Kenmotsu Manifoldlarda Ricci Solitonlar Üzerine Bazı Araştırmalar

Hilal Betül Çetin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2015

Some Researches on Ricci Solitons in Kenmotsu Manifolds

Hilal Betül Çetin

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

August 2015

Kenmotsu Manifoldlarda Ricci Solitonlar Üzerine Bazı Araştırmalar

Hilal Betül Çetin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

”Bu Tez ESOGÜ BAP tarafından 2013-282 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Ağustos 2015

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hilal Betül Çetin' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Kenmotsu Manifoldlarda Ricci Solitonlar Üzerine Bazı Araştırmalar**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Ali Görgülü

Üye : Doç. Dr. İbrahim Günaltılı

Üye : Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa Dede

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet Erşahan

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum ”Kenmotsu Manifoldlarda Ricci Solitonlar Üzerine Bazı Araştırmalar” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

07/08/2015

Hilal Betül ÇETİN

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı Kenmotsu manifoldları ile semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldları için Ricci solitonlar üzerine bazı araştırmalar yapmak ve bazı eğrilik şartlarını incelemektir.

Beş bölümden oluşan çalışmamızda giriş bölümünde konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgiler aktarılmıştır. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Kenmotsu manifoldlarında, dördüncü bölümde ise f- Kenmotsu manifoldlarında bazı eğrilik şartları kullanılarak Ricci solitonların sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca bu bölümlerde benzer sınıflandırmalar semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bu manifoldlar için de hesaplanmıştır.

Son bölümde ise; semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldlar üzerine bazı tanımlar, teoremler ve eğrilik şartları verilip bu şartları sağlayan Ricci solitonların λ sabitine bağlı olarak daralan veya genişleyen olarak sınıflandırıldığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değme metrik manifold, Kenmotsu manifold, Eğrilikler, Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon, Ricci solitonlar.

SUMMARY

The aim of this thesis is to make some researches on Ricci solitons in Kenmotsu manifolds and Kenmotsu manifolds with the semi-symmetric non-metric connection and to investigate some curvature conditions on these manifolds.

There are five chapters in thesis. The historical development of the subject is presented in introduction chapter. In the second chapter fundamental definitions, theorems and concepts related to subject are given. In the third and fourth chapters, the classifications are given related to Ricci solitons on Kenmotsu manifold and f-Kenmotsu manifold using some curvature conditions, respectively. Also, similar classifications on semi-simetric non-metric connection for these manifolds are given in these chapters.

Finally, some definitions and theorems, curvature conditions on Kenmotsu manifolds with the semi-symmetric non-metric connection are given and according to these conditions, it is shown that Ricci solitons are classified as shrinking or expanding depending on value of λ constant.

Keywords: Contact metric manifold, Kenmotsu manifold, Curvatures, Semi-symmetric non-metric connection, Ricci solitons.

TEŞEKKÜR

Kenmotsu Manifoldlarda Ricci Solitonlar Üzerine Bazı Araştırmalar adlı bu tez çalışmamda, bana engin bilgileri ve deneyimleri ile desteklerini esirgemeyen, her konuda bana yol gösteren, her zaman örnek aldığım kıymetli danışmanım Sayın

Doç. Dr. Cumali EKİCİ

hocama, çalışmam süresince her zaman yanımda olan değerli aileme destekleri için çok teşekkür ederim.

Ayrıca, yüksek lisans tez çalışmam sırasında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna, 2013-282 no'lu proje çerçevesindeki destekleri ve yardımları için teşekkür ederim.

Hilal Betül ÇETİN

Ağustos 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\widetilde{B}$	C-Bochner eğrilik tensörü
$\widetilde{C}$	Quasi-konformal eğrilik tensörü
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^{∞} fonksiyonların uzayı
g	Riemann metrik
H	Konformal eğrilik tensörü
$\widetilde{H}$	Konharmonik eğrilik tensörü
L_X	X vektör alanına göre Lie türev operatörü
P	Projektif eğrilik tensörü
$\widetilde{P}$	Weyl-projektif eğrilik tensörü
$\overline{\widetilde{P}}$	Pseudo-projektif eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
r	Skalar eğrilik
R	Riemann eğrilik tensörü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
S	Ricci eğrilik tensörü
T_PM	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
V	Reel vektör uzayı
∇	Riemann koneksiyonu
∇_X	X e göre kovaryant türev operatörü
$\widetilde{\nabla}$	Semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$[,]$	Lie bracket operatörü
ξ	Karakteristik vektör alanı
ϕ	(1,1)-tipinde tensör alanı
Φ	2-temel form
η	1-form

1. GİRİŞ

Tanno (1969), hemen hemen değme Riemann manifoldları üzerine bir çalışma yapmıştır. Kenmotsu (1972) tarafından bazı özel şartları sağlayan ve Kenmotsu manifold olarak da bilinen değme Riemann manifoldları incelenmiştir. 1988 yılında değme manifoldların Ricci eğrilikleri elde edilmiştir (Tanno, 1988). De ve Pathak, 3-boyutlu Kemotsu manifoldlarında bazı eğrilik şartlarını inceleyerek ve 3-boyutlu $\eta-$paralel Ricci tensöre sahip Kenmotsu manifoldların sabit skalar eğrilikli olduğunu ispatlamışlardır (De ve Pathak, 2004). Jun, vd. ile Prasad ve Verma (2005) Kenmotsu manifoldları ile ilgili çalışmışlardır. Yıldız vd. (2009) bazı eğrilik şartlarını sağlayan Kenmotsu manifoldları üzerine çalışma yapmışlardır.

Bagewadi ve Venkatesha (2006) pseudo-projektif ϕ-devirli Kenmotsu manifoldların bir Einstein manifold olduğunu ve sabit eğrilikli bir uzay olduğunu göstermişlerdir. Özgür, Hong ve Tripathi (2006) η-Einstein, $\eta-$paralel Ricci tensör, Ricci pseudo-simetrik olma gibi bazı koşullar altında Kenmotsu manifoldlarının sınıflarını araştırdılar ve bazı şartlara bağlı olarak Kenmotsu manifoldlarındaki bir dönüşümün izometri olduğunu göstermişlerdir.

De (2010) tarafından η-parallel Ricci tensörlü 3-boyutlu Kenmotsu manifold üzerine örnek verilerek Kenmotsu manifoldlarında Killing vektör alanı açıklanmıştır.

1991 yılında, normal yerel konformal hemen hemen kosimplektik manifoldlar ile $f-$Kenmotsu manifoldlarında bazı eğriliklerin özellikleri incelenmiştir ve bu tür manifoldlara geometrik bir yaklaşım kazandırılmıştır (Olszak ve Rosca, 1991). Bu konu hakkında diğer bilim insanları tarafından Ricci semi-simetrik $f-$Kenmotsu manifoldlarının Einstein manifold olduğu ispatlanmıştır (Yıldız, vd., 2013). 1997 yılında ise Zhen, Cabrerizo ve Fernandez tarafından $K-$değme manifoldlarının projektif flat olma koşulları incelenmiş ve bu yönde çalışmalar yürütülmüştür (Zhen, vd., 1997). Ayrıca Sharma (2008) makalesinde $K-$değme manifoldlarında Ricci solitonlar üzerine çalışılmıştır ve Demirli (2014) çalışmasında da semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldlarda bazı eğrilik şartlarına göre Ricci soliton üçlüsünün sınıflandırılmasını yapmıştır.

1983 yılında, Değme geometride Ricci solitonlar üzerine araştırmalar yapılmaya başlanmıştır (Sharma ve Sinha, 1983). Yine 1988 yılındaki çalışması ile de Hamilton tarafından, Einstein metriğinin bir genellemesi olan Ricci solitonlar hakkında bilgi verilmiştir (Hamilton, 1988). Ardından bu konu üzerinde yoğun bir şekilde durulmuştur (Tripathi, 2008;

Bejan ve Crasmareanu, 2011). Ayrıca bu Ricci soliton hesaplamaları f-Kenmotsu manifoldlar üzerinde gerçekleştirilmiştir (Calin ve Crasmareanu, 2010).

Teorik fizikçiler, sicim teorisi ile ilgili Ricci soliton denklemini ele almıştır. İlk olarak Friedan bunların bazı yönlerini tartışmıştır (Friedan, 1985). (M,g) bir Riemann manifold, V bir vektör alanı, S M üzerinde bir Ricci tensör ve λ sabit bir değer olmak üzere g metriği

$$L_V g + 2S + 2\lambda g = 0$$

şartını sağlıyorsa (g,V,λ) üçlüsüne Ricci soliton denir. Buna göre, sırasıyla Ricci soliton λ sayısının negatif, sıfır veya pozitif olmasına göre daralan, değişmeyen veya genişleyen olarak adlandırılır. Kompakt bir manifold üzerinde bir Ricci soliton hem 2-boyutta hem de 3-boyutta sabit eğriliğe sahiptir (Hamilton, 1988; Ivey, 1993). Ayrıntılı olarak konu ile ilgili bazı çalışmalar Chow ve Knopf tarafından verilmiştir (Chow ve Knopf, 2004).

Eğer $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu W_4 sınıfına ait ise bir M manifoldu üzerinde hemen hemen değme metrik yapıya bir trans-Sasakian yapı adı verilir (Oubina, 1985). 2012 yılında Turan, De ve Yıldız tarafından Ricci solitonlar ve gradient Ricci solitonlar 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlarda incelenmiştir (Turan, vd., 2012).

Sharma (2008), Tripathi (2008), Călin ve Crasmareanu (2010), Bagewadi ve Ingalahalli (2012), Ingalahalli ve Bagewadi (2012) çalışmalarında değme ve Lorentzian manifoldlarda Ricci solitonlar ile bazı eğrilik şartları arasındaki ilişkiler üzerine incelemeler yapmışlardır. Nagaraja ve Premalatha (2012) çalışmasında Kenmotsu manifoldlarında quasi-konformal, konharmonik ve projektif eğrilik tensörlerini kullanarak

$$R(\xi,X).\widetilde{C} = 0,\ P(\xi,X).\widetilde{C} = 0,\ H(\xi,X).S = 0 \text{ ve } \widetilde{C}(\xi,X).S = 0$$

eğrilik şartlarını sağlayan Ricci solitonlar için daralan, genişleyen veya değişmeyen olduklarını göstermişlerdir.

(Bagewadi vd, 2013) çalışmasında yazarlar Kenmosu manifoldlarında

$$R(\xi,X).B = 0,\ B(\xi,X).S = 0,\ S(\xi,X).R = 0,\ R(\xi,X).\overline{P} = 0 \text{ ve } \overline{P}(\xi,X).S = 0$$

eğrilik şartlarını sağlayan Ricci Solitonlar için daralan, genişleyen veya değişmeyen olduklarını gösterdiler. (Yıldız ve Çetinkaya, 2013) çalışmasında yazarlar semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldlarında $\widetilde{R}(X,Y).R = 0$ eğrilik şartının sağlanması halinde manifoldun η-Einstein manifoldu, $\widetilde{R}(X,Y).\widetilde{R} = 0$ eğrilik şartının sağlanması halinde manifoldun $H^n(-1)$ hiperbolik uzayına lokal izometrik olduğunu göstermişlerdir.

(Friedman ve Schouten, 1924) çalışmasında yazarlar diferensiyellenebilir bir manifoldda semi-simetrik lineer koneksiyon fikrini ele almışlardır. (Hayden, 1932) çalışmasında yazar bir (M,g) Riemann manifoldunda semi-simetrik metrik koneksiyon fikrini tanıtmıştır. Eğer $\widetilde{\nabla}g=0$ şartı sağlanırsa semi-simetrik $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonuna semi-simetrik metrik koneksiyon denir. 1968 yılında, quasi-konformal eğrilik tensörü üzerine bazı incelemeler yapıldı (Yano ve Sawaki, 1968). (Yano, K., 1970) çalışmasında yazar semi-simetrik metrik koneksiyon $\widetilde{\nabla}$ ile (M,g) metriğinin Levi-Civita koneksiyonu ∇ arasındaki bağıntıyı $u(X)=g(X,p)$ olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+u(Y)X-g(X,Y)p$$

şeklinde vermiştir. Semi-simetrik metrik koneksiyon (Liang, 1972), (Pravanovic, 1975), (Amur ve Pujar, 1978), (Binh, 1990), (De, 1990), (Sengupta, vd., 2000), (Özen vd, 2011), (Sular ve Özgür, 2011), (Özgür ve Sular, 2014), (Singh ve Pandey, 2008) ve (Yano, 1970), vb. gibi yazarlar tarafından daha da geliştirilmiştir. 1994 yılında Liang semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun başka bir çeşiti olan semi-simetrik devirli metrik koneksiyon üzerine çalışmıştır. Özgür (2007) genelleştirilmiş devirli, Ricci devirli ve konsirküler devirli Kenmotsu manifoldları incelemiştir. Yazarlar semi-simetrik metrik koneksiyon ile Riemann koneksiyonun eğrilik tensörü arasında bir ilişki tespit etmiş ve yine semi simetrik metrik koneksiyonda Weyl projektif eğrilik tensörünün Riemann koneksiyondakine eşit olduğunu bulmuştur (Agashe ve Chafle, 1992). 2008 de Tripathi Riemann manifoldlarında yeni bir koneksiyonun genelleşmiş formunu tanıtmıştır (Tripathi, 2008).

Blair (2002) değme metrik manifoldların eğrilikleri hakkında bilgi vermiştir. Duggal ve Bayram (2010) çalışmalarında semi-simetrik manifold, Ricci semi-simetrik manifold ve simetri tiplerinin eğrilik şartlarını ele almışlardır. Chaubey (2011) hemen hemen değme metrik manifoldda semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonu tanımlamış ve onun farklı geometrik özelliklerini çalışmışlardır.

Prvanovic (1975) çalışmasında $\overline{\nabla}g\neq 0$ şartını sağlayan $\overline{\nabla}$ ile gösterilen semi-simetrik koneksiyonuna semi-simetrik pseudo-metrik koneksiyon adını vermiş ve Andonie (1976) çalışmasında onu izlemiştir. Bu koneksiyona semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon denir. Barman ve De (2015) Kenmotsu manifoldlarında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonu çalışmışlardır.

Bu çalışmada, $\widetilde{B}$ C-Bochner eğrilik tensörü, $\widetilde{S}$ Ricci tensör, $\widetilde{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü, $\widetilde{P}$ Weyl-projektif eğrilik tensörü, $\widetilde{H}$ konharmonik eğrilik tensörü, $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\overline{\overline{P}}$ pseudo projektif eğrilik tensörleri olmak üzere semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldlarında $\widetilde{B}(\xi,X).\widetilde{S}=0$, $\widetilde{C}(\xi,X).\widetilde{S}=0$, $\widetilde{P}(\xi,X).\widetilde{C}=0$, $\widetilde{H}(\xi,X).\widetilde{S}=0$, $\widetilde{R}(\xi,X).R=0$, $\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{R}=0$, $\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{C}=0$, $\widetilde{R}(\xi,X).\overline{\widetilde{P}}=0$ eğrilik şartlarını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir. Buna göre Ricci solitonların daralan veya genişleyen oldukları gösterilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu için bir örnek verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldlar ve Koneksiyonlar

Çalışmanın bu kısmında koneksiyon kavramı, koneksiyon kavramı yardımıyla tanımlanan diğer kavramlar, 1-form ve Lie operatörü verilmiştir.

Tanım 2.1.1. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g : \chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, $\forall f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & \nabla(X,Y)=\nabla_X Y \end{array} \tag{2.1}$$

fonksiyonu için

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Salimov ve Mağden, 2008; Spivak, 1979).

Tanım 2.1.3. $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,...,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $P\in E^n$, $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ E^n için standart baz ve $f:E^n\to\mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\overrightarrow{v}_p[f]$ ye f nin $\overrightarrow{v}_p$ için yöne göre türevi denir. $\overrightarrow{v}_p[f]$ yöne göre türevi

$$\overrightarrow{v}_p[f]=\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1998; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.4. M bir C^∞ manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. O halde her $X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa ∇ ye M üzerinde Riemann (veya Levi-Civita) koneksiyonu adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.5. $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}^n_\upsilon$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n_\upsilon$ üzerinde vektör alanları iseler,

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre kovaryant türevi denir. Burada $\{\partial_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}^n_\upsilon)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. M bir C^∞ $n-$manifold ve M üzerinde bir afin koneksiyon ∇ olsun.

$$\begin{aligned} Tor: \quad \chi(M)\times\chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\rightarrow Tor(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ koneksiyonunun torsiyon tensörü denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.7. V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{aligned} [,]: \quad V\times V &\rightarrow V \\ (X,Y) &\rightarrow [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü de

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X,Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)

3) $\forall X,Y,Z \in V$ için

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] \equiv 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne V üzerinde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.8. M bir C^∞ manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{array}{rrcl} [,]: & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa $[,]$ bir Lie operatörüdür (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.9. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre Lie türev operatörü olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984; Duggal ve Bejancu, 1996):

i) $L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

ii) $L_X Y = [X,Y], \quad \forall Y \in \chi(M)$

iii) $L_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y)$, $\forall X,Y$ ve $Z \in \chi(M)$.

Tanım 2.1.10.

$$\begin{array}{rlcl} d: & C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R}) & \to & \chi^*(\mathbb{E}^n) \\ & f & \to & df \end{array} \tag{2.2}$$

öyle ki, $\forall X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ için $df(X) = X[f]$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna diferensiyel operatör denir (Willmore, 1959).

Tanım 2.1.11. $P \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun.

$$w: \quad \mathbb{E}^n \to \bigcup_{P\in\mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w: \quad \mathbb{E}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}^n$$

olacak şekilde

$$\pi: \quad \bigcup_{P\in\mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P) \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu mevcutsa w ya $\mathbb{E}^n$ üstünde $1-$form denir ve bu $1-$formların cümlesini $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Yardımcı Teorem 2.1.1. **(Poincare Teoremi)** M bir $n-$manifold ve $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun. O zaman,

$$d^2 f = d(df) = 0 \tag{2.3}$$

dır (Hacısalihoğlu, 2004).

Yardımcı Teorem 2.1.2. (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ de M üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Kuhnel, 2006).

Tanım 2.1.12. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için $X\Lambda Y$ lineer operatörü

$$(X\Lambda Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır (Olszak ve Rosca, 1991).

2.2 Eğrilik Tensörleri

Bu kısımda çalışmanın sonraki bölümlerinde sıkça kullanılacak olan eğrilik tensörleri tanımlanmış ve bununla ilgili bazı önemli teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \quad \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\rightarrow \quad \chi(M) \\ (X,Y,Z) \quad &\rightarrow \quad R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z\text{-}\nabla_Y\nabla_X Z\text{-}\nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına M nin Riemann eğrilik tensörü denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi 2003; Spivak, 1979).

Yardımcı Teorem 2.2.1. (M,g) bir Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. Böylece $\forall X,Y \in \chi(M)$ için g Riemann metriği

$$g(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)\, g(e_i,Y) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (De ve Shaikh, 2009).

Tanım 2.2.3. (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1,...,X_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$\begin{aligned} Q: \quad \chi(M) &\to \chi(M) \\ X \quad &\to Q(X) = -\sum_{i=1}^{n} R(X_i,X)X_i \end{aligned} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M nin Ricci operatörü adı verilir. Ayrıca Q yardımı ile M nin Ricci eğrilik tensörü S,

$$\begin{aligned} S: \quad \chi(M)\times\chi(M) &\to C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ (X,Y) \quad &\to S(X,Y) = g(Q(X),Y) \end{aligned} \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanan $(0,2)$ tipinde bir tensördür. Eğer

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y) - \mu\eta(X)\eta(Y) \tag{2.10}$$

ise (M,g) manifolduna bir $\mu-$Einstein manifoldu denir. Eğer $\mu = 0$ ise (M,g) manifoldu Einstein manifold olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.2.4. n-boyutlu M Riemann manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır (De ve Shaikh, 2009; Şahin, 2012).

Tanım 2.2.5. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, T_PM tanjant uzayının bir bazı olmak üzere M nin skalar eğriliği

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i) \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.2.6. M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı 3-boyutlu R Riemann eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü, Q Ricci operatörü ve r skalar eğriliği cinsinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= S(Y,Z)X - g(X,Z)QY + g(Y,Z)QX \\ &\quad -S(X,Z)Y - \frac{r}{2}[g(Y,Z)W - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız, vd., 2013).

Tanım 2.2.7. M bir $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\check{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü a ve b sabit değerleri ile

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &\quad +g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &\quad -\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Tanım 2.2.8. M bir $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} H(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &\quad +g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanan H ye konharmonik eğrilik tensörü denir (De ve Shaikh, 2009; Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Tanım 2.2.9. M bir $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Her $X,Y,Z\in\chi(M)$ için M nin Weyl projektif eğrilik tensör alanı

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] \tag{2.16}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano ve Kon, 1984). Ayrıca M, P projektif eğrilik tensörünün sıfır olması halinde projektif flat olarak adlandırılır (De ve Shaikh, 2009).

Tanım 2.2.10. M bir $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Her $X,Y,Z\in\chi(M)$ için M nin pseudo projektif eğrilik tensör alanı

$$\begin{aligned}\overline{P}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y]\\ &\quad -\frac{r}{n}\left(\frac{a}{n-1}+b\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{2.17}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Prasad, 2002).

2.3 Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen değme yapılar, hemen hemen değme metrikler ve hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1. M $(2n+1)$-boyutlu manifold, $\phi-(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ vektör alanı ve η 1-form olmak şartıyla eğer ϕ,ξ,η için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= 1\\ \phi^2(X) &= -X+\eta(X)\xi\end{aligned} \tag{2.18}$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (ϕ,ξ,η) yapısına, hemen hemen değme yapısı denir. M manifoldu da hemen hemen değme manifoldu adını alır (Yano ve Kon, 1984; Blair, 2002).

Yardımcı Teorem 2.3.1. (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı için

$$\begin{aligned}&\textbf{i)} & \phi\xi &= 0\\ &\textbf{ii)} & \eta(\phi X) &= 0\\ &\textbf{iii)} & rank\phi &= 2n\end{aligned} \tag{2.19}$$

özellikleri sağlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.2. (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı için M üzerinde tanımlı bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \textbf{i)} \qquad \eta(X) &= g(X,\xi) \\ \textbf{ii)} \quad g(\phi X,\phi Y) &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.20}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapısı, M manifolduna da hemen hemen değme metrik manifold denir (De, 2010).

Sonuç 2.3.1. M $(2n+1)$-boyutlu manifold, $\phi-(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-form ve ϕ,ξ,η için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$\sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i)=n, \quad \sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)=\eta(X) \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} \eta(e_i)=1 \tag{2.21}$$

eşitlikleri geçerlidir (De ve Shaikh, 2009; Bagewadi, vd., 2013).

Sonuç 2.3.2. (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı olsun.

$$g(\phi X,Y) = -g(X,\phi Y) \tag{2.22}$$

ifadesi M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu için sonuç niteliğinde bir eşitliktir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.3. (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y) \tag{2.23}$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne yapının temel 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984; Blair, 1976).

Tanım 2.3.4. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Her bir η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin değme yapısı ve M ye de değme manifoldu denir (Yano ve Kon, 1984).

Yardımcı Teorem 2.3.2. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde

$$g(X,\phi Y)=d\eta(X,Y) \tag{2.24}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) vardır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.5. M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanına Killing vektör alanı adı verilir. Böylece, X bir Killing vektör alanıdır ancak ve ancak $L_X g = 0$ dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.6. Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldu ”değme metrik manifold” olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.7. $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı, g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapısına K-değme yapısı ve M ye de K-değme manifoldu adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Yardımcı Teorem 2.3.3. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. $\phi - (1,1)$ tipinde tensör alanı ve η 1-form olmak üzere

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi) Y &= \nabla_X \phi Y - \phi(\nabla_X Y) \\ (\nabla_X \eta) Y &= \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \end{aligned} \tag{2.25}$$

sağlanır (Shukla ve Singh, 2010).

2.4 Kenmotsu Manifoldları ve Ricci Soliton

Bu kısımda Kenmotsu manifoldları ve Ricci Solitonlar hakkında genel bir bilgilendirme yapılmıştır. Bunun yanı sıra çalışmanın ilerleyen bölümlerinde yararlanılacak olan tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.4.1. ∇ Riemann koneksiyon olmak üzere (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısına sahip herhangi bir M hemen hemen değme metrik manifoldu

$$\begin{aligned} i) \quad (\nabla_X \phi) Y &= g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi(X) \\ ii) \quad \nabla_X \xi &= X - \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.26}$$

şartlarını sağlıyorsa Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1971).

Tanım 2.4.2. M Kenmotsu manifold olmak üzere R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.1. M Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\eta(R(X,Y)Z) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X) \tag{2.28}$$

şeklinde ifade edilir (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Yardımcı Teorem 2.4.1. M Kenmotsu manifoldunda η 1- form olmak üzere

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\phi X, \phi Y) \tag{2.29}$$

sağlanır (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.2. M Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\begin{aligned} i) \quad R(X,Y)\xi &= \eta(X)Y - \eta(Y)X \\ ii) \quad R(\xi,X)Y &= \eta(Y)X - g(X,Y)\xi \\ iii) \quad R(\xi,X)\xi &= X - \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.30}$$

eşitlikleri yazılır (Bagewadi, vd., 2013).

Tanım 2.4.3. M Kenmotsu manifold olmak üzere Q Ricci operatörü X vektör alanı cinsinden

$$QX = \eta(X)\xi - (\lambda+1)X \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Sonuç 2.4.3. M Kenmotsu manifold olmak üzere Q Ricci operatörü ξ vektör alanı cinsinden

$$Q\xi = -\lambda\xi \tag{2.32}$$

şeklinde verilir (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Tanım 2.4.4. M Kenmotsu manifold olmak üzere r skalar eğriliği

$$r = -\lambda n - (n-1) \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanır (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

Tanım 2.4.5. M Kenmotsu manifold olmak üzere herhangi X ve Y vektör alanları için

$$S(X,Y) = \eta(X)\eta(Y) - (\lambda+1)g(X,Y) \tag{2.34}$$

şeklinde tanımlanan S ye Ricci eğrilik tensörü adı verilir (Bagewadi, vd., 2013).

Sonuç 2.4.4. M Kenmotsu manifold olmak üzere S Ricci tensörü X ve ξ vektör alanları cinsinden

$$S(X,\xi) = -\lambda\eta(X) \tag{2.35}$$

şeklinde yazılır (Nagaraja ve Premalatha, 2012; Bagewadi, vd., 2013).

Tanım 2.4.6. (M,g) bir Riemann manifold, V bir vektör alanı, S de M üzerinde bir Ricci tensör, λ sabit bir değer ve g bir Riemann metrik olsun. g metriği

$$L_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \tag{2.36}$$

şartını sağlıyorsa (g,V,λ) üçlüsüne Ricci soliton denir. Burada Ricci solitonuna sırasıyla λ nın pozitif, negatif ve sıfır olması durumlarında genişleyen, daralan ve değişmeyen adı verilir (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

2.5 Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldları ve Ricci solitonlar hakkında genel bir bilgilendirme yapılmıştır. Bunun yanı sıra çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.5.1. M herhangi bir Kenmotsu manifold, ∇ Riemann koneksiyon ve η 1-form olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)X \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}$ ye semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon adı verilir (Agashe ve Chafle, 1992).

Yardımcı Teorem 2.5.1. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold, ξ M manifoldu üzerinde tanımlı karakteristik vektör alanı, $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon, $\phi-(1,1)$ tipinde tensör alanı, η 1-form ve X,Y M üzerinde herhangi birer vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} i) \quad \left(\widetilde{\nabla}_X\phi\right)Y &= g(\phi X,Y)\xi-2\eta(Y)\phi X \\ ii) \quad \widetilde{\nabla}_X\xi &= 2X-\eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.38}$$

ve

$$\left(\widetilde{\nabla}_X\eta\right)Y = g(\phi X,\phi Y) \tag{2.39}$$

eşitlikleri ifade edilir (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.2. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z &= 2\{g(X,Z)Y-g(Y,Z)X \\ &\quad +\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X,\ Y,\ Z$ ve ξ yer değiştirmeleri yapıldığında

$$\widetilde{R}(\xi,X)Y=-2\{g(X,Y)\xi-\eta(X)\eta(Y)\xi\},\ \widetilde{R}(X,Y)\xi=0,\ \widetilde{R}(\xi,X)\xi=0 \tag{2.41}$$

eşitlikleri sağlanır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013; Barman ve De, 2015).

Tanım 2.5.3. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda herhangi bir X vektör alanı için $\widetilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}X=-(\lambda+2)X+\eta(X)\xi \tag{2.42}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Sonuç 2.5.1. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda ξ karakteristik vektör alanı için $\widetilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}\xi=-(\lambda+1)\xi \tag{2.43}$$

dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.4. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifold olmak üzere $\widetilde{r}$ skalar eğriliği

$$\widetilde{r}=-\lambda n-(n-1)^2 \tag{2.44}$$

şeklinde tanımlanır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.5. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olmak üzere $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,Y) = -(\lambda+2)\,g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{2.45}$$

dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.6. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{R}(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.46}$$

olarak tanımlanır (Agashe ve Chafle, 1992).

Sonuç 2.5.2. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda tanımlı X ve ξ vektör alanları için $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,\xi) = -(\lambda+1)\,\eta(X) \tag{2.47}$$

ve

$$\widetilde{S}(X,Y) = S(X,Y) - (n-1)\,g(X,Y) + 2(n-1)\eta(X)\eta(Y) \tag{2.48}$$

şeklinde yazılır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.7. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde $\widetilde{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(X,Y)Z &= a\tilde{R}(X,Y)Z + b[\tilde{S}(Y,Z)X - \tilde{S}(X,Z)Y + g(Y,Z)\tilde{Q}X \\ &\quad -g(X,Z)\tilde{Q}Y] - \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.49}$$

olarak tanımlanır (Yano ve Sawaki, 1968).

Sonuç 2.5.3. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda tanımlı X ve ξ vektör alanları için $\widetilde{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(X,Y)Z &= C(X,Y)Z + \{\frac{(n+1)(n+2)}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) - a \\ &\quad -2(n-1)b\}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + 2(n-1)b\{g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ &\quad -g(X,Z)\eta(Y)\xi\} + 2\{a + 2(n-1)b\}\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \end{aligned} \tag{2.50}$$

şeklinde yazılır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Tanım 2.5.8. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde $\widetilde{B}$ C-Bochner eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(X,Y)Z = \tilde{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n+3}[&g(X,Z)\tilde{Q}Y - \tilde{S}(Y,Z)X - g(Y,Z)\tilde{Q}X + \tilde{S}(X,Z)Y \\ &+g(\tilde{\phi}X,Z)\tilde{Q}\tilde{\phi}Y - \tilde{S}(\tilde{\phi}Y,Z)\tilde{\phi}X - g(\tilde{\phi}Y,Z)\tilde{Q}\tilde{\phi}X + \tilde{S}(\tilde{\phi}X,Z)\tilde{\phi}Y \\ &+2\tilde{S}(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{\phi}Z + 2g(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{Q}\tilde{\phi}Z + \eta(Y)\eta(Z)\tilde{Q}X - \eta(Y)\tilde{S}(X,Z)\xi \\ &+\eta(X)\tilde{S}(Y,Z)\xi - \eta(X)\eta(Z)\tilde{Q}Y] - \frac{D+n-1}{n+3}[g(\tilde{\phi}X,Z)\tilde{\phi}Y \\ &-g(\tilde{\phi}Y,Z)\tilde{\phi}X + 2g(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{\phi}Z] + \frac{D}{n+3}[\eta(Y)g(X,Z)\xi - \eta(Y)\eta(Z)X \\ &+\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(X)g(Y,Z)\xi] - \frac{D-4}{n+3}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]\end{aligned} \tag{2.51}$$

olarak tanımlanır (Bagewadi vd., 2013).

Tanım 2.5.9. $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon ile ∇ Levi- Civita koneksiyonu arasındaki ilişki

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X)Y + g(X,Y)\xi$$

şeklinde verilmiştir (Barua ve Mukhopadhyay, 1992).

Teorem 2.5.1. $\widetilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu M Kenmotsu manifoldu için

i) $\widetilde{R}$ eğrilik tensörü

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + \eta(X)g(Y,Z)\xi - \eta(Y)g(X,Z)\xi$$

olarak bulunur.

ii) $\widetilde{S}$ Ricci tensör

$$\widetilde{S}(Y,Z) = S(Y,Z) + (2n+1)g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)$$

şeklinde elde edilir.

iii) $\widetilde{r}$ skalar eğrilik

$$\widetilde{r} = r + (2n+1)(2n+1) - 1$$

olur.

iv) $\widetilde{R}(X,Y)Z = -\widetilde{R}(Y,X)Z$ dır.

v) $\widetilde{R}(X,Y)Z + \widetilde{R}(Y,Z)X + \widetilde{R}(Z,X)Y = 0$ dır.

vi) $\widetilde{S}$ Ricci tensör simetriktir.

vii) $\widetilde{R}(X,Y,Z,U) = -\widetilde{R}(X,Y,U,Z)$ dır (Barman ve De, 2015).

3. KENMOTSU MANİFOLDLARINDA RICCI SOLİTONLAR ve BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Bu bölümde Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı eğrilik çarpımları ve bu çarpımlara bağlı olarak Ricci solitonlar ile ilgili sonuçlar ve teoremler incelenmiştir.

3.1 Daralan Ricci Solitonlar

Bu kısımda $\lambda < 0$ olma şartına bağlı olarak Ricci solitonlar hesaplanmıştır.

(2.14) eşitliğinde $Z = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)\xi &= aR(X,Y)\xi + b[S(Y,\xi)X - S(X,\xi)Y \\ &\quad + g(Y,\xi)QX - g(X,\xi)QY] \\ &\quad - \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,\xi)X - g(X,\xi)Y] \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. (3.1) eşitliğinde (2.30), (2.31) ve (2.35) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)\xi &= a[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\ &\quad + b[-\lambda\eta(Y)X + \eta(Y)(\eta(X)\xi - (\lambda+1)X) \\ &\quad + \lambda\eta(X)Y - \eta(X)(\eta(Y)\xi - (\lambda+1)Y)] \end{aligned} \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \check{C}(X,Y)\xi &= a[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\ &\quad + b\lambda[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + b(\lambda+1)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \end{aligned} \tag{3.3}$$

yazılır. (3.3) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\check{C}(X,Y)\xi = [a + b(2\lambda+1) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)][\eta(X)Y - \eta(Y)X] \tag{3.4}$$

bulunur. (2.14) ve (2.20) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= g(aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &\quad + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \\ &\quad - \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \xi) \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Metriğin lineerlik özelliği ve (2.9) ifadesinin (3.5) denkleminde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= a\eta(R(X,Y)Z)-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Y,Z)\eta(X)\\&-g(X,Z)\eta(Y)]+b[S(Y,Z)\eta(X)-S(X,Z)\eta(Y)\\&+g(Y,Z)S(X,\xi)-g(X,Z)S(Y,\xi)]\end{aligned}\tag{3.6}$$

yazılır. (3.6) eşitliğinde (2.28), (2.34) ve (2.35) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= a[g(X,Z)\eta(Y)-g(Y,Z)\eta(X)]\\&-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)]\\&+b[\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-(\lambda+1)g(Y,Z)\eta(X)\\&-\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)+(\lambda+1)g(X,Z)\eta(Y)\\&+g(Y,Z)\eta(X)-(\lambda+1)g(Y,Z)\eta(X)\\&-g(X,Z)\eta(Y)+(\lambda+1)g(X,Z)\eta(Y)]\end{aligned}\tag{3.7}$$

bulunur. (3.7) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= -a[g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)]\\&-(2\lambda+1)b[g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)]\\&-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)]\end{aligned}\tag{3.8}$$

olur. (3.8) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}\eta\left(\check{C}(X,Y)Z\right) &= -[a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,Z)\eta(X)\\&-g(X,Z)\eta(Y)]\end{aligned}\tag{3.9}$$

bulunur.

Kabul edelim ki M Kenmotsu manifoldu için

$$R(\xi,X)\check{C}=0\tag{3.10}$$

şartı sağlanmış olsun. $\forall\, X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}R(\xi,X)\check{C}(Y,Z)W &= \check{C}(R(\xi,X)Y,Z)W+\check{C}(Y,R(\xi,X)Z)W\\&+\check{C}(Y,Z)R(\xi,X)W+\left(R(\xi,X)\check{C}\right)(Y,Z)W\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}0 &= R(\xi,X)\check{C}(Y,Z)W-\check{C}(R(\xi,X)Y,Z)W\\&-\check{C}(Y,R(\xi,X)Z)W-\check{C}(Y,Z)R(\xi,X)W\end{aligned}\tag{3.11}$$

eşitliği yazılabilir. (3.11) denkleminde (2.30) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= \eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)X-g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right)\xi\\&-\check{C}(\eta(Y)X-g(X,Y)\xi,Z)W-\check{C}(Y,\eta(Z)X-g(X,Z)\xi)W\\&-\check{C}(Y,Z)(\eta(W)X-g(X,W)\xi)\end{aligned}\tag{3.12}$$

olur. (3.12) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= \eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)X - g(\check{C}(Y,Z)W,X)\xi - \eta(Y)\check{C}(X,Z)W \\
&\quad + g(X,Y)\check{C}(\xi,Z)W - \eta(Z)\check{C}(Y,X)W + g(X,Z)\check{C}(Y,\xi)W \\
&\quad - \eta(W)\check{C}(Y,Z)X + g(W,X)\check{C}(Y,Z)\xi
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) ifadesinin iki tarafı da ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)\eta(X) - \eta(Y)\eta(\check{C}(X,Z)W) + g(X,Z)\eta(\check{C}(Y,\xi)W) \\
&\quad + g(X,Y)\eta(\check{C}(\xi,Z)W) - \eta(Z)\eta(\check{C}(Y,X)W) - g(\check{C}(Y,Z)W,X) \\
&\quad - \eta(W)\eta(\check{C}(Y,Z)X) + g(W,X)\eta(\check{C}(Y,Z)\xi)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.9) ifadesi (3.14) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= -\eta(X)[a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Z,W)\eta(Y) \\
&\quad - g(Y,W)\eta(Z)] - g(\check{C}(Y,Z)W,X) + \eta(Y)[a+b(2\lambda+1) \\
&\quad + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Z,W)\eta(X) - g(X,W)\eta(Z)] \\
&\quad - g(X,Y)[a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Z,W) \\
&\quad - \eta(W)\eta(Z)] + \eta(Z)[a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)] \\
&\quad \times [g(X,W)\eta(Y) - g(Y,W)\eta(X)] - g(X,Z)[\eta(W)\eta(Y) \\
&\quad - g(Y,W)][a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)] \\
&\quad + \eta(W)[a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(X,Z)\eta(Y) \\
&\quad - g(Y,X)\eta(Z)] - g(W,X)[a+b(2\lambda+1) \\
&\quad + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][\eta(Z)\eta(Y) - \eta(Y)\eta(Z)]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.14) ifadesinde gerekli işlemler gerçekleştirilir ve eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= g(\check{C}(Y,Z)W,X) + [a+b(2\lambda+1)][g(X,Y)g(W,Z) \\
&\quad - g(X,Z)g(Y,Z)] + [\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(X,Y)g(W,Z) \\
&\quad - g(X,Z)g(Y,Z)]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

bulunur. (2.14) ifadesi (3.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= g(aR(Y,Z)W + b[S(Z,W)Y - S(Y,W)Z \\
&\quad + g(Z,W)QY - g(Y,W)QZ] \\
&\quad - \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Z,W)Y - g(Y,W)Z], X) \\
&\quad + [a + b(2\lambda+1) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)][g(X,Y)g(W,Z) \\
&\quad - g(X,Z)g(Y,Z)]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. (3.17) eşitliğinde metriğin lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= ag(R(Y,Z)W,X) + b[S(Z,W)g(Y,X) - S(Y,W)g(Z,X) \\
&\quad + g(Z,W)g(QY,X) - g(Y,W)g(QZ,X)] \\
&\quad - \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Z,W)g(Y,X) - g(Y,W)g(Z,X)] \\
&\quad + [a + b(2\lambda+1) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)][g(X,Y)g(W,Z) \\
&\quad - g(X,Z)g(Y,Z)]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olur. (3.18) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 &= ag(R(Y,Z)W,X) + b[S(Z,W)g(Y,X) - S(Y,W)g(Z,X) \\
&\quad + g(Z,W)S(X,Y) - g(Y,W)S(Z,X)] \\
&\quad + [a + b(2\lambda+1)][g(X,Y)g(W,Z) - g(X,Z)g(Y,W)]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) denkleminde $X = Y = e_i$ değişikliği yapılır ve $i = 1, 2, ..., n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned}
0 &= a\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,Z)W,e_i) + b\sum_{i=1}^{n}[S(Z,W)g(e_i,e_i) - S(e_i,W)g(Z,e_i) \\
&\quad + g(Z,W)S(e_i,e_i) - g(e_i,W)S(Z,e_i)] \\
&\quad + [a + b(2\lambda+1)]\sum_{i=1}^{n}[g(e_i,e_i)g(W,Z) - g(e_i,Z)g(e_i,W)]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

yazılır. (2.11), (2.7), (2.12) ve (2.33) ifadeleri (3.20) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= aS(Z,W) + bnS(Z,W) - 2bS(Z,W) \\
&\quad + [a + b(2\lambda+1)](n-1)g(W,Z) + b[-n(\lambda+1)+1]g(W,Z)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
0 &= [a + (n-2)b]S(Z,W) + [a + b(2\lambda+1)](n-1)g(W,Z) \\
&\quad + b[-n(\lambda+1)+1]g(W,Z)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. (3.21) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}
[a + (n-2)b]S(Z,W) &= \{-[a + b(2\lambda+1)](n-1) \\
&\quad - b[-n(\lambda+1)+1]\}g(W,Z)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22) denkleminde $Z = W = e_i$ değişikliği yapılır ve $i = 1,2,...,n$ için toplanırsa

$$[a+(n-2)b]\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_1) = -[a+b(2\lambda+1)](n-1)g(e_i,e_1) \tag{3.23}$$

yazılır. (3.23) ifadesinde (2.12) ve (2.33) eşitlikleri kullanılırsa

$$[a+(n-2)b][-n(\lambda+1)+1] = -[a+b(2\lambda+1)](n-1)n \tag{3.24}$$

bulunur. (3.24) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \lambda(2bn(n-1)+n[a+(n-2)b]) &= (a+b)n(n-1) \\ &\quad -[a+(n-2)b](n-1) \end{aligned} \tag{3.25}$$

olur. Eğer $[a+(n-2)b] = 0$ şartı sağlanırsa

$$\lambda = -\frac{(n-1)}{2} \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.26) eşitliğine göre $n \geq 2$ için λ negatif değerler alır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.1.1. Quasi konformal semi-simetrik Kenmotsu manifoldu M üzerinde $n \geq 2$ için Ricci soliton, $[a+(n-2)b] = 0$ şartı sağlandığı takdirde daralandır (Nagaraja and Premalatha, 2012).

3.2 Genişleyen Ricci Solitonlar

Bu kısımda $\lambda > 0$ olma şartına bağlı olarak Ricci solitonlar hesaplanmıştır.

(2.16) ifadesinde $X = \xi$, $Y = X$ ve $Z = Y$ değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned} P(\xi,X)Y &= \eta(Y)X - g(X,Y)\xi - \frac{1}{n-1}\{-\lambda g(X,Y)\xi \\ &\quad -\eta(Y)\eta(X)\xi - (\lambda+1)\eta(Y)X\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

yazılır. (3.27) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} P(\xi,X)Y &= \frac{1}{n-1}\{[(\lambda+2-n)g(X,Y) - \eta(Y)\eta(X)]\xi \\ &\quad -(\lambda+1-n)\eta(Y)X\} \end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.9) ifadesinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(\xi,X)Y\right) &= [a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)]\{\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -g(X,Y)\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur. Ayrıca (3.9) ifadesine $Z=\xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \eta\left(\check{C}(X,Y)\xi\right) &= [a+b\lambda+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)]\{\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -\eta(Y)\eta(X)\}+b[S(Y,\xi)\eta(X)-S(X,\xi)\eta(Y)] \end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) denkleminde (2.35) ifadesi kullanılır ve eşitlik düzenlenirse

$$\eta\left(\check{C}(X,Y)\xi\right) = +b[-\lambda\eta(X)\eta(Y)+\lambda\eta(X)\eta(Y)]$$

veya

$$\eta\left(\check{C}(X,Y)\xi\right)=0 \tag{3.31}$$

bulunur.

Kabul edelim ki M Kenmotsu manifoldu için

$$P(\xi,X)\check{C}=0 \tag{3.32}$$

şartı sağlanmış olsun. $\forall\, X,Y,Z,W\in M$ için

$$\begin{aligned} P(\xi,X)\check{C}(Y,Z)W &= \check{C}(P(\xi,X)Y,Z)W+\check{C}(Y,P(\xi,X)Z)W \\ &\quad +\check{C}(Y,Z)P(\xi,X)W+\left(P(\xi,X)\check{C}\right)(Y,Z)W \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= P(\xi,X)\check{C}(Y,Z)W-\check{C}(P(\xi,X)Y,Z)W \\ &\quad -\check{C}(Y,P(\xi,X)Z)W-\check{C}(Y,Z)P(\xi,X)W \end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitliği yazılabilir. (3.28) ifadesi (3.33) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [(\lambda+2-n)g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right)-\eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)\eta(X)]\xi \\ &\quad -(\lambda-n+1)\eta\left(\check{C}(Y,Z)W\right)X-\{(\lambda+2-n)g(X,Y) \\ &\quad -\eta(Y)\eta(X)\}\check{C}(\xi,Z)W+(\lambda-n+1)\eta(Y)\check{C}(X,Z)W \\ &\quad -[(\lambda+2-n)g(X,Z)-\eta(Z)\eta(X)]\check{C}(Y,\xi)W \\ &\quad +(\lambda-n+1)\eta(Z)\check{C}(Y,X)W \\ &\quad -[(\lambda+2-n)g(X,W)-\eta(W)\eta(X)]\check{C}(Y,Z)\xi \\ &\quad +(\lambda-n+1)\eta(W)\check{C}(Y,Z)\xi \end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) eşitliğinin iki tarafı da ξ ile iç çarpılırsa ve (3.9) ifadesi de kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 = \; & (\lambda+2-n)\, g\left(X, \check{C}(Y,Z)W\right) \\
& -(\lambda+2-n)\,[a+b\lambda+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,W)\eta(X)\eta(Z) \\
& -g(Z,W)\eta(X)\eta(Y)]-(\lambda+2-n)\,b[S(Z,W)\eta(X)\eta(Y) \\
& -S(Y,W)\eta(X)\eta(Z)]-[(\lambda+2-n)\,g(X,Y) \\
& -\eta(Y)\eta(X)]\{[a+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][\eta(W)\eta(Z)-g(Z,W)] \\
& +b[S(Z,W)+2\lambda\eta(W)\eta(Z)]\} \\
& +(\lambda+1-n)\,\{[a+b\lambda+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(X,W)\eta(Y)\eta(Z) \\
& -g(Z,W)\eta(X)\eta(Y)] \\
& +b[S(Z,W)\eta(X)\eta(Y)-S(X,W)\eta(Z)\eta(Y)]\} \\
& -\{[(\lambda+2-n)\,g(X,Z)-\eta(Z)\eta(X)][a+b\lambda \\
& +\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,W)-\eta(Y)\eta(W)]-b[S(Y,W) \\
& +\lambda\eta(W)\eta(Y)]\}+(\lambda+1-n)\,\{[a+b\lambda \\
& +\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)-g(X,W)\eta(Z)\eta(Y)] \\
& +b[S(X,W)\eta(Z)\eta(Y)-S(Y,W)\eta(Z)\eta(X)]\} \\
& +(\lambda+1-n)\,\{[a+b\lambda+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,X)\eta(W)\eta(Z) \\
& -g(Z,X)\eta(W)\eta(Y)] \\
& +b[S(Z,X)\eta(W)\eta(Y)-S(Y,X)\eta(Z)\eta(W)]\}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

olarak yazılır. (3.35) ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\, g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right)+b\lambda\{g(Z,W)\eta(X)\eta(Y) \\
&\quad -g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)\}+\{(\lambda+2-n)(a \\
&\quad +\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))-(\lambda+1-n)(a+b\lambda \\
&\quad +\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))\}[g(Z,X)\eta(W)\eta(Y) \\
&\quad -g(Y,X)\eta(W)\eta(Z)] \\
&\quad +(\lambda+2-n)(a+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))[g(Y,X)g(Z,W) \\
&\quad -g(Z,X)g(Y,W)]+(\lambda+2-n)b[g(Z,X)S(Y,W) \\
&\quad -g(Y,X)S(Z,W)]+(\lambda+1-n)b[S(Z,X)\eta(W)\eta(Y) \\
&\quad -S(Y,X)\eta(W)\eta(Z)]
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

elde edilir. (3.36) eşitliği

$$
\begin{aligned}
k &= (a+b\lambda+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)) \\
l &= (a+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b))
\end{aligned}
$$

olacak şekilde yeniden düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\, g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right)+b\lambda\{g(Z,W)\eta(X)\eta(Y) \\
&\quad -g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)\}+[(\lambda+2-n)(l+2b\lambda) \\
&\quad -(\lambda+1-n)k]\{g(Z,X)\eta(W)\eta(Y)-g(Y,X)\eta(W)\eta(Z)\} \\
&\quad +(\lambda+2-n)l[g(Y,X)g(Z,W)-g(Z,X)g(Y,W)] \\
&\quad +(\lambda+2-n)b[g(Z,X)S(Y,W)-g(Y,X)S(Z,W)] \\
&\quad +(\lambda+1-n)b[S(Z,X)\eta(W)\eta(Y)-S(Y,X)\eta(W)\eta(Z)]
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

bulunur.

(3.37) denkleminde bulunan $g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right)$ ifadesi (2.14) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right) &= g(aR(Y,Z)W+b[S(Z,W)Y-S(Y,W)Z \\
&\quad +g(Z,W)QY-g(Y,W)QZ] \\
&\quad -\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Z,W)Y-g(Y,W)Z],X)
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
g\left(X,\check{C}(Y,Z)W\right) &= ag(R(Y,Z)W,X) \\
&+b[S(Z,W)g(X,Y)-S(Y,W)g(X,Z) \\
&+g(Z,W)S(Y,W)-g(Y,W)S(Z,X)] \\
&-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Z,W)g(X,Y) \\
&-g(Y,W)g(X,Z)]
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

şeklinde hesaplanır. (3.38) ifadesi (3.37) denkleminde yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)\{ag(R(Y,Z)W,X) \\
&+b[S(Z,W)g(X,Y)-S(Y,W)g(X,Z) \\
&+g(Z,W)S(X,Y)-g(Y,W)S(Z,X)] \\
&-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Z,W)g(X,Y)-g(Y,W)g(X,Z)]\} \\
&+[(\lambda+2-n)(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)k]\{g(Z,X)\eta(W)\eta(Y) \\
&-g(Y,X)\eta(W)\eta(Z)\}+b\lambda(g(Z,W)\eta(X)\eta(Y) \\
&-g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)) \\
&+(\lambda+2-n)l[g(Y,X)g(Z,W)-g(Z,X)g(Y,W)] \\
&+(\lambda+2-n)b[g(Z,X)S(Y,W)-g(Y,X)S(Z,W)] \\
&+(\lambda+1-n)b[S(Z,X)\eta(W)\eta(Y)-S(Y,X)\eta(W)\eta(Z)]
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2-n)ag(R(Y,Z)W,X) \\
&+(\lambda+2-n)b[S(Z,W)g(X,Y)-S(Y,W)g(X,Z)] \\
&+bl(g(Z,W)\eta(X)\eta(Y)-g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)) \\
&+(\lambda+2-n)b[g(Z,W)S(X,Y)-g(Y,W)S(Z,X)] \\
&+(\lambda+2-n)(a-l)[g(Z,W)g(X,Y)-g(Y,W)g(X,Z)] \\
&+[(\lambda+2-n)(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)k][g(Z,X)\eta(W)\eta(Y) \\
&-g(Y,X)\eta(W)\eta(Z)]+(\lambda+2-n)l[g(Z,W)g(X,Y) \\
&-g(Y,W)g(X,Z)] \\
&+(\lambda+2-n)b(S(Z,W)g(X,Y)-S(Y,W)g(X,Z)) \\
&+(\lambda+1-n)b[S(Z,X)\eta(W)\eta(Y)-S(Y,X)\eta(W)\eta(Z)]
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

yazılır. (3.39) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda+2-n)\,ag\,(R\,(Y,Z)\,W,X)+(\lambda+2-n)\,b[g\,(Z,W)\,S\,(X,Y) \\ &\quad -g\,(Y,W)\,S\,(Z,X)] \\ &\quad +bl\,(g\,(Z,W)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Y)-g\,(Y,W)\,\eta\,(X)\,\eta\,(Z)) \\ &\quad +(\lambda+2-n)\,a\,[g\,(Z,W)\,g\,(X,Y)-g\,(Y,W)\,g\,(X,Z)] \\ &\quad +(\lambda+1-n)\,b\,[S\,(Z,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Y)-S\,(Y,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)] \\ &\quad +[(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)\,k]\,[g\,(Z,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Y) \\ &\quad -g\,(Y,X)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)] \end{aligned} \tag{3.40}$$

şeklinde ifade edilir. (3.40) denklemine $X=Y=e_i$ değişikliği uygulanır ve $i=1,2,...,n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda+2-n)\,a\sum_{i=1}^{n} g\,(R\,(e_i,Z)\,W,e_i) \\ &\quad +(\lambda+2-n)\,b\sum_{i=1}^{n}[g\,(Z,W)\,S\,(e_i,e_i)-g\,(e_i,W)\,S\,(Z,e_i)] \\ &\quad +bl\sum_{i=1}^{n}(g\,(Z,W)\,\eta\,(e_i)\,\eta\,(e_i)-g\,(e_i,W)\,\eta\,(e_i)\,\eta\,(Z)) \\ &\quad +(\lambda+2-n)\,a\sum_{i=1}^{n}[g\,(Z,W)\,g\,(e_i,e_i)-g\,(e_i,W)\,g\,(e_i,Z)] \\ &\quad +(\lambda+1-n)\,b\sum_{i=1}^{n}[S\,(Z,e_i)\,\eta\,(W)\,\eta\,(e_i)-S\,(e_i,e_i)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)] \\ &\quad +[(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)\,k]\sum_{i=1}^{n}[g\,(Z,e_i)\,\eta\,(W)\,\eta\,(e_i) \\ &\quad -g\,(e_i,e_i)\,\eta\,(W)\,\eta\,(Z)] \end{aligned} \tag{3.41}$$

yazılır. (2.11), (2.7), (2.12) ve (2.33) ifadeleri (3.41) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda+2-n)\,aS\,(Z,W)+(\lambda+2-n)\,b\,(rg\,(Z,W)-S\,(Z,W)) \\ &\quad +bl\,(g\,(Z,W)-\eta\,(W)\,\eta\,(Z))+(\lambda+2-n)\,a\,(n-1)\,g\,(Z,W) \\ &\quad +(\lambda+1-n)\,b\,(-\lambda\eta\,(W)\,\eta\,(Z)-r\eta\,(W)\,\eta\,(Z)) \\ &\quad +[(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)\,k]\,(n-1)\,(\eta\,(W)\,\eta\,(Z)) \end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.42) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda+2-n)\,(a-b)\,S\,(Z,W)+[(\lambda+2-n)\,br+b\lambda \\ &\quad +(\lambda+2-n)\,a\,(n-1)\,g\,(Z,W)] \\ &\quad -\{b\lambda+(n-1)\,[(\lambda+2-n)\,(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)\,k] \\ &\quad +(\lambda+1-n)\,br+\lambda(\lambda+1-n)\}b\eta\,(W)\,\eta\,(Z) \end{aligned} \tag{3.43}$$

bulunur. (3.43) ifadesinde $Z=W=e_i$ değişikliği uygulanır ve $i=1,2,...,n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda+2-n)(a-b)\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i)+[(\lambda+2-n)br+b\lambda \\ &+(\lambda+2-n)a(n-1)]\sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i)-\{b\lambda \\ &+(n-1)[(\lambda+2-n)(l+2b\lambda)-(\lambda+1-n)k] \\ &+(\lambda+1-n)br+\lambda(\lambda+1-n)\}b\sum_{i=1}^{n}\eta(e_i)\eta(e_i) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda+2-n)(a-b)r+[(\lambda+2-n)br+b\lambda \\ &+(\lambda+2-n)a(n-1)n] \\ &-[b\lambda+(n-1)[(\lambda+2-n)(l+2b\lambda) \\ &-(\lambda+1-n)k]+(\lambda+1-n)br+\lambda(\lambda+1-n)b] \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. $a+(n-1)b=0$ alınır ve (3.44) denkleminde gerekli işlemler gerçekleştirilirse

$$\lambda=\frac{n^4-3n^3+2n^2-1}{n^3-n^2-n} \tag{3.45}$$

bulunur. (3.45) eşitliğine göre $n\geq 3$ için λ pozitif değerler alır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.2.1. $n-$boyutlu M Kenmotsu manifoldunda $P(\xi,X).\check{C}=0$ şartının sağlandığı koşullarda $n\geq 3$ için Ricci soliton genişleyendir (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

3.3 Değişmeyen Ricci Solitonlar

Bu kısımda $\lambda=0$ olma şartına bağlı olarak Ricci solitonlar hesaplanmıştır.

(2.15) ifadesinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned} H(\xi,X)Y &= R(\xi,X)Y-\frac{1}{n-2}[S(X,Y)\xi-S(\xi,Y)X \\ &+g(X,Y)Q\xi-g(\xi,Y)QX] \end{aligned} \tag{3.46}$$

yazılır. (2.30), (2.34) ve (2.35) eşitlikleri (3.46) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} H(\xi,X)Y &= \eta(Y)X-g(X,Y)\xi-\frac{1}{n-2}[\eta(X)\eta(Y)\xi \\ &-(\lambda+1)g(X,Y)\xi+\lambda\eta(Y)X-\lambda g(X,Y)\xi \\ &-\eta(Y)\eta(X)\xi+(\lambda+1)\eta(Y)X] \end{aligned} \tag{3.47}$$

bulunur. (3.47) ifadesi düzenlenirse

$$H(\xi,X)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi - \frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(Y)X - g(X,Y)\xi] \quad (3.48)$$

elde edilir. (3.48) eşitliğinin her iki tarafı ξ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \eta(H(\xi,X)Y) &= \eta(Y)\eta(X) - g(X,Y) - \frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad -g(X,Y)] \end{aligned} \quad (3.49)$$

bulunur.

Kabul edelim ki M Kenmotsu manifoldu için

$$H(\xi,X)S = 0 \quad (3.50)$$

şartı sağlanmış olsun. $\forall\, X,Y,Z,W \in M$ için

$$S(H(\xi,X)Y,Z) + S(Y,H(\xi,X)Z) = 0 \quad (3.51)$$

yazılır. (2.34) ifadesi (3.51) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(H(\xi,X)Y)\eta(Z) - (\lambda+1)g(H(\xi,X)Y,Z) \\ &\quad +\eta(H(\xi,X)Z)\eta(Y) - (\lambda+1)g(H(\xi,X)Z,Y) \end{aligned} \quad (3.52)$$

şeklinde ifade edilir. (3.48) ve (3.49) ifadeleri (3.52) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T1 &= \eta(Y)\eta(X)\eta(Z) - g(X,Y)\eta(Z) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad -g(X,Y)\eta(Z)] + \eta(Y)\eta(X)\eta(Z) - g(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - g(X,Z)\eta(Y)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T2 &= (\lambda+1)\{\eta(Y)g(X,Z) - g(X,Y)\eta(Z) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(Y)g(X,Z) \\ &\quad -g(X,Y)\eta(Z)] + \eta(Z)g(X,Y) - g(X,Z)\eta(Y) \\ &\quad -\frac{1}{n-2}(2\lambda+1)[\eta(Z)g(X,Y) - g(X,Z)\eta(Y)]\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T1 = T2 \quad (3.53)$$

elde edilir. (3.53) eşitliği düzenlendiği takdirde

$$\begin{aligned} 0 = &\left(2 - \frac{4\lambda+2}{n-2}\right)\eta(Y)\eta(X)\eta(Z) + \left(-1 + \frac{2\lambda+1}{n-2}\right)g(X,Y)\eta(Z) \\ &+\left(-1 + \frac{2\lambda+1}{n-2}\right)g(X,Z)\eta(Y) \end{aligned} \quad (3.54)$$

bulunur. (3.54) ifadesinde $X = Y = e_i$ değişikliği yapılır ve $i = 1,2,...,n$ için toplanırsa

$$\begin{aligned} 0 = \quad & [2 - \frac{4\lambda+2}{n-2}]\sum_{i=1}^{n}\eta(e_i)\eta(e_i)\eta(Z) + (-1+\frac{2\lambda+1}{n-2})\sum_{i=1}^{n}g(e_i,e_i)\eta(Z) \\ & +(-1+\frac{2\lambda+1}{n-2})\sum_{i=1}^{n}g(e_i,Z)\eta(e_i) \end{aligned} \tag{3.55}$$

olur. (3.55) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$[2-\frac{4\lambda+2}{n-2}]\eta(Z) + n(-1+\frac{2\lambda+1}{n-2})\eta(Z) + (-1+\frac{2\lambda+1}{n-2})\eta(Z) \quad = \quad 0$$

veya

$$[[2-\frac{4\lambda+2}{n-2}] + (n+1)(-1+\frac{2\lambda+1}{n-2})]\eta(Z) = 0 \tag{3.56}$$

elde edilir. (3.56) eşitliğinde

$$\eta(Z) \neq 0$$

olduğundan

$$[2-\frac{4\lambda+2}{n-2}] + (n+1)(-1+\frac{2\lambda+1}{n-2}) = 0 \tag{3.57}$$

bulunur. (3.57) ifadesi düzenlenirse

$$\frac{2n\lambda-2\lambda}{n-2} = \frac{n^2-4n+3}{n-2} \tag{3.58}$$

veya

$$2\lambda(n-1) = (n-3)(n-1) \tag{3.59}$$

yazılır. (3.59) eşitliğinde λ yalnız bırakılırsa

$$\lambda = \frac{n-3}{2} \tag{3.60}$$

elde edilir. (3.60) ifadesine göre $n = 3$ için $\lambda = 0$ olur.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.3.1. *M* 3-boyutlu Kenmotsu manifoldunda Ricci soliton değişmeyendir ancak ve ancak $H(\xi,X).S = 0$ dır (Nagaraja ve Premalatha, 2012).

4. f-KENMOTSU MANİFOLD VE RICCI SOLİTONLAR

Bu bölümde, f-Kenmotsu manifoldları ve bu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir. Ayrıca bunlarla ilgili temel tanım ve kavramlar verilerek manifold üzerinde bazı eğrilik şartları ispatlanmıştır. Daha sonra f-Kenmotsu manifoldunda bir örnek incelenmiştir.

4.1 f-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda f-Kenmotsu manifoldları ile ilgili bazı tanımlar verilmiş ve birtakım sonuçlar ile teoremler incelenmiştir. Bunun yanı sıra f-Kenmotsu manifoldlarında eğrilik tensörleri verilmiştir.

Tanım 4.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu türevlenebilir (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısına sahip hemen hemen değme manifoldu olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$, $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $df \wedge \eta = 0$ olmak üzere

$$(\nabla_X \phi)Y = f\left(g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\phi X\right) \tag{4.1}$$

şartını sağlayan (M,ϕ,ξ,η,g) yapısı f-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Calin ve Crasmareanu, 2010).

Tanım 4.1.2. $f = \alpha =$sabit ve sıfırdan farklı ise manifold $\alpha-$Kenmotsu olarak adlandırılır. $f = 1$ olması halinde manifold $1-$Kenmotsu bir başka deyişle Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Calin and Crasmareanu, 2010).

Tanım 4.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifold olmak üzere $f = 0$ özel durumunda manifold kosimplektik olarak adlandırılır (Yıldız, vd., 2013).

Tanım 4.1.4. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifold ve $f^{'} = \xi f$ olmak üzere

$$f^2 + f^{'} \neq 0$$

olduğunda manifold regüler olarak adlandırılır (Yıldız, vd., 2013).

Yardımcı Teorem 4.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifoldunda

$$\nabla_X \xi = f\,(X - \eta\,(X)\,\xi) \tag{4.2}$$

olur (Calin ve Crasmareanu, 2010).

Yardımcı Teorem 4.1.2. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu ve η 1-form olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \eta)\,Y = fg\,(\phi X, \phi Y) \tag{4.3}$$

şeklinde yazılır (Yıldız, vd., 2013).

Yardımcı Teorem 4.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu, η 1-form ve d diferensiyel operatör olsun. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$df \wedge \eta = 0 \implies df = f'\eta \text{ ve } X\,(f) = f'\eta\,(X) \tag{4.4}$$

sonucu ortaya çıkar (Olszak ve Rosca, 1991).

Yardımcı Teorem 4.1.4. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$R\,(X,Y)\,\xi = -\left(f^2 + f'\right)[\eta\,(Y)\,X - \eta\,(X)\,Y] \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir (Calin ve Crasmareanu, 2010).

Yardımcı Teorem 4.1.5. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu ve ξ M manifoldunda karakteristik vektör alanı olsun. Her $X \in \chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü

$$S\,(X,\xi) = -2\left(f^2 + f'\right)\eta\,(X) \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlar (Yıldız, vd., 2013).

Sonuç 4.1.1. Yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen (4.6) denkleminde $X = \xi$ değişikliği yapılırsa (2.18) ifadesi yardımıyla

$$S(\xi,\xi) = -2\left(f^2 + f'\right) \tag{4.7}$$

bulunur (Calin ve Crasmareanu, 2010).

Yardımcı Teorem 4.1.6. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldunda ξ karakteristik vektör alanı olmak üzere Q Ricci operatörü

$$Q\xi = -2\left(f^2 + f'\right)\xi \tag{4.8}$$

dır (Calin ve Crasmareanu, 2010).

Yardımcı Teorem 4.1.7. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu ve r skalar eğrilik olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $S(X,Y)$ Ricci eğrilik tensörü

$$S(X,Y) = \left(\frac{r}{2} + f^2 + f'\right) g(X,Y) - \left(\frac{r}{2} + 3f^2 + 3f'\right) \eta(X)\eta(Y) \tag{4.9}$$

ifadesine eşittir (Yıldız, vd., 2013).

Yardımcı Teorem 4.1.8. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için QX Ricci operatörü

$$QX = (\frac{r}{2} + f^2 + f^{'})X - (\frac{r}{2} + 3f^2 + 3f^{'})\eta(X)\xi \tag{4.10}$$

şeklinde hesaplanır (Yıldız, vd., 2013).

Yardımcı Teorem 4.1.9. M bir 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. Her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için $R(X,Y)Z$ Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z \;&=\; (\frac{r}{2} + 2f^2 + 2f^{'})(X\Lambda Y)Z \\ &\quad -(\frac{r}{2} + 3f^2 + 3f^{'})\{\eta(X)(\xi\Lambda Y)Z + \eta(Y)(X\Lambda\xi)Z\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde ifade edilir (Yıldız, vd., 2013).

4.2 Ricci-semisimetrik 3-boyutlu f-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldlarının Ricci-semisimetrik olma koşulları incelenmiş ve bu koşullar altında aynı zamanda Einstein manifold oldukları gösterilmiştir.

Tanım 4.2.1. M bir f-Kenmotsu manifoldu olsun. $R(X,Y)$ M üzerinde herhangi iki X,Y tanjant vektörünün türevi, S de M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere eğer

$$R(X,Y).S = 0 \tag{4.12}$$

şartı sağlanırsa M f-Kenmotsu manifoldu Ricci-semisimetrik olarak adlandırılır ve

$$S(Y,V) = -2\left(f^2 + f'\right) g(Y,V) \tag{4.13}$$

dir (Yıldız, vd., 2013). Buna göre aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 4.3.1. 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifold M eğer Ricci semi-simetrik ve regüler ise bir Einstein manifolddur (Yıldız, vd., 2013).

4.3 f-Kenmotsu Manifoldunda Ricci Solitonlar

Bu kısımda 3-boyutlu f-Kenmotsu manifoldlarında Ricci solitonlar incelenmiş ve λ sabit değerinin f fonksiyonu cinsinden ifadesi hesaplanmıştır. Ayrıca λ sabitinin alacağı değere göre f-Kenmotsu manifoldunun Einstein manifold olma durumu verilmiştir.

Sonuç 4.3.1. 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldu M ayrıca $\mu-$Einstein manifolddur (Yıldız, vd., 2013).

Teorem 4.3.1. 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldunda V, ξ karakteristik vektör alanı ile lineer ise V, ξ nin bir sabit katı, g bir $\mu-$Einstein manifold ve $\lambda = 2\left(f^2 + f'\right)$ koşulu sağlandığı takdirde Ricci soliton genişleyendir (Yıldız, vd., 2013).

4.4 Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu f-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldlar ile ilgili bazı tanım ve teoremler incelenmiştir.

Tanım 5.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifold olmak üzere eğer $f = 0$ özel durumunda ise manifold kosimplektik olarak adlandırılır (Demirli, 2014).

Tanım 5.1.2. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifold ve $f' = \xi f$ olmak üzere

$$f^2 + f + 2f' \neq 0$$

olduğunda manifold regüler olarak adlandırılır (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. ξ karakteristik vektör alanı için

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = f\left(2X - \eta\left(X\right)\xi\right) \tag{4.14}$$

olur (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.2. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu, $\phi - (1,1)$ tipinde tensör alanı ve η 1-form olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \eta\right) Y = fg\left(\phi X, \phi Y\right) \tag{4.15}$$

yazılır (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.3. M bir $(2n+1)$-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu, η 1-form ve d diferensiyel operatör olsun. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$df \wedge \eta = 0 \implies df = f' \text{ ve } X\left(f\right) = f'\eta\left(X\right) \tag{4.16}$$

sonucu ortaya çıkar (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.4. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü

$$R\left(X,Y\right)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)\left(\eta\left(Y\right)X - \eta\left(X\right)Y\right) \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilir.

(4.17) ifadesinde $X = \xi$ değişikliği yapılırsa

$$\widetilde{R}\left(\xi,Y\right)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)\left(\eta\left(Y\right)\xi - Y\right) \tag{4.18}$$

bulunur. Ayrıca (4.17) ifadesinde $Y = \xi$ değişikliği yapılırsa

$$\widetilde{R}\left(X,\xi\right)\xi = -\left(f^2 + f + 2f'\right)\left(X - \eta\left(X\right)\xi\right) \tag{4.19}$$

olur (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.5. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda $\widetilde{S}$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,\xi) = -2\left(f^2+f+2f'\right)\eta(X) \text{ ve } \widetilde{S}(\xi,\xi) = -2\left(f^2+f+2f'\right) \tag{4.20}$$

şeklinde tanımlanır (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.6. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldunda $\widetilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}\xi = -2\left(f^2+f+2f'\right)\xi \tag{4.21}$$

şeklinde ifade edilir (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.7. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu ve r skalar eğrilik tensörü olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $\widetilde{S}(X,Y)$ Ricci eğrilik tensörü

$$\widetilde{S}(X,Y) = (\frac{r}{2}+f^2+f+2f')g(X,Y) - (\frac{r}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\eta(Y) \tag{4.22}$$

olarak verilir (Demirli, 2014).

Yardımcı Teorem 5.1.8. M bir 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu olsun Her $X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $\widetilde{Q}X$ Ricci operatörü

$$\widetilde{Q}X = (\frac{r}{2}+f^2+f^{'})X - (\frac{r}{2}+3f^2+3f^{'})\eta(Y)\xi \tag{4.23}$$

şeklinde hesaplanır (Demirli, 2014).

İspat (4.22) ifadesi metriğin lineerlik özelliği kullanılarak

$$\widetilde{S}(X,Y) = g\left((\frac{r}{2}+f^2+f+2f')X - (\frac{r}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi, Y\right) \tag{4.24}$$

biçiminde yazılır. (4.24) ve (2.9) ifadeleri yardımıyla

$$g\left(\widetilde{Q}X,Y\right) - g\left((\frac{r}{2}+f^2+f+2f')X - (\frac{r}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi, Y\right) = 0 \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) ifadesi metriğin lineerlik özelliğinden

$$g\left(\widetilde{Q}X - [(\frac{r}{2}+f^2+f+2f')X - (\frac{r}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi], Y\right) = 0 \tag{4.26}$$

şeklinde yazılır. (4.26) eşitliğinde

$$Y \neq 0$$

olduğundan

$$\widetilde{Q}X-[(\frac{r}{2}+f^2+f+2f')X-(\frac{r}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi]=0 \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) eşitliği düzenlenirse

$$\widetilde{Q}X=(\frac{r}{2}+f^2+f+2f')X-(\frac{r}{2}+3f^2+3f+6f')\eta(X)\xi$$

elde edilir.

3-boyutlu Semi-simetrik Metrik Olmayan f-Kenmotsu Manifoldu için Bir Örnek (Yıldız, vd., 2013)**.**

(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ için standart koordinatlar olmak üzere

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z\neq 0\right\}$$

$3-$boyutlu semi-simetrik metrik olmayan $f-$Kenmotsu manifoldunu düşünelim. M manifoldu üzerinde

$$e_1=z^2\frac{\partial}{\partial x},\ e_2=z^2\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.28}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları her noktada birbirinden lineer bağımsızdır. g Riemann metriği

$$\begin{aligned} g(e_1,e_3) &= g(e_2,e_3)=g(e_1,e_2)=0 \\ g(e_1,e_1) &= g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1 \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall Z\in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(Z)=g(Z,e_3)$$

biçimindedir. ϕ-$(1,1)$ tensör alanı

$$\phi(e_1)=-e_2,\ \phi(e_2)=e_1,\ \phi(e_3)=0 \tag{4.29}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (2.37) ve (2.38) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 = \frac{2}{z}e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 = 0, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_1 = 0, \\ \widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 = 0, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 = \frac{2}{z}e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_2 = 0, \\ \widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 = -\frac{2}{z}e_1+e_1, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 = -\frac{2}{z}e_2+e_2, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_3 = e_3 \end{array} \tag{4.30}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.6) eşitliğinde (5.244) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\widetilde{R}(e_1,e_3)e_3 = (1-\frac{6}{z^2})e_1, \qquad \widetilde{R}(e_2,e_1)e_1 = (\frac{2}{z}-\frac{4}{z^2})e_2, \\ &\widetilde{R}(e_1,e_2)e_2 = (-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z})e_1, \qquad \widetilde{R}(e_2,e_3)e_3 = (1-\frac{6}{z^2})e_2, \\ &\widetilde{R}(e_1,e_2)e_3 = 0, \;\; \widetilde{R}(e_1,e_3)e_2 = 0, \;\; \widetilde{R}(e_2,e_3)e_1 = 0. \\ &\widetilde{R}(e_3,e_1)e_1 = (\frac{2}{z}-\frac{6}{z^2})e_3, \qquad \widetilde{R}(e_3,e_2)e_2 = (\frac{2}{z}-\frac{6}{z^2})e_3, \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $S(e_i,e_j)=0$ özelliğinden faydalanarak (2.8) ifadesinde (5.244) ve (5.253) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(e_1,e_1) &= -\frac{10}{z^2}+\frac{2}{z}+1, \\ \widetilde{S}(e_2,e_2) &= -\frac{10}{z^2}+\frac{2}{z}+1 \\ \widetilde{S}(e_3,e_3) &= -\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

olur. (5.253) ve (5.257) ifadesi (2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$\widetilde{P}(e_1,e_2)e_3 = 0, \;\; \widetilde{P}(e_1,e_3)e_3 = -\frac{2}{z}e_1, \;\; \widetilde{P}(e_2,e_3)e_3 = -\frac{2}{z}e_2. \tag{4.33}$$

bulunur (Demirli, 2014).

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki sonuç ifade edilir.

Sonuç 5.1.1. M, semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu 3-boyutlu $f-$Kenmotsu manifoldu genellikle $\xi-$projektif flat değildir (Demirli, 2014).

4.5 Ricci-semisimetrik 3-boyutlu Metrik Olmayan Koneksiyonlu f-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda Ricci-semisimetrik metrik olmayan koneksiyonlu 3-boyutlu f-Kenmotsu Manifoldları incelenmiş ve bu koşullar altında aynı zamanda Einstein manifold oldukları gösterilmiştir.

M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu f-Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{R}(X,Y)$ M üzerinde herhangi iki X,Y tanjant vektörünün türevi, $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere eğer

$$\widetilde{R}(X,Y).\widetilde{S}=0 \tag{4.34}$$

şartı sağlanırsa M semi-simetrik metrik olmayan f-Kenmotsu manifoldu Ricci-semisimetrik olarak adlandırılır. (4.34) ifadesi

$$\widetilde{S}(\widetilde{R}(X,Y)U,V)+\widetilde{S}(U,\widetilde{R}(X,Y)V)=0 \tag{4.35}$$

şeklinde yazılır. (4.35) eşitliğinde $X=U=\xi$ değişikliği gerçekleştirilirse

$$\widetilde{S}(\widetilde{R}(\xi,Y)\xi,V)+\widetilde{S}(\xi,\widetilde{R}(\xi,Y)V)=0 \tag{4.36}$$

olur. (4.36) denkleminde (4.18) ve (4.19) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \left(f^2+f+2f'\right)\left[\eta(Y)\widetilde{S}(\xi,V)-\widetilde{S}(Y,V)\right] \\ &\quad+\left(f^2+f+2f'\right)\left[g(Y,V)\widetilde{S}(\xi,\xi)-\eta(V)\widetilde{S}(\xi,Y)\right] \end{aligned} \tag{4.37}$$

olur. (4.20) eşitliği (4.37) ifadesinde yerine konulursa

$$\widetilde{S}(Y,V)=-2\left(f^2+f+2f'\right)g(Y,V) \tag{4.38}$$

bulunur (Demirli, 2014).

Buna göre Tanım 1.2.3., (2.10) ifadesi ve elde edilen bu hesaplar yardımıyla şu teorem ifade edilir.

Teorem 5.2.1. M, 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldu eğer Ricci semi-simetrik ve düzenli (regular) ise bir Einstein manifolddur (Demirli, 2014).

4.6 Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu f-Kenmotsu Manifoldunda Ricci Solitonlar

Bu kısımda 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan f-Kenmotsu manifoldlarında Ricci solitonlar incelenmiş ve λ sabit değerinin f fonksiyonu cinsinden ifadesi hesaplanmıştır. Ayrıca λ sabitinin alacağı değere göre f-Kenmotsu manifoldunun Einstein manifold olma durumu verilmiştir.

Herhangi bir b fonksiyonu için (2.36) eşitliğinde $V=b\xi$ alınırsa

$$\left(L_{b\xi}g+2\widetilde{S}+2\lambda g\right)(X,Y)=0$$

veya

$$L_{b\xi}(g(X,Y)) + 2\widetilde{S}(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) = 0 \tag{4.39}$$

olur. (4.39) ifadesi Lie türev tanımı kullanılarak

$$g\left(\widetilde{\nabla}_X b\xi, Y\right) + g\left(X, \widetilde{\nabla}_Y b\xi\right) + 2\widetilde{S}(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) = 0 \tag{4.40}$$

yazılır. (4.40) eşitliği metriğin lineerlik özelliği ve koneksiyon gereği

$$\begin{aligned} 0 &= bg\left(\widetilde{\nabla}_X \xi, Y\right) + (Xb)\eta(Y) + bg\left(X, \widetilde{\nabla}_Y \xi\right) \\ &\quad + (Yb)\eta(X) + 2\widetilde{S}(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) \end{aligned} \tag{4.41}$$

şeklinde ifade edilir. (4.14) ifadesi (4.41) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= bg(f\{2X - \eta(X)\xi\}, Y) + (Xb)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) \\ &\quad + bg(X, f\{2Y - \eta(Y)\xi\}) + 2\widetilde{S}(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) \end{aligned} \tag{4.42}$$

bulunur. (4.42) eşitliği metriğin lineerlik özelliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= 4bfg(X,Y) - 2fb\eta(X)\eta(Y) + (Xb)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) \\ &\quad + 2\widetilde{S}(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) \end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.43) ifadesine $Y = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 4bfg(X,\xi) - 2bf\eta(X)\eta(\xi) + (Xb)\eta(\xi) + (\xi b)\eta(X) \\ &\quad + 2\widetilde{S}(X,\xi) + 2\lambda g(X,\xi) \end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. (4.44) denkleminde (4.20) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 4bf\eta(X) - 2bf\eta(X) + (Xb) + (\xi b)\eta(X) \\ &\quad - 4\left(f^2 + f + 2f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) \end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur. (4.45) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= (Xb) + (\xi b)\eta(X) + 2bf\eta(X) \\ &\quad - 4\left(f^2 + f + 2f'\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) \end{aligned} \tag{4.46}$$

hesaplanır. (4.46) ifadesinde $X = \xi$ değişikliği uygulanırsa

$$\xi b = 2\left(f^2 + f + 2f'\right) - bf - \lambda \tag{4.47}$$

hesaplanır. ξb ifadesi (4.46) eşitliğinde yerine konulursa

$$(Xb) + \left(-2\left(f^2 + f + 2f'\right) + bf + \lambda\right)\eta(X) = 0 \tag{4.48}$$

bulunur. (2.2) ifadesi (4.48) denkleminde kullanılırsa

$$\left(db + \left(-2\left(f^2 + f + 2f'\right) + bf + \lambda\right)\eta\right)(X) = 0 \tag{4.49}$$

elde edilir. (4.49) ifadesi ve $X \neq 0$ olduğundan

$$db = \left[2\left(f^2+f+2f'\right)-bf-\lambda\right]\eta \tag{4.50}$$

olur. (4.50) eşitliğinin iki tarafına da d operatörü uygulanırsa

$$d^2b = \left[2\left(f^2+f+2f'\right)-bf-\lambda\right]d\eta \tag{4.51}$$

bulunur. (2.3) ifadesi (4.51) eşitliğinde kullanılırsa

$$\left[2\left(f^2+f+2f'\right)-bf-\lambda\right]d\eta = 0 \tag{4.52}$$

yazılır. (4.52) ifadesinde

$$d\eta \neq 0$$

olduğundan

$$\lambda = 2\left(f^2+f+2f'\right)-bf \tag{4.53}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.53) eşitliği (4.50) ifadesinde kullanılırsa $db = 0$ bulunur. Bu durumda b sabit değerli bir fonksiyondur. b fonksiyonunun sabit olma özelliği (4.43) denkleminde kullanılırsa

$$4bfg(X,Y)-2fb\eta(X)\eta(Y)+2\widetilde{S}(X,Y)+2\lambda g(X,Y) = 0 \tag{4.54}$$

bulunur. (4.54) eşitliğinde $\widetilde{S}(X,Y)$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$2\widetilde{S}(X,Y) = -4bfg(X,Y)+2bf\eta(X)\eta(Y)-2\lambda g(X,Y) = 0 \tag{4.55}$$

olur. (4.39) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{S}(X,Y) = -(2bf+\lambda)g(X,Y)+bf\eta(X)\eta(Y) \tag{4.56}$$

olarak hesaplanır (Demirli, 2014).

Buna göre Tanım 1.2.3., (2.10) ifadesi ve elde edilen bu hesaplar yardımıyla şu sonuç ve teorem ifade edilir.

Sonuç 5.3.1. 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldu M aynı zamanda $\mu-$Einstein manifolddur (Demirli, 2014).

Teorem 5.3.1. 3-boyutlu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu $f-$Kenmotsu manifoldunda herhangi bir $b \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun. V, ξ karakteristik vektör alanı ile lineer ise V, ξ nin bir sabit katı, g bir $\mu-$Einstein manifold ve $\lambda = 2\left(f^2+f+2f'\right)-bf$ koşulu sağlandığı takdirde Ricci soliton genişleyendir (Demirli, 2014).

5. SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONEKSİYONLU KENMOTSU MANİFOLD VE RICCI SOLİTONLAR

Blair (2002) değme metrik manifoldların eğrilikleri hakkında bilgi vermiştir. Duggal ve Bayram (2010) çalışmalarında semi-simetrik manifold, Ricci semi-simetrik manifold ve simetri tiplerinin eğrilik şartlarını ele almışlardır. Bu bölümde, $\widetilde{B}$ C-Bochner eğrilik tensörü, $\widetilde{S}$ Ricci tensör, $\widetilde{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü, $\widetilde{P}$ Weyl-projektif eğrilik tensörü, $\widetilde{H}$ konharmonik eğrilik tensörü, $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\overline{\widetilde{P}}$ pseudo projektif eğrilik tensörleri olmak üzere bazı eğrilik şartlarını sağlayan semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldlarında Ricci solitonlar incelenmiştir. Bu Ricci solitonların λ reel sayısına bağlı olarak daralan, genişleyen veya değişmeyen oldukları gösterilmiştir.

5.1 $\widetilde{B}(\xi,X).\widetilde{S}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{B}(X,Y)$ M üzerinde C-Bochner eğrilik tensörü ve $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere

$$\widetilde{B}(\xi,X).\widetilde{S}=0 \tag{5.1}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

(5.1) ifadesinin her iki tarafının Y ve Z vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\tilde{S}(\tilde{B}(\xi,X)Y,Z)+\tilde{S}(Y,\tilde{B}(\xi,X)Z)=0 \tag{5.2}$$

bulunur. (2.45) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} &-(\lambda+2)g(\tilde{B}(\xi,X)Y,Z)+\eta(\tilde{B}(\xi,X)Y)\eta(Z)\\ &\quad-(\lambda+2)g(Y,\tilde{B}(\xi,X)Z)+\eta(Y)\eta(\tilde{B}(\xi,X)Z)=0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

veya

$$\eta(Z)\eta(\tilde{B}(\xi,X)Y)+\eta(Y)\eta(\tilde{B}(\xi,X)Z)=(\lambda+2)[g(\tilde{B}(\xi,X)Y,Z)+g(Y,\tilde{B}(\xi,X)Z)] \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) de yer alan terimleri tek tek hesaplayalım. (2.51) tanımında $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ alınarak hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}(\xi,X)Y \;=\; & \tilde{R}(\xi,X)Y+\frac{1}{n+3}[g(\xi,Y)\tilde{Q}X-\tilde{S}(X,Y)\xi-g(X,Y)\tilde{Q}\xi+\tilde{S}(\xi,Y)X \\
& +g(\tilde{\phi}\xi,Y)\tilde{Q}\tilde{\phi}X-\tilde{S}(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{\phi}\xi-g(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{Q}\tilde{\phi}\xi+\tilde{S}(\tilde{\phi}\xi,Y)\tilde{\phi}X \\
& +2\tilde{S}(\tilde{\phi}\xi,X)\tilde{\phi}Y+2g(\tilde{\phi}\xi,X)\tilde{Q}\tilde{\phi}Y+\eta(X)\eta(Y)\tilde{Q}\xi-\eta(X)\tilde{S}(\xi,Y)\xi \\
& +\eta(\xi)\tilde{S}(X,Y)\xi-\eta(\xi)\eta(Y)\tilde{Q}X]-\frac{D+n-1}{n+3}[g(\tilde{\phi}\xi,Y)\tilde{\phi}X \\
& -g(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{\phi}\xi+2g(\tilde{\phi}\xi,X)\tilde{\phi}Y]+\frac{D}{n+3}[\eta(X)g(\xi,Y)\xi-\eta(X)\eta(Y)\xi \\
& +\eta(\xi)\eta(Y)X-\eta(\xi)g(X,Y)\xi]-\frac{D-4}{n+3}[g(\xi,Y)X-g(X,Y)\xi]
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

bulunur. (5.5) ifadesinde (2.41) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}(\xi,X)Y \;=\; & 2\{g(\xi,Y)X-g(X,Y)\xi+\eta(X)\eta(Y)\xi-\eta(\xi)\eta(Y)X\} \\
& +\frac{1}{n+3}[g(\xi,Y)\tilde{Q}X-\tilde{S}(X,Y)\xi-g(X,Y)\tilde{Q}\xi+\tilde{S}(\xi,Y)X \\
& +g(\tilde{\phi}\xi,Y)\tilde{Q}\tilde{\phi}X-\tilde{S}(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{\phi}\xi-g(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{Q}\tilde{\phi}\xi+\tilde{S}(\tilde{\phi}\xi,Y)\tilde{\phi}X \\
& +2\tilde{S}(\tilde{\phi}\xi,X)\tilde{\phi}Y+2g(\tilde{\phi}\xi,X)\tilde{Q}\tilde{\phi}Y+\eta(X)\eta(Y)\tilde{Q}\xi-\eta(X)\tilde{S}(\xi,Y)\xi \\
& +\eta(\xi)\tilde{S}(X,Y)\xi-\eta(\xi)\eta(Y)\tilde{Q}X]-\frac{D+n-1}{n+3}[g(\tilde{\phi}\xi,Y)\tilde{\phi}X \\
& -g(\tilde{\phi}X,Y)\tilde{\phi}\xi+2g(\tilde{\phi}\xi,X)\tilde{\phi}Y]+\frac{D}{n+3}[\eta(X)g(\xi,Y)\xi-\eta(X)\eta(Y)\xi \\
& +\eta(\xi)\eta(Y)X-\eta(\xi)g(X,Y)\xi]-\frac{D-4}{n+3}[g(\xi,Y)X-g(X,Y)\xi]
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

elde edilir. (2.18), (2.19), (2.20), (2.42), (2.43), (2.45), (2.47) denklemlerindeki ifadeler (5.6) ile tanımlı eşitlikte yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\xi,X)Y &= 2\{\eta(Y)X-g(X,Y)\xi+\eta(X)\eta(Y)\xi-\eta(Y)X\}\\ &+\frac{1}{n+3}[-(\lambda+2)\eta(Y)X+\eta(X)\eta(Y)\xi+(\lambda+2)g(X,Y)\xi\\ &-\eta(X)\eta(Y)\xi+(\lambda+1)g(X,Y)\xi-(\lambda+1)\eta(Y)X\\ &-(\lambda+1)\eta(X)\eta(Y)\xi+(\lambda+1)\eta(X)\eta(Y)\xi-(\lambda+2)g(X,Y)\xi\\ &+\eta(X)\eta(Y)\xi+(\lambda+2)\eta(Y)X-\eta(X)\eta(Y)\xi\\ &+\frac{D}{n+3}[\eta(X)\eta(Y)\xi-\eta(X)\eta(Y)\xi+\eta(Y)X\\ &-g(X,Y)\xi]-\frac{D-4}{n+3}[\eta(Y)X-g(X,Y)\xi]\end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.7) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\tilde{B}(\xi,X)Y= [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]g(X,Y)\xi+2\eta(X)\eta(Y)\xi-[\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]\eta(Y)X \tag{5.8}$$

bulunur. (2.18) ve (2.19) ifadeleri de kullanılarak (5.8) eşitliğinin her iki tarafına Z ile iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}g(\tilde{B}(\xi,X)Y,Z) &= [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]g(X,Y)\eta(Z)+2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\\ &+[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}]\eta(Y)g(X,Z)\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. (5.8) eşitliğinin her iki tarafının η altındaki görüntüsü alınır ve (2.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\eta(\tilde{B}(\xi,X)Y) &= [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]g(X,Y)+2\eta(X)\eta(Y)\\ &+[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}]\eta(Y)\eta(X)\\ &= [2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}][\eta(X)\eta(Y)-g(X,Y)]\end{aligned} \tag{5.10}$$

bulunur. (5.8) eşitliğinde $Y=Z$ değişimi yapılırsa

$$\tilde{B}(\xi,X)Z = [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]g(X,Z)\xi+2\eta(X)\eta(Z)\xi-[\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]\eta(Z)X \tag{5.11}$$

bulunur. (5.11) eşitliğinin her iki tarafına Y ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}g(Y,\tilde{B}(\xi,X)Z) &= [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]\eta(Y)g(X,Z)+2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\\ &+[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}]\eta(Z)g(X,Y)\end{aligned} \tag{5.12}$$

olur. (5.11) eşitliğinin her iki tarafının η altındaki görüntüsü alınır ve (2.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\eta(\tilde{B}(\xi,X)Z) &= [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]g(X,Z)+2\eta(X)\eta(Z)\\ &\quad+[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}]\eta(Z)\eta(X) \qquad (5.13)\\ &= [2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}][\eta(X)\eta(Z)-g(X,Z)]\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan değerleri (5.4) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&[2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}][\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-g(X,Y)\eta(Z)]\\ &+[2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}][\eta(X)\eta(Z)\eta(Y)-g(X,Z)\eta(Y)]\\ &= (\lambda+2)[[-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]g(X,Y)\eta(Z)+2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \qquad (5.14)\\ &+[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}]\eta(Y)g(X,Z)\ [-2+\frac{\lambda}{n+3}-\frac{3}{n+3}]\eta(Y)g(X,Z)\\ &+2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)+[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}]\eta(Z)g(X,Y)\end{aligned}$$

bulunur. (5.14) ifadesinde benzer terimlerin katsayıları toplanırsa

$$\begin{aligned}&[2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2(\lambda+2)]2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\\ &-[2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2(\lambda+2)]\eta(Z)g(X,Y) \qquad (5.15)\\ &-[2-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2(\lambda+2)]\eta(Y)g(X,Z)=0\end{aligned}$$

elde edilir. (5.15) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2)][2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)g(X,Y)-\eta(Y)g(X,Z)]=0 \qquad (5.16)$$

bulunur. (5.16) ifadesinde $X=Y=\xi$ alınarak, (2.18) ve (2.20) eşitliği kullanılırsa

$$[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2)][2\eta(\xi)\eta(\xi)\eta(Z)-\eta(Z)g(\xi,\xi)-\eta(\xi)g(\xi,Z)]=0$$

ve buradan

$$[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2)][2\eta(Z)-\eta(Z)-\eta(Z)]=0 \qquad (5.17)$$

olur. Bu durumda λ değeri bulunamaz. (5.16) ifadesinde $X=Y=e_i$ olmak üzere $i=1,2,\ldots,n$ için toplam alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n}\{[-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2)][2\eta(e_i)\eta(e_i)\eta(Z)-\eta(Z)g(e_i,e_i)-\eta(e_i)g(e_i,Z)]\}=0$$

elde edilir. Burada (2.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2)][2\eta(Z)-n\eta(Z)-\eta(Z)] \\ &= [-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2)](1-n)\eta(Z) \end{aligned} \tag{5.18}$$

bulunur. $\eta(Z)\neq 0$ olmak üzere (5.18) denklemi $n=1$ için sağlanır ya da

$$-\frac{\lambda}{n+3}+\frac{3}{n+3}-2\lambda-2=0 \tag{5.19}$$

elde edilir. Uygun işlem yapılırsa

$$\lambda(-\frac{1}{n+3}-2)=2-\frac{3}{n+3} \tag{5.20}$$

olur. (5.20) ifadesi düzenlenirse

$$\lambda=\frac{2n+3}{-2n-7} \tag{5.21}$$

(5.21) ifadesinde $n\geq 2$ için $\lambda<0$ olduğundan Ricci Soliton daralandır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.1.1. *M* bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{B}(X,Y)$ M üzerinde C-Bochner eğrilik tensörü ve $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere

$$\widetilde{B}(\xi,X).\widetilde{S}=0$$

şartı sağlanır ise $n\geq 2$ için Ricci soliton daralandır.

Kenmotsu manifoldu için (5.1) şartını sağlayan Ricci solitonun genişleyen olduğu gösterilmiştir (Bagewadi, vd., 2013). Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.1. *M* üzerinde C-Bochner eğrilik tensörü ve Ricci tensörü için (5.1) şartını sağlayan Ricci soliton Kenmotsu manifoldunda genişleyen iken semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda daralandır.

5.2 $\widetilde{C}(\xi,X).\widetilde{S}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{C}(X,Y)$ M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü ve $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere

$$\widetilde{C}(\xi,X).\widetilde{S}=0 \tag{5.22}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

(5.22) ifadesinin her iki tarafının Y,Z vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\tilde{S}(\widetilde{C}(\xi,X)Y,Z)+\tilde{S}(Y,\widetilde{C}(\xi,X)Z) \quad = \quad 0 \tag{5.23}$$

elde edilir. (2.45) eşitliğindeki $\widetilde{S}$ Ricci tensör tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &-(\lambda+2)g(\widetilde{C}(\xi,X)Y,Z)+\eta(\widetilde{C}(\xi,X)Y)\eta(Z) \\ &\quad -(\lambda+2)g(Y,\widetilde{C}(\xi,X)Z)+\eta(\widetilde{C}(\xi,X)Z)\eta(Y) \quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

olur. (5.24) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &\eta(\widetilde{C}(\xi,X)Y)\eta(Z)+\eta(\widetilde{C}(\xi,X)Z)\eta(Y) \\ &\quad =(\lambda+2)[g(\widetilde{C}(\xi,X)Y,Z)+g(Y,\widetilde{C}(\xi,X)Z)] \end{aligned} \tag{5.25}$$

bulunur. (2.50) tanımını kullanarak her iki tarafın η altında görüntüsünü alınırsa,

$$\begin{aligned} \eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) \quad = \quad & \eta(C(X,Y)Z)+\eta\{\{\frac{(n+1)(n+2)}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)-a \\ & -2(n-1)b\}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\} \\ & +2(n-1)b\{g(Y,Z)\eta(X)\xi-g(X,Z)\eta(Y)\xi\} \\ & +2\{a+2(n-1)b\}\{\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y\}\} \end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir. (2.18) tanımı ve (3.9) ifadesi kullanılarak (5.26) düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) \quad = \quad & -[a+b(2\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)] \\ & +2\{a+2(n-1)b\}\{\eta(Y)\eta(Z)\eta(X)-\eta(X)\eta(Z)\eta(Y)\}\} \\ & +2(n-1)b\{g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)\} \\ & +\{\frac{(n+1)(n+2)}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)-a-2(n-1)b\}\{g(Y,Z)\eta(X) \\ & -g(X,Z)\eta(Y)\} \end{aligned} \tag{5.27}$$

bulunur. (5.27) ifadesinde benzer terimlerin katsayıları toplanırsa

$$\begin{aligned} \eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) \quad = \quad & -[b(2\lambda+1)+2a+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r}{n}-\frac{(n+1)(n+2)}{n})][g(Y,Z)\eta(X) \\ & -g(X,Z)\eta(Y)] \end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir. (5.28) eşitliğinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ değişikliği yapılırsa

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{C}(\xi,X)Y) &= -[b(2\lambda+1)+2a+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r}{n}-\frac{(n+1)(n+2)}{n})][g(X,Y)\\ &-\eta(Y)\eta(X)]\end{aligned} \tag{5.29}$$

olur. (5.29) ifadesinde $Y=Z$ değişikliği yapılırsa

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{C}(\xi,X)Z) &= -[b(2\lambda+1)+2a+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r}{n}-\frac{(n+1)(n+2)}{n})][g(X,Z)\\ &-\eta(Z)\eta(X)]\end{aligned} \tag{5.30}$$

bulunur. (2.14) eşitliğinde (2.13), (2.10) ve (2.31) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}C(X,Y)Z &= a[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X]+b[\eta(Y)\eta(Z)X\text{-}(\lambda+1)g(Y,Z)X\text{-}\eta(X)\eta(Z)Y\\ &+(\lambda+1)g(X,Z)Y+g(Y,Z)\eta(X)\xi\text{-}(\lambda+1)g(Y,Z)X\text{-}g(X,Z)\eta(Y)\xi\\ &+(\lambda+1)g(X,Z)Y]-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{5.31}$$

elde edilir. (5.31) ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}C(X,Y)Z &= [a+2b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(X,Z)Y-g(Y,Z)X]\\ &+b[\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y+g(Y,Z)\eta(X)\xi-g(X,Z)\eta(Y)\xi]\end{aligned} \tag{5.32}$$

olur. (2.50) eşitliğinde (5.32) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)Z &= [a+2b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+a+2(n-1)b]\\ &-\frac{(n+1)(n+2)}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][g(X,Z)Y-g(Y,Z)X\\ &+b(2n-1)[g(Y,Z)\eta(X)\xi-g(X,Z)\eta(Y)\xi]\\ &+[2a+b(4n-3)][\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y]\end{aligned} \tag{5.33}$$

elde edilir. (5.33) ifadesinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ alınırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(\xi,X)Y &= [2a\text{+}2b(\lambda+n)\text{+}(\frac{a}{n-1}\text{+}2b)(\frac{r-(n\text{+}1)(n\text{+}2)}{n})][\eta(Y)X\text{-}g(X,Y)\xi]\\ &+(2n\text{-}1)b[g(X,Y)\xi\text{-}\eta(Y)\eta(X)\xi]\text{+}[2a\text{+}b(4n\text{-}3)][\eta(X)\eta(Y)\xi\text{-}\eta(Y)X]\end{aligned} \tag{5.34}$$

bulunur. (5.34) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(\xi,X)Y &= [b(2\lambda-2n+3)+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]\eta(Y)X]\\ &+[-2a-b(2\lambda+1)-(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]g(X,Y)\xi\\ &+[2a+2b(n-1)]\eta(X)\eta(Y)\xi\end{aligned} \tag{5.35}$$

olur. (5.35) ifadesinin her iki tarafı Z ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(\widetilde{C}(\xi,X)Y,Z) &= [b(2\lambda-2n+3)+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]\eta(Y)g(X,Z)) \\ &\quad +[-2a-b(2\lambda+1)-(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]g(X,Y)\eta(Z) \\ &\quad +[2a+2b(n-1)]\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \tag{5.36}$$

elde edilir. (5.35) ifadesinde $Y=Z$ değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\xi,X)Z &= [b(2\lambda-2n+3)+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]\eta(Z)X \\ &\quad +[-2a-b(2\lambda+1)-(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]g(X,Z)\xi \\ &\quad +[2a+2b(n-1)]\eta(X)\eta(Z)\xi \end{aligned} \tag{5.37}$$

bulunur. (5.37) eşitliğinin her iki tarafı Y ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(Y,\widetilde{C}(\xi,X)Z) &= [b(2\lambda-2n+3)+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]\eta(Z)g(X,Y) \\ &\quad +[-2a-b(2\lambda+1)-(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})]\eta(Y)g(X,Z) \\ &\quad +[2a+2b(n-1)]\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \tag{5.38}$$

olur. (5.29), (5.30), (5.36) ve (5.38) ifadeleri (5.25) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &[b(2\lambda+1)+2a+(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})] \\ &\quad \times[2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)g(X,Y)-\eta(Y)g(X,Z)] \\ &\quad = [-b(2\lambda+1)-2a-(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})-2a(\lambda+2) \\ &\quad\quad +2b(1-n)(\lambda+2)][2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)g(X,Y)-\eta(Y)g(X,Z)] \end{aligned} \tag{5.39}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &[-2a(3+\lambda)+b(3-2n(\lambda+2))-(\frac{a}{n-1}+2b)(\frac{r-(n+1)(n+2)}{n})] \\ &\quad \times[2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)g(X,Y)-\eta(Y)g(X,Z)]=0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

bulunur. (5.40) ifadesinde $a+2b(n-1)=0$ alınırsa ve $X=Y=e_i$ olmak üzere $i=1,2,...,n$ için toplam alınırsa

$$[-2a(3+\lambda)+b(3-2n(\lambda+2))]\sum_{i=1}^{n}[2\eta(e_i)\eta(e_i)\eta(Z)-\eta(Z)g(e_i,e_i)-\eta(e_i)g(e_i,Z)]=0 \tag{5.41}$$

olur. (5.41) ifadesinde (2.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$[-2a(3+\lambda)+b(3-2n(\lambda+2))](1-n)\eta(Z)=0 \tag{5.42}$$

elde edilir. (5.42) ifadesinde $\eta(Z)\neq 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}&[4b(n-1)(3+\lambda)+b(3-2n(\lambda+2))](1-n)=0\\&\lambda(4b(n-1)-2nb)=-12b(n-1)-3b+4nb\end{aligned} \tag{5.43}$$

elde edilir. Burada $b\neq 0$ için

$$\lambda(4(n-1)-2n)=-12(n-1)-3+4n \tag{5.44}$$

bulunur.

$$\lambda \;=\frac{-8n+9}{2n-4} \tag{5.45}$$

(3.26) eşitliğine göre $n>2$ için $\lambda<0$ olduğundan Ricci Soliton daralandır

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.2.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{C}(X,Y)$ M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü, $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere

$$\widetilde{C}(\xi,X).\widetilde{S}=0 \tag{5.46}$$

şartı sağlanır ise $n>2$ için Ricci soliton daralandır.

Kenmotsu manifoldu için $a=\dfrac{n-2}{n-1}b$ olması durumunda (5.22) şartını sağlayan Ricci solitonun değişmeyen olduğu gösterilmiştir (Nagaraja ve Premalatha, 2012). Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.1. M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü ve Ricci tensörü için (5.22) şartını sağlayan Ricci soliton Kenmotsu manifoldunda değişmeyen iken semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda daralandır.

5.3 $\widetilde{P}(\xi,X).\widetilde{C}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{C}(X,Y)$ M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü ve $\widetilde{P}(X,Y)$ M üzerinde projektif eğrilik tensör alanı olmak üzere

$$\widetilde{P}(\xi,X).\widetilde{C}=0 \tag{5.47}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

(5.47) ifadesinin her iki tarafının Y,Z vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\widetilde{P}(\widetilde{C}(\xi,X)Y,Z)+\widetilde{P}(Y,\widetilde{C}(\xi,X)Z) \quad =0 \tag{5.48}$$

elde edilir. (2.16) ifadesi (5.48) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\widetilde{P}(\xi,X)\widetilde{C}(Y,Z)W-\widetilde{\widetilde{C}}(\widetilde{P}(\xi,X)Y,Z)W \\ &-\widetilde{C}(Y,\widetilde{P}(\xi,X)Z)W-\widetilde{C}(Y,Z)\widetilde{P}(\xi,X)W \quad =0 \end{aligned} \tag{5.49}$$

bulunur. (2.40) ve (2.45) ifadeleri (2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(X,Y)Z \quad = \quad & 2[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X+\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y] \\ & -\frac{1}{n-1}[-(\lambda+2)g(Y,Z)X+\eta(Y)\eta(Z)X \\ & +(\lambda+2)g(X,Z)Y-\eta(X)\eta(Z)Y] \end{aligned} \tag{5.50}$$

bulunur. (5.50) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(X,Y)Z \quad = \quad & [\frac{\lambda+2}{n-1}-2](g(Y,Z)X-g(X,Z)Y) \\ & +[\frac{1}{n-1}-2](\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X) \end{aligned} \tag{5.51}$$

olarak bulunur. (5.51) ifadesinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ alınırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\xi,X)Y \quad = \quad & [\frac{\lambda+2}{n-1}-2]g(X,Y)\xi-(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(Y)X \\ & +[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(Y)\xi \end{aligned} \tag{5.52}$$

ve (5.52) ifadesinde $Z=Y$ alınırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\xi,X)Z \quad = \quad & [\frac{\lambda+2}{n-1}-2]g(X,Z)\xi-(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(Z)X \\ & +[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(Z)\xi \end{aligned} \tag{5.53}$$

hesaplanır. Bulunan (5.51) ve (5.52) ifadeleri (5.49) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= [\frac{\lambda+2}{n-1}-2]g(X,\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi-(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)X \\
&\quad -\widetilde{C}([\frac{\lambda+2}{n-1}-2]g(X,Y)\xi-(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(Y)X+[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(Y)\xi,Z)W \\
&\quad -\widetilde{C}(Y,[\frac{\lambda+2}{n-1}-2]g(X,Z)\xi-(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(Z)X+[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(Z)\xi)W \\
&\quad -\widetilde{C}(Y,Z)([\frac{\lambda+2}{n-1}-2]g(X,W)\xi\text{-}(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(W)X+[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(W)\xi) \\
&\quad +[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi
\end{aligned} \tag{5.54}$$

elde edilir. M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü ile metrik gözönüne alınır, (5.54) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\frac{\lambda+2}{n-1}-2)g(X,\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi-(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)X \\
&\quad +[2-\frac{1}{n-1}]\eta(X)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi-(\frac{\lambda-2n+4}{n-1})g(X,Y)\widetilde{C}(\xi,Z)W \\
&\quad +(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(Y)\widetilde{C}(X,Z)W-(\frac{2n-3}{n-1})\eta(X)\eta(Y)\widetilde{C}(\xi,Z)W \\
&\quad -(\frac{\lambda-2n+4}{n-1})g(X,Z)\widetilde{C}(Y,\xi)W+(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(Z)\widetilde{C}(Y,X)W \\
&\quad -(\frac{2n-3}{n-1})\eta(X)\eta(Z)\widetilde{C}(Y,\xi)W-(\frac{\lambda-2n+4}{n-1})g(X,W)\widetilde{C}(Y,Z)\xi \\
&\quad +(\frac{\lambda+1}{n-1})\eta(W)\widetilde{C}(Y,Z)X-(\frac{2n-3}{n-1})\eta(X)\eta(Z)\widetilde{C}(Y,Z)\xi
\end{aligned} \tag{5.55}$$

bulunur. (5.55) ifadesi $(n-1)$ ile çarpılır ve ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda-2n+4)\widetilde{C}'(Y,Z,W,X)-(\lambda+1)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)\eta(X) \\
&\quad +(2n-3)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)\eta(X)-(\lambda-2n+4)g(X,Y)\eta(\widetilde{C}(\xi,Z)W) \\
&\quad +(\lambda+1)\eta(Y)\eta(\widetilde{C}(X,Z)W)-(2n-3)\eta(X)\eta(Y)\eta(\widetilde{C}(\xi,Z)W) \\
&\quad -(\lambda-2n+4)g(X,Z)\eta(\widetilde{C}(Y,\xi)W)+(\lambda+1)\eta(Z)\eta(\widetilde{C}(Y,X)W) \\
&\quad -(2n-3)\eta(X)\eta(Z)\eta(\widetilde{C}(Y,\xi)W)-(\lambda-2n+4)g(X,W)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)\xi) \\
&\quad +(\lambda+1)\eta(W)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)X)-(2n-3)\eta(X)\eta(Z)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)\xi)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

olur. (5.56) ifadesinde kullanılacak olan terimleri hesaplayalım. İlk olarak (2.40), (2.45) ve

(2.42) ifadeleri (2.49) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)Z = {} & 2a[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] \\ & + b[-(\lambda+2)g(Y,Z)X + \eta(Y)\eta(Z)X + (\lambda+2)g(X,Z)Y - \eta(X)\eta(Z)Y \\ & + \eta(X)g(Y,Z)\xi - (\lambda+2)g(Y,Z)X - \eta(Y)g(X,Z)\xi + (\lambda+2)g(X,Z)Y] \\ & - \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{5.57}$$

elde edilir. Benzer ifadelerin katsayıları toplanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)Z = {} & (2a+b)[\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] \\ & + b[\eta(X)g(Y,Z)\xi - \eta(Y)g(X,Z)\xi] \\ & + [-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) - 2a - 2\lambda b - 4b][g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{5.58}$$

bulunur. (5.58) ifadesinin η altındaki görüntüsü alınırsa

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) = {} & (2a+b)[\eta(Y)\eta(Z)\eta(X) - \eta(X)\eta(Z)\eta(Y)] \\ & + b[\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)] \\ & + [-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) - 2a - 2\lambda b - 4b][g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)]\end{aligned} \tag{5.59}$$

olur. Buradan

$$\eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X)] \tag{5.60}$$

bulunur. (5.60) eşitliğinde $Y = Z$ ve $Z = W$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(X,Z)W) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][g(X,W)\eta(Z) - g(Z,W)\eta(X)] \tag{5.61}$$

elde edilir. (5.61) eşitliğinde $X = Y$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][g(Y,W)\eta(Z) - g(Z,W)\eta(Y)] \tag{5.62}$$

bulunur. (5.62) ifadesinde $W = X$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,Z)X) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][g(Y,X)\eta(Z) - g(Z,X)\eta(Y)] \tag{5.63}$$

olur. (5.62) ifadesinde $Z = X$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,X)W) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][g(Y,W)\eta(X) - g(X,W)\eta(Y)] \tag{5.64}$$

elde edilir. (5.62) ifadesinde $Y = \xi$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(\xi,Z)W) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][\eta(W)\eta(Z) - g(Z,W)] \tag{5.65}$$

ve (5.62) ifadesinde $Z = \xi$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,\xi)W) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][g(Y,W) - \eta(W)\eta(Y)] \tag{5.66}$$

elde edilir. (5.63) ifadesinde $X = \xi$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,Z)\xi) = [b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a][\eta(Y)\eta(Z) - \eta(Z)\eta(Y)] = 0 \tag{5.67}$$

olur. O halde (5.56) ifadesinde

$$k = b(2\lambda+3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n-1} + 2b) + 2a \tag{5.68}$$

alınır ve (5.61), (5.62), (5.65), (5.66), (5.64), (5.63) ile (5.67) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - 2n + 4)\widetilde{C}'(Y,Z,W,X) + (\lambda - 2n + 4)kg(X,Y)g(Z,W) \\ &\quad -(\lambda - 2n + 4)kg(Y,W)g(X,Z) + (2n-3)kg(X,Y)\eta(Z)\eta(W) \\ &\quad -(2n-3)kg(X,Z)\eta(W)\eta(Y) \end{aligned} \tag{5.69}$$

elde edilir. (5.128) ifadesini hesaplamak için (5.58) ifadesinde $X = Y$, $Y = Z$, $Z = W$ değişikliği yapılır ve X ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} g(X,\widetilde{C}(Y,Z)W) &= (2a+b)[\eta(Z)\eta(W)g(X,Y) - \eta(Y)\eta(W)g(X,Z)] \\ &\quad +b[\eta(X)\eta(Y)g(Z,W) - \eta(X)\eta(Z)g(Y,W)] \\ &\quad -(k+b)[g(Z,W)g(X,Y) - g(Y,W)g(X,Z)] \end{aligned} \tag{5.70}$$

bulunur. (5.70) denkleminde (5.69) eşitliğini yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - 2n + 4)(2a+b)[\eta(Z)\eta(W)g(X,Y) - \eta(Y)\eta(W)g(X,Z)] \\ &\quad +(\lambda - 2n + 4)b[\eta(X)\eta(Y)g(Z,W) - \eta(X)\eta(Z)g(Y,W)] \\ &\quad -(\lambda - 2n + 4)(k+b)[g(Z,W)g(X,Y) - g(Y,W)g(X,Z)] \\ &\quad +(\lambda - 2n + 4)kg(X,Y)g(Z,W) - (\lambda - 2n + 4)kg(Y,W)g(X,Z) \\ &\quad +(2n-3)kg(X,Y)\eta(Z)\eta(W) - (2n-3)kg(X,Z)\eta(W)\eta(Y) \end{aligned} \tag{5.71}$$

elde edilir. Burada düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [(\lambda - 2n + 4)(2a+b) + (2n-3)k]\eta(Z)\eta(W)g(X,Y) \\ &\quad +[-(\lambda - 2n + 4)(2a+b) - (2n-3)k]\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) \\ &\quad +(\lambda - 2n + 4)b[\eta(X)\eta(Y)g(Z,W) - \eta(X)\eta(Z)g(Y,W)] \\ &\quad [-(\lambda - 2n + 4)(k+b) + (\lambda - 2n + 4)k]g(X,Y)g(Z,W) \\ &\quad +[(\lambda - 2n + 4)(k+b) - (\lambda - 2n + 4)k]g(X,Z)g(Y,W) \end{aligned} \tag{5.72}$$

olur. $X = Y = e_i$ için $i = 1, 2, ..., n$ toplam alınırsa ve (2.21) ile (2.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [(\lambda - 2n + 4)(2a + b) + (2n - 3)k]n\eta(Z)\eta(W) \\ &\quad + [-(\lambda - 2n + 4)(2a + b) - (2n - 3)k]\eta(W)\eta(Z) \\ &\quad + (\lambda - 2n + 4)b[g(Z, W) - \eta(Z)\eta(W)] \\ &\quad [-(\lambda - 2n + 4)(k + b) + (\lambda - 2n + 4)k]ng(Z, W) \\ &\quad + [(\lambda - 2n + 4)(k + b) - (\lambda - 2n + 4)k]g(Z, W) \end{aligned} \tag{5.73}$$

elde edilir. $Z = W = e_i$ için $i = 1, 2, ..., n$ toplam alınırsa ve (2.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - 2n + 4)(2a + b)n + (2n - 3)kn \\ &\quad -(\lambda - 2n + 4)(2a + b) - (2n - 3)k + (\lambda - 2n + 4)b(n - 1) \\ &\quad -(\lambda - 2n + 4)(k + b)n^2 + (\lambda - 2n + 4)kn^2 \\ &\quad +(\lambda - 2n + 4)(k + b)n - (\lambda - 2n + 4)kn \end{aligned} \tag{5.74}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\{(\lambda - 2n + 4)[2a - b(n - 2)] + (2n - 3)k\}(n - 1) \quad = 0 \tag{5.75}$$

elde edilir. $n \neq 1$ için $(n - 1)$ terimleri sadeleştirilirse

$$(\lambda - 2n + 4)[2a - b(n - 2)] + (2n - 3)k \quad = 0 \tag{5.76}$$

bulunur. (5.76) ifadesinde k değeri yerine yazılırsa

$$(\lambda - 2n + 4)[2a - b(n - 2)] + (2n - 3)b(2\lambda + 3) + \frac{r}{n}(\frac{a}{n - 1} + 2b) + 2a \quad = 0 \tag{5.77}$$

elde edilir. $a + 2b(n - 1) = 0$ alınır ve $a = (1 - n)2b$ yerine konulursa

$$\lambda \quad = \quad \frac{-(2n - 3)[4(1 - n)b + 3b] + (2n - 4)[4(1 - n)b - (n - 2)b]}{4(1 - n)b - (n - 2)b + (2n - 3)2b} \tag{5.78}$$

olur. 5.78) ifadesinde $b \neq 0$ için sadeleştirmeler yapılırsa

$$\lambda \quad = \quad \frac{(2n - 3)(-n - 1) + 5n - 6}{-n} \tag{5.79}$$

bulunur. Buradan

$$\lambda \quad = \quad \frac{2n^2 - 6n + 3}{n}$$

olur. $n = 2$ için λ negatif ve $n \geq 3$ için λ pozitif değerler alır. Buna göre $a + (n - 1)b = 0$ şartı sağlanırsa semi-simetrik metrik olmayan Kenmotsu manifoldu üzerinde $n \geq 3$ için Ricci soliton genişleyendir.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.3.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{C}(X,Y)$ M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü, $\widetilde{P}(X,Y)$ M üzerinde projektif eğrilik tensör alanı olmak üzere

$$\widetilde{P}(\xi,X).\widetilde{C}=0 \tag{5.80}$$

şartı sağlanır ise $n \geq 3$ için Ricci soliton genişleyendir.

Kenmotsu manifoldu için $a+(n-1)b=0$ olması durumunda $n \geq 3$ için (5.47) şartını sağlayan Ricci solitonun genişleyen olduğu gösterilmiştir (Nagaraja ve Premalatha, 2012). Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.3.1. M üzerinde quasi konformal eğrilik tensörü ve projektif.eğrilik tensör alanı için (5.47) şartını sağlayan Ricci soliton Kenmotsu manifoldunda da semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda da genişleyendir.

5.4 $\widetilde{H}(\xi,X).\widetilde{S}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{H}(X,Y)$ M üzerinde konharmonik eğrilik tensörü ve $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere

$$\widetilde{H}(\xi,X).\widetilde{S}=0 \tag{5.81}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

(5.81) ifadesinin her iki tarafının Y,Z vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\widetilde{S}(\widetilde{H}(\xi,X)Y,Z)+\widetilde{S}(Y,\widetilde{H}(\xi,X)Z) \quad = \quad 0 \tag{5.82}$$

bulunur. (2.45) kullanılarak

$$\begin{aligned}-(\lambda+2)g(\widetilde{H}(\xi,X)Y,Z)+\eta(\widetilde{H}(\xi,X)Y)\eta(Z)\\ -(\lambda+2)g(Y,\widetilde{H}(\xi,X)Z)+\eta(Y)\eta(\widetilde{H}(\xi,X)Z)=0\end{aligned}$$

veya

$$\eta(Z)\eta(\widetilde{H}(\xi,X)Y)+\eta(Y)\eta(\widetilde{H}(\xi,X)Z)=(\lambda+2)[g(\widetilde{H}(\xi,X)Y,Z)+g(Y,\widetilde{H}(\xi,X)Z)] \tag{5.83}$$

elde edilir. (2.15) konharmonik eğrilik tensörü tanımında (2.40) eşitliği ve (2.45) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(X,Y)Z &= 2[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X+\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y] \\ &\quad -\frac{1}{n-2}[(\lambda+2)(g(X,Z)Y-g(Y,Z)X)+\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad +(\lambda+2)(g(X,Z)Y-g(Y,Z)X)+g(Y,Z)\eta(X)\xi-g(X,Z)\eta(Y)\xi]\end{aligned} \tag{5.84}$$

bulunur. (5.84) eşitliğinde düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(X,Y)Z &= [2-\frac{2(\lambda+2)}{n-2}][g(X,Z)Y-g(Y,Z)X]+[2-\frac{1}{n-2}][\eta(Y)\eta(Z)X \\ &\quad -\eta(X)\eta(Z)Y]+\frac{1}{n-2}[g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi]\end{aligned} \tag{5.85}$$

yazılır ve

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(X,Y)Z &= \frac{2n-2\lambda-8}{n-2}[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X]+\frac{2n-5}{n-2}[\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y] \\ &\quad +\frac{1}{n-2}[g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi]\end{aligned} \tag{5.86}$$

hesaplanır. (5.86) eşitliğinde $X=\xi$, $Y=X$ ve $Z=Y$ değişikliği yapılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(\xi,X)Y &= \frac{2n-2\lambda-8}{n-2}[g(\xi,Y)X-g(X,Y)\xi]+\frac{2n-5}{n-2}[\eta(X)\eta(Y)\xi-\eta(\xi)\eta(Y)X] \\ &\quad +\frac{1}{n-2}[g(\xi,Y)\eta(X)\xi-g(X,Y)\eta(\xi)\xi]\end{aligned} \tag{5.87}$$

elde edilir. (5.87) eşitliğinde (2.18) ve (2.20) ifadeleri kullanılırsa

$$\widetilde{H}(\xi,X)Y = 2\eta(X)\eta(Y)\xi-[\frac{2\lambda+3}{n-2}]\eta(Y)X-[\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}]g(X,Y)\xi \tag{5.88}$$

elde edilir. (5.88) eşitliğinde $Y=Z$ değişikliği yapılırsa

$$\widetilde{H}(\xi,X)Z = 2\eta(X)\eta(Z)\xi-[\frac{2\lambda+3}{n-2}]\eta(Z)X-[\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}]g(X,Z)\xi \tag{5.89}$$

elde edilir. (5.88) ifadesinin her iki tarafının η altında görüntüsü alınırsa

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{H}(\xi,X)Y) &= 2\eta(X)\eta(Y)-[\frac{2\lambda+3}{n-2}]\eta(Y)\eta(X)-[\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}]g(X,Y) \\ &= [\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}][\eta(X)\eta(Y)-g(X,Y)]\end{aligned} \tag{5.90}$$

bulunur ve (5.89) eşitliğinin her iki tarafının η altında görüntüsü alınırsa

$$\eta(\widetilde{H}(\xi,X)Z) = [\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}][\eta(X)\eta(Z)-g(X,Z)] \tag{5.91}$$

bulunur. (5.88) ifadesine Z ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(\widetilde{H}(\xi,X)Y,Z) = 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\text{-}[\frac{2\lambda+3}{n-2}]\eta(Y)g(X,Z)\text{+}[\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}]g(X,Y)\eta(Z) \tag{5.92}$$

elde edilir. (5.89) ifadesine Y ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(\widetilde{H}(\xi,X)Z,Y) = 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\text{-}[\frac{2\lambda+3}{n-2}]\eta(Z)g(Y,X)\text{+}[\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}]g(X,Z)\eta(Y) \tag{5.93}$$

olur. (5.90), (5.91), (5.92) ve (5.93) değerleri (5.83) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}[\frac{2n-2\lambda-7}{n-2}][2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)g(X,Y)-\eta(Y)g(X,Z)]\\ =(\lambda+2)[4\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-2\eta(Y)g(X,Z)-2\eta(Z)g(X,Y)]\end{aligned} \tag{5.94}$$

elde edilir. (5.94) eşitliğinin her iki yanı $(n-2)$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}(2n-2\lambda-7)[2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)g(X,Y)-\eta(Y)g(X,Z)]\\ =(\lambda+2)(n-2)[4\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-2\eta(Y)g(X,Z)-2\eta(Z)g(X,Y)]\end{aligned} \tag{5.95}$$

bulunur ve (5.95) ifadesinde bulunanlar bir tarafta toplanırsa

$$\begin{aligned}(-4n+4\lambda-4\lambda n+2)\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\\ -(-2n+2\lambda-2\lambda n+1)[\eta(Y)g(X,Z)+\eta(Z)g(X,Y)]=0\end{aligned} \tag{5.96}$$

olur. $X=Y=e_i$ için $i=1,2,...,n$ toplam alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[(-4n+4\lambda-4\lambda n+2)\eta(e_i)\eta(e_i)\eta(Z)\\ -(-2n+2\lambda-2\lambda n+1)[\eta(e_i)g(e_i,Z)+\eta(Z)g(e_i,e_i)]]=0\end{aligned} \tag{5.97}$$

elde edilir. (2.21) ifadeleri kullanılırsa ve (5.97) ifadesi $\eta(Z)$ ortak parantezine alınırsa

$$[(-4n+4\lambda-4\lambda n+2)-(n+1)[-2n+2\lambda-2\lambda n+1]]\eta(Z) = 0 \tag{5.98}$$

bulunur. $\eta(Z)\neq 0$ için (5.98) ifadesinde

$$(-4n+4\lambda-4\lambda n+2)-(n+1)[-2n+2\lambda-2\lambda n+1]=0 \tag{5.99}$$

olur. (5.99) denkleminde λ parantezine alınırsa

$$\lambda(2n^2-4n+2)+2n^2-3n+1 = 0 \tag{5.100}$$

elde edilir. (5.100) eşitliğinde λ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-2n^2+3n-1}{2n^2-4n+2}\\ &= -\frac{(2n-1)(n-1)}{2(n-1)^2}\end{aligned} \tag{5.101}$$

bulunur. (5.101) ifadesinde $n \neq 1$ için sadeleştirme yapılırsa

$$\lambda = -\frac{(2n-1)}{2(n-1)}$$

elde edilir.

$n > 2$ için $\lambda < 0$ negatif değerler alır. O halde semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde bu değerler için Ricci soliton daralandır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.4.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{H}(X,Y)$ M üzerinde konharmonik eğrilik tensörü, $\widetilde{S}$ M üzerinde tanımlı Ricci tensör olmak üzere eğer

$$\widetilde{H}(\xi,X).\widetilde{S} = 0 \tag{5.102}$$

şartı sağlanır ise Ricci soliton $n > 2$ için daralandır.

Kenmotsu manifoldu için (5.81) şartını sağlayan Ricci solitonun değişmeyen olduğu gösterilmiştir (Nagaraja ve Premalatha, 2012). Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.4.1. M üzerinde konharmonik eğrilik tensörü ve Ricci tensörü için (5.81) şartını sağlayan Ricci soliton Kenmotsu manifoldunda değişmeyen iken semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda daralandır.

5.5 $\widetilde{R}(\xi,X).R = 0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü ve R $(1,3)$ tipinde Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).R = 0 \tag{5.103}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

(5.103) ifadesinin her iki tarafının $Z,\ U,\ W$ vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(\xi,X).R)(Z,U)W &= \widetilde{R}(\xi,X)R(Z,U)W-R(\widetilde{R}(\xi,X)Z,U)W\\ &\quad -R(Z,\widetilde{R}(\xi,X)U)W-R(Z,U)\widetilde{R}(\xi,X)W=0\end{aligned} \tag{5.104}$$

elde edilir. (2.41) ifadesi (5.104) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&R(\xi,X)R(Z,U)W-\eta(R(Z,U)W)X-g(X,R(Z,U)W)\xi+2\eta(R(Z,U)W)\xi\\ &-R(R(\xi,X)Z,U)W+\eta(Z)R(X,U)W+\{g(X,Z)-2\eta(X)\eta(Z)\}R(\xi,U)W\\ &-R(Z,R(\xi,X)U)W+\eta(U)R(Z,X)W-\{g(X,U)-2\eta(X)\eta(U)\}R(\xi,Z)W\\ &-R(Z,U)R(\xi,X)W+\eta(W)R(Z,U)X+\{g(X,W)-2\eta(X)\eta(W)\}R(Z,U)\xi=0\end{aligned} \tag{5.105}$$

bulunur. (2.30) ifadesi (5.105) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&-g(X,R(Z,U)W)-g(X,Z)g(U,W)+g(X,Z)\eta(U)\eta(W)\\ &+g(X,U)g(Z,W)-g(X,U)\eta(Z)\eta(W)=0\end{aligned} \tag{5.106}$$

olur. (5.106) denkleminde $U=W=e_i$ için $i=1,2,...,n$ toplam alınırsa

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\{g(X,R(Z,e_i)e_i)+g(e_i,e_i)g(X,Z)-g(X,Z)\eta(e_i)\eta(e_i)\\ &-g(X,e_i)g(Z,e_i)-g(X,e_i)\eta(Z)\eta(e_i)\}=0\end{aligned} \tag{5.107}$$

elde edilir. (2.11) eşitliği yardımıyla

$$S(X,Z)+(n-2)g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)=0 \tag{5.108}$$

bulunur. (2.45), (2.48) ve (5.108) ifadeleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}&-(\lambda+2)g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)=(2-n)g(X,Z)\\ &-\eta(X)\eta(Z)-(n-1)g(X,Z)+2(n-1)\eta(X)\eta(Z)\end{aligned} \tag{5.109}$$

elde edilir. (5.109) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(-\lambda+2n-5)g(X,Z)+(-2n+4)\eta(X)\eta(Z)=0 \tag{5.110}$$

olur. (5.110) eşitliğinde $X=Z=\xi$ alınırsa

$$\lambda=-1$$

olarak bulunur. O halde tüm n değerleri için λ negatif değerler alır. O halde semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde bu değerler için Ricci soliton daralandır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.5.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü ve R $(1,3)$ tipinde Riemann eğrilik tensörü olmak üzere eğer

$$\widetilde{R}(\xi,X).R=0 \tag{5.111}$$

şartı sağlanır ise Ricci soliton daima daralandır.

5.6 $\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{R}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{R}=0 \tag{5.112}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

(5.112) ifadesinin her iki tarafının Z, U, W vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{R})(Z,U)W &= \widetilde{R}(\xi,X)\widetilde{R}(Z,U)W-\widetilde{R}(\widetilde{R}(\xi,X)Z,U)W \\ &\quad -\widetilde{R}(Z,\widetilde{R}(\xi,X)U)W-\widetilde{R}(Z,U)\widetilde{R}(\xi,X)W=0\end{aligned} \tag{5.113}$$

elde edilir. (2.41) ifadesi (5.104) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&-2g(X,\widetilde{R}(Z,U)W)\xi+2\eta(X)\eta(\widetilde{R}(Z,U)W)\xi+2g(X,Z)\widetilde{R}(\xi,U)W \\ &-2\eta(X)\eta(Z)\widetilde{R}(\xi,U)W+2g(X,U)\widetilde{R}(Z,\xi)W-2\eta(X)\eta(U)\widetilde{R}(Z,\xi)W \\ &+2g(X,W)\widetilde{R}(Z,U)\xi-2\eta(X)\eta(W)\widetilde{R}(Z,U)\xi=0\end{aligned} \tag{5.114}$$

bulunur. (2.41) ifadesi (5.114) eşitliğinde yerine yazılır ve eşitliğin ξ ile iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}&g(X,\widetilde{R}(Z,U)W)-\eta(X)\eta(\widetilde{R}(Z,U)W)-g(X,Z)\eta(\widetilde{R}(\xi,U)W) \\ &+\eta(X)\eta(Z)\eta(\widetilde{R}(\xi,U)W)-g(X,U)\eta(\widetilde{R}(Z,\xi)W)+\eta(X)\eta(U)\eta(\widetilde{R}(Z,\xi)W)=0\end{aligned} \tag{5.115}$$

olur. (5.115) eşitliğinde (2.41) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}&g(X,\widetilde{R}(Z,U)W)-\eta(X)\eta(\widetilde{R}(Z,U)W)+2g(X,Z)g(U,W)-2g(X,Z)\eta(U)\eta(W) \\ &-2\eta(X)\eta(Z)g(U,W)+2\eta(X)\eta(Z)\eta(U)\eta(W)-2g(X,U)g(Z,W) \\ &+2g(X,U)\eta(Z)\eta(W)+2\eta(X)\eta(U)g(Z,W)-2\eta(X)\eta(Z)\eta(U)\eta(W)=0\end{aligned} \tag{5.116}$$

elde edilir. (5.116) ifadesinde

$$\begin{aligned}g(X,\widetilde{R}(Z,U)W) &= g(X,R(Z,U)W)+g(Z,W)g(X,U)-g(U,W)g(X,Z) \\ &\quad +2\{g(X,Z)\eta(U)\eta(W)-g(X,U)\eta(Z)\eta(W)\}\end{aligned}$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & g(X,R(Z,U)W)+g(Z,W)g(X,U)-g(U,W)g(X,Z)+2g(X,Z)\eta(U)\eta(W) \\ & -2g(X,U)\eta(Z)\eta(W)-\eta(X)\eta(\widetilde{R}(Z,U)W)+2g(X,Z)g(U,W) \\ & -2g(X,Z)\eta(U)\eta(W)-2\eta(X)\eta(Z)g(U,W)-2g(X,U)g(Z,W) \\ & +2g(X,U)\eta(Z)\eta(W)+2\eta(X)\eta(U)g(Z,W)=0 \end{aligned} \tag{5.117}$$

bulunur. (5.117) ifadesinde (2.40) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & g(X,R(Z,U)W)+g(Z,W)g(X,U)-g(U,W)g(X,Z)-2\eta(X)\{g(Z,W)\eta(U) \\ & -g(U,W)\eta(Z)+\eta(U)\eta(W)\eta(Z)-\eta(Z)\eta(W)\eta(U)\} \\ & -2\eta(X)\eta(Z)g(U,W)+2\eta(X)\eta(U)g(Z,W)=0 \end{aligned} \tag{5.118}$$

olur. (5.118) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(X,R(Z,U)W)+g(Z,W)g(X,U)-g(U,W)g(X,Z)=0 \tag{5.119}$$

elde edilir. (5.119) eşitliğinde $U=W=e_i$ için $i=1,2,...,n$ toplam alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n}\{g(X,R(Z,e_i)e_i)+g(Z,e_i)g(X,e_i)-g(e_i,e_i)g(X,Z)\}=0 \tag{5.120}$$

bulunur. Burada (2.11) eşitliği yerine konulursa

$$S(X,Z)=g(X,Z)-ng(X,Z)=(1-n)g(X,Z) \tag{5.121}$$

elde edilir. (2.45) ve (2.48) eşitliği (5.121) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -(\lambda+2)\,g\,(X,Z)+\eta\,(X)\,\eta\,(Z) \\ & =(1-n)g(X,Z)-(n-1)g(X,Z)+2(n-1)\eta(X)\eta(Z) \end{aligned} \tag{5.122}$$

bulunur. (5.122) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(-\lambda+2n-5)g(X,Z)+(-2n+3)\eta(X)\eta(Z)=0 \tag{5.123}$$

olur. (5.123) eşitliğinde $X=Z=\xi$ alınırsa

$$\lambda=-1$$

olarak bulunur. O halde tüm n değerleri için λ negatif değerler alır. O halde semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu üzerinde bu değerler için Ricci soliton daralandır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.6.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{R}=0 \tag{5.124}$$

şartı sağlanır ise Ricci soliton daima daralandır.

5.7 $\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{C}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı eğrilik tensörü, $\widetilde{C}(X,Y)$ quasi-konformal eğrilik tensörü olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{C}=0 \tag{5.125}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

M üzerindeki tüm X,Y,Z,W vektör alanları için (5.125) denklemi

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(\xi,X).(\widetilde{C}(Y,Z)W)-\widetilde{C}(\widetilde{R}(\xi,X)Y,Z)W& \\ -\widetilde{C}(Y,\widetilde{R}(\xi,X)Z)W-\widetilde{C}(Y,Z)\widetilde{R}(\xi,X)W &= 0 \end{aligned} \tag{5.126}$$

olarak yazılır. (5.126) denkleminde (2.41) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -2[g(X,\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi-\eta(X)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi] \\ &+2\widetilde{C}(g(X,Y)\xi-\eta(X)\eta(Y)\xi,Z)W+2\widetilde{C}(Y,g(X,Z)\xi-\eta(X)\eta(Z)\xi)W \\ &+2\widetilde{C}(Y,Z)(g(X,W)\xi-\eta(X)\eta(W)\xi) \end{aligned} \tag{5.127}$$

elde edilir. Burada

$$\widetilde{C}'(Y,Z,W,X) = g(\widetilde{C}(Y,Z)W,X) \tag{5.128}$$

eşitliği (5.127) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(X)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)\xi-\widetilde{C}'(Y,Z,W,X)\xi+g(X,Y)\widetilde{C}(\xi,Z)W \\ &-\eta(X)\eta(Y)\widetilde{C}(\xi,Z)W+g(X,Z)\widetilde{C}(Y,\xi)W-\eta(X)\eta(Z)\widetilde{C}(Y,\xi)W \\ &+g(X,W)\widetilde{C}(Y,Z)\xi-\eta(X)\eta(W)\widetilde{C}(Y,Z)\xi \end{aligned} \tag{5.129}$$

bulunur. (5.129) eşitliğin her iki tarafına ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(X)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W)-\widetilde{C}'(Y,Z,W,X)+g(X,Y)\eta(\widetilde{C}(\xi,Z)W) \\ &-\eta(X)\eta(Y)\eta(\widetilde{C}(\xi,Z)W)+g(X,Z)\eta(\widetilde{C}(Y,\xi)W)-\eta(X)\eta(Z)\eta(\widetilde{C}(Y,\xi)W) \\ &+g(X,W)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)\xi)-\eta(X)\eta(W)\eta(\widetilde{C}(Y,Z)\xi) \end{aligned} \tag{5.130}$$

elde edilir. (5.130) eşitliğinde bulunan gerekli terimler hesaplanırsa:

(2.40), (2.45) ve (2.42) ifadeleri (2.49) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(X,Y)Z= \; & 2a[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X+\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y] \\ &+b[-(\lambda+2)g(Y,Z)X+\eta(Y)\eta(Z)X+(\lambda+2)g(X,Z)Y-\eta(X)\eta(Z)Y \\ &+\eta(X)g(Y,Z)\xi-(\lambda+2)g(Y,Z)X-\eta(Y)g(X,Z)\xi+(\lambda+2)g(X,Z)Y] \\ &-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{5.131}$$

elde edilir. Benzer ifadelerin katsayıları toplanırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)Z = \quad & (2a+b)[\eta(Y)\eta(Z)X-\eta(X)\eta(Z)Y] \\ & +b[\eta(X)g(Y,Z)\xi-\eta(Y)g(X,Z)\xi] \\ & +[-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)-2a-2\lambda b-4b][g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{5.132}$$

elde edilir. (5.132) eşitliğinde $Z=\xi$ yazılır ve (2.18) ve (2.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)\xi = (2a+b)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+b[\eta(X)\eta(Y)\xi-\eta(Y)\eta(X)\xi] \\ +[-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)-2a-2\lambda b-4b][\eta(Y)X-\eta(X)Y]\end{aligned} \tag{5.133}$$

bulunur. (5.133) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\widetilde{C}(X,Y)\xi = [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][\eta(X)Y-\eta(Y)X] \tag{5.134}$$

elde edilir. (5.134) eşitliğinin η altındaki görüntüsü alınırsa

$$\eta(\widetilde{C}(X,Y)\xi) \quad = \quad [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][\eta(X)\eta(Y)-\eta(Y)\eta(X)]=0 \tag{5.135}$$

olur. (5.135) ifadesinde $X=Y$, ve $Y=Z$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,Z)\xi) \quad = \quad [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)][\eta(Y)\eta(Z)-\eta(Z)\eta(Y)]=0 \tag{5.136}$$

bulunur. (5.132) tanımının η altındaki görüntüsü alınırsa

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) \quad = \quad & (2a+b)[\eta(Y)\eta(Z)\eta(X)-\eta(X)\eta(Z)\eta(Y)] \\ & +b[\eta(X)g(Y,Z)-\eta(Y)g(X,Z)] \\ & +[-\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)-2a-2\lambda b-4b][g(Y,Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)]\end{aligned} \tag{5.137}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\eta(\widetilde{C}(X,Y)Z) \quad = \quad [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a][g(X,Z)\eta(Y)-g(Y,Z)\eta(X)] \tag{5.138}$$

bulunur. (5.138) eşitliiğinde $X=Y$, $Y=Z$ ve $Z=W$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,Z)W \quad = \quad [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a][g(Y,W)\eta(Z)-g(Z,W)\eta(Y)] \tag{5.139}$$

olur. (5.139) ifadesinde $Y=\xi$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(\xi,Z)W \quad = \quad [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a][\eta(W)\eta(Z)-g(Z,W)] \tag{5.140}$$

ve (5.139) ifadesinde $Z=\xi$ değişimi yapılırsa

$$\eta(\widetilde{C}(Y,\xi)W \quad = \quad [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a][g(Y,W)-\eta(W)\eta(Y)] \tag{5.141}$$

elde edilir. (5.136), (5.139), (5.140) ve (5.141) ifadeleri (5.130) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a]\{g(X,Z)g(Y,W) \\ &\quad -g(X,Y)g(Z,W)+g(X,Y)\eta(Z)\eta(W)-g(X,Z)\eta(W)\eta(Y) \\ &\quad +g(Z,W)\eta(X)\eta(Y)-g(Z,W)\eta(Y)\eta(X)+g(Y,W)\eta(Z)\eta(X) \\ &\quad -\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(Z)\eta(W)\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad +\eta(X)\eta(Z)\eta(Y)\eta(W)\}-\widetilde{C}'(Y,Z,W,X) \end{aligned} \tag{5.142}$$

hesaplanır. (5.142) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [b(2\lambda+3)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a]\{-g(X,Y)g(Z,W)+g(X,Y)\eta(Z)\eta(W) \\ &\quad -g(X,Z)\eta(W)\eta(Y)+g(X,Z)g(Y,W)\}-\widetilde{C}'(Y,Z,W,X) \end{aligned} \tag{5.143}$$

elde edilir. (5.128) ifadesini hesaplamak için (5.132) ifadesinde $X=Y,\ Y=Z,\ Z=W$ değişikliği yapılır ve X ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} g(\widetilde{C}(Y,Z)W,X) &= (2a+b)[\eta(Z)\eta(W)g(Y,X)-\eta(Y)\eta(W)g(Z,X)] \\ &\quad +b[\eta(Y)\eta(X)g(Z,W)-\eta(Z)\eta(X)g(Y,W)] \\ &\quad -[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a+2\lambda b+4b][g(Z,W)g(Y,X) \\ &\quad -g(Y,W)g(Z,X)] \end{aligned} \tag{5.144}$$

elde edilir. (5.143) eşitliğinde (5.144) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -(2a+b)[\eta(Z)\eta(W)g(Y,X)-\eta(Y)\eta(W)g(Z,X)] \\ &\quad -b[\eta(Y)\eta(X)g(Z,W)-\eta(Z)\eta(X)g(Y,W)] \\ &\quad +[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a+2\lambda b+4b][g(Z,W)g(Y,X)-g(Y,W)g(Z,X)] \\ &\quad -[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a+2\lambda b+3b][g(X,Y)g(Z,W)-g(X,Y)\eta(Z)\eta(W)] \\ &\quad -[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2a+2\lambda b+3b][g(X,Z)\eta(W)\eta(Y)-g(X,Z)g(Y,W)] \end{aligned} \tag{5.145}$$

bulunur. (5.145) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 &= [\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2\lambda b+2b][g(X,Y)\eta(Z)\eta(W)-g(X,Z)\eta(W)\eta(Y)] \\ &\quad +b[g(X,Y)g(Z,W)+g(Y,W)\eta(Z)\eta(X)-g(Z,W)\eta(Y)\eta(X)-g(Y,W)g(Z,X)] \end{aligned} \tag{5.146}$$

elde edilir. (5.146) ifadesinde $X=Y=e_i$ için $i=1,2,\ldots,n$ toplam alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2\lambda b+2b][g(e_i,e_i)\eta(Z)\eta(W)-g(e_i,Z)\eta(W)\eta(e_i)] \\ &\quad +b[g(e_i,e_i)g(Z,W)+g(e_i,W)\eta(Z)\eta(e_i)-g(Z,W)\eta(e_i)\eta(e_i)-g(e_i,W)g(Z,e_i)] \end{aligned}$$

veya

$$0 = [\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2\lambda b+2b][n\eta(Z)\eta(W)-\eta(Z)\eta(W)] \\ +b[ng(Z,W)+\eta(W)\eta(Z)-g(Z,W)-\eta(W)\eta(Z)] \tag{5.147}$$

bulunur. (5.147) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$0 = (n-1)\{[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2\lambda b+2b]\eta(Z)\eta(W)+bg(Z,W)\} \tag{5.148}$$

elde edilir.(5.148) ifadesinde $Z=W=e_i$ için $i=1,2,...,n$ toplam alınırsa

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(n-1)\{[\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+2b)+2\lambda b+2b]\eta(Z)\eta(W)+bg(Z,W)\}$$

veya

$$0 = \frac{r}{n}[a+2b(n-1)]+2\lambda nb-2\lambda b+2bn-2b+bn^2-bn \tag{5.149}$$

elde edilir. (5.149) ifadesinde λ lı terimler bir tarafta toplanırsa

$$2b\lambda(1-n) = \frac{r}{n}[a+2b(n-1)]+2b(n-1)+bn(n-1) \tag{5.150}$$

bulunur. $n-1\neq 0$ olmak üzere (5.150) eşitliğinde $a+2b(n-1)=0$ alınırsa

$$2b\lambda = -2b-bn \tag{5.151}$$

bulunur. Buradan λ yalnız bırakılırsa

$$\lambda = -(1+\frac{n}{2}) \tag{5.152}$$

elde edilir.

$n\in\mathbb{N}$ için $\lambda<0$ negatif değerler alır. O halde semi-simetrik metrik olmayan Kenmotsu manifoldu üzerinde bu değerler için Ricci soliton daralandır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.7.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{C}(X,Y)$ M üzerinde quasi-konformal eğrilik tensörü olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{C}=0$$

eğer şartı sağlanır ise Ricci soliton daima daralandır.

Kenmotsu manifoldu için $a+(n-2)b=0$ olması durumunda $n\geq 0$ için (5.125) şartını sağlayan Ricci solitonun daralan olduğu gösterilmiştir (Nagaraja ve Premalatha, 2012). Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.7.1. M üzerinde tanımlı eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörü için (5.125) şartını sağlayan Ricci soliton Kenmotsu manifoldunda da semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda da daralandır.

5.8 $\widetilde{R}(\xi,X).\overline{\overline{P}}=0$ Şartını Sağlayan Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldunda Ricci Soliton

Bu kısımda M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu, $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı eğrilik tensörü, $\overline{\overline{P}}(X,Y)$ M üzerinde Pseudo-projektif eğrilik tensör alanı olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).\overline{\overline{P}}=0 \tag{5.153}$$

eğrilik şartını sağlayan Ricci solitonlar incelenmiştir.

Bu şart için ifadenin her iki tarafının U,V,W vektör alanlarındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(\xi,X)\overline{\overline{P}}(U,V)W-\overline{\overline{P}}(\widetilde{R}(\xi,X)U,V)W & \\ -\overline{\overline{P}}(U,\widetilde{R}(\xi,X)V)W-\overline{\overline{P}}(U,V)\widetilde{R}(\xi,X)W &= 0 \end{aligned} \tag{5.154}$$

elde edilir. (2.41) , (2.18) ve (2.20) ifadelerinden yararlanılarak (5.154) eşitliğindeki terimler hesaplanırsa

$$\widetilde{R}(\xi,X)\overline{\overline{P}}(U,V)W = -2[g(X,\overline{\overline{P}}(U,V)W)\xi-\eta(X)\eta(\overline{\overline{P}}(U,V)W)\xi] \tag{5.155}$$

ve

$$\overline{\overline{P}}(\widetilde{R}(\xi,X)U,V)W = -2g(X,U)\overline{\overline{P}}(\xi,V)W+2\eta(X)\eta(U)\overline{\overline{P}}(\xi,V)W \tag{5.156}$$

ve

$$\overline{\overline{P}}(U,\widetilde{R}(\xi,X)V)W = -2g(X,V)\overline{\overline{P}}(U,\xi)W+2\eta(X)\eta(V)\overline{\overline{P}}(U,\xi)W \tag{5.157}$$

ve

$$\overline{\overline{P}}(U,V)\widetilde{R}(\xi,X)W = -2g(X,W)\overline{\overline{P}}(U,V)\xi+2\eta(X)\eta(W)\overline{\overline{P}}(U,V)\xi \tag{5.158}$$

bulunur. (2.40) ve (2.45) ifadeleri (2.17) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}}(U,V)W &= [2a+b(\lambda+2)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][g(U,W)V-g(V,W)U] \\ &\quad +(2a+b)[\eta(V)\eta(W)U-\eta(U)\eta(W)V] \end{aligned} \tag{5.159}$$

bulunur. (5.159) ifadesinde $W=\xi$ değişikliği yapılırsa

$$\overline{\overline{P}}(U,V)\xi = [b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][\eta(U)V-\eta(V)U] \tag{5.160}$$

elde edilir. (5.159) eşitliğinin her iki tarafının η altındaki görüntüsü hesaplanırsa

$$\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,V)W) = [2a+b(\lambda+2)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][g(U,W)\eta(V)-g(V,W)\eta(U)] \tag{5.161}$$

ve $W=\xi$ değişikliği yapılırsa

$$\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,V)\xi) = 0 \tag{5.162}$$

elde edilir. (5.161) eşitliğinde $U=\xi$ değişikliği yapılırsa

$$\eta(\overline{\widetilde{P}}(\xi,V)W) = [2a+b(\lambda+2)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][\eta(W)\eta(V)-g(V,W)] \tag{5.163}$$

ve aynı ifadede $V=\xi$ değişikliği yapılırsa

$$\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,\xi)W) = [2a+b(\lambda+2)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][g(U,W)-\eta(W)\eta(U)] \tag{5.164}$$

bulunur. (5.159) ifadesinde her iki tarafın X ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} g(X,\overline{\widetilde{P}}(U,V)W) &= [2a+b(\lambda+2)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][g(U,W)g(X,V)-g(V,W)g(X,U)] \\ &\quad +(2a+b)[\eta(V)\eta(W)g(X,U)-\eta(U)\eta(W)g(X,V)] \end{aligned} \tag{5.165}$$

olur. (5.155), (5.156), (5.157), (5.158) ifadeleri (5.154) eşitliğinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} 0 &= -2g(X,\overline{\widetilde{P}}(U,V)W)\xi+2\eta(X)\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,V)W)\xi \\ &\quad +2g(X,U)\overline{\widetilde{P}}(\xi,V)W-2\eta(X)\eta(U)\overline{\widetilde{P}}(\xi,V)W \\ &\quad +2g(X,V)\overline{\widetilde{P}}(U,\xi)W-2\eta(X)\eta(V)\overline{\widetilde{P}}(U,\xi)W \\ &\quad +2g(X,W)\overline{\widetilde{P}}(U,V)\xi-2\eta(X)\eta(W)\overline{\widetilde{P}}(U,V)\xi \end{aligned} \tag{5.166}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve (5.166) eşitliğinin her iki tarafına ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \eta(\overline{\widetilde{P}}(U,V)W)\eta(X)-g(X,\overline{\widetilde{P}}(U,V)W) \\ &\quad +g(X,U)\eta(\overline{\widetilde{P}}(\xi,V)W)-\eta(X)\eta(U)\eta(\overline{\widetilde{P}}(\xi,V)W) \\ &\quad +g(X,V)\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,\xi)W)-\eta(X)\eta(V)\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,\xi)W) \\ &\quad +g(X,W)\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,V)\xi)-\eta(X)\eta(W)\eta(\overline{\widetilde{P}}(U,V)\xi) \end{aligned} \tag{5.167}$$

bulunur. (5.161), (5.162), (5.163), (5.164) ve (5.165) ifadeleri (5.167) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}0 \;=\;& [2a+b(\lambda+2)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)]\{g(U,W)\eta(V)\eta(X)\\ &-g(V,W)\eta(U)\eta(X)-g(U,W)g(X,V)+g(V,W)g(X,U)\\ &+g(X,U)\eta(W)\eta(V)-g(X,U)g(V,W)-\eta(X)\eta(Y)\eta(W)\eta(V)\\ &+g(V,W)\eta(X)\eta(U)+g(X,V)g(U,W)-g(X,V)\eta(W)\eta(U)\\ &-g(U,W)\eta(X)\eta(V)+\eta(X)\eta(Y)\eta(W)\eta(V)\}\\ &-(2a+b)[\eta(V)\eta(W)g(X,U)-\eta(U)\eta(W)g(X,V)]\end{aligned} \tag{5.168}$$

bulunur. (5.168) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler sonucu

$$0 \;=\; [b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][g(X,U)\eta(W)\eta(V)-g(X,V)\eta(U)\eta(W)] \tag{5.169}$$

hesaplanır. (5.169) $X=U=e_i$ için $i=1,2,...,n$ toplam alınırsa

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{n}[b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)][g(e_i,e_i)\eta(W)\eta(V)-g(e_i,V)\eta(e_i)\eta(W)] \tag{5.170}$$

olur. (5.170) ifadesinde (2.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$0 \;=\; (n-1)[b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)]\eta(W)\eta(V) \tag{5.171}$$

elde edilir. (5.171) $V=W=e_i$ için $i=1,2,...,n$ toplam alınırsa

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{n}(n-1)[b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)]\eta(e_i)\eta(e_i) \tag{5.172}$$

olur. (5.172) ifadesinde (2.21) eşitlikleri yerine konulursa

$$0 \;=\; (n-1)[b(\lambda+1)+\frac{r}{n}(\frac{a}{n-1}+b)] \tag{5.173}$$

bulunur. Burada $a+b(n-1)=0$ olması halinde

$$0 \;=\; (n-1)b\lambda+(n-1)b \tag{5.174}$$

veya

$$(n-1)b\lambda \;=\; -(n-1)b$$

olur. Bu ifadede $n\neq 1$ olmak üzere

$$\lambda \;=\; -1$$

elde edilir. $n\in\mathbb{N}$ için λ negatif değerler alır. Buna göre $a+(n-1)b=0$ şartı sağlanırsa semi-simetrik metrik olmayan Kenmotsu manifoldu üzerinde $n\in\mathbb{N}$ için daima Ricci soliton daralandır.

Buna göre elde edilen bu hesaplar yardımıyla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.8.1. M bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldu olsun. $\widetilde{R}$ M üzerinde tanımlı eğrilik tensörü, $\overline{\overline{P}}(X,Y)$ M üzerinde projektif eğrilik tensör alanı.olmak üzere

$$\widetilde{R}(\xi,X).\overline{\overline{P}}=0$$

şartı saglanır ise $n\in\mathbb{N}$ için Ricci soliton daralandır.

Kenmotsu manifoldu için (5.153) şartını sağlayan Ricci solitonun genişleyen olduğu gösterilmiştir (Bagewadi, vd., 2013). Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.8.1. M üzerinde tanımlı eğrilik tensörü ve projektif eğrilik tensör alanı için (5.153) şartını sağlayan Ricci soliton Kenmotsu manifoldunda genişleyen iken semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldunda daralandır.

3-boyutlu Semi-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonlu Kenmotsu Manifoldu için Bir Örnek:

3-boyutlu f-Kenmotsu Manifoldu için (Yıldız, vd., 2013) ve (Demirli, 2014) çalışmalarında verilen aşağıdaki örnekte $f=1$ alınarak Kenmotsu manifoldu için hesaplamalar yapılmıştır.

(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ için standart koordinatlar olmak üzere

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z\neq 0\right\}$$

$3-$boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde

$$e_1=z^2\frac{\partial}{\partial x},\ e_2=z^2\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.175}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları her noktada birbirinden lineer bağımsızdır. g Riemann metriği

$$\begin{aligned} g(e_1,e_3) &= g(e_2,e_3)=g(e_1,e_2)=0 \\ g(e_1,e_1) &= g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1 \end{aligned} \tag{5.176}$$

olacak şekilde tanımlanır. $\forall Z\in T(M)$ için η 1-form

$$\eta(Z)=g(Z,e_3)$$

biçimindedir. ϕ $(1,1)$-tensör alanı

$$\phi(e_1) = -e_2,\ \phi(e_2) = e_1,\ \phi(e_3) = 0 \tag{5.177}$$

şeklinde tanımlanır. O halde

$$\begin{aligned} [e_1,e_2] &= e_1(e_2) - e_2(e_1) \\ &= z^2\frac{\partial}{\partial x}(z^2\frac{\partial}{\partial y}) - z^2\frac{\partial}{\partial y}(z^2\frac{\partial}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \tag{5.178}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} [e_2,e_3] &= e_2(e_3) - e_3(e_2) \\ &= z^2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial y}) \\ &= -2z\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{2}{z}e_2 \end{aligned} \tag{5.179}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} [e_1,e_3] &= e_1(e_3) - e_3(e_1) \\ &= z^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial x}) \\ &= -2z\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{2}{z}e_1 \end{aligned} \tag{5.180}$$

elde edilir. (2.4) eşitliğinde $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}e_3, e_2) &= e_1 g(e_3,e_2) + e_3 g(e_2,e_1) - e_2 g(e_1,e_3) \\ &\quad - g(e_1,[e_3,e_2]) - g(e_3,[e_1,e_2]) + g(e_2,[e_1,e_3]) \\ &= -\frac{2}{z}g(e_1,e_2) - g(e_3,0) - \frac{2}{z}g(e_2,e_1) = 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_1}e_3 = 0\ ,\ \nabla_{e_1}e_3 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_3 = \pm e_3 \tag{5.181}$$

sonucu bulunur. $X = e_1, Y = e_3$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}e_3, e_3) &= e_1 g(e_3,e_3) + e_3 g(e_3,e_1) - e_3 g(e_1,e_3) \\ &\quad - g(e_1,[e_3,e_3]) - g(e_3,[e_1,e_3]) + g(e_3,[e_1,e_3]) \\ &= e_1(1) - g(e_1,0) + \frac{2}{z}g(e_3,e_1) - \frac{2}{z}g(e_3,e_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1}e_3 \neq \pm e_3 \text{ ve } \nabla_{e_1}e_3 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_3 = \pm e_1 \tag{5.182}$$

verilir. $X=e_1, Y=e_3, Z=e_1$ için

$$
\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_1}e_3, e_1\right) &= e_1 g\left(e_3, e_1\right) + e_3 g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_3\right) \\
&\quad - g\left(e_1, [e_3, e_1]\right) - g\left(e_3, [e_1, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_1, e_3]\right) \\
&= e_3(1) - \frac{2}{z} g\left(e_1, e_1\right) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_1, e_1\right) \\
&= -\frac{4}{z}
\end{aligned}
$$

sonucu bulunur. Böylece

$$
\nabla_{e_1}e_3 \neq 0 \text{ ve } \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{2}{z}e_1 \tag{5.183}
$$

bulunur. (2.4) denkleminde $X=e_1, Y=e_2$ ve $Z=e_3$ için

$$
\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_1}e_2, e_3\right) &= e_1 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_1\right) - e_3 g\left(e_1, e_2\right) \\
&\quad - g\left(e_1, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_1, e_2]\right) \\
&= +\frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) + \frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) + g\left(e_3, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. O halde

$$
\nabla_{e_1}e_2 = 0 \ , \ \nabla_{e_1}e_2 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_2 = \pm e_2 \tag{5.184}
$$

yazılır. $X=e_1, Y=e_2$ ve $Z=e_2$ için

$$
\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_1}e_2, e_2\right) &= e_1 g\left(e_2, e_2\right) + e_2 g\left(e_2, e_1\right) - e_2 g\left(e_1, e_2\right) \\
&\quad - g\left(e_1, [e_2, e_2]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_1, e_2]\right) \\
&= e_1(1) - g\left(e_1, 0\right) - g\left(e_2, 0\right) + g\left(e_2, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan

$$
\nabla_{e_1}e_2 \neq \pm e_2 \text{ ve } \nabla_{e_1}e_2 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_1}e_2 = \pm e_1 \tag{5.185}
$$

sonucuna ulaşılır. $X=e_1, Y=e_2$ ve $Z=e_1$ için

$$
\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_1}e_2, e_1\right) &= e_1 g\left(e_2, e_1\right) + e_2 g\left(e_1, e_1\right) - e_1 g\left(e_1, e_2\right) \\
&\quad - g\left(e_1, [e_2, e_1]\right) - g\left(e_2, [e_1, e_1]\right) + g\left(e_1, [e_1, e_2]\right) \\
&= e_2(1) - g\left(e_1, 0\right) - g\left(e_2, 0\right) + g\left(e_1, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
\nabla_{e_1}e_2 \neq \pm e_1 \text{ ve } \nabla_{e_1}e_2 = 0 \tag{5.186}
$$

bulunur. Ayrıca (2.4) denkleminde $X = e_2, Y = e_3$ ve $Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_2}e_3, e_1) &= e_2 g(e_3,e_1) + e_3 g(e_1,e_2) - e_1 g(e_3,e_2) \\ &\quad - g(e_2,[e_3,e_1]) - g(e_3,[e_2,e_1]) + g(e_1,[e_2,e_3]) \\ &= -\frac{2}{z} g(e_2,e_1) - g(e_3,0) - \frac{2}{z} g(e_1,e_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\nabla_{e_2}e_3 = 0 \ , \ \nabla_{e_2}e_3 = \pm e_2 \ \text{ veya } \ \nabla_{e_2}e_3 = \pm e_3 \tag{5.187}$$

şeklinde yazılır. $X = e_2, Y = e_3$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_2}e_3, e_2) &= e_2 g(e_3,e_2) + e_3 g(e_2,e_2) - e_2 g(e_3,e_2) \\ &\quad - g(e_2,[e_3,e_2]) - g(e_3,[e_2,e_2]) + g(e_2,[e_2,e_3]) \\ &= e_3(1) - \frac{2}{z} g(e_2,e_2) - g(e_3,0) - \frac{2}{z} g(e_2,e_2) \\ &= -\frac{4}{z} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_{e_2}e_3 \neq 0 \ , \ \nabla_{e_2}e_3 \neq \pm e_3 \ \text{ ve } \ \nabla_{e_2}e_3 = -\frac{2}{z} e_2 \tag{5.188}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.13) ifadesinde $X = e_3, Y = e_3, Z = e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3}e_3, e_1) &= e_3 g(e_3,e_1) + e_3 g(e_1,e_3) - e_1 g(e_3,e_3) \\ &\quad - g(e_3,[e_3,e_1]) - g(e_3,[e_3,e_1]) + g(e_1,[e_3,e_3]) \\ &= -e_1(1) - \frac{2}{z} g(e_3,e_1) - \frac{2}{z} g(e_3,e_1) + g(e_1,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_3}e_3 = 0 \ , \ \nabla_{e_3}e_3 = \pm e_2 \ \text{ veya } \ \nabla_{e_3}e_3 = \pm e_3 \tag{5.189}$$

şeklinde ifade edilir. $X = e_3, Y = e_3$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3}e_3, e_2) &= e_3 g(e_3,e_2) + e_3 g(e_2,e_3) - e_2 g(e_3,e_3) \\ &\quad - g(e_3,[e_3,e_2]) - g(e_3,[e_3,e_2]) + g(e_2,[e_3,e_3]) \\ &= -e_2(1) - \frac{2}{z} g(e_3,e_2) - \frac{2}{z} g(e_3,e_2) + g(e_2,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\nabla_{e_3}e_3 \neq \pm e_2 \ \text{ ve } \ \nabla_{e_3}e_3 = 0 \ \text{ veya } \ \nabla_{e_3}e_3 = \pm e_3 \tag{5.190}$$

yazılır. $X=e_3,Y=e_3$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{e_3}e_3,e_3\right) &= e_3g\left(e_3,e_3\right)+e_3g\left(e_3,e_3\right)-e_3g\left(e_3,e_3\right)\\ &\quad -g\left(e_3,[e_3,e_3]\right)-g\left(e_3,[e_3,e_3]\right)+g\left(e_3,[e_3,e_3]\right)\\ &= e_3(1)+e_3(1)-e_3(1)-g\left(e_3,0\right)-g\left(e_3,0\right)+g\left(e_3,0\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\nabla_{e_3}e_3 \neq \pm e_3 \quad \text{ve} \quad \nabla_{e_3}e_3 = 0 \tag{5.191}$$

sonucu ortaya çıkar. (2.4) ifadesi $X=e_2,Y=e_2$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{e_2}e_2,e_3\right) &= e_2g\left(e_2,e_3\right)+e_2g\left(e_3,e_2\right)-e_3g\left(e_2,e_2\right)\\ &\quad -g\left(e_2,[e_2,e_3]\right)-g\left(e_2,[e_2,e_3]\right)+g\left(e_3,[e_2,e_2]\right)\\ &= -e_3\left(1\right)+\frac{2}{z}g\left(e_2,e_2\right)+\frac{2}{z}g\left(e_2,e_2\right)+g\left(e_3,0\right)\\ &= +\frac{4}{z}\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_2}e_2=\frac{2}{z}e_3 \tag{5.192}$$

şeklinde ifade edilir. Öte yandan (2.4) ifadesi $X=e_1,Y=e_1$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{e_1}e_1,e_3\right) &= e_1g\left(e_1,e_3\right)+e_1g\left(e_3,e_1\right)-e_3g\left(e_1,e_1\right)\\ &\quad -g\left(e_1,[e_1,e_3]\right)-g\left(e_1,[e_1,e_3]\right)+g\left(e_3,[e_1,e_1]\right)\\ &= -e_3\left(1\right)+\frac{2}{z}g\left(e_1,e_1\right)+\frac{2}{z}g\left(e_1,e_1\right)+g\left(e_3,0\right)\\ &= +\frac{4}{z}\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_1}e_1=\frac{2}{z}e_3 \tag{5.193}$$

bulunur. (2.4) ifadesi $X=e_3,Y=e_2$ ve $Z=e_1$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{e_3}e_2,e_1\right) &= e_3g\left(e_2,e_1\right)+e_2g\left(e_1,e_3\right)-e_1g\left(e_3,e_2\right)\\ &\quad -g\left(e_3,[e_2,e_1]\right)-g\left(e_2,[e_3,e_1]\right)+g\left(e_1,[e_3,e_2]\right)\\ &= -g\left(e_3,0\right)-\frac{2}{z}g\left(e_2,e_1\right)+\frac{2}{z}g\left(e_1,e_2\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu durumda

$$\nabla_{e_3}e_2 = 0\ ,\ \nabla_{e_3}e_2 = \pm e_2 \quad \text{veya} \quad \nabla_{e_3}e_2 = \pm e_3 \tag{5.194}$$

sonucu ortaya çıkar. $X = e_3, Y = e_2$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_3}e_2, e_2\right) &= e_3 g\left(e_2, e_2\right) + e_2 g\left(e_2, e_3\right) - e_2 g\left(e_3, e_2\right) \\
&\quad - g\left(e_3, [e_2, e_2]\right) - g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_3, e_2]\right) \\
&= e_3(1) - g\left(e_3, 0\right) - \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) + \frac{2}{z} g\left(e_2, e_2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

yazılır. Bu doğrultuda

$$\nabla_{e_3}e_2 \neq \pm e_2 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_2 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_3}e_2 = \pm e_3 \tag{5.195}$$

ifade edilir. $X = e_3, Y = e_2$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_3}e_2, e_3\right) &= e_3 g\left(e_2, e_3\right) + e_2 g\left(e_3, e_3\right) - e_3 g\left(e_3, e_2\right) \\
&\quad - g\left(e_3, [e_2, e_3]\right) - g\left(e_2, [e_3, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_3, e_2]\right) \\
&= e_2(1) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_2\right) - g\left(e_2, 0\right) + \frac{2}{z} g\left(e_3, e_2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_{e_3}e_2 \neq \pm e_3 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_2 = 0 \tag{5.196}$$

bulunur. Yine (2.4) ifadesi $X = e_2, Y = e_1$ ve $Z = e_3$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_2}e_1, e_3\right) &= e_2 g\left(e_1, e_3\right) + e_1 g\left(e_3, e_2\right) - e_3 g\left(e_2, e_1\right) \\
&\quad - g\left(e_2, [e_1, e_3]\right) - g\left(e_1, [e_2, e_3]\right) + g\left(e_3, [e_2, e_1]\right) \\
&= +\frac{2}{z} g\left(e_2, e_1\right) + \frac{2}{z} g\left(e_1, e_2\right) + g\left(e_3, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_2}e_1 = 0 \text{ , } \nabla_{e_2}e_1 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_2}e_1 = \pm e_2 \tag{5.197}$$

olur. $X = e_2, Y = e_1$ ve $Z = e_2$ için

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{e_2}e_1, e_2\right) &= e_2 g\left(e_1, e_2\right) + e_1 g\left(e_2, e_2\right) - e_2 g\left(e_2, e_1\right) \\
&\quad - g\left(e_2, [e_1, e_2]\right) - g\left(e_1, [e_2, e_2]\right) + g\left(e_2, [e_2, e_1]\right) \\
&= e_1(1) - g\left(e_2, 0\right) - g\left(e_1, 0\right) + g\left(e_3, 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_{e_2}e_1 \neq \pm e_2 \text{ ve } \nabla_{e_2}e_1 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_2}e_1 = \pm e_1 \tag{5.198}$$

sonucuna ulaşılır. $X=e_2, Y=e_1$ ve $Z=e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_2}e_1,e_1\right) &= e_2 g\left(e_1,e_1\right)+e_1 g\left(e_1,e_2\right)-e_1 g\left(e_2,e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_2,[e_1,e_1]\right)-g\left(e_1,[e_2,e_1]\right)+g\left(e_1,[e_2,e_1]\right) \\ &= e_2\left(1\right)-g\left(e_2,0\right)-g\left(e_1,0\right)+g\left(e_3,0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\nabla_{e_2}e_1 \neq \pm e_1 \text{ ve } \nabla_{e_2}e_1 = 0 \tag{5.199}$$

olur. Bunun yanı sıra (2.4) ifadesi $X=e_3, Y=e_1$ ve $Z=e_2$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3}e_1,e_2\right) &= e_3 g\left(e_1,e_2\right)+e_1 g\left(e_2,e_3\right)-e_2 g\left(e_3,e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_3,[e_1,e_2]\right)-g\left(e_1,[e_3,e_2]\right)+g\left(e_2,[e_3,e_1]\right) \\ &= -g\left(e_3,0\right)-\frac{2}{z}g\left(e_1,e_2\right)+\frac{2}{z}g\left(e_2,e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\nabla_{e_3}e_1 = 0\ ,\ \nabla_{e_3}e_1 = \pm e_1 \text{ veya } \nabla_{e_3}e_1 = \pm e_3 \tag{5.200}$$

yazılır. $X=e_3, Y=e_1$ ve $Z=e_1$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3}e_1,e_1\right) &= e_3 g\left(e_1,e_1\right)+e_1 g\left(e_1,e_3\right)-e_1 g\left(e_3,e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_3,[e_1,e_1]\right)-g\left(e_1,[e_3,e_1]\right)+g\left(e_1,[e_3,e_1]\right) \\ &= e_3\left(1\right)-g\left(e_3,0\right)-\frac{2}{z}g\left(e_1,e_1\right)+\frac{2}{z}g\left(e_1,e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda

$$\nabla_{e_3}e_1 \neq \pm e_1 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_1 = 0 \text{ veya } \nabla_{e_3}e_1 = \pm e_3 \tag{5.201}$$

olur. $X=e_3, Y=e_1$ ve $Z=e_3$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{e_3}e_1,e_3\right) &= e_3 g\left(e_1,e_3\right)+e_1 g\left(e_3,e_3\right)-e_3 g\left(e_3,e_1\right) \\ &\quad -g\left(e_3,[e_1,e_3]\right)-g\left(e_1,[e_3,e_3]\right)+g\left(e_3,[e_3,e_1]\right) \\ &= e_1\left(1\right)+\frac{2}{z}g\left(e_3,e_1\right)-g\left(e_1,0\right)+\frac{2}{z}g\left(e_3,e_1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_{e_3}e_1 \neq \pm e_3 \text{ ve } \nabla_{e_3}e_1 = 0 \tag{5.202}$$

bulunur.

Sonuç olarak yaptığımız hesaplamalar doğrultusunda

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= \frac{2}{z} e_3, & \nabla_{e_2} e_1 &= 0, & \nabla_{e_3} e_1 &= 0, \\
\nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_2} e_2 &= \frac{2}{z} e_3, & \nabla_{e_3} e_2 &= 0, \\
\nabla_{e_1} e_3 &= -\frac{2}{z} e_1, & \nabla_{e_2} e_3 &= -\frac{2}{z} e_2, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0
\end{aligned} \tag{5.203}
$$

eşitlikleri elde edilir. (2.6) eşitliğinde (5.203) ifadesi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
R(e_1, e_2) e_3 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_3 \\
&= -\frac{2}{z} \nabla_{e_1} e_2 + \frac{2}{z} \nabla_{e_2} e_1 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.204}
$$

bulunur. Benzer şekilde (5.204) eşitliğinde e_1, e_2 ve e_3 ün döndürülmesi ile

$$
\begin{aligned}
R(e_1, e_2) e_2 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 \\
&= \frac{2}{z} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{e_2} 0 \\
&= -\frac{4}{z^2} e_1,
\end{aligned} \tag{5.205}
$$

$$
\begin{aligned}
R(e_2, e_1) e_1 &= \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{[e_2, e_1]} e_1 \\
&= \frac{2}{z} \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_1} 0 \\
&= -\frac{4}{z^2} e_2,
\end{aligned} \tag{5.206}
$$

$$
\begin{aligned}
R(e_2, e_3) e_3 &= \nabla_{e_2} \nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{[e_2, e_3]} e_3 \\
&= e_3(\frac{2}{z}) e_2 + \frac{2}{z} \nabla_{e_3} e_2 + \frac{2}{z} \nabla_{e_2} e_3 \\
&= -\frac{2}{z^2} e_2 + \frac{2}{z}(0) + \frac{2}{z}(-\frac{2}{z} e_2) \\
&= -\frac{6}{z^2} e_2,
\end{aligned} \tag{5.207}
$$

$$
\begin{aligned}
R(e_3, e_2) e_2 &= \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_3} e_2 - \nabla_{[e_3, e_2]} e_2 \\
&= \nabla_{e_3} (\frac{2}{z} e_3) - \nabla_{e_3} 0 - \frac{2}{z} \nabla_{e_2} e_2 \\
&= e_3(\frac{2}{z}) e_3 + \frac{2}{z} \nabla_{e_3} e_3 - \frac{2}{z} \nabla_{e_2} e_2 \\
&= -\frac{2}{z^2} e_3 + \frac{2}{z}(0) - \frac{2}{z}(\frac{2}{z} e_3) \\
&= -\frac{6}{z^2} e_3,
\end{aligned} \tag{5.208}
$$

$$\begin{aligned} R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_1 \\ &= \nabla_{e_2}0 - \nabla_{e_3}0 + \frac{2}{z}\nabla_{e_2}e_1 \\ &= \frac{2}{z}(0) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.209}$$

$$\begin{aligned} R(e_1,e_3)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{[e_1,e_3]}e_3 \\ &= -e_3(-\frac{2}{z})e_1 + \frac{2}{z}\nabla_{e_3}e_1 + \frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1) \\ &= -\frac{2}{z^2}e_1 + \frac{2}{z}(0) - \frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3) \\ &= -\frac{6}{z^2}e_1, \end{aligned} \tag{5.210}$$

$$\begin{aligned} R(e_1,e_3)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{[e_1,e_3]}e_2 \\ &= \nabla_{e_1}0 - \nabla_{e_3}0 + \frac{2}{z}\nabla_{e_1}e_2 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.211}$$

$$\begin{aligned} R(e_3,e_1)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{[e_3,e_1]}e_1 \\ &= e_3(\frac{2}{z})e_3 - \frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3) \\ &= -\frac{2}{z^2}e_3 - \frac{4}{z^2}e_3 \\ &= -\frac{6}{z^2}e_3 \end{aligned} \tag{5.212}$$

$$R(e_1,e_1)e_1 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_1]}e_1 = 0 \tag{5.213}$$

$$R(e_2,e_2)e_2 = \nabla_{e_2}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{[e_2,e_2]}e_2 = 0 \tag{5.214}$$

$$R(e_3,e_3)e_3 = \nabla_{e_3}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{[e_3,e_3]}e_3 = 0 \tag{5.215}$$

elde edilir. $i \neq j$ iken $S(e_i,e_j) = 0$ olduğundan (2.8) ifadesinde (5.205) ve (5.210) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(e_1,e_1) &= g(R(e_1,e_2)e_2,e_1) + g(R(e_1,e_3)e_3,e_1) \\ &= -\frac{4}{z^2}g(e_1,e_1) - \frac{6}{z^2}g(e_1,e_1) \\ &= -\frac{10}{z^2} \end{aligned} \tag{5.216}$$

olur. (2.8) ifadesinde (5.206) ve (5.207) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(e_2,e_2) &= g(R(e_2,e_1)e_1,e_2) + g(R(e_2,e_3)e_3,e_2) \\ &= -\frac{4}{z^2}g(e_2,e_2) - \frac{6}{z^2}g(e_2,e_2) = -\frac{10}{z^2} \end{aligned} \tag{5.217}$$

bulunur. Ayrıca (2.8) ifadesinde (5.208) ve (5.212) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(e_3,e_3) &= g(R(e_3,e_1)e_1,e_3)+g(R(e_3,e_2)e_2,e_3) \\ &= -\frac{6}{z^2}g(e_3,e_3)-\frac{6}{z^2}g(e_3,e_3)=-\frac{12}{z^2} \end{aligned} \tag{5.218}$$

bulunur. Skalar eğrilik ise $r=S(e_1,e_1)+S(e_2,e_2)+S(e_3,e_3)=-\frac{32}{z^2}$ dir. (5.204) ifadesi (2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(e_1,e_2)e_3 &= R(e_1,e_2)e_3-\frac{1}{2}\{S(e_2,e_3)e_1-S(e_1,e_3)e_2\} \\ &= 0-\frac{1}{2}\{0e_1-0e_2\}=0 \end{aligned} \tag{5.219}$$

bulunur. (5.210) ve (5.218) eşitlikleri (2.16) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(e_1,e_3)e_3 &= R(e_1,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{S(e_3,e_3)e_1-S(e_1,e_3)e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_1+\frac{6}{z^2}e_1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.220}$$

olur. Son olarak (5.207) ve (5.218) eşitlikleri (2.16) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(e_2,e_3)e_3 &= R(e_2,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{S(e_3,e_3)e_2-S(e_2,e_3)e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_2-\frac{1}{2}\{-\frac{12}{z^2}e_2-0e_3\} \\ &= -\frac{6}{z^2}e_2+\frac{6}{z^2}e_2=0 \end{aligned} \tag{5.221}$$

şeklinde bulunur.

(2.8) ifadesinde (5.205), (5.210) ve (5.213) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} Qe_1 &= -R(e_1,e_1)e_1-R(e_2,e_1)e_2-R(e_3,e_1)e_3 \\ &= -\frac{10}{z^2}e_1 \end{aligned} \tag{5.222}$$

bulunur. (2.8) ifadesinde (5.205), (5.212) ve (5.214) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} Qe_2 &= -R(e_1,e_2)e_1-R(e_2,e_2)e_2-R(e_3,e_2)e_3 \\ &= -\frac{10}{z^2}e_2 \end{aligned} \tag{5.223}$$

elde edilir. (2.8) ifadesinde (5.208), (5.212) ve (5.215) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} Qe_3 &= -R(e_1,e_3)e_1-R(e_2,e_3)e_2-R(e_3,e_3)e_3 \\ &= -\frac{12}{z^2}e_3 \end{aligned} \tag{5.224}$$

bulunur. (2.15) konharmonik eğrilik tensörü tanımında (5.204) ifadesi kullanılırsa

$$H(e_1,e_2)e_3 = R(e_1,e_2)e_3 = 0 \tag{5.225}$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.210) eşitliği (2.15) denkleminde kullanılırsa

$$H(e_1,e_3)e_3 = R(e_1,e_3)e_3 = -\frac{6}{z^2}e_1 \tag{5.226}$$

bulunur. (5.211) ifadesi (2.15) eşitliğinde kullanılırsa

$$H(e_1,e_3)e_2 = R(e_1,e_3)e_2 = 0 \tag{5.227}$$

elde edilir. (2.15) ifadesinde (5.212), (5.216), (5.176) ve (5.224) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} H(e_3,e_1)e_1 &= R(e_3,e_1)e_1 - \frac{1}{3-2}[S(e_1,e_1)e_3 + g(e_1,e_1)Qe_3] \\ &= -\frac{6}{z^2}e_3 + (\frac{22}{z^2})e_3 \end{aligned} \tag{5.228}$$

olur. (5.206), (5.216) ve (5.223) eşitlikleri (2.15) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} H(e_2,e_1)e_1 &= R(e_2,e_1)e_1 - \frac{1}{3-2}[S(e_1,e_1)e_2 + g(e_1,e_1)Qe_2] \\ &= -\frac{4}{z^2}e_2 + (\frac{20}{z^2})e_2 \end{aligned} \tag{5.229}$$

bulunur. (2.14) quasi konformal eğrilik tensörü tanımında (5.204) eşitliği kullanılırsa

$$C(e_1,e_2)e_3 = aR(e_1,e_2)e_3 = 0 \tag{5.230}$$

olarak bulunur. (5.210), (5.218) ve (5.222) eşitlikleri (2.14) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} C(e_1,e_3)e_3 &= aR(e_1,e_3)e_3 + b[S(e_3,e_3)e_1 + g(e_3,e_3)Qe_1] - \frac{r}{3}(\frac{a}{3-1} + 2b)[g(e_3,e_3)e_1] \\ &= -\frac{6a}{z^2}e_1 - \frac{22b}{z^2}e_1 - \frac{r}{3}(\frac{a}{2} + 2b)e_1 \end{aligned} \tag{5.231}$$

elde edilir. (2.14) eşitliğinde (5.211) ifadesi kullanılırsa

$$C(e_1,e_3)e_2 = aR(e_1,e_3)e_2 = 0 \tag{5.232}$$

olur. (5.212), (5.216) ve (5.224) eşitlikleri (2.14) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} C(e_3,e_1)e_1 &= aR(e_3,e_1)e_1 + b[S(e_1,e_1)e_3 + g(e_1,e_1)Qe_3] - \frac{r}{3}(\frac{a}{3-1} + 2b)[g(e_1,e_1)e_3] \\ &= -\frac{6a}{z^2}e_3 - \frac{22b}{z^2}e_3 - \frac{r}{3}(\frac{a}{2} + 2b)e_3 \end{aligned} \tag{5.233}$$

bulunur. (5.212), (5.216) ve (5.224) eşitlikleri (2.14) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} C(e_2,e_1)e_1 &= aR(e_2,e_1)e_1 + b[S(e_1,e_1)e_2 + g(e_1,e_1)Qe_2] - \frac{r}{3}(\frac{a}{3-1}+2b)[g(e_1,e_1)e_2] \\ &= [-\frac{4a}{z^2} - \frac{20b}{z^2} - \frac{r}{3}(\frac{a}{2}+2b)]e_2 \end{aligned} \tag{5.234}$$

elde edilir. Skalar eğrilik $\widetilde{r} = -\dfrac{32}{z^2}$ kullanılır ve $a = b = 1$ alınırsa

$$C(e_2,e_1)e_1 = \frac{8}{3z^2}e_2$$

olur.

O halde (2.37) ve (5.203) ifadeleri kullanılarak

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 = \nabla_{e_1}e_1 + \eta(e_1)e_1 = \frac{2}{z}e_3, \tag{5.235}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 = \nabla_{e_1}e_2 + \eta(e_2)e_1 = 0, \tag{5.236}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 = \nabla_{e_1}e_3 + \eta(e_3)e_1 = -\frac{2}{z}e_1 + e_1, \tag{5.237}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 = \nabla_{e_2}e_1 + \eta(e_1)e_2 = 0, \tag{5.238}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 = \nabla_{e_2}e_2 + \eta(e_2)e_2 = \frac{2}{z}e_3, \tag{5.239}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 = \nabla_{e_2}e_3 + \eta(e_3)e_2 = -\frac{2}{z}e_2 + e_2, \tag{5.240}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1 = \nabla_{e_3}e_1 + \eta(e_1)e_3 = 0, \tag{5.241}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2 = \nabla_{e_3}e_2 + \eta(e_2)e_3 = 0, \tag{5.242}$$

ve son olarak

$$\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3 = \nabla_{e_3}e_3 + \eta(e_3)e_3 = e_3 \tag{5.243}$$

bulunur. Yapılan hesaplar sonucunda

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{e_1}e_1 &= \frac{2}{z}e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_1 &= 0, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_1 &= 0, \\ \widetilde{\nabla}_{e_1}e_2 &= 0, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 &= \frac{2}{z}e_3, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_2 &= 0, \\ \widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 &= (-\frac{2}{z}+1)e_1, & \widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 &= (-\frac{2}{z}+1)e_2, & \widetilde{\nabla}_{e_3}e_3 &= e_3 \end{aligned} \tag{5.244}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.6) eşitliğinde (5.244) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_1,e_2)e_3 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_2]}e_3\\ &= -\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2+\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1-\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1\\ &= 0\end{aligned} \tag{5.245}$$

bulunur. Benzer şekilde (5.245) eşitliğinde e_1, e_2 ve e_3 ün döndürülmesi ile

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_1,e_2)e_2 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2-\widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_2]}e_2\\ &= \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_2}0\\ &= \frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)\\ &= (-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z})e_1,\end{aligned} \tag{5.246}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_2,e_1)e_1 &= \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1-\widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1-\widetilde{\nabla}_{[e_2,e_1]}e_1\\ &= \frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_1}0\\ &= (-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z})e_2,\end{aligned} \tag{5.247}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_2,e_3)e_3 &= \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3-\widetilde{\nabla}_{[e_2,e_3]}e_3\\ &= \widetilde{\nabla}_{e_2}e_3+\widetilde{\nabla}_{e_3}(\frac{2}{z}e_2-e_2)+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3\\ &= -\frac{2}{z}e_2+e_2+e_3(\frac{2}{z})e_2+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2\\ &\quad -\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2+\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_2+e_2)\\ &= -\frac{6}{z^2}e_2+e_2,\end{aligned} \tag{5.248}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_3,e_2)e_2 &= \widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2-\widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2-\widetilde{\nabla}_{[e_3,e_2]}e_2\\ &= \widetilde{\nabla}_{e_3}(\frac{2}{z}e_3)-\widetilde{\nabla}_{e_3}0-\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\\ &= e_3(\frac{2}{z})e_3+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2\\ &= -\frac{6}{z^2}e_3+\frac{2}{z}e_3,\end{aligned} \tag{5.249}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_2,e_3)e_1 &= \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1-\widetilde{\nabla}_{[e_2,e_3]}e_1\\ &= \widetilde{\nabla}_{e_2}0-\widetilde{\nabla}_{e_3}0+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_1\\ &= 0,\end{aligned} \tag{5.250}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_1,e_3)e_3 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_3]}e_3\\ &= \widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_3}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3\\ &= -\frac{2}{z}e_1+e_1+e_3(\frac{2}{z})e_1+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1\\ &\quad +\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)\\ &= -\frac{2}{z}e_1+e_1-\frac{2}{z^2}e_1+\frac{2}{z}(-\frac{2}{z}e_1+e_1)\\ &= -\frac{6}{z^2}e_1+e_1,\end{aligned} \tag{5.251}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_1,e_3)e_2 &= \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_2-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_3]}e_2\\ &= \widetilde{\nabla}_{e_1}0-\widetilde{\nabla}_{e_3}0+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_2\\ &= 0\end{aligned} \tag{5.252}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(e_3,e_1)e_1 &= \widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1-\widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_1-\widetilde{\nabla}_{[e_3,e_1]}e_1\\ &= \widetilde{\nabla}_{e_3}(\frac{2}{z}e_3)-\widetilde{\nabla}_{e_1}0-\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1\\ &= e_3(\frac{2}{z})e_3+\frac{2}{z}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\frac{2}{z}(\frac{2}{z}e_3)\\ &= -\frac{6}{z^2}e_3+\frac{2}{z}e_3\end{aligned} \tag{5.253}$$

$$\widetilde{R}(e_1,e_1)e_1 = \widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1-\widetilde{\nabla}_{e_1}\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1-\widetilde{\nabla}_{[e_1,e_1]}e_1=0 \tag{5.254}$$

$$\widetilde{R}(e_2,e_2)e_2 = \widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2-\widetilde{\nabla}_{e_2}\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2-\widetilde{\nabla}_{[e_2,e_2]}e_2=0 \tag{5.255}$$

$$\widetilde{R}(e_3,e_3)e_3 = \widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_3}\widetilde{\nabla}_{e_3}e_3-\widetilde{\nabla}_{[e_3,e_3]}e_3=0 \tag{5.256}$$

elde edilir. $i\neq j$ iken $\widetilde{S}(e_i,e_j)=0$ özelliğinden faydalanarak (2.8) ifadesinde (5.246) ve (5.251) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(e_1,e_1) &= g\left(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_2,e_1\right)+g\left(\widetilde{R}(e_1,e_3)e_3,e_1\right)\\ &= (-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z})g(e_1,e_1)+(-\frac{6}{z^2}+1)g(e_1,e_1)\\ &= -\frac{10}{z^2}+\frac{2}{z}+1\end{aligned} \tag{5.257}$$

bulunur. (2.8) ifadesinde (5.247) ve (5.248) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(e_2,e_2) &= g\left(\widetilde{R}(e_2,e_1)e_1,e_2\right)+g\left(\widetilde{R}(e_2,e_3)e_3,e_2\right)\\ &= (-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z})g(e_2,e_2)+(-\frac{6}{z^2}+1)g(e_2,e_2) \qquad (5.258)\\ &= -\frac{10}{z^2}+\frac{2}{z}+1\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.8) ifadesinde (5.249) ve (5.253) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(e_3,e_3) &= g\left(\widetilde{R}(e_3,e_1)e_1,e_3\right)+g\left(\widetilde{R}(e_3,e_2)e_2,e_3\right)\\ &= (-\frac{6}{z^2}+\frac{2}{z})g(e_3,e_3)+(-\frac{6}{z^2}+\frac{2}{z})g(e_3,e_3) \qquad (5.259)\\ &= -\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z}\end{aligned}$$

elde edilir. Skalar eğrilik ise $\widetilde{r}=\widetilde{S}(e_1,e_1)+\widetilde{S}(e_2,e_2)+\widetilde{S}(e_3,e_3)=-\frac{32}{z^2}+\frac{8}{z}+2$ dir. (5.245) ifadesi (2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$\widetilde{P}(e_1,e_2)e_3 = \widetilde{R}(e_1,e_2)e_3-\frac{1}{2}\{\widetilde{S}(e_2,e_3)e_1-\widetilde{S}(e_1,e_3)e_2\}=0 \qquad (5.260)$$

bulunur. (5.251) ve (5.259) ifadeleri (2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(e_1,e_3)e_3 &= \widetilde{R}(e_1,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{\widetilde{S}(e_3,e_3)e_1-\widetilde{S}(e_1,e_3)e_3\}\\ &= -\frac{6}{z^2}e_1+e_1-\frac{1}{2}\{(-\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z})e_1-0e_3\} \qquad (5.261)\\ &= -\frac{2}{z}e_1\end{aligned}$$

olur. Son olarak (5.248) ve (5.259) ifadeleri (2.16) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(e_2,e_3)e_3 &= \widetilde{R}(e_2,e_3)e_3-\frac{1}{2}\{\widetilde{S}(e_3,e_3)e_2-\widetilde{S}(e_2,e_3)e_3\}\\ &= -\frac{6}{z^2}e_2+e_2-\frac{1}{2}\{(-\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z})e_2-0e_3\} \qquad (5.262)\\ &= -\frac{2}{z}e_2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

(2.8) ifadesinde (5.246) ve (5.251) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}e_1 &= -\widetilde{R}(e_1,e_1)e_1-\widetilde{R}(e_2,e_1)e_2-\widetilde{R}(e_3,e_1)e_3\\ &= (-\frac{10}{z^2}+\frac{2}{z}+1)e_1\end{aligned} \qquad (5.263)$$

bulunur. (2.8) ifadesinde (5.247) ve (5.248) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}e_2 &= -\widetilde{R}(e_1,e_2)e_1-\widetilde{R}(e_2,e_2)e_2-\widetilde{R}(e_3,e_2)e_3\\ &= (-\frac{10}{z^2}+\frac{2}{z}+1)e_2\end{aligned} \qquad (5.264)$$

elde edilir. (2.8) ifadesinde (5.249) ve (5.253) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}e_3 &= -\widetilde{R}(e_1,e_3)e_1 - \widetilde{R}(e_2,e_3)e_2 - \widetilde{R}(e_3,e_3)e_3 \\ &= (-\frac{12}{z^2}+\frac{4}{z})e_3 \end{aligned} \tag{5.265}$$

bulunur. (2.15) konharmonik eğrilik tensörü tanımında (5.245) ifadesi kullanılırsa

$$\widetilde{H}(e_1,e_2)e_3 = \widetilde{R}(e_1,e_2)e_3 = 0 \tag{5.266}$$

elde edilir. (5.251), (5.259) ve (5.263) eşitlikleri (2.15) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(e_1,e_3)e_3 &= \widetilde{R}(e_1,e_3)e_3 - \frac{1}{3-2}[\widetilde{S}(e_3,e_3)e_1 + g(e_3,e_3)\widetilde{Q}e_1] \\ &= (\frac{16}{z^2}-\frac{6}{z})e_1 \end{aligned} \tag{5.267}$$

bulunur. (5.252) ifadesi (2.15) eşitliğinde kullanılırsa

$$\widetilde{H}(e_1,e_3)e_2 = \widetilde{R}(e_1,e_3)e_2 = 0 \tag{5.268}$$

elde edilir. (2.15) ifadesinde (5.253), (5.257) ve (5.265) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(e_3,e_1)e_1 &= \widetilde{R}(e_3,e_1)e_1 - \frac{1}{3-2}[\widetilde{S}(e_1,e_1)e_3 + g(e_1,e_1)\widetilde{Q}e_3] \\ &= (-\frac{28}{z^2}+\frac{8}{z}+1)e_3 \end{aligned} \tag{5.269}$$

olur. (5.247), (5.257) ve (5.264) eşitlikleri (2.15) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(e_2,e_1)e_1 &= \widetilde{R}(e_2,e_1)e_1 - \frac{1}{3-2}[\widetilde{S}(e_1,e_1)e_2 + g(e_1,e_1)\widetilde{Q}e_2] \\ &= (-\frac{24}{z^2}+\frac{6}{z}+2)e_2 \end{aligned} \tag{5.270}$$

bulunur. (2.49) tanımında (5.245) eşitliği kullanılırsa

$$\widetilde{C}(e_1,e_2)e_3 = a\widetilde{R}(e_1,e_2)e_3 = 0 \tag{5.271}$$

olarak bulunur. (5.251), (5.259) ve (5.263) eşitlikleri (2.49) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(e_1,e_3)e_3 &= a\widetilde{R}(e_1,e_3)e_3 + b[\widetilde{S}(e_3,e_3)e_1 + g(e_3,e_3)\widetilde{Q}e_1] - \frac{r}{3}(\frac{a}{3-1}+2b)[g(e_3,e_3)e_1] \\ &= [(-\frac{6}{z^2}+1)a + (-\frac{22}{z^2}+\frac{6}{z}+1)b - \frac{r}{3}(\frac{a}{2}+2b)]e_1 \end{aligned} \tag{5.272}$$

elde edilir. (2.49) eşitliğinde (5.252) ifadesi kullanılırsa

$$\widetilde{C}(e_1,e_3)e_2 = a\widetilde{R}(e_1,e_3)e_2 = 0 \tag{5.273}$$

olur. (5.253), (5.257) ve (5.265) eşitlikleri (2.49) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(e_3,e_1)e_1 &= a\widetilde{R}(e_3,e_1)e_1+b[\widetilde{S}(e_1,e_1)e_3+g(e_1,e_1)\widetilde{Q}e_3]-\frac{r}{3}(\frac{a}{3-1}+2b)[g(e_1,e_1)e_3] \\ &= [(-\frac{6}{z^2}+\frac{2}{z})a+(-\frac{22}{z^2}+\frac{6}{z}+1)b-\frac{r}{3}(\frac{a}{2}+2b)]e_3\end{aligned} \tag{5.274}$$

bulunur. (5.247), (5.257) ve (5.264) eşitlikleri (2.49) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(e_2,e_1)e_1 &= a\widetilde{R}(e_2,e_1)e_1+b[\widetilde{S}(e_1,e_1)e_2+g(e_1,e_1)\widetilde{Q}e_2]-\frac{r}{3}(\frac{a}{3-1}+2b)[g(e_1,e_1)e_2] \\ &= [(-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z})a+(-\frac{20}{z^2}+\frac{4}{z}+2)b-\frac{r}{3}(\frac{a}{2}+2b)]e_2\end{aligned} \tag{5.275}$$

elde edilir. Skalar eğrilik $r=-\frac{32}{z^2}$ kullanılır ve $a=b=1$ alınırsa

$$\widetilde{C}(e_2,e_1)e_1 = [\frac{8}{3z^2}+\frac{6}{z}+2]e_2$$

olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Kenmotsu manifoldları üzerinde Ricci solitonların incelenmesi, sınıflandırılması ve bazı eğrilik şartlarına göre Ricci solitonların adlandırılması yapıldı. Kenmotsu manifoldlarda yine Ricci soliton hesaplamaları gerçekleştirildi ve bu Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı eğrilik şartları çalışıldı. Daha sonra koneksiyondaki değişiklik ile Kenmotsu manifoldunda gerçekleştirilen Ricci soliton hesaplamaları ve bazı eğrilik şartları semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldlarına uygulandığında ne gibi sonuçlarla karşılaşılabileceği araştırıldı. Bu araştırmalar; $\widetilde{B}$ C-Bochner eğrilik tensörü, $\widetilde{S}$ Ricci tensör, $\widetilde{C}$ quasi-konformal eğrilik tensörü, $\widetilde{P}$ Weyl-projektif eğrilik tensörü, $\widetilde{H}$ konharmonik eğrilik tensörü, $\widetilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve $\overline{\widetilde{P}}$ pseudo projektif eğrilik tensörleri olmak üzere semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Kenmotsu manifoldlarında

$$
\begin{array}{llll}
\widetilde{B}(\xi,X).\widetilde{S}=0, & \widetilde{H}(\xi,X).\widetilde{S}=0, & \widetilde{R}(\xi,X).R=0, & \widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{C}=0, \\
\widetilde{C}(\xi,X).\widetilde{S}=0, & \widetilde{P}(\xi,X).\widetilde{C}=0, & \widetilde{R}(\xi,X).\widetilde{R}=0, & \widetilde{R}(\xi,X).\overline{\widetilde{P}}=0,
\end{array}
$$

eğrilik şartlarını sağlayan Ricci solitonlar üzerine yapıldı. Buna göre λ ya bağlı olarak Ricci solitonların daralan veya genişleyen oldukları gösterildi.

Üç boyutlu Kenmotsu ve f-Kenmotsu manifoldlarda Ricci Solitonlar ile ilgili bazı eğrilik şartlarının özellikleri üzerine incelemeler yapılarak, metrik ve koneksiyonun değiştirilmesi halinde yapılacak hesaplamalar ile ilgili bazı açık problemler bulunabilir. Ayrıca α-Sasakain manifold, Trans-Sasakian manifold gibi manifold değişimi ve çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyon, semi-simetrik semimetrik koneksiyon gibi koneksiyon değişimi yapıldığında Ricci solitonlar için karşımıza çıkabilecek problemlerin çözümü halinde ilgili bazı sınıflandırmalara ve geometrik yorumlara ulaşılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Agashe, S., Chafle, R., 1992, A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, Indian Journal Pure Applications, 23, 6, 399-409.

Amur, K, Pujar, S. S., 1978, On submanifolds of a Riemannian manifold admitting a metric semi-symmetric connection, Tensor, New. Series, 32, 35-38.

Andonie, O. C., 1976, On a semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, Annales de la Facult*é*. des Sciences de Kinshasa, Zaire Section Mathematiques Physique, 2, 143-152.

Bagewadi, C. S., Ingalahalli, G., 2012, Ricci solitons in α-Sasakain manifolds, ISRN Geometry, p.13.

Bagewadi, C. S., Ingalahalli, G., Ashoka., S. R., 2013, A study on Ricci solitons in Kenmotsu manifolds, Hindawi Publishing Corporation ISRN Geometry, Vol. 2013, p.6.

Barua, B., Mukhopadyay, S., 1992, A sequence of semi-symmetric connections on a Riemannian manifold, Proceedings of Seventh National Seminar on Finsler, Lagrange and Hamiltonian Spaces.

Bejan, C.L., Crasmareanu, M., 2011, Ricci solitons in manifolds with quasi-constant curvature, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 78, 1, 235-243.

Binh, T.Q., 1990, On semi-symmetric connections, Periodica Mathematics. Hungerica, 21, 101-107.

Blair, D.E., 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p.25.

Blair, D.E., 2002, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Birkhäuser, Boston, p.33.

Boothby, W.M., 1986, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, Florida Inc., Second Edition, p.430.

Călin, C., Crasmareanu, M., 2010, From the Eisenhart problem to Ricci solitons in f-Kenmotsu manifolds, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 33, 3, 361–368.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Chaubey, S.K., Ojha, R. H., 2011, On a semi-symmetric non-metric connection, Filomat, 25, 4, 19–27.

Chen, B.Y., 1973, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker, Inc., New York, Pure and Applied Mathematics, No. 22, p.298.

Chow, B., Knopf, D., 2004, The Ricci flow: An introduction, mathematical surveys and monographs, 110, A.M.S., p.325.

De, A., 2010, On Kenmotsu manifold, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2, 3, 1-6.

De, U.C., 1990, On a type of semi-symmetric connection on a Riemannian manifold, Indian Journal Pure Applications Mathematics, 21, 334–338.

De, U.C., Tripathi, M.M., 2003, Ricci tensor in 3-dimensional Trans-Sasakian manifolds, Kyungpook Mathematical Journal, 43, 247–255.

De, U.C., Pathak, G., 2004, On 3-dimensional Kenmosu Manifolds, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 35, 159–165.

De, U.C., Sarkar, A., 2008, On three-dimensional Trans-Sasakian manifolds, Extracta Mathematicae, 23, 265–277.

De, U.C., Shaikh, A.A., 2009, Differential geometry of manifolds, Alpha Science International Ltd., p.239, 262, 269.

Demirli, T., 2014, $f-$Kenmotsu manifoldlar ve Ricci solitonlar üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, s.91.

Duggal, K.L., Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Mathematics and its Applications, Dordrecht, p.303.

Duggal, K.L., Şahin, B.,2010, Differential geometry of lightlike submanifolds, Birkhäuser, Verlag AG Basel Boston Berlin, p.85-96.

Friedan, D., 1985, Non linear models in $(n+2)$-dimensions, Annals of Physics, 163, 318–419.

Friedman, A., Schouten, A., J. A., 1924, Über die geometric der halbsymmetrischen Übertragung, Math., Zeitschr., 21, 211-223.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Hayden, H.A., 1932, Subspaces of space with torsion, Proc. London Math. Soc.,34, 27-50.

Hacısalihoğlu, H.H., 1998, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, s.269.

Hacısalihoğlu, H.H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi, s.251.

Hacısalihoğlu, H.H., 2004, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, s.206.

Hamilton, R.S., 1988, The Ricci flow on surfaces, American Mathematical Society, 71, 237–262.

Ingalahalli, G., Bagewadi, C.S., 2012, Ricci solitons in Lorentzian α-Sasakain manifolds, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 28, 1, 59-68.

Ivey, T., 1993, Ricci solitons on compact 3-manifolds, Differential Geometry and its Applications, 3, 301–307.

Jun, J.B.,De, U.C.,Pathak, G., 2005, On Kenmotsu manifolds, Journal of the Korean Mathematical Society, 42, 435-445.

Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, The Tohoku Mathematical Journal, 24, 93–103.

Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, p.380.

Liang, K.C., 1972, A nonoscillation theorem for the superlinear case of second order differential equations, SIAM Journal on Applied Mathematics, 23, 4, 456-459.

Murathan, C. and Özgür, C., 2008, Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 57, 4, 210–216.

Nagaraja, H.G., Premalatha, C.R., 2012, Ricci solitons in Kenmotsu manifolds, Journal of Mathematical Analysis, 3, 2, 18–24.

Olszak, Z., Rosca, R., 1991, Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, Publicationes Mathematicae Debrecen, 39, 3, 315-323.

O’Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, p.468.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Oubina, J.A., 1985, New class of almost contact metric manifolds, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 32, 187–193.

Özen, Z.F., Uysal, S.A, Demirbağ, S.A.,.2011, On sectional curvature of a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection, Annales Polonici Mathematici, 101, 131–138.

Özgür, C., Sular, S., 2011, Warped product manifolds with semi-symmetric metric connections, Taiwan Journal of Mathematics, 15, 1701-1719.

Özgür, C., Sular, S., 2014, Generalized Sasakian space forms with semi-symmetric metric connections, Analele Stiint. University Alexandru Ioan Cuza Iasi. Mathematics (N. S.), 145-155.

Prasad, B., Verma, R.K., 2005, On Kenmotsu manifold, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1, 54, 2, 1–6.

Prvanovic, M., 1975, On pseudo metric semi-symmetric connections, Publication De L'Institut Mathematic Nouvelle Series, 18, 32, 157–164.

Salimov, A., Mağden, A., 2008, Diferensiyel geometri, Aktif Yayınevi, s.303.

Sengupta, J., De, U.C. and Binh, T.Q., 2000, On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 31, 1659-1670.

Sharma, R., B.B. Sinha, 1983, On para-A-Einstein manifolds, Publications De L'institut Mathematique, 34, 48, 211-215.

Sharma, R., 2008, Certain results on K-contact and (k,μ)-contact manifolds, Journal of Geometry, 89, 138–147.

Shukla, S.S., Singh, D.D., 2010, On (ξ)-Trans-Sasakian manifolds, International Journal of Mathematical Analysis, 4, 49, 2401 - 2414.

Singh, R.N., Pandey, M.K.,2008, On a type of semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 16, 179-184.

Spivak, M., 1979, Differential geometry, Berkeley, CA: Publish or Perish Press, II., III., IV., p.491.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Sular, S., Özgür, C., 2011, Generalized Sasakian space forms with semi-symmetric non-metric connections, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Mathematics, 60, 4, 251–257.

Şahin, B., 2012, Manifoldların diferensiyel geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık, s.26-29.

Tanno, S., 1969, The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, The Tohoku Mathematical Journal, 40, 3, 441-448.

Tanno, S., 1988, Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds, The Tohoku Mathematical Journal, 21, 21-38.

Tripathi, M.M., 2008, Ricci solitons in contact metric manifolds, http://arxiv. org / abs / 0801.4222, p.9.

Turan, M., De U.C. and Yıldız, A., 2012, Ricci solitons and gradient Ricci solitons in three-dimensional trans-Sasakian manifolds, Filomat, 26, 2, 363-370.

Willmore, T.J., 1959, An introduction to differentiable geometry, Oxford University Press, p.317.

Yano, K., Sawaki, S., 1968, Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, Journal of Differential Geometry, 2, 2, 161-184.

Yano, K., 1970, On semi-symmetric connection, Revue Roumanie de Mathematique Pures et Appliques, 15, 1570-1586.

Yano, K., Kon, M., 1984, CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds, Birkhäuser Mathematics, p.208.

Yıldız, A., Uday, C.D. and Acet, B.E., 2009, On Kenmotsu manifolds satisfying certain curvature conditions, SUT Journal of Mathematics, 45, 2, 89–101.

Yıldız, A., Çetinkaya, A., 2013, Kenmotsu manifolds with the semi-symmetric non-metric connection, Ordu Üniversitesi, 11. Geometri Sempozyumu, 1-5 Temmuz, preprint.

Yıldız, A., De, U.C., Turan, M., 2013, On 3-dimensional f-Kenmotsu manifolds and Ricci solitons, Ukrainian Mathematical Journal, 65, 5, 620-628.

Zhen, G., Cabrerizo, J.L., Fernández, L.M., Fernández, M., 1997, On ξ-conformally flat contact metric manifolds, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 28, 6, 725–734.