\psi \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

Bu belirleyici denklem sistemi incelendiğinde ilk denklemden iki farklı durum ortaya çıktığı kolaylıkla görülür. Bunlar $\phi = 0$ veya $\phi_t = 0,\ k = \frac{2}{9}\phi^2$ durumlarıdır.

1.Durum: $\phi(t,x) = 0 \Longrightarrow$ (4.75) sistemi

$$
\begin{aligned}
&2A_x - \psi_{xx} + 2\psi\psi_x + \psi_t = 0\\
&-2k\psi_x - 2kA - \psi k_x = 0\\
&2k\psi_x + kA + k_x\psi - 3kB = 0\\
&A_{xx} - 2A\psi_x + 2kB - A_t = 0\\
&B_{xx} - 2B\psi_x - B_t = 0
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

denklem sistemine indirgenir. (4.76) denklem sistemindeki 2. ve 3.denklemlerden $A = -3B$ olarak bulunur ve bu eşitlik elde edilen sistemde yerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
&2\psi\psi_x - 6B_x - \psi_{xx} + \psi_t = 0\\
&k_x\psi + 2k\psi_x - 6kB = 0\\
&-3B_{xx} - 2B\psi_x + 2kB + 3B_t = 0\\
&B_{xx} - 2B\psi_x - B_t = 0
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

sistemine dönüşür. Bu denklem sisteminin son iki denkleminden $B = 0$ bulunur ve

B' nin değeri son denklem sisteminde yerine yazıldığında denklem sistemi,

$$\begin{aligned} 2\psi\psi_x - \psi_{xx} + \psi_t &= 0 \\ k_x\psi + 2k\psi_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.78}$$

sistemine indirgenir. Bu diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü yapılır ise;

- Eğer $k = c\ (sbt.) \Longrightarrow \psi = sabit$

Bu durumda klasik Lie simetrilerindeki üreteçler ile aynı üreteçler bulunur.

- Eğer $\psi_t = 0 \Longrightarrow k_x\psi + 2k\psi_x = 0 \Longrightarrow k = \frac{c}{\psi^2}$ ve $\psi^2 = \psi' + a$ elde edilir.

Burada ψ fonksiyonu özel olarak bu şartı sağlayacak şekilde $\psi = \frac{-1}{x}$ ve $a = 0$ olarak seçildiğinde $\xi = \frac{-1}{x}$ ve $\eta = 0$ bulunur ve böylece $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q \equiv \partial_t - \frac{1}{x}\partial_x$$

olarak bulunur. Ayrıca, ψ fonksiyonu, sırasıyla $-\cot x,\ -\coth x$ ve $-\tanh x$ olarak seçilirse sırasıyla

$$Q \equiv \partial_t - \cot x\partial_x$$

$$Q \equiv \partial_t - \coth x\partial_x$$

$$Q \equiv \partial_t - \tanh x\partial_x$$

$Q-$koşullu simetri üreteçleri bulunur.

- Eğer $\psi_{xx} = 0 \Longrightarrow k = \frac{c}{(ax+b)^2}$ ve $\psi = \frac{ax+b}{2at+m}$.

Bu durumdaki $Q-$ koşullu simetriler, klasik Lie simetrileri ile aynıdır.

2.Durum: $\phi_t = 0,\ k = \frac{2}{9}\phi^2 \Longrightarrow$ (4.75) denklem sisteminde ϕ ve k fonksiyonlarının yerine eşitlikleri yazıldığında (4.75) sisteminden

$$\psi_t = A_t = B_t = 0$$

değerleri ve aşağıdaki denklem sistemi bulunur

$$
\begin{aligned}
&-4\phi_x + 2\phi\psi + \tfrac{2}{3}\phi^2 = 0\\
&-2\phi_x\psi - 2\phi\psi_x - 2\phi A + 3\phi_{xx} = 0\\
&2\psi_x\psi - 2\phi B + 2A_x - \psi_{xx} = 0\\
&\tfrac{\mathbf{2}}{9}\phi^2\psi_x - \tfrac{\mathbf{2}}{3}\phi\phi_{xx} - \tfrac{\mathbf{8}}{3}\phi_x^2 - \tfrac{\mathbf{4}}{9}\phi^2 A + \tfrac{\mathbf{14}}{9}\phi\psi\phi_x + \tfrac{\mathbf{8}}{9}\phi^2\phi_x = 0\\
&\phi_{xxx} + \tfrac{4}{9}\phi^2\psi_x - \tfrac{2}{3}\phi^2 B + \tfrac{2}{9}\phi^2 A - \phi\psi_{xx} - \phi_{xx}\psi\\
&\quad -4\phi_x\psi_x - 2\phi_x A + 2\phi\psi\psi_x + \tfrac{4}{9}\phi_x\phi\psi - \phi\psi_t = 0\\
&A_{xx} - 2\psi_x A + \tfrac{4}{9}\phi^2 B - 2\phi_x B - A_t = 0\\
&B_{xx} - 2\psi_x B - B_t = 0.
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

(4.79) denklem sistemindeki 1., 2. ve 6. denklemlerinden eşitlikler

$$
B = \frac{9(2\psi_x A - A_{xx})}{2(2\phi^2 - 9\phi_x)}, \quad \psi = \frac{6\phi_x - \phi^2}{3\phi}, \quad A = \frac{4\phi\phi_x - 3\phi_{xx}}{6\phi} \tag{4.80}
$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla denklem sistemindeki denklemlerden

$$
-\eta_{xx} - 2\eta\eta_{xu} - \eta^2\eta_{uu} + k\eta_u u^2 - k\eta_u u^3 + \eta_t + k_x u^3 - k_x u^2 - 2k\eta u + 3k\eta u^2 = 0
$$

$$
3\phi_x^2 + \phi^2\phi_x = 0 \tag{4.81}
$$

denklemleri bulunur ve 2. denklemin genel çözümü

$$
\phi = c, \qquad \phi = \frac{3}{x+c}
$$

şeklindedir. $\phi = c$ durumunda $c > 0$ olmak üzere c sabiti c olarak seçildiğinde $k = \frac{2}{9}c^2$ olur. (4.73) ve (4.74) denklemlerinden sonsuz küçükler

$$
\begin{aligned}
\xi &= cu - \tfrac{c}{3}\\
\eta &= -\tfrac{c^2}{3}u^2(u-1)
\end{aligned}
$$

bulunur ve sonsuz küçük üreteç

$$
Q \equiv \partial_t + \frac{c}{3}(3u-1)\partial_x - \frac{c^2}{3}u^2(u-1)\partial_u
$$

olarak yazılır. Eğer $\phi = \frac{3}{x}$ olarak seçilirse $k = \frac{2}{x^2}$ olur ve bu durumda sonsuz küçükler

$$
\begin{aligned}
\xi &= \tfrac{3}{x}u - \tfrac{3}{x}\\
\eta &= -\tfrac{3}{x^2}u^2 - \tfrac{3}{x^2}u
\end{aligned}
$$

ve sonsuz küçük üreteç

$$Q \equiv \partial_t + \frac{3}{x}(u-1)\partial_x - \frac{3}{x^2}u(u-1)\partial_u$$

olarak bulunur.

Böylece, Huxley denklemi için standart Lie simetrilerinden farklı olarak altı tane $Q-$koşullu simetri bulunmuştur. $k(x)$ fonksiyonuna uygun olacak şekilde benzer elementer fonksiyonlar yazılabilir, burada sadece birkaç tanesinden bahsedilmiştir.

Örnek 4.8: Örnek 4.3 de bahsedilen Huxley denkleminin $Q-$ koşullu simetrileri araştırılır iken $\tau = 1$ olarak seçilmişti. Şimdi de $\tau = 0$ iken $Q-$koşullu simetrileri araştırılmıştır. $\tau = 0$ olarak seçildiği için aranan $Q-$ koşullu simetri operatörü

$$Q \equiv \partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$$

şeklindedir ($\xi = 1$ iken). değişmez yüzey şartı $u_x = \eta$ olur iken $u_{xx} = \eta_x + \eta\eta_u$ olur. Bu eşitlikler Huxley denkleminde yerine yazıldığında

$$u_t = \eta_x + \eta\eta_u + k(x)u^2(1-u)$$

ifadesi elde edilir. Bu denkleme değişmezlik şartı uygulandığında ve uygun uzanımlar denklemde yerine yazıldığında

$$-\eta_{xx} - 2\eta\eta_{xu} - \eta^2\eta_{uu} + k\eta_u u^2 - k\eta_u u^3 + \eta_t + k_x u^3 - k_x u^2 - 2k\eta u + 3k\eta u^2 = 0 \quad (4.82)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem incelendiğinde η sonsuz küçüğünün u'ya göre polinom fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu yüzden η fonksiyonu

$$\eta(t,x,u) = \sum_{p=-m}^{n} \phi_p(x,t)u^p$$

şeklinde seçilebilir ve burada m ve n pozitif tamsayılar ve $\phi_p(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. Burada, özel olarak $m = 1$ ve $n = 2$ durumunu incelenmiştir ve aranan η fonksiyonu

$$\eta(t,x,u) = \phi_1(x,t)u + \phi_2(x,t)u^2$$

şeklindedir. $\eta(t,x,u)$ fonksiyonu (4.82) ile verilen belirleyici denklemde yerine yazıldığında ve u nun kuvvetlerine göre oluşturulan katsayılardan

$$\begin{aligned} &(\phi_2)_{xx}+4\phi_1(\phi_2)_x+2\phi_2(\phi_1)_x+6\phi_1^2\phi_2+4\phi_2(\phi_2)_x=0\\ &2\phi_2^3-k\phi_2=0\\ &(\phi_1)_{xx}+2\phi_1(\phi_1)_x=0 \end{aligned} \tag{4.83}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklem sistemindeki son denklemin birden fazla çözümü vardır, $\phi_1=-\tan x$; bu çözümlerden biridir. denklem sisteminin 2. denkleminden ise $k=2\phi_2^2$ olduğu bulunur. Böylece

$$\eta=\phi_2(x)u^2-\tan x\ u$$

iken buradaki ϕ_2 fonksiyonunun

$$(\phi_2)_{xx}-4\tan x\ \ (\phi_2)_x-2\phi_2-2\phi_2^2\tan x+4\phi_2\,(\phi_2)_x=0$$

şartını sağlaması gerekmektedir. Bu şartı sağlayan fonksiyonlardan biri $\phi_2=\tan x$ fonksiyonu olduğuna göre elde edilen koşullu simetri üreteci

$$Q\equiv\partial_x+(\tan x\ u^2-\tan x\ u)\partial_u$$

şeklindedir. Eğer $\phi_1=-\tanh x$ olarak seçilirse, benzer işlemler yapıldığında elde edilen üreteç

$$Q\equiv\partial_x+(-\tanh x\ u^2+\tanh x\ u)\partial_u$$

şeklindedir. Eğer $\phi_1=\frac{1}{x}$ olarak seçilir ise elde edilen üreteç

$$Q\equiv\partial_x+(-\frac{1}{x}u^2+\frac{1}{x}\ u)\partial_u$$

şeklindedir. (4.83) denklem sistemini sağlayacak şekilde seçilecek ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarına göre benzer $Q-$koşullu simetri üreteçleri elde edilir.

Örnek 4.9: Bond Princing denklemi

$$u_t=\lambda xu_{xx}+\mu u_x \tag{4.84}$$

şeklinde olup değişken katsayılı bir diferensiyel denklemdir. Bu ikinci mertebeden olan bu diferensiyel denklemin Q$[u]=0$ kısıtı ile 2.uzanım altında değişmezdir. O halde $Q[u] = 0$ şartı ile u_t yerine $\eta - \xi u_x$ yazılarak elde edilen yeni denklem 2. uzanımda yazılır. Elde edilen denklemde u_{xx} yerine

$$u_{xx} = \frac{\eta - \xi u_x - \mu u_x}{\lambda x}$$

eşiti yazılır. Daha sonra elde edilen bu denklemden u_x in derecelerine göre belirleyici

$$\begin{aligned}
&\lambda x \xi_{uu} = 0 \\
&2\lambda x \xi_{xu} + \mu \xi_u - \lambda x \eta_{uu} - 3\xi_u(\xi + \mu) + \xi \xi_u = 0 \\
&2\xi_u \eta - \xi \eta_u + (\xi + \mu)\eta_u - \xi_t - 2(\xi + \mu)\xi_x + \lambda x \xi_{xx} + \mu \xi_x + \tfrac{\xi(\xi+\mu)}{x} - 2\lambda x \eta_{xu} - \mu \eta_u = 0 \\
&\eta_t - \lambda x \eta_{xx} - \mu \eta_x - \tfrac{\xi \eta}{x} + 2\eta \xi_x = 0
\end{aligned} \tag{4.85}$$

denklemleri elde edilir. Belirleyici denklem sistemindeki ilk denklemden

$$\xi = a(t,x)u + b(t,x)$$

bulunur. Bulunan sonsuz küçük 2. denklemde yerine yazıldığında

$$\eta = \left(a_x - \frac{\mu a}{\lambda x} - \frac{ab}{\lambda x}\right)u^2 - \frac{a^2}{3\lambda x}u^3 + c(t,x)u + d(t,x)$$

sonsuz küçüğü bulunur. Bulunan bu sonsuz küçükler 3. denklemde yerine yazıldığında elde edilen eşitlik u nun derecelerine göre düzenlendiğinde u^3 lü terim

$$\frac{a^2}{3\lambda x} = 0$$

şeklinde bulunur. Buradan $a(t,x) = 0$ olur. Böylece sonsuz küçükler

$$\begin{aligned}
\xi &= b(t,x) \\
\eta &= c(t,x)u + d(t,x)
\end{aligned} \tag{4.86}$$

olur.Bu durumda 3. ve 4. denklemlerde sonsuz küçükler yazıldığında ve u nun derecelerine göre düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
&-b_t - (2b + \mu)b_x + \lambda x b_{xx} + \tfrac{b(b+\mu)}{x} - 2\lambda x c_x = 0 \\
&c_t - \lambda x c_{xx} - \mu c_x - \tfrac{bc}{x} + 2b_x c = 0 \\
&d_t - \lambda x d_{xx} - \mu d_x - \tfrac{bd}{x} + 2b_x d = 0
\end{aligned} \tag{4.87}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri sağlayan b,c,d fonksiyonları yardımıyla $Q-$ koşullu simetri üreteçleri

$$Q \equiv \partial_t + b\partial_x + (cu + d)\partial_v$$

4.4 Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemleri için Q-Koşullu Simetriler

Bu konuda yapılan çalışmalar çoğunlukla diferensiyel denklem sistemlerin $Q-$koşullu simetrileri üzerinedir. Sistemlerin koşullu simetrilerini bulmak tek denklemden oluşan kısmi diferensiyel denklemlerin koşullu simetrilerini bulmaktan daha karmaşıktır. Bilimsel çalışmalarda sıklıkla kullanılan diferensiyel denklem sistemleri için $Q-$koşullu simetrilerini bulmak denklemlerin çözümü ve analizi açısından önemlidir. Bu bölümde, bilim dünyasında sıklıkla karşımıza çıkan bazı diferensiyel denklem sistemlerinin $Q-$koşullu simetrileri incelenmiştir.

Örnek 4.10: Dispersive long dalgasının özel bir durumu olan

$$
\begin{aligned}
u_t &= 2uu_x - u_{xx} + 2v_x \\
v_t &= 2vu_x + 2uv_x + v_{xx}
\end{aligned}
$$

dalga denkleminin $Q-$koşullu simetrilerini araştıralım. Bu sistemin belirleyici denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
&\xi_{uu} = \xi_{vv} = \xi_{uv} = 0 \\
&-2\xi_v + \eta_{vv} = 0 \\
&-\xi_{xv} + \eta_{uv} - 2\xi_u = 0 \\
&-2\xi_{xu} - 4u\xi_u - 2\xi\xi_u + \eta_{uu} + 2\xi_v v = 0 \\
&\eta_t - 2\phi_x + \eta_{xx} + 2\xi_x\eta + 2\phi\eta_v - 2u\eta_x = 0 \\
&2\xi_v\eta - 2\xi_x + 2\eta_{xv} - 2\phi_v + 2\eta_u - 4u\eta_v - 2\xi\eta_v = 0 \\
&-\xi_{xx} - 2\phi\xi_v - 2\phi_u - 2\eta - 2\xi\xi_x + 2\eta\xi_u - 2u\xi_x - \xi_t + 2\eta_{xu} - 2\eta_v v = 0 \qquad (4.88) \\
&\phi_t - \phi_{xx} + 2\xi_x\phi - 2v\eta_x - 2u\phi_x + 2\eta\phi_u = 0 \\
&-2\eta\xi_u - 2\phi_u - \xi_t - 2\eta + \xi_{xx} - 2\phi_{xv} - 2\xi\xi_x + 2\phi\xi_v - 2\eta_v v - 2u\xi_x = 0 \\
&-2v\eta_u - 2\phi_u\xi - 4\phi_u u + 2\phi_v v + 2\xi_u\phi - 2\phi_{xu} - 2\xi_x v - 2\phi = 0 \\
&2\xi_u - \phi_{vv} + 2\xi_{xv} - 4\xi_v u - 2\xi_v\xi = 0 \\
&-\phi_{uv} + \xi_{xu} - 2\xi_v v = 0 \\
&-2\xi_u v - \phi_{uu} = 0
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Belirleyici denklem sistemindeki ilk denklemden ξ sonsuz küçüğü

$$\xi = a(x,t)u + b(x,t)v + c(x,t)$$

bulunur iken sistemdeki ikinci denklemden

$$\begin{aligned}\eta_{vv} &= 2b \\ \eta_v &= 2bv + d(x,t,u) \\ \eta &= bv^2 + d(x,t,u)v + e(x,t,u)\end{aligned}$$

bulunur, burada $a(x,t), b(x,t), c(x,t), d(x,t,u)$ ve $e(x,t,u)$ bilinmeyen düzgün fonksiyonlardır. Bir sonraki denklemden $d_1(x,t)$ keyfi fonksiyon olmak üzere

$$\begin{gathered}-\xi_{xv} + \eta_{uv} - 2\xi_u = 0 \\ -b_x + d_u(x,t,u) - 2a = 0 \\ d(x,t,u) = (b_x + 2a)u + d_1(x,t)\end{gathered} \tag{4.89}$$

elde edilir. 4. denklemden

$$-2a_x - 4ua - 2(au + bv + c)a + 2bv = -e_{uu} \tag{4.90}$$

bulunur. Sistemdeki son denklemden, $k(t,x,v)$ ve $m(t,x,v)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\phi = -a(t,x)vu^2 + k(t,x,v)u + m(t,x,v)$$

şeklinde bulunur. 12. denklemden ise

$$a_x - 2bv + 2au = k_v$$

elde edilir, burada k fonksiyonu x, t, ve v ye bağlı olduğu için $a(t,x) = 0$ ve

$$a_x v - bv^2 + k_1(t,x) = k$$

olur. 11. denkleme göre

$$2(b_x - bc) - 2bu - 2b^2 v = m_{vv}$$

olur, burada eşitliğin sağ tarafı u ya bağlı olmadığı için $b(t,x) = 0$ ve $m_{vv} = 0$ olur, yani;

$$m(x,t,v) = m_1(t,x)v + m_2(t,x)$$

dir.Ayrıca, (4.90) denkleminden $e_{uu} = 0$ olur, yani;

$$e(x,t,v) = e_1(t,x)u + e_2(t,x)$$

dir. Buradaki $e_i(t,x)$ ve $d_i(t,x)$ fonksiyonları $i=1,2$ için keyfi bilinmeyen fonksiyonlardır. Böylece sonsuz küçükler

$$\begin{aligned} \xi &= c \\ \eta &= d_1(t,x)v + e_1(t,x)u + e_2(t,x) \\ \eta &= k_1(t,x)u + m_1(t,x)v + m_2(t,x) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu durumda diğer belirleyici denklemlerde sonsuz küçükler yazıldığında ve düzenlendiğinde; 5. denklemden

$$d_{1x} = 0, \qquad e_{1x} = 0;$$

6. denklemden

$$\begin{gathered} -2d_1 - e_2 = 0 \\ -c_x - m_1 + e_2 = 0; \end{gathered}$$

7. denklemden

$$d_1 = 0, \qquad e_2 = 0, \qquad k_{1x} = 0, \qquad m_{1x} = 0;$$

8. denklemden

$$e_1 = -c_x, \qquad -2k_1 - c_t - 2cc_x = 0;$$

ve 9. denklemden

$$k_1 = 0, \qquad m_1 = 0$$

bulunur. Buna göre bu denklemler çözüldüğünde

$$c = \frac{x}{2t+\alpha} + \beta, \qquad m_1 = e_1 = \frac{1}{2t+\alpha}, \qquad \alpha, \beta = sbt$$

olarak bulunur ve bu durumda sonsuz küçük üreteç

$$Q \equiv \partial t + \left(\frac{x}{2t+\alpha} + \beta \right) \partial x + \frac{1}{2t+\alpha} u \partial u + \frac{1}{2t+\alpha} v \partial v$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.11: İki tane Burger tipi denklemden oluşan lineer olmayan iletim denklemlerinden biri olan difüzyon iletim sisteminin 2. tip $Q-$ koşullu simetrileri incelenecektir (Chernia, 2002).

$$u_t = (A(u)u_x)_x + B(u)u_x \tag{4.91}$$

$u = u(t,x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $A(u)$, $B(u)$ keyfi düzgün fonksiyonlar olmak üzere DC sisteminin özel bir hali olan

$$\begin{aligned} u_t &= \lambda_1 u_{xx} + u u_x + F_1(u,v) v_x \\ v_t &= \lambda_2 v_{xx} + v v_x + F_2(u,v) u_x \end{aligned} \tag{4.92}$$

denklem sistemininin 2. tip $Q-$koşullu simetrileri bulunacaktır.

$$Q \equiv \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta(t,x,u,v)\partial_u + \phi(t,x,u,v)\partial_v \tag{4.93}$$

operatörü altında ve M_2 manifoldu üzerinde $Q\left[u\right] = 0$ ve $Q\left[v\right] = 0$ ile (4.92) denklem sistemi değişmezdir. $u_t = \eta - \xi u_x$ ve $v_t = \phi - \xi v_x$ şartları denklemde yerine yazılıdığında

$$\begin{aligned} (\eta - \xi u_x) - \lambda_1 u_{xx} - u u_x - F_1(u,v) v_x = 0 \\ (\phi - \xi u_x) - \lambda_2 v_{xx} - v v_x - F_2(u,v) u_x = 0 \end{aligned} \tag{4.94}$$

olur. Bu denklem sistemindeki herbir denkleme değişmezlik şartı uygulanır ve (4.94) denklemleri yardımıyla u_{xx} ve v_{xx} elde edilen eşitlikleri yerine yazılır.

Oluşan denklem sistemi u_x 'in kuvvetlerine göre düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
&\xi_{uu} = \xi_{vv} = \xi_{uv} = 0\\
&\lambda_1\eta_{vv} + F_1\xi_v = 0\\
&\lambda_2\phi_{uu} + F_2\xi_v = 0\\
&\lambda_1\eta_{uu} - 2\lambda_1\xi_{xu} + 2(\xi+u)\xi_u + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}F_2\xi_v = 0\\
&\lambda_2\phi_{vv} - 2\lambda_2\xi_{xv} + 2(\xi+v)\xi_v + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}F_1\xi_u = 0\\
&2\lambda_1\eta_{uv} - 2\lambda_1\xi_{xv} + \tfrac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 u + \lambda_1 v + (\lambda_1+\lambda_2)\xi)\xi_v + 2F_1\xi_u = 0\\
&2\lambda_2\phi_{uv} - 2\lambda_2\xi_{xu} + \tfrac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 u + \lambda_1 v + (\lambda_1+\lambda_2)\xi)\xi_u + 2F_2\xi_v = 0\\
&\lambda_1\eta_{xx} - \eta_t - 2\xi_x\eta + (\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)\phi\eta_v + u\eta_x + F_1\phi_x = 0\\
&\lambda_2\phi_{xx} - \phi_t - 2\xi_x\phi + (\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1)\eta\phi_u + v\phi_x + F_2\eta_x = 0\\
&\lambda_1(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) + (2\xi+u)\xi_x - 2\eta\xi_u + (1 - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2})\phi\xi_v\\
&\qquad\qquad - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}F_2\eta_v + F_1\phi_u + \xi_t + \eta = 0\\
&\lambda_2(2\phi_{xv} - \xi_{xx}) + (2\xi+v)\xi_x - 2\phi\xi_v + (1 - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1})\eta\xi_u\\
&\qquad\qquad - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}F_1\phi_u + F_2\eta_v + \xi_t + \phi = 0\\
&2\lambda_1\eta_{xv} + (\xi_x - \eta_u + \phi_v)F_1 - 2\eta\xi_v + \tfrac{1}{\lambda_2}[(\lambda_2-\lambda_1)\xi\\
&\qquad\qquad + \lambda_2 u - \lambda_1 v]\eta_v + \eta F_{1u} + F_{1v}\phi = 0\\
&2\lambda_2\phi_{xu} + (\xi_x - \phi_v + \eta_u)F_2 - 2\phi\xi_u + \tfrac{1}{\lambda_1}[(\lambda_2-\lambda_1)\xi\\
&\qquad\qquad + \lambda_2 u - \lambda_1 v]\phi_u + \phi F_{2v} + F_{2u}\eta = 0
\end{aligned} \tag{4.95}$$

belirleyici denklem sistemi bulunur. Bu denklemler oldukça karmaşık olduğu için genel çözümü bulmak zordur. Bu yüzden, $Q-$ koşullu simetri operatörününün katsayılarını bulmak için bazı kısıtlar ile genel çözüm araştırılmıştır. Bu durumda $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q \equiv \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta(u,v)\partial_u + \phi(u,v)\partial_v, \qquad \xi_u\xi_v \neq 0 \tag{4.96}$$

şeklinde araştırıldığında (4.95) denklem sistemindeki ilk denklemden

$$\xi(t,x,u,v) = a(t,x)u + b(t,x)v + c(t,x) \tag{4.97}$$

elde edilir ve burada $a(t,x)$, $b(t,x)$ ve $c(t,x)$ düzgün fonksiyonlar ve $a.b \neq 0$ dır. Belirleyici denklem sistemindeki 2. ve 3. denklemlerde ξ fonksiyonunun eşiti yazıldığında

$$F_1 = -\frac{\lambda_1}{b}\lambda_1\eta_{vv}, \quad F_2 = -\frac{\lambda_2}{a}\phi_{uu} \tag{4.98}$$

elde edilir. Burada F_1 ve F_2 fonksiyonları u ve v nin fonksiyonları olduğu için $a(t,x)$ ve $b(t,x)$ fonksiyonları x ve t nin fonksiyonları olamaz ve a ve b sabit olup $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ dır. (4.97) ve (4.98) eşitlikleri (4.95) denklem sistemindeki 4.ve 5. denklemlerde yazıldığında

$$\begin{aligned} (a\eta - b\phi)_{uu} &= -2\frac{a^2}{\lambda_1}((a+1)u + bv + c) \\ (a\eta - b\phi)_{vv} &= 2\frac{b^2}{\lambda_2}(au + (b+1)v + c) \end{aligned} \tag{4.99}$$

bulunur. Burada dikkat edilirse denklemin sol tarafı sadece u ve v değişkenlerine bağlıdır; bu yüzden $c(t,x) = \alpha_0$ olmalıdır.

Bu bilgiler ile (4.95) sistemindeki 8. ve 9. denklemlerden

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)\phi\eta_v &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\eta\phi_u &= 0 \end{aligned} \tag{4.100}$$

bulunur. Burada bu eşitliklerin sağlanabilmesi için $\eta = \phi = 0$ yada $\eta_v = \phi_u = 0$ alınırsa $F_1 = F_2 = 0$ olur ve bu Burger denklemlerinin yapısının bozulması anlamına gelir. Bu yüzden bu eşitliğin sağlanabilmesi için $\lambda_1 = \lambda_2$ olmalıdır, burada genelliği bozmaksızın $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ alınabilir. Böylece (4.95) denklem sistemindeki 12. ve 13. denklemlerden

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\phi_u\eta_{vv} - \frac{1}{a}\eta_v\phi_{uu} &= -(2a-1)\eta \\ \frac{1}{b}\phi_u\eta_{vv} - \frac{1}{a}\eta_v\phi_{uu} &= (2b-1)\phi \end{aligned} \tag{4.101}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerin sol tarafları eşit olduğu için sağ tarafları eşit olmak zorundadır, dolayısıyla

$$(2a-1)\eta + (2b-1)\phi = 0 \tag{4.102}$$

olur. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $a = b = \frac{1}{2}$ olması gerekmektedir. Aksi taktirde yine $\eta = \phi = 0$ olursa $F_1 = F_2 = 0$ olur. Bulunan a ve b değerleri (4.99) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} (\eta - \phi)_{uu} &= -\left(\frac{u+v}{2} + u + \alpha_0\right) \\ (\eta - \phi)_{vv} &= \frac{u+v}{2} + u + \alpha_0 \end{aligned} \tag{4.103}$$

bulunur. denklem sistemindeki 6. ve 7. denklemlerde bilinenler yerine yazıldığında ise

$$\begin{aligned}(\eta_u - \eta_v)_v &= -\frac{1}{2}(u+v+\alpha_0) \\ (\phi_u - \phi_v)_v &= \frac{1}{2}(u+v+\alpha_0)\end{aligned} \tag{4.104}$$

denklemleri bulunur. (4.101), (4.103) ve (4.104) denklemlerinin genel çözümü yapıldığında sonsuz küçükler

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{1}{4}\left[(u+m_1)\omega^2 + (m_2 - m_1)u^2\right] + \beta_1 u + \gamma_1 \\ \phi &= -\frac{1}{4}\left[(v+m_2)\omega^2 + (m_1 - m_2)v^2\right] + \beta_2 v + \gamma_2\end{aligned} \tag{4.105}$$

şeklinde bulunur, burada $\omega = u + v + \alpha_0$ ve $\alpha_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ ve γ_2 keyfi sabitlerdir. (4.98) ve (4.105) denklemlerinden F_1 ve F_2 fonksiyonlarının genel çözümleri ise

$$F_1 = u + m_1, \qquad F_2 = v + m_2$$

olarak elde edilir. Belirleyici deklem sisteminin çözümünü tamamlamak için (4.95) sistemindeki son iki denklemde, (4.105) ile verilen sonsuz küçükler ve F_1 ve F_2 fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{m_1 - m_2}{2}\alpha_0$$

bulunur. Böylece,

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{m_1 - m_2}{4}\alpha_{0,} \qquad \beta_2 = \beta_0 + \frac{m_2 - m_1}{4}\alpha_{0,}$$

elde edilir, burada β_0 keyfi sabittir. Böylece, $Q-$koşullu simetri operatörünün sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}(u+v)\alpha_0 \\ \eta &= -\frac{1}{4}\left[(u+m_1)(u+v+\alpha_0)^2 + (m_2 - m_1)u(u+\alpha_0)\right] + \beta_1 u + \gamma_1 \\ \phi &= -\frac{1}{4}\left[(v+m_2)(u+v+\alpha_0)^2 + (m_1 - m_2)v(v+\alpha_0)\right] + \beta_2 v + \gamma_2\end{aligned} \tag{4.106}$$

şeklindedir. Buradaki bulunan operatör m_1 ve m_2 değerlerine göre yeniden incelendiğinde;

- Eğer $m_1 = m_2 = m$ ise özel olarak $m = 0$ durumunu incelendiğinde (4.106) da bulunan sonsuz küçükleri yeniden yazılır ise

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(u+v)\alpha_0 \\ \eta &= -\frac{1}{4}u(u+v+\alpha_0)^2 + \beta_0 u + \gamma_1 \\ \phi &= -\frac{1}{4}v(u+v+\alpha_0)^2 + \beta_0 v + \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.107}$$

olur ve bu eşitlikte $\beta_0 - \frac{\alpha_0^2}{4} \to \beta_0$ dönüşümü yapıldığında $Q-$koşullu simetri üreteçinin bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(u+v)\alpha_0 \\ \eta &= -\frac{1}{4}\left[u(u+v)^2 + 2\alpha_0 u(u+v)\right] + \beta_0 u + \gamma_1 \\ \phi &= -\frac{1}{4}\left[v(u+v)^2 + 2\alpha_0 v(u+v)\right] + \beta_0 v + \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.108}$$

şeklinde bulunur.

- Eğer $m_1 \neq m_2$ ise (4.106) sisteminde ve burada $x^* = x - \frac{\alpha_0}{2}t,\ t^* = t,\ u^* = u + \frac{\alpha_0}{2}$ ve $v^* = v + \frac{\alpha_0}{2}$ dönüşümleri yapıldığında (bu dönüşümün yapılması gerekli değildir, burada sadece (4.106) ile verilen sonsuz küçüklerin farklı bir gösterimle yazılabildiğini göstermek için yapılmıştır) ayrıca sabitler $m_1 - \frac{\alpha_0}{2} \to m_1,\ m_2 - \frac{\alpha_0}{2} \to m_2,\ \gamma_1 - (m_2 - m_1)\frac{\alpha_0^2}{4} \to \gamma_1$ ve $\gamma_2 - (m_1 - m_2)\frac{\alpha_0^2}{4} \to \gamma_2$ olacak şekilde yeniden adlandırıldığında

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(u+v) \\ \eta &= -\frac{1}{4}\left[(u+m_1)(u+v)^2 + (m_2 - m_1)u^2\right] + \beta_0 u + \gamma_1 \\ \phi &= -\frac{1}{4}\left[(v+m_2)(u+v)^2 + (m_1 - m_2)v^2\right] + \beta_0 v + \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.109}$$

sonsuz küçükler bulunmuş olur. Böylece, (4.108) ve (4.109) da verilen eşitlikler (4.96) operatöründe yerine konulduğunda (4.92) denklemi için üreteçler elde edilmiştir.

Örnek 4.12: Bu örnekte lineer olmayan reaksiyon-difüzyon (RD) sisteminin özel bir hali olan Lotka-Volterra difüzyon (LVD) sisteminin $Q-$koşullu simetrilerini bulunmuştur. İki denklemli bir diferensiyel denklem sistemi için iki tip Q koşullu simetri bulunabileceğinden bahsedilmişti. 1.tip Q koşullu simetriler için ya $Q[u]=0$ yada $Q[v]=0$ durumlarından herhangi birisi için Lie simetrileri araştırılır iken, 2. tip Q koşullu simetriler için $Q[u]=0$ ve $Q[v]=0$ durumunda denklemin Lie simetrileri araştırılır. Lineer olmayan RD denklemi

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx}+F(u,v) \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx}+G(u,v) \end{aligned} \tag{4.110}$$

formunda olup birçok matematiksel modellemede sıklıkla kullanılmaktadır. Bu diferensiyel denklem sistemindeki $F(u,v)$ ve $G(u,v)$ düzgün fonksiyonlar, $u(t,x)$ ve $v(t,x)$, t ve x değişkenlerine göre bilinmeyen fonksiyonlardır. Bilimsel çalışmalarda yaygın olarak kullanılan LVD sistemi aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx}+u(a_1+b_1u+c_1v) \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx}+v(a_2+b_2u+c_2v). \end{aligned} \tag{4.111}$$

LVD sistemi ikinci mertebeden bir denklem sistemi olduğu için üreteçler araştırılır iken ikinci uzanımı içeren Q_2 operatörü kullanılması gerekmektedir.

$$Q \equiv \xi^0(t,x,u,v)\partial_t+\xi^1(t,x,u,v)\partial_x+\eta(t,x,u,v)\partial_u+\phi(t,x,u,v)\partial_v \tag{4.112}$$

$$Q_2 \equiv Q+\eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t}+\eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x}+\phi_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial v_t}+\phi_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial v_x}+\eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\phi_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{xx}}... \tag{4.113}$$

burada $\eta_t^{(1)},\eta_x^{(1)},\phi_t^{(1)},\phi_x^{(1)},\eta_{xx}^{(2)}$ ve $\phi_{xx}^{(2)}$ katsayıları ξ^0,ξ^1,η ve ϕ fonksiyonları aracalığı ile yazılır. Bu kapsamlı olarak bölüm (3.9) da bahsedilmiştir. M_2 manifoldu

$$M_2=\{S_1=0,\ S_2=0,\ Q_2[u]=0,\ Q_2[v]=0\} \tag{4.114}$$

üzerinde 2.tip $Q-$koşullu simetriler araştırılmıştır. Kısmi diferensiyel denklemlerdeki işlemlere benzer olarak $u_t+\xi u_x=\eta$ ve $v_t+\xi v_x=\phi$ eşitlikleri kullanılarak LVD sisteminin klasik olmayan ($Q-$koşullu) simetrileri bulunur. (4.111) denklemi M_2 manifoldu üzerinde (4.113) operatörü altında değişmezdir. Bir takım hesaplamalarla diferensiyel denklem sisteminin belirleyici denklemleri

$$
\begin{aligned}
&\xi_{uu} = \xi_{vv} = \xi_{uv} = 0 \\
&\eta_{vv} = \phi_{uu} = 0 \\
&2\lambda_1 \xi \xi_u + \eta_{uu} - 2\xi_{xu} = 0 \\
&2\lambda_2 \xi \xi_v + \phi_{vv} - 2\xi_{xv} = 0 \\
&(\lambda_1 + \lambda_2)\xi \xi_v + 2\eta_{uv} - 2\xi_{xv} = 0 \\
&(\lambda_1 + \lambda_2)\xi \xi_u + 2\phi_{uv} - 2\xi_{xu} = 0 \\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\xi \eta_v + 2\eta_{xv} + 2u(a_1 + b_1 u + c_1 v)\xi_v - 2\lambda_1 \xi_v \eta = 0 \\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\xi \phi_u + 2\phi_{xu} + 2v(a_2 + b_2 u + c_2 v)\xi_u - 2\lambda_2 \xi_u \phi = 0 \\
&\lambda_1(2\xi_u \eta - \xi_t - \xi_v \phi - 2\xi \xi_x) + \lambda_2 \xi_v \phi - 3\xi_u u(a_1 + b_1 u + c_1 v) \\
&\qquad -\xi_v v(a_2 + b_2 u + c_2 v) - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(2\xi_v \tau - \xi_t - \xi_u \eta - 2\xi \xi_x) + \lambda_2 \xi_u \eta - 3\xi_v v(a_2 + b_2 u + c_2 v) \\
&\qquad - \xi_u u(a_1 + b_1 u + c_1 v) - 2\phi_{xv} + \xi_{xx} = 0 \\
&\lambda_1(\eta_t + \phi \eta_v + 2\xi_x \eta) - \lambda_2 \phi \eta_v - \eta(a_1 + b_1 u + c_1 v) - c_1 \phi u + \eta_u u(a_1 + b_1 u + c_1) \\
&\qquad -2\xi_x u(a_1 + b_1 u + c_1 v) + \eta_v v(a_2 + b_2 u + c_2 v) - \eta_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(\phi_t + \phi \eta_u + 2\xi_x \phi) - \lambda_1 \eta \phi_u - \phi(a_2 + b_2 u + c_2 v) - b_2 \eta v + \phi_u u(a_1 + b_1 u + c_1 v) \\
&\qquad -2\xi_x v(a_2 + b_2 u + c_2 v) + \phi_v v(a_2 + b_2 u + c_2 v) - \phi_{xx} = 0
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

şeklindedir.

Belirleyici denklem sistemindeki 5. ve 6. denklemlerde sırayla v ye ve u ya göre kısmi türevleri alındıktan sonra 1.ve 2. denklemlerdeki eşitlikler kullanılarak

$$
(\lambda_1 + \lambda_2)\xi_v^2 = 0 \ , \quad (\lambda_1 + \lambda_2)\xi_u^2 = 0 \tag{4.116}
$$

elde edilir. λ_1 ve λ_2 katsayıları sıfırdan farklı olduğu için $\xi_u = \xi_v = 0$ olur. Böylece ξ sonsuz küçüğü u ve v değişkenlerine bağlı değildir, yani; $\xi = \xi(t, x)$ olur. Bulunan ξ fonksiyonunu ile (4.115) denklem sistemindeki 2. ve 7. denklemlerarasındaki denklemlerden

$$
\begin{aligned}
\eta_{uu} &= \eta_{uv} = \eta_{vv} = 0 \\
\phi_{uu} &= \phi_{uv} = \phi_{vv} = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitliklerden sonsuz küçükler

$$\begin{aligned} \eta &= q^1(t,x)v + r^1(t,x)u + p^1(t,x) \\ \phi &= q^2(t,x)u + r^2(t,x)v + p^2(t,x) \end{aligned} \tag{4.117}$$

olur.

Böylece aranan üreteç

$$Q = \partial_t + \xi\partial_x + (q^1 v + r^1 u + p^1)\partial_u + (q^2 u + r^2 v + p^2)\partial_v \tag{4.118}$$

şeklindedir ve burada q^k, r^k ve p^k $(k = 1, 2)$ için diğer denklemler yardımıyla bulunabilen fonksiyonlardır. $\xi_u = \xi_v = 0$ sonucu ve η ve ϕ eşitlikleri belirleyici denklem sistemindeki tüm denklemlerde yerine yazıldığında ve u, v, u^2 ve v^2 li terimlerin her birinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
&(c_1 - c_2)q^1 = 0 \\
&(b_1 - b_2)q^2 = 0 \\
&c_1 q^2 + b_1(r^1 + 2\xi_x) = 0 \\
&b_2 q^1 + c_2(r^2 + 2\xi_x) = 0 \\
&(2b_1 - b_2)q^1 + c_1(r^2 + 2\xi_x) = 0 \\
&(2c_2 - c_1)q^2 + b_2(r^1 + 2\xi_x) = 0 \\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\xi q^1 + 2q^1_x = 0 \\
&(\lambda_2 - \lambda_1)\xi q^2 + 2q^2_x = 0 \\
&\lambda_1(\xi_t + 2\xi\xi_x) + 2r^1_x - \xi_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(\xi_t + 2\xi\xi_x) + 2r^2_x - \xi_{xx} = 0 \\
&\lambda_1(r^1_t + 2r^1\xi_x) + (\lambda_1 - \lambda_2)q^1 q^2 - c_1 p^2 - 2b_1 p^1 - 2a_1\xi_x - r^1_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(r^2_t + 2r^2\xi_x) + (\lambda_2 - \lambda_1)q^1 q^2 - b_2 p^1 - 2c_2 p^2 - 2a_2\xi_x - r^2_{xx} = 0 \\
&\lambda_1(q^1_t + 2q^1\xi_x) + (\lambda_1 - \lambda_2)q^1 r^2 - (a_1 - a_2)q^1 - c_1 p^1 - q^1_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(q^2_t + 2q^2\xi_x) + (\lambda_2 - \lambda_1)q^2 r^1 + (a_1 - a_2)q^2 - b_2 p^2 - q^1_{xx} = 0 \\
&\lambda_1(p^1_t + 2p^1\xi_x) + (\lambda_1 - \lambda_2)q^1 p^2 - a_1 p^1 - p^1_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(p^2_t + 2p^2\xi_x) + (\lambda_2 - \lambda_1)q^2 p^1 - a_2 p^2 - p^2_{xx} = 0
\end{aligned} \tag{4.119}$$

belirleyici denklemleri elde edilir.

Belirleyici denklem sistemini çözerken bazı kısıtlamalar ile çözüm yapılmıştır. İlk olarak u_t ve v_t nin katsayıları ya $\lambda_1 = \lambda_2$ yada $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dir. $\lambda_1 = \lambda_2$ durumu bu sistem için oldukça basittir, burada sadece klasik Lie simetrileri elde edilir. Daha genel bir durum olan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ durumunda (4.119) belirleyici denklem sistemindeki ilk iki denklem incelendiğinde üç farklı durum ortaya çıkmaktadır

1.1−) $b_1 \neq b_2$ ve/ veya $c_1 \neq c_2$

1.2−) $b_1 = b_2 = b \neq 0,\ c_1 = c_2 = c = 0$

1.3−) $b_1 = b_2 = b \neq 0,\ c_1 = c_2 = c \neq 0.$

1.1 durumu;

Burada LVD sistemi için (4.119) denklem sistemindeki 2. ve 3. eşitliklerden

$$q^1 = 0, \qquad q^2 = 0 \tag{4.120}$$

kısıtları yapılabilir. Çünkü $b_1 = b_2 = b$ ve $c_1 \neq c_2$ ise (4.119) sistemindeki 1. eşitlikten $q^1 = 0$ bulunur iken (4.119) sistemindeki 3. ve 6. eşitliklerden $(c_1 - c_2)q^2 = 0 \iff q^2 = 0$ ($b_1 \neq b_2$ ve $c_1 = c_2 = c$ durumu ile benzer) elde edilir.

(4.120) deki kısıtlar ile (4.119) belirleyici denklemler sistemindeki 13. ve 14. denklemlerden $c_1 p^1 = 0$ ve $b_2 p^2 = 0$ bulunur. Eğer $c_1 b_2 \neq 0$ ise

$$p^1 = p^2 = 0 \tag{4.121}$$

olur. Eğer $c_1 b_2 = 0$ ise $c_1 = 0, b_2 \neq 0$ ($c_1 \neq 0, b_2 = 0$ durumu ile benzer) iken $p^2 = 0$ olur. LVD sistemi bir tanesi ile Fisher denklemi olan otonom sisteme indirgenmiş olur. Burada genelliği bozmaksızın $b_2 = 1$ alındığında

$$\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u), \quad a_1 \neq 0 \tag{4.122}$$

olur. Şimdi varsayalım ki sistem (4.118) formundaki operatör altında

$$Q = \partial_t + \alpha \partial_x, \quad \alpha = sabit \tag{4.123}$$

$Q-$koşullu değişmezdir.Yine de Fisher denklemi $Q-$koşullu simetri olarak kabul edilmez (Chernia, Serov, 2010) ama Lie simetrisidir.(4.119) sistemindeki belirleyici denklemler çözüldüğünde $\xi = \alpha$ ve (4.121) bulunur. (4.122) operatöründe özel olarak $a_1 = 0$ alınırsa ek bir Lie simetri

$$Q = 2t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u$$

bulunur ama bu da $Q-$koşullu simetri değildir (Chernia and Serov, 2010). Bu yüzden (4.121) ile verilen sınırlamalar geçerlidir.

(4.120) ve (4.121) deki veriler ile (4.119) sistemindeki belirleyici denklemler tekrar yazılır ise

$$\begin{aligned}
&b_1(r^1+2\xi_x)=0\\
&b_2(r^1+2\xi_x)=0\\
&c_1(r^2+2\xi_x)=0\\
&c_2(r^2+2\xi_x)=0\\
&\lambda_1(\xi_t+2\xi\xi_x)+2r^1_x-\xi_{xx}=0\\
&\lambda_2(\xi_t+2\xi\xi_x)+2r^2_x-\xi_{xx}=0\\
&\lambda_1(r^1_t+2r^1\xi_x)-2a_1\xi_x-r^1_{xx}=0\\
&\lambda_2(r^2_t+2r^2\xi_x)-2a_2\xi_x-r^2_{xx}=0
\end{aligned} \tag{4.124}$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemler yardımıyla elde edilen $Q-$ koşullu simetri operatörleri, Lie simetri operatörlerine eşittir. Bunlar kolaylıkla görülebilir. Örneğin $c_1b_2\neq 0$ durumu incelendiğinde (4.124) sistemindeki 2. ve 3. eşitliklerden

$$r^1=r^2=-2\xi_x \tag{4.125}$$

olur. $\lambda_1\neq\lambda_2$ olması sebebiyle ve (4.125) eşitliği kullanılarak (4.124) sistemindeki 5. ve 6. denklemlerden

$$\begin{aligned}
\xi_t+2\xi\xi_x=0\\
\xi_{xx}=0
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$\xi(t,x)=\frac{x+\alpha_1}{2t+\alpha_2}$$

şeklindedir. Son olarak, eğer $a_1=a_2=0$ ise (4.125) eşitliği ve (4.124) sisteminin son iki denklemden η bulunur ve buna göre $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q=\partial_t+\frac{x+\alpha_1}{2t+\alpha_2}\partial_x-\frac{2}{2t+\alpha_2}(u\partial_u+v\partial_v)$$

şeklindedir. Eğer $a_1^2+a_2^2\neq 0$ ise (4.123) Lie simetri operatörü bulunur. Böylece 1-1 durumu tamamen incelenmiştir.

1.2 durumu;

(4.111) sisteminde, $bu \to u, v \to \exp(\frac{a_2}{\lambda_2}t)$ nokta dönüşümü uygulanılarak

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + u) \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + vu \end{aligned} \tag{4.126}$$

sistemine indirgenir, çünkü $c_1 = c_2 = 0$ dır. Buradaki ilk denklem Fisher denklemi olup yukarıdaki ile aynı yaklaşım kullanılabilir. Böylece (4.122) operatörü kullanılarak yani $\xi = \alpha$ olarak alındığında (4.119) sistemindeki denklemlerden $q^1 = p^1 = r^1 = 0$ sınırlamaları ile (4.118) operatörü

$$Q = \partial_t + \alpha\partial_x + (q^2u + r^2v + p^2)\partial_v \tag{4.127}$$

olur. Ayrıca, (4.119) sistemindeki belirleyici denklemler tekrar yazılır ise

$$\begin{aligned} & r^2_x = r^2_t = 0 \\ & (\lambda_2 - \lambda_1)\xi q^2 + 2q^2_x = 0 \\ & \lambda_2 q^2_t + a_1 q^2 - p^2 - q^2_{xx} = 0 \\ & \lambda_2 p^2_t - p^2_{xx} = 0 \end{aligned} \tag{4.128}$$

bulunur ve bu sistemin genel çözümü.

$$r^2 = \alpha_2$$

$$\begin{gathered} q^2 = c(t)\exp(\tfrac{\alpha}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)x) \\ p^2 = \exp(\tfrac{\alpha}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)x)(\lambda_2 c'(t) + a_1 c(t) - (\tfrac{\alpha_1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2))^2) \end{gathered}$$

şeklindedir, burada

$$c(t) = \alpha_3 \exp(\frac{\alpha^2}{4\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 t) + \alpha_4 \exp(\frac{1}{\lambda_2}(-a_1 + \frac{\alpha^2}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2)t)$$

$\alpha_k, k = 2, 3, 4$ keyfi sabitlerdir. Son olarak $\alpha = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\alpha_1$ notasyonunu kullanılarak ve r^2, q^2, p^2 fonksiyonları (4.127) operatöründe yazılır ise

$$Q = \partial_t + \frac{2\alpha_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\partial_x + \left[\exp\left(\alpha_1 x + \frac{\alpha_1^2}{\lambda_2}t\right)\left(\left(\alpha_3 + \alpha_4 \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\lambda_2}t\right)\right)u + \alpha_3 a_1\right) + \alpha_2 v\right]\partial_v$$

$Q-$koşullu simetri operatörüne ulaşılır.

1.3 durumu;

Burada (4.111) sistemi, $bu \to u,\ cv \to v$ nokta dönüşümü uygulandığında ve genelliği bozmaksızın $b = c = 1$ alındığında

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + u + v) \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v(a_2 + u + v) \end{aligned} \tag{4.129}$$

sistemine ingirgenir. $q^1_x = q^2_x = 0$ sınırlaması ile belirleyici denklem sistemi

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 - \lambda_2)\xi q^1 = 0 \\
&(\lambda_2 - \lambda_1)\xi q^2 = 0 \\
&q^1 + r^2 + 2\xi_x = 0 \\
&q^2 + r^1 + 2\xi_x = 0 \\
&\lambda_1(\xi_t + 2\xi\xi_x) + 2r^1_x - \xi_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(\xi_t + 2\xi\xi_x) + 2r^2_x - \xi_{xx} = 0 \\
&\lambda_1(r^1_t + 2r^1\xi_x) + (\lambda_1 - \lambda_2)q^1q^2 - p^2 - 2p^1 - 2a_1\xi_x - r^1_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(r^2_t + 2r^2\xi_x) + (\lambda_2 - \lambda_1)q^1q^2 - p^1 - 2p^2 - 2a_2\xi_x - r^2_{xx} = 0 \\
&\lambda_1(q^1_t + 2q^1\xi_x) + (\lambda_1 - \lambda_2)q^1r^2 - (a_1 - a_2)q^1 - p^1 = 0 \\
&\lambda_2(q^2_t + 2q^2\xi_x) + (\lambda_2 - \lambda_1)q^2r^1 + (a_1 - a_2)q^2 - p^2 = 0 \\
&\lambda_1(p^1_t + 2p^1\xi_x) + (\lambda_1 - \lambda_2)q^1p^2 - a_1p^1 - p^1_{xx} = 0 \\
&\lambda_2(p^2_t + 2p^2\xi_x) + (\lambda_2 - \lambda_1)q^2p^1 - a_2p^2 - p^2_{xx} = 0
\end{aligned} \tag{4.130}$$

şeklinde olur.

Eğer $q^1 = q^2 = 0$ olursa; sadece 1-1 durumunda elde edilen operatör tekrar elde edilirken, $(q^1)^2 + (q^2)^2 \neq 0$ iken farklı operatörler elde edilebilir. Bu sınırlamalar altında (4.130) denklem sistemindeki ilk iki denklemden $\xi = 0$ bulunur. Böylece, (4.130) denklem sistemindeki 3. ile 6. denklemler arasındaki eşitliklerden

$$\begin{aligned} q^1 &= -r^2 = -\psi(t) \\ q^2 &= -r^1 = -\varphi(t) \end{aligned} \tag{4.131}$$

elde edilir, burada $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ keyfi düzgün fonksiyonlarlardır. q^1 ve q^2 fonksiyonları (4.130) denklem sistemindeki 9. ve 10. eşitliklerde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} p^1 &= (a_1 - a_2)\psi(t) + (\lambda_1 - \lambda_2)\psi^2(t) - \lambda_1\psi'(t) \\ p^2 &= (a_1 - a_2)\varphi(t) + (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi^2(t) - \lambda_1\varphi'(t) \end{aligned} \tag{4.132}$$

bulunur. (4.131) ve (4.132) denklemlerini kullanarak (4.130) denklem sistemindeki 7. ve 8. denklemler $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonlarına göre adi diferensiyel denklem

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\tfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}(a_2 - a_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi + \psi))((3\lambda_1 - \lambda_2)\varphi + 2\lambda_2\psi) \\ \psi'(t) &= -\tfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}(a_2 - a_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi + \psi))((2\lambda_1\varphi + (3\lambda_2 - \lambda_1)\psi) \end{aligned} \tag{4.133}$$

olarak yazılabilir.

Son olarak (4.131) -(4.133) ile verilen formüller kullanılarak, (4.130) denklem sistemindeki son iki denklemden $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ yi bulmak için iki cebirsel denklem yazılır. Burada çözümün olabilmesi için bu cebirsel denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfıra eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi + \psi))(\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)(a_1(4\lambda_1 + 5\lambda_2) - a_2(5\lambda_1 + 4\lambda_2) \\ -4(\lambda_1 - \lambda_2)((2\lambda_1 + \lambda_2)\varphi + (\lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2)\psi)) = 0 \end{aligned} \tag{4.134}$$

Bu determinantın sıfır olması ancak aşağıdaki üç farklı durumla mümkündür

1.3.1-)$\varphi = -\psi + \frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$

1.3.2-)$\varphi = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\psi$

1.3.3-)$\varphi = \frac{1}{4(\lambda_1-\lambda_2)(2\lambda_1+\lambda_2)}((4a_1 - 5a_2)\lambda_1 + (5a_1 + 4a_2)\lambda_2 - 4(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + 2\lambda_2)\psi)$.

1.3.1 alt durumu

Bu durumda, (4.129) ve (4.130) denklemlerinin her ikiside aşağıdaki denkleme

$$(a_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)\psi)\psi(a_1 - a_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\psi) = 0 \tag{4.135}$$

eşit olur.

Eğer $\psi = \frac{a_1}{\lambda_1-\lambda_2}$ ise $\varphi = -\frac{a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ olur ve (4.131) - (4.132) kullanılarak

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (a_1 v + a_2 u + a_1 a_2)(\partial_u - \partial_v), \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

$Q-$koşullu simetri operatörü elde edilir.

Eğer $\psi = 0$ ise $\varphi = \frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ olur ve benzer işlemler yapılarak

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t + (a_1 - a_2)u(\partial_u - \partial_v), \quad a_1 \neq a_2$$

$Q-$koşullu simetri operatörü elde edilir.

Eğer $\psi = \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ise $\varphi = 0$ olur ve

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (a_1 - a_2)v(\partial_u - \partial_v),\ a_1 \neq a_2$$

$Q-$koşullu simetri operatörü elde edilir.

Not: $a_1 \neq a_2$ sınırlaması ile Lie operatörü olmaması garanti edilmiştir

1.3.2 alt durumu

Bu durumda (4.130) daki son iki denklemden

$$\psi(t)(a_1 - a_2)(a_1\lambda_2 - a_2\lambda_1) = 0 \tag{4.136}$$

denklemine eşit olur.

Eğer $\psi(t) \neq 0$ (aksi taktirde $Q \equiv \partial_t$ Lie operatörüne ulaşılır) ise iki ihtimal vardır: $a_1 = a_2$ ve $a_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_2$.

Eğer $a_1 = a_2$ ise (4.133) denkleminden

$$\psi(t) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)t + \lambda_1\alpha},\ \alpha = sbt \tag{4.137}$$

bulunur ve burada genelliği bozmaksızın $\alpha = 0$ alınabilir p^1, p^2 fonksiyonları (4.132) denkleminden bulunur. Böylece

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)t\partial_t + (\lambda_1 v + \lambda_2 u)(\partial_u - \partial_v)$$

operatörü elde edilir. Eğer $a_1 = a_2 = a$ olarak seçilirse, (4.111) sistemi,

$$\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a + u + v)$$
$$\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a + u + v)$$

sistemine indirgenir ve $Q-$ koşullu simetri operatörü

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - a(v + u + a)(\partial_u - \partial_v), \quad a \neq 0$$

şeklindedir.

Eğer $a_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_2$ (burada $a_2 \neq 0$ dır, aksihalde $\alpha = 0$ durumuna karşılık gelir) ise (4.133) denkleminden

$$\psi(t) = -\frac{\alpha_0 a_2 \lambda_1}{\exp(-\frac{a_2}{\lambda_2}t) - \alpha_0(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2} \tag{4.138}$$

elde edilir, burada α_0 yok olmayan sabittir. (4.132) denklemleri ve $a_2 = a\lambda_2,\ \lambda_2\alpha_0 = \alpha$ notasyonları kullanılarak elde edilen sistem

$$\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a\lambda_1 + u + v)$$
$$\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a\lambda_2 + u + v), \qquad a \neq 0$$

şekinde olup

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - a(\lambda_1 v + \lambda_2 u + a\lambda_1\lambda_2)(\partial_u - \partial_v), \quad a \neq 0$$

operatörü elde edilir.

1.3.3 alt durumu

Bu durum incelendiğinde herhangi bir yeni operatör üretmediği görülmüştür.

Not: Uygun dönüşümler yapılarak yeni operatörler elde edilebilir. Örneğin

$$\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u + v)$$
$$\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a_2 + u + v)$$

sisteminden

$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t + (a_1 - a_2)u(\partial_u - \partial_v), \quad a_1 \neq a_2$$
$$Q \equiv (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (a_1 - a_2)v(\partial_u - \partial_v), \ a_1 \neq a_2$$

operatörü elde edilmişti burada $a_2 = a\lambda_2,\ \lambda_2\alpha_0 = \alpha$ dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a\lambda_1 + u + v) \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v(a\lambda_2 + u + v), \qquad a \neq 0 \end{aligned} \tag{4.139}$$

sistemi elde edilir ve operatörler

$$Q \equiv \partial_t + au(\partial_u - \partial_v)$$
$$Q \equiv \partial_t - av(\partial_u - \partial_v)$$

şeklinde bulunur.

Daha önce, örnek (4.6) incelenmiş olan ikili Lotka Voltera denkleminin üçlü sistemde ki $Q-$koşullu simetrileri araştırılmıştır.

Örnek 4.13: Lotka-Voltera denklemi, üç bileşenli Reaksiyon-Difüzyon (RD) denklemi sınıfından olup genel formu

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + C_1(u,v,w) \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + C_2(u,v,w) \\ \lambda_3 w_t &= w_{xx} + C_3(u,v,w) \end{aligned} \tag{4.140}$$

şeklindedir. Burada, bu denklem sistemine göre belirleyici denklemler verilmiştir. Daha sonra, genel formdaki $C_1(u,v,w), C_2(u,v,w)$ ve $C_3(u,v,w)$ düzgün fonksiyonları için aşağıdaki gibi uygun eşitlikler verilerek Lotka Volterra denklem sisteminin $Q-$koşullu simetrileri araştırılmıştır.

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w) \\ \lambda_1 v_t &= v_{xx} + v(a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 w) \\ \lambda_1 w_t &= w_{xx} + w(a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 w) \end{aligned} \tag{4.141}$$

Burada, yarı- birleşmiş denklemleri önlemek istenildiği için (yani otonom denklemleri içerir) bazı kısıtların olduğu varsayılmıştır

$$c_1^2 + d_1^2 \neq 0,\ b_2^2 + d_2^2 \neq 0, b_3^2 + c_3^2 \neq 0. \tag{4.142}$$

Bu sistemin Lie değişmez opetratörlerini bulnak için $M_1 = \{S_1 = 0, S_2 = 0,\ S_3 = 0\}$ şeklinde tanımlanan bir manifolda ihtiyaç vardır ve burada

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \lambda_1 u_t - u_{xx} - C_1(u,v,w) \\ S_2 &\equiv \lambda_1 v_t - v_{xx} - C_2(u,v,w) \\ S_3 &\equiv \lambda_1 w_t - w_{xx} - C_3(u,v,w) \end{aligned} \tag{4.143}$$

ve genişletilmiş uzaydaki değişkenler $t,\ x,\ u,\ v,\ w,\ u_t,\ v_t,\ w_t,\ u_x, v_x,\ w_x,\ u_{xx},\ v_{xx},\ w_{xx},\ u_{xt},\ v_{xt},\ w_{xt},\ u_{tt},\ v_{tt},\ w_{tt}$ şeklindedir. Bilindiği gibi, (4.140) sistemi

$$\begin{gathered} Q = \tau(t,x,u,v,w)\partial t + \xi(t,x,u,v,w)\partial x + \eta(t,x,u,v,w)\partial u + \\ \phi(t,x,u,v,w)\partial v + \psi(t,x,u,v,w)\partial w \end{gathered} \tag{4.144}$$

Q operatörü altında değişmezdir. O halde, Lie değişmezlik şartlarını

$$\begin{aligned} Q_2(S_1) &\equiv Q_2(\lambda_1 u_t - u_{xx} - C_1(u,v,w))|_M = 0 \\ Q_2(S_2) &\equiv Q_2(\lambda_1 v_t - v_{xx} - C_2(u,v,w))|_M = 0 \\ Q_2(S_3) &\equiv Q_2(\lambda_1 w_t - w_{xx} - C_3(u,v,w))|_M = 0 \end{aligned} \tag{4.145}$$

sağlamalıdır ve burada Q_2 operatörü, Q operatörünün 2.uzanımıdır.

Tanım 4.5: RD sistemi (4.140), aşağıda verilen değişmezlik şartlarını sağlıyorsa

$$\begin{aligned} Q_2(S_1) &\equiv Q_2(\lambda_1 u_t - u_{xx} - C_1(u,v,w))|_{M_1} = 0 \\ Q_2(S_2) &\equiv Q_2(\lambda_1 v_t - v_{xx} - C_2(u,v,w))|_{M_1} = 0 \\ Q_2(S_3) &\equiv Q_2(\lambda_1 w_t - w_{xx} - C_3(u,v,w))|_{M_1} = 0 \end{aligned} \tag{4.146}$$

(4.144) operatörüne, RD sistemi için 1. tip $Q-$koşullu simetri operatörü denir, burada M_1 manifoldu ya $M_1 = \{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0,\ Q(u) = 0\}$ ya $M_1^{(2)} = \{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0,\ Q(v) = 0\}$ yada $M_1^{(3)} = \{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0,\ Q(w) = 0\}$ şeklindeki manifoldlardan biridir. Yani, bu sistem için üç farklı 1. tip Q-koşullu simetri elde edilebilir.

Tanım 4.6: (4.140) RD sistemi , aşağıda verilen değişmezlik şartlarını sağlıyorsa

$$\begin{aligned} Q_2(S_1) &\equiv Q_2(\lambda_1 u_t - u_{xx} - C_1(u,v,w))|_{M_3} = 0 \\ Q_2(S_2) &\equiv Q_2(\lambda_1 v_t - v_{xx} - C_2(u,v,w))|_{M_3} = 0 \\ Q_2(S_3) &\equiv Q_2(\lambda_1 w_t - w_{xx} - C_3(u,v,w))|_{M_3} = 0 \end{aligned} \tag{4.147}$$

(4.144) operatörüne, RD sistemi için $Q-$koşullu simetri operatörü denir, burada M_3 manifoldu $M_3 = \{S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ Q[u] = 0,\ Q[v] = 0,\ Q[w] = 0\}$ şeklindedir.

Kolayca görüldüğü gibi manifoldlar arasında $M_3 \subset M_1 \subset M$ ilişkisi vardır. Her 1. tip $Q-$ koşullu simetri $Q-$koşullu simetri iken, her bir Lie simetrisi otomatik olarak 1. tip $Q-$koşullu simetridir.

Not: Q_1, 1.tip $Q-$koşullu simetri iken (yani $M_1 = \{S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ Q[u] = 0\}$ manifoldu kullanılarak elde edilen Lie simetrisi), h_2 ve h_3 verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$X_1 = h_2(t,x,u,v,w)\partial v + h_3(t,x,u,v,w)\partial w$$

RD sistemi için Lie simetrisi olduğunu varsayalım. Bu durumda, $c_1X_1 + c_2Q_1$ 'in her bir lineer kombinasyonu (c_1 ve c_2 keyfi sabitler) olmak üzere farklı 1.tip $Q-$koşullu simetri operatörleri üretir. Bu durum, keyfi verilen her $Q-$koşullu simetri için geçerli değildir.

Şimdi, LVD sistemi için (4.140) de verilen operatör altında değişmezliğini kullanarak, 1. tip $Q-$koşullu simetrilerini ($\tau \neq 0$ iken) elde edilecektir.

Standart $Q-$koşullu simetrilerin aksine yani önceki yapılan örneklerden farklı olarak bu örnekte $\tau \neq 0$ alarak işlem yapılmıştır. Çünkü, işlemleri basitleştirmek için aldığımız $\tau = 1$ bazı operatörleri bulunamamasına neden olmaktadır. Tanım 4.5 de, üç farklı 1. tip $Q-$koşullu simetri bulunabileceğinden bahsedilmişti. LVD sisteminin simetrik yapıda olması sebebiyle sadece tek bir manifold üzerinde yapılan işlemler yerel dönüşümler sayesinde diğer manifoldlar için de kolaylıkla elde edilebilir. Yani, manifoldlar arasında geçiş yapmamıza izin veren ayrık iki dönüşüm $u \to v,\ v \to u,\ w \to w$ ve $u \to w,\ v \to v,\ w \to u$ şeklindedir.

İlk adım olarak, tanım 4.5 de verilen $M_1 = \{S_1 = 0,\, S_2 = 0,\, S_3 = 0,\ Q\,[u] = 0\}$ manifold altında $\tau \neq 0$ ile Q operatörünü bulmak için değişmezlik şartı uygulanır ve aşağıdaki belirleyici denklem sistemi elde edilir. Ayrıca, 1. tip $Q-$koşullu simetrileri bulmak için elde edilen belirleyici denklemler ile Lie simetrilerini bulmak için elde edilen belirleyici denklemler oldukça benzerdir, bunu göstermek için bu belirleyici denklemlerden bahsedilecektir. LVD sistemi için klasik Lie simetrilerini elde ederken kullanılan belirleyici denklemler

$$
\begin{aligned}
&\tau_x = \tau_u = \tau_v = \tau_x = \xi_x = \xi_u = \xi_v = \xi_w = 0\\
&\eta_{uu} = \eta_{uv} = \eta_{vv} = \eta_{ww} = \eta_{uw} = \eta_{vw} = 0\\
&\phi_{uu} = \phi_{uv} = \phi_{vv} = \phi_{ww} = \phi_{uw} = \phi_{vw} = 0\\
&\eta_{xv} = \eta_{xw} = \phi_{xw} = \psi_{xv} = 0\\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\phi_u = (\lambda_1 - \lambda_3)\psi_u = 0\\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\eta_v = (\lambda_2 - \lambda_3)\psi_v = 0\\
&(\lambda_1 - \lambda_2)\eta_w = (\lambda_2 - \lambda_3)\phi_w = 0\\
&2\xi_x - \tau_t = 0\\
&2\tau\phi_{xu} + (\lambda_2 - \lambda_1)\xi\phi_u = 0\\
&2\tau\psi_{xu} + (\lambda_3 - \lambda_1)\xi\psi_u = 0\\
&2\eta_{xu} + \lambda_1\xi_t = 0\\
&2\phi_{xv} + \lambda_2\xi_t = 0\\
&2\psi_{xw} + \lambda_3\xi_t = 0\\
&\eta C_{1u} + \phi C_{1u} + \psi C_{1u} + \eta_{xx} - \lambda_1\eta_t + (2\xi_x - \eta_u)C_1 - \eta_v C_2 - \eta_w C_3 = 0\\
&\eta C_{2u} + \phi C_{2v} + \psi C_{2w} + \phi_{xx} - \lambda_2\phi_t + (2\xi_x - \phi_v)C_2 - \phi_u C_1 - \phi_w C_3 = 0\\
&\eta C_{3u} + \phi C_{3v} + \psi C_{3w} + \psi_{xx} - \lambda_3\psi_t + (2\xi_x - \psi_w)C_3 - \psi_u C_1 - \psi_v C_2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.148}
$$

şeklindedir. Bu denklem sistemi ile 1.tip Q- koşullu simetriler elde edilirken kullanılan belirliyici denklem sistemi arasındaki farklardan biri (4.148) sistemindeki 5. denklemin 1.tip Q- koşullu simetrilerin belirleyi denklemleri arasında bulunmaması ve de (4.148) sistemindeki 15. ve 16. denklemler yerine

$$\begin{aligned}
&\eta C_{2u} + \phi C_{2v} + \psi C_{2w} + (\lambda_1 - \lambda_2)\tfrac{\eta}{\tau}\phi_u + \phi_{xx} - \lambda_2\phi_t + (2\xi_x - \phi_v)C_2 - \phi_u C_1 - \phi_w C_3 = 0 \\
&\eta C_{3u} + \phi C_{3v} + \psi C_{3w} + (\lambda_1 - \lambda_3)\tfrac{\eta}{\tau}\psi_u + \psi_{xx} - \lambda_3\psi_t + (2\xi_x - \psi_w)C_3 - \psi_u C_1 - \psi_v C_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.149}$$

denklemlerin olmasıdır. Bu denklemleri dikkatlice incelediğimizde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ olduğu durumda LDV sistemindeki (4.141) her biri 1. tip $Q-$koşullu simetri olarak kabul edilir ve onlar Lie simetrileri ile örtüşür. Bu yüzden, (4.141) sistemini en az iki farklı lamda değeri için düşünülmesi gerekmektedir.

İkinci adım olarak, bu belirleyici denklem sisteminin çözümü elde edilir. Ayrıca, elde edilen bütün Q-koşullu simetriler, not kullanılarak daha basit formlar için indirgenmiştir. Bu yapıldığında, özel katsayılar ile LVD sisteminin 1. tip $Q-$koşullu simetrilerine ulaşılır. Difüzyon katsayılarına bağlı olarak üç farklı durum incelenmelidir. Bu yüzden

(i) λ_k keyfi pozitif sabit olması,

(ii) ya $\lambda_1 = \lambda_2$ yada $\lambda_1 = \lambda_3$ olması,

(iii) $\lambda_2 = \lambda_3$ olması durumları incelenmelidir.

Son adım ise $M_1 = \{S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ Q\,[u] = 0\}$ için önceki adımlarda elde edilen operatörleri kullanarak $M_1^{(2)} = \{S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ Q\,[v] = 0\}$ ve $M_1^{(3)} = \{S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ Q\,[w] = 0\}$ manifoldları için yukarıda bahsedilen yerel dönüşümler ile bütün 1. tip $Q-$koşullu simetri operatörlerini elde etmektir.

Şimdi (i) durumu incelenecektir. RD sisteminin özel bir hali olan LVD sistemi için yapılan işlemlerde

$$\begin{aligned}
C_1(u,v,w) &= u(a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w) \\
C_2(u,v,w) &= v(a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w) \\
C_3(u,v,w) &= w(a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w)
\end{aligned} \tag{4.150}$$

C_k $(k = 1,2,3)$ fonksiyonları yukardaki gibi seçilmiştir. (4.148) sistemindeki 5. denklem hariç ve son iki denklem yerine (4.149) daki denklemlerin 1. tip $Q-$koşullu simetri operatörü için belirleyici denklemler olduğundan bahsedilmişti. (4.148) sistemindeki ilk 5 denklemden sonsuz küçükler

$$\begin{aligned}
\tau &= \tau(t) \\
\xi &= \xi(t,x) \\
\eta &= r^1(t,x)u + q^1(t)v + h^1(t)w + p^1(t,x) \\
\phi &= r^2(t,x)v + q^2(t,x)u + h^2(t)w + p^2(t,x) \\
\psi &= r^3(t,x)w + q^3(t,x)u + h^3(t)v + p^3(t,x)
\end{aligned} \tag{4.151}$$

bulunur.(4.150) ve (4.151) da verilen fonksiyonlar ile (4.148) ve (4.149) da bulunan sonsuz küçükler diğer denklemlerde yerine yazıldığında, (4.148) sistemindeki 6. ve 7. denklemlerden $q^1 = h^k = 0,\ (k = 1,2,3)$ bulunur iken diğerleri aşağıdaki denklem sisteminde verilmiştir

$$\begin{aligned}
& c_1p^1 = d_1p^1 = d_2p^2 = c_3p^3 = 0, \\
& (b_1 - b_2)q^2 = 0, \\
& (d_1 - d_2)q^2 = 0, \\
& (b_1 - b_3)q^3 = 0, \\
& (c_1 - c_3)q^3 = 0, \\
& 2\xi_x - \tau_t = 0, \\
& 2r^k_x + \lambda_k\xi_t = 0, \\
& c_k(r^2 + 2\xi_x) = 0, \\
& d_k(r^3 + 2\xi_x) = 0, \\
& c_1q^2 + d_1q^3 + b_1(r^1 + 2\xi_x) = 0, \\
& (2c_2 - c_1)q^2 + d_2q^3 + b_2(r^1 + 2\xi_x) = 0, \\
& c_3q^2 + (2d_3 - d_1)q^3 + b_3(r^1 + 2\xi_x) = 0, \\
& (\lambda_j - \lambda_1)\xi q^j + 2\tau q^j_x = 0, \\
& r^1_{xx} - \lambda_1 r^1_t + 2a_1\xi_x + 2b_1p^1 + c_1p^2 + d_1p^3 = 0, \\
& r^2_{xx} - \lambda_2 r^2_t + 2a_2\xi_x + b_2p^1 + 2c_2p^2 + d_2p^3 = 0, \\
& r^3_{xx} - \lambda_3 r^3_t + 2a_3\xi_x + b_3p^1 + c_3p^2 + 2d_3p^3 = 0, \\
& q^j_{xx} - \lambda_j q^j_t + (a_j - a_1)q^j + b_jp^j + \tfrac{\lambda_1 - \lambda_j}{\tau} q^j r^1 = 0, \\
& p^k_{xx} - \lambda_k p^k_t + a_kp^k + \tfrac{\lambda_1 - \lambda k}{\tau} q^k p^1 = 0,
\end{aligned} \tag{4.152}$$

burada $k = 1,2,3$ ve $j = 2,3$ şeklindedir. İlk olarak, (4.152) sistemindeki 2. ve 5.

denklemler arasındaki denklemlerden

$$\left(q^2\right)^2+\left(q^3\right)^2\neq 0$$

olması gerektiği görülür, aksi takdirde Lie simetrileri araştırılırken ki denklemlerle örtüşür. Bu yüzden burada iki farklı alt durumun incelenmesi gerekir. $(i.i)$ $q^2\neq 0,\ q^3=0,$ $(i.ii)$ $q^2\neq 0,\ q^3\neq 0$ aslında $(i.iii)$ $q^2=0,\ q^3\neq 0$ olduğu durumda söz konusudur fakat bunu yine de ayrı incelemeye gerek yoktur. Çünkü, (i) durumuna ayrık dönüşümler

$$u\leftrightarrow w,\ a_2\leftrightarrow a_3,\ b_2\leftrightarrow b_3,\ c_2\leftrightarrow c_3,\ d_2\leftrightarrow d_3$$

uygulanarak $(i.iii)$ durumu elde edililir. Şimdi $(i.i)$ alt durumunu incelenecektir. (4.142) deki kısıttan dolayı, (4.152) sistemindeki ilk denklemden $p^1=0$ olur.(4.152) sistemindeki 6-8 denklemlerinden

$$\xi_{xx}=r_x^k=\xi_t=0,\ (k=1,2,3) \tag{4.153}$$

elde edilir. (4.152) sistemindeki 2., 10. ve 11. denklemler yardımıyla katsayılar ile ilgili $b_1=b_2=b$, $c_1=c_2=c$ ve $d_1=d_2=d$ kısıtları bulunur. Dahası, (4.152) sistemindeki $j=3$ konulduğunda 17. denklemden $b_3p^3=0\Longrightarrow p^3=0,\ b_3\neq 0$ (eğer $b_3=0$ olursa (4.152) sistemindeki 12. denklemde yerine konulduğunda $c_3=0$ bulunur ki buda (4.142) da verilen kısıt ile çelişir). Biz artık $b_3\neq 0$ olduğunu bilerek, ayrıca $c_3\neq 0$ varsayımıyla devam edeceğiz. (4.152) sistemindeki 12. denklem x e göre türevlenediğinde (4.153) yardımıyla $q_x^2=0$ bulunur. $q_x^2=0$ olduğundan dolayı $j=2$ ile sistemdeki 12. denklem yazıldığında $\xi=0$ bulunur ve 8. denklemden $r^2=0$ bulunur. Sistemdeki 15. denklemden $cp_2=0$ cebirsel şartına indirgenir, bu yüzden sistemin 1. denkleminden $p^1=p^2=0$ bulunur. Böylece denklem sistemindeki son denklem yok olur.

Son olarak, sistemdeki 10. ve 12. denklemlerden $q^2=-\frac{b_3}{c_3}r^1,\ b=\frac{b_3}{c_3}c$, $j=2$ ile sistemdeki 17. denklem ile 14. denklemden $r^1=\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ ve sistemdeki 16. denklemden $r^3=\beta=sabit$ bulunur. Böylece $(i.i)$ alt durumu için belirleyici denklem sistemi çözülmüştür. Sonuç olarak LVD sistemi,

$$\begin{aligned}\lambda_1 u_t &= u_{xx} + u\left(a_1 + \tfrac{b_3}{c_3}cu + cv + dw\right)\\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v\left(a_2 + \tfrac{b_3}{c_3}cu + cv + dw\right)\\ \lambda_3 w_t &= w_{xx} + w\left(a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 w\right)\end{aligned} \tag{4.154}$$

şeklinde olur ve bunun için 1. tip $Q-$koşullu simetri operatörü

$$Q \equiv \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u \left(\partial_u - \frac{b_3}{c_3}\partial_v\right) + \beta w \partial_w \tag{4.155}$$

dir.

Sistemdeki 8. ve 9. denklemlerdeki katsayılar ile ilgili kısıt ya $d = d_3 = 0$ yada $\beta = 0$ şeklindedir. Yinede, $d = d_3 = 0$ durumunda, $Q = \beta w \partial_w$ operatörü (4.154) denkleminin klasik Lie simetrilerinden biridir. Genelliği bozmaksızın , (4.155) operatöründe $\beta = 0$ alınırsa

$$Q \equiv \partial t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u \left(\partial u - \frac{b_3}{c_3}\partial v\right) \tag{4.156}$$

olur. (4.154) ve (4.156) yardımıyla, yani burada $b_3 u \longrightarrow u,\ c_3 v \longrightarrow v$ ve $c \longrightarrow c_3 b$ dönüşümleri yapılarak

$$Q \equiv \partial t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u \left(\partial u - \partial v\right)$$

1. tip $Q-$koşullu simetri operatörü elde edilir. Ayrıca bu üreteçler bulunurken $c \neq 0$ varsayımı yapılmıştı. $c = 0$ olduğunda üretec bulunup bulunmadığı kontrol edilmelidir. Benzer şekilde $(i.ii)$ durumu incelenmelidir.

Böylece (4.154) de elde edilen üreteç $(i.i)$ durumunda elde edilmiştir, uygun dönüşümlerlerle $(i.iii)$ durumundaki denklem

$$\begin{aligned}\lambda_1 u_t &= u_{xx} + u\left(a_1 + \tfrac{b_2}{d_2}cu + cw + dv\right)\\ \lambda_3 v_t &= v_{xx} + v\left(a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 w\right)\\ \lambda_2 w_t &= w_{xx} + w\left(a_3 + \tfrac{b_2}{d_2}cu + cw + dv\right)\end{aligned}$$

şeklinde olur ve üreteç

$$Q \equiv \partial t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u \left(\partial u - \frac{b_2}{d_2}\partial w\right) \tag{4.157}$$

şeklindedir.

$M_1^{(1)}$ manifoldu üzerinde bulunan bu üreteçleri uygun dönüşümlerle $M_1^{(2)}$ ve $M_1^{(3)}$ manifoldları üzerinde yazalım. (4.156) ve (4.157) üretecleri sırasıyla $M_1^{(2)}$ ve $M_1^{(3)}$manifoldları üzerindeki üreteçlerdir

$$
\begin{aligned}
&Q \equiv \partial t + \tfrac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2} v \left(\partial v - \tfrac{b_3}{c_3}\partial u\right), && Q \equiv \partial t + \tfrac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2} v \left(\partial v - \tfrac{b_3}{c_3}\partial u\right) \\
&Q \equiv \partial t + \tfrac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2} w \left(\partial w - \tfrac{b_3}{c_3}\partial v\right), && Q \equiv \partial t + \tfrac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2} w \left(\partial w - \tfrac{b_2}{d_2}\partial u\right).
\end{aligned}
$$

Bu üreteçler (i) durumunda bulunan üreteçlerdir. Bütün üreteçlerin bulunması için diğer iki durumda incelenmelidir (Chernia and Davydovych, 2013) .

BÖLÜM 5

$Bölüm5$

BÖLÜM 5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında klasik Lie simetrilerinden farklı olarak denkleme ilave edilen diferensiyel şartlar yardımıyla bulunan Q-koşullu simetriler incelenmiştir. Öncelikle bu diferensiyel kısıtlar ile denklemin en genel hali için çözümler yapılmıştır. Daha sonra ise özel seçimlerle farklı koşullu simetriler bulunabildiği gösterilmiştir. Bu yöntemin üstünlüğü Lie simetrileriyle elde edilemeyen bir çok üretecin bulunması iken bu yöntemin denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasında ve denklemlerin indirgenmesinde büyük avantaj sağladığı bilinmektedir. Ayrıca bulunan koşullu simetrilerin uygun dönüşümlerle genişletilebilmesi de oldukça önemli bir sonuçtur. Bu yöntemin dezavantajlarından biri daha az belirleyici denkleme sahip olunması iken diğeri lineer olmayan denklemlerle karşılaşılmasıdır.

Bu yöntemdeki kısıtlardan birisi de ξ^0 sonsuz küçüğünün genelliği bozmaksızın $\xi^0 = 1$ olarak alınmasıdır. Bu, denklemin standart (aşikar) üreteçlerinden farklı üreteçler bulunmasına imkan sağlar iken, bu kısıtın $\xi^0 = 0$ alındığında genelliği bozmaksızın $\xi^1 = 1$ olarak alınmasıdır.

Sonuç olarak biz bu çalışmada birinci mertebeden oluşum denklemleri olan Kolmogorav Petrovski, Bond Princing ve Dispersive Long dalgası için Lie simetrilerinden farklı olan koşullu simetriler bulunmuştur.

Literatürde yapılan çalışmalar genellikle t ye göre birinci mertebeden türev bulunduran oluşum denklemleri (u_t içeren denklemler) ile ilgilidir. Bunun sebebi u_{tx}, u_{tt} içeren denklemlerde daha karmaşık olan lineer olmayan denklemlerin ortaya çıkmasıdır.

İleriki çalışmalarda t ye göre birinci mertebeden türev bulunduran 3. mertebeden diferensiyel denklemlere bu yöntem uygulanarak Q- koşullu simetriler elde edilecektir. Yöntemin uygulanmasında teorik açıdan bir sıkıntı ile karşılaşılmaz, fakat elde edilen denklemlerde uygun kısıtlar ile işlemler yapmak gerekebilir. Ayrıca, 2. mertebeden oluşum denklemleri için çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Açil M., 2013, Yüksek lisans tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 36 s.

Aliyev G. G.,1995, Kısmi türevli diferensiyel denklemler,Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 229 s.

Aydın M., Kuryel B., Gündüz G. ve Oturanç G., 2005, Diferansiyel denklem ve uygulamaları, Barış yayınları, 554 s.

Bluman G. W., Anco S.C., 2002, Symmetry and integration methods for differential equations with 18 illustrations, Springer-Verlag, New York, 419 p.

Bluman G.W., Kumei, S., 1989, Symmetries and differential equations with 21 illustrations, Springer-Verlag, New York, 412 p.

Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C., 2010, Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 398 p.

Cherniha R., 2007, New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology, J. Math. Anal. Appl., 326, 783-799

Cherniha R., 2010, Conditional symmetries for systems of PDEs: New definitions and their application for reaction-diffusion system, J. Phys. A: Math. and Theor., 43,405207 (13pp)

Cherniha R., Davydovych V., 2011, Conditional symmetries and exact solutions of the diffusive Lotka-Volterra system, Math. and Comp. Modelling: An International Journal, 54, 1238-1251

Cherniha R., Davydovych V., 2012, Conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion systems with non-constant diffusivities, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 3177–3188

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Cherniha R., Davydovych V., 2013, Lie and conditional symmetries of the three component diffusive Lotka-Volterra system, J. Phys. A: Math. and Theo., 46, 14 p.

Chernia R., Pliukhin O., 2013, New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities, J. Math. Anal. Appl., 403, 23–37

Cherniha R., Serov M., 1997, Lie and non-Lie Symmetries of nonlinear diffusion equations with convection term, Symmetry in Nonlinear Math. Physics, 2, 444–449

Chernia R. , Serov M., 2002, Nonlinear Diffusion-Convection Systems: Lie and Q-conditional symmetries, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 43, 102–110

Chernia R. and Serov M., 2003, Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries ansätze and solutions, J. Math. Anal. Appl. 282, 305–328

Çelebi G., 2010, Adi diferensiyel denklemlerin simetrileri ve çözümleri, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 88 s.

Çelebi O., Çağlayan M., 2010, Kısmi diferensiyel denklemler, Dora Basın-yayın-dağıtım, 268 s.

Debnath L., 2004, Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers, Library of Congress Cataloging in Publication Data, 737 p.

Erdem A., 2009/2010, Adi diferensiyel denklem ders notları, 127 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Foursov M.V., Vorob'ev E.M. ,1996, Solutions of the nonlinear wave equation $u_{tt} = (uu_x)_x$invariant under conditional symmetries, J.Phys. A: Math. Gen. 29, 6363-6373

Fushchych W.I., 2002, Conditional symmetry of equations of nonlinear mathematical physics, Scientific Works., 4, 415–431.

Hasanov A., 2010, Kısmi türevli denklemler, Literatür yayıncılık, İstanbul, 429 s.

Hashemi M.S., Nucci M.C, 2013, Nonclassical symmetries for a class of reaction-diffusion equations: the method of Heir equations, Journal of Nonlinear Math. Physics, 20, 44-46

Ivanova N.M., Sophocleous C., 2010, On nonclassical symmetries of generalized Huxley equations, arXiv:1010.2388v1

Kiraz Açıl F., 2007, Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin Lie simetrileri üzerine, Doktora tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 96 s.

Koca K., 2001, Kısmi türevli denklemler, Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara, 233 s.

Olver P. J., 1993, Applications of Lie groups to differential equations second edition, Springer-Verlag, New York, 513 p.

Özer M. N., Eser D., 2002, diferensiyel denklemler (teori ve uygulamaları), Birlik Ofset ve Matbacılık, Eskişehir, 501s.

Popovych R., 1997, On reduction and Q-conditional (nonclassical) symmetry, Symmetry in Nonlinear Math. Physics, 2, 437–443

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Popovych R., 2002, Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation , arXiv:math-ph/0208005v1

Ross S., 1984, Differential equations, Library of Congress Cataloging in Puplication Data, New York, 807 p.

San S., 2011, Kısmi diferensiyel denklemlerin simetrileri ve çözümleri, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 77 s.

Samokhin A., 2014, Gradient catastrophes and sawtooth solutions for a generalized Burgers equation on an interval, Journal of Geometry and Physics, (article in press)

Tuncer T., 1992, Kısmi türevli diferansiyel denklemler, Prof. Dr.Nazım Terzioğlu basım atölyesi, İstanbul, 544 s.

Turgay N. C., 2006, diferensiyel denklemlerin klasik olmayan simetrileri ve uygulamaları, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 32 s.

Yakut A., 2012, Kısmi diferensiyel denklemler için korunumluk kanunları, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 96 s.

Zhdanov R. Z. ,Tsyfra I. M., Popovych R. O., 1999, A precise definition of reduction of partial differential equations, J. Math. Analysis and Applications 238, 101-123