Sol Hall Sistemi Üzerinde Kurulan 9. Mertebeden
Projektif Düzlemin Fano Konfigürasyonları Üzerine

Mustafa TAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2015

On the Fano Configurations of Projektive Plane
of order 9 Founded over Left Hall System

Mustafa TAŞ

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

January 2015

Sol Hall Sistemi Üzerinde Kurulan 9. Mertebeden
Projektif Düzlemin Fano Konfigürasyonları Üzerine

Mustafa TAŞ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya AKÇA

Bu Tez BAP tarafından **"\201319A111\"** no'lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.

Ocak 2015

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mustafa TAŞ'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı **"Sol Hall Sistemi Üzerinde Kurulan 9. Mertebeden Projektif Düzlemin Fano Konfigürasyonları Üzerine"** başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ziya AKÇA

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya AKÇA danışmanlığında hazırlamış olduğum "Sol Hall Sistemi Üzerinde Kurulan 9. Mertebeden Projektif Düzlemin Fano Konfigürasyonları Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANStezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.23/01/2015

Mustafa TAŞ

İmza

ÖZET

Bu çalışmada, birinci bölümde sol yaklaşık cisim, projektif düzlem ve projektif düzlemin koordinatlanması ile ilgili tanım ve kavramlar veriliyor. İkinci bölümde Sol Hall Sistemi (sol yaklaşık cisim) üzerinde kurulan 9. Mertebeden bir projektif düzlem inşa ediliyor. Daha sonra bu projektif düzlemin Fano konfigürasyonları inceleniyor ve sonuçlar bulunuyor.

Anahtar Kelimeler: Sol yaklaşık cisim, Projektif düzlem, Fano düzlemi.

SUMMARY

In this study, in the first section, the definitions and concepts related to left near-field, finite projective plane and coordinate projective plane are given. In the second section, a projective plane of order 9 is constructed. Then the Fano configurations in this projective plane are investigated and result are presented.

Keywords: Left near-field, Projective plane, Fano plane.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Prof. Dr. Ziya AKÇA

başta olmak üzere tez sürecinde ve diğer zamanlarda benden yardımlarını esirgemeyen
Doç. Dr. Ayşe BAYAR'a, **Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ**'ye
ayrıca yazım aşamasında Scientific Workplace programını kullanmamda ve öğrenmemde bana destek olan
Prof. Dr. Mahmut KOÇAK'a, **Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN**'e,
her zaman bana destek olan
sevgili aileme, dost ve arkadaşlarıma
sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

BÖLÜM 1

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Giriş

Önce projektif geometrinin, bu çalışmada geçen bazı temel kavramlarını kısaca verelim.

Tanım 1.1.1 *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olarak isimlendirilen ayrık iki cümle ve $\circ$ $\mathcal{N}$ den $\mathcal{D}$ ye bir üzerinde olma bağıntısı iken $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sıralı üçlüsüne bir* ***geometrik yapı*** *denir.*

Tanım 1.1.2 *Aşağıdaki üç aksiyomu sağlayan bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ geometrik yapısına bir* ***projektif düzlem*** *denir ve $\mathbb{P}$ ile gösterilir. Şayet, $\mathcal{N}$ sonlu ise $\mathbb{P}$ projektif düzlemine* ***sonlu projektif düzlem*** *adı verilir.*

P1. Herhangi farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

P2. Herhangi iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

$\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminin bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğine $\mathbb{P}$ nin ***mertebesi*** *denir. Sonlu bir projektif düzlemin mertebesi n ise toplam nokta ve doğrularının sayısı eşit ve $n^2 + n + 1$ dir.*

Projektif düzlemde P2 aksiyomundan daha kuvvetli ve kesin bir önerme geçerlidir.

Teorem 1.1.3 *Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru birtek noktada kesişirler.*

Tanım 1.1.4 *A, B, C, D hepsi aynı profektif düzlemde bulunan ve herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. Bu noktaları ikişer ikişer birleştiren doğruların* *çizilmesi ve bulunan doğruların ikişer ikişer kesiştirilmesiyle elde edilen altı doğru ve yedi noktadan oluşan bir konfigürasyona* ***tamdörtgen*** *denir. Ayrıca A, B, C, D noktalarına tamdörtgenin* ***köşeleri,*** *AB ve CD, AC ve BD, BC ve AD doğru ikililerine tamdörtgenin* ***karşılıklı kenarları,*** *karşılıklı kenarların kesişme noktalarına, yani $U = AB \cap CD$, $V = AC \cap BD$, $W = AD \cap BC$ noktalarına tamdörtgenin* ***köşe noktaları*** *denir.*

Tanım 1.1.5 *İçindeki bütün tamdörtgenlerin köşegen noktaları doğrudaş olan projektif düzleme* ***Fano düzlemi*** *denir. Eğer bir Fano düzlemi diğer Fano düzleminden enaz bir farklı nokta kapsıyorsa, bu fano düzlemine* ***Farklı Fano düzlemi*** *denir.*

Aksiyom: (Fano Aksiyomu) Kapsadığı herbir tamdörtgenin köşegen noktaları doğrudaş olmayan noktalardır.

Tanım 1.1.6 $\mathbb{P}= (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *ve* $\mathbb{P}'= (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ *iki projektif düzlem olsun. Eğer* $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ *ve her* $d' \in D'$ *doğrusu için* $d' = d \cap \mathcal{N}'$ *olacak biçimde bir* $d \in D$ *doğrusu varsa* $\mathbb{P}'$ *ye* $\mathbb{P}$ *nin* ***projektif altdüzlemi*** *denir. Eğer* $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$ *ise* $\mathbb{P}'$ *ye* $\mathbb{P}$ *nin* ***projektif öz altdüzlemi*** *denir.*

Teorem 1.1.7 $\mathbb{P}$, *mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve* $\mathbb{P}'$ *de* $\mathbb{P}$ *nin, mertebesi m olan bir projektif öz altdüzlemi olsun. Eğer* $\mathbb{P}$ *nin her doğrusu* $\mathbb{P}'$ *nün bir noktasını kapsarsa* $n = m^2$, *aksi halde* $n \geq m^2 + m$ *dir.*

Tanım 1.1.8 $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *ve* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ *herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer* $f : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$ *fonksiyonu,*

(1) $f(N) \subseteq \mathcal{N}'$,

(2)$f(D) \subseteq \mathcal{D}'$,

(3) Her $N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}$ *ve* $N \circ d \Rightarrow f(N) \circ' f(d)$

koşullarını da sağlıyorsa f ye $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *dan* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ *ye bir* ***homomorfizm*** *denir.*

Tanım 1.1.9 *Bire-bir ve örten özelliği bulunan homomorfizme* ***izomorfizm*** *denir.*

Tanım 1.1.10 *Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme de* ***kolinasyon*** *veya* ***otomorfizm*** *denir.*

Tanım 1.1.11 *$\mathbb{P}$ projektif düzleminin $G(\mathbb{P})$ kolinasyonlar grubunun peryodu 2 olan birimden farklı her elemanına bir **involusyonlu kolinasyon** ya da **involusyon** denir.*

Tanım 1.1.12 *$F = \{(a,b) \mid a,b \in D\}$ olmak üzere,*

$(a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

biçiminde $+$ ve $\times$ ikili işlemleri tanımlansın.

(1) $(F,+)$ birim elaman $0 = (0,0)$ ile bir değişmeli grup,

(2) $(F - \{0\}, .)$ birim eleman $1 = (1,0)$ ile bir grup,

(3) $\times$, $+$ üzerine sağdan dağılmalıdır.

(4) $(a,b) \times 0 = 0$, her $(a,b) \in F$ için.

*(1), (2), (3), (4) ten F, 9. mertebeden bir yaklaşık cisimdir. Ayrıca $\times$, değişmeli de olduğundan soldan da dağılmalıdır. O halde; $(F,+,\times)$ sitemine 9. mertebeden **Galois cismi** denir.*

Teorem 1.1.13 ***(P4 Dezarg Teoremi)*** *İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşsa, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır.*

Tanım 1.1.14 *Herhangi bir $(\mathcal{S},+,.)$ sistemi eğer bir $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ lineer üçlü halkasından $\mathcal{T}(1,a,b) = a+b$ ve $\mathcal{T}(a,b,0) = ab$ ile elde edilen cebirsel yapıysa buna **düzlemsel halka** denir.*

Tanım 1.1.15 *$(S,+,.)$ sistemi bir düzlemsel halka olmak üzere T üçlü işlemi,*

$T : S^3 \longrightarrow S$

$(a,b,c) \longrightarrow T(a,b,c) = ab + c$

*şeklinde tanımlanırsa (S,T) ikili sistemine bir **lineer üçlü halka** denir.*

Tanım 1.1.16 *(S,T) bir lineer üçlü halka olsun. (S,T) ikili sistemine bir lineer üçlü halkasında $+$ işlemi asosyatif ise, (S,T) ye bir **kartezyen grup** denir.*

Tanım 1.1.17 *Soldan dağılma özelliği bulunan herhangi bir kartezyen gruba **sol yarıcisim** denir.*

Teorem 1.1.18 *Herhangi bir* $(S,+,.)$ *sisteminin* $T(a,b,c) = a.b + c$ *üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen* (S,T) *ikilisinin bir sol yaklaşık cisim olması için gerek ve yeter koşullar*

i. (S,T) *nin (birim elemanı 0 olan) bir grup olması,*

ii. $(S - \{0\}, .)$ *nın (birim elemanı 1 olan) bir grup olması,*

iii. $\forall\ x \in S$ *için* $x.0 = 0$ *olması,*

iv. $\forall\ x, y, z \in S$ *için* $x.(y + z) = x.y + x.z$ *olması,*

v. $a \neq b$ *olmak üzere verilen* $\forall\ a, b, c \in S$ *için* $xa - xb = c$ *denkleminin bir tek* $x \in S$ *çözümünün bulunmasıdır.*

Sol yarıcisimlerin bazı özellikleri de şu şekilde sıralanabilir.

(a) Verilen herhangi $a, b \in S, a \neq 1$ için $ax + b = x$ ve $xa + b = x$ denklemlerinin birer tek $x \in S$çözümleri vardır.

(b) Her $x, y \in S$ için, $x + y = y + x$ tir.

Örnek 1.1.19 *Hall sistemleri (Hall, 1959):F verilen herhangi bir cisim,* $f(t) = t^2 - rt - s$ *de bu cisim üzerinde ikinci dereceden indirgenemez bir polinom olsun. Şimdi*

$$S = \{a + \lambda b \mid a, b \in F, \lambda \notin F\}$$

olmak üzere;

$$(a + \lambda b) \oplus (c + \lambda d) = (a + c) + \lambda (b + d)$$

$$(a + \lambda b) \odot (c + \lambda d) = \begin{cases} ac + \lambda(ad) & ,b = 0 \text{ ise} \\ ac - db(a^2 + 1) + \lambda(bc - ad) & ,b \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $(S, \oplus, \odot)$ *sistemi bir sol yarıcisimdir.*

Tanım 1.1.20 *Çarpma işlemi birleşmeli olan herhangi* (S,T) *sol yarıcismine, yani,*

(1) $\mathcal{T}$ *lineer,*

(2) $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ *bir değişimli grup ve* $(\mathcal{S} - \{0\}, .)$ *bir grup,*

(3) *Her* $a, b, c \in \mathcal{S}$ *için* $a(b + c) = ab + ac$, *özelliklerine sahip* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ *üçlü halkasına* ***sol yaklaşık cisim*** *denir. Benzer olarak çarpma işlemi birleşimli olan herhangi sağ yarıcisme* ***sağ yaklaşık cisim*** *denir.*

Tanım 1.1.21 *Herhangi bir* (S,T) *üçlü halkasının* T *işleminin,*

$x+y = T(1,x,y)$ *ve* $x.y = T(x,y,0)$ *biçiminde tanımlanan özel hallerine sırasıyla* S *üzerinde* ***toplama ve çarpma (ikili) işlemleri*** *denir.*

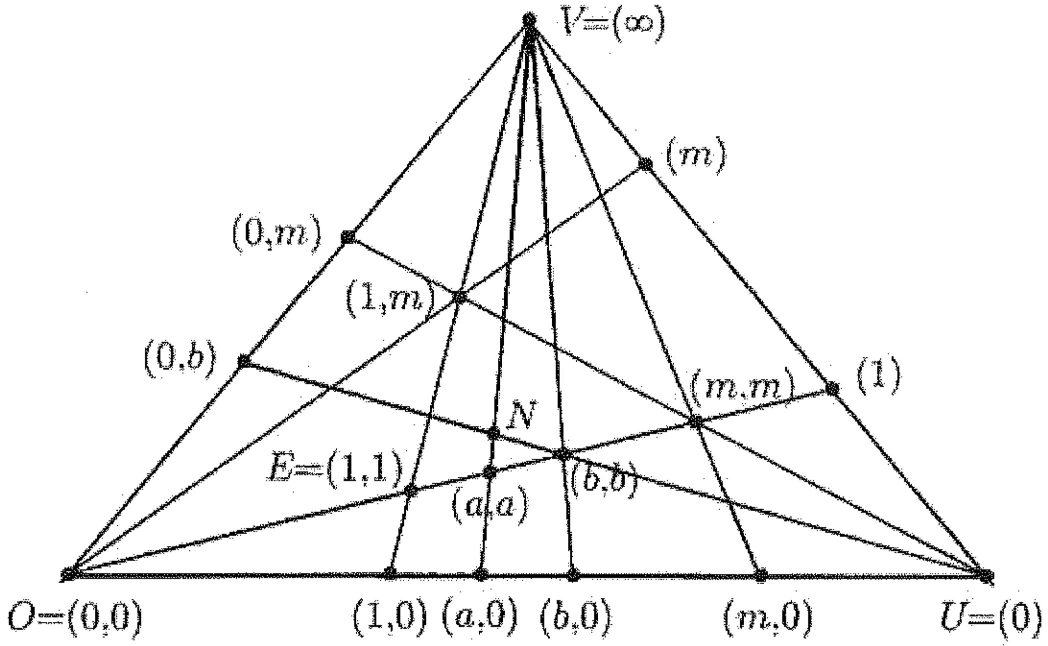
Tanım 1.1.22 S*,* 0 *ve* 1 *i de kapsayan bir küme olsun.* $+$ *ve* $.$ *bu küme üzerinde iki ikili işlem iken* $(S,+)$ *ve* $(S-\{0\}\,,.)$ *birim elemanları sırasıyla* 0 *ve* 1 *olan birer* ***yarıgrup*** *ve her* $x \in S$ *için* $x.0 = 0.x = 0$ *ise* $(S,+,.)$ *sistemine* ***çifte-yarıgrup*** *denir.*

1.2 Projektif Düzlemlerin Koordinatlanması

Her projektif düzlem, uygun bir $\mathcal{S}$ kümesinin elemanlarıyla koordinatlanabilir.

Tanım 1.2.1 $\mathbb{P}$*, mertebesi* n *olan sonlu bir projektif düzlem,* $\mathcal{S}$ *de* 0 *ve* 1 *ile gösterilen iki özel elemanı bulunan ve kardinalitesi* $n \geq 2$ *olan bir küme olsun.* $\mathbb{P}$ *de herhangi üçü doğrudaş olmayan* O,E,U,V *noktalarından oluşan, seçimli* $\{O,E,U,V\}$ *koordinatlama dörtgeni ve* $\mathcal{S}$ *kümesini kullanarak* $\mathbb{P}$ *nin noktalarını, doğrularını ve üzerinde bulunma bağıntısını belirleyelim.*

1.2.1 Noktaların Koordinatlanması:



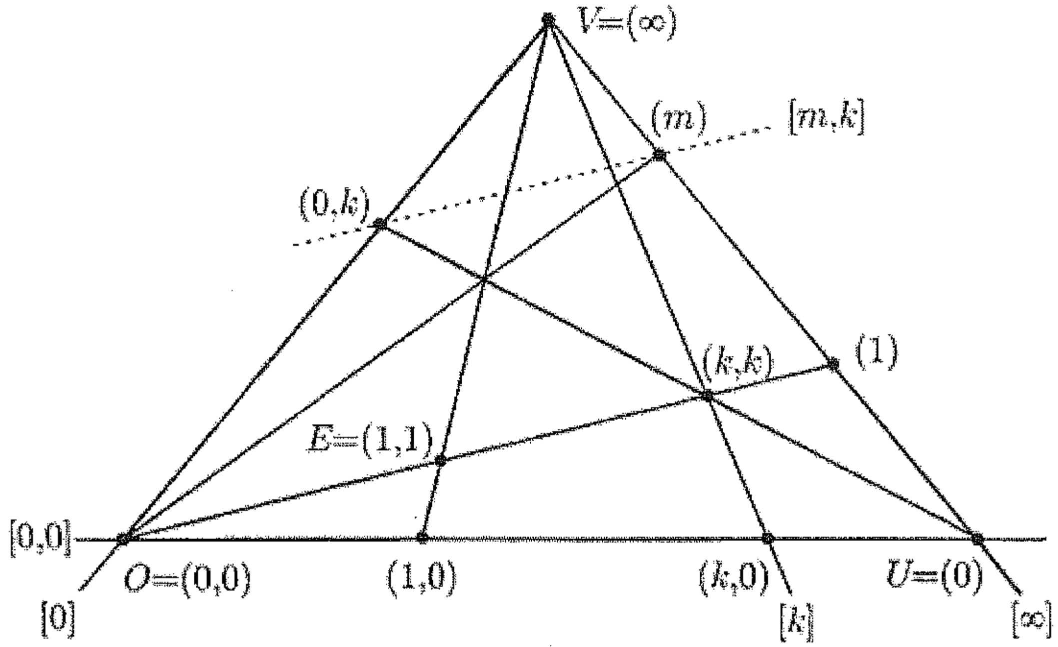
Şekil 1.2.1

OE doğrusu üzerinde $OE \cap UV$ den başka herbir noktaya $\mathcal{S}^2$ nin (a, a) biçiminde birtek elemanını eşleyelim. Özel olarak $O = (0, 0)$, $E = (1, 1)$ olsun. UV doğrusu üzerinde bulunmayan seçimli herbir N noktası için eğer, $NU \cap OE = (b, b)$ ve $NV \cap OE = (a, a)$ ise $N = (a, b)$ diyelim. Özel olarak, OU doğrusu üzerindeki noktalar $(a, 0)$ ve OV doğrusu üzerindeki noktalar $(0, b)$ biçiminde koordinatlara sahip olur. UV nin $[(0, 0) \cup (1, m)] \cap UV$ noktasına (m) koordinatını verelim. Buna göre $U = [(0, 0) \cup (1, 0)] \cap UV$ olduğundan $U = (0)$ dır.

$OE \cap UV = [(0, 0) \cup (1, 1)] \cap UV$ olup, $OE \cap UV = (1)$ dir. $\infty \notin S$ olmak üzere UV nin V noktası için $V = (\infty)$ olsun. (Şekil 1.2.1)

1.2.2 Doğruların Koordinatlanması:

$V = (\infty)$ noktasından geçmeyen ve dolayısıyla UV ile bir (m) ortak noktasına ve OV ile bir $(0, k)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[m, k]$ koordinatını; $V = (\infty)$ dan geçen ve $OU = [0, 0]$ doğrusuyla bir $(k, 0)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[k]$ koordinatını ve UV doğrusuna da $[\infty]$ koordinatını tayin edelim. (bkz. Şekil 1.2.2)



Şekil 1.2.2

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, bu koordinatlamanın seçilen $\{O, E, U, V\}$ dörtgenine bağlı olmasıdır.

Üzerinde Bulunma Bağıntısı:

Her $m, k, x, y \in \mathcal{S}$ için,

$$(\infty) \circ [\infty], \qquad (\infty) \circ [k], \qquad (\infty) \emptyset [m, k]$$
$$(x) \circ [\infty], \qquad (x) \circ [k], \qquad (x) \emptyset [m, k] \iff x = m$$
$$(x, y) \emptyset [\infty], \qquad (x, y) \circ [k] \iff x = k, \qquad (x, y) \circ [m, k] \iff y = T(m, x, k)$$

$\mathcal{S}$ kümesi ve "$T : \mathcal{S}^3 \to \mathcal{S} \ni T(m, x, k) = y \iff (x, y) \circ [m, k]$" olacak biçimde T üçlü işleminin birlikte düşünülmesiyle bazı kavramlar tanımlanabilir.

Buraya kadar kullanılan tanım ve kavramlar (Kaya, 2005) den alınmıştır.

1.3 9. Mertebeden 4 Farklı Projektif Düzlem

Dokuzuncu mertebeden dört farklı profektif düzlem bilinmektedir. Bunlar Dezarg düzlemi, Sol yaklaşık cisim düzlemi, Sağ yaklaşık cisim düzlemi ve Hughes düzlemidir. Aşağıda bu düzlemlerin cebirsel yapıları üzerinde kısaca durulacaktır.

$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, a, b, c, d, e, f\}$ olsun ve $\mathcal{S}$ üzerindeki $\oplus$ işlemi $F = GF(9)$ cisminin toplama işlemi olarak alınsın. Burada $b = a + 1, c = a + 2, d = a + a, e = d + 1, f = d + 2$, ve $1 + 2 = a + d = 0$ dır. $\mathcal{S}$ üzerindeki $\otimes$ işlemi aşağıda verilen Çizelge 1.3.1 deki gibi tanımlansın.

Çizelge 1.3.1

$\otimes$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c	d	e	f
2	0	2	1	d	f	e	a	c	b
a	0	a	d	2	e	b	1	f	c
b	0	b	f	c	2	d	e	a	1
c	0	c	e	f	a	2	b	1	d
d	0	d	a	1	c	f	2	b	e
e	0	e	c	b	d	1	f	2	a
f	0	f	b	e	1	a	c	d	2

$(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ bir sağ yaklaşık cisimdir. Bu yaklaşık cisim $S(9)$ ile gösterilir.

1.3.1 Sağ Yaklaşık Cisim Düzlemi

Cebirsel yapısı 9. mertebeden bir sağ yaklaşık cisim olan projektif düzlem aşağıdaki gibi inşa edilir:

$\mathcal{N} = \{(x, y, 1) : x, y \in S\} \cup \{(1, x, 0) : x \in \mathcal{S}\} \cup \{(0, 1, 0)\}$ noktalar kümesi,

$\mathcal{D} = \{[m, 1, k] : m, k \in S\} \cup \{[1, 0, k] : k \in \mathcal{S}\} \cup \{[0, 0, 1]\}$ doğrular kümesi ve

$\circ\ :\ (x, y, z) \circ [m, n, k] \iff xm + yn + zk = 0$ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ düzleminin bir projektif düzlem olduğu bilinmektedir.(Stevenson, 1972)

$S(9)$ yardımıyla kurulan 9. mertebeden projektif düzlem $\pi_s(9)$ ile gösterilir.

1.3.2 Sol Yaklaşık Cisim Düzlemi

Her $x, y \in \mathcal{S}(9)$ için $*$ işlemi $x * y = y \otimes x$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{S}, \oplus, *)$ bir sol yaklaşık cisimdir. Bu sol yaklaşık cisim üzerine kurulan $\pi_s(9)$ un duali olup farklı bir projektif düzlemdir (Stevenson, 1972). Bu projektif düzlem $\pi_s^d(9)$ ile gösterilir.

1.3.3 Hughes Düzlemi

9. mertebeden diğer bir düzlem ise düzlemsel halkası lineer olmayan, bu yüzden $\pi_S(9)$ ve $\pi_S^d(9)$ projektif düzlemlerinden farklı olan $\pi_H(9)$ ile gösterilen Hughes düzlemidir.

p tek asal sayı ve h pozitif tamsayı olmak üzere $q = p^h$ olsun. q^2 mertebeli bir sağ yaklaşık cismin varlığı ve bu yaklaşık cisim üzerine kurulan Hughes düzlemlerinin elde edilişi için (Hughes, Piper, 1973) ye bakılabilir.

1.3.4 Dezarg Düzlemi

P4 Dezarg aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme **Dezarg düzlemi** ya da **Dezargsel düzlem** denir.

Bu şekilde kurulan $\mathbb{P}_2\mathcal{F}$ cisim düzlemi $\pi_s(9), \pi_s^d(9)$ ve $\pi_H(9)$ düzlemleri 9. mertebeden bilinen projektif düzlemlerin tamamını teşkil etmektedir. Bu farklı 4 projektif düzlem ile ilgili ayrıntılı bilgi (Room, Kırkpatick, 1971) de verilmiştir.

BÖLÜM 2

BÖLÜM 2

SOL HALL SİSTEMİ ÜZERİNDEKİ 9. MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEM VE ALT DÜZLEMLERİ

Teorem 2.0.1 *Herhangi bir F cisminden elde edilen sol Hall sisteminin çarpma işleminin birleşimli olması (yani yaklaşık cisim olması) için gerek ve yeter şart ya $F = GF(2)$ yada $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olmasıdır.*

İspat: $(S,+,.)$ sistemi bir $f(t)$ ikinci derece indirgenemez polinomuyla belirtilen bir sol Hall sistemi olsun. Herhangi $x \in F, x \neq 0$, için $\lambda.(x.\lambda)$ ve $(\lambda.x).\lambda$ ifadeleri çarpım kuralı uygulanarak hesaplanırsa $\lambda.(x.\lambda) = \lambda(\lambda.x) = -xf(0) + \lambda xr = -x(-s) + \lambda(xr) = xs + \lambda(xr)$ ve $(\lambda.x).\lambda = (\lambda x).\lambda = -x^{-1}f(0) + \lambda r = -x^{-1}(-s) + \lambda r = sx^{-1} + \lambda r$ bulunur. Eğer . işlemi birleşimli ise özel olarak her $x \in F$ için $\lambda.(x.\lambda) = (\lambda.x).\lambda$ olacağından $x \neq 0$ iken $sx^{-1} = sx$ olur. Eğer $x \neq 1$ ise $xr = r$ den $r = 0$ olacağından $s \neq 0$ dır. Çünkü $s = 0$ olsa $f(t)$ indirgenebilir olur. Dolayısıyla $sx^{-1} = sx$ gereğince her $x \in F, x \neq 0$ için $x^2 = 1$ olması gerekir. $GF(2)$ cismi için 0 ve 1 den farklı hiç bir x bulunmadığı için $xr = x$ ve $sx^{-1} = sx$ den bir sonuç elde edilemez. Ama F nin $GF(2)$ ye eşit olabileceğinin mümkün olduğu besbellidir. Buna karşın $0 \neq x \neq 1$ olacak biçimde bir $x \in F$ elemanı varsa $r = 0$ ve $x^2 + 1 = 0$ olmalıdır. Bu özellikte bir tek cisim var olup o da $GF(3)$ üzerinde ikinci dereceden olan ve $r = 0$ özelliğine sahip olan biricik polinomda $f(t) = t^2 + 1$ dir. Karşıt olarak eğer $F = GF(2)$ ise birleşme kuralını zaten sağlar. Eğer $F = GF(3)$

ve $f(t) = t^2 + 1$ ise $(\mathcal{S}, +, .)$ nin ikinci işlemi

$$(a + \lambda b) . (c + \lambda d) = \begin{cases} ca + \lambda(da) & ,b = 0 \text{ ise} \\ ca - db(a^2 + 1) + \lambda(cb - da) & ,b \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçimini alır. Çünkü $a \in F, a \neq 0$ için $a^{-1} = a$ ve $f(a) = a^2 + 1$ dir. Bu işlemin birleşme kuralını gerçeklediği, işlemin yukarıdaki tanımı kullanılarak hesaplamalarla görülebilir. (Kaya, 2005)

Örnek 2.0.2 ***Seçkin sol yaklaşık cisim:*** *Yukarıdaki teorem gereği $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olmak üzere üretilen Hall sistemi aynı zamanda bir sol yaklaşık cisimdir. Bu sol yaklaşık cisim bilinen bütün diğer sol yaklaşık cisimlerden farklıdır. Bu farklılığın en ilginci $(\mathcal{S} - \{0\}, .)$ çarpım grubunun iç yapısından ortaya çıkmaktadır. Şöyle ki, her $x \in \mathcal{S}$, $x \neq 0, 1, -1$ için $x^2 = -1$ dir ve bu sol yaklaşık cisimden başka hiçbir sol yaklaşık cisim bu özelliği sağlamaz. $x^2 = -x$ biçimindede ifade edilebilecek olan özellik bazı geometrik sonuçlar doğurmaktadır. Şöyle ki bu yaklaşık cismin belirttiği düzlemde öyle bir f involusyonu vardır ki bu involusyon $[\infty]$ doğrusunu değişmez bırakır ama bu doğrunun hiçbir noktasını değişmez bırakmaz. Üstelik bu düzlem her $X \circ [\infty]$ ve $f(X) \circ x$ için $(X, x)-$geçişkendir. (Kaya, 2005)*

2.1 Dokuz Elemanlı Bir Sol Yaklaşık Cisim

$\mathcal{F} = \{0, 1, 2\}$ ve

Çizelge 2.1.1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

olmak üzere $(\mathcal{F}, +, .) = GF(3)$ bir Galois cismidir. Bu cisim yardımıyla oluşturulan sol yaklaşık cisim:

$$\mathcal{S} = \{a + \lambda b \mid a, b \in \mathcal{F}, \lambda \notin \mathcal{F}\}$$

yani,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{0, \lambda, 2\lambda, 1, 1+\lambda, 1+2\lambda, 2, 2+\lambda, 2+2\lambda\} \\ &= \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\} \end{aligned}$$

şeklindedir ve

$$f(t) = t^2 + 1$$

de $\mathcal{F}$ üzerinde indirgenemez bir polinom olsun. Yani, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde dereceleri 2 den küçük herhangi $b(t)$ ve $k(t)$ polinomları için daima $f(t) \neq b(t).k(t)$ olsun. (Aşikar olarak bu, $f(t) = 0$ denkleminin $\mathcal{F}$ içinde çözümünün bulunmamasını gerektirir.) $\mathcal{S}$ kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$(a + \lambda b) \oplus (c + \lambda d) = (a + c) + \lambda (b + d) \tag{2.1}$$

$$(a + \lambda b) \odot (c + \lambda d) = \begin{cases} ca + \lambda (da) & , b = 0 \text{ iken} \\ ca - db(a^2 + 1) + \lambda (cb - da) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases} \tag{2.2}$$

Bu işlemler kullanılarak, $\mathcal{S}$ kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlem tabloları şu şekilde elde edilir.

S kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlem çizelgeleri:

Bu çalışmada kısalık sağlamak amacıyla, her $x + \lambda y \in \mathcal{S}$ elemanı için xy gösterimi kullanılacaktır. Örneğin i. satırın başındaki $a + \lambda b$ ve j.sütunun başındaki $c + \lambda d$ elemanları sırasıyla ab ve cd olarak yazılacak eğer $(a + \lambda b) \underset{\odot}{\oplus} (c + \lambda d) = u + \lambda v$ ise, bu eleman çizelgede i.satır ve j. sütunda uv ile gösterilecektir. (Özcan, 1988)

Çizelge 2.1.2

$\oplus$	**00**	**01**	**02**	**10**	**11**	**12**	**20**	**21**	**22**
00	00	01	02	10	11	12	20	21	22
01	01	02	00	11	12	10	21	22	20
02	02	00	01	12	10	11	22	20	21
10	10	11	12	20	21	22	00	01	02
11	11	12	10	21	22	20	01	02	00
12	12	10	11	22	20	21	02	00	01
20	20	21	22	00	01	02	10	11	12
21	21	22	20	01	02	00	11	12	10
22	22	20	21	02	00	01	12	10	11

Çizelge 2.1.3

$\odot$	**00**	**01**	**02**	**10**	**11**	**12**	**20**	**21**	**22**
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	00	20	10	01	21	11	02	22	12
02	00	10	20	02	12	22	01	11	21
10	00	01	02	10	11	12	20	21	22
11	00	12	21	11	20	02	22	01	10
12	00	22	11	12	01	20	21	10	02
20	00	02	01	20	22	21	10	12	11
21	00	11	22	21	02	10	12	20	01
22	00	21	12	22	10	01	11	02	20

Böyle oluşturulan $(\mathcal{S}, \oplus, \odot)$ sisteminin bir sol yaklaşık cisim olduğunu gösterelim. Tanım 1.1.10'a göre çarpma işlemi birleşmeli olan herhangi bir sol yarıcismi sol yaklaşık cisim olduğundan, öncelikle $(\mathcal{S}, \oplus, \odot)$ sisteminin sol yarıcisim olduğunu, daha sonra bu sistemin çarpma işleminin birleşmeli olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Fakat öncelikle şu özel haller üzerinde duralım: Her $k \in F, z \in S$ için,

$$k \odot z = z \odot k$$

olduğunu gösterelim $k = 0$ ve $z = a + \lambda b$ ise,

$$0 \odot z = 0 \odot (a + \lambda b) = 0a + \lambda(0b) = 0$$

ve

$$z \odot 0 = (a + \lambda b) \odot 0 = 0$$

olduğundan,

$$0 \odot z = z \odot 0$$

dır. $k \in F, k \neq 0$ ve $z = a + \lambda b$ ise,

$$k \odot z = k \odot (a + \lambda b) = ka + \lambda(kb)$$

dir ve

$$z \odot k = (a + \lambda b) \odot k = ak + \lambda(bk)$$

olması nedeniyle

$$k \odot z = z \odot k \tag{2.3}$$

dir. Fakat, örneğimizin son kısımlarında gösterileceği gibi genelde $x, y \in S$ için

$$x \odot y \neq y \odot x$$

tir. $k \in F$ ve $z, w \in S$ için,

$$(z \odot w) \odot k = z \odot (w \odot k) = z \odot (k \odot w)$$

olduğunu gösterelim. (2.3) ten

$$z \odot (w \odot k) = z \odot (k \odot w)$$

dir. O halde

$$(z \odot w) \odot k = z \odot (w \odot k)$$

eşitliğini göstermeliyiz. $z = a + \lambda b, w = c + \lambda d$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} (z \odot w) \odot k &= k \odot (z \odot w) \\ &= k \odot \begin{cases} ca + \lambda\,(da) & , b = 0 \text{ iken} \\ ca - db(a^2+1) + \lambda\,(cb - da) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases} \\ &= \begin{cases} kca + \lambda\,(kda) & , b = 0 \text{ iken} \\ kca - kdb(a^2+1) + \lambda\,(kcb - kda) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned} z\odot(w\odot k) &= (a+\lambda b)\odot(k\odot(c+\lambda d)) \\ &= (a+\lambda b)\odot(kc+\lambda(kd)) \\ &= \begin{cases} cka+\lambda\,(dka) & ,b=0 \text{ iken} \\ cka-dkb(a^2+1)+\lambda\,(ckb-dka) & ,b\neq 0 \text{ iken.} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

dir. (2.4) ve (2.5) ten, $b=0$ iken,

$$kca+\lambda\,(kda)=cka+\lambda\,(dka)$$

ve $b\neq 0$ iken

$$kca-kdb(a^2+1)+\lambda\,(kcb-kda)=cka-dkb(a^2+1)+\lambda\,(ckb-dka)$$

dir. Şimdi

$$z^2=z\odot z$$

olmak üzere, her $z\in S$ ve $a,b\in F$ için

$$z^2+1=0$$

olduğunu gösterelim. (2.2) uygulanırsa

$$\begin{aligned} z^2=z\odot z &= (a+\lambda b)\odot(a+\lambda b) \\ &= a^2-b^2f(a)+\lambda 0 \\ &= a^2-b^2(a^2+1) \quad (b^2=1 \text{ old.}) \\ &= a^2-a^2-1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$z^2+1=0$$

bulunur.

Artık sol yarıcisim aksiyomlarına geçebiliriz:

1) $(S,\oplus)$ birim elemanı $00=0+\lambda 0$ olan bir değişmeli gruptur.

(i) $\forall\ a,b,c,d\in F$ için,

$$(a+\lambda b)\oplus(c+\lambda d)=(a+c)\oplus\lambda(b+d))\in S$$

$((a+c)\in F,(b+d)\in F$ ve $\lambda\notin F)$ olup işlem kapalıdır.

(ii) $\forall\ a,b,c,d \in F$ için,

$$\begin{aligned}(a+\lambda b)\oplus(c+\lambda d)=(a+\lambda b)\ &\Longrightarrow (a+c)\oplus\lambda(b+d)=(a+\lambda b)\\ &\Longrightarrow \begin{cases} a+c=a, & c=0\\ b+d=b, & d=0\end{cases}\\ &\Longrightarrow 0+\lambda 0=00\end{aligned}$$

birim eleman.

(iii) $\forall\ a,b,c,d \in F$ için,

$$\begin{aligned}(a+\lambda b)\oplus(c+\lambda d)=0+\lambda 0\ &\Longrightarrow (a+c)\oplus\lambda(b+d)=0+\lambda 0\\ &\Longrightarrow \begin{cases} a+c=0, & c=-a\\ b+d=0, & d=-b\end{cases}\\ &\Longrightarrow -a+\lambda(-b)\end{aligned}$$

$a+\lambda b$ nin tersidir.

(iv) $\forall\ a,b,c,d,e,f \in F$ için,

$$\begin{aligned}(a+\lambda b)\oplus[(c+\lambda d)\oplus(e+\lambda f)] &= (a+\lambda b)\oplus[(c+e)\oplus\lambda(d+f)],\ (\oplus \text{ nın tanımından.})\\ &= [a+(c+e)]+\lambda\,[b+(d+f)],\ (+ \text{ nın birleşme özelliğinde}\\ &= [(a+c)+e]+\lambda\,[(b+d)+f]\\ &= [(a+c)+\lambda(b+d)]\oplus(e+\lambda f)\\ &= [(a+\lambda b)\oplus(c+\lambda d)]\oplus(e+\lambda f)\end{aligned}$$

olduğundan $\oplus$ işlemi birleşmelidir. (i), (ii), (iii), ve (iv) ten $(S,\oplus)$ bir gruptur. Ayrıca $\forall\ a,b,c,d \in F$ için,

$$\begin{aligned}(a+\lambda b)\oplus(c+\lambda d) &= (a+c)\oplus\lambda(b+d),\ (+ \text{ nın değişme özelliğinden})\\ &= (c+a)\oplus\lambda(d+b)\\ &= (c+\lambda d)\oplus(a+\lambda b)\end{aligned}$$

olduğundan $\oplus$ işlemi değişmelidir. Dolayısıyla $(S,\oplus)$ değişmeli bir gruptur.

2) $(S-\{0+\lambda 0\},\odot)$ sisteminin bir yarıgrup olduğunu gösterelim. $1+\lambda 0=10$ olmak üzere, her $a+\lambda b\in S$ için,

$$(a+\lambda b)\odot(1+\lambda 0)=1a-0b(a^2+1)+\lambda(1b-0a)=a+\lambda b \qquad (1)$$

$$(1+\lambda 0)\odot(a+\lambda b)=a1+\lambda(b1)=a+\lambda b \qquad (2)$$

(1) ve (2) den,

$$(a+\lambda b)\odot(1+\lambda 0)=a+\lambda b=(1+\lambda 0)\odot(a+\lambda b)$$

dir ve $1+\lambda 0=10$ çarpımsal birim elemandır.

$a+\lambda b\neq 0$ olmak üzere,

$$(a+\lambda b)\odot(x+\lambda y)=(c+\lambda d) \tag{2.6}$$

denkleminin bir tek $x+\lambda y\in S$ çözümünün varlığını gösterelim. $b=0$ ve $a\neq 0$ iken,

$$(a+\lambda 0)\odot(x+\lambda y)=(xa+\lambda(ya)=(c+\lambda d)$$

eşitliklerinden, $xa=c$ ve $ya=d$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$(x+\lambda y)=a^{-1}c+\lambda(a^{-1}d)$$

nın çözümüdür. $b\neq 0$ iken,

$$\begin{aligned}(a+\lambda b)\odot(x+\lambda y) &= xa-yb(a^2+1)+\lambda(xb-ya)\\ &=(c+\lambda d)\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\left.\begin{aligned} xa-yb(a^2+1)=c\\ xb-ya=d\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

denklem sistemi elde edilir. (2.7) sisteminin bir çözümünün olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} a & -b(a^2+1)\\ b & -a\end{vmatrix}\neq 0$$

olması gerek ve yeterlidir.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & -b(a^2+1)\\ b & -a\end{vmatrix} &= a(-a)+bb(a^2+1) \quad (b^2=1 \text{ old.})\\ &=-a^2+a^2+1\\ &=1\neq 0\end{aligned}$$

olduğundan, (2.7) sisteminin ve dolayısyla (2.6) denkleminin birtek $(x+\lambda y)$ çözümü mevcuttur. Şimdi $a+\lambda b\neq 0$ olmak üzere,

$$(x+\lambda y)\odot(a+\lambda b)=(c+\lambda d) \tag{2.8}$$

denkleminin x ve y için bir tek çözümüne bakalım. Eğer $b = 0$ ise $a + \lambda b \neq 0$ olduğundan $a \neq 0$ dır ki bu halde $y = 0$ olacak bir biçimde çözüm olması için gerek ve yeter koşul $c = 0$ olacağından biricik çözüm $y = 0$ ve $x = ca^{-1}$ dir. Benzer olarak $a = 0$ ise $y = 0$ olacak biçimde bir çözüm olması için gerek ve yeter koşul $c = 0$ olacağından biricik çözüm $y = 0$ ve $x = db^{-1}$ dir. Eğer $a \neq 0 \neq b$ ise $y = 0$ olacak biçimde bir tek çözüm olması için (2.2) den bu çözümün $y = 0$, $x = ca^{-1}$ olması bunun içinde $ca^{-1} = db^{-1}$ olması gerek ve yeterdir. Buna göre $a = 0$ ve $c = 0$; $b = 0$ ve $d = 0$; $ca^{-1} = db^{-1}$ üç halinden her birinde $y \neq 0$ olacak biçimde denklemin hiç bir çözümünün bulunmadığını, geri kalan hallerde $y \neq 0$ olacak biçimde bir tek $x + \lambda y$ çözümü var olduğu gösterilmelidir. Bunu elde etmek için verilen denkleme eşdeğer olan

$$\left.\begin{aligned} ax - byf(x) &= c \\ ay - bx &= d \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

dir. (2.9) sistemindeki birinci denklem y, ikinci denklem x ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa, ve $f(t) = t^2 + 1$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} axy - by^2 f(x) &= cy \\ axy - bx^2 &= dx \\ axy - by^2 f(x) - axy + bx^2 &= cy - dx \\ -b(x^2 + 1 - 1) &= cy - dx \\ -b &= cy - dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

bulunur. (2.10) deki son denklem ile (2.9) deki ikinci denklem birleştirlirse, (2.9) sistemine eşdeğer olan

$$\left.\begin{aligned} cy - dx &= -b \\ ay - bx &= d \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

denklem sistemine ulaşılır. Eğer $b = 0$ ise (2.11) sisteminin bir tek $x = ca^{-1}, y = db^{-1}$ çözümü vardır ki burada $y = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d = 0$ dır. Eğer $b \neq 0$ ise (2.11) daki ikinci denklemi db^{-1} ile çarpıp birinciden çıkararak

$$\left.\begin{aligned} cy - dx - db^{-1}ay + db^{-1}bx &= -b - db^{-1}d \\ y(cb - da) &= -b^2 f(db^{-1}) \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

bulunur. $b \neq 0$ ve $f(t)$ de F üzerinde indirgenemez olduğundan (2.12) un sağ tarafı daima sıfırdan farklıdır. Böylece $cb - da = 0$ olsa (yani ya $c = 0, a = 0$ ya da $a \neq 0$ ve $ca^{-1} = db^{-1}$ olsa) (2.11) sisteminin çözümü olamaz, dolayısıyla da (2.9) sisteminin $y \neq 0$ özelliğinde çözümü bulunamaz. Eğer $cb - da \neq 0$ ise bu durumda $y = b^2 f(db^{-1})(bc - da)^{-1} \neq 0$ olup bu da isteneni verir.

Ayrıntılı olarak yapılan bu incelemeye göre (2.8) denkleminin bir tek $x + \lambda y \in S$ çözümü vardır. (Kaya, 2005).

Ayrıca $(S - \{0 + \lambda 0\}, \odot)$ sisteminin bir yarıgrup olduğunu $\odot$ işlem tablosundan da görebiliriz.

$\alpha, \beta \in S - \{0 + \lambda 0\}$ için,

$$\alpha \odot x = \beta$$

denkleminin birtek $x \in S$ çözümü vardır. Çünkü, i. satırın başında bulunan bir α elemanı ve yine aynı satırda bir kez görülen β elemanı verildiğinde; eğer $\beta; i$. satır ve j. sütundaki bir eleman ise j. sütunun başındaki eleman,

$$\alpha \odot x = \beta$$

denkleminin birtek $x \in S$ çözümüdür. Örneğin

$$(2 + \lambda 0) \odot x = (0 + 1\lambda)$$

denkleminin birtek

$$x = (1 + 1\lambda) \in S$$

çözümü vardır.

$\alpha, \beta \in S - \{0 + \lambda 0\}$ için,

$$x \odot \alpha = \beta$$

denkleminin birtek $x \in S$ çözümünün olduğunu, yukarıda satır ve sütunların rollerini değiştirerek söyleyebiliriz.

Dolayısıyla $(S - \{0 + \lambda 0\}, \odot)$ birim elemanı $(1 + \lambda 0) = 10$ olan bir yarıgruptur.

3) Her $a + \lambda b \in S$ için, $00 = 0 + \lambda 0$ olmak üzere,

$$(0 + \lambda 0) \odot (a + \lambda b) = a0 + \lambda(b0) = (0 + \lambda 0) = 00$$

dır.

4) Her $x, y, z \in S$ ve $y = a + \lambda b, z = c + \lambda d$ olmak üzere, $x \odot (y \oplus z)$ ifadesini gözönüne alalım. $x \in F$ ise $x = x + \lambda 0$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
x \odot (y \oplus z) &= x \odot [(c+a) + \lambda(d+b)] \\
&= (c+a)x + \lambda(d+b)x \\
&= cx + ax + \lambda(dx) + \lambda(bx) \\
&= (ax + \lambda(bx)) + (cx + \lambda(dx)) \\
&= [x \odot (a + \lambda b)] \oplus [x \odot (c + \lambda d)] \\
&= (x \odot y) \oplus (x \odot z)
\end{aligned}
$$

dir. Eğer $x \notin F$ ise $q \neq 0$ olmak üzere $x = p + \lambda q$ olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
x \odot (y \oplus z) &= (p + \lambda q) \odot [(a + \lambda b) \oplus (c + \lambda d)] \\
&= (p + \lambda q) \odot [(c+a) + \lambda(d+b)] \\
&= (c+a)p - (d+b)qf(p) + \lambda [(c+a)q - (d+b)p] \\
&= [ap - bqf(p) + \lambda(aq - bp)] \oplus [cp - dqf(p) + \lambda(cq - dp)] \\
&= [(p + \lambda q) \odot (a + \lambda b)] \oplus [(p + \lambda q) \odot (c + \lambda d)] \\
&= (x \odot y) \oplus (x \odot z)
\end{aligned}
$$

olur. O halde, soldan dağılma özelliği sağlanır.

5) Son olarak, $\alpha \neq \beta$ iken,

$$-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = \gamma \tag{2.13}$$

denkleminin birtek $z \in S$ çözümünün olduğunu gösterirsek, $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin bir sol yarıcisim olduğuna ilişkin ispatı tamamlamış oluruz. Bu denklemin çözülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü; z ve w gibi farklı iki çözüm olsaydı;

$$-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = -\alpha \odot w \oplus \beta \odot w$$

$$\beta \odot (z - w) = \alpha \odot (z - w)$$

olurdu, oysa $(S - \{0 + \lambda 0\}, \odot)$ yarıgrup olduğundan bu mümkün değildir. $\alpha, \beta \in F$ ise (2.3) ten

$$-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = \gamma$$

denklemi

$$-z \odot \alpha \oplus z \odot \beta = \gamma$$

biçiminde yazılabilir. Soldan dağılma özelliğinden

$$z \odot (-\alpha \oplus \beta) = \gamma$$

dır.

$$(x + \lambda y) \odot (-\alpha + \beta) = c + \lambda d \Longrightarrow (-\alpha + \beta)x + \lambda\left[(-\alpha + \beta)y\right] = c + \lambda d$$

olduğundan tek çözüm,

$$x + \lambda y = (-\alpha + \beta)^{-1}c + \lambda\left[(-\alpha + \beta)^{-1}d\right]$$

dir. $\beta \notin F$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde α ve γ, β cinsinden ifade edilebilir. $\alpha = k \in F$ olması halinde $\gamma_1,\ \gamma_2 \in F$ olmak üzere $\gamma = \gamma_1 + \beta\gamma_2$ ve $z = x + \beta y$ alınabilir.

$$\begin{aligned}
-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = \gamma \quad &\Longrightarrow -k \odot (x + \beta y) \oplus \beta \odot (x + \beta y) &&= \gamma_1 + \beta\gamma_2 \\
&\Longrightarrow -kx - \beta(-ky) \oplus (-yf(0) + \beta(x + y) &&= \gamma_1 + \beta\gamma_2 \\
&\Longrightarrow (-kx - y(-1)) \oplus \beta(-ky + x + y) &&= \gamma_1 + \beta\gamma_2
\end{aligned}$$

olur. Buradan (2.13) e eşdeğer olan,

$$\left.\begin{aligned} -kx + y) &= \gamma_1 \\ x + (1 - k)y &= \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

sistemi bulunur.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & (1-k) \end{vmatrix} = k^2 - k - 1 = f(k)$$

dır. $f(t), F$ üzerinde indirgenemez polinom olduğu için, $\Delta = f(k) \neq 0$ olur ve dolayısıyla (2.14) siteminin çözümü vardır.$\alpha \neq \beta$ iken $b \neq 0, \alpha = a + \beta b, \gamma = \gamma_1 + \beta\gamma_2$ ve $z = x + \beta y$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = \gamma \quad &\Longrightarrow -(a + \beta b) \odot (x + \beta y) \oplus \beta \odot (x + \beta y) &&= \gamma_1 + \beta\gamma_2 \\
&\Longrightarrow (-xa + ybf(a) - \beta(xb - ya) \oplus (yf(0) + \beta x &&= \gamma_1 + \beta\gamma_2 \\
&\Longrightarrow (-xa + yb(a^2 + 1) + y) + \beta(-xb + ya + x) &&= \gamma_1 + \beta\gamma_2
\end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$\left.\begin{aligned} -xa + y(ba^2 + b + 1) &= \gamma_1 \\ x(1-b) + ya &= \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

denklem sistemi elde edilir. (2.15) sisteminin çözülebilirliğini katsayılar determinantının sıfırdan farklı olduğunu göstererek belirleyebiliriz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & ba^2 + b + 1 \\ 1 - b & a \end{vmatrix} = -a^2 - ba^2 + 1 + b^2a^2 + b^2$$

olur. Eğer $a = 0$ ve $b \neq 1$ ise

$$\Delta = -1(1-b)(1-b^{-1}) \neq 0$$

ve eğer $a \neq 0$ ve $b = 1$ ise

$$\Delta = -a^2 \neq 0$$

dır. $a = 0$ ve $b = 1$ ise

$$\alpha = a + \beta b \Longrightarrow \alpha = 0 + \beta 1 \Longrightarrow \alpha = \beta$$

olur, bu ise çelişkidir. Çünkü, $\alpha \neq \beta$ iken

$$-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = \gamma$$

denkleminin çözümü araştırılıyor. $a = 0$ ve $b = 1$ durumu ortaya çıkmaz.

Buna göre her durumda $\Delta \neq 0$ olduğundan (2.13) ün birtek çözümü bulunmaktadır. Böylece $(S, \oplus, \odot)$ sistemi bir sol yarıcisimdir.

O halde $(S, \oplus, \odot)$ sistemi sol yaklaşık cisim olması için çarpmanın birleşme özelliğini sağladığını gösterelim. Çizelge 2.1.3 te sonlu sayıda eleman olduğundan bu elemanların çarpıma göre birleşme özelliğini sağladığı görülebilir. Aşağıdaki iki örnekle $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin çarpıma göre birleşme özelliğini sağladığını gösterelim.

1) $z = 2\lambda, w = 2\lambda, u = \lambda$ alalım.

$$\left.\begin{aligned} (z \odot w) \odot u &= (2\lambda \odot 2\lambda) \odot \lambda \\ &= 2 \odot \lambda \\ &= 2\lambda \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} z \odot (w \odot u) &= 2\lambda \odot (2\lambda \odot \lambda) \\ &= 2\lambda \odot 1 \\ &= 2\lambda \end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.16) ve (2.17) den,

$$(z \odot w) \odot u = z \odot (w \odot u)$$

dur.

2) $z = 1 + 2\lambda, w = \lambda, u = 2$ alalım.

$$\left. \begin{aligned} (z \odot w) \odot u &= ((1 + 2\lambda) \odot \lambda) \odot 2 \\ &= (2 + 2\lambda) \odot 2 \\ &= 1 + \lambda \end{aligned} \right\} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} z \odot (w \odot u) &= (1 + 2\lambda) \odot (\lambda \odot 2) \\ &= (1 + 2\lambda) \odot 2\lambda \\ &= 1 + \lambda \end{aligned} \tag{2.19}$$

(2.18) ve (2.19) dan,

$$(z \odot w) \odot u = z \odot (w \odot u)$$

dur.

Burada $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin cisim olmadığını göstermek için sağdan dağılma ve çarpmanın değişme özelliklerini sağlamadığını birer örnekle gösterelim.

$z = 1 + \lambda, w = \lambda, u = \lambda$ şeklinde seçilsin.

$$(z \oplus w) \odot u = ((1 + \lambda) \oplus \lambda) \odot \lambda = (1 + 2\lambda) \odot \lambda = 2 + 2\lambda \tag{2.20}$$

$$\left. \begin{aligned} (z \odot u) \oplus (w \odot u) &= ((1 + \lambda) \odot \lambda) \oplus (\lambda \odot \lambda) \\ &= (1 + 2\lambda) \oplus (2 + 0\lambda) \\ &= 2\lambda \end{aligned} \right\} \tag{2.21}$$

(2.20) ve (2.21) den,

$$(z \oplus w) \odot u = 2 + 2\lambda$$

ve

$$(z \odot u) \oplus (w \odot u) = 2\lambda$$

olduğundan,

$$(z \oplus w) \odot u \neq (z \odot u) \oplus (w \odot u)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin sağdan dağılma özelliği yoktur.

$z = 1 + \lambda, w = 2 + \lambda$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} z \odot w &= (1+\lambda) \odot (2+\lambda) \\ &= 2 - f(1) + \lambda(2-1) \\ &= 2 - 2 + \lambda \\ &= \lambda \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

$$\left.\begin{aligned} w \odot z &= (2+\lambda) \odot (1+\lambda) \\ &= 2 - f(2) + \lambda(1-2) \\ &= 2 + 1 + \lambda(2) \\ &= 2\lambda \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

(2.22) ve (2.23) den,

$$z \odot w \neq w \odot z$$

dir. Dolayısıyla, $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin çarpıma göre değişme özelliği yoktur.

O halde $(S, \oplus, \odot)$ sistemi sağdan dağılma ve çarpımının değişme özelliklerini sağlamadığından cisim değildir.

2.2 $(S, \oplus, \odot)$ Sol Yaklaşık Cismi Üzerinde Kurulan 9. Mertebeden Projektif Düzlemin İnşaası

Düzlemin noktalar kümesi

$\mathcal{N} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathcal{S}\} \cup \{m \mid m \in \mathcal{S}\} \cup \{(\infty)\}$:

81 "afin" nokta (x,y), $(x, y \in \mathcal{S})$

9 "ideal" nokta (m), $(m \in \mathcal{S})$

1 "ideal nokta" (∞), $(\infty \notin \mathcal{S})$

Düzlemin doğrular kümesi

$\mathcal{D} = \{(m,k) \mid m,k \in \mathcal{S}\} \cup \{[\lambda] \mid \lambda \in \mathcal{S}\} \cup \{[\infty]\}$:

81 "afin" doğru $y = m \odot x \oplus k, \quad (m,k \in \mathcal{S})$

9 "afin" doğru $x = \lambda, \quad (\lambda \in \mathcal{S})$

1 "ideal" doğru $[\infty], \quad (\infty \notin \mathcal{S})$ biçiminde gruplandırılır.

Üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$:

(m) ideal noktası $y = m \odot x \oplus k, \quad (\forall k \in \mathcal{S})$ doğrusu ve $[\infty]$ ideal doğrusu üzerindedir.

(∞) ideal noktası $x = \lambda, \quad (\lambda \in \mathcal{S}$ için$)$ doğruları ve $[\infty]$ doğrusu üzerindedir.

(x,y) afin noktası $y = m \odot x \oplus k, \quad (\forall m,k \in \mathcal{S})$ doğrusu üzerindedir.

Yani;

$(x,y) \circ [m,k] \iff y = m \odot x \oplus k$ ve $(x,y) \circ [\lambda] \iff x = \lambda$ eşitlikleri geçerlidir.

(x,y) afin noktası, $[\infty]$ doğrusu üzerinde değildir.

$\mathbb{P}_2 S$ nin, tüm doğrularının ve bu doğruların üzerindeki noktaları aşağıdaki gibidir. (Güney, 2005)

2.2.1 Doğru Üzerindeki Noktalar

$[\infty]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00),(01),(02),(20),(21), \\ (10),(11),(12),(22),(\infty) \end{array} \right\}$
$[00]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,00),(00,01),(00,02),(00,20),(00,21), \\ (00,10),(00,11),(00,12),(00,22),(\infty) \end{array} \right\}$
$[01]$	$\left\{ \begin{array}{c} (01,00),(01,01),(01,02),(01,10),(01,11), \\ (01,12),(01,20),(01,21),(01,22),(\infty) \end{array} \right\}$
$[02]$	$\left\{ \begin{array}{c} (02,00),(02,01),(02,02),(02,10),(02,11), \\ (02,12),(02,20),(02,21),(02,22),(\infty) \end{array} \right\}$
$[10]$	$\left\{ \begin{array}{c} (10,00),(10,01),(10,02),(10,10),(10,11), \\ (10,12),(10,20),(10,21),(10,22),(\infty) \end{array} \right\}$

$[11]$	$\left\{\begin{matrix}(11,00),(11,01),(11,02),(11,10),(11,11),\\(11,12),(11,20),(11,21),(11,22),(\infty)\end{matrix}\right\}$
$[12]$	$\left\{\begin{matrix}(12,00),(12,01),(12,02),(12,10),(12,11),\\(12,12),(12,20),(12,21),(12,22),(\infty)\end{matrix}\right\}$
$[20]$	$\left\{\begin{matrix}(20,00),(20,01),(20,02),(20,10),(20,11),\\(20,12),(20,20),(20,21),(20,22),(\infty)\end{matrix}\right\}$
$[21]$	$\left\{\begin{matrix}(21,00),(21,01),(21,02),(21,10),(21,11),\\(21,12),(21,20),(21,21),(21,22),(\infty)\end{matrix}\right\}$
$[22]$	$\left\{\begin{matrix}(22,00),(22,01),(22,02),(22,10),(22,11),\\(22,12),(22,20),(22,21),(22,22),(\infty)\end{matrix}\right\}$
$[00,00]$	$\left\{\begin{matrix}(00,00),(01,00),(02,00),(10,00),(11,00),\\(12,00),(20,00),(21,00),(22,00),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,01]$	$\left\{\begin{matrix}(00,01),(01,01),(02,01),(10,01),(11,01),\\(12,01),(20,01),(21,01),(22,01),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,02]$	$\left\{\begin{matrix}(00,02),(01,02),(02,02),(10,02),(11,02),\\(12,02),(20,02),(21,02),(22,02),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,10]$	$\left\{\begin{matrix}(00,10),(01,10),(02,10),(10,10),(11,10),\\(12,10),(20,10),(21,10),(22,10),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,11]$	$\left\{\begin{matrix}(00,11),(01,11),(02,11),(10,11),(11,11),\\(12,11),(20,11),(21,11),(22,11),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,12]$	$\left\{\begin{matrix}(00,12),(01,12),(02,12),(10,12),(11,12),\\(12,12),(20,12),(21,12),(22,12),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,20]$	$\left\{\begin{matrix}(00,20),(01,20),(02,20),(10,20),(11,20),\\(12,20),(20,20),(21,20),(22,20),(00)\end{matrix}\right\}$
$[00,21]$	$\left\{\begin{matrix}(00,21),(01,21),(02,21),(10,21),(11,21),\\(12,21),(20,21),(21,21),(22,21),(00)\end{matrix}\right\}$

$[00, 22]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,22),(01,22),(02,22),(10,22),(11,22), \\ (12,22),(20,22),(21,22),(22,22),(00) \end{array} \right\}$
$[01, 00]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,00),(01,20),(02,10),(10,01),(11,21), \\ (12,11),(20,02),(21,22),(22,12),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 01]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,01),(01,21),(02,11),(10,02),(11,22), \\ (12,12),(20,00),(21,20),(22,10),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 02]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,02),(01,22),(02,12),(10,00),(11,20), \\ (12,10),(20,01),(21,21),(22,11),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 10]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,10),(01,00),(02,20),(10,11),(11,01), \\ (12,21),(20,12),(21,02),(22,22),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 11]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,11),(01,01),(02,21),(10,12),(11,02), \\ (12,22),(20,10),(21,00),(22,20),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 12]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,12),(01,02),(02,22),(10,10),(11,00), \\ (12,20),(20,11),(21,01),(22,21),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 20]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,20),(01,10),(02,00),(10,21),(11,11), \\ (12,01),(20,22),(21,12),(22,02),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 21]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,21),(01,11),(02,01),(10,22),(11,12), \\ (12,02),(20,20),(21,10),(22,00),(01) \end{array} \right\}$
$[01, 22]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,22),(01,12),(02,02),(10,20),(11,10), \\ (12,00),(20,21),(21,11),(22,01),(01) \end{array} \right\}$
$[02, 00]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,00),(01,10),(02,20),(10,02),(11,12), \\ (12,22),(20,01),(21,11),(22,21),(02) \end{array} \right\}$
$[02, 01]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,01),(01,11),(02,21),(10,00),(11,10), \\ (12,20),(20,02),(21,12),(22,22),(02) \end{array} \right\}$
$[02, 02]$	$\left\{ \begin{array}{c} (00,02),(01,12),(02,22),(10,01),(11,11), \\ (12,21),(20,00),(21,10),(22,20),(02) \end{array} \right\}$

$[02,10]$	$\left\{\begin{matrix}(00,10),(01,20),(02,00),(10,12),(11,22),\\(12,02),(20,11),(21,21),(22,01),(02)\end{matrix}\right\}$
$[02,11]$	$\left\{\begin{matrix}(00,11),(01,21),(02,01),(10,10),(11,20),\\(12,00),(20,12),(21,22),(22,02),(02)\end{matrix}\right\}$
$[02,12]$	$\left\{\begin{matrix}(00,12),(01,22),(02,02),(10,11),(11,21),\\(12,01),(20,10),(21,20),(22,00),(02)\end{matrix}\right\}$
$[02,20]$	$\left\{\begin{matrix}(00,20),(01,00),(02,10),(10,22),(11,02),\\(12,12),(20,21),(21,01),(22,11),(02)\end{matrix}\right\}$
$[02,21]$	$\left\{\begin{matrix}(00,21),(01,01),(02,11),(10,20),(11,00),\\(12,10),(20,22),(21,02),(22,12),(02)\end{matrix}\right\}$
$[02,22]$	$\left\{\begin{matrix}(00,22),(01,02),(02,12),(10,21),(11,01),\\(12,11),(20,20),(21,00),(22,10),(02)\end{matrix}\right\}$
$[10,00]$	$\left\{\begin{matrix}(00,00),(01,01),(02,02),(10,10),(11,11),\\(12,12),(20,20),(21,21),(22,22),(10)\end{matrix}\right\}$
$[10,01]$	$\left\{\begin{matrix}(00,01),(01,02),(02,00),(10,11),(11,12),\\(12,10),(20,21),(21,22),(22,20),(10)\end{matrix}\right\}$
$[10,02]$	$\left\{\begin{matrix}(00,02),(01,00),(02,01),(10,12),(11,10),\\(12,11),(20,22),(21,20),(22,21),(10)\end{matrix}\right\}$
$[10,10]$	$\left\{\begin{matrix}(00,10),(01,11),(02,12),(10,20),(11,21),\\(12,22),(20,00),(21,01),(22,02),(10)\end{matrix}\right\}$
$[10,11]$	$\left\{\begin{matrix}(00,11),(01,12),(02,10),(10,21),(11,22),\\(12,20),(20,01),(21,02),(22,00),(10)\end{matrix}\right\}$
$[10,12]$	$\left\{\begin{matrix}(00,12),(01,10),(02,11),(10,22),(11,20),\\(12,21),(20,02),(21,00),(22,01),(10)\end{matrix}\right\}$
$[10,20]$	$\left\{\begin{matrix}(00,20),(01,21),(02,22),(10,00),(11,01),\\(12,02),(20,10),(21,11),(22,12),(10)\end{matrix}\right\}$

$[10, 21]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,21), (01,22), (02,20), (10,01), (11,02), \\ (12,00), (20,11), (21,12), (22,10), (10) \end{matrix} \right\}$
$[10, 22]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,22), (01,20), (02,21), (10,02), (11,00), \\ (12,01), (20,12), (21,10), (22,11), (10) \end{matrix} \right\}$
$[11, 00]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,00), (01,12), (02,21), (10,11), (11,20), \\ (12,02), (20,22), (21,01), (22,10), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 01]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,01), (01,10), (02,22), (10,12), (11,21), \\ (12,00), (20,20), (21,02), (22,11), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 02]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,02), (01,11), (02,20), (10,10), (11,22), \\ (12,01), (20,21), (21,00), (22,12), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 10]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,10), (01,22), (02,01), (10,21), (11,00), \\ (12,12), (20,02), (21,11), (22,20), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 11]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,11), (01,20), (02,02), (10,22), (11,01), \\ (12,10), (20,00), (21,12), (22,21), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 12]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,12), (01,21), (02,00), (10,20), (11,02), \\ (12,11), (20,01), (21,10), (22,22), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 20]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,20), (01,02), (02,11), (10,01), (11,10), \\ (12,22), (20,12), (21,21), (22,00), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 21]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,21), (01,00), (02,12), (10,02), (11,11), \\ (12,20), (20,10), (21,22), (22,01), (11) \end{matrix} \right\}$
$[11, 22]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,22), (01,01), (02,10), (10,00), (11,12), \\ (12,21), (20,11), (21,20), (22,02), (11) \end{matrix} \right\}$
$[12, 00]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,00), (01,22), (02,11), (10,12), (11,01), \\ (12,20), (20,21), (21,10), (22,02), (12) \end{matrix} \right\}$
$[12, 01]$	$\left\{ \begin{matrix} (00,01), (01,20), (02,12), (10,10), (11,02), \\ (12,21), (20,22), (21,11), (22,00), (12) \end{matrix} \right\}$

$[12,02]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,02),(01,21),(02,10),(10,11),(11,00),\\(12,22),(20,20),(21,12),(22,01),(12)\end{array}\right\}$
$[12,10]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,10),(01,02),(02,21),(10,22),(11,11),\\(12,00),(20,01),(21,20),(22,12),(12)\end{array}\right\}$
$[12,11]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,11),(01,00),(02,22),(10,20),(11,12),\\(12,01),(20,02),(21,21),(22,10),(12)\end{array}\right\}$
$[12,12]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,12),(01,01),(02,20),(10,21),(11,10),\\(12,02),(20,00),(21,22),(22,11),(12)\end{array}\right\}$
$[12,20]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,20),(01,12),(02,01),(10,02),(11,21),\\(12,10),(20,11),(21,00),(22,22),(12)\end{array}\right\}$
$[12,21]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,21),(01,10),(02,02),(10,00),(11,22),\\(12,11),(20,12),(21,01),(22,20),(12)\end{array}\right\}$
$[12,22]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,22),(01,11),(02,00),(10,01),(11,20),\\(12,12),(20,10),(21,02),(22,21),(12)\end{array}\right\}$
$[20,00]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,00),(01,02),(02,01),(10,20),(11,22),\\(12,21),(20,10),(21,12),(22,11),(20)\end{array}\right\}$
$[20,01]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,01),(01,00),(02,02),(10,21),(11,20),\\(12,22),(20,11),(21,10),(22,12),(20)\end{array}\right\}$
$[20,02]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,02),(01,01),(02,00),(10,22),(11,21),\\(12,20),(20,12),(21,11),(22,10),(20)\end{array}\right\}$
$[20,10]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,10),(01,12),(02,11),(10,00),(11,02),\\(12,01),(20,20),(21,22),(22,21),(20)\end{array}\right\}$
$[20,11]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,11),(01,10),(02,12),(10,01),(11,00),\\(12,02),(20,21),(21,20),(22,22),(20)\end{array}\right\}$
$[20,12]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,12),(01,11),(02,10),(10,02),(11,01),\\(12,00),(20,22),(21,21),(22,20),(20)\end{array}\right\}$

$[20,20]$	$\left\{\begin{matrix}(00,20),(01,22),(02,21),(10,10),(11,12),\\(12,11),(20,00),(21,02),(22,21),(20)\end{matrix}\right\}$
$[20,21]$	$\left\{\begin{matrix}(00,21),(01,20),(02,22),(10,11),(11,10),\\(12,12),(20,01),(21,00),(22,22),(20)\end{matrix}\right\}$
$[20,22]$	$\left\{\begin{matrix}(00,22),(01,21),(02,20),(10,12),(11,11),\\(12,10),(20,02),(21,01),(22,20),(20)\end{matrix}\right\}$
$[21,00]$	$\left\{\begin{matrix}(00,00),(01,11),(02,22),(10,21),(11,02),\\(12,10),(20,12),(21,20),(22,01),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,01]$	$\left\{\begin{matrix}(00,01),(01,12),(02,20),(10,22),(11,00),\\(12,11),(20,10),(21,21),(22,02),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,02]$	$\left\{\begin{matrix}(00,02),(01,10),(02,21),(10,20),(11,01),\\(12,12),(20,11),(21,22),(22,00),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,10]$	$\left\{\begin{matrix}(00,10),(01,21),(02,02),(10,01),(11,12),\\(12,20),(20,22),(21,00),(22,11),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,11]$	$\left\{\begin{matrix}(00,11),(01,22),(02,00),(10,02),(11,10),\\(12,21),(20,20),(21,01),(22,12),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,12]$	$\left\{\begin{matrix}(00,12),(01,20),(02,01),(10,00),(11,11),\\(12,22),(20,21),(21,02),(22,10),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,20]$	$\left\{\begin{matrix}(00,20),(01,01),(02,12),(10,11),(11,22),\\(12,00),(20,02),(21,10),(22,21),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,21]$	$\left\{\begin{matrix}(00,21),(01,02),(02,10),(10,12),(11,20),\\(12,01),(20,00),(21,11),(22,22),(21)\end{matrix}\right\}$
$[21,22]$	$\left\{\begin{matrix}(00,22),(01,00),(02,11),(10,10),(11,21),\\(12,02),(20,01),(21,12),(22,20),(21)\end{matrix}\right\}$
$[22,00]$	$\left\{\begin{matrix}(00,00),(01,21),(02,12),(10,22),(11,10),\\(12,01),(20,11),(21,02),(22,20),(22)\end{matrix}\right\}$

$[22,01]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,01),(01,22),(02,10),(10,20),(11,11),\\(12,02),(20,12),(21,00),(22,21),(22)\end{array}\right\}$
$[22,02]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,02),(01,20),(02,11),(10,21),(11,12),\\(12,00),(20,10),(21,01),(22,22),(22)\end{array}\right\}$
$[22,10]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,10),(01,01),(02,22),(10,02),(11,20),\\(12,11),(20,21),(21,12),(22,00),(22)\end{array}\right\}$
$[22,11]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,11),(01,02),(02,20),(10,00),(11,21),\\(12,12),(20,22),(21,10),(22,01),(22)\end{array}\right\}$
$[22,12]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,12),(01,00),(02,21),(10,01),(11,22),\\(12,10),(20,20),(21,11),(22,02),(22)\end{array}\right\}$
$[22,20]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,20),(01,11),(02,02),(10,12),(11,00),\\(12,21),(20,01),(21,22),(22,10),(22)\end{array}\right\}$
$[22,21]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,21),(01,12),(02,00),(10,10),(11,01),\\(12,22),(20,02),(21,20),(22,11),(22)\end{array}\right\}$
$[22,22]$	$\left\{\begin{array}{c}(00,22),(01,10),(02,01),(10,11),(11,02),\\(12,20),(20,00),(21,21),(22,12),(22)\end{array}\right\}$

2.2.2 Noktadan Geçen Doğrular

(∞)	$\left\{\begin{array}{c}[00],[01],[02],[10],[11],\\[12],[20],[21],[22],[\infty]\end{array}\right\}$
(00)	$\left\{\begin{array}{c}[00,00],[00,01],[00,02],[00,10],[00,11],\\[00,12],[00,20],[00,21],[00,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(01)	$\left\{\begin{array}{c}[01,00],[01,01],[01,02],[01,10],[01,11],\\[01,12],[01,20],[01,21],[01,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(02)	$\left\{\begin{array}{c}[02,00],[02,01],[02,02],[02,10],[02,11],\\[02,12],[02,20],[02,21],[02,22],[\infty]\end{array}\right\}$

(10)	$\left\{\begin{array}{c}[10,00],[10,01],[10,02],[10,10],[10,11],\\ [10,12],[10,20],[10,21],[10,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(11)	$\left\{\begin{array}{c}[11,00],[11,01],[11,02],[11,10],[11,11],\\ [11,12],[11,20],[11,21],[11,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(12)	$\left\{\begin{array}{c}[12,00],[12,01],[12,02],[12,10],[12,11],\\ [12,12],[12,20],[12,21],[12,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(20)	$\left\{\begin{array}{c}[20,00],[20,01],[20,02],[20,10],[20,11],\\ [20,12],[20,20],[20,21],[20,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(21)	$\left\{\begin{array}{c}[21,00],[21,01],[21,02],[21,10],[21,11],\\ [21,12],[21,20],[21,21],[21,22],[\infty]\end{array}\right\}$
(22)	$\left\{\begin{array}{c}[22,00],[22,01],[22,02],[22,10],[22,11],\\ [22,12],[22,20],[22,21],[22,22],[\infty]\end{array}\right\}$
$(00,00)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,00],[01,00],[02,00],[10,00],[11,00],\\ [12,00],[20,00],[21,00],[22,00],[00]\end{array}\right\}$
$(00,01)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,01],[01,01],[02,01],[10,01],[11,01],\\ [12,01],[20,01],[21,01],[22,01],[00]\end{array}\right\}$
$(00,02)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,02],[01,02],[02,02],[10,02],[11,02],\\ [12,02],[20,02],[21,02],[22,02],[00]\end{array}\right\}$
$(00,10)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,10],[01,10],[02,10],[10,10],[11,10],\\ [12,10],[20,10],[21,10],[22,10],[00]\end{array}\right\}$
$(00,11)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,11],[01,11],[02,11],[10,11],[11,11],\\ [12,11],[20,11],[21,11],[22,11],[00]\end{array}\right\}$
$(00,12)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,12],[01,12],[02,12],[10,12],[11,12],\\ [12,12],[20,12],[21,12],[22,12],[00]\end{array}\right\}$
$(00,20)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,20],[01,20],[02,20],[10,20],[11,20],\\ [12,20],[20,20],[21,20],[22,20],[00]\end{array}\right\}$

$(00,21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,21],[01,21],[02,21],[10,21],[11,21], \\ [12,21],[20,21],[21,21],[22,21],[00] \end{array} \right\}$
$(00,22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,22],[01,22],[02,22],[10,22],[11,22], \\ [12,22],[20,22],[21,22],[22,22],[00] \end{array} \right\}$
$(01,00)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,00],[01,10],[02,20],[10,02],[11,21], \\ [12,11],[20,01],[21,22],[22,12],[01] \end{array} \right\}$
$(01,01)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,01],[01,11],[02,21],[10,00],[11,22], \\ [12,12],[20,02],[21,20],[22,10],[01] \end{array} \right\}$
$(01,02)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,02],[01,12],[02,22],[10,01],[11,20], \\ [12,10],[20,00],[21,21],[22,11],[01] \end{array} \right\}$
$(01,10)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,10],[01,20],[02,00],[10,12],[11,01], \\ [12,21],[20,11],[21,02],[22,22],[01] \end{array} \right\}$
$(01,11)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,11],[01,21],[02,01],[10,10],[11,02], \\ [12,22],[20,12],[21,00],[22,20],[01] \end{array} \right\}$
$(01,12)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,12],[01,22],[02,02],[10,11],[11,00], \\ [12,20],[20,10],[21,01],[22,21],[01] \end{array} \right\}$
$(01,20)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,20],[01,00],[02,10],[10,22],[11,11], \\ [12,01],[20,21],[21,12],[22,02],[01] \end{array} \right\}$
$(01,21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,21],[01,01],[02,11],[10,20],[11,12], \\ [12,02],[20,22],[21,10],[22,00],[01] \end{array} \right\}$
$(01,22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,22],[01,02],[02,12],[10,21],[11,10], \\ [12,00],[20,20],[21,11],[22,01],[01] \end{array} \right\}$
$(02,00)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,00],[01,20],[02,10],[10,01],[11,12], \\ [12,22],[20,02],[21,11],[22,21],[02] \end{array} \right\}$
$(02,01)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,01],[01,21],[02,11],[10,02],[11,10], \\ [12,20],[20,00],[21,12],[22,22],[02] \end{array} \right\}$

$(02, 02)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 02], [01, 22], [02, 12], [10, 00], [11, 11], \\ [12, 21], [20, 01], [21, 10], [22, 20], [02] \end{array} \right\}$
$(02, 10)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 10], [01, 00], [02, 20], [10, 11], [11, 22], \\ [12, 02], [20, 12], [21, 21], [22, 01], [02] \end{array} \right\}$
$(02, 11)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 11], [01, 01], [02, 21], [10, 12], [11, 20], \\ [12, 00], [20, 10], [21, 22], [22, 02], [02] \end{array} \right\}$
$(02, 12)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 12], [01, 02], [02, 22], [10, 10], [11, 21], \\ [12, 01], [20, 11], [21, 20], [22, 00], [02] \end{array} \right\}$
$(02, 20)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 20], [01, 10], [02, 00], [10, 21], [11, 02], \\ [12, 12], [20, 22], [21, 01], [22, 11], [02] \end{array} \right\}$
$(02, 21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 21], [01, 11], [02, 01], [10, 22], [11, 00], \\ [12, 10], [20, 20], [21, 02], [22, 12], [02] \end{array} \right\}$
$(02, 22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 22], [01, 12], [02, 02], [10, 20], [11, 01], \\ [12, 11], [20, 21], [21, 00], [22, 10], [02] \end{array} \right\}$
$(10, 00)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 00], [01, 02], [02, 01], [10, 20], [11, 22], \\ [12, 21], [20, 10], [21, 12], [22, 11], [10] \end{array} \right\}$
$(10, 01)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 01], [01, 00], [02, 02], [10, 21], [11, 20], \\ [12, 22], [20, 11], [21, 10], [22, 12], [10] \end{array} \right\}$
$(10, 02)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 02], [01, 01], [02, 00], [10, 22], [11, 21], \\ [12, 20], [20, 12], [21, 11], [22, 10], [10] \end{array} \right\}$
$(10, 10)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 10], [01, 12], [02, 11], [10, 00], [11, 02], \\ [12, 01], [20, 20], [21, 22], [22, 21], [10] \end{array} \right\}$
$(10, 11)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 11], [01, 10], [02, 12], [10, 01], [11, 00], \\ [12, 02], [20, 21], [21, 20], [22, 22], [10] \end{array} \right\}$
$(10, 12)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00, 12], [01, 11], [02, 10], [10, 02], [11, 01], \\ [12, 00], [20, 22], [21, 21], [22, 20], [10] \end{array} \right\}$

$(10,20)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,20]\,,[01,22]\,,[02,21]\,,[10,10]\,,[11,12]\,, \\ [12,11]\,,[20,00]\,,[21,02]\,,[22,01]\,,[10] \end{array} \right\}$
$(10,21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,21]\,,[01,20]\,,[02,22]\,,[10,11]\,,[11,10]\,, \\ [12,12]\,,[20,01]\,,[21,00]\,,[22,02]\,,[10] \end{array} \right\}$
$(10,22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,22]\,,[01,21]\,,[02,20]\,,[10,12]\,,[11,11]\,, \\ [12,10]\,,[20,02]\,,[21,01]\,,[22,00]\,,[10] \end{array} \right\}$
$(11,00)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,00]\,,[01,12]\,,[02,21]\,,[10,22]\,,[11,10]\,, \\ [12,02]\,,[20,11]\,,[21,01]\,,[22,20]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,01)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,01]\,,[01,10]\,,[02,22]\,,[10,20]\,,[11,11]\,, \\ [12,00]\,,[20,12]\,,[21,02]\,,[22,21]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,02)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,02]\,,[01,11]\,,[02,20]\,,[10,21]\,,[11,12]\,, \\ [12,01]\,,[20,10]\,,[21,00]\,,[22,22]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,10)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,10]\,,[01,22]\,,[02,01]\,,[10,02]\,,[11,20]\,, \\ [12,12]\,,[20,21]\,,[21,11]\,,[22,00]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,11)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,11]\,,[01,20]\,,[02,02]\,,[10,00]\,,[11,21]\,, \\ [12,10]\,,[20,22]\,,[21,12]\,,[22,01]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,12)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,12]\,,[01,21]\,,[02,00]\,,[10,01]\,,[11,22]\,, \\ [12,11]\,,[20,20]\,,[21,10]\,,[22,02]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,20)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,20]\,,[01,02]\,,[02,11]\,,[10,12]\,,[11,00]\,, \\ [12,22]\,,[20,01]\,,[21,21]\,,[22,10]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,21]\,,[01,00]\,,[02,12]\,,[10,10]\,,[11,01]\,, \\ [12,20]\,,[20,02]\,,[21,22]\,,[22,11]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(11,22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,22]\,,[01,01]\,,[02,10]\,,[10,11]\,,[11,02]\,, \\ [12,21]\,,[20,00]\,,[21,20]\,,[22,12]\,,[11] \end{array} \right\}$
$(12,00)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,00]\,,[01,22]\,,[02,11]\,,[10,21]\,,[11,01]\,, \\ [12,10]\,,[20,12]\,,[21,20]\,,[22,02]\,,[12] \end{array} \right\}$

$(12,01)$	$\left\{ [00,01],[01,20],[02,12],[10,22],[11,02], [12,11],[20,10],[21,21],[22,00],[12] \right\}$
$(12,02)$	$\left\{ [00,02],[01,21],[02,10],[10,20],[11,00], [12,12],[20,11],[21,22],[22,01],[12] \right\}$
$(12,10)$	$\left\{ [00,10],[01,02],[02,21],[10,01],[11,11], [12,20],[20,22],[21,00],[22,12],[12] \right\}$
$(12,11)$	$\left\{ [00,11],[01,00],[02,22],[10,02],[11,12], [12,21],[20,20],[21,01],[22,10],[12] \right\}$
$(12,12)$	$\left\{ [00,12],[01,01],[02,20],[10,00],[11,10], [12,22],[20,21],[21,02],[22,11],[12] \right\}$
$(12,20)$	$\left\{ [00,20],[01,12],[02,01],[10,11],[11,21], [12,00],[20,02],[21,10],[22,22],[12] \right\}$
$(12,21)$	$\left\{ [00,21],[01,10],[02,02],[10,12],[11,22], [12,01],[20,00],[21,11],[22,20],[12] \right\}$
$(12,22)$	$\left\{ [00,22],[01,11],[02,00],[10,10],[11,20], [12,02],[20,01],[21,12],[22,21],[12] \right\}$
$(20,00)$	$\left\{ [00,00],[01,01],[02,02],[10,10],[11,11], [12,12],[20,20],[21,21],[22,22],[20] \right\}$
$(20,01)$	$\left\{ [00,01],[01,02],[02,00],[10,11],[11,12], [12,10],[20,21],[21,22],[22,20],[20] \right\}$
$(20,02)$	$\left\{ [00,02],[01,00],[02,01],[10,12],[11,10], [12,11],[20,22],[21,20],[22,21],[20] \right\}$
$(20,10)$	$\left\{ [00,10],[01,11],[02,12],[10,20],[11,21], [12,22],[20,00],[21,01],[22,02],[20] \right\}$
$(20,11)$	$\left\{ [00,11],[01,12],[02,10],[10,21],[11,22], [12,20],[20,01],[21,02],[22,00],[20] \right\}$

$(20,12)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,12],[01,10],[02,11],[10,22],[11,20], \\ [12,21],[20,02],[21,00],[22,01],[20] \end{array} \right\}$
$(20,20)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,20],[01,21],[02,22],[10,00],[11,01], \\ [12,02],[20,10],[21,11],[22,12],[20] \end{array} \right\}$
$(20,21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,21],[01,22],[02,20],[10,01],[11,02], \\ [12,00],[20,11],[21,12],[22,10],[20] \end{array} \right\}$
$(20,22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,22],[01,20],[02,21],[10,02],[11,00], \\ [12,01],[20,12],[21,10],[22,11],[20] \end{array} \right\}$
$(21,00)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,00],[01,11],[02,22],[10,12],[11,02], \\ [12,20],[20,21],[21,10],[22,01],[21] \end{array} \right\}$
$(21,01)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,01],[01,12],[02,20],[10,10],[11,00], \\ [12,21],[20,22],[21,11],[22,02],[21] \end{array} \right\}$
$(21,02)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,02],[01,10],[02,21],[10,11],[11,01], \\ [12,22],[20,20],[21,12],[22,00],[21] \end{array} \right\}$
$(21,10)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,10],[01,21],[02,02],[10,22],[11,12], \\ [12,00],[20,01],[21,20],[22,11],[21] \end{array} \right\}$
$(21,11)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,11],[01,22],[02,00],[10,20],[11,10], \\ [12,01],[20,02],[21,21],[22,12],[21] \end{array} \right\}$
$(21,12)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,12],[01,20],[02,01],[10,21],[11,11], \\ [12,02],[20,00],[21,22],[22,10],[21] \end{array} \right\}$
$(21,20)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,20],[01,01],[02,12],[10,02],[11,22], \\ [12,10],[20,11],[21,00],[22,21],[21] \end{array} \right\}$
$(21,21)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,21],[01,02],[02,10],[10,00],[11,20], \\ [12,11],[20,12],[21,01],[22,22],[21] \end{array} \right\}$
$(21,22)$	$\left\{ \begin{array}{c} [00,22],[01,00],[02,11],[10,01],[11,21], \\ [12,12],[20,10],[21,02],[22,20],[21] \end{array} \right\}$

$(22,00)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,00],[01,21],[02,12],[10,11],[11,20],\\ [12,01],[20,22],[21,02],[22,10],[22]\end{array}\right\}$
$(22,01)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,01],[01,22],[02,10],[10,12],[11,21],\\ [12,02],[20,20],[21,00],[22,11],[22]\end{array}\right\}$
$(22,02)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,02],[01,20],[02,11],[10,10],[11,22],\\ [12,00],[20,21],[21,01],[22,12],[22]\end{array}\right\}$
$(22,10)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,10],[01,01],[02,22],[10,21],[11,00],\\ [12,11],[20,02],[21,12],[22,20],[22]\end{array}\right\}$
$(22,11)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,11],[01,02],[02,20],[10,22],[11,01],\\ [12,12],[20,00],[21,10],[22,21],[22]\end{array}\right\}$
$(22,12)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,12],[01,00],[02,21],[10,20],[11,02],\\ [12,10],[20,01],[21,11],[22,22],[22]\end{array}\right\}$
$(22,20)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,20],[01,11],[02,02],[10,01],[11,10],\\ [12,21],[20,12],[21,22],[22,00],[22]\end{array}\right\}$
$(22,21)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,21],[01,12],[02,00],[10,02],[11,11],\\ [12,22],[20,10],[21,20],[22,01],[22]\end{array}\right\}$
$(22,22)$	$\left\{\begin{array}{c}[00,22],[01,10],[02,01],[10,00],[11,12],\\ [12,20],[20,11],[21,21],[22,02],[22]\end{array}\right\}$

2.3 P_2S nin Alt Düzlemleri

Bir Fano düzlemi, birçok projektif düzlemin alt projektif düzlemi olarak da ortaya çıkar. Bir projektif düzlemdeki Fano alt düzlemleri, bu projektif düzlemin geometrik yapısının belirlenmesinde önemli rol oynar. (Çiftçi, Kaya, 1990; Kirkpatrick, 1971)

2.3.1 P_2S nin 2. Mertebeden Bazı Alt Düzlemleri

P_2S nin 2. mertebeden alt düzlemlerini araştırırken, ilgili tam dörtgenler aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilmiştir.

$$O = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0), I = (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0), X = (0 + \lambda 0) \text{ ve } P = (0 + \lambda 0, a + \lambda b),$$

herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. Bu durumda

$$P = (0 + \lambda 0, a + \lambda b)$$

de $a = b = 0$ ise $O = P$ olup $OIXP$ bir düzgün dörtgen oluşturmaz. Eğer

$$P = (0 + \lambda 0, a + \lambda b)$$

de $a = 1, b = 0$ ise

$$P = (0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0)$$

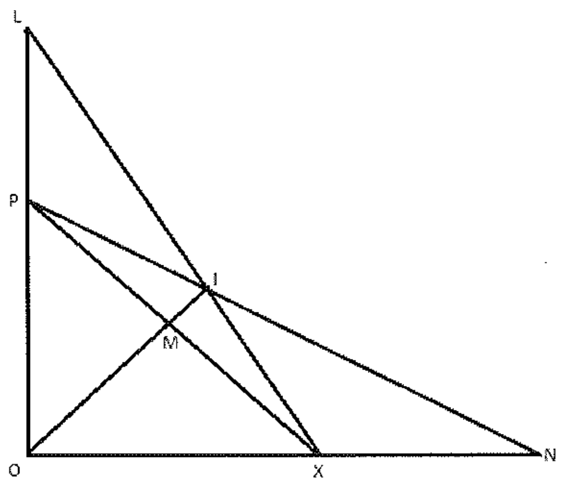
olduğundan I, X ve P noktaları doğrudaş olacağı için $OIXP$ bir düzgün dörtgen oluşturmaz. Diğer bütün durumlarda $OIXP$ bir düzgün dörtgen olduğundan bu dörtgenin tamamlanmışları olan konfigürasyonların hangilerinin birer Fano düzlemi olduğunu, hangilerinin birer Fano düzlemi olmadığını

$$P = (0 + \lambda 0, a + \lambda b)$$

deki a ve b nin diğer seçilişlerine göre inceleyelim.

Önerme 2.3.1 *P_2S de $P = (0 + \lambda 0, a + \lambda b)$ olmak üzere $a = 2$ ve $b = 0$ iken elde edilen $OIXP$dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemi değildir.*

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular şekil 2.3.1 deki konumda olsun.



Şekil 2.3.1

Eğer $a = 2, b = 0$ ise $P = (0 + \lambda 0, 2 + \lambda 0)$ olup;

$$OP = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0, 2 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0]$$

$$OX = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0]$$

$$IX = (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0 = [0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0]$$

$$PX = (0 + \lambda 0, 2 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 2 + \lambda 0]$$

$$OI = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = [1 + \lambda 0, 0 + \lambda 0]$$

$$PI = (0 + \lambda 0, 2 + \lambda 0) \vee (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = [2 + \lambda 0, 2 + \lambda 0]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} OP \wedge IX &= [0 + \lambda 0] \wedge [0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0] = (x + \lambda a, y + \lambda b) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + \lambda a = 0 + \lambda 0, \\ y + \lambda b = [(0 + \lambda 0) \odot (x + \lambda a)] \oplus (1 + \lambda 0) \end{cases} \\ &\Longrightarrow y + \lambda b = 1 + \lambda 0 \\ &\Longrightarrow OP \wedge IX = (0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = L \end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OI \wedge PX \ &= [1+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 2+\lambda 0] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = (1+\lambda 0) \odot (x+\lambda a), \\ y+\lambda b = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (2+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 2+\lambda 0 = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (2+\lambda 0, 2+\lambda 0) = M
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OX \wedge PI \ &= [0+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [2+\lambda 0, 2+\lambda 0] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(2+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (2+\lambda 0), \\ (x+\lambda a) = (2+\lambda 0) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (2+\lambda 0, 0+\lambda 0) = N
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

$OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyonda L, M ve N köşegen noktaları doğrudaş ise, bir Fano düzlemi denir.

$$\begin{aligned}
LN \ &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (2+\lambda 0, 0+\lambda 0) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(m+\lambda a) \odot (2+\lambda 0)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (1+\lambda 0) \end{cases} \\
&\Longrightarrow LN = [1+\lambda 0, 1+\lambda 0]
\end{aligned}$$

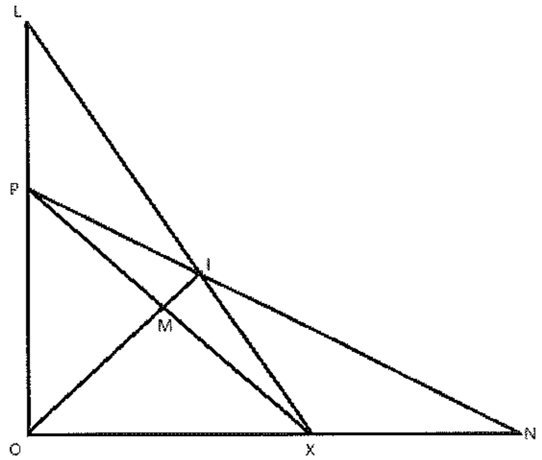
Varsayalım ki $M \circ LN$ olsun.

$$\begin{aligned}
M \circ LN \ &= (2+\lambda 0, 2+\lambda 0) \circ [1+\lambda 0, 1+\lambda 0] \\
&\Longleftrightarrow (2+\lambda 0) = [(1+\lambda 0) \odot (2+\lambda 0)] \oplus (1+\lambda 0) \\
&\Longleftrightarrow (2+\lambda 0) = (0+\lambda 0)
\end{aligned}$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla L, M ve N noktaları doğrudaş olmadığından $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon, Fano düzlemi değildir.

Önerme 2.3.2 *P_2S de $P = (0+\lambda 0, a+\lambda b)$ olmak üzere $a = 0$ ve $b \in \{1, 2\}$ iken elde edilen $OIXP$ dörtgeninin tamamlanmışları olan konfigürasyonlar birer Fano düzlemi oluştururlar.*

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular şekil 2.3.2 deki konumda olsun.



Şekil 2.3.2

1.Hal : Eğer $a = 0, b = 1$ ise $P = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 1)$ olup;

$$OP = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 1) = [0 + \lambda 0]$$

$$OX = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0]$$

$$IX = (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0]$$

$$PX = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 1) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 0 + \lambda 1]$$

$$OI = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = [1 + \lambda 0, 0 + \lambda 0]$$

$$PI = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 1) \vee (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = [1 + \lambda 2, 0 + \lambda 1]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} OP \wedge IX &= [0 + \lambda 0] \wedge [0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0] = (x + \lambda a, y + \lambda b) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + \lambda a = 0 + \lambda 0, \\ y + \lambda b = [(0 + \lambda 0) \odot (x + \lambda a)] \oplus (1 + \lambda 0) \end{cases} \\ &\Longrightarrow y + \lambda b = 1 + \lambda 0 \\ &\Longrightarrow OP \wedge IX = (0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = L \end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OI \wedge PX &= [1+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 0+\lambda 1] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = (1+\lambda 0) \odot (x+\lambda a), \\ y+\lambda b = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 1), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 1 = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (0+\lambda 1, 0+\lambda 1) = M
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OX \wedge PI &= [0+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [1+\lambda 2, 0+\lambda 1] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(1+\lambda 2) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 1), \\ (x+\lambda a) = (2+\lambda 2) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (2+\lambda 2, 0+\lambda 0) = N
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

L, M ve N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmeleri için $N \circ LM$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
LM &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (0+\lambda 1, 0+\lambda 1) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 1) = [(m+\lambda a) \odot (0+\lambda 1)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (2+\lambda 2) \end{cases} \\
&\Longrightarrow LM = [2+\lambda 2, 1+\lambda 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N \circ LM &= (2+\lambda 2, 0+\lambda 0) \circ [2+\lambda 2, 1+\lambda 0] \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = [(2+\lambda 2) \odot (2+\lambda 2)] \oplus (1+\lambda 0) \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = (0+\lambda 0)
\end{aligned}$$

olduğundan L, M ve N köşegen noktaları doğrudaştır. Yani $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemidir. Bu düzlem F_1 ile gösterilir.

2.Hal : Eğer $a = 0, b = 2$ ise $P = (0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$ olup;

$$OP = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0, 0+\lambda 2) = [0+\lambda 0]$$

$$OX = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$IX = (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0 = [0+\lambda 0, 1+\lambda 0]$$

$$PX = (0+\lambda 0, 0+\lambda 2) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 0+\lambda 2]$$

$$OI = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [1+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$PI = (0+\lambda 0, 0+\lambda 2) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [1+\lambda 1, 0+\lambda 2]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
OP \wedge IX &= [0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 1+\lambda 0] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+\lambda a = 0+\lambda 0, \\ y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 0) \end{cases} \\
&\Longrightarrow y+\lambda b = 1+\lambda 0 \\
&\Longrightarrow OP \wedge IX = (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) = L
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OI \wedge PX &= [1+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 0+\lambda 2] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = (1+\lambda 0) \odot (x+\lambda a), \\ y+\lambda b = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 2), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 2 = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (0+\lambda 2, 0+\lambda 2) = M
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OX \wedge PI &= [0+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [1+\lambda 1, 0+\lambda 2] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(1+\lambda 1) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 2), \\ (x+\lambda a) = (2+\lambda 1) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (2+\lambda 1, 0+\lambda 0) = N
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

L, M ve N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmeleri için $N \circ LM$ olmalıdır.

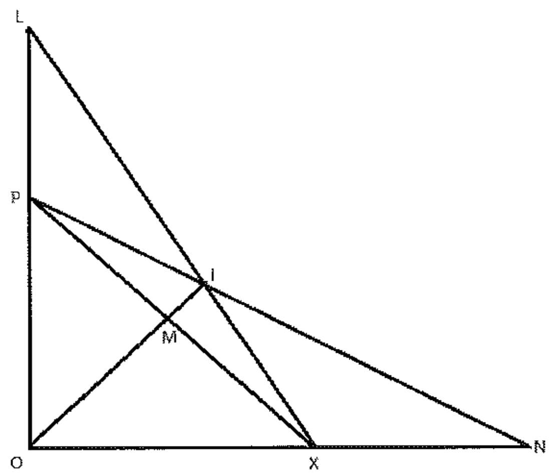
$$
\begin{aligned}
LM &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (0+\lambda 2, 0+\lambda 2) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 2) = [(m+\lambda a) \odot (0+\lambda 2)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (2+\lambda 1) \end{cases} \\
&\Longrightarrow LM = [2+\lambda 1, 1+\lambda 0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N \circ LM &= (2+\lambda 1, 0+\lambda 0) \circ [2+\lambda 1, 1+\lambda 0] \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = [(2+\lambda 1) \odot (2+\lambda 1)] \oplus (1+\lambda 0) \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = (0+\lambda 0)
\end{aligned}
$$

olduğundan L, M ve N köşegen noktaları doğrudaştır. Yani $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemidir. Bu düzlem F_2 ile gösterilir.

Önerme 2.3.3 *P_2S de $P = (0+\lambda 0, a+\lambda b)$ olmak üzere; $a = b = 1$ iken elde edilen $OIXP$ dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemidir.*

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular şekil 2.3.3 deki konumda olsun.



Şekil 2.3.3

Eğer $a = b = 1$ ise $P = (0+\lambda 0, 1+\lambda 1)$ olup;

$$OP = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0, 1+\lambda 1) = [0+\lambda 0]$$

$$OX = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$IX = (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0 = [0+\lambda 0, 1+\lambda 0]$$

$$PX = (0+\lambda 0, 1+\lambda 1) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 1+\lambda 1]$$

$$OI = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [1+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$PI = (0+\lambda 0, 1+\lambda 1) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [0+\lambda 2, 1+\lambda 1]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
OP \wedge IX \;&= [0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 1+\lambda 0] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+\lambda a = 0+\lambda 0, \\ y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 0) \end{cases} \\
&\Longrightarrow y+\lambda b = 1+\lambda 0 \\
&\Longrightarrow OP \wedge IX = (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) = L
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OI \wedge PX \;&= [1+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 1+\lambda 1] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = (1+\lambda 0) \odot (x+\lambda a), \\ y+\lambda b = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 1), \\ y+\lambda b = 1+\lambda 1 = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (1+\lambda 1, 1+\lambda 1) = M
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OX \wedge PI \;&= [0+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 2, 1+\lambda 1] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(0+\lambda 2) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 1), \\ (x+\lambda a) = (1+\lambda 2) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (1+\lambda 2, 0+\lambda 0) = N
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

L, M ve N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmeleri için $N \circ LM$ olmalıdır.

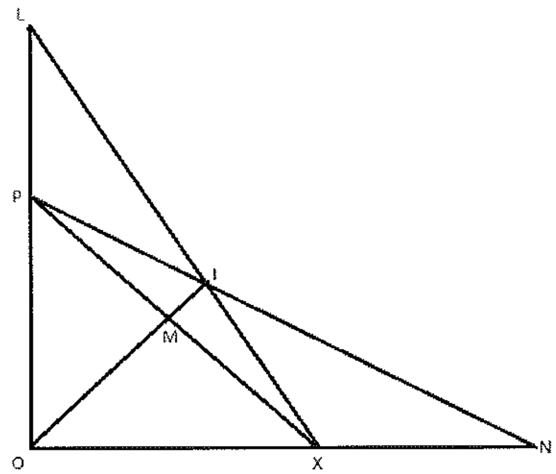
$$\begin{aligned}
LM &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (1+\lambda 1, 1+\lambda 1) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (1+\lambda 1) = [(m+\lambda a) \odot (1+\lambda 1)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (1+\lambda 2) \end{cases} \\
&\Longrightarrow LM = [1+\lambda 2, 1+\lambda 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N \circ LM &= (1+\lambda 2, 0+\lambda 0) \circ [1+\lambda 2, 1+\lambda 0] \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = [(1+\lambda 2) \odot (1+\lambda 2)] \oplus (1+\lambda 0) \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = (0+\lambda 0)
\end{aligned}$$

olup L, M ve N noktaları doğrudaş olduğundan $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon, bir Fano düzlemidir. Bu düzlem F_3 ile gösterilir.

Önerme 2.3.4 *P_2S de $P = (0+\lambda 0, a+\lambda b)$ olmak üzere; $a, b \in \{1,2\}$ $(a = b = 1$ hariç) iken elde edilen $OIXP$dörtgeninin tamamlanmışları olan konfigürasyonlar birer Fano düzlemi oluştururlar.*

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular şekil 2.3.4 deki konumda olsun.



Şekil 2.3.4

1.Hal : Eğer $a = b = 2$ ise $P = (0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$ olup;

$$OP = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0, 2+\lambda 2) = [0+\lambda 0]$$

$$OX = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0]$$

$$IX = (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) \vee (0 + \lambda 0 = [0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0]$$

$$PX = (0 + \lambda 0, 2 + \lambda 2) \vee (0 + \lambda 0) = [0 + \lambda 0, 2 + \lambda 2]$$

$$OI = (0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0) \vee (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = [1 + \lambda 0, 0 + \lambda 0]$$

$$PI = (0 + \lambda 0, 2 + \lambda 2) \vee (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = [2 + \lambda 1, 2 + \lambda 2]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
OP \wedge IX \ &= [0 + \lambda 0] \wedge [0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0] = (x + \lambda a, y + \lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x + \lambda a = 0 + \lambda 0, \\ y + \lambda b = [(0 + \lambda 0) \odot (x + \lambda a)] \oplus (1 + \lambda 0) \end{cases} \\
&\Longrightarrow y + \lambda b = 1 + \lambda 0 \\
&\Longrightarrow OP \wedge IX = (0 + \lambda 0, 1 + \lambda 0) = L
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OI \wedge PX \ &= [1 + \lambda 0, 0 + \lambda 0] \wedge [0 + \lambda 0, 2 + \lambda 2] = (x + \lambda a, y + \lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y + \lambda b = (1 + \lambda 0) \odot (x + \lambda a), \\ y + \lambda b = x + \lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y + \lambda b = [(0 + \lambda 0) \odot (x + \lambda a)] \oplus (2 + \lambda 2), \\ y + \lambda b = 2 + \lambda 2 = x + \lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (2 + \lambda 2, 2 + \lambda 2) = M
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OX \wedge PI \ &= [0 + \lambda 0, 0 + \lambda 0] \wedge [2 + \lambda 1, 2 + \lambda 2] = (x + \lambda a, y + \lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y + \lambda b = [(0 + \lambda 0) \odot (x + \lambda a)] \oplus (0 + \lambda 0), \\ y + \lambda b = 0 + \lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0 + \lambda 0) = [(2 + \lambda 1) \odot (x + \lambda a)] \oplus (2 + \lambda 2), \\ (x + \lambda a) = (0 + \lambda 1) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (0 + \lambda 1, 0 + \lambda 0) = N
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

L, M ve N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmeleri için $N \circ LM$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} LM &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (2+\lambda 2, 2+\lambda 2) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} (2+\lambda 2) = [(m+\lambda a) \odot (2+\lambda 2)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (0+\lambda 1) \end{cases} \\ &\Longrightarrow LM = [0+\lambda 1, 1+\lambda 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N \circ LM &= (0+\lambda 1, 0+\lambda 0) \circ [0+\lambda 1, 1+\lambda 0] \\ &\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = [(0+\lambda 1) \odot (0+\lambda 1)] \oplus (1+\lambda 0) \\ &\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = (0+\lambda 0) \end{aligned}$$

olduğundan L, M ve N köşegen noktaları doğrudaştır. Yani $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemidir. Bu düzlem F_4 ile gösterilir.

2.Hal : Eğer $a = 1, b = 2$ ise $P = (0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$ olup;

$$OP = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0, 1+\lambda 2) = [0+\lambda 0]$$

$$OX = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$IX = (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0 = [0+\lambda 0, 1+\lambda 0]$$

$$PX = (0+\lambda 0, 1+\lambda 2) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 1+\lambda 2]$$

$$OI = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [1+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$PI = (0+\lambda 0, 1+\lambda 2) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [0+\lambda 1, 1+\lambda 2]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} OP \wedge IX &= [0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 1+\lambda 0] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x+\lambda a = 0+\lambda 0, \\ y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 0) \end{cases} \\ &\Longrightarrow y+\lambda b = 1+\lambda 0 \\ &\Longrightarrow OP \wedge IX = (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) = L \end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$
\begin{aligned}
OI \wedge PX &= [1+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 1+\lambda 2] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = (1+\lambda 0) \odot (x+\lambda a), \\ y+\lambda b = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 2), \\ y+\lambda b = 1+\lambda 2 = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (1+\lambda 2, 1+\lambda 2) = M
\end{aligned}
$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$
\begin{aligned}
OX \wedge PI &= [0+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 1, 1+\lambda 2] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0) \odot (x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(0+\lambda 1) \odot (x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 2), \\ (x+\lambda a) = (1+\lambda 1) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (1+\lambda 1, 0+\lambda 0) = N
\end{aligned}
$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

L, M ve N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmeleri için $N \circ LM$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
LM &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (1+\lambda 2, 1+\lambda 2) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (1+\lambda 2) = [(m+\lambda a) \odot (1+\lambda 2)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (1+\lambda 1) \end{cases} \\
&\Longrightarrow LM = [1+\lambda 1, 1+\lambda 0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N \circ LM &= (1+\lambda 1, 0+\lambda 0) \circ [1+\lambda 1, 1+\lambda 0] \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = [(1+\lambda 1) \odot (1+\lambda 1)] \oplus (1+\lambda 0) \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = (0+\lambda 0)
\end{aligned}
$$

olduğundan L, M ve N köşegen noktaları doğrudaştır. Yani $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemidir. Bu düzlem F_5 ile gösterilir.

3.Hal : Eğer $a = 2, b = 1$ ise $P = (0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$ olup;

$$OP = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0, 2+\lambda 1) = [0+\lambda 0]$$

$$OX = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$IX = (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (0+\lambda 0 = [0+\lambda 0, 1+\lambda 0]$$

$$PX = (0+\lambda 0, 2+\lambda 1) \vee (0+\lambda 0) = [0+\lambda 0, 2+\lambda 1]$$

$$OI = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [1+\lambda 0, 0+\lambda 0]$$

$$PI = (0+\lambda 0, 2+\lambda 1) \vee (1+\lambda 0, 1+\lambda 0) = [2+\lambda 2, 2+\lambda 1]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
OP \wedge IX \quad &= [0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 1+\lambda 0] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+\lambda a = 0+\lambda 0, \\ y+\lambda b = [(0+\lambda 0)\odot(x+\lambda a)] \oplus (1+\lambda 0) \end{cases} \\
&\Longrightarrow y+\lambda b = 1+\lambda 0 \\
&\Longrightarrow OP \wedge IX = (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) = L
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin birinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OI \wedge PX \quad &= [1+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [0+\lambda 0, 2+\lambda 1] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = (1+\lambda 0)\odot(x+\lambda a), \\ y+\lambda b = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0)\odot(x+\lambda a)] \oplus (2+\lambda 1), \\ y+\lambda b = 2+\lambda 1 = x+\lambda a \end{cases} \\
&\Longrightarrow OI \wedge PX = (2+\lambda 1, 2+\lambda 1) = M
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin ikinci *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
OX \wedge PI \quad &= [0+\lambda 0, 0+\lambda 0] \wedge [2+\lambda 2, 2+\lambda 1] = (x+\lambda a, y+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+\lambda b = [(0+\lambda 0)\odot(x+\lambda a)] \oplus (0+\lambda 0), \\ y+\lambda b = 0+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (0+\lambda 0) = [(2+\lambda 2)\odot(x+\lambda a)] \oplus (2+\lambda 1), \\ (x+\lambda a) = (0+\lambda 2) \end{cases} \\
&\Longrightarrow OX \wedge PI = (0+\lambda 2, 0+\lambda 0) = N
\end{aligned}$$

($OIXP$ tamdörtgeninin üçüncü *kösegen* noktası)

$$\begin{aligned}
LM &= (0+\lambda 0, 1+\lambda 0) \vee (2+\lambda 1, 2+\lambda 1) = (m+\lambda a, k+\lambda b) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda 0 = [(m+\lambda a \odot 0+\lambda 0)] \oplus (k+\lambda b), \\ k+\lambda b = 1+\lambda 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} (2+\lambda 1) = [(m+\lambda a) \odot (2+\lambda 1)] \oplus (1+\lambda 0), \\ (m+\lambda a) = (0+\lambda 2) \end{cases} \\
&\Longrightarrow LM = [0+\lambda 2, 1+\lambda 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N \circ LM &= (0+\lambda 2, 0+\lambda 0) \circ [0+\lambda 2, 1+\lambda 0] \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = [(0+\lambda 2) \odot (0+\lambda 2)] \oplus (1+\lambda 0) \\
&\Longleftrightarrow (0+\lambda 0) = (0+\lambda 0)
\end{aligned}$$

olduğundan L, M ve N köşegen noktaları doğrudaştır. Yani $OIXP$ tamdörtgeninin tamamlanmışı olan konfigürasyon bir Fano düzlemidir. Bu düzlem F_6 ile gösterilir.

Sonuç 2.3.5 $O = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0), I = (1+\lambda 0, 1+\lambda 0), X = (0+\lambda 0), P = (0+\lambda 0, a+\lambda b)$ *olmak üzere*

(i) $b \neq 0$ iken, OIXP nin tamamlanmışı olan konfigürasyonlar, birer Fano düzlemi oluştururlar. (Bunların sayısı 6 tanedir.)

(ii) $b = 0$ ve $a \neq 0, 1 (a = 2)$ iken, OIXP nin tamamlanmışı olan konfigürasyon, Fano düzlemi değildir. (Bunların sayısı 1 tanedir.)

Önerme 2.3.6 $O = (0+\lambda 0, 0+\lambda 0), I = (1+\lambda 0, 1+\lambda 0), X = (0+\lambda 0)$ *ve P_2S deki* 91 *tane P noktasını gözönüne alalım. Bu noktaların* 27 *si $OIXP$ şeklinde bir dörtgen oluşturmaz;* 46 *sı ile oluşturulan $OIXP$ nin tamamlanmışı bir Fano düzlemi değildir ve* 18 *i ile oluşturulan $OIXP$ dörtgeninin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir.*

İspat: Tek tek hesap yapılarak gösterilir. Önermedeki bu 3 hali aşağıda gösterelim.

(∞) dan geçen afin doğrular	Üzerindeki $P = ((a+\lambda b), (c+\lambda d))$ için a	b	c	d	OIXP biçiminde dörtgen oluşmaz	OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemi değildir	OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir
	0	0	0	0	+		
	0	0	0	1			+
	0	0	0	2			+
	0	0	1	0	+		
$[0+\lambda 0]$	0	0	1	1			+
	0	0	1	2			+
	0	0	2	0		+	
	0	0	2	1			+
	0	0	2	2			+
	0	1	0	0	+		
	0	1	0	1	+		
	0	1	0	2		+	
	0	1	1	0	+		
$[0+\lambda 1]$	0	1	1	1		+	
	0	1	1	2		+	
	0	1	2	0		+	
	0	1	2	1		+	
	0	1	2	2		+	
	0	2	0	0	+		
	0	2	0	1		+	
	0	2	0	2	+		
	0	2	1	0	+		
$[0+\lambda 2]$	0	2	1	1		+	
	0	2	1	2		+	
	0	2	2	0		+	
	0	2	2	1		+	
	0	2	2	2		+	

(∞) dan geçen afin doğrular	Üzerindeki $P=((a+\lambda b),$ $(c+\lambda d))$ için				OIXP biçiminde dörtgen oluşmaz	OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemi değildir	OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir
	a	b	c	d			
$[1+\lambda 0]$	1	0	0	0	+		
	1	0	0	1			+
	1	0	0	2			+
	1	0	1	0	+		
	1	0	1	1			+
	1	0	1	2			+
	1	0	2	0		+	
	1	0	2	1			+
	1	0	2	2			+
$[1+\lambda 1]$	1	1	0	0	+		
	1	1	0	1		+	
	1	1	0	2		+	
	1	1	1	0	+		
	1	1	1	1	+		
	1	1	1	2		+	
	1	1	2	0		+	
	1	1	2	1		+	
	1	1	2	2		+	
$[1+\lambda 2]$	1	2	0	0	+		
	1	2	0	1		+	
	1	2	0	2		+	
	1	2	1	0	+		
	1	2	1	1		+	
	1	2	1	2	+		
	1	2	2	0		+	
	1	2	2	1		+	
	1	2	2	2		+	

(∞) dan geçen afin doğrular	Üzerindeki $P=((a+\lambda b),(c+\lambda d))$ için a	b	c	d	OIXP biçi minde dörtgen oluşmaz	OIXP nin tamam lanmışı bir Fano düzlemi değildir	OIXP nin tamam lanmışı bir Fano düzle midir
$[2+\lambda 0]$	2	0	0	0	+		
	2	0	0	1			+
	2	0	0	2			+
	2	0	1	0	+		
	2	0	1	1			+
	2	0	1	2			+
	2	0	2	0	+		
	2	0	2	1			+
	2	0	2	2			+
$[2+\lambda 1]$	2	1	0	0	+		
	2	1	0	1		+	
	2	1	0	2		+	
	2	1	1	0	+		
	2	1	1	1		+	
	2	1	1	2		+	
	2	1	2	0		+	
	2	1	2	1	+		
	2	1	2	2		+	
$[2+\lambda 2]$	2	2	0	0	+		
	2	2	0	1		+	
	2	2	0	2		+	
	2	2	1	0	+		
	2	2	1	1		+	
	2	2	1	2		+	
	2	2	2	0		+	
	2	2	2	1		+	
	2	2	2	2	+		

<table>
<tr><th rowspan="2">(∞) dan geçen afin doğrular</th><th colspan="2">Üzerindeki $P = ((a+\lambda b), (c+\lambda d))$ için</th><th rowspan="2">OIXP biçi minde dörtgen oluşmaz</th><th rowspan="2">OIXP nin tamam lanmışı bir Fano düzlemi değildir</th><th rowspan="2">OIXP nin tamam lanmışı bir Fano düzle midir</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td rowspan="9">$[\infty]$</td><td>0</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$[a+\lambda b]$ ve $[\infty]$</td><td></td><td></td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
</table>

Sonuç 2.3.7 *O, I, X i kapsayan Fano düzlemlerinin sayısı 18 dir. (Önerme 2.3.6 dan)*

Önerme 2.3.8 *$P = (0+\lambda 0, c+\lambda d)$ iken $d \neq 0$ olmak üzere, P_2S de $OIXP$ nin tamamlanmışlarından elde edilen Fano düzlemlerinin her birine izomorf 3 farklı Fano düzlemi vardır.*

İspat: P_2S de; F_1 ve F_2 Fano düzlemlerinin her birine izomorf 3 farklı Fano düzlemi bulmak için $F_i(i = 1, 2)$ lerin $f_a(a \in S - \{0+\lambda 0\})$ kolinasyonları altındaki görüntüleri olan $F_{i_{f_a}}$ Fano düzlemlerinin her birinin en az bir farklı nokta içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Yani;

$$F_1 \quad \underrightarrow{f_a} \quad F_{1_{f_{0+\lambda 1}}}, F_{1_{f_{0+\lambda 2}}}, \ldots, F_{1_{f_{2+\lambda 2}}}$$

. . .

. . .

. . .

$F_6 \xrightarrow{f_a} F_{6_{f_{0+\lambda 1}}}, F_{6_{f_{0+\lambda 2}}}, ..., F_{6_{f_{2+\lambda 2}}}$ olmak üzere, her $F_{i_{f_r}} \neq F_{i_{f_s}}, r \neq s$ $(r, s \in S - \{0 + \lambda 0\})$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için, herbir F_i düzleminde bulunan $I = (1 + \lambda 0, 1 + \lambda 0)$ noktasının f_a kolinasyonu altındaki görüntüsünün herbir $F_{i_{f_a}}$ düzleminde farklı olduğunu gösterelim. Her $a \in S - \{0 + \lambda 0\}$ için f_a kolinasyonu I noktasının sadece ikinci bileşenine etki edeceğinden, herbir $a \in S - \{0 + \lambda 0\}$ için I noktasının f_a altındaki görüntüsü olan noktalar farklı olacaktır. Dolayısıyla, herbir $F_{i_{f_a}}$ düzleminde I noktasının görüntüsü farklı olacağından, herbir F_i Fano düzlemine izomorf 3 farklı $F_{i_{f_a}}$ Fano düzlemi vardır.

Önerme 2.3.9 $P = (0 + \lambda 0, c + \lambda d)$ *iken* $d = 0$ *olmak üzere,* P_2S *de* $OIXP$ *dörtgenlerinin tamamlanmışı olan konfigürasyonlardan Fano aksiyomunu sağlayanların her birine izimorf 3 farklı konfigürasyon vardır.*

İspat: P_2S projektif düzleminin P noktası yukarıdaki koşul altında verildiğinde Fano aksiyomunu sağlayan yalnız 1 konfigürasyon mevcuttur. Önerme 2.3.8 in ispatındaki yolla bu konfigürasyonun f_a kolinasyonu altındaki görüntüleri olan konfigürasyonların farklı olduğu görülür.

Önerme 2.3.10 $d \neq 0$ *olmak üzere,* $P = (0 + \lambda 0, c + \lambda d)$ *olsun.* P_2S *de* $F_i(i = 1, 2)$ *Fano düzlemlerine izomorf olan* $f_a(a \in S - \{0 + \lambda 0\})$ *kolinasyonları altındaki görüntü düzlemleri de birbirlerinden farklıdır. Yani;*

$F_{i_{f_r}} \neq F_{j_{f_s}}, (i \neq j$ *ve* $i, j = 1, 2;\ r, s \in S - \{0 + \lambda 0\})$ *dır. (bunların sayısı 6.3=18 dir.)*

İspat: F_i lerin f_r kolinasyonları altındaki görüntüleri ve F_j lerin de f_s kolinasyonları altındaki görüntüleri tek tek hesaplanarak $F_{i_{f_r}} \neq F_{j_{f_s}}$ olduğu görülür. Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım. Örneğin çizelge 2.3.1 ve 2.3.2 deki F_1 ve F_2

Fano düzlemleri için $F_{i_{f_r}} \neq F_{j_{f_s}}$ dir.

Çizelge 2.3.1

F_1	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 0)$ $(0+\lambda 0, 1+\lambda 0)$	$(1+\lambda 0, 1+\lambda 0)$ $(0+\lambda 1, 0+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 1)$ $(2+\lambda 2, 0+\lambda 0)$
$F_{1_{f_{0+\lambda 1}}}$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 1)$ $(0+\lambda 0, 1+\lambda 1)$	$(1+\lambda 0, 1+\lambda 1)$ $(0+\lambda 1, 0+\lambda 2)$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$ $(2+\lambda 2, 0+\lambda 1)$
$F_{1_{f_{0+\lambda 2}}}$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$ $(0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$	$(1+\lambda 0, 1+\lambda 2)$ $(0+\lambda 1, 0+\lambda 0)$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 0)$ $(2+\lambda 2, 0+\lambda 2)$
$F_{1_{f_{1+\lambda 0}}}$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 0)$ $(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$	$(1+\lambda 0, 2+\lambda 0)$ $(0+\lambda 1, 1+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 1)$ $(2+\lambda 2, 1+\lambda 0)$
$F_{1_{f_{1+\lambda 1}}}$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 1)$ $(0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$	$(1+\lambda 0, 2+\lambda 1)$ $(0+\lambda 1, 1+\lambda 2)$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$ $(2+\lambda 2, 1+\lambda 1)$
$F_{1_{f_{1+\lambda 2}}}$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$ $(0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$	$(1+\lambda 0, 2+\lambda 2)$ $(0+\lambda 1, 1+\lambda 0)$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 0)$ $(2+\lambda 2, 1+\lambda 2)$
$F_{1_{f_{2+\lambda 0}}}$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$ $(0+\lambda 0, 0+\lambda 0)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 0)$ $(0+\lambda 1, 2+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$ $(2+\lambda 2, 2+\lambda 0)$
$F_{1_{f_{2+\lambda 1}}}$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$ $(0+\lambda 0, 0+\lambda 1)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 1)$ $(0+\lambda 1, 2+\lambda 2)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$ $(2+\lambda 2, 2+\lambda 1)$
$F_{1_{f_{2+\lambda 2}}}$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$ $(0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 2)$ $(0+\lambda 1, 2+\lambda 0)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$ $(2+\lambda 2, 2+\lambda 2)$

Çizelge 2.3.2

F_2	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 0)$	$(1+\lambda 0, 1+\lambda 0)$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$
	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 0)$	$(0+\lambda 2, 0+\lambda 2)$	$(2+\lambda 1, 0+\lambda 0)$
$F_{2_{f_{0+\lambda 1}}}$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 1)$	$(1+\lambda 0, 1+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 0)$
	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 1)$	$(0+\lambda 2, 0+\lambda 0)$	$(2+\lambda 1, 0+\lambda 1)$
$F_{2_{f_{0+\lambda 2}}}$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$	$(1+\lambda 0, 1+\lambda 2)$	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 1)$
	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$	$(0+\lambda 2, 0+\lambda 1)$	$(2+\lambda 1, 0+\lambda 2)$
$F_{2_{f_{1+\lambda 0}}}$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 0)$	$(1+\lambda 0, 2+\lambda 0)$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$
	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$	$(0+\lambda 2, 1+\lambda 2)$	$(2+\lambda 1, 1+\lambda 0)$
$F_{2_{f_{1+\lambda 1}}}$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 1)$	$(1+\lambda 0, 2+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 0)$
	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$	$(0+\lambda 2, 1+\lambda 0)$	$(2+\lambda 1, 1+\lambda 1)$
$F_{2_{f_{1+\lambda 2}}}$	$(0+\lambda 0, 1+\lambda 2)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$
	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$	$(0+\lambda 2, 2+\lambda 0)$	$(2+\lambda 1, 2+\lambda 1)$
$F_{2_{f_{2+\lambda 0}}}$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 0)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$
	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 0)$	$(0+\lambda 2, 2+\lambda 2)$	$(2+\lambda 1, 2+\lambda 0)$
$F_{2_{f_{2+\lambda 1}}}$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 1)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 0)$
	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 1)$	$(0+\lambda 2, 2+\lambda 0)$	$(2+\lambda 1, 2+\lambda 1)$
$F_{2_{f_{2+\lambda 2}}}$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 2)$	$(1+\lambda 0, 0+\lambda 2)$	$(0+\lambda 0, 2+\lambda 1)$
	$(0+\lambda 0, 0+\lambda 2)$	$(0+\lambda 2, 2+\lambda 1)$	$(2+\lambda 1, 2+\lambda 2)$

Sonuç 2.3.11 *Önerme 2.3.6 da ifade edilen Fano düzlemlerinin her birine izomorf 3 farklı Fano düzlemi vardır. (bunların sayısı 18.3=54 tür.)*

SONUÇ

Bu çalışmada, Sol Hall Sistemi üzerinde kurulan 9. Mertebeden Projektif düzlemin Fano konfigürasyonları incelenmiştir.

Birinci bölümde projektif düzlem, sol yaklaşık cisim ve projektif düzlemlerin koordinatlanması ile ilgili tanım ve kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde ise Sol Hall Sistemi (sol yaklaşık cisim) üzerinde ikinci mertebeden bir indirgenemez polinom seçilerek 9. Mertebeden bir projektif düzlem elde edilmiştir. Bu düzlemin; tüm doğruları ve bu doğrular üzerindeki noktaları, tüm noktaları ve bu noktalardan geçen doğruları ve seçilen tamdörtgenlerden 18 tanesinin Fano düzlemi olduğu ve bunlara izomorf olan Fano konfigürasyonları gösterildi.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Çiftçi, S., Kaya, R., 1990, On the Fano Subplanes in the Translation Plane of Order 9. Doğa, Tr. J.of Mathematics 14,1-7.

Güney, Ö., 2005, Sol Yarıcisim Üzerine 9. Mertebeden Projektif Düzlem ve Alt Düzlemleri Üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 31-32.

Hall, M.Jr., Theory of Groups, The Mcmillan Company, New York (1959;1967).

Hughes, D.R., Piper, F.C., 1973, Projective Planes, Springer-Verlag, New York Inc. 196-201.

Kaya R., 2005, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 104-330.

Özcan, M., 1988, Cebirsel Yapılardan Projektif Düzlem Elde Edilmesi Üzerine, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 80-81.

Room, T.G., Kirkpatrick, P.B., 1971, Miniquaternion Geometry, London Cambridge University Press, 177.

Stevensen, F.W., 1992, Projektive Planes, W.H Freeman and Company, San Fransisco, 416.