

Özel Bir q -Deforme Fermiyonik Kuantum Gaz Modelinin Matematiksel ve Termo-
İstatistiksel Özellikleri

Gözde Topçu

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Temmuz 2015

Mathematical and Thermostatistical Properties of a Specific q -Deformed Fermionic
Quantum Gas Model

Gozde Topcu

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

July 2015

Özel Bir q -Deforme Fermiyonik Kuantum Gaz Modelinin Matematiksel ve Termo-
İstatistiksel Özellikleri

Gözde Topçu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Dursun İrk

Temmuz 2015

Bu tez TÜBİTAK tarafından 113F226 no'lu araştırma projesi çerçevesince desteklenmiştir.

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Güzde Topçu'nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Özel Bir q -Deforme Fermiyonik Kuantum Gaz Modelinin Matematiksel ve Termo-İstatistiksel Özellikleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Dursun İrk

İkinci Danışman : Prof. Dr. Abdullah Alğın

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Abdullah Alğın

Üye : Prof. Dr. İdiris Dağ

Üye : Doç. Dr. Yılmaz Dereli

Üye : Doç. Dr. Dursun İrk

Üye : Yrd. Doç. Dr. Derya Peker

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Abdullah Alğın ve Doç. Dr. Dursun İrk danışmanlığında hazırlamış olduğum “Özel Bir q-Deforme Fermiyonik Kuantum Gaz Modelinin Matematiksel ve Termo-İstatistiksel Özellikleri” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 20/07/2015

GÖZDE TOPÇU
İmza

ÖZET

Bu tezde ilk olarak, özdeş parçacık sistemlerinin genel özellikleri anlatıldı. Daha sonra, özdeş parçacık sistemlerinden biri olan fermiyonların genel kuantum mekaniksel özelliklerinden bahsedildi. İkinci olarak, özel bir fermiyon cebiri olan PVC-tipli q -deforme fermiyon modelinin kuantum cebirsel özellikleri ele alındı.

Tezin orjinal bölümlerinden biri olan dördüncü bölümde, PVC-fermion modeline ait fermiyonik Jackson türev operatörünün matematiksel özellikleri incelendi. Bu bölümün ilk kısmında PVC-tipli fermiyonik q -türev operatörüne ait lineerlik, Leibnitz kuralı gibi özelliklere yer verildi. $\exp(x)$ gibi bazı standart fonksiyonların kuantum analiz'deki karşılık gelen benzerleri bulundu. Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise, PVC-tipli fermiyonik q -integral formu ve özellikleri incelendi. Bu modele özgü belirsiz q -integral, genelleştirilmiş integral gibi özellikler ele alındı.

Tezin bir diğer orjinal bölümü olan beşinci bölümde ise PVC-fermion gazı modelinin parçacık yoğunluğu, deforme Fermi-Dirac fonksiyonları gibi genel termostatistiksel özellikleri incelendi. Daha sonra, PVC-fermion gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki iki ve üç boyutlu uzay halleri için ayrı ayrı hal denklemleri ve ilk beş virial katsayıları bulunarak, q deformasyon parametresinin etkileri incelendi.

Son olarak, PVC-fermion gazı modelinin dördüncü ve beşinci bölümlerde incelenen matematiksel ve fiziksel özelliklerine fermiyonik deformasyonun etkileri detaylıca incelendi. Buradan hareketle modelin olası uygulama alanları ayrıca tartışıldı.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Analizi, q -Analizi, Jackson Türevi, Fermiyon, Fermi Sistemleri, Deforme Fermi Gazı Modeli, Deforme Fermiyonlar, Fermi-Dirac İstatistiği, Virial Açılımı, Kuantum İstatistiği.

SUMMARY

In this thesis, general properties of identical particle systems were first examined. Then, general quantum mechanical properties of fermions, which are one of the identical particle systems, were mentioned. Secondly, the quantum algebraic properties of a specific fermion algebra called the PVC-type q -deformed fermion model were introduced.

In one of the original sections of this thesis, namely the fourth section, some of the mathematical properties of the fermionic Jackson derivative operator belonging to the PVC-fermion gas model were studied. In the first part of this section, some properties of PVC type q -derivative operator such as linearity, Leibnitz's rule were examined. Also, the q -analogues of some standard functions such as $\exp(x)$ were defined. In the second part of the fourth section, PVC-type fermionic q -integral form and its properties were studied. Some particular properties for this model related to the indefinite q -integral, the improper q -integral were described.

In another original section of this thesis, namely the fifth section, general thermostatistical properties of the PVC-fermion gas model such as the particle density, the deformed Fermi-Dirac functions were discussed. For high temperatures and for two and three spatial dimensions, the equation of state of the PVC-fermion gas model with its first five virial coefficients was obtained, and the effects of the deformation parameter q on these properties were investigated.

Finally, from the results obtained in the fourth and fifth sections, the effects of fermionic deformation on the mathematical and physical properties of the PVC-fermion gas model were examined in detail. From this point of view, possible application areas of this model were also discussed.

Keywords: Quantum Calculus, q -Analysis, Jackson Derivative, Fermion, Fermi Systems, Deformed Fermi Gas Model, Deformed Fermions, Fermi-Dirac Statistics, Virial Expansion, Quantum Statistics.

TEŞEKKÜR

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'ın 113F226 nolu ve "İki ve Üç Boyutta Deforme Parçacık Sistemlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri ve Fiziksel Uygulamaları" adlı araştırma projesi kapsamında desteklenmiştir.

Yüksek lisans tez çalışmalarım ve proje çalışmalarım boyunca bana her zaman destek olan, bilgileri ve erdemleriyle yol gösteren saygı değer hocam ve ikinci danışmanım Prof. Dr. Abdullah Alğın'a çok teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans derslerim sırasında ve bilgisayar programları konusunda yardımlarını esirgemeyen birinci danışmanım Doç. Dr. Dursun İrk'a teşekkür ediyorum.

Ayrıca proje çalışmalarım süresince bana destek olan arkadaşım, Fizik Bölümü doktora öğrencisi, Mustafa Şenay'a teşekkür ediyorum.

Her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme de teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. STANDART FERMİYONİK KUANTUM CEBİRİ	5
2.1. Fermiyon Nedir?	5
2.2. Fermiyon Cebiri	9
3. PVC-TİPLİ q-DEFORME FERMİYONLAR	20
3.1. PVC q -Fermiyon Cebiri	20
4. FERMİYONİK q-ANALİZİ	23
4.1. PVC-Tipli q -Türev Operatörü ve Özellikleri	23
4.2. PVC-Tipli q -İntegral Formu ve Özellikleri	37
5. PVC-FERMİYON GAZI MODELİNİN TERMO-İSTATİSTİĞİ	45
5.1. Modelin Genel Termo-İstatistiksel Özellikleri	45
5.2. Modelin Yüksek Sıcaklıklardaki Termo-İstatistiksel Özellikleri	53
5.2.1. Modelin 3-boyutlu uzayda virial katsayıları	55
5.2.2. Modelin 2-boyutlu uzayda virial katsayıları	60
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	66
KAYNAKLAR DİZİNİ	71

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

EK AÇIKLAMALAR	75
Ek Açıklama-A	$\exp_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu75
Ek Açıklama-B	$\ln_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu77
Ek Açıklama-C	$\frac{d}{dx}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu79
Ek Açıklama-D	$\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu80
Ek Açıklama-E	$\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 1,1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu81
Ek Açıklama-F	$\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,1$ aralığında farklı q değerlerine göre değişimini veren Matlab R2013b kodu82
Ek Açıklama-G	$\frac{d}{dx}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu83
Ek Açıklama-H	$\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu84
Ek Açıklama-I	q -Deforme Fermi-Dirac (FD) dağılım fonksiyonu $n(\eta, q)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre $0 < q < 1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu85

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

Ek Açıklama-J	Standart FD dağılım fonksiyonu $n(\eta)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Matlab R2013b kodu86
Ek Açıklama-K	q -Deforme FD fonksiyonlarından $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ ve $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu87
Ek Açıklama-L	Standart FD fonksiyonlarından $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu88
Ek Açıklama-M	$a_2(q)$ ve $a_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu90
Ek Açıklama-N	$a_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu91
Ek Açıklama-O	$a_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu92
Ek Açıklama-P	$\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu93
Ek Açıklama-R	$\tilde{a}_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu94
Ek Açıklama-S	$\tilde{a}_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu95

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. $\exp_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi	27
4.2. $\ln_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi	28
4.3. $\frac{d}{dx}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimi ($c = 2$ alınmıştır)	30
4.4. $\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi ($c = 2$ alınmıştır)	31
4.5. $\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 1,1$ aralığındaki değişimi ($c = 2$ alınmıştır) ..	32
4.6. $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,1$ aralığında farklı q değerlerine göre değişimi ($c = 2$ alınmıştır)	33
4.7. $\frac{d}{dx}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimi ($c = 2$ alınmıştır)	35
4.8. $\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi ($c = 2$ alınmıştır)	36
5.1. q -Deforme FD dağılım fonksiyonu $n(\eta, q)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre $0 < q < 1$ aralığındaki değişimi	46
5.2. Standart FD dağılım fonksiyonu $n(\eta)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimi	47
5.3. q -Deforme FD fonksiyonlarından $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ ve $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimi	50
5.4. Standart FD fonksiyonlarından $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimi	52
5.5. $a_2(q)$ ve $a_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimi	57

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.6. $a_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen değer, $q = 0,4493$ noktasıdır ve bu nokta $a_3(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.	58
5.7. $a_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen değer $q = 0,4562669$ noktasıdır ve bu çizgi $a_5(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.	59
5.8. $\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimi	62
5.9. $\tilde{a}_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen değer $q = 0,3563$ noktasıdır, bu çizgi $\tilde{a}_3(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.	63
5.10. $\tilde{a}_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen $q = 0,5969193$ değeri $\tilde{a}_5(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.	64

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

$a_n(q)$	Üç boyutlu uzayda q -deforme virial katsayıları
$\tilde{a}_n(q)$	İki boyutlu uzayda q -deforme virial katsayıları
\hat{b}	Standart bozonik yok etme operatörü
\hat{b}^+	Standart bozonik yaratma operatörü
C	Kompleks sayılar kümesi
$\frac{d}{dx}$	Standart türev operatörü
$\hat{D}_x^{(q)}$	PVC-tipli fermiyonik Jackson türev operatörü
$\exp_q(x)$	Deforme üstel fonksiyon
ε	Kinetik enerji
$f_n(z)$	Standart Fermi-Dirac fonksiyonu
\hat{f}	Standart fermiyonik yok etme operatörü
\hat{f}^+	Standart fermiyonik yaratma operatörü
\tilde{f}	Deforme fermiyonik yok etme operatörü
\tilde{f}^+	Deforme fermiyonik yaratma operatörü
h	Planck sabiti
\hbar	$h/2\pi$
$h_n(z, q)$	3-boyutlu uzayda q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları
$\tilde{h}_n(z, q)$	2-boyutlu uzayda q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları
\hat{H}	Hamilton operatörü
${}^f \mathcal{H}^s$	Fermiyonik Fock uzayı
k	Boltzmann sabiti

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
λ	Isıl dalga boyu
$\ln_q(x)$	Deforme logaritma fonksiyonu
μ	Kimyasal potansiyel
$n(\eta)$	İdeal Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu
$n(\eta, q)$	q -Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu
\hat{N}	Fermiyon sayı operatörü
$[\hat{N}]$	Deforme fermiyonik sayı operatörü
$[n]$	Fermiyonik q -temel tamsayısı
\vec{p}	Momentum
P	Basınç
\hat{P}	Permütasyon operatörü
Ψ_i	Tek-parçacık dalga fonksiyonu
q	Reel pozitif deformasyon parametresi
\vec{r}_i	i . parçacığın konum vektörü
R	Reel sayılar kümesi
\vec{s}_i	i . parçacığın spin vektörü
T	Mutlak sıcaklık
U	İç enerji
z	Fugasite
Z	Büyük bölüşüm fonksiyonu
Z^{PVC}	PVC-modelinin fermiyonik büyük bölüşüm fonksiyonu

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)**Kısaltmalar****Açıklama**

FD

Fermi-Dirac

JD

Jackson türevi

PVC

Parthasarathy-Viswanathan-Chaichian

1. GİRİŞ

Kütle, yük, spin v.b. bütün gözlenebilir iç, özgün özellikleri aynı, bu fiziksel özellikleri ile birbirlerinden ayırt edilemeyen parçacıklara özdeş parçacıklar denir (Dereli ve Verçin, 2009). Klasik mekanik'te, özdeş parçacıklar belli bir halde sıralanabilirler ve her parçacığın yörüngesi izlenebilirdir. Bunun sonucu olarak bu parçacıkları birbirlerinden ayırt etmek mümkün olur. Kuantum mekaniği'nde ise, klasik mekanik'teki gibi yörünge kavramı olmadığından özdeş parçacıklar birbirinden ayırt edilemezlerdir. Bu yüzden sistem, sonlu veya tüm uzaya dağılmış dalga fonksiyonu ile betimlenir (Erbil, 2014; Dereli ve Verçin, 2009).

Kuantum mekaniği'nde özdeş parçacıklar, bozonlar ve fermiyonlar olmak üzere ikiye ayrılır. Simetrik dalga fonksiyonuna sahip özdeş parçacıklar bozonlar olarak adlandırılırlar. Bozonların spinleri, \hbar birimlerinde 0, 1, 2, 3, ... gibi tam sayı değerlerini alır. Bozonlara örnek olarak α parçacığı, foton, döteron ve pion gibi parçacıklar verilebilir (Apaydın, 2004; Karaoğlu, 2008). Anti-simetrik dalga fonksiyonuna sahip özdeş parçacıklar fermiyonlar olarak adlandırılırlar. Fermiyonların spinleri ise \hbar birimlerinde $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ gibi yarım tam sayı değerlerini alır. Bir tek enerji durumuna birden fazla fermiyon yollanamaz. Bu, Pauli dışarlama ilkesi olarak adlandırılır (Apaydın, 2004). Bu ilkedен dolayı fermiyon durumları, tek parçacık içerebilir veya hiç parçacık içermeyebilir. Fermiyonlara örnek olarak elektron, proton, pozitron ve nötron gibi parçacıklar verilebilir (Apaydın, 2004; Karaoğlu, 2008).

Kuantum mekaniğinde, bozon ve fermiyon cebirleri Hilbert uzayları üzerinde tanımlıdır. Genel olarak, bozonların Hilbert uzayı, simetrik vektörlerden oluşurken; fermiyonların Hilbert uzayı, antisimetrik vektörlerden oluşur (Shankar, 1994). Boyu sonlu veya karesi integrallenebilir, yani

$$\|\Psi_i\|^2 = \int |\Psi_i(x)|^2 dx < \infty \quad (1.1)$$

özelliğine sahip fonksiyonların iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Dereli ve Verçin, 2009). Burada Ψ_i , i . kuantum indisi ile temsil edilen tek-parçacık dalga fonksiyonudur. Hilbert uzayında, Ψ_i ve Ψ_j tek-parçacık dalga fonksiyonlarının iç çarpımı,

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \int_{\text{Tüm uzay}} \Psi_i^*(x) \Psi_j(x) \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Dereli ve Verçin, 2009). Burada (*) işlemi sanal eşlenik alma işlemidir. Hilbert uzayında, $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{ij}$ koşulunu sağlayan $\{\Psi_i\}$ fonksiyonlar kümesine kesikli ortonormal fonksiyon kümesi denir (Dereli ve Verçin, 2009). Bu küme, boyları bir ve birbirine dik fonksiyonlardan oluşur. N tane tek-parçacık Hilbert uzaylarının birleşiminden, N -parçacık Hilbert uzayı oluşur (McMillan, 1996; Blank vd., 2008). N -parçacık Hilbert uzayının alt-uzayları, bozonik ve fermiyonik Hilbert uzayları olmak üzere ikiye ayrılır. Öte yandan, bozonik Fock uzayı, simetrik N özdeş bozondan oluşmuş Hilbert uzaylarının direk toplamıdır. Fermiyonik Fock uzayı ise anti-simetrik N özdeş fermiyondan oluşmuş Hilbert uzaylarının direk toplamıdır (McMillan, 1996; Blank vd., 2008). Bu tezin ikinci bölümünde, kuantum özdeş parçacıklar sistemleri olan fermiyon ve bozonların temel özellikleri verilecektir. Daha sonra, tezin diğer bölümlerinde fermiyonlarla ilgili çalışıldığından özel olarak standart fermiyon cebiri ele alınacaktır.

Bozonlar ve fermiyonlar için Fock uzayları üzerinde yaratma ve yok etme operatörleri tanımlanabilir. Bu operatörler, özdeş çok-parçacıklı sistemlerin dalga fonksiyonlarını oluşturmak için tanımlanır (Baym, 1974). Bozonik Fock uzayı üzerinde tanımlı yaratma ve yok etme operatörleri \hat{b}_0^+ ve \hat{b}_0 olmak üzere, bozonlar komütasyon ilişkilerine uygun davranırlar (Baym, 1974). Örneğin bir boyutlu hal için standart bozon cebiri;

$$[\hat{b}_0, \hat{b}_0^+] = 1, \quad [\hat{b}_0, \hat{b}_0] = [\hat{b}_0^+, \hat{b}_0^+] = 0 \quad (1.3)$$

şeklindedir. (Bu bağıntılarda $\hbar = 1$ varsayılmıştır). Fermiyonik Fock uzayı üzerinde tanımlı yaratma ve yok etme operatörleri \hat{f}_0^+ ve \hat{f}_0 olmak üzere, fermiyonlar da anti-komütasyon ilişkilerine uygun davranırlar (Baym, 1974). Yine bir boyutlu hal için standart fermiyon cebiri aşağıdaki şekildedir (Bu bağıntılarda da $\hbar = 1$ varsayılmıştır.):

$$\{\hat{f}_0, \hat{f}_0^+\} = 1, \quad \{\hat{f}_0, \hat{f}_0\} = \{\hat{f}_0^+, \hat{f}_0^+\} = 0 \quad (1.4)$$

Bu tez çalışmasında yoğun olarak fermiyonlar ve fermiyon cebirinin muhtemel genelleştirilmiş (veya deforme edilmiş) halleri çalışılacağından eşitlik (1.4)'teki standart bir boyutlu fermiyon cebiri bir başlangıç noktası olarak alınabilir. İşte bu şekilde literatürde gerek eşitlik (1.3), gerekse eşitlik (1.4) parçacık cebirleri ve olası deformasyonları üzerine hem matematiksel hem de fiziksel yönleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır (Biedenharn, 1989; Macfarlane, 1989; Ng, 1990; Parthasarathy ve Viswanathan, 1991; Lavagno ve Narayana Swamy, 2002 a, 2002 b; Schork, 2005). Bu bakımdan aynı zamanda bu tezin ana konusu olan ve eşitlik (1.4)'ün genelleştirilmiş bir formunu oluşturan yeni bir fermiyon cebiri ilk kez 1991 yılında Parthasarathy ve Viswanathan tarafından önerilmiştir (Parthasarathy ve Viswanathan, 1991). Bu fermiyon sisteminin bazı kuantum cebirsel özellikleri üçüncü bölümde verilmiştir. Yine bu fermiyonik kuantum cebirinin bazı istatistiksel özellikleri de standart fermiyonlardan farklı olarak ilk kez 1993 yılında kısmen ortaya konmaya çalışılmıştır (Chaichian vd., 1993). Bu tarihsel gelişiminden ötürü bu fermiyon sistemine Parthasarathy-Viswanathan-Chaichian (PVC)-tipli deforme fermiyon cebiri adı verilmiştir (Narayana Swamy, 2006 a). PVC-tipli deforme fermiyon cebirine ait matematiksel özellikler tezin dördüncü bölümünde ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Aynı zamanda bu cebir, PVC-tipli q -fermion cebiri olarak da anılır. Zira bu cebire ait özelliklerden yararlanarak fermiyonik Jackson türev operatörü ($\hat{D}_x^{(q)}$) da tanımlanmıştır (Narayana Swamy, 2006 a, 2006 b):

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{f(q^{-1}x) - f(-qx)}{q + q^{-1}} \right] \quad (1.5)$$

Esasen fermiyonik Jackson türev operatörü ve bu operatörün özellikleri, kuantum analizin bir parçasıdır. Kuantum analiz ise temeli 18. yüzyıla dayanan, matematiğin ve fiziğin bir çok alanı ile ilişkili, uygulamaları olan geniş bir konudur (Jackson, 1910; Exton, 1983; Kac ve Cheung, 2002; Aral vd., 2013). Klasik analiz yapısından yola çıkılarak kuantum analizi gelişirken; bilgisayar bilimi, parçacık fiziği, sayılar teorisi, teorik fizik gibi önemli alanlarda geniş çaplı uygulamalara sahip olmuştur (Ernst, 2012). Leonhard Euler (1707-1783), "Introductio" kitabında Newton'un sonsuz serileri konusunda q parametresini ilk tanıtan kişidir (Ernst, 2012). 1740'larda Euler, analitik sayılar teorisini tanıtarak kuantum analizin başlangıcını yapmıştır (Ernst, 2012). Euler'in özdeşlikleri, 1829'da

Jacobi'nin üçlü çarpım özdeşliğine, θ ve eliptik fonksiyonuna kılavuzluk etmiştir; ki bunlar, kuantum analizin temelleridir (Kac ve Cheung, 2002; Ernst, 2012).

Kuantum analizin tarihsel gelişimi; C. F. Gauss'un (1777-1855) hipergeometrik serileri ve onlarla ilişkili bazı bağıntıları bulmasıyla devam etmiştir. Gauss, daha sonra ilerde kuantum analizin temellerini teşkil edecek q -binom katsayıları gibi diğer bazı önemli bağıntıları da bulmuştur (Ernst, 2012). Analiz'de olduğu gibi, kuantum analiz'de de q -türev çalışıldıktan sonra q -antitürev ve q -integral çalışılmıştır. 1910 yılında, F. H. Jackson q -integrali tanımlamıştır (Jackson, 1910). Jackson, q -integrali sistematik olarak geliştiren ilk kişidir (Kac ve Cheung, 2002). Daha sonra, q -gamma ve q -beta fonksiyonlarının integral temsilleri de Sole ve Kac tarafından yapılmıştır (Aral vd., 2013). Bu tezde, özel olarak eşitlik (1.5)'te verilen PVC-tipli fermiyonik Jackson türev operatörünün ve buna bağlı olarak fermiyonik Jackson integralinin özellikleri dördüncü bölümde ayrıntılı olarak ele alınacaktır. PVC-tipli fermiyonik q -türev operatörünün lineerlik, Leibnitz kuralı gibi özellikleri; fermiyonik q -integralin ise belirli q -integral, geliştirilmiş q -integral gibi matematiksel özellikleri incelenecektir. Bu bölüm, henüz literatürde çalışılmamış orjinal kısımları da içermektedir.

Bu tezin beşinci bölümünde ise, üçüncü bölümde tanıtılan PVC-tipli q -fermion osilatörlerinin oluşturduğu PVC-fermion gazı modelinin genel termo-istatistiksel özellikleri incelenecektir. Daha sonra, modelin özellikle yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri ele alınacaktır. Burada iki ve üç boyutlu halde modelin hal denklemleri, virial katsayıları detaylı olarak çalışılacaktır. Tezin beşinci bölümü, PVC-fermion gazı modelinin henüz literatürde çalışılmamış yönlerini de kapsayan orjinal bir bölümdür.

2. STANDART FERMİYONİK KUANTUM CEBİRİ

2.1. Fermiyon Nedir?

Birinci bölümde tanımlandığı gibi birbirinden hiçbir deneysel yöntemle ayırt edilemeyen parçacıklara özdeş parçacıklar adı verilir (Dereli ve Verçin, 2009; Karaoğlu, 2008). Sistemin fiziksel özelliklerinde hiçbir değişikliğe yol açmadan, birbirleri ile değiş-tokuş edilebilen özdeş parçacıklardan oluşan sistemlere de özdeş parçacık sistemleri denir. Örneğin; sadece elektronlardan, sadece protonlardan veya sadece nötrinolardan oluşan sistemler, birer özdeş parçacık sistemleridir.

Hareketin deterministik (belirlenimci) bir teorisi olan klasik mekanikte, belirli başlangıç koşulları altında hareket eden parçacıklar kesin, ayırt edilebilir yörüngeler izlerler (Dereli ve Verçin, 2009). Çünkü, klasik mekaniğin hareket denklemleri (Newton, Euler-Lagrange veya Hamilton hareket denklemleri); tek tek parçacıklar için yazılan ayrı ayrı denklemlerden oluşan bir denklemler takımıdır. Bu yüzden klasik mekaniğin "klasik parçacıkları" özdeş olsalar bile numaralanabilir ve hareketleri süresince izlenerek herhangi bir anda ayırt edilebilirler. Yani, klasik mekaniğin özdeş parçacıkları ayırt edilebilirlerdir. Fakat, kuantum mekaniğinde özdeş parçacıklar çoğu durumda ayırt edilemezler. Herşeyden önce kuantum mekaniğinde hareket denklemi, tek tek parçacıklar için değil, gözönüne alınan tüm sistem için yazılan Schrödinger dalga denklemdir. Kuantum mekaniğinde bir sistemin bir tek parçacığını izlemek, bir dizi konum ölçümü yapmak demektir. Fakat her bir ölçüm sistemin durumunu bozar (Belirsizlik ilkesi) (Dereli ve Verçin, 2009). Belirli bir sonlu bölgede yerleşmiş parçacık sistemleri için momentumlar iyi belirlenemez ve bu yüzden parçacıkların nereye gideceği tam olarak bilinemez. Kuantum mekaniğinde, klasik mekanikteki gibi yörünge kavramı yoktur. Sistem sonlu veya tüm uzaya dağılmış dalga fonksiyonu ile betimlenir (Dereli ve Verçin, 2009).

Özdeş olsun veya olmasın N tane parçacıktan oluşan bir sistem için zamana bağlı, görelili olmayan Schrödinger denklemi şu şekildedir (Dereli ve Verçin, 2009):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(1,2,\dots,N,t)}{\partial t} = \hat{H}(1,2,\dots,N,t) \Psi(1,2,\dots,N,t) \quad (2.1)$$

Burada Ψ ve \hat{H} 'nin argümanlarındaki her bir rakam karşı gelen parçacığın bütün (konum ve spin) koordinatlarını temsil etmektedir. Parçacıkların (r_1, r_2, \dots, r_N) ile konum vektörleri, spin koordinatları da (s_1, s_2, \dots, s_N) ile gösterilirse, $\Psi(1, 2, \dots, N, t)$ 'yi

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_2, \vec{s}_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{s}_N, t)$$

ifadesinin kısaltılmışı olarak kullanacağız. Ayrıca (2.1) eşitliğindeki \hat{H} , sistemin Hamiltonyeni ya da enerji operatörü olarak adlandırılır ve genel olarak

$$\hat{H} = (\text{Kinetik enerji} + \text{Potansiyel enerji}) \quad (2.2)$$

ile tanımlanır (Önem, 2011). N tane özdeş parçacıktan oluşan sistemin \hat{H} Hamilton operatörü,

$$\hat{H}(1, 2, \dots, N, t) = \hat{H}(2, 1, \dots, N, t) = \dots \quad (2.3)$$

şeklinde argümanlarının simetrik bir fonksiyonu olmalıdır (Dereli ve Verçin, 2009). Çünkü, özdeş parçacıklar birbirleri ile değiş-tokuş edildiklerinde, sistemde gözlenebilir hiçbir fiziksel değişiklik olmamalıdır. Bu yüzden, daha genel olarak, özdeş parçacık sistemlerine ilişkin herhangi bir fiziksel gözlenebilire karşılık gelen operatör de, özdeş parçacıkların değiş-tokuşu altında simetrik olmalıdır. Yani bu işlem sonucunda değişmez kalmalıdır. Bu özellik, özdeş parçacık sistemlerini diğerlerinden ayıran önemli özelliklerden biridir (Dereli ve Verçin, 2009).

Özdeş parçacıkların birbirlerinden ayırt edilebilmeleri sıralama ve yörünge ile olası olmadığından fiziksel sistemin dalga fonksiyonundan yararlanılır (Erbil, 2014). N tane özdeş parçacıktan oluşmuş bir parçacıklar sisteminin zamandan bağımsız dalga fonksiyonu $\Psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_2, \vec{s}_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{s}_N)$ şeklinde olsun. Sistemin iki parçacığının (örneğin 1 ve 2 numaralı parçacıkların) yerleri değiştirilirse yeni bir dalga fonksiyonu elde edilir. Bu yeni dalga fonksiyonu Ψ' ile önceki arasında bir lineer bağımlılık vardır. Bu yüzden bu iki fonksiyon arasındaki ilişki şöyle yazılabilir (Erbil, 2014):

$$\Psi'(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_2, \vec{s}_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{s}_N) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{s}_2; \vec{r}_1, \vec{s}_1; \dots; \vec{r}_N, \vec{s}_N)$$

$$\hat{P}_{12}\Psi = \Psi' \quad (2.4)$$

Burada \hat{P}_{12} operatörü, 1 ve 2 numaralı parçacıkların koordinatlarını değiştiren bir operatördür. Daha genel olarak i ve j numaralı parçacıkların yerlerini değiştiren \hat{P}_{ij} , hatta N tane parçacığın herhangi bir permütasyonunu yapan \hat{P} operatörü tanımlanabilir (Erbil, 2014):

$$\Psi(i_1, i_2, \dots, i_N) = \hat{P}\Psi(1, 2, \dots, N) \quad (2.5)$$

Burada (i_1, i_2, \dots, i_N) tam sayıların bir permütasyonu oluşturur. \hat{P} operatörünün birimsel (veya üniter) olduğu kabul edilir. N tane özdeş parçacıklı sistemin \hat{H} Hamilton operatörü göz önüne alınarak \hat{H} işlemcisinin Ψ ve $\Psi' = \hat{P}\Psi$ fonksiyonları ile ortalama değerleri karşılaştırılacaktır. Potansiyel enerji, parçacıkların yer değiştirmelerine göre simetrik bir fonksiyon, yani $\hat{H}' = \hat{H}$ ise Ψ ne olursa olsun şu eşitlik yazılabilir (Erbil, 2014):

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \langle \Psi' | \hat{H} | \Psi' \rangle = \langle \Psi | \hat{P}^+ \hat{H} \hat{P} | \Psi' \rangle \quad (2.6)$$

\hat{P} operatörü üniter olduğundan $\hat{H} = \hat{P}^+ \hat{H} \hat{P} = \hat{P}^{-1} \hat{H} \hat{P}$ yazılabilir. Buradan şu komütasyon (veya sıra değiştirme) eşitliği elde edilir (Erbil, 2014):

$$\hat{H} \hat{P} = \hat{P} \hat{H} \rightarrow [\hat{H}, \hat{P}] = 0 \quad (2.7)$$

Eğer Ψ fonksiyonu \hat{H} enerji operatörünün bir öz fonksiyonu ise, $\hat{P}\Psi$ fonksiyonu da \hat{H} operatörünün bir öz fonksiyonudur. Bu basitçe şöyle gösterilebilir (Erbil, 2014):

$$\hat{H} | \Psi \rangle = E | \Psi \rangle \rightarrow \hat{P} \hat{H} | \Psi \rangle = \hat{H} \hat{P} | \Psi \rangle = E (\hat{P} | \Psi \rangle) \quad (2.8)$$

\hat{H} 'nın olası en genel Hamiltonyen olduğu kabul edilirse, $|\Psi\rangle$ ve $\hat{P}|\Psi\rangle$ fonksiyonları \hat{H} 'nın öz fonksiyonları olduklarına göre bunlar arasında şu eşitlik yazılabilir (Erbil, 2014):

$$\hat{P}|\Psi\rangle = \text{sabit}|\Psi\rangle \quad (2.9)$$

$\hat{P}(\hat{P}|\Psi\rangle) = \hat{P}^2|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ olması gerektiğinden şu eşitlik yazılabilir:

$$\hat{P}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle = \pm|\Psi\rangle, \quad (\lambda = \pm 1) \quad (2.10)$$

$\lambda = (+1)$ ise böyle bir dalga fonksiyonuna simetrik fonksiyon, $\lambda = (-1)$ ise böyle bir dalga fonksiyonuna antisimetrik fonksiyon adı verilir. Simetrik dalga fonksiyonuna sahip olan parçacıklara bozon, antisimetrik dalga fonksiyonuna sahip olan parçacıklara da fermiyon adı verilir (Karaoğlu, 2008; Erbil, 2014). $\lambda = (\pm 1)$ olduğuna göre bu λ sayısı \hat{P} operatörünün özdeğeri olarak kabul edilebilir ve böylece (2.10) eşitliği kısaca şu biçimde yazılabilir (Erbil, 2014):

$$\hat{P}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \quad (2.11)$$

Sonuçta, bozonlar simetrik, fermiyonlar antisimetrik dalga fonksiyonları ile temsil edilirler (Karaoğlu, 2008). 1940 yılında Pauli, bu simetri özelliği ile parçacıkların spinleri arasında ilişki olduğunu gösterdi. Kuantum mekaniğinde bu "Simetrileştirme ilkesi" ile verilir. Spinleri \hbar birimlerinde $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ gibi yarım tam sayı biçiminde olan parçacıklar fermiyonları oluşturur (Apaydın, 2004). Fermiyonlara elektron, proton, pozitron ve nötron gibi parçacıklar örnek olarak verilebilir. Spinleri \hbar birimlerinde $0, 1, 2, 3, \dots$ gibi tam sayı biçiminde olan parçacıklar bozonları oluşturur. Bozonlara α parçacığı (spin $0 \hbar$), foton (spin $1 \hbar$), döteron (spin $1 \hbar$) ve pion (spin $0 \hbar$) gibi parçacıklar örnek olarak verilebilir (Apaydın, 2004).

Bu tez çalışmasında fermiyon sistemleri ve onların kuantum mekaniksel özelliklerine odaklanılacağından bundan sonra standart fermiyon osilatörleri incelenecektir.

2.2. Fermiyon Cebiri

Bu bölümde fermiyon cebirinden önce Hilbert uzayları, Fock uzayları ve bunların kuantum mekaniği'ndeki yeri ele alınacaktır.

Kuantum mekaniğinde Hilbert uzayı; tam ve sonsuz boyutlu kompleks bir Öklityen uzay olarak tanımlanabilir (Önem, 2011). Bir uzayın tam olması, $(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ vektörleri taban vektörler olmak üzere, $(i \text{ ve } j) \rightarrow \infty$ iken

$$\|\Psi_i - \Psi_j\| \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

şeklindeki Cauchy yakınsaklık koşulunun sağlanmasına bağlıdır (Önem, 2011). Bu koşul, kuantum mekaniğinde $\Psi_i(x)$ ile verilen tek boyutta dalga fonksiyonlarının karelerinin integre edilebilir fonksiyonlar olması koşuluyla eşdeğerdir. Boyu sonlu, yani

$$\|\Psi_i\|^2 = \int_{\text{Tüm uzay}} |\Psi_i(x)|^2 dx < \infty \quad (2.13)$$

özelliğine sahip fonksiyonlara, karesi integrallenebilir fonksiyonlar denir (Dereli ve Verçin, 2009).

Hilbert uzayında $\Psi_i(x)$, $\Psi_j(x)$ gibi iki vektörün iç (ya da skaler) çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır (Dereli ve Verçin, 2009):

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \int_{\text{Tüm uzay}} \Psi_i^*(x) \Psi_j(x) dx \in \mathbb{C} \quad (2.14)$$

Burada (*) işlemleri sanal eşlenik alma işlemi olup integral, fonksiyonların tanımlı olduğu tüm uzay üzerindedir. $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle$ ifadesi iç çarpımın kısa yazımıdır ve bu yazıma Dirac'ın bra-ket (veya parantez) yazımı denir ($\langle \Psi_i |$ 'ye bra, $|\Psi_j \rangle$ 'ye ket adı verilir.) ve örneğin $N = z \hat{D}_z^{(q)}$ ln Z aşağıdaki özellikleri sağlar (Dereli ve Verçin, 2009):

1. $\langle (a\Psi_1 + b\Psi_2) | \Psi_3 \rangle = a^* \langle \Psi_1 | \Psi_3 \rangle + b^* \langle \Psi_2 | \Psi_3 \rangle$
2. $\langle \Psi_1 | (a\Psi_2 + b\Psi_3) \rangle = a \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle + b \langle \Psi_1 | \Psi_3 \rangle$ (2.15)
3. $\|\Psi_i\|^2 \equiv \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle \geq 0$ ve $\|\Psi_i\| = 0 \Leftrightarrow \Psi_i = 0$

özelliklerini sağlar. Hilbert uzayında, örneğin tek-boyutta herhangi iki $\Psi_i(x)$ ve $\Psi_j(x)$ dalga fonksiyonları için,

$$\langle \Psi_i | \hat{A}^+ | \Psi_j \rangle = \langle \hat{A} \Psi_i | \Psi_j \rangle \quad (2.16)$$

veya daha açık bir ifade ile

$$\int \Psi_i(x) (\hat{A}^+ \Psi_j(x)) dx = \int (\hat{A} \Psi_i(x))^* \Psi_j(x) dx \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanan \hat{A}^+ operatörüne, \hat{A} çizgisel operatörünün Hermitsel eki (veya eşleniği) adı verilir (Dereli ve Verçin, 2009). Hermitsel ek alma işlemi aşağıdaki özelliklere de sahiptir (Dereli ve Verçin, 2009):

$$\begin{aligned} (a_1 \hat{A}_1 + a_2 \hat{A}_2)^+ &= a_1^* \hat{A}_1^+ + a_2^* \hat{A}_2^+ \\ (\hat{A} \hat{B})^+ &= \hat{B}^+ \hat{A}^+ \\ (\hat{A}^+)^+ &= \hat{A} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Hermitsel ek'leri kendilerine eşit olan özel operatörler kuantum mekaniğinde önemli rol oynarlar (Dereli ve Verçin, 2009; Önem, 2011). Böyle operatörlere Hermitik operatörler denir. \hat{A} , Hermitik ise yani

$$\langle \Psi_i | \hat{A} | \Psi_j \rangle = \langle \hat{A} \Psi_i | \Psi_j \rangle \quad (2.19)$$

ise bu kısaca $\hat{A}^+ = \hat{A}$ şeklinde yazılacaktır (Dereli ve Verçin, 2009). \hat{A} ve \hat{B} Hermitik iki operatör ise, yani $\hat{A}^+ = \hat{A}$ ve $\hat{B}^+ = \hat{B}$ ise çarpımlarının da Hermitik olabilmesi için

gerek ve yeter koşul $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ olmasıdır. Burada $[\hat{A}, \hat{B}]$ ifadesi, \hat{A} ve \hat{B} operatörlerinin komütatörüdür ve

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır (Bowman, 2008).

Sonsuz boyutlu Hilbert uzayının taban vektörlerinin tanımlanması yalnızca kesikli yani sayılabilen indislerle değil, aynı zamanda sürekli yani sayılamayan indislerle de yapılabilir (Önem, 2011). Bu durumda Hilbert uzayındaki baz vektörlerin dikliği, sayılabilen $(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$ indislerle tanımlanan $\Psi_i(x)$, $\Psi_j(x)$ vektörleri için,

$$\langle \Psi_i(x) | \Psi_j(x) \rangle = \int \Psi_i^*(x) \Psi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2.21)$$

şeklindedir. Yine sayılamayan indislerle tanımlanan $\Psi(i, x)$, $\Psi(j, x)$ vektörleri için ise

$$\langle \Psi(i, x) | \Psi(j, x) \rangle = \int \Psi^*(i, x) \Psi(j, x) dx = \delta(i - j) \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. Burada δ_{ij} ve $\delta(i - j)$ sembolleriyle, aşağıdaki gibi tanımlanan Kronecker ve Dirac deltaları gösterilmektedir (Önem, 2011):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \delta(i - j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.23)$$

$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{ij}$ koşulunu sağlayan $\{\Psi_i\}$ fonksiyonlar kümesine kesikli, orto-normal fonksiyonlar kümesi denir (Dereli ve Verçin, 2009). Bu küme, boyları bir ve birbirine dik fonksiyonlardan oluşur. Hilbert uzayında, $\{\Psi_i\}$ orto-normal kümesinin bütün elemanlarına aynı anda dik olan sıfırdan başka bir vektör yok ise $\{\Psi_i\}$ 'ye bir tam orto-normal fonksiyonlar kümesi denir. Tam orto-normal fonksiyon kümeleri, vektör uzaylarındaki baz vektörleri gibidirler; iyi davranışlı herhangi bir Ψ fonksiyonu bu tam kümenin serisine

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Psi_i(x) \quad (2.24)$$

şeklinde veya Dirac yazımı ile

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |\Psi_i\rangle \quad (2.25)$$

şeklinde açılabilir (Dereli ve Verçin, 2009; Önem, 2011). Genel olarak, kompleks c_i katsayılarına açılım katsayıları denir ve

$$c_i = \int \Psi_i^*(x) \Psi(x) dx \quad (2.26)$$

şeklinde bulunur (Önem, 2011).

Hilbert uzayının yukarıda verilen temel özellikleri incelendikten sonra, bunların kullanımına özel bir örnek olarak fermiyonik Fock uzayları verilebilir. Bunun için öncelikle fermiyonlar için operatör ilişkileri incelenecektir.

Fock uzayı, parçacık yaratma ve yok etme operatörlerini yazabilmek için doğal bir matematiksel alan olup, görelî kuantum mekaniğinin olanak sağladığı, enerjinin kütle ve kütlenin enerjiye dönüşümüne izin veren bir yapıdadır (McMillan, 1996). Bir fermiyon sistemi tanımlamak için Fock uzayını kullanmak şart olmamakla birlikte her fermiyon sisteminin belirli sayıda fermiyona sahip olması ile ilgili deneysel gerçeklik unutulmamalıdır. Fakat Fock uzayını kullanmak, herhangi N -parçacıklı fermiyon sisteminin kuantum mekaniğinin yeniden düzenlenmesi için daha yararlı bir yoldur. Bu düzenleme, yani ikinci kuantumlama, görelî olmayan yoğun madde fiziğinin ve düşük enerjili nükleer fiziğin standart dilidir (McMillan, 1996).

Fock uzayı, Hilbert uzaylarına özel bir örnek teşkil eder. Örneğin, fermiyonik Fock uzayı; antisimetrik N tane özdeş fermiyondan oluşmuş tek-parçacıklı Hilbert uzaylarının direk toplamıdır (Blank vd., 2008). Ayrıca fermiyonik Fock uzayı, aşağıdaki özelliklere sahiptir (McMillan, 1996):

1. Fermiyonik Fock uzayı (${}^f\mathcal{H}^S$) simgesiyle gösterilir ve her N için (${}^f\mathcal{H}_N^S$) ile verilen N -fermion Hilbert uzaylarının direk toplamıdır:

$${}^f\mathcal{H}^S = {}^f\mathcal{H}_0^S \oplus {}^f\mathcal{H}_1^S \oplus \dots \oplus {}^f\mathcal{H}_N^S \oplus \dots \quad (2.27)$$

Fermiyonik Fock uzayının herhangi normlu bir vektörü $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_N, \dots)$ şeklinde alınabilir.

2. Ψ ve $X = (X_0, X_1, \dots, X_N, \dots)$ vektörlerinin toplamı aşağıdaki gibidir:

$$\Psi + X = (\Psi_0 + X_0, \Psi_1 + X_1, \dots, \Psi_N + X_N, \dots) \quad (2.28)$$

3. Ψ vektörünün bir skalerle çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a\Psi = (a\Psi_0, a\Psi_1, \dots, a\Psi_N, \dots) \quad (2.29)$$

4. Ψ ve X vektörlerinin skaler çarpımları,

$$\langle \Psi | X \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \langle \Psi_N | X_N \rangle \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanmıştır ve her Ψ için $\langle \Psi | \Psi \rangle < \infty$ koşulu vardır.

5. Ψ elemanlarının kümesi, ayrılabilir bir Hilbert uzayı teşkil eder.

Sistemde N fermiyon bulunma olasılığı (McMillan, 1996):

$$P_N = \langle \Psi_N | \Psi_N \rangle \quad (2.31)$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} P_N = 1 \quad (2.32)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Her fermiyon sisteminin, belirli sayıda fermiyona sahip olması deneysel bir gerçektir (McMillan, 1996). Bu nedenle, Ψ sıfırdan farklı bir bileşene sahip olabilir. Örneğin, $\Psi = (0, 0, \dots, 0, \Psi_N, 0, \dots)$ şeklinde olabilir.

N parçacıklı Hilbert uzayı \mathcal{H}_N^s ,

$$|\phi_r\rangle_1 |\phi_s\rangle_2 \dots |\phi_t\rangle_N \quad (2.33)$$

formunda vektörler içerir (McMillan, 1996). Burada 1. parçacık $|\phi_r\rangle$, 2. parçacık $|\phi_s\rangle$ ve N . parçacık $|\phi_t\rangle$ tek-parçacık durumundadır. Yine N -fermion Hilbert uzayı (\mathcal{H}_N^s), (2.33) formundaki vektörlerin antisimetrik kombinasyonlarından oluşur (McMillan, 1996):

$$|\Psi(1,2,\dots,N)\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |\phi_r\rangle_1 & |\phi_r\rangle_2 & \dots & |\phi_r\rangle_N \\ |\phi_s\rangle_1 & |\phi_s\rangle_2 & \dots & |\phi_s\rangle_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ |\phi_t\rangle_1 & |\phi_t\rangle_2 & \dots & |\phi_t\rangle_N \end{vmatrix}, \quad (r < s < \dots < t) \quad (2.34)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu determinant Slater determinanti olarak adlandırılır (McMillan, 1996). $\Psi(1,2,\dots,N)$ dalga fonksiyonunda herhangi iki parçacığın yer değiştirmesi, matrisin sözü geçen iki sütununun yer değiştirmesi anlamına gelir (Dereli ve Verçin, 2009). Böylece determinant işaret değiştirir, yani $\Psi(1,2,\dots,N)$ dalga fonksiyonu parçacık değiş-tokuşu altında tamamen antisimetriktir (Dereli ve Verçin, 2009).

Birkaç özdeş parçacıktan oluşan sistemler için, simetrik veya antisimetrik dalga fonksiyonlarını oluşturmak kolaydır. Fakat, daha çok özdeş parçacıktan oluşan sistemler için bu daha zordur (Baym, 1974). Çok parçacıklı sistemlerde, bu dalga fonksiyonlarını oluşturmak için yaratma ve yok etme operatörleri kullanılır. Yaratma ve yok etme operatörleri, özdeş parçacıklar sisteminde sırasıyla, parçacıkları sisteme ekleyen ve sistemden uzaklaştıran operatörlerdir (Baym, 1974). Fermiyonlar için tek-parçacıklı hal $|1\rangle$ durumu ile, hiç parçacık olmayan hal $|0\rangle$ durumu (veya vakum durumu) ile verilir. Çünkü, aynı bir kuantum halinde iki fermiyon bulunamaz. Fermiyonlar için yaratma ve yok etme (\hat{f}_0^+ ve \hat{f}_0) operatörleri (Baym, 1974);

$$\begin{aligned}\hat{f}_0|0\rangle &= 0, & \hat{f}_0|1\rangle &= |0\rangle \\ \hat{f}_0^+|0\rangle &= |1\rangle, & \hat{f}_0^+|1\rangle &= 0\end{aligned}\quad (2.35)$$

şeklinde etki gösterirler. $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumunda baz vektörler (Baym, 1974),

$$\hat{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.36)$$

şeklinde de yazılabilirler. $\hat{f}_0^+|1\rangle = 0$ koşulu aynı durumda iki fermiyon bulunamayacağını da gösterir. İki fermiyonun aynı bireysel halde bulunamama olgusuna "Pauli Dışarılama İlkesi" adı verilir (Erbil, 2014). Bu ilke ilk defa 1925'te elementlerin periyodik cetvelini açıklamak için W. Pauli tarafından ortaya atılmıştır (Dereli ve Verçin, 2009). Bu ilkeye göre, herhangi bir enerji durumunda spin yönelimleri zıt olacak şekilde en fazla iki elektron bulunabilir. Bütün elementlerin elektronik düzenlenimleri bu ilkeye göre oluşur. Spini s (s , buçuklu) olan bir fermiyon için $(2s+1)$ farklı spin yönelimleri mümkündür. Bu durumda, aynı bir enerji düzeyinde spin yönelimleri farklı olacak şekilde en fazla $(2s+1)$ tane fermiyon bulunabilir. Başka bir deyişle, aynı enerji durumunda bulunan iki (veya daha fazla) fermiyon en az birer kuantum sayıları farklı olmalıdır (Dereli ve Verçin, 2009).

Fermiyon operatörleri (\hat{f}_0 ve \hat{f}_0^+), aşağıdaki anti-komütasyon ilişkisine uygun davranırlar (Baym, 1974):

$$\{\hat{f}_0, \hat{f}_0^+\} \equiv \hat{f}_0\hat{f}_0^+ + \hat{f}_0^+\hat{f}_0 = 1\quad (2.37)$$

(Burada $\hbar = 1$ alınmıştır). Ayrıca (Baym, 1974),

$$\begin{aligned}(\hat{f}_0\hat{f}_0^+ + \hat{f}_0^+\hat{f}_0)|1\rangle &= 0|1\rangle + |1\rangle \\ (\hat{f}_0\hat{f}_0^+ + \hat{f}_0^+\hat{f}_0)|0\rangle &= |0\rangle + 0|0\rangle\end{aligned}$$

ilişkileri de vardır.

Yine,

$$\hat{f}_0^2 = 0, \quad (\hat{f}_0^+)^2 = 0 \quad (2.38)$$

şeklindedir. Zira fermiyonik Fock uzayında

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 \hat{f}_0 |1\rangle &= \hat{f}_0 |0\rangle = 0 \\ \hat{f}_0^+ \hat{f}_0^+ |0\rangle &= \hat{f}_0^+ |1\rangle = 0 \end{aligned}$$

bağıntıları geçerlidir. $\hat{f}_0^2 = 0$ eşitliği, aynı durumdan iki fermiyonun yok edilmesinin imkansız olduğunu gösterir. $\hat{f}_0^+ \hat{f}_0 |0\rangle = 0$ ve $\hat{f}_0^+ \hat{f}_0 |1\rangle = \hat{f}_0^+ |0\rangle = |1\rangle$ olduğundan, $\hat{N}_0 = \hat{f}_0^+ \hat{f}_0$ operatörü tek-parçacık halinde fermiyon sayısı operatörü olarak adlandırılır (Baym, 1974).

İki-parçacık kuantum hallerine sahip fermiyon sistemleri için dört durum söz konusudur, $|N_0, N_1\rangle: \{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$ (Baym, 1974). Öncelikle (\hat{f}_1^+ ve \hat{f}_1) ile fermiyonik yaratma ve yok etme operatörleri tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^+ |0,0\rangle &= |0,1\rangle, & \hat{f}_1^+ |1,0\rangle &= |1,1\rangle \\ \hat{f}_1^+ |0,1\rangle &= \hat{f}_1^+ |1,1\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 |0,0\rangle &= \hat{f}_1 |1,0\rangle = 0 \\ \hat{f}_1 |0,1\rangle &= |0,0\rangle, & \hat{f}_1 |1,1\rangle &= |1,0\rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

ifadeleri bulunur. Bu operatörler, fermiyonik Fock uzayında tek-parçacık dalga fonksiyonları (örneğin Ψ_1 gibi) üzerinde parçacıkları ya oluşturur ya da yok ederler (Baym, 1974). Ayrıca (\hat{f}_0^+ ve \hat{f}_0) fermiyonik yaratma ve yok etme operatörleri, ele alınan örnek Ψ_1 durumu için aşağıdaki etkilere sahiptirler (Baym, 1974):

$$\begin{aligned} \hat{f}_0^+ |0,0\rangle &= |1,0\rangle, & \hat{f}_0^+ |1,0\rangle &= 0 \\ \hat{f}_0 |1,0\rangle &= |0,0\rangle, & \hat{f}_0 |0,0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.39)-(2.41) eşitliklerinden, fermiyonik yaratma ve yok etme operatörlerinin aşağıdaki anti-komütasyon ilişkilerine uygun davrandıkları gösterilebilir ($\hbar = 1$ varsayılmıştır):

$$\begin{aligned} \{\hat{f}_0, \hat{f}_0^+\} = 1, & \quad \{\hat{f}_1, \hat{f}_1^+\} = 1 \\ \{\hat{f}_0, \hat{f}_1\} = \{\hat{f}_1, \hat{f}_0\} = 0, & \quad \{\hat{f}_0^+, \hat{f}_1^+\} = \{\hat{f}_1^+, \hat{f}_0^+\} = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Yukarıdaki eşitliklerde anti-komütatör,

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (2.43)$$

ile tanımlıdır (Ramond, 2010). Yine aşağıdaki anti-komütasyon ilişkileri de mevcuttur (Baym, 1974):

$$\{\hat{f}_0, \hat{f}_1\} = \{\hat{f}_0^+, \hat{f}_1^+\} = 0, \quad \{\hat{f}_0, \hat{f}_1^+\} = \{\hat{f}_0^+, \hat{f}_1\} = 0 \quad (2.44)$$

Bu anti-komütasyon ilişkileri, iki parçacığın değişimi altında fermiyon durumlarının anti-simetrisinin bir sonucudur (Baym, 1974). \hat{f}_0^+ ve \hat{f}_1^+ kullanılarak taban durumundan diğer durumlar elde edilebilir:

$$|\hat{f}_0, \hat{f}_1\rangle = (\hat{f}_1^+)^{N_1} (\hat{f}_0^+)^{N_0} |0,0\rangle \quad (2.45)$$

Eğer fermiyon durumları, $|N_0, N_1, N_2, \dots\rangle$ şeklinde çok-parçacıklı hale geliştirilirse; her farklı tek-parçacık durumu için, bir (\hat{f}_i^+ ve \hat{f}_i) fermiyonik yaratma ve yok etme operatörleri vardır. Fermiyonlar için bu durum,

$$|N_0, N_1, N_2, \dots\rangle = \dots (\hat{f}_2^+)^{N_2} (\hat{f}_1^+)^{N_1} (\hat{f}_0^+)^{N_0} |0,0, \dots\rangle \quad (2.46)$$

şeklinde ifade edilir ve operatörler aşağıdaki anti-komütasyon ilişkilerine uyarlar (Baym, 1974):

$$\begin{aligned}\{\hat{f}_i, \hat{f}_j^+\} &= \delta_{ij} \\ \{\hat{f}_i, \hat{f}_j\} &= 0 = \{\hat{f}_i^+, \hat{f}_j^+\end{aligned}\quad (2.47)$$

Ayrıca i . kuantum indisi ile temsil edilen tek-parçacık halinde fermiyon sayı operatörü, $\hat{f}_i^+ \hat{f}_i$ ile tanımlanır. N tane fermiyondan oluşan sistem için toplam fermiyon sayı operatörü,

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^N \hat{f}_i^+ \hat{f}_i \quad (2.48)$$

şeklindedir ve fermiyonlar için aşağıdaki özellik sağlanır (Baym, 1974):

$$[\hat{f}_i^+ \hat{f}_i, \hat{f}_j^+ \hat{f}_j] = 0 \quad (2.49)$$

Tek-boyutta fermiyon osilatörü sistemi, (2.35)-(2.38) eşitlikleri ile tanımlanmıştır. Şimdi bunların enerji durumları ile ilgili şu özellikler söylenebilir: Hilbert uzayında $\hat{f}^2 = \hat{f}^{+2} = 0$ koşulundan dolayı başka durumlar elde edilemez (Shankar, 1994). Diğer bir ifadeyle, Pauli prensibinden dolayı durum ya boş ya da tek parçacıklıdır. Bu yüzden tek-boyutta fermiyon osilatörü sisteminin Hamiltonyeni,

$$\hat{H}_0 = \Omega_0 (\hat{f}^+ \hat{f}) \quad (2.50)$$

olup, 0 ve Ω_0 reel özdeğerlerine sahiptir. Aşağıdaki özellikler açıklanırken, \hat{H}_0 Hamiltonyeni yerine,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu \hat{N} \quad (2.51)$$

eşitliği kullanılabilir (μ kimyasal potansiyeli temsil eder) (Shankar, 1994). Fermiyon sayı operatörü ve \hat{H}_0 Hamiltonyeni, (2.51) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\hat{H} = (\Omega_0 - \mu) \hat{f}^+ \hat{f} \quad (2.52)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, tüm enerjileri ölçmenin kimyasal potansiyele bağlı olduğu anlamına gelir (Shankar, 1994).

Termodinamiğe geçiş yapılırsa büyük bölüşüm fonksiyonu,

$$Z = Tr e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \quad (2.53)$$

şeklinde tanımlanır (Shankar, 1994). Burada toplam tüm öz durumlar üzerindedir ve $\beta = 1/kT$ ile tanımlanır. Büyük bölüşüm fonksiyonu, farklı parçacık sayılarına sahip durumlar üzerinden toplam yapıldığını ifade eder. (2.53) eşitliğindeki β , sistemin dışarıdan aldığı enerji miktarını kontrol ederken, μ kimyasal potansiyeli de sistemin parçacık sayısını kontrol eder (Shankar, 1994). Eşitlik (2.53) yardımıyla inceleme altındaki fermiyon sisteminin termo-istatistiksel özellikleri (ortalama parçacık sayısı, iç enerjisi, hal denklemi v.b.) çıkartılabilir. Bu durumda elde edilecek olan tüm termodinamik fonksiyonlar etkileşmeleri içermeyen ideal fermiyon gazı sonuçlarına denk olacaktır (Greiner vd., 1995; Patria ve Beale, 2011).

Bu tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde özel olarak, tek-boyutta deforme edilmiş fermiyon sistemi üzerinde durulacağından (2.35)-(2.38) eşitlikleri göz önünde bulundurulabilir. Örneğin, üçüncü bölümde bu eşitliklerin genelleştirilmiş (veya deforme edilmiş) bir formu kullanılacak olup, bunun fermiyonik Fock uzayı özellikleri çalışılacaktır.

3. PVC-TİPLİ q -DEFORME FERMİYONLAR

Bu bölümde, (2.37) ve (2.38) eşitliklerinde verilen bir-boyutlu standart fermiyon osilatörleri cebirinin reel bir q parametresi ile deformasyonundan (veya genelleştirilmesinden) kaynaklanan özel bir fermiyon cebiri tanıtılacaktır. Bu cebir esasen 2.2 alt bölümünde incelenen standart fermiyon yaratma ve yok etme operatörlerinin yeniden Fock uzayında deforme edilmiş hallerinin elde edilmesiyle oluşturulabilir.

3.1. PVC q -Fermiyon Cebiri

Tek boyutta deforme bir fermiyon sistemi olarak verilen PVC-tipli fermiyon osilatörleri cebiri aşağıdaki anti-komütasyon ve komütasyon ilişkileri ile tanımlanır (Parthasarathy ve Viswanathan, 1991):

$$\begin{aligned} \hat{f} \hat{f}^+ + q \hat{f}^+ \hat{f} &= q^{-\hat{N}} \\ [\hat{N}, \hat{f}] &= -\hat{f}, \quad [\hat{N}, \hat{f}^+] = \hat{f}^+, \quad \hat{f}^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada $(\hat{f}$ ve $\hat{f}^+)$ deforme fermiyonik yaratma ve yok etme operatörleri, \hat{N} ise fermiyon sayı operatörüdür. (3.1) eşitliğinde $q \in R^+$ olup PVC-tipli fermiyon cebirinin deformasyon parametresi adını alır. Eşitlik (3.1)'deki $\hat{f}^2 \neq 0$ ifadesinden dolayı bu cebir $q \rightarrow 1$ limitinde ne yazık ki,

$$\hat{f} \hat{f}^+ + \hat{f}^+ \hat{f} = 1 \quad (3.2)$$

ile verilen standart fermiyon cebirine indirgenemez. Dolayısıyla (3.1) eşitlikleri, 2.1 alt bölümünde incelenen tek-boyutlu standart fermiyon sisteminden farklıdır. Yine, önemli bir farklılık da PVC-fermion cebirinin $\hat{f}^2 \neq 0$ şartından dolayı fermiyonlara ait Pauli dışarlama ilkesine uymamasıdır.

Öte yandan PVC-fermion cebirinin deforme fermiyonik sayı operatörü ise

$$\hat{f}^+ \hat{f} = [\hat{N}] = \frac{q^{-\hat{N}} - (-1)^{\hat{N}} q^{\hat{N}}}{q + q^{-1}} \quad (3.3)$$

ile belirli olup, bunun özdeğer spektrumu ise (Parthasarathy ve Viswanathan, 1991),

$$[n] = \frac{q^{-n} - (-1)^n q^n}{q + q^{-1}} \quad (3.4)$$

ile tanımlı olan fermiyon temel tamsayıdır. (3.1) eşitliğinde verilen PVC-fermion cebirindeki deformasyon parametresi q reel, pozitif bir sayıdır. Tezin beşinci bölümünde PVC-fermion gazı modeli incelenirken, özel olarak termodinamik fonksiyonların hassas değişimler gösterdiği $0 < q < 1$ aralığı gözönüne alınacaktır. (3.1), (3.3) ve (3.4) eşitliklerinde tanımlanan PVC-fermion cebirinin tüm Fock uzayı temsilleri;

$$\begin{aligned} \hat{f} |n\rangle &= \sqrt{[n]} |n-1\rangle \\ \hat{f}^+ |n\rangle &= \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle \\ \hat{f}^+ \hat{f} |n\rangle &= [\hat{N}] |n\rangle = [n] |n\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

eşitliklerinden yararlanılarak çalışılabilir (Algin vd., 2015). Ayrıca $q \rightarrow 1$ limitinde PVC-tipli fermiyon cebirinin (3.1), (3.4), (3.5) eşitliklerinden Pauli dışarlama ilkesine uyacak şekilde standart fermiyon benzeri davranabileceği gösterilebilir. Ne var ki, $q \neq 1$ durumunda PVC-fermion cebiri yeni ve özel bir fermiyon sistemini göstermektedir. Bu sistemin fermiyonik Jackson türev (JD) operatörü eşitlik (3.1) ve (3.3) yardımıyla (Narayana Swamy, 2006 a, 2006 b),

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{f(q^{-1}x) - f(-qx)}{q + q^{-1}} \right] \quad (3.6)$$

olup, $f(x)$ herhangi analitik bir fonksiyondur. PVC-fermiyon cebirine ait, bu fermiyonik JD operatörü $q \rightarrow 1$ limitinde standart türev operatörüne indirgenemez (Schork, 2005; Narayana Swamy, 2006 a; Algin, 2011). Bu fermiyonik türev operatörü ile ilgili çeşitli q -türev ve q -integral özellikleri, daha sonra dördüncü bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir. Eşitlik (3.1) ve (3.3)'te verilen PVC-tipli fermiyon cebirinin bazı istatistiksel özellikleri, kısmen de olsa literatürde çalışılmıştır (Chaichian vd., 1993). Buradan hareketle eşitlik (3.1), (3.3) ve (3.4)'teki fermiyon sistemi, tarihsel nedenlerden dolayı Parthasarathy-Viswanathan-Chaichian tarafından ilk olarak çalışıldığından kısaca PVC-fermiyon cebiri olarak anılmaktadır (Parthasarathy ve Viswanathan, 1991; Chaichian vd., 1993).

Yukarıdaki PVC-fermiyon cebirinin özellikleri kullanılarak öncelikle dördüncü bölümde bu sistemin fermiyonik türev operatörü $\hat{D}_x^{(q)}$ ile ilgili özellikler incelenecek, daha sonra PVC-fermiyon osilatörlerinin oluşturduğu "Deforme bir Fermi gazı modeli" nin termodinamik ve istatistiksel özellikleri beşinci bölümde çalışılacaktır. Şu da vurgulanmalıdır ki, bu tezin dördüncü ve beşinci bölümünde çalışılan tüm özellikleri tezin orjinal kısımları olup, literatürde henüz hiç çalışılmamış yönleri de belli oranda kapsamaktadır.

Eşitlik (3.1)'i sağlayan deforme fermiyon osilatörlerinin oluşturduğu PVC-fermiyon gazı modelinin termo-istatistiksel özellikleri, deformasyondan dolayı ikinci bölümde incelenen standart fermiyon osilatörlerine dayalı bağıntılardan farklı olacaktır. Böylece PVC-tipli fermiyonik deformasyonun hem kuantum hem de termodinamik sonuçları çalışılabilecektir.

4. FERMİYONİK q -ANALİZİ

4.1. PVC-Tipli Fermiyonik q -Türev Operatörü ve Özellikleri

Eşitlik (3.6) ile verilen PVC-tipli fermiyonik türev operatörü lineer bir operatördür. $f(x)$ ve $g(x)$ keyfi fonksiyonlar, a ve b sabit olmak üzere,

$$\hat{D}_x^{(q)}\{af(x)+bg(x)\}=a\hat{D}_x^{(q)}f(x)+b\hat{D}_x^{(q)}g(x) \quad (4.1)$$

özellği vardır. PVC-tipli fermiyonik türev operatörünün bazı matematiksel özellikleri aşağıdaki gibidir (Algin vd., 2015):

$f(x) = \alpha x^n$, α sabit, $n \geq 0$ olmak üzere,

$$\hat{D}_x^{(q)}(\alpha x^n) = \alpha [n] x^{n-1} \quad (4.2)$$

olarak bulunur. Burada $[n]$, eşitlik (3.4)'te verilmiştir. $f(x) = \alpha x^n$ fonksiyonuna l mertebeden fermiyonik türev operatörünün etkisi,

$$(\hat{D}_x^{(q)})^l(\alpha x^n) = \alpha \left(\frac{[n]!}{[n-l]!} \right) x^{n-l}, \quad l > 0 \quad (4.3)$$

şeklinde olur. Burada, $[n]!$ yani fermiyon temel tamsayısının faktöriyeli,

$$[n]! = [n][n-1] \dots [2][1], \quad n > 0 \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlıdır. Fermiyonik türev operatörü için Leibnitz Kuralı ise

$$\begin{aligned} \hat{D}_x^{(q)}(f(x)g(x)) &= g(-qx) (\hat{D}_x^{(q)}f(x)) + f(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)}g(x)) \\ &= g(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)}f(x)) + f(-qx) (\hat{D}_x^{(q)}g(x)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak bulunur. Fermiyonik türev operatörünün iki fonksiyonun bölümüne etkisi,

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^{(q)}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{g(-qx) (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) - f(-qx) (\hat{D}_x^{(q)} g(x))}{g(q^{-1}x) g(-qx)} \\ &= \frac{g(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) - f(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)} g(x))}{g(q^{-1}x) g(-qx)}\end{aligned}\quad (4.6)$$

şeklinde olur. $f(x) = ax^n$ ve $g(x) = bx^m$, $(m, n) \geq 0$ olmak üzere,

$$\hat{D}_x^{(q)}(ax^n bx^m) = ab[n+m]x^{n+m-1} \quad (4.7)$$

eşitliği, (4.5)'teki Leibnitz Kuralı kullanılarak bulunur.

Fermiyonik türev operatörü için Leibnitz Kuralı ve bölüm kuralı türetildikten sonra, bu operatör için zincir kuralı olup olmadığı incelenecektir. Bu konu için, Kac ve Cheung tarafından, farklı bir q -türev operatörü için yapılan çalışmalar ışık tutacaktır (Kac ve Cheung, 2002). Eşitlik (3.6)'da verilen $\hat{D}_x^{(q)}$ fermiyonik türev operatörü için genel bir zincir kuralı bulunmamaktadır. Ne var ki $f(u(x))$ formunda bir fonksiyona zincir kuralının uygulanabilmesi için $u = u(x) = \alpha x^\beta$ (α, β sabit) şeklinde seçilebilir:

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^{(q)}[f(u(x))] &= \hat{D}_x^{(q)}[f(\alpha x^\beta)] = \frac{f(\alpha q^{-\beta} x^\beta) - f(\alpha(-q)^\beta x^\beta)}{(q + q^{-1})x} \\ &= \frac{f(\alpha q^{-\beta} x^\beta) - f(\alpha(-q)^\beta x^\beta)}{\alpha q^{-\beta} x^\beta - \alpha(-q)^\beta x^\beta} \cdot \frac{\alpha q^{-\beta} x^\beta - \alpha(-q)^\beta x^\beta}{(q + q^{-1})x} \\ &= \frac{f(q^{-\beta} u) - f((-q)^\beta u)}{q^{-\beta} u - (-q)^\beta u} \cdot \frac{u(q^{-1}x) - u(-qx)}{(q + q^{-1})x}\end{aligned}$$

ve buradan,

$$\hat{D}_x^{(q)}[f(u(x))] = (\hat{D}_x^{(q^\beta)} f)(u(x)) \hat{D}_x^{(q)} u(x) \quad (4.8)$$

zincir kuralı elde edilir. Diğer taraftan, örneğin $u(x) = x + x^2$ veya $u(x) = \sin x$ gibi fonksiyonlar düşünülürse, $u(q^{-1}x)$ ve $u(-qx)$ fonksiyonları, u cinsinden yazılamayacağından genel bir zincir kuralı bulmak mümkün olamamaktadır.

Ayrıca bazı temel fonksiyonların q -benzerlerini bulmak mümkündür. Örneğin, q -deforme üstel fonksiyon,

$$\exp_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!} \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır (Algin vd., 2015). Bu tanım için, q -Taylor formülünden yararlanılmıştır. Analiz'de, $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında tüm mertebelerden analitik türevlere sahip ise, bu fonksiyon $x=a$ civarında kuvvet serisine açılabilir. Taylor teoremi, analitik fonksiyonların

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \quad (4.10)$$

şeklinde Taylor açılımı olduğunu söyler (Kac ve Cheung, 2002). Fermiyonik q -türev operatörü için q -Taylor teoremini ifade etmeden önce daha genel bir durum ele alınacaktır (Kac ve Cheung, 2002):

Teorem 4.1: Polinomlar uzayında \hat{D} bir lineer operatör, a bir sayı olmak üzere $\{P_0(x), P_1(x), \dots\}$ polinomlar dizisinin aşağıdaki üç koşulu sağladığı kabul edilsin:

- (i) $P_0(a) = 1$ ve $P_k(a) = 0$, $\forall k \geq 1$ için,
- (ii) $\deg P_k = k$,
- (iii) $\hat{D}P_k(x) = P_{k-1}(x)$, $\forall k \geq 1$ için ve $\hat{D}(1) = 0$.

Derecesi N olan $f(x)$ polinomunun genelleştirilmiş Taylor formülü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^N (\hat{D}^{(k)} f)(a) P_k(x) \quad (4.11)$$

şeklindedir (Kac ve Cheung, 2002). $a=0$ ve $P_k^q(x) = \frac{x^k}{[k]!}$ seçilirse teoremin koşulları eşitlik (3.6)'daki $\hat{D}_x^{(q)}$ fermiyonik türev operatörü için sağlanır (Burada $[k]!$, eşitlik (4.4)'te verilmiştir). Ayrıca, a bir sabit olmak üzere derecesi N olan bir $f(x)$ polinomunun q -Taylor açılımı,

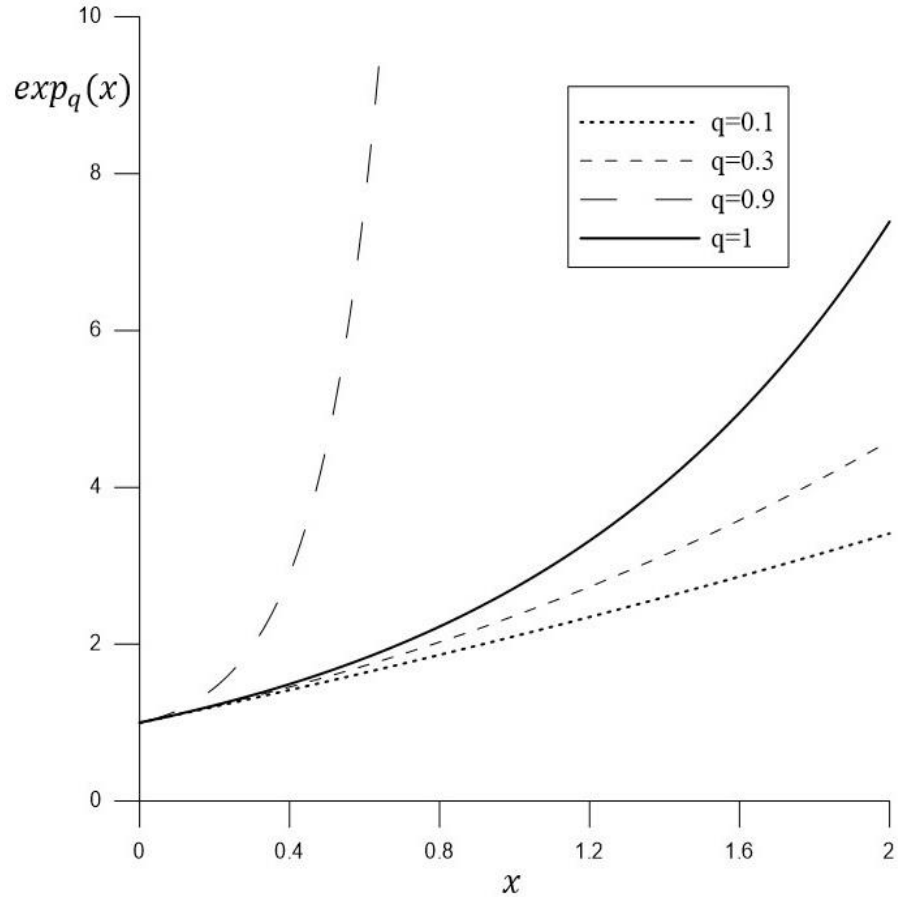
$$f(x) = \sum_{k=0}^N (\hat{D}_x^{(q)})^k (f(a)) P_k^q(x-a) \quad (4.12)$$

şeklinde genel bir form bulunabilir.

Öte yandan, α bir sabit olmak üzere deforme üstel fonksiyon $\exp_q(\alpha x)$ 'e PVC-tipli fermiyonik $\hat{D}_x^{(q)}$ türev operatörünün etkisi

$$\hat{D}_x^{(q)} \exp_q(\alpha x) = \alpha \exp_q(\alpha x) \quad (4.13)$$

şeklinde olur (Algin vd., 2015). Ayrıca eşitlik (4.9) ile verilen $\exp_q(x)$ fonksiyonunun, $0 < x \leq 2$ aralığında, sabit $q = 0,1$, $q = 0,3$, $q = 0,9$ ve $q = 1$ değerleri için değişimi Şekil 4.1'de gösterilmiştir (Şekil 4.1'deki $\exp_q(x)$ fonksiyonunun grafik çizimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-A'da verilmiştir).



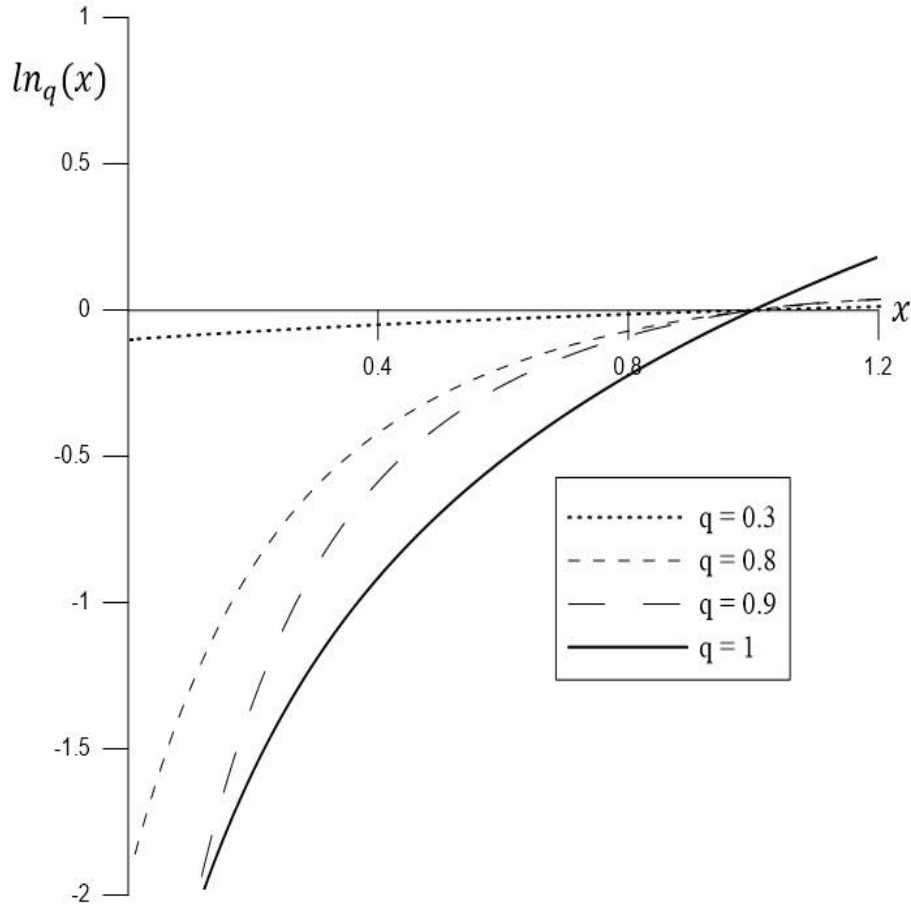
Şekil 4.1. $\exp_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi.

Eşitlik (4.9)'daki $\exp_q(x)$ fonksiyonu, deformasyon parametresi q arttıkça artan özellik gösterir. x parametresi arttıkça da fonksiyon artandır ve süreklidir. Bu fonksiyonun en hızlı artış gösterdiği değer $q = 0,94$ değerinden sonradır. $q \rightarrow 1$ limitinde, $\exp_q(x)$ fonksiyonu, standart $\exp(x)$ fonksiyonuna indirgenir. $q = 0,41$ değerine kadar $\exp_q(x) < \exp(x)$ dir. $q = 0,42$ değerinden itibaren ise $\exp_q(x)$, standart $\exp(x)$ fonksiyonuna göre daha büyük değerler alır.

Doğal logaritmik fonksiyonun, yani $\ln(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ civarında Taylor seri açılımı $\ln(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{k}$ şeklindedir. Bundan başka, eşitlik (4.12)'deki q -Taylor açılımından yararlanılarak, deforme logaritmik fonksiyon

$$\ln_q(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{[k]} \quad (4.14)$$

şeklinde bulunabilir (Algin vd., 2015). Burada $[k]$, eşitlik (3.4)'te verilmiştir. Eşitlik (4.14)'te verilen $\ln_q(x)$ fonksiyonunun örneğin $0 < x \leq 1,2$ aralığında $q = 0,3$, $q = 0,8$, $q = 0,9$ ve $q = 1$ değerleri için değişimi Şekil 4.2'de gösterilmiştir (Şekil 4.2'deki $\ln_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-B'de verilmiştir).



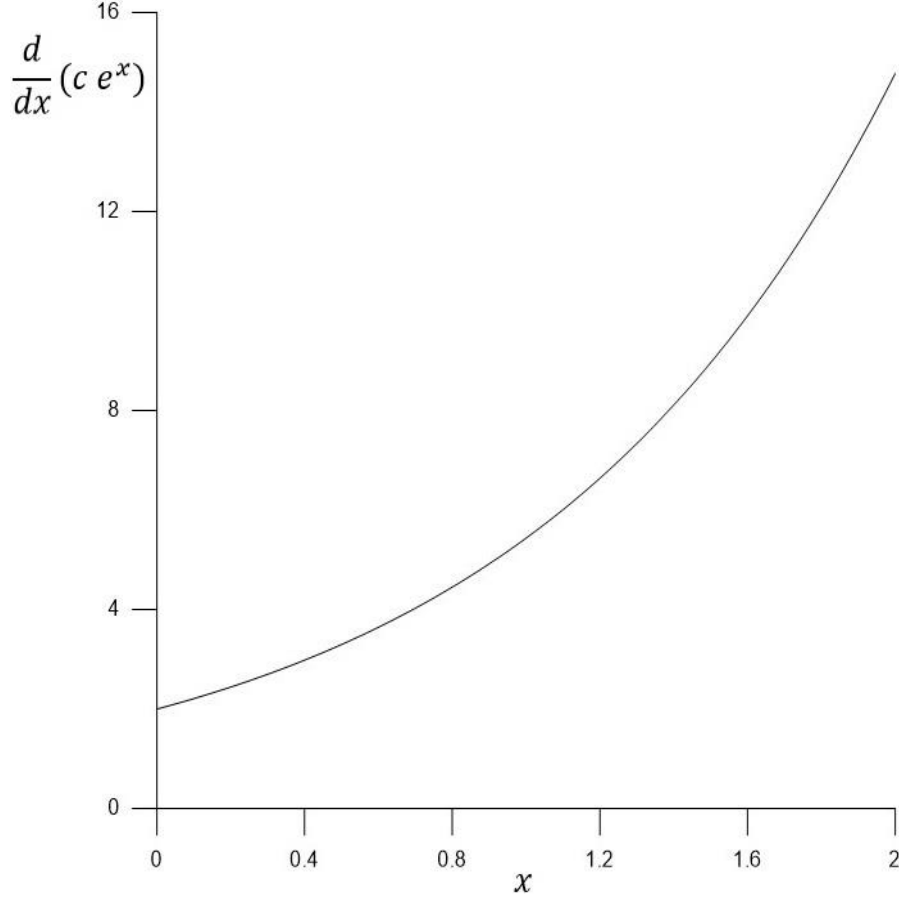
Şekil 4.2. $\ln_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi.

Eşitlik (4.14)'te verilen $\ln_q(x)$ fonksiyonu, deformasyon parametresi q arttıkça önce azalan, sonra artan özellik gösterir. Azalan değerlerden artan değerlere geçtiği nokta $x=1$ noktasıdır. x parametresi arttıkça, bu fonksiyon hep artan özellik gösterir. $q \rightarrow 1$ limitinde $\ln_q(x)$ fonksiyonu, standart $\ln(x)$ fonksiyonuna indirgenir. $x=1$ değerine kadar $\ln_q(x) > \ln(x)$ iken, $1 < x \leq 1,2$ aralığında $\ln_q(x) < \ln(x)$ olmaktadır.

Bazı örnek standart fonksiyonlar için, bu fonksiyonlara standart türevin etkisi ile fermiyonik türev operatörü $\hat{D}_x^{(q)}$ 'nin etkisi incelenebilir: Örneğin, $f(x) = ce^x$ fonksiyonu için

$$\frac{d}{dx}(ce^x) = ce^x \quad (4.15)$$

olur. Eşitlik (4.15)'te verilen $\frac{d}{dx}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimi, Şekil 4.3'te $c=2$ seçilerek gösterilmiştir (Şekil 4.3'teki $\frac{d}{dx}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki grafiği için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-C'de verilmiştir).

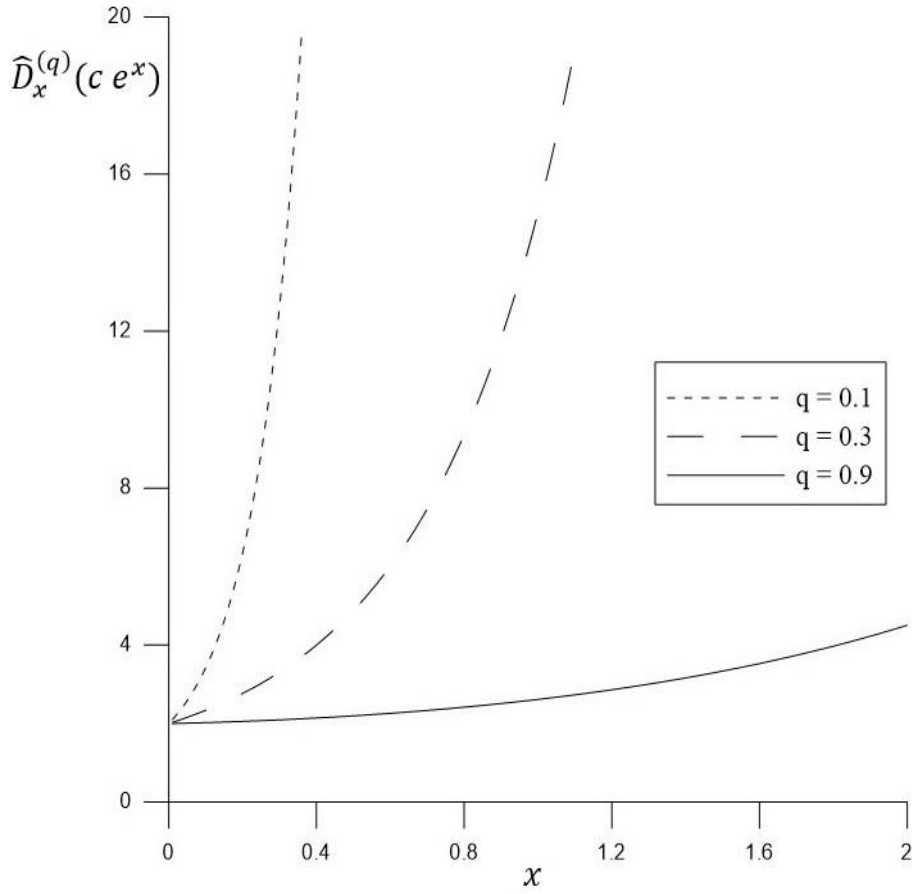


Şekil 4.3. $\frac{d}{dx}(c e^x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimi ($c = 2$ alınmıştır).

Eşitlik (4.15)'te verilen $\frac{d}{dx}(c e^x)$ fonksiyonu, x parametresi arttıkça artan bir fonksiyondur ve süreklidir. Bu fonksiyona fermiyonik türev operatörü $\hat{D}_x^{(q)}$ etki ettirilirse,

$$\hat{D}_x^{(q)}(c e^x) = c \left[\frac{e^{q^{-1}x} - e^{-qx}}{(q + q^{-1})x} \right] \quad (4.16)$$

bulunur. Bu fonksiyonun $0 < x \leq 2$ aralığında bazı q değerleri için değişimi Şekil 4.4'te gösterilmiştir (Şekil 4.4'teki $\hat{D}_x^{(q)}(c e^x)$ fonksiyonunun q ile değişimini veren grafik için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama D'de verilmiştir).



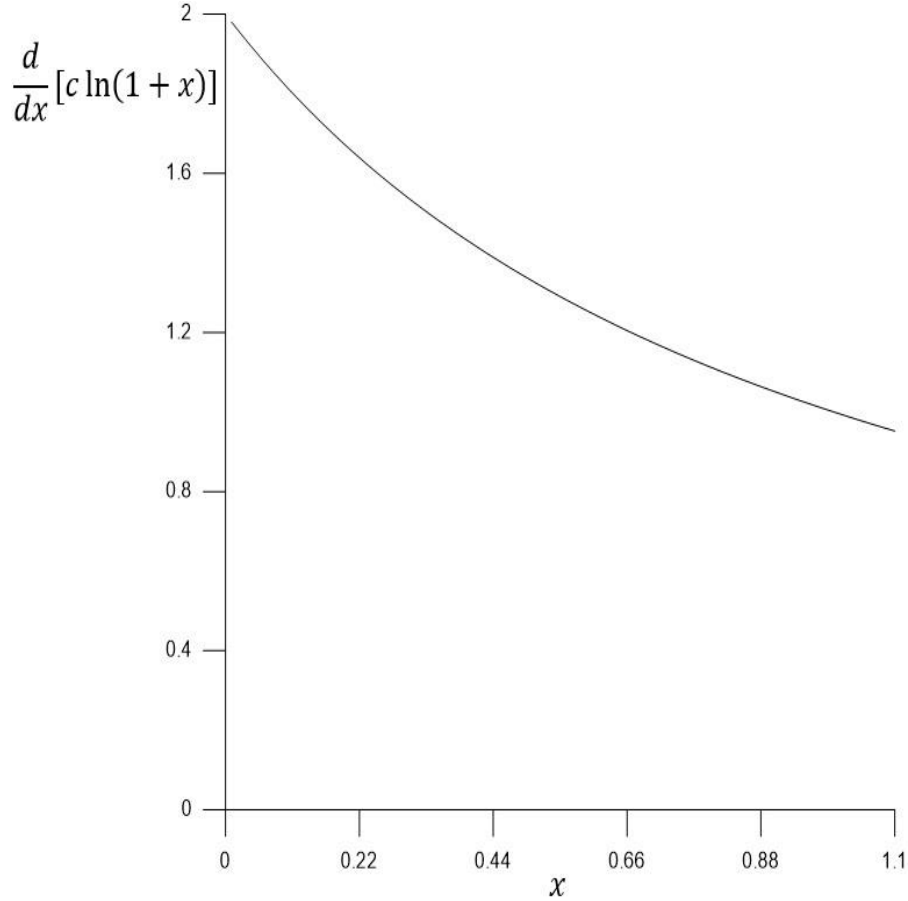
Şekil 4.4. $\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi ($c = 2$ alınmıştır).

Eşitlik (4.16)'daki $\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)$ fonksiyonu, deformasyon parametresi q arttıkça azalan özellik gösterir. x parametresi arttıkça ise fonksiyon artandır. Sürekli bir fonksiyondur. $q = 0,41$ değerine kadar $[\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)] > \left[\frac{d}{dx}(ce^x)\right]$ iken, $q = 0,57$ değerinden itibaren ise $[\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)] < \left[\frac{d}{dx}(ce^x)\right]$ olarak değişmektedir.

İkinci örnek olarak, $f(x) = c \ln(1+x)$ fonksiyonu alınırsa, bunun standart türevi,

$$\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)] = \frac{c}{1+x} \quad (4.17)$$

olup, $0 \leq x \leq 1,1$ aralığında $c = 2$ seçimi için değişimi Şekil 4.5'te gösterilmiştir (Şekil 4.5'teki $\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 1,1$ aralığındaki grafiği için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-E'de verilmiştir).

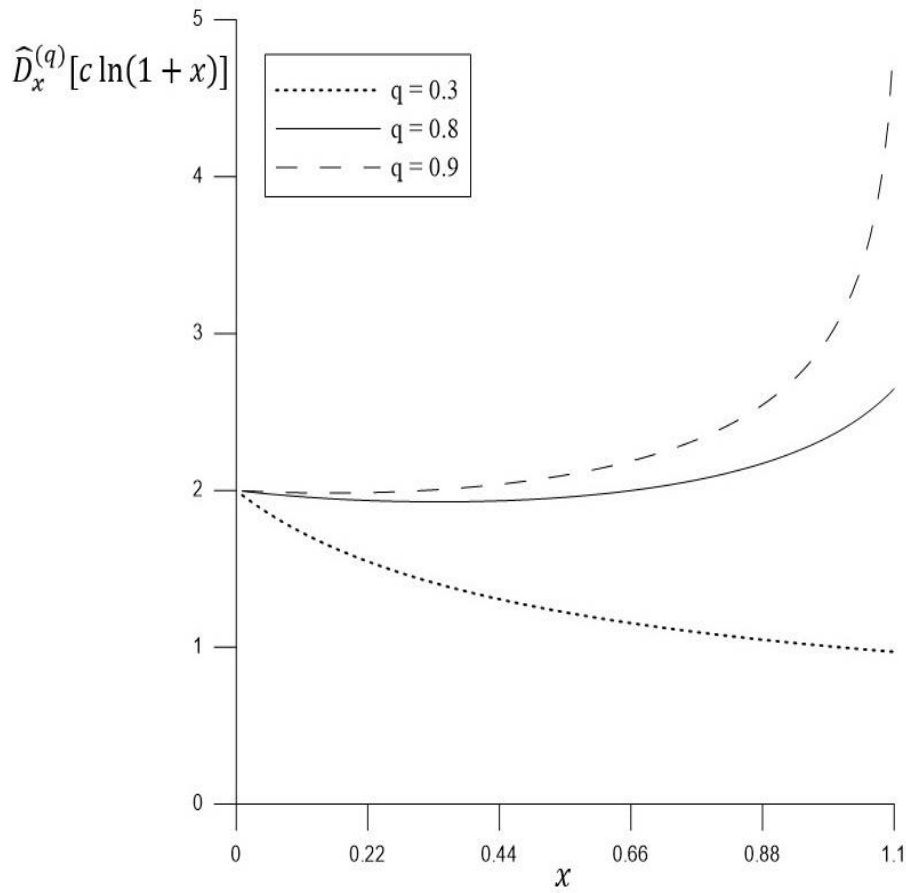


Şekil 4.5. $\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 1,1$ aralığındaki değişimi ($c = 2$ alınmıştır).

Eşitlik (4.17)'de verilen $\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonu, x parametresi arttıkça azalan özellik gösterir ve süreklidir. Bu fonksiyona fermiyonik türev operatörü $\hat{D}_x^{(q)}$ 'nin etkisi ise

$$\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)] = \frac{c}{(q+q^{-1})x} \left[\ln \left(\frac{1+q^{-1}x}{1-qx} \right) \right] \quad (4.18)$$

olup, $0 < x \leq 1,1$ aralığında $q = 0,3$, $q = 0,8$ ve $q = 0,9$ için değişimi Şekil 4.6'da gösterilmiştir (Şekil 4.6'daki $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun q ile değişim grafiği için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama F'de verilmiştir).



Şekil 4.6. $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,1$ aralığında farklı q değerlerine göre değişimi ($c = 2$ alınmıştır).

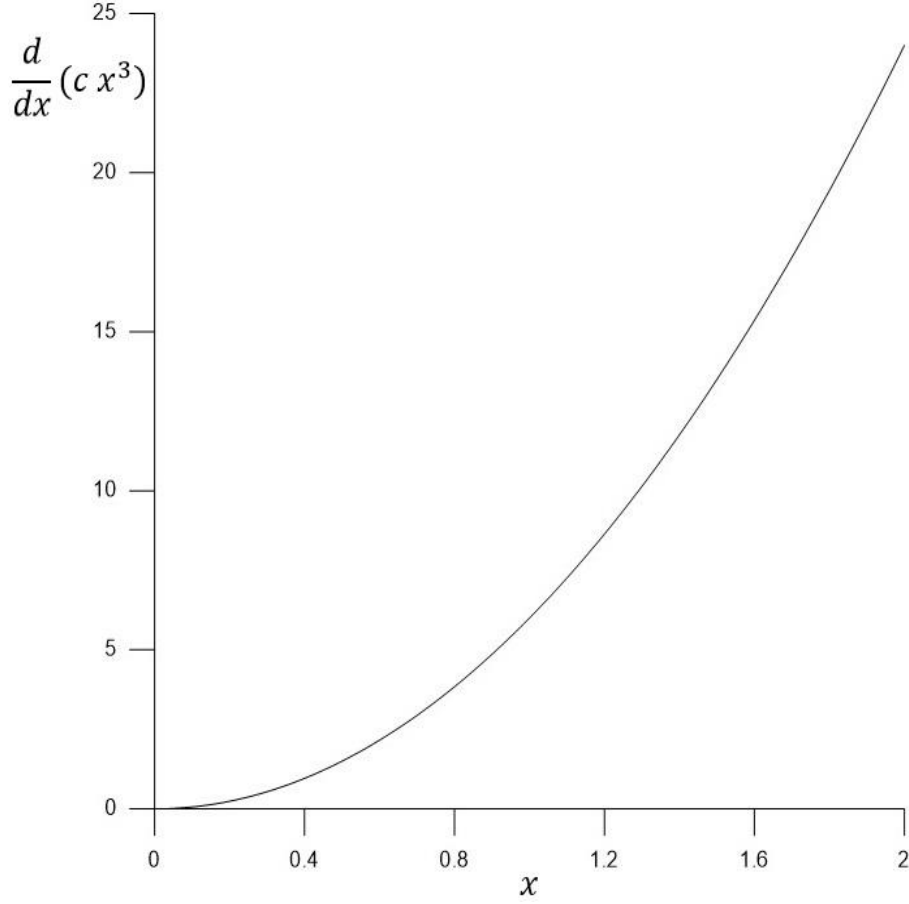
Eşitlik (4.18)'de verilen $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonu, q parametresi arttıkça artan özellik gösterir. Bu fonksiyon, x parametresi arttıkça önce monoton azalan, sonra artan

özelliik gösterir. $q = 0,42$ değerinden itibaren tüm q değerleri için, $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ sonucundan elde edilen değerler, $\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ sonucundan elde edilenlerden daha büyüktür.

Son örnek olarak $f(x) = cx^3$ fonksiyonuna standart türevin etkisi,

$$\frac{d}{dx}(cx^3) = c3x^2 \quad (4.19)$$

olup, bu fonksiyonun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki grafiği $c = 2$ seçilerek Şekil 4.7'de verilmiştir (Şekil 4.7'deki $\frac{d}{dx}(cx^3)$ fonksiyonunun x ile değişimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-G'de verilmiştir).

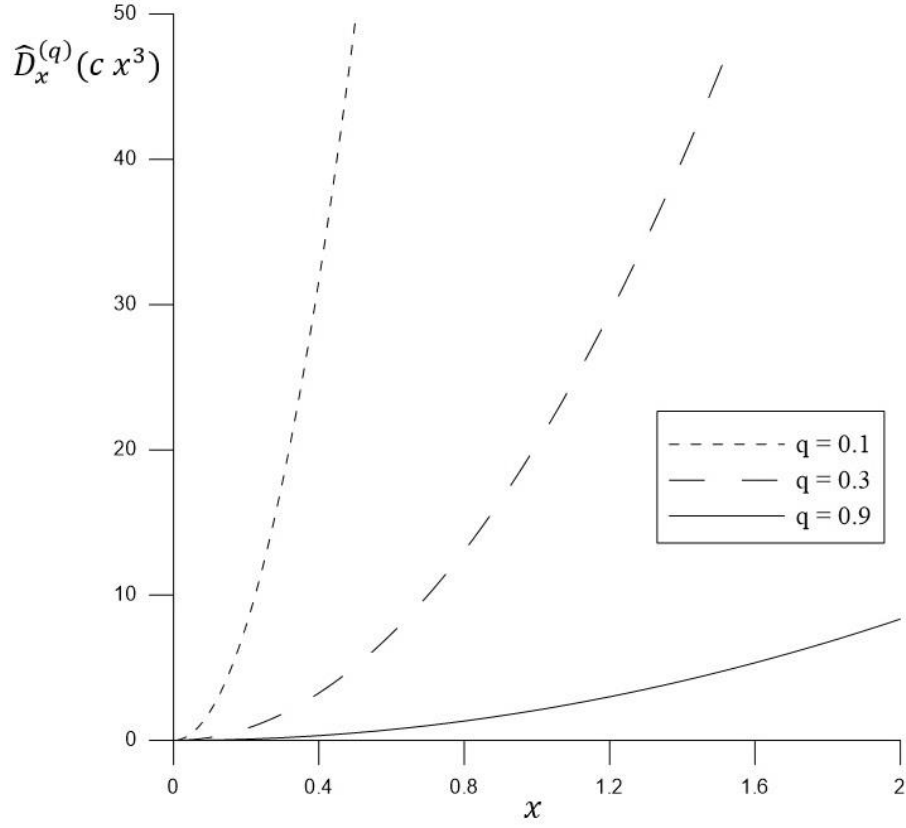


Şekil 4.7. $\frac{d}{dx}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimi ($c = 2$ alınmıştır).

Eşitlik (4.19)'da verilen $\frac{d}{dx}(cx^3)$ fonksiyonu, x parametresi artarken artan özelliğe sahiptir ve süreklidir. Bu fonksiyona fermiyonik türev operatörünün etkisi ise, eşitlik (4.2)'den yararlanılarak,

$$\hat{D}_x^{(q)}(cx^3) = c[3]x^2 \quad (4.20)$$

şeklinde olup $0 \leq x \leq 2$ aralığında, $c = 2$ seçilerek $q = 0,1$, $q = 0,3$ ve $q = 0,9$ değerleri için değişimi Şekil 4.8'de gösterilmiştir (Şekil 4.8'deki $\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonunun q değerlerindeki değişimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-H'de verilmiştir).



Şekil 4.8. $\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimi ($c = 2$ alınmıştır).

Eşitlik (4.20)'de verilen $\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonu, q parametresi arttıkça azalan özellik gösterir. Bu fonksiyon x parametresi arttıkça artan özellik gösterir. Sürekli bir fonksiyondur. $q = 0,51$ değerine kadar $\left[\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)\right] > \left[\frac{d}{dx}(cx^3)\right]$ şeklindedir. $q = 0,52$ değerinden sonra ise bu durum ters yönde değişmektedir.

4.2. PVC-Tipli Fermiyonik q -İntegral Formu ve Özellikleri

Bu kısımda PVC-tipli fermiyonik q -integral formu ve ilgili özellikleri incelenecektir. Eşitlik (3.3)'teki $[\hat{N}]$, deforme fermiyonik sayı operatörünün fermiyonik türev operatörü ile

$$\hat{D}_x^{(q)} = \frac{1}{x} [N] = \frac{1}{x} \left(\frac{q^{-N} - (-1)^N q^N}{q + q^{-1}} \right) \quad (4.21)$$

şeklinde ilişkili olduğu gösterilebilir (Narayana Swamy, 2006 a; Algin, 2011). Öte yandan,

$$q^N f(x) = f(qx), \quad q^{-N} f(x) = f(q^{-1}x), \quad (-q)^N f(x) = f(-qx) \quad (4.22)$$

olduğundan (Narayana Swamy, 2003, 2006 a; Algin, 2011). $f(x)$ keyfi analitik fonksiyon ve $F(x)$ de $f(x)$ fonksiyonunun q -antitürevi ise

$$\hat{D}_x^{(q)} F(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{q^{-N} - (-1)^N q^N}{q + q^{-1}} \right) F(x) = \left[\frac{F(q^{-1}x) - F(-qx)}{(q + q^{-1})x} \right] = f(x) \quad (4.23)$$

bulunabilir. Aşağıdaki eşitliklerde, Kac ve Cheung'un farklı q -türev ve q -integral formları için yaptıkları çalışmalardan yararlanılmıştır (Kac ve Cheung, 2002). Eşitlik (4.21)-(4.23) ışığında q -antitürev, geometrik seri açılımından yararlanılarak,

$$F(x) = \frac{1}{(q^{-N} - (-1)^N q^N)} ((q + q^{-1})x f(x)) = (q + q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} [(-1)^j q^{2j+1}]^N (x f(x)) \quad (4.24)$$

şeklinde bulunur. Buradan, PVC-tipli fermiyonik belirsiz q -integral,

$$\int f(x) d_q x = (q + q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} x f((-1)^j q^{2j+1} x) \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Eşitlik (4.25)'teki belirsiz q -integral tanımından yararlanılarak,

$$\int_0^{\alpha} f(x) d_q x = (q + q^{-1}) \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j+1} \alpha), \quad \alpha \text{ sabit} \quad (4.26)$$

ifadesi ile modelin belirli q -integral tanımı elde edilmiş olur.

PVC-tipli fermiyonik genelleştirilmiş integral tanımı, Riemann toplamından yararlanılarak bulunur. Eşitlik (4.26)'da verilen belirli q -integral, sonsuz sayıdaki dikdörtgenlerin birleşimiyle oluşan alana tekabül eder. ε yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere $[\varepsilon, \alpha]$ aralığında, sonsuz sayıdaki dikdörtgenlerin alanı Riemann toplamını oluşturur. $q \rightarrow 1$ oldukça dikdörtgenlerin eni sifıra yaklaşır ve toplam, $[\varepsilon, \alpha]$ aralığı üzerinde Riemann integraline dönüşür (Kac ve Cheung, 2002). ε keyfi olduğundan,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^{\alpha} f(x) d_q x = \int_0^{\alpha} f(x) dx \quad (4.27)$$

şeklinde keyfi $[0, \alpha]$ aralığı için $q \rightarrow 1$ limitinde standart belirli integrale indirgenmiş hal bulunur. Eşitlik (4.26)'da $\alpha \rightarrow \infty$ alınarak, genelleştirilmiş integral için iyi bir tanım yapılamaz. Bunun yerine,

$$\begin{aligned} \int_{(-1)^{j+1} q^{2j+2}}^{(-1)^j q^{2j}} f(x) d_q x &= \int_0^{(-1)^j q^{2j}} f(x) d_q x - \int_0^{(-1)^{j+1} q^{2j+2}} f(x) d_q x \\ &= (q + q^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} q^{2j+2k+1} f((-1)^{j+k} q^{2j+2k+1}) \\ &\quad - (q + q^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k+1} q^{2j+2k+3} f((-1)^{j+k+1} q^{2j+2k+3}) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\int_{(-1)^{j+1} q^{2j+2}}^{(-1)^j q^{2j}} f(x) d_q x = (q + q^{-1}) (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j+1}), \quad 0 < q < 1 \quad (4.28)$$

elde edilir. O halde $f(x)$ 'in fermiyonik genelleştirilmiş integrali,

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{(-1)^{j+1} q^{2j+2}}^{(-1)^j q^{2j}} f(x) d_q x \quad (4.29)$$

şeklindedir. Eşitlik (4.28)'de bulunan integralin sonucu, eşitlik (4.29)'da yerine yazılırsa,

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = (q + q^{-1}) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j+1}), \quad 0 < q < 1 \quad (4.30)$$

sonucuna ulaşılır.

PVC-tipli fermiyonik q -integralin; belirsiz, belirli ve genelleştirilmiş integral formları eşitlik (4.25), (4.26) ve (4.30)'da sırasıyla gösterilmiştir. Bu noktada eşitlik (4.25)'teki belirsiz q -integralin hangi koşullarda q -antitüreve yakınsadığı incelenebilir:

Teorem 4.2: $0 < q < 1$ olduğu kabul edilsin. Bazı $0 \leq \alpha < 1$ değerleri için, $|f(x)x^\alpha|$, $(0, A]$ aralığında sınırlı ise, eşitlik (4.25) ile tanımlanan q -integral, $(0, A]$ üzerinde bir $F(x)$ fonksiyonuna yakınsar. $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun bir q -antitürevidir, $x = 0$ 'da süreklidir ve $F(0) = 0$ 'dır (Kac ve Cheung, 2002).

İspat: Yukarıda verilen teorem, PVC-tipli fermiyonik $\hat{D}_x^{(q)}$ operatörü için ispatlanacaktır:

$(0, A]$ aralığı üzerinde, $|f(x)x^\alpha| < M$ olduğu kabul edilsin. Herhangi bir $0 < x \leq A$ ve $j \geq 0$ için,

$$|f((-1)^j q^{2j+1} x)| < M (q^{2j+1} x)^{-\alpha}$$

olup buradan,

$$|q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j+1} x)| < M x^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^{2j+1} \quad (4.31)$$

elde edilir. $(1-\alpha) > 0$ ve $0 < q < 1$ olduğundan, eşitlik (4.25)'teki seri, yakınsak bir geometrik seri tarafından sınırlandırılmış olur. Bu yüzden, eşitlik (4.25)'in sağ tarafı bir

$F(x)$ fonksiyonuna yakınsar ve bu eşitlikten $F(0) = 0$ olduğu açıktır. (4.31) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left| (q + q^{-1})x \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j+1}x) \right| < M x^{1-\alpha} \frac{(q + q^{-1})q^{1-\alpha}}{1 - (q^{1-\alpha})^2}, \quad 0 < x \leq A$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafı kullanılırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} M x^{1-\alpha} \frac{(q + q^{-1})q^{1-\alpha}}{1 - (q^{1-\alpha})^2} = 0$$

bulunur. Bu da $x \rightarrow 0$ iken $F(x) \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. $F(x)$ 'in bir q -antitürev olduğunu doğrulamak için, $F(x)$ 'in q -türevi alınır:

$$\begin{aligned} \hat{D}_x^{(q)} F(x) &= \frac{1}{(q + q^{-1})x} \left[(q + q^{-1})(q^{-1}x) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^j q^{2j}x) \right. \\ &\quad \left. - (q + q^{-1})(-qx) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f((-1)^{j+1} q^{2j+2}x) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j} f((-1)^j q^{2j}x) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q^{2j} f((-1)^j q^{2j}x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\hat{D}_x^{(q)} F(x) = f(x)$ olduğundan $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun q -antitürevidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun bir q -antitürevi olmak üzere, q -integralde $u = u(x) = \alpha x^\beta$, (α, β sabit) değişken değiştirilmesi incelenebilir:

$$\int f(u) d_q u = F(u) = F(u(x))$$

olmak üzere, eşitlik (4.8)'den de yararlanılarak herhangi q' değişkeni için

$$\begin{aligned}
F(u(x)) &= \int \left(\hat{D}_x^{(q')} F \right) (u(x)) d_{q'} x \\
&= \int \left(\hat{D}_x^{(q')^\beta} F \right) (u(x)) \hat{D}_x^{(q')} u(x) d_{q'} x \\
&= \int \left(\hat{D}_x^{(q')^\beta} F \right) (u(x)) d_q u(x)
\end{aligned}$$

olup, $q' = q^{1/\beta}$ seçilirse, $\hat{D}_x^{(q')^\beta} F = \hat{D}_x^{(q)} F = f$ olur ve

$$\int f(u) d_q u = \int f(u(x)) d_{q^{1/\beta}} u(x) \quad (4.32)$$

bulunur. Eşitlik (4.32) denkleminin sağ tarafı istenirse genel bir form altında

$$\begin{aligned}
\int f(u(x)) d_{q^{1/\beta}} u(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(u((-1)^j q^{2j+1/\beta} x)\right) \left(u((-1)^j q^{2j/\beta} x) - u((-1)^{j+1} q^{2j+2/\beta} x)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\alpha \left[(-1)^j q^{2j+1/\beta} x\right]^\beta\right) \left(\alpha \left[(-1)^j q^{2j/\beta} x\right]^\beta - \alpha \left[(-1)^{j+1} q^{2j+2/\beta} x\right]^\beta\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left((-1)^{j\beta} q^{2j+1} u\right) \left((-1)^{j\beta} q^{2j} u - (-1)^{(j+1)\beta} q^{2j+2} u\right) \\
&= (q + q^{-1}) u \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{2j+1} f\left((-1)^j q^{2j+1} u\right) \\
&= \int f(u) d_q u
\end{aligned}$$

şeklinde alternatif olarak gösterilebilir. Eşitlik (4.32)'nin belirli integral formu yazılırsa

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) d_q u = \int_a^b f(u(x)) d_{q^{1/\beta}} u(x) \quad (4.33)$$

olur. Bu eşitlik genelleştirilmiş integraller için de doğru olacağından, $b = +\infty$, özel olarak $\alpha > 0$, $\beta = 1$ alınrsa, $u(x) = \alpha x$ için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_0^{\infty} f(\alpha x) d_q x = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(x) d_q x \quad (4.34)$$

Bu bölümde son olarak q -analizin temel teoremi ve bunlarla ilgili birkaç matematiksel özellik verilecektir. Analiz'de, türev bir oranın limiti ve belirli integral bir sonsuz toplamın limiti olarak tanımlanır (Kac ve Cheung, 2002). Bu ikisi arasındaki ilişki, Newton-Leibnitz formülü ya da analizin temel teoremi olarak adlandırılır. Fermiyonik türev operatörü ve belirli q -integral arasında da buna benzer bir ilişki vardır.

Teorem 4.3 (q -analizin temel teoremi): $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun bir q -antitürevi ve $F(x)$, $x=0$ 'da sürekli ise,

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a) , \quad 0 \leq a < b \leq \infty \quad (4.35)$$

eşitliği vardır (Kac ve Cheung, 2002).

Bu teoremin PVC-tipli $\hat{D}_x^{(q)}$ operatörüne uygulanması ile, $x=0$ noktasının bir komşuluğunda $f'(x)$ standart türevi mevcut ve $x=0$ 'da sürekli ise,

$$\int_a^b \hat{D}_x^{(q)} f(x) d_q x = f(b) - f(a) \quad (4.36)$$

sonucuna ulaşılır. L'Hospital kuralını kullanarak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \hat{D}_x^{(q)} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(q^{-1}x) - f(-qx)}{(q + q^{-1})x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{q^{-1}f'(q^{-1}x) - (-q)f'(-qx)}{(q + q^{-1})} = f'(0)$$

elde edilir. $x \rightarrow 0$ limitinde $f(x)$ 'in q -türevi onun standart türevine indirgenir.

$f(x)$ ve $g(x)$, analitik iki fonksiyon olmak üzere, eşitlik (4.5)'teki Leibnitz kuralından,

$$\hat{D}_x^{(q)}(f(x)g(x)) = g(-qx) (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) + f(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)} g(x))$$

olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle diferensiyellenebilir fonksiyonların çarpımları da diferensiyellenebilir olduğundan eşitlik (4.36), $[0, a]$ aralığı için uygulanırsa,

$$f(a)g(a) - f(0)g(0) = \int_0^a g(-qx) (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) d_q x + \int_0^a f(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)} g(x)) d_q x$$

ve buradan,

$$\int_0^a f(q^{-1}x) (\hat{D}_x^{(q)} g(x)) d_q x = f(a)g(a) - f(0)g(0) - \int_0^a g(-qx) (\hat{D}_x^{(q)} f(x)) d_q x \quad (4.37)$$

şeklinde kısmi q -integrasyon formülü elde edilebilir. Yine Newton-Leibnitz kuralı ve q -integral formülleri kullanılarak,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \hat{D}_x^{(q)} \left(\int_0^x f(t) d_q t \right) = f(x) \quad (4.38)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \left(\int_0^\alpha \hat{D}_x^{(q)} f(x) d_q x \right) = f(\alpha) - f(0) \quad (4.39)$$

özellikleri elde edilebilir.

PVC-tipli fermiyonik türev operatörü ile q -integral arasındaki ilişkiyi gösteren bazı özellikler incelenebilir. Örneğin,

$$\int \hat{D}_x^{(q)}(x^n) d_q x = x^n \quad (4.40)$$

eşitliği verilebilir. Bundan başka, aşağıdaki eşitlikler de yazılabilir:

$$\int \hat{D}_x^{(q)} \exp_q(\alpha x) d_q x = \frac{1}{\alpha} \exp_q(x) , \quad \alpha \text{ sabit} \quad (4.41)$$

$$\int \exp_q(\alpha x) d_q x = \int_0^x \exp_q(\alpha x) d_q x , \quad \alpha \in R^+ \quad (4.42)$$

Bir sonraki bölümde, yukarıdaki matematiksel özelliklerin muhtemel bir uygulama alanı olarak, istatistiksel mekanik araştırma alanı gözönüne alınacaktır. Bunun için eşitlik (3.1), (3.3), (3.4) ile tanımlanan PVC-fermiyon osilatörlerinin oluşturduğu deforme bir fermiyon gaz modelinin genel bazı termodinamik ve istatistiksel özellikleri incelenecektir.

5. PVC-FERMİYON GAZI MODELİNİN TERMO-İSTATİSTİĞİ

5.1. Modelin Genel Termo-İstatistiksel Özellikleri

Üçüncü bölümde incelenen PVC-fermiyon gazı modelinin öncelikle deforme fermiyon dağılım fonksiyonu elde edilerek kuantum istatistiksel özellikleri çalışılabilir. Bu bağlamda modelin ortalama parçacık sayısı,

$$[n_i] = \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_q} [\hat{N}_i]) \equiv \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_q} \hat{f}_i^+ \hat{f}_i) \quad (5.1)$$

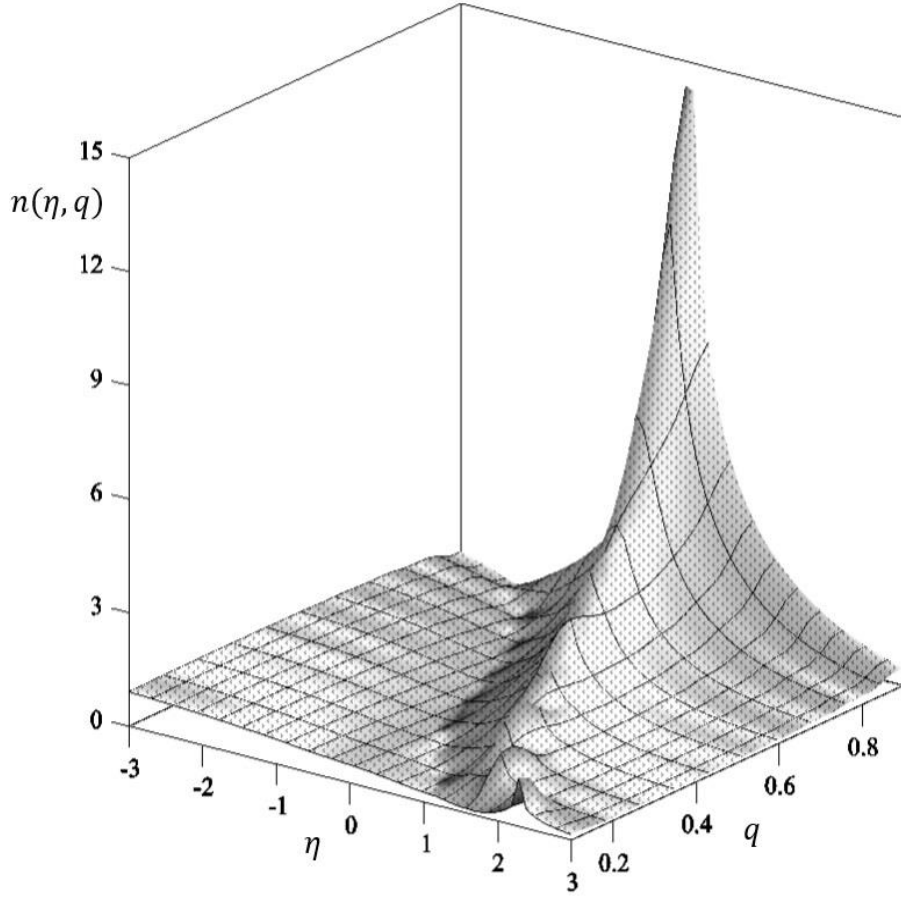
eşitliğinden yararlanılarak bulunabilir (Lee ve Yu, 1992; Tuszynski vd., 1993). Modelin fermiyonik büyük bölüşüm fonksiyonu $Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_q})$ şeklinde olup Hamiltonyeni ise,

$$\hat{H}_q = \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{N}_i \quad (5.2)$$

şeklinde kabul edilebilir (Algin vd., 2015). Burada ε_i , i . kuantum durumundaki parçacığın kinetik enerjisini ve \hat{N}_i de bu kuantum durumu ile ilişkili fermiyon sayı operatörünü temsil eder. Buradan PVC-fermiyon gazı modelinin deforme istatistiksel dağılım fonksiyonu,

$$n_i = n_{i,q} = \frac{1}{2|\ln q|} \left| \ln \left(\frac{|e^{\eta_i} - q^{-1}|}{e^{\eta_i} + q} \right) \right| \quad (5.3)$$

şeklinde olup, $\eta_i = \beta(\varepsilon_i - \mu)$ ve $0 < q < 1$ dir (Narayana Swamy, 2006 a, Algin vd., 2015). Bu aynı zamanda modelin q -deforme FD dağılım fonksiyonunu da gösterir. Bu fonksiyonun $q < 1$ aralığındaki değerler için sonlu sıcaklıklarda değişimi Şekil 5.1'de gösterilmiştir (PVC-fermiyon gazı modelinin deforme dağılım fonksiyonunun grafiği için Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-I'da verilmiştir).



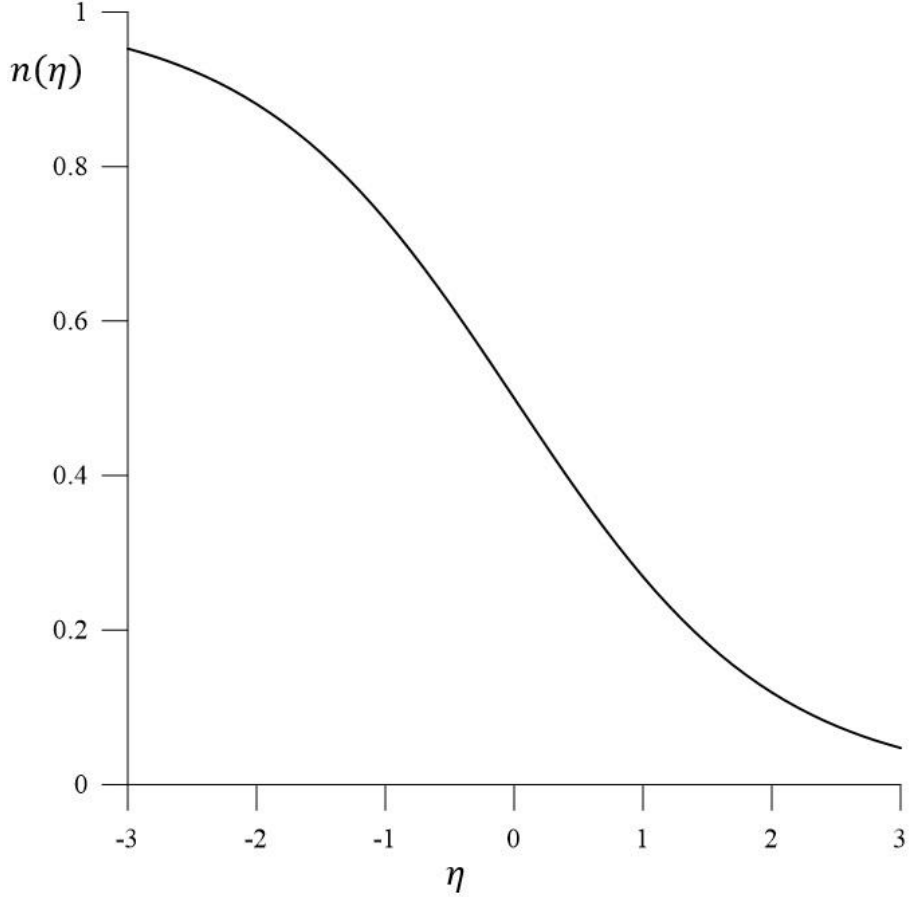
Şekil 5.1. q -Deforme FD dağılım fonksiyonu $n(\eta, q)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre $0 < q < 1$ aralığındaki değişimi.

Eşitlik (5.3)'teki deforme dağılım fonksiyonu $\eta = \ln(q^{-1})$ 'de bir pik göstermekte, $\eta = 0$ 'da fonksiyon $0 < q < 1$ aralığında sonlu değerler almaktadır. Yine bu fonksiyon, $\eta = \ln[(q^{-1} - q)/2]$ değerlerinde sıfıra yaklaşmaktadır. Bu dağılım fonksiyonunun değerleri, artan q değerleri ile büyümektedir.

İdeal fermiyon gazı için standart FD dağılım fonksiyonu (Pathria ve Beale, 2011),

$$n(\eta) = \frac{1}{e^\eta + 1}, \quad \eta = \beta(\varepsilon - \mu) \quad (5.4)$$

şeklinde olup, bu fonksiyonun sonlu sıcaklıklardaki değişimi Şekil 5.2'de gösterilmiştir (Standart FD dağılım fonksiyonu $n(\eta)$ 'nın sonlu sıcaklıklarda değişimini göstermek için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-J'de verilmiştir).



Şekil 5.2. Standart FD dağılım fonksiyonu $n(\eta)$ 'nın sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimi.

Eşitlik (5.4)'teki standart FD dağılım fonksiyonu, η değerleri arttıkça azalan özellik gösterir. q -Deforme FD dağılım fonksiyonu ise, q ve η 'nin değişen aralıklarında artan veya azalan olabilmektedir. Dolayısıyla standart FD dağılım fonksiyonu ile q -deforme FD dağılım fonksiyonunun genel davranışları birbirinden farklıdır. Fakat, standart FD dağılım fonksiyonu ve q -deforme FD dağılım fonksiyonunun aldığı değerler bazı η ve q değerlerinde benzerlik göstermektedir. Örneğin, ($\eta = -1,38$ ve $q = 0,87$); ($\eta = -0,63$ ve

$q = 0,73$); ($\eta = 0$ ve $q = 0,55$); ($\eta = 0,21$ ve $q = 0,05$); ($\eta = 0,6$ ve $q = 0,07$); ($\eta = 1,06$ ve $q = 0,23$) değerlerinde bu iki dağılım fonksiyonu yaklaşık olarak birbirleriyle aynı değerleri alabilmektedirler.

Eşitlik (3.6) ve (5.3)'ten yararlanarak PVC-fermiyon osilatörlerinin oluşturduğu deforme Fermi gazı modelinin büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması aşağıdaki gibi elde edilebilir (Algin vd., 2015):

$$\ln Z^{PVC} = \frac{(q + q^{-1})}{2|\ln q|} \sum_i \ln \left(|1 - ze^{-\beta \varepsilon_i}| \right) \quad (5.5)$$

Burada $0 < q < 1$ olup, $z = e^{\beta \mu}$ ile fugasite temsil edilmektedir. Ne var ki PVC-fermiyon gazı modeli, ikinci bölümde incelenen standart fermiyonların ortaya koyduğu davranışları sergilemediğinden sistemin toplam parçacık sayısı,

$$N \neq z \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \ln Z \quad (5.6)$$

şeklindeki standart termodinamik bağıntıdan elde edilemez. Bu nedenle PVC-fermiyon modelinde karşılaşılabilecek olan tüm kısmi türev ifadeleri için, (3.6) eşitliğinde verilen PVC-modelinin fermiyonik Jackson türev operatörü kullanılmalıdır ($(\partial/\partial z) \rightarrow \hat{D}_z^{(q)}$). Buradan modelin toplam parçacık sayısı istenirse, (5.5) eşitliğinden de yararlanılarak,

$$N = z \hat{D}_z^{(q)} \ln Z \quad (5.7)$$

formunda elde edilebilir. Bu da $N = \sum_i n_i$ şartını, eşitlik (5.3) yardımıyla sağlar.

Öte yandan PVC-fermiyon gazı modelinin, $(PV/kT) = \ln Z$ termodinamik denkleminde yararlanarak çok büyük hacim ve çok büyük parçacık sayısı koşulları altında yukarıdaki eşitliklerdeki toplamlar integrallerle yer değiştirilerek (Greiner vd., 1995) aşağıda modelin basınç ifadesi,

$$\frac{P}{kT} = \left(\frac{q + q^{-1}}{2|\ln q|} \right) \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \left| \ln \left(\left| 1 - ze^{-\beta p^2/2m} \right| \right) \right| \quad (5.8)$$

ve modelin parçacık yoğunluğu,

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{2|\ln q|} \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \left| \ln \left(\frac{\left| 1 - q^{-1}ze^{-\beta p^2/2m} \right|}{\left| 1 + qze^{-\beta p^2/2m} \right|} \right) \right| \quad (5.9)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\varepsilon = p^2/2m$ olup, üç boyutlu uzayda belirli bir kuantum durumunda bulunan parçacığın kinetik enerjisini temsil etmektedir. \vec{p} de parçacığın momentumunu göstermektedir. (3.6) eşitliğindeki fermiyonik Jackson türev operatörü kullanılarak, (5.8) ve (5.9)'dan integraller çözülürse,

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} h_{3/2}(z, q) \quad (5.10)$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} h_{5/2}(z, q) \quad (5.11)$$

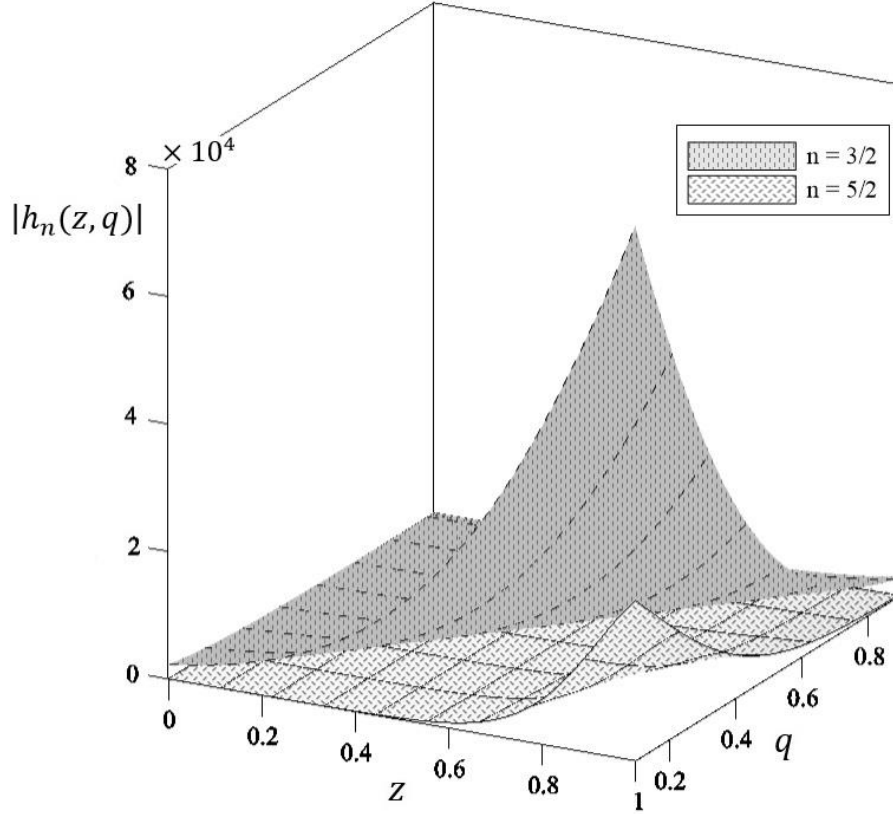
bulunur (Algin vd., 2015). Burada $\lambda = \sqrt{h^2/2\pi mkT}$ ısı dalga boyu ve q -deforme Fermi integrali ise,

$$h_n(z, q) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} dx \frac{1}{2|\ln q|} \left| \ln \left(\frac{\left| 1 - q^{-1}ze^{-x} \right|}{\left| 1 + qze^{-x} \right|} \right) \right| \quad (5.12)$$

şeklinindedir. Burada $x = \beta\varepsilon$ olup, integralin çözümü genelleştirilmiş FD fonksiyonları tarzında meydana çıkar. Bunlar da,

$$h_n(z, q) = \frac{1}{2|\ln q|} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(qz)^l}{l^{n+1}} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(q^{-1}z)^l}{l^{n+1}} \right\} \quad (5.13)$$

şeklinde (5.12)'den bulunabilir ($0 < q < 1$). Eşitlik (5.13)'teki q -deforme FD fonksiyonları $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ 'nin, $q < 1$ durumu için Şekil 5.3'te $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki davranışı gösterilmiştir (Bu fonksiyonların grafik çizimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-K'da verilmiştir).



Şekil 5.3. q -Deforme FD fonksiyonlarından $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ ve $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimi.

Şekil 5.3'teki $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ fonksiyonları, q parametresi arttıkça daha küçük değerler almaktadır. Ayrıca $h_{5/2}(z, q)$ fonksiyonu, $h_{3/2}(z, q)$ fonksiyonunun değerlerinden daha küçük değerlere sahip olmaktadır. Oysa ideal fermiyon gazında, standart Fermi integrali,

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x + 1}, \quad 0 \leq z \leq \infty \quad (5.14)$$

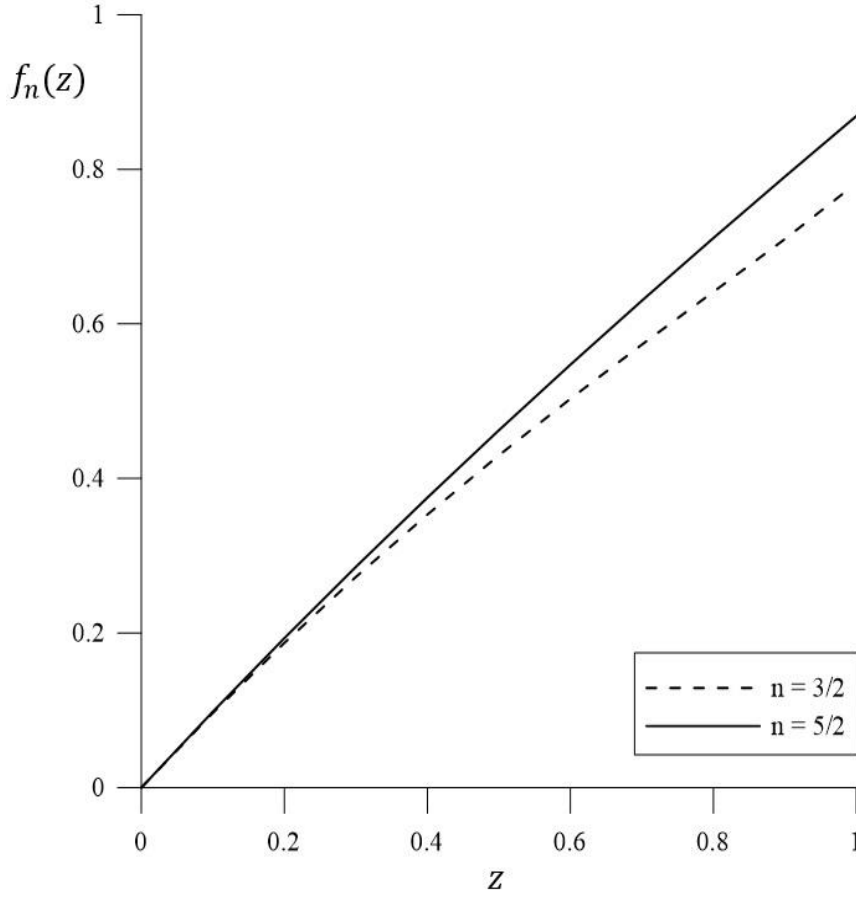
şeklindedir (Greiner vd., 1995). Burada $\Gamma(n)$, standart Gamma fonksiyonu olup,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad n > 0 \quad (5.15)$$

dir (Pathria ve Beale, 2011). (5.14) eşitliğinin çözümleri olan standart FD fonksiyonları,

$$f_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^n} \quad (5.16)$$

olup (Greiner vd., 1995) yukarıda (5.13) eşitliğinde verilen q -deforme FD fonksiyonlarından çok farklıdır. Yine eşitlik (5.14)'ten elde edilen standart $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonları Şekil 5.4'te gösterilmiştir (Standart FD fonksiyonlarından $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ 'nin $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimini göstermek için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-L'de verilmiştir).



Şekil 5.4. Standart FD fonksiyonlarından $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimi.

Şekil 5.4'teki $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonları, z arttıkça artan özellik göstermektedir. Bu standart fonksiyonlarla, eşitlik (5.13)'teki $h_n(z, q)$ fonksiyonları kıyaslanırsa, $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ fonksiyonlarının, $q < 1$ durumunda $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarından aynı z değerleri için daha büyük oldukları görülmektedir.

Ayrıca PVC-fermiyon gazı modelinin bir diğer önemli termodinamik fonksiyonu olan iç enerjisi (U),

$$U = \left(-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{z, V} \quad (5.17)$$

bağıntısından elde edilebilir (Lavagno ve Narayana Swamy, 2002; Narayana Swamy, 2006 a). Eşitlik (3.6)'daki PVC-tipli fermiyonik Jackson türev operatöründen yararlanarak modelin iç enerjisi,

$$U = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} h_{5/2}(z, q) \quad (5.18)$$

olarak bulunur. Buradaki $h_{5/2}(z, q)$, (5.13) eşitliği ile verilir.

Yukarıda PVC-fermiyon gazı modelinin genel termo-istatistiksel özellikleri gözönüne alınmıştır. Bu noktadan sonra özel olarak modelin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özelliklerine yoğunlaşılacaktır.

5.2. Modelin Yüksek Sıcaklıklardaki Termo-İstatistiksel Özellikleri

PVC-fermiyon gazı modelinin yüksek sıcaklıklarda yani, $z \ll 1$ limitinde termodinamik ve kuantum istatistiksel özellikleri incelenmek istenirse öncelikle modelin hal denklemi bulunmalıdır. Bu ise, üç veya iki boyutlu uzayda ayrı ayrı çıkartılabilir. Eşitlik (5.10) ve (5.11)'den yararlanılarak PVC-fermiyon modelinin yüksek sıcaklıklardaki fugasite (z) ifadesi deformasyon parametresi q cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Algin vd., 2015):

$$\begin{aligned}
z = & \left[\frac{2|\ln q|}{(q - q^{-1})} \right] \left(\frac{\lambda^3 N}{V} \right) + \left[\frac{1}{2^{1/2}} \frac{|\ln q|^2}{(q - q^{-1})^3} (q^2 + q^{-2}) \right] \left(\frac{\lambda^3 N}{V} \right)^2 \\
& + \left[\frac{1}{2} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^5} (q^2 + q^{-2})^2 - \frac{8}{3^{5/2}} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^4} (q^3 - q^{-3}) \right] \left(\frac{\lambda^3 N}{V} \right)^3 \\
& + \left[\frac{5}{2^{7/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^7} (q^2 + q^{-2})^3 - \frac{80}{6^{5/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^6} (q^2 + q^{-2})(q^3 - q^{-3}) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^5} (q^4 + q^{-4}) \right] \left(\frac{\lambda^3 N}{V} \right)^4 \\
& + \left[\frac{7}{2^4} \frac{|\ln q|^5}{(q - q^{-1})^9} (q^2 + q^{-2})^4 - \frac{7}{3^{3/2}} \frac{|\ln q|^5}{(q - q^{-1})^8} (q^2 + q^{-2})^2 (q^3 - q^{-3}) \right. \\
& + \frac{3}{2^{3/2}} \frac{|\ln q|^5}{(q - q^{-1})^7} (q^2 + q^{-2})(q^4 + q^{-4}) + \frac{32}{3^4} \frac{|\ln q|^5}{(q - q^{-1})^7} (q^3 - q^{-3})^2 \\
& \left. - \frac{32}{5^{5/2}} \frac{|\ln q|^5}{(q - q^{-1})^6} (q^5 - q^{-5}) \right] \left(\frac{\lambda^3 N}{V} \right)^5 \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Buradan PVC-fermion gazı modelinin hal denklemi üç-boyutlu uzayda,

$$\frac{PV}{NkT} = a_1 + a_2 \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) + a_3 \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^2 + a_4 \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^3 + a_5 \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^4 + \dots \tag{5.20}$$

şeklindedir. Bu denklemdeki a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 katsayıları virial katsayıları olarak adlandırılır. Dolayısıyla bu denklemin adı da hal denkleminin virial açılımıdır.

Öte yandan iki-boyutlu uzayda PVC-fermion gazı modelinin hal denklemi bulunmak istenirse öncelikle modelin,

$$\frac{\tilde{P}}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{h}_2(z, q) \tag{5.21}$$

ile iki-boyutlu haldeki basınç ifadesi ve yine iki-boyutta parçacık yoğunluğu olan,

$$\frac{\tilde{N}}{A} = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{h}_1(z, q) \quad (5.22)$$

elde edilir (Algin vd., 2015). Eşitlik (5.21) ve (5.22)'de,

$$\tilde{h}_1(z, q) = \frac{1}{2|\ln q|} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(qz)^l}{l^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(q^{-1}z)^l}{l^2} \right\} \quad (5.23)$$

$$\tilde{h}_2(z, q) = \frac{1}{2|\ln q|} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(qz)^l}{l^3} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(q^{-1}z)^l}{l^3} \right\} \quad (5.24)$$

şeklinde tanımlı genelleştirilmiş $\tilde{h}_n(z, q)$ fonksiyonlarıdır (Burada q , $0 < q < 1$ aralığındadır). Bu durumda iki-boyutlu uzayda PVC-fermiyon modelinin hal denkleminin virial açılımı ise,

$$\frac{\tilde{P}A}{\tilde{N}kT} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right) + \tilde{a}_3 \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^2 + \tilde{a}_4 \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^3 + \tilde{a}_5 \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^4 + \dots \quad (5.25)$$

olacaktır. Aşağıda bunlar, ayrı ayrı (5.20) ve (5.25) eşitliklerinden yararlanılarak incelenmiştir.

5.2.1. Modelin 3-boyutlu uzayda virial katsayıları

Eşitlik (5.20)'de verilen üç boyutlu uzaydaki PVC-fermiyon gazı modelinin hal denklemindeki virial katsayıları, (5.19) eşitliğinden de yararlanılarak aşağıdaki gibi bulunur (Algin vd., 2015):

$$a_1(q) = 1 \quad (5.26)$$

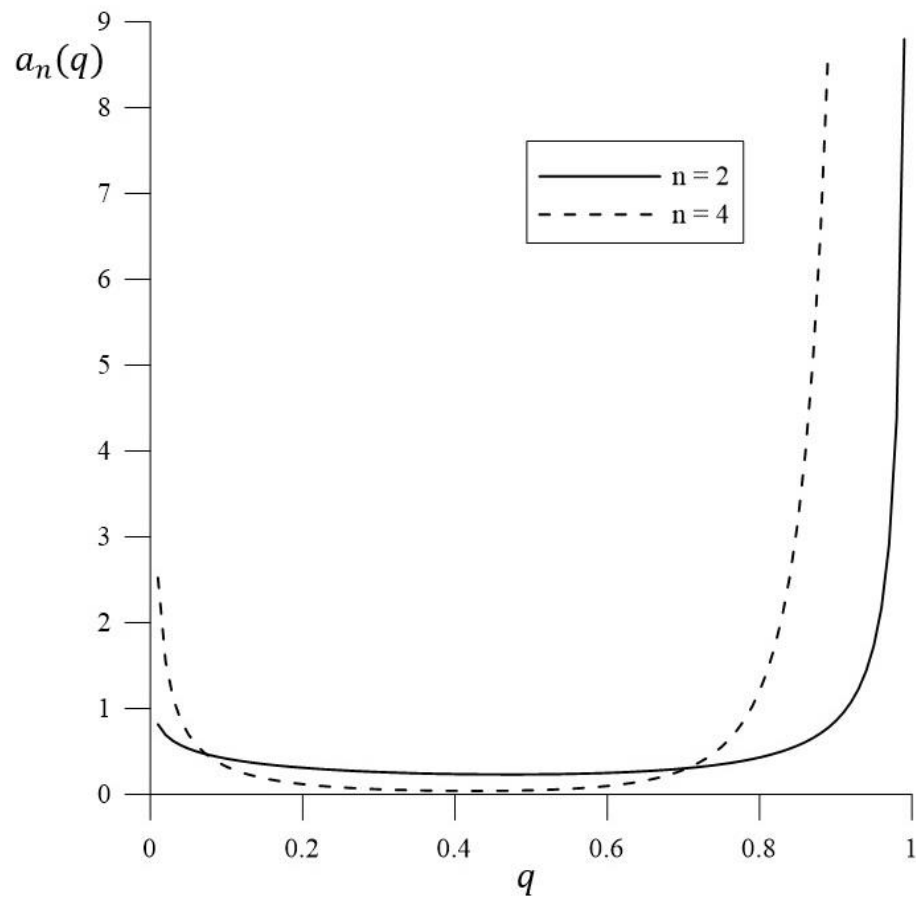
$$a_2(q) = \frac{1}{2^{5/2}} \frac{|\ln q|}{(q - q^{-1})^2} (q^2 + q^{-2}) \quad (5.27)$$

$$a_3(q) = \frac{1}{2^3} \frac{|\ln q|^2}{(q - q^{-1})^4} (q^2 + q^{-2})^2 - \frac{8}{3^{7/2}} \frac{|\ln q|^2}{(q - q^{-1})^3} (q^3 - q^{-3}) \quad (5.28)$$

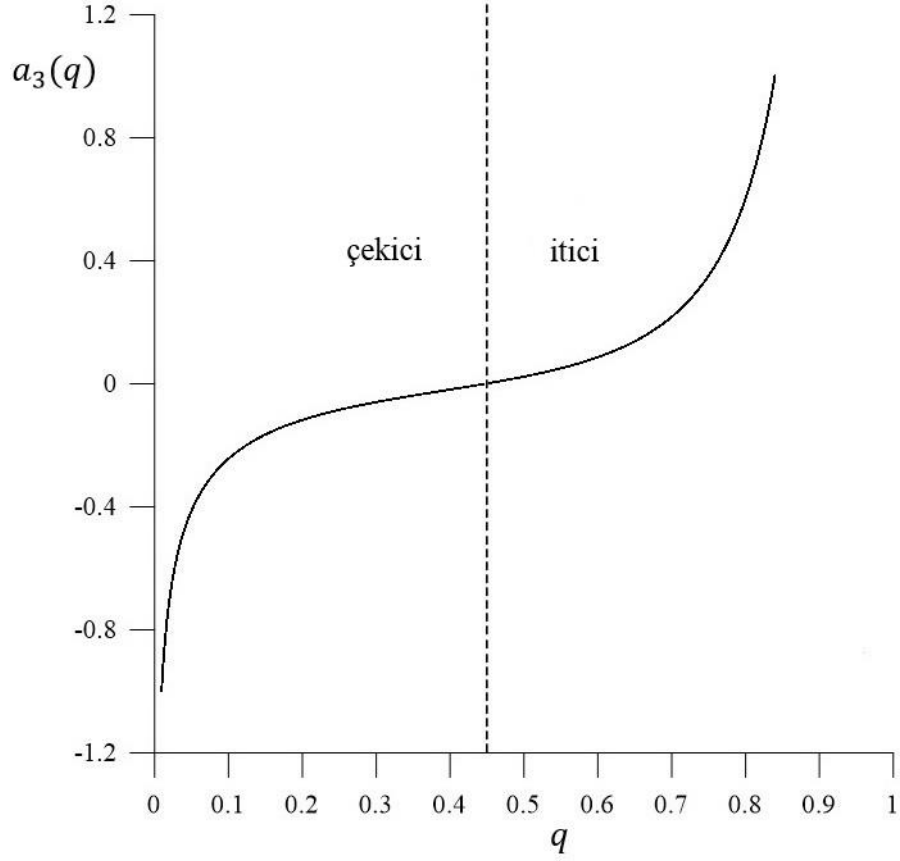
$$a_4(q) = \frac{5}{2^{11/2}} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^6} (q^2 + q^{-2})^3 - \frac{4}{6^{3/2}} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^5} (q^2 + q^{-2})(q^3 - q^{-3}) \\ + \frac{3}{2^4} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^4} (q^4 + q^{-4}) \quad (5.29)$$

$$a_5(q) = \frac{7}{2^6} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^8} (q^2 + q^{-2})^4 - \frac{2}{3^{3/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^7} (q^2 + q^{-2})^2 (q^3 - q^{-3}) \\ + \frac{2^5}{3^5} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^6} (q^3 - q^{-3})^2 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^6} (q^2 + q^{-2})(q^4 + q^{-4}) \\ - \frac{2^6}{5^{7/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^5} (q^5 - q^{-5}) \quad (5.30)$$

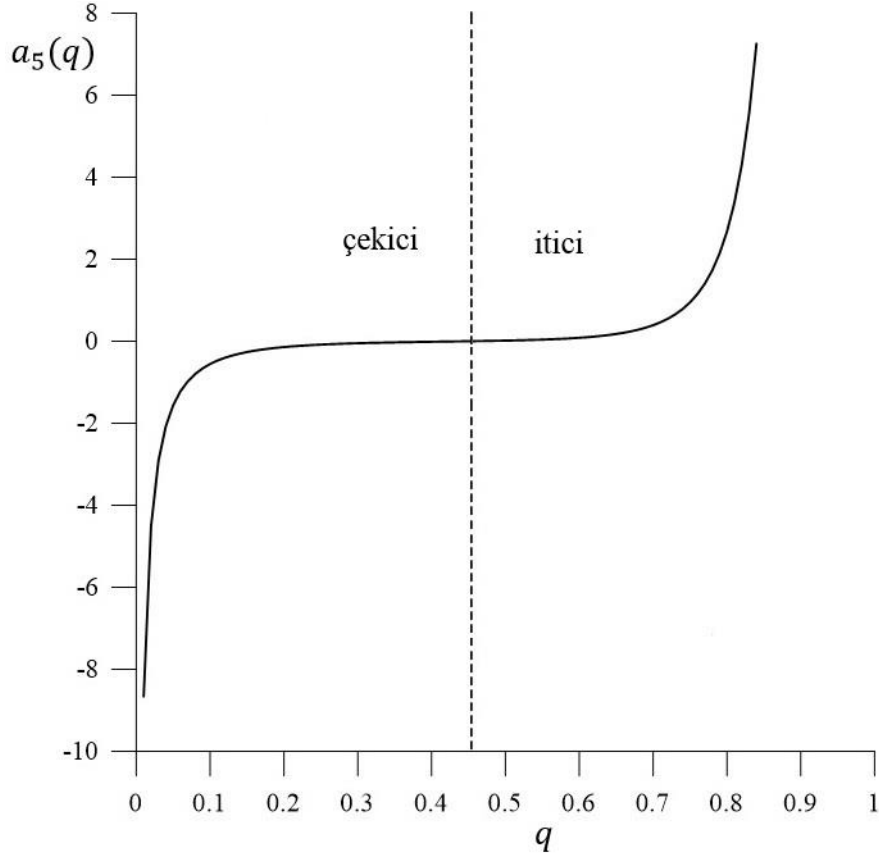
Burada $0 < q < 1$ 'dir. Burada verilen virial katsayıların deformasyon parametresi q ile değişimleri, Şekil 5.5-5.7'de ayrı ayrı gösterilmiştir (Şekil 5.5'teki $n=2$ ve $n=4$ için $a_n(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu Ek Açıklama-M'de, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7'deki $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ virial katsayılarının değişimi için gerekli olan Matlab R2013b kodu sırasıyla Ek Açıklama-N ve Ek Açıklama-O'da verilmiştir).



Şekil 5.5. $a_2(q)$ ve $a_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimi.



Şekil 5.6. $a_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen değer, $q = 0,4493$ noktasıdır ve bu nokta $a_3(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.



Şekil 5.7. $a_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen değer $q = 0,4562669$ noktasıdır ve bu çizgi $a_5(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.

Şekil 5.5'te gösterilen $a_2(q)$ ve $a_4(q)$ hep pozitif değerler almaktadır. $a_2(q)$ virial katsayısı, $q = 0,47$ değerine kadar azalan, bu değerden itibaren artan özellik gösterir. $a_4(q)$ ise, $q = 0,42$ değerine kadar azalan, bu değerden itibaren artan olmaktadır. Şekil 5.6 ve 5.7'de gösterilen $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ hem negatif, hem pozitif değerler almaktadır. $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ virial katsayıları, deformasyon parametresi q arttıkça artan özellik göstermektedir. Üç-boyutlu uzayda $a_2(q)$, $a_3(q)$, $a_4(q)$ ve $a_5(q)$ virial katsayılarının en hızlı artış gösterdiği bölge $q = 0,91$ değerinden sonradır. Şekil 5.6 ve 5.7'de $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ 'nin negatif olduğu bölgelerde sistem bozon gazı benzeri davrandığından PVC-tipli fermiyonların adeta bozonlar gibi çekici fiziksel etkileşmeye girdikleri şeklinde yorumlanır. Oysa $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ 'nin pozitif değerler aldığı bölgelerde ise PVC-tipli

fermiyonların gerçek fermiyonlar gibi itici etkileşme içinde kaldıkları, bu q değerlerinde gözlenmiştir.

İdeal fermiyon gazının üç-boyutlu uzayda virial katsayıları ($a_1 = 1$; $a_2 = 0,17678$; $a_3 = -0,0033$; $a_4 = 0,00011$; $a_5 = -0,0000035$) şeklinde nümerik değerlere sahiptirler (Pathria ve Beale, 2011). Eşitlik (5.28)'de verilen üçüncü virial katsayı, $q = 0,4413$ için $a_3(q) = -0,0033$ değerini alarak ideal bozon gazı ile, $q = 0,4573$ için $a_3(q) = 0,0033$ değerini alarak ideal fermiyon gazı ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca, eşitlik (5.30)'da verilen beşinci virial katsayı ise, $q = 4562543$ için $a_5(q) = -35 \times 10^{-7}$ değerini alarak ideal bozon gazı ile; $q = 4562796$ için $a_5(q) = 35 \times 10^{-7}$ değerini alarak ideal fermiyon gazı ile benzerlik göstermektedir.

5.2.2. Modelin 2-boyutlu uzayda virial katsayıları

Eşitlik (5.25)'te verilen iki-boyutlu uzay için PVC-fermiyon gazı modelinin hal denklemindeki virial katsayıları, (5.21) ve (5.22) eşitliklerinden de yararlanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir (Algin vd., 2015):

$$\tilde{a}_1(q) = 1 \quad (5.31)$$

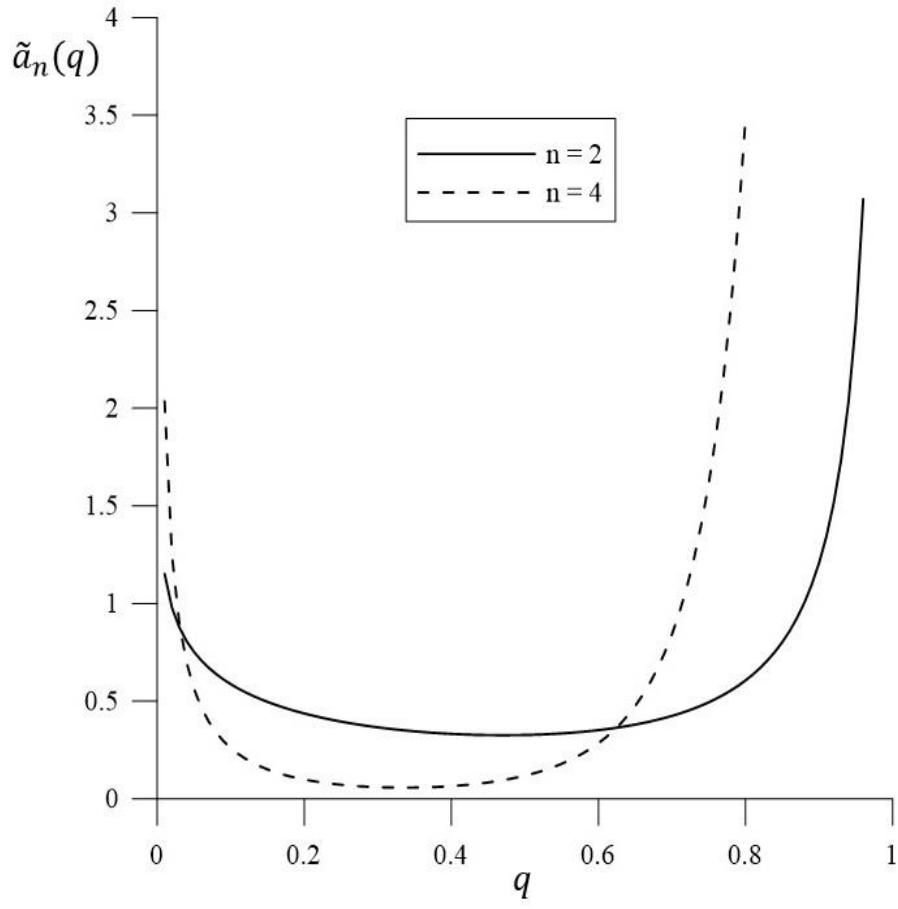
$$\tilde{a}_2(q) = \frac{1}{2^2} \frac{|\ln q|}{(q - q^{-1})^2} (q^2 + q^{-2}) \quad (5.32)$$

$$\tilde{a}_3(q) = \frac{1}{2^2} \frac{|\ln q|^2}{(q - q^{-1})^4} (q^2 + q^{-2})^2 - \frac{8}{3^3} \frac{|\ln q|^2}{(q - q^{-1})^3} (q^3 - q^{-3}) \quad (5.33)$$

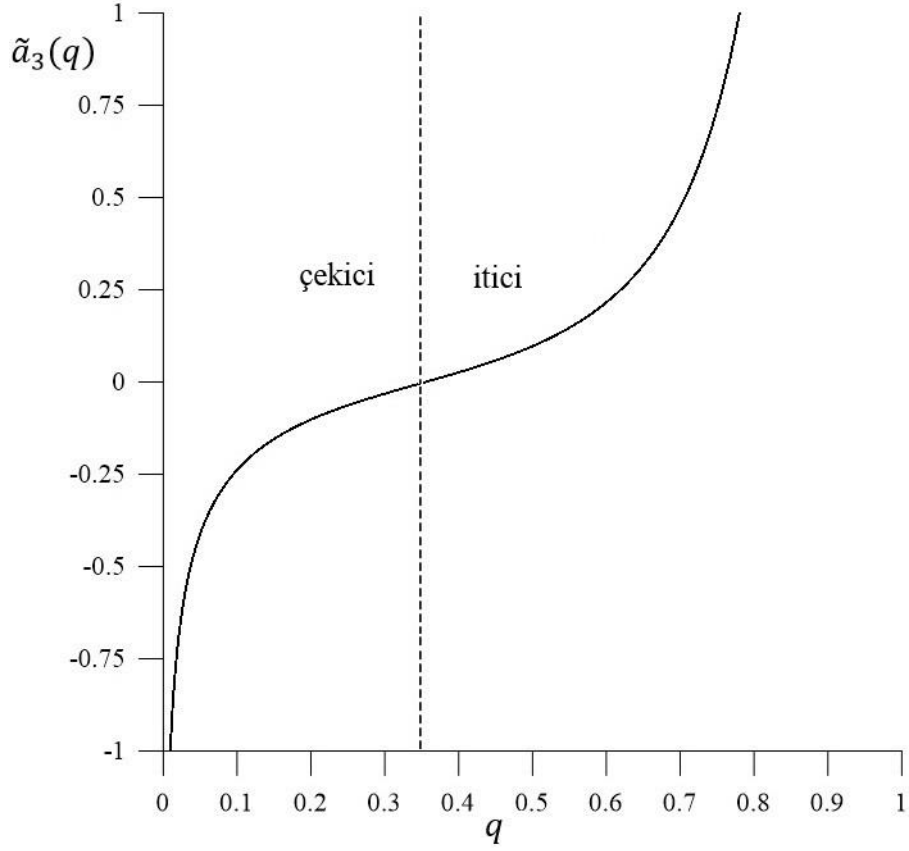
$$\begin{aligned} \tilde{a}_4(q) &= \frac{5}{2^4} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^6} (q^2 + q^{-2})^3 - \frac{2}{3} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^5} (q^2 + q^{-2})(q^3 - q^{-3}) \\ &\quad + \frac{3}{2^3} \frac{|\ln q|^3}{(q - q^{-1})^4} (q^4 + q^{-4}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_5(q) &= \frac{7}{2^4} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^8} (q^2 + q^{-2})^4 - \frac{4}{3} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^7} (q^2 + q^{-2})^2 (q^3 - q^{-3}) \\ &\quad + \frac{2^5}{3^4} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^6} (q^3 - q^{-3})^2 + \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^6} (q^2 + q^{-2})(q^4 + q^{-4}) \\ &\quad - \frac{2^6}{5^3} \frac{|\ln q|^4}{(q - q^{-1})^5} (q^5 - q^{-5}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

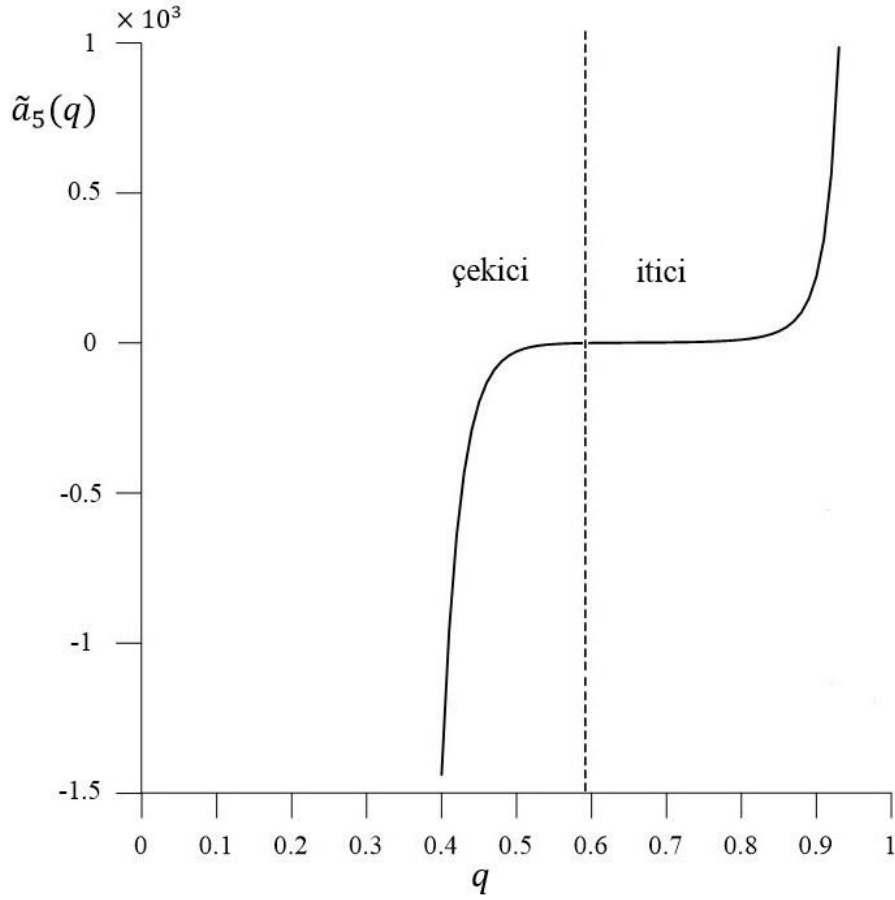
Burada $0 < q < 1$ 'dir. Bu virial katsayıların q parametresi ile değişimleri, Şekil 5.8-5.10'da ayrı ayrı gösterilmiştir ($\tilde{a}_n(q)$ 'nun Ek Açıklama-P'de, $\tilde{a}_3(q)$ 'nun Ek Açıklama-R'de ve $\tilde{a}_5(q)$ 'nun Ek Açıklama-S'de q parametresi ile değişimleri için gerekli olan Matlab R2013b kodları verilmiştir).



Şekil 5.8. $\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimi.



Şekil 5.9. $\tilde{a}_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen değer $q = 0,3563$ noktasıdır, bu çizgi $\tilde{a}_3(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.



Şekil 5.10. $\tilde{a}_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimi. Kesikli çizgi ile gösterilen $q = 0,5969193$ değeri $\tilde{a}_5(q)$ 'nin negatif ve pozitif olduğu bölgeleri ayırmaktadır.

Şekil 5.8'de gösterilen $\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ virial katsayıları, $0 < q < 1$ aralığında hep pozitif değerler almaktadır. $\tilde{a}_2(q)$ virial katsayısı, $q = 0,47$ değerine kadar azalan, bu değerden sonra ise artan özellik gösterir. $\tilde{a}_4(q)$ virial katsayısı, $q = 0,34$ değerine kadar azalan, bu değerden sonra ise artan özellik gösterir. Şekil 5.9 ve 5.10'da gösterilen $\tilde{a}_3(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$ virial katsayıları hem negatif, hem pozitif değerler almaktadır. $\tilde{a}_3(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$ virial katsayıları genel olarak artan özellik gösterir. İki boyutlu uzayda, $\tilde{a}_2(q)$, $\tilde{a}_3(q)$, $\tilde{a}_4(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$ virial katsayılarının en hızlı artış gösterdiği bölge $q = 0,89$ değerinden sonradır. Şekil 5.9 ve 5.10'da $\tilde{a}_3(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$ fonksiyonlarının negatif olduğu bölgelerde, iki-boyutlu uzayda PVC-tipli fermiyonların bozonlar gibi çekici davrandıkları, $\tilde{a}_3(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$

fonksiyonlarının pozitif değerler aldığı bölgede ise PVC-tipli fermiyonların iki-boyutta da gerçek fermiyonlar gibi itici olarak etkileştikleri görülmektedir.

İdeal fermiyon gazının iki-boyutlu uzayda virial katsayıları ($\tilde{a}_1 = 1$; $\tilde{a}_2 = 0,25$; $\tilde{a}_3 = 0,0278$; $\tilde{a}_4 = 0$; $\tilde{a}_5 = -0,00028$) şeklinde nümerik değerlere sahiptir (Khare, 2005). Eşitlik (5.33)'te verilen üçüncü virial katsayı, $q = 0,3079$ için $\tilde{a}_3(q) = -0,0278$ değerini alarak ideal bozon gazı ile, $q = 0,4039$ için $\tilde{a}_3(q) = 0,0278$ değerini alarak ideal fermiyon gazı ile benzerlik göstermektedir. Eşitlik (5.35)'te verilen beşinci virial katsayı ise $q = 0,5969102$ için $\tilde{a}_5(q) = -0,00028$ değerini alarak ideal bozon gazına, $q = 0,5969285$ için $\tilde{a}_5(q) = 0,00028$ değerini alarak ideal fermiyon gazına benzerlik göstermektedir.

Yukarıda PVC-fermiyon gazı modelinin hem genel hem de yüksek sıcaklıklardaki bazı önemli termodinamik ve kuantum istatistiksel özellikleri verilmiştir. Bu özellikler standart fermiyon sistemleri ile kıyaslandığında PVC-fermiyon cebirinden kaynaklanan deformasyon etkileri nedeni ile farklılıklar göstermektedir. Dolayısıyla gerek üç-boyutta, gerekse iki-boyutta modelin termo-istatistiksel özelliklerine deformasyon parametresi q 'nun etkileri literatürde çalışılan diğer fermiyon modellerininkinden (Chaichian vd., 1993; Ubriaco, 1997; Lavagno ve Narayana Swamy, 2002; Narayana Swamy, 2006 a, 2006 b, 2006 c; Cai vd., 2007, 2010; Algin ve Senay, 2012; Dai ve Xie, 2013) oldukça farklılıklar göstermiştir. Bu durum eşitlik (5.19)-(5.35) bağıntılarından gözlenmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, doğadaki maddeleri meydana getiren temel yapı taşlarından olan fermiyon parçacıkları üzerinde kuantum cebirsel ve istatistiksel özelliklerine yoğunlaşmıştır. Buradan özel bir deforme fermiyon sistemi olan PVC-tipli fermiyon modeli üzerinde matematiksel, termodinamik ve kuantum istatistiksel yönleri ile ilişkili özellikler incelenmeye çalışılmıştır.

İkinci bölümde, kuantum mekaniğinde özdeş parçacık sistemlerinden biri olan fermiyonlar ele alınmıştır. Fermiyonlar, anti-simetrik dalga fonksiyonlarına sahiptirler. Pauli dışarlama ilkesinden dolayı, bir enerji durumuna birden fazla fermiyon yollanamaz. Fermiyon cebirleri, Hilbert uzayları üzerinde tanımlıdır. Bu bölümde, Hilbert uzaylarının kuantum mekaniği ile ilişkili bazı yönleri ele alınmıştır. Hilbert uzaylarının bir alt uzayı olan fermiyonik Fock uzayı ve bu uzay üzerinde tanımlı fermiyonik yaratma ve yok etme operatörleri incelenmiştir. Fermiyonların anti-komütasyon ilişkilerine uygun davrandıkları vurgulanmıştır.

Üçüncü bölümde, PVC-tipli deforme fermiyon cebiri tanıtılmıştır. PVC-tipli deforme fermiyon cebiri, eşitlik (2.37)'de verilen standart fermiyon cebirinden farklıdır. Zira PVC-fermiyon modeli, Pauli dışarlama ilkesini özellikle $q \neq 1$ durumunda sağlamamaktadır. PVC-fermiyon cebiri için eşitlik (3.1)-(3.5)'ten yararlanarak bu modele ait fermiyonik Jackson türev operatörü $\hat{D}_x^{(q)}$, eşitlik (3.6) ile tanımlanmıştır (Narayana Swamy, 2006 a, 2006 b). Buradan hareketle dördüncü bölümde, fermiyonik Jackson türev operatörünün özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. PVC-tipli fermiyonik Jackson türev operatörünün, $q \rightarrow 1$ limitinde standart türeve indirgenemediği gözlenmiştir. $\hat{D}_x^{(q)}$ operatörü, lineer bir operatördür. Analiz'deki yöntemlere benzer yöntemlerle, bu q -türev operatörü için Leibnitz kuralı, bölüm kuralı gibi özellikler bulunmuştur (Algin vd., 2015). Ayrıca, $\exp(x)$ ve $\ln(x)$ gibi temel fonksiyonların q -benzerleri olan $\exp_q(x)$ ve $\ln_q(x)$, sırasıyla eşitlik (4.9) ve (4.14)'te gösterilmiştir. $\exp_q(x)$ fonksiyonu, deformasyon parametresi q arttıkça, artan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 4.1). Bu fonksiyon en hızlı artışı, $q = 0,94$ değerinden sonra gösterir. $q = 0,41$ değerine kadar $\exp_q(x) < \exp(x)$ iken, $q = 0,42$ değerinden itibaren $\exp_q(x)$ fonksiyonu standart $\exp(x)$ 'ten daha büyük değerler

alır. $\ln_q(x)$ fonksiyonu, deformasyon parametresi q arttıkça önce azalan, sonra artan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 4.2). $x=1$ değerine kadar $\ln_q(x) > \ln(x)$ iken, $1 < x \leq 1,2$ aralığında $\ln_q(x) < \ln(x)$ olmaktadır. Daha sonra bazı standart fonksiyonlara, standart türevin ve fermiyonik q -türev operatörünün etkisi eşitlik (4.15)-(4.20) arasında incelenmiştir. Eşitlik (4.16)'da verilen $\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)$ fonksiyonu deformasyon parametresi q arttıkça azalan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 4.4). Eşitlik (4.18)'de verilen $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonu, q parametresi değıştikçe büyümektedir (Bkz. Şekil 4.6). Son olarak eşitlik (4.20)'de verilen $\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonu, deformasyon parametresi q arttıkça azalan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 4.8).

Dördüncü bölümün ikinci kısmında, PVC-tipli fermiyonik q -integral formları (4.25)-(4.42) eşitlikleri arasında tanıtılmıştır. Fermiyonik q -integral bulunurken, eşitlik (4.24)'teki geometrik seri açılımından yararlanılmıştır. Dolayısıyla bu model için belirsiz, belirli q -integral formları seri açılımı şeklinde bulunmuştur. Teorem 4.2 yardımıyla, bulunan seri açılımının yakınsak olduğu gösterilmiştir. Analiz'de integral alınırken kullanılan değışken değıştirmesi yöntemi, fermiyonik q -integral için de uygulanmıştır ve eşitlik (4.32)'de gösterilmiştir. Analiz'in temel teoremi olduğu gibi, kuantum analizin temel teoremi de Teorem 4.3'te tanıtılmıştır. Analiz'deki kısmi integrasyonun, kuantum analizdeki karşılığı da (4.37) eşitliğinde verilmiştir. Bulunan eşitliklerden PVC-fermion modeliyle ilişkili fermiyonik q -integralin, standart integralden oldukça farklı olduğu görülmüştür.

Beşinci bölümde, PVC-fermion gazı modelinin dağılım fonksiyonu, basıncı, iç enerjisi gibi genel termo-istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Eşitlik (5.3)'te verilen q -deforme FD dağılım fonksiyonu, deformasyon parametresinin değerleri ile birlikte büyümektedir (Bkz. Şekil 5.1). q -Deforme fermiyon dağılım fonksiyonu, eşitlik (5.4)'te verilen standart FD dağılım fonksiyonu ile benzerlik göstermemektedir. Standart fermiyon dağılım fonksiyonu, η değıştikçe hep azalandır (Bkz. Şekil 5.2); oysa q -deforme fermiyon dağılım fonksiyonu η değıştikçe artan veya azalan olabilmektedir (Bkz. Şekil 5.1). Eşitlik (5.10) ve (5.11)'de verilen bu modele ait parçacık yoğunluğu ve basınç ifadeleri, q -deforme FD fonksiyonları $h_n(z, q)$ 'lar cinsinden ifade edilmiştir. Bu fonksiyonlardan $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ fonksiyonlarının, $0 < q < 1$ ve $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değışimleri gösterilmiştir

(Bkz. Şekil 5.3). Bu fonksiyonlar q parametresi arttıkça, azalan özellik göstermektedirler. $h_{5/2}(z, q)$ fonksiyonu, $h_{3/2}(z, q)$ fonksiyonunun değerlerinden daha küçük değerler almaktadır. Eşitlik (5.16)'da verilen standart FD fonksiyonlarından $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$, z arttıkça artan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 5.4). Eşitlik (5.13)'teki $h_n(z, q)$ fonksiyonlarıyla, eşitlik (5.16)'daki $f_n(z)$ fonksiyonları kıyaslanırsa, $q < 1$ durumunda $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ fonksiyonlarının, aynı z değerleri için $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarından daha büyük oldukları görülmektedir. Daha sonra PVC-fermion gazı modelinin iç enerji fonksiyonu eşitlik (5.18)'de elde edilmiştir.

PVC-fermion gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özelliklerinden iki ve üç boyutlu uzayda hal denklemleri ve virial katsayıları da ele alınmıştır. Üç-boyutlu uzaydaki virial katsayılardan, $a_2(q)$ ve $a_4(q)$ hep pozitif değerler almaktadır ve önce azalan, sonra artan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 5.5). $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ ise hem negatif hem pozitif değerler almaktadır ve her ikisi de artan fonksiyonlardır (Bkz. Şekil 5.6 ve 5.7). Üç-boyutlu uzaydaki bu virial katsayılar, $q = 0,91$ değerinden sonra daha hızlı artmaktadır. $a_3(q)$ ve $a_5(q)$ 'nin negatif değerler aldığı bölgede sistemin bozon gazı benzeri davrandığı ve pozitif değerler aldığı bölgede ise sistemin fermiyon gazı benzeri davrandığı gözlenmiştir (Algin vd., 2015). İki-boyutlu uzaydaki virial katsayılardan, $\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ hep pozitif değerler almaktadır ve önce azalan, sonra artan özellik göstermektedir (Bkz. Şekil 5.8). $\tilde{a}_3(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$ ise hem negatif hem pozitif değerler almaktadır ve her ikisi de artan fonksiyonlardır (Bkz. Şekil 5.9 ve 5.10). Bu virial katsayıların en hızlı artış gösterdiği bölge, $q = 0,89$ değerinden sonradır. İki boyutta, $\tilde{a}_3(q)$ ve $\tilde{a}_5(q)$ fonksiyonlarının negatif olduğu bölgelerde, PVC-tipli fermiyonların bozonlar gibi çekici davrandıkları, pozitif oldukları bölgelerde ise PVC-tipli fermiyonların gerçek fermiyonlar gibi itici olarak etkileştikleri görülmüştür (Algin vd., 2015).

Dördüncü bölümde ayrıntılı olarak ele alınan PVC-tipli fermiyonik $\hat{D}_x^{(q)}$ operatörü kuantum analizin bir parçasıdır. Kuantum analiz, temelleri 18. yüzyıla dayanan matematik, fizik, ekonomi gibi birçok alanda uygulaması olan bir daldır. Örneğin, kuantum analizin yaklaşım teorisi alanındaki uygulamasına, 1987'de Lupas'ın q -Bernstein polinomlarını literatüre geçirmesi verilebilir (Aral vd., 2013). q -Bernstein polinomları yaklaşım

teorisindeki ve nümerik analizdeki uygulamaları açısından önemlidir. Yaklaşım teorisindeki bir başka örnek, Kantorovich ve Durrmeyer tipi bazı standart integral operatörlerinin q -benzerlerinin bulunmasıdır (Aral vd., 2013).

Kuantum analizin fiziksel bir uygulamasına örnek olarak, moleküler ve nükleer spektroskopi verilebilir (Ernst, 2012). Örneğin, 1990 yılında $su_q(2)$ kuantum cebiri, deforme atom çekirdeklerinin dönme spektrumunun çalışılmasında kullanılmıştır (Raychev vd., 1990). Yine 1996 yılında özel bir q -deforme Heisenberg cebiri, ${}^4\text{He}$ 'ün süper akışkanlığı ile ilgili fiziksel özelliklere uygulanmıştır (Monteiro ve Rodrigues, 1996).

Kuantum analizin olası bir başka uygulaması da, dinamik programlama ve sinir ağları alanında yapılan çalışmadır (Seiffert ve Wunsch, 2008). Bu çalışmada, kuantum analiz temelli bir dinamik programlama formülü geliştirilmiştir. Dinamik programlama, çok aşamalı karar problemlerinin çözümünde kullanılır. Dinamik programlama ayrıca, sinir ağlarındaki algoritmalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu çalışma ile kuantum analizin sayısal karar teorisi üzerindeki etkileri ele alınmıştır (Seiffert ve Wunsch, 2008). Burada kullanılan Jackson türev operatörü,

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlı olup, eşitlik (3.6)'daki PVC-tipli fermiyonik türev operatörü $\hat{D}_x^{(q)}$ 'dan tamamen farklıdır. Dolayısıyla, eşitlik (3.6)'nın olası bir uygulaması gelecekte sinir ağlarına yapılabilir.

Son bir uygulama örneği olarak, Haven'in kuantum analiz ve opsiyon fiyatlama üzerine olan çalışması verilebilir (Haven, 2009). Bu çalışma, opsiyon fiyatlama konusunda q -türeve nasıl finansal bir yorum getirilebileceğini amaçlamaktadır. Finansal opsiyon fiyatlama uygulaması için Haven'in kullandığı q -türev operatörü (6.1) eşitliğindeki gibi tanımlanmıştır. Opsiyon fiyatlama ile ilgili kısmi diferensiyel denklemde, risksiz faiz oranının kullanılıp kullanılmadığı konusunda q parametresinin bir gösterge olup olmayacağı tartışılmaktadır. Bu çalışmada da, q -türeve finansal bir anlam yüklenmektedir (Haven, 2009). Burada kullanılan Jackson türev operatörü de, eşitlik (3.6)'daki $\hat{D}_x^{(q)}$ fermiyonik türev operatöründen farklı olduğundan, eşitlik (3.6)'nın olası bir uygulaması yine gelecekte finansal opsiyon fiyatlama üzerine yapılabilir.

Bu tez çalışmasının orjinal ve ana kısımlarını oluşturan dördüncü ve beşinci bölümlerde ele alınan PVC-fermiyon modelinin gerek $\hat{D}_x^{(q)}$ fermiyonik q -türev, gerekse fermiyonik q -integral formları ile birlikte, tüm termodinamik ve kuantum istatistiksel özelliklerinin yukarıda bahsedilen olası uygulama alanlarına gelecekte ışık tutabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Algin, A., 2011, A comparative study on q -deformed fermion oscillators, International Journal of Theoretical Physics, 50, 1554-1568.
- Algin, A., Senay, M., 2012, High temperature behavior of a deformed Fermi gas obeying interpolating statistics, Physical Review E, 85, 041123.
- Algin, A., Irk, D., Topcu, G., 2015, Anyonic behavior of an intermediate-statistics fermion gas model, Physical Review E, 91, 062131.
- Apaydın, F., 2004, İstatistik Fizik, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, s. 63.
- Aral, A., Gupta, V., Agarwal, R. P., 2013, Applications of q -Calculus in Operator Theory, Springer, New York, p. 1-5.
- Baym, G., 1974, Lectures on Quantum Mechanics, W. A. Benjamin Inc., London, p. 411-417.
- Bidenharn, L. C., 1989, The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators, Journal of Physics A: Mathematical and General, 22, L873-L878.
- Blank, J., Exner, P., Havlicek, M., 2008, Hilbert Space Operators in Quantum Physics, Springer, New York, p. 403-404.
- Bowman, G. E., 2008, Essential Quantum Mechanics, Oxford University Press, New York, p. 55.
- Cai, S., Su, G., Chen, J., 2007, Thermostatistic properties of a q -deformed ideal Fermi gas with a general energy spectrum, Journal of Physics A: Mathematical and General, 40, 11245-11254.
- Cai, S., Su, G., Chen, J., 2010, General thermostatical properties of a q -deformed Fermi gas trapped in a power-law potential, International Journal of Modern Physics B, 24, 3323-3330.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Chaichian, M., Felipe, R. G., Montonen, C., 1993, Statistics of q -oscillators, quons and relations to fractional statistics, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26, 4017-4034.
- Dai, W.-S., Xie, M., 2012, Calculating statistical distributions from operator relations: The statistical distributions of various intermediate statistics, *Annals of Physics*, 332, 166-179.
- Dereli, T., Verçin, A., 2009, *Kuantum Mekaniği*, Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, s. 39-45, 272-280.
- Erbil, H. H., 2014, *Analitik ve Kuantum Mekaniği*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, s. 627-635.
- Ernst, T., 2012, *A Comprehensive Treatment of q -Calculus*, Birkhauser, New York, p. 6, 201-203, 442-443.
- Exton, H., 1983, *q -Hypergeometric Functions and Applications*, Ellis Horwood Publishers, Chichester, p. 5.
- Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H., 1995, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer, New York, p. 341-350.
- Haven, E., 2009, *Quantum calculus (q -calculus) and option pricing: A brief introduction*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, p. 308-314.
- Jackson, F. H., 1910, On q -definite integrals, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41, 193-203.
- Kac, V., Cheung, P., 2002, *Quantum Calculus*, Springer, New York, p. 5-13, 64-75.
- Karaoğlu, B., 2008, *Kuantum Mekaniğine Giriş*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, s. 237-240.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Khare, A., 2005, Fractional Statistics and Quantum Theory, World Scientific, New Jersey, p. 104-107.
- Lavagno, A., Narayana Swamy, P., 2002 a, Generalized thermodynamics of q -deformed bosons and fermions, Physical Review E, 65, 036101.
- Lavagno, A., Narayana Swamy, P., 2002 b, q -Deformed structures and nonextensive statistics: A comparative study, Physica A, 305, 310-315.
- Lee, C. R., Yu, J. P., 1992, On q -deformed free electron gases, Physics Letters A, 164, 164-166.
- Macfarlane, A. J., 1989, On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$, Journal of Physics A: Mathematical and General, 22, 4581-4588.
- McMillan, M., 1996, Quantum Leaps and Bounds: Quantum Mechanics in Fock Space, Lecture Notes, The University of British Columbia, p. 31-34.
- Monteiro, M. R., Rodrigues, L. M. C. S., 1996, Quantum algebraic nature of the phonon spectrum in ^4He , Physical Review Letters, 76, 1098–1100.
- Narayana Swamy, P., 2003, Deformed Heisenberg algebra: Origin of q -calculus, Physica A, 328, 145-153.
- Narayana Swamy, P., 2006 a, q -Deformed fermions: Algebra, Fock space and thermodynamics, International Journal of Modern Physics B, 20, 2537-2550.
- Narayana Swamy, P., 2006 b, q -Deformed fermions, The European Physical Journal B, 50, 291-294.
- Narayana Swamy, P., 2006 c, Interpolating Statistics and q -deformed oscillator algebras, International Journal of Modern Physics B, 20, 697-713.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Ng, Y. J., 1990, Comment on the q -analogues of the harmonic oscillator, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23, 1023-1027.
- Önem, Ş. C., 2011, *Mühendislik ve Fizikte Matematik Metotlar*, Birsen Yayınevi, İstanbul, s. 73-81.
- Pathria, R. K., Beale, P. D., 2011, *Statistical Mechanics* (3. baskı), Butterworth-Heinemann, New York, p. 231-238.
- Parthasarathy, P., Viswanathan, K. S., 1991, A q -analogue of the supersymmetric oscillator and its q -superalgebra, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24, 613-617.
- Ramond, P., 2010, *Group Theory: A Physicist's Survey*, Cambridge, New York, p. 70.
- Raychev, P. P., Roussev, R. P., Smirnov, Yu. F., 1990, The quantum algebra $SU_q(2)$ and rotational spectra of deformed nuclei, *Journal of Physics G*, 16, L137-141.
- Schork, M., 2005, A representation of the q -fermionic commutation relations and the limit $q = 1$, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 12, 394-399.
- Seiffertt, J., Wunsch, D. C., 2008, A quantum calculus formulation of dynamic programming and ordered derivatives, *International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, 1-8 Haziran, Hong Kong, p. 3690-3695.
- Shankar, R., 1994, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York, p. 265, 641-642.
- Tuszynski, J. A., Rubin, J. L., Meyer, J., Kibler, M., 1993, Statistical mechanics of a q -deformed boson gas, *Physics Letters A*, 175, 173-177.
- Ubriaco, M. R., 1997, Anyonic behavior of quantum group gases, *Physical Review E*, 55, 291.

EK AÇIKLAMALAR

Ek Açıklama-A: $\exp_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('exp1.dat','w');
for x=0:0.01:2
q=0.1;
y=1;
toplam=1;
for j=1:10
y=y*( q^(-j)-(-q)^j)/( q+q^(-1));
toplam=toplam+(x^j)/y;
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplam);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('exp2.dat','w');
for x=0:0.01:2
q=0.3;
y=1;
toplam=1;
for j=1:10
y=y*( q^(-j)-(-q)^j)/( q+q^(-1));
toplam=toplam+(x^j)/y;
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplam);
fprintf(f,'\r\n');
end

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

```
fclose(f);
f=fopen('exp3.dat','w');
for x=0:0.01:2
q=0.9;
y=1;
toplam=1;
for j=1:10
y=y*( q^(-j)-(-q)^j )/( q+q^(-1));
toplam=toplam+(x^j)/y;
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplam);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('exp4.dat','w');
for x=0:0.01:2
toplam=0;
for j=0:10
toplam=toplam+(x^j)/factorial(j);
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplam);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-B: $\ln_q(x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('log1.dat','w');
for x=0:0.01:1.2
q=0.3;
toplama=0;
for j=1:10
toplama=toplama-((1-x)^j)/((q^(-j)-((-1)^j)*q^j)/q+q^(-1));
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplama);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('log2.dat','w');
for x=0:0.01:1.2
q=0.8;
toplama=0;
for j=1:10
toplama=toplama-((1-x)^j)/((q^(-j)-((-1)^j)*q^j)/q+q^(-1));
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplama);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('log3.dat','w');
for x=0:0.01:1.2
q=0.9;

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

```
toplam=0;
for j=1:10
toplam=toplam-((1-x)^j)/((q^(-j)-((-1)^j)*q^j)/q+q^(-1));
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplam);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('log4.dat','w');
for x=0:0.01:1.2
toplam=0;
for j=1:10
toplam=toplam-((1-x)^j)/j;
end
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,toplam);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-C: $\frac{d}{dx}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimini veren
Matlab R2013b kodu.

```
clc;
clear all;
f=fopen('klasik1.dat','w');
c=2;
for x=0:0.01:2
g=c*exp(x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-D: $\hat{D}_x^{(q)}(ce^x)$ fonksiyonunun $0 < x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('jackson1.dat','w');
c=2;
q=0.1;
for x=0.01:0.01:2
g=c*(exp(x/q)-exp(-q*x))/((q+1/q)*x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('jackson3.dat','w');
c=2;q=0.3;
for x=0.01:0.01:2
g=c*(exp(x/q)-exp(-q*x))/((q+1/q)*x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('jackson9.dat','w');
c=2;q=0.9;
for x=0.01:0.01:2
g=c*(exp(x/q)-exp(-q*x))/((q+1/q)*x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```


EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-E: $\frac{d}{dx}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 1,1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```
clc;
clear all;
f=fopen('klasik3.dat','w');
c=2;
for x=0.01:0.01:1.1
g=c/(1+x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-F: $\hat{D}_x^{(q)}[c \ln(1+x)]$ fonksiyonunun $0 < x \leq 1,1$ aralığında farklı q değerlerine göre değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('j3.dat','w');
c=2;
q=0.3;
for x=0.01:0.01:1.1
g=c*(log((1+x/q)/(1-q*x)))/((q+1/q)*x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('j8.dat','w');
c=2;q=0.8;
for x=0.01:0.01:1.1
g=c*(log((1+x/q)/(1-q*x)))/((q+1/q)*x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('j9.dat','w');
c=2;q=0.9;
for x=0.01:0.01:1.1
g=c*(log((1+x/q)/(1-q*x)))/((q+1/q)*x);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-G: $\frac{d}{dx}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığındaki değişimini veren
Matlab R2013b kodu.

```
clc;  
clear all;  
f=fopen('klasik4.dat','w');  
c=2;  
for x=0:0.01:2  
g=c*3*(x^2);  
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);  
fprintf(f,'\r\n');  
end  
fclose(f);
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-H: $\hat{D}_x^{(q)}(cx^3)$ fonksiyonunun $0 \leq x \leq 2$ aralığında farklı q değerleri için değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('jj1.dat','w');
c=2;
q=0.1;
for x=0.01:0.01:2
g=c*((1/(q^3)+(q^3))/(q+1/q))*(x^2);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('jj3.dat','w');
c=2;q=0.3;
for x=0.01:0.01:2
g=c*((1/(q^3)+(q^3))/(q+1/q))*(x^2);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('jj9.dat','w');
c=2;q=0.9;
for x=0.01:0.01:2
g=c*((1/(q^3)+(q^3))/(q+1/q))*(x^2);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',x,g);
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-I: q -Deforme Fermi-Dirac (FD) dağılım fonksiyonu $n(\eta, q)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre $0 < q < 1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('fonksiyon.dat','w');
for q=0.1:0.1:0.9
for m=-3:0.1:3
n=abs( log( (abs(exp(m)-q.^(-1) )))- log(exp(m)+q) )*(1./(2.*abs(log(q))));
fprintf(f,'%5.3f %5.3f %15.10f',q,m,n);
fprintf(f,'\r\n');
end
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-J: Standart FD dağılım fonksiyonu $n(\eta)$ 'nin sonlu sıcaklıklarda $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```
clc;
clear all;
f=fopen('idealdagılım.dat','w');
x=-3:0.1:3;
m=length(x);
g=zeros(1,m);
for i=1:m
g(i)=[1/(1+exp(x(i)))];
fprintf(f,'%5.3f %5.10f',x(i),g(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-K: q -Deforme FD fonksiyonlarından $h_{3/2}(z, q)$ ve $h_{5/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ ve $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('fermi3.dat','w');
for q=0.1:0.1:0.9
for z = 0:0.1:1
toplam=0;
for k=1:9
toplam=toplam+(((-1)^(k-1))*((q*z)^k)- (z/q)^k)/ (k^(5/2));
end
h=abs(toplam/(2*abs(log(q)))) ;
fprintf(f,'%5.3f %5.3f %5.10f',q,z,h);fprintf(f,'\r\n');
end
end
fclose(f);
f=fopen('fermi5.dat','w');
for q=0.1:0.1:0.9
for z = 0:0.1:1
toplam=0;
for k=1:9
toplam=toplam+(((-1)^(k-1))*((q*z)^k)- (z/q)^k)/ (k^(7/2));
end
h=abs(toplam/(2*abs(log(q)))) ;
fprintf(f,'%5.3f %5.3f %5.10f',q,z,h);
fprintf(f,'\r\n');
end
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-L: Standart FD fonksiyonlarından $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ aralığındaki değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('ideal1.dat','w');
z=0:0.1:1;
m=length(z);
n=3/2;
s=zeros(1,m);
for i=1:m
toplam=0;
for j=1:9
toplam=toplam+(-1)^(j-1)*z(i)^j/(j^n);
end
s(i)=toplam;
fprintf(f,'%5.3f %5.10f',z(i),s(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('ideal2.dat','w');
z=0:0.1:1;
m=length(z);
n=5/2;
s=zeros(1,m);
for i=1:m
toplam=0;
for j=1:9
toplam=toplam+(-1)^(j-1)*z(i)^j/(j^n);
end

```


EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

```
s(i)=toplam;  
fprintf(f,'%5.3f %5.10f',z(i),s(i));  
fprintf(f,'\r\n');  
end  
fclose(f);
```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-M: $a_2(q)$ ve $a_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('vir2.dat','w');
q=0:0.01:1;
m=length(q);
for i=1:m
a2(i)=(1/(2^(5/2)))*abs(log(q(i)))*(q(i)^2+(1/q(i))^2)/((q(i)-1/q(i))^2);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',q(i),a2(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('vir4.dat','w');
q=0:0.01:1;
m=length(q);
for i=1:m
a4(i)=[(5/(2^(11/2)))*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^3)/((q(i)-1/q(i))^6)
      -(4/(6^(3/2)))*(q(i)^2+(1/q(i))^2)*(q(i)^3-(1/q(i))^3)/((q(i)-1/q(i))^5)
      +(3/16)*(q(i)^4+(1/q(i))^4)/((q(i)-1/q(i))^4)]*((abs(log(q(i))))^3);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',q(i),a4(i));
fprintf(f,'\r\n');
end

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-N: $a_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('vir3.dat','w');
q=0:0.0001:1;
m=length(q);
for i=1:m
a3(i)=[(1/8)* (( q(i)^2+(1/q(i))^2)^2)/((q(i)-1/q(i))^4)
      -( 8/(3^(7/2)))* (q(i)^3-(1/q(i))^3)/((q(i)-1/q(i))^3)]*( abs(log(q(i))))^2);
fprintf(f,'%5.5f %15.10f',q(i),a3(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-O: $a_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('vir5.dat','w');
q=0.01:0.01:0.99;
m=length(q);
for i=1:m
a5(i)=[(7/64)*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^4)/((q(i)-1/q(i))^8)
      -(2/(3^(3/2)))*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^2)*(q(i)^3-(1/q(i))^3)/((q(i)-1/q(i))^7)
      +(32/(3^5))*((q(i)^3-(1/q(i))^3)^2)/((q(i)-1/q(i))^6)
      +(1/(2^(3/2)))*((q(i)^2+(1/q(i))^2)*(q(i)^4+(1/q(i))^4)/((q(i)-1/q(i))^6)
      -(64/(5^(7/2)))*((q(i)^5-(1/q(i))^5)/((q(i)-1/q(i))^5)]*(abs(log(q(i))))^4);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',q(i),a5(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-P: $\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ virial katsayılarının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('virial2.dat','w');
q=0:0.01:1;
m=length(q);
for i=1:m
a2(i)=(1/4)*(q(i)^2+(1/q(i))^2)*abs(log(q(i)))/((q(i)-1/q(i))^2);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',q(i),a2(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);
f=fopen('virial4.dat','w');
q=0:0.01:1;
m=length(q);
for i=1:m
a4(i)=[(5/16)*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^3)/((q(i)-1/q(i))^6)
      -(2/3)*(q(i)^2+(1/q(i))^2)*(q(i)^3-(1/q(i))^3)/((q(i)-1/q(i))^5)
      +(3/8)*(q(i)^4+(1/q(i))^4)/((q(i)-1/q(i))^4)]*(abs(log(q(i))))^3);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',q(i),a4(i));
fprintf(f,'\r\n');
end

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-R: $\tilde{a}_3(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('virial3.dat','w');
q=0:0.0001:1;
m=length(q);
for i=1:m
a3(i)=[(1/4)*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^2)/((q(i)-1/q(i))^4)
      -(8/27)*(q(i)^3-(1/q(i))^3)/((q(i)-1/q(i))^3)]*((abs(log(q(i))))^2);
fprintf(f,'%5.5f %15.10f',q(i),a3(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```

EK AÇIKLAMALAR (devam ediyor)

Ek Açıklama-S: $\tilde{a}_5(q)$ virial katsayısının deformasyon parametresi q ile değişimini veren Matlab R2013b kodu.

```

clc;
clear all;
f=fopen('virial5.dat','w');
q=0:0.01:1;
m=length(q);
for i=1:m
a5(i)=[(7/16)*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^4)/((q(i)-1/q(i))^8)
      -(4/3)*((q(i)^2+(1/q(i))^2)^2)*(q(i)^3-(1/q(i))^3)/((q(i)-1/q(i))^7)
      +(32/81)*((q(i)^3-(1/q(i))^3)^2)/((q(i)-1/q(i))^6)
      +(q(i)^2+(1/q(i))^2)*(q(i)^4+(1/q(i))^4)/((q(i)-1/q(i))^6)
      -(64/125)*(q(i)^5-(1/q(i))^5)*((q(i)-1/q(i))^5)]*((abs(log(q(i))))^4);
fprintf(f,'%5.3f %15.10f',q(i),a5(i));
fprintf(f,'\r\n');
end
fclose(f);

```