

Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Metodunun Uygulamaları

Yusuf Şeber

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Temmuz 2021

Applications of Trigonometric B-spline Least Squares Method

Yusuf Şeber

DOCTORAL DISSERTATION

Mathematics-Computer Department

July 2021

Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Metodunun Uygulamaları

Yusuf Şeber

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Bülent Saka

Temmuz 2021

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Bülent Saka danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Metodunun Uygulamaları**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 02/07/2021

Yusuf Şeber

ÖZET

Bu doktora tezi, kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemini kullanarak AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS denklemlerinin sayısal çözümlerini bulmaya odaklanan 9 bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, dalgaların ve dalga denklemlerinin bilimdeki önemi ve bu denklemlerin çözümü için bir çok analitik yöntem bulunmasına rağmen sayısal çözüm yöntemlerine neden gereksinim duyulduğu, çözüm yönteminde trigonometrik B-spline fonksiyonlarının kullanılmasının nedenleri ifade edilerek, tezin kapsamı ve amacı açıklanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde çözülecek denklemlerin literatür taraması ile çözüm yöntemi ile ilgili bilgi verilmiştir. Ardından üzerinde çalışılan dalgalar ile bu dalgaların kullanım alanları konularına değinildikten sonra ağırlıklı rezidüler yöntemi, sonlu elemanlar yöntemleri, spline fonksiyonlar ve trigonometrik B-spline fonksiyonlar hakkı ve NLS denklemleri ile ilgili tanımlama yapılmıştır.

Sonraki bölümlerde sırasıyla kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS denklemlerinin sayısal çözümleri, daha önce yapılan çalışmalar ile kıyaslama yapılabilmesi amacıyla, çeşitli test problemleri üzerinde çalışılarak yöntemin yeterliliği sınanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar grafikler ve çizelgeler yardımıyla yorumlanmıştır.

Son iki bölümünde ise çalışmada elde edilen veriler özetlenerek tartışılmış ve sonraki araştırmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferensiyel denklem, soliton, solitary dalga, trigonometrik B-spline, sonlu elemanlar yöntemi, en küçük kareler yöntemi, AD denklemi, RLW denklemi, Burgers denklemi, Fisher denklemi, NLS denklemi.

SUMMARY

This doctoral dissertation consists of nine chapters, focusing on the finding the numerical solutions of AD, RLW, Burgers, Fisher and NLS equations by using the trigonometric B-spline least squares method.

In the introduction part, the importance of waves and wave equations in science, why there are many analytical methods for solving these equations, why numerical solution methods are needed, and the reasons for using trigonometric B-spline functions in the solution method are explained, and the scope and purpose of the thesis are explained.

In the second part of the thesis, information about the solution method with literature review of the equations to be solved is given. Then, after mentioning the waves studied and the areas of use of these waves, basic information about the weighted residual method, finite element methods, spline functions and trigonometric B-spline functions are given. Finally, a definition has been made for AD, RLW, Burgers, Fisher and NLS equations.

In the following chapters, numerical solutions of AD, RLW, Burgers, Fisher and NLS equations using the trigonometric B-spline least squares method, respectively, in order to make comparisons with previous studies, by working on various test problems. The adequacy and validity of the method has been tested. In addition, the results obtained were interpreted with the help of graphics and charts.

In the last two sections, the data obtained in the study were summarized and discussed, and suggestions were made for further studies.

Keywords: Partial differential equation, soliton, solitary wave, trigonometric B-spline, finite element method, least squares method, AD equation, RLW equation, Burgers equation, Fisher equation, NLS equation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xvi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
2.1. Dalgalar Hakkında Genel Bilgi	13
2.2. Soliton ve Solitary Dalgalar	15
2.3. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri	18
2.4. Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri.....	20
2.4.1. Ağırlıklı rezidüer yöntemi	21
2.4.1.1. <u>Kolokasyon metodu</u>	22
2.4.1.2. <u>Sub-domain metodu</u>	23
2.4.1.3. <u>En küçük kareler metodu</u>	23
2.4.1.4. <u>Galerkin metodu</u>	24
2.4.1.5. <u>Petrov-Galerkin metodu</u>	24
2.4.1.6. <u>Momentler metodu</u>	24
2.5. Spline Fonksiyonlar	25
2.5.1. B-spline fonksiyonlar	26
2.5.1.1. <u>Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonlar</u>	26
2.5.1.2. <u>Lineer B-spline fonksiyonlar</u>	27
2.5.1.3. <u>Kuadratik B-spline fonksiyonlar</u>	27
2.5.1.4. <u>Kübik B-spline fonksiyonlar</u>	27
2.5.2. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar	28

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

2.5.2.1. <u>Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar</u>	29
2.5.2.2. <u>Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar</u>	31
2.5.2.3. <u>Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar</u>	33
2.6. AD Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları.....	36
2.7. RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	37
2.8. Burgers Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları.....	38
2.9. Fisher Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	39
2.10. NLS Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları.....	40
3. AD DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLİNE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	42
3.1. AD Denklemine Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	42
3.2. Başlangıç Durumu	47
3.3. Test Problemleri	48
3.3.1 Problem (1).....	48
3.3.2 Problem (2).....	50
3.3.3 Problem (3).....	53
3.3.4 Problem (4).....	55
4. RLW DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLİNE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	59
4.1 RLW Denklemine Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	59
4.2 Başlangıç Durumu	64
4.3 Test Problemleri	65
4.3.1 Problem (1) (Tek dalga çözümü).....	65
4.3.2 Problem (2) (İki solitary dalganın çarpışması).....	73
4.3.3 Problem (3) (Dalga oluşumu).....	77

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5. BURGERS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLİNE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	82
5.1 Burgers Denklemine Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	82
5.2 Başlangıç Durumu	87
5.3 Test Problemleri	88
5.3.1 Problem (1)	88
5.3.2 Problem (2)	93
6. FİŞER DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLİNE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	102
6.1 Fisher Denklemine Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	102
6.2 Başlangıç Durumu	107
6.3 Test Problemleri	108
6.3.1 Problem (1)	109
6.3.2 Problem (2) (Başlangıç titreşim profili)	113
7. NLS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLİNE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	116
7.1 NLS Denklemine Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	116
7.2 Başlangıç Durumu	122
7.3 Test Problemleri	123
7.3.1 Problem (1) (Tek soliton çözümü)	123
7.3.2 Problem (2) (İki soliton dalgaının çarpışması)	128
8. BULGULAR VE TARTIŞMA	132
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	135
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	138

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Basit bir dalga profili	14
2.2. Russell’ın solitary dalga üretimi.....	16
2.3. Solitary dalgalar için kullanılan parametre ve değişkenler	17
3.1. U ve u ‘nun konum ve zamana göre değişimi	50
3.2. U sayısal çözümün konum ve zamana göre değişimi	52
3.3. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi.....	53
3.3. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi	53
3.4. Farklı zamanlarda U sayısal çözümün hareketi	54
3.5. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi.....	55
3.5. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi	55
3.6. Farklı zamanlarda U sayısal çözümün hareketi	56
3.7. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi.....	57
3.7. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi	57
4.1. $3c = 0.09$ genlik değeri için tek dalga çözümü.....	67
4.2. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi.....	68
4.2. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi	68
4.3. $-80 \leq x \leq 120$ konum aralığında tek dalga çözümü.....	69
4.4. (a) $-80 \leq x \leq 120$ için hata normlarının zamana göre değişimi.....	70
4.4. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi	70
4.5. $3c = 0.3$ genlik değeri için tek dalga çözümü.....	72
4.6. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi.....	73
4.6. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi	73
4.7. $3c_1 = 0.9, 3c_2 = 0.3$ genlikli iki dalganın çarpışması	75
4.8. $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3$ genlikli iki dalganın çarpışması	76
4.9. $d = 2$ için ardışık dalga oluşumu	78
4.10. $d = 5$ için ardışık dalga oluşumu	78
5.1. Viskozite değeri $\lambda = 0.001$ için U ’nun konuma göre değişimi	93

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.2.	Viskozite değeri $\lambda = 0.5$ için U 'nun konuma göre değışimi..... 99
5.1.	Viskozite değeri $\lambda = 0.005$ için U ve u 'nun konuma göre değışimi 100
6.1.	$h = 1/40, \beta = 2000$ için U 'nun konuma göre değışimi 109
6.2.	$h = 1/40, \beta = 5000$ için U 'nun konuma göre değışimi 110
6.3.	$h = 1/120, \beta = 10000$ için U 'nun konuma göre değışimi..... 110
6.4.	$h = 1/64, \beta = 10^4$ için mutlak hata 112
6.5.	$h = 1/150, \beta = 10^4$ için mutlak hata..... 112
6.6.	Başlangıç anına yakın zamanda U 'nun konuma göre değışimi 113
6.7.	Kısa zaman aralığı için U 'nun konuma göre değışimi..... 114
6.8.	Uzun zaman aralığı için U 'nun konuma göre değışimi 114
7.1.	$h = 0.05, \Delta t = 0.005$ için $t = 0$ ve $t = 2.5$ zamanındaki $ U $ 124
7.2.	$h = 0.05, \Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanındaki mutlak hata 125
7.3.	$h = 0.05, \Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanındaki hata 125
7.4.	$h = 0.02, \Delta t = 0.005$ için $t = 0$ ve $t = 2.5$ zamanındaki $ U $ 126
7.5.	$h = 0.02, \Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanındaki mutlak hata 127
7.6.	$h = 0.02, \Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanındaki hata 127
7.7.	İki soliton dalganın çarpışması 130

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>		<u>Sayfa</u>
2.1.	Bölünme noktalarındaki kübik trigonometrik B-spline değerleri	35
3.1.	$t = 1$ anındaki hata normları.....	49
3.2.	$t = 3000$ anındaki hata normları	51
3.3.	$t = 9600$ anındaki hata normları	53
3.4.	$\Delta t = 0.0125$ için $t = 5$ anındaki hata normları.....	56
3.5.	$\Delta t = 0.005$ için $t = 5$ anındaki hata normları.....	57
4.1.	Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri.....	67
4.2.	$t = 20$ anındaki hata ve korunum değerleri.....	71
4.3.	Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri.....	71
4.4.	İki dalganın çarpışması için korunum değerleri.....	74
4.5.	İki dalganın çarpışması için korunum sabitlerinin değişimi	76
4.6.	$d = 2$ için ardışık dalga oluşumu korunum değerleri	79
4.7.	$d = 5$ için ardışık dalga oluşumu korunum değerleri	79
4.8.	$t = 250$ anında ardışık dalgaların konum ve genlikleri.....	79
4.9.	$d = 2, U_0 = 0.1, \varepsilon = 1.5, \mu = 1/6$ için değerleri M_1, M_2, M_3 değerleri	80
4.10.	$d = 5, U_0 = 0.1, \varepsilon = 1.5, \mu = 1/6$ için değerleri M_1, M_2, M_3 değerleri	80
5.1.	$\Delta t = 0.01$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler.....	89
5.2.	$\Delta t = 0.001$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler	90
5.3.	$\Delta t = 0.0001$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler	90
5.4.	$\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler.....	91
5.5.	Farklı viskozite değerleri için sayısal çözümler.....	92
5.6.	$h_1 = 0.1, \Delta t = 0.1$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	94
5.7.	$h_1 = 0.1, \Delta t = 0.05$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	95
5.8.	$h_1 = 0.1, \Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	95
5.9.	$h_1 = 0.05, \Delta t = 0.1$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	96
5.10.	$h_1 = 0.05, \Delta t = 0.05$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler.....	96
5.11.	$h_1 = 0.05, \Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler.....	97

ÇİZELGELER DİZİNİ (devam)

<u>Cizelge</u>		<u>Sayfa</u>
5.12.	$h_1 = 0.01, \Delta t = 0.1$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	97
5.13.	$h_1 = 0.01, \Delta t = 0.05$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	98
5.14.	$h_1 = 0.01, \Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler	98
6.1.	Farklı zamanlardaki L_2 ve L_∞ hata normları	111
6.1.	Farklı zamanlardaki <i>Rel</i> hata normu.....	115
7.1.	$\Delta t = 0.05, h = 0.05$ için L_∞ hata normları ve korunum sabitleri	124
7.2.	$\Delta t = 0.05, h = 0.02$ için L_∞ hata normları ve korunum sabitleri	126
7.3.	$t = 1$ zamanında genlik=1 için sonuçlar.....	128
7.4.	$t = 1$ zamanında genlik=2 için sonuçlar.....	128
7.5.	$h = 0.1, \Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri	129
7.6.	$h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri	129
7.7.	$h = 0.02$ ve $\Delta t = 0.005$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	129

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

B-spline

C_1, C_2, C_3

$\|e\|_1$

h

L_2

L_∞

Rel

Δt

u

U

Açıklama

Basis-spline

Korunum sabitleri

Ağırlaştırılmış hata normu

Konum adım uzunluğu

Ortalama hata normu

Maksimum hata normu

Bağıl hata normu

Zaman adım uzunluğu

Analitik çözüm

Sayısal çözüm

Kısaltmalar

AD

RLW

NLS

Açıklama

Advection-Diffusion

Regularized Long Wave (düzenli uzun dalga)

Non-linear Schrödinger

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bilimsel çalışmalar genellikle doğada karşılaştığımız olay ve olguları anlamlandırma çabasını içerir. Bu amaçla deney, gözlem ve modelleme gibi yöntemler kullanmakta ve bunların sonucunda anlamlandırılması gereken pek çok veri ortaya çıkmaktadır. Bilimsel çalışmalardan elde edilen verilerin analiz edilmesi ve geçerliliğinin kontrolü ancak sayısal olarak ifade edilmesi ile mümkündür. Bir bilimsel çalışmanın sayısal verilere dayanması gerekliliği, tüm bilimlerin matematiğe olan ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Matematik bilimi bu anlamda pozitif bir bilim olmaması ile birlikte diğer bilim dallarına kullanmaları için enstrümanlar sağlamaktadır. Doğa da karşılaşılan değişimin modellenmesi aşamasında yararlanılan adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri bu anlamda önem kazanmaktadır. Bu aşamada elde edilen diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin karmaşıklığı arttıkça analitik çözüm elde etmek zorlaşmakta, hatta bazı durumlarda mümkün olamamaktadır. Bu durumlarda çözüm için yaklaşık sonuçların bulunabileceği nümerik yöntemler ön plana çıkmaktadır. Bu amaçla pek çok yöntem geliştirilmiş olup, son yıllarda oldukça geniş uygulama alanı bulan sonlu elemanlar yöntemi önem kazanmaktadır. Başlıca sonlu elemanlar yöntemleri olarak; Galerkin, Petrov-Galerkin, Kolokasyon, Subdomain ve En Küçük Kareler sayılabilir. Bu anlamda üzerinde çalışmak için beş farklı dalga denklemi seçilmiştir.

Dalgalar ve dalga denklemleri konusu; Pisagor'un (M.Ö. 560-480) müzik aletlerindeki teller ve tel uzunlukları arasındaki ilişkiyi incelemesinden başlayarak günümüze kadar süren ve fizik, mühendislik ve uygulamalı matematik gibi bilimsel alanların oldukça yoğun bir şekilde üzerinde çalışageldikleri bir konu olmuştur. Dalga, enerjinin taşınmasını sağlayan titreşim olarak, matematiksel denklemlerle ifade edilebilir. Dalgalar; bir ortam aracılığıyla yayılan mekanik dalgalar ve yayılmak için bir ortama gereksinim duymayan elektromanyetik dalgalar olmak üzere, iki temel çeşit içermekle birlikte farklı özelliklerine göre de sınıflandırılabilir. Bunun yanında dalga hareketleri; hiperbolik kısmi diferensiyel denklemlerle ifade edilen hiperbolik dalga hareketi ve hareket denklemi yerine çözümün karakteristiği ile ifade edilen dispersif dalga hareketi olmak üzere iki ana tür olarak ele alınabilir (Whitham, 1974).

Dalga hareketlerini modellemek için kullanılan denklemlerin elde edilmesi ve bu denklemlerin çözümlerinin bulunması oldukça zor ve karmaşık prosedürler içermektedir. Denklemlerin çözümü ile ulaşılmak istenen , hareket halindeki dalganın belirli bir andaki konumunu bulmaktan ibarettir. Bu çalışmada test problemi olarak; AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS denklemleri kullanılacaktır. Bu denklemlerin yaklaşık çözümleri için orjinal denklem ile yaklaşık çözüm arasındaki farkın minimuma indirilmesini amaçlayan, ağırlıklı rezüdülerin kullanıldığı sonlu elemanlar yöntemleri konusunda bilgi verilecektir. Ağırlıklı rezüdüler kullanan sonlu elemanlar yöntemlerinden, asıl denklemin analitik çözümü ile yaklaşık sonucu arasındaki farkın karesinin minimize edilmesini amaçlayan en küçük kareler yöntemi, çalışmamızda üzerinde durulacak ana konudur. Ayrıca yöntem içerisinde kullanılan, ağırlık ve deneme fonksiyonlarının seçimi belirleyici bir faktördür. Bu anlamda hesaplamada kolaylık sağlayan spline fonksiyonlarının kullanımı avantajlıdır. Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca sonlu baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır. Belirli derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile gösterilebilir (De Boor, 1978). Bu sebeple de B-spline fonksiyonlar, spline fonksiyonlar için birer taban oluştururlar. Dolayısıyla kullanılacak olan trigonometrik B-spline'lar, trigonometrik Spline'lar için bir taban oluştururlar.

Sonlu elemanlar yöntemleri ile trigonometrik B-splinelere ilişkin çalışmalar bulunmasına rağmen, en küçük kareler yöntemiyle birlikte kullanımına yapılan literatür taraması neticesinde rastlanmamıştır. Bu çalışmada ele alınan test problemlerinden elde edilen sonuçlar çizelgeler halinde düzenlenmiştir. Bu çizelgelerde yaklaşık sonuçlar ile önceki çalışmalarda elde edilen analitik çözümler karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalardan elde edilen veriler ışığında; sonuçlar ve bulgular kısmında yöntemin etkinliği ile ilgili değerlendirmelerde bulunulmuştur.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, spline, B-spline ve trigonometrik B-spline fonksiyonları ile üzerinde çalışılacak olan denklemler olan AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS denklemleri ile ilgili literatürde yapılmış bazı çalışmalardan bahsedilecektir. Ardından, çalışmada kullanılan temel kavramlar hakkında kısa bilgi verilecek ve denklemlerin sayısal çözümünde kullanılacak yöntem ile ilgili bazı açıklamalar yapılacaktır.

Sayısal yöntemlerde, parçalı fonksiyonlar ve polinom yaklaşımları sıklıkla kullanılmagelmiştir. İlk olarak Schoenberg (1946) makalesinde parçalı polinom yaklaşımı olarak spline fonksiyonlardan bahsetmiştir. Bilgisayar teknolojisinin zamanla gelişmesi, spline fonksiyonların kullanım alanının genişlemesini sağlamıştır. Zaman içinde polinom interpolasyonunun da yerine kullanılan spline fonksiyonları üzerine yapılan çalışmalar ile belli bir derecedeki bir spline fonksiyonunun, aynı dereceye sahip B-spline'ların lineer bileşimi olarak yazılabileceği ifade edilmiştir (De Boor, 1978). Bununla birlikte, Schoenberg (1964) trigonometrik B-spline ve McCartin (1981) üstel B-spline gibi bazı B-spline çeşitleri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Sayısal yöntemlerde ve eğri tasarımında kullanılan trigonometrik spline fonksiyonları ilk olarak Schoenberg (1964) çalışmasında görülmektedir. Koch (1988) çalışmasında trigonometrik B-spline fonksiyonlarını, polinom B-spline fonksiyonlarını kullanarak elde etmiştir. Lyche ve Winter (1979) trigonometrik B-spline fonksiyonlarını trigonometrik bölünmüş farklar yöntemi yardımıyla elde etmişlerdir. (Nikolos, 2004) çalışmasında kuadratik trigonometrik spline fonksiyonlarını kullanarak bir başlangıç değer problemini sayısal olarak çözmüştür. (Nikolos ve Seimenis, 2005), trigonometrik spline fonksiyonlar yardımıyla lineer olmayan dinamik sistemler için çözüm önerisinde bulunmuşlardır. (Hamid vd. 2010) ikinci dereceden lineer sınır değer problemini kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını kullanarak interpolasyon yöntemi ile çözmüştür. (Abbas vd., 2014 a,b) kübik trigonometrik B-spline yaklaşımı ile hiperbolik problemler, dalga denklemleri ve klasik olmayan difüzyon problemleri üzerine yaptıkları çalışmalarda, zaman ayrıştırmasını Crank-Nicolson yöntemi ile yaparak kolokasyon metodunu uygulamışlardır. (Dağ vd., 2014) Burgers denklemini

kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu kullanarak sayısal çözümünü elde etmişlerdir. (Ay vd., 2015) kuadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin yöntemiyle Burgers denklemini yaklaşık olarak çözmüşlerdir. (Alshomrani vd., 2016) Modifiye trigonometrik B-spline kullanarak kolokasyon metodu ile hiperbolik tip dalga denklemlerinin modellenmesi üzerine çalışmışlardır. (Nazir vd., 2016) yeni kübik trigonometrik B-spline yaklaşımı ile adveksiyon-difüzyon problemlerinin sayısal çözümü üzerine çalışmışlardır. (Ersoy ve Dağ, 2016) lineer olmayan Burgers denklem sistemini kübik trigonometrik B-spline sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümü üzerine çalışmışlardır. (Yaseen vd. 2017 a) Kesir zamanlı difüzyon dalga denklemi için kübik trigonometrik B-splinelara dayalı sonlu fark şemasını vermişlerdir. (Yaseen vd. 2017 b) kesir türevli sub-difüzyon denklemlerine kübik trigonometrik B-spline kolokasyon yaklaşımını uygulamışlardır. Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü, kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar (Irk ve Keskin, 2016), kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar (Irk ve Keskin, 2017) ve kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar (Irk vd., 2019), yardımıyla elde edilmiştir. (Onarcan vd., 2018) reaksiyon-difüzyon denklem sistemini kübik trigonometrik B-spline kolokasyon metodunu kullanarak sayısal olarak çözmüşler ve lineerleştirme için Rubin-Graves yöntemini kullanmışlardır. (Jiwari vd., 2019) kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını lineer olmayan parabolik problemlerin simülasyonu için kullanmışlardır. (Yousaf vd., 2020) yeni kübik trigonometrik B-spline yaklaşımına dayalı Hermite formülü ile konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Ayrıca trigonometrik spline'lar eğri dizaynı ve görüntü enterpolasyonu için de kullanılmışlardır (Koch vd., 1995; Walz, 1997; Han, 2003, 2006; Hussain vd., 2017).

AD denklemleri akışkanlar dinamiğinde bir çok sürecin modellenmesi için kullanılmıştır. Örneğin, havada ve suda kirletici maddelerin hareketlerinin tanımlamak amacıyla kullanılmıştır (Zlatev vd., 1984), (Chatwin ve Allen, 1985). Başlangıç ve sınır şartlarının karışık olması ile yatay akım (advection) teriminin baskın olmasından dolayı AD denkleminin analitik çözümünün bulunması kolay değildir. Bu nedenle AD denklemini çözmek için çeşitli nümerik metotlar geliştirilmiştir. Bu nümerik metotların birçoğunda AD denkleminin sayısal çözümleri için spline fonksiyonları kullanılmıştır.

Pepper vd. (1979) ve Okamoto vd. (1998) tek boyutlu bir AD denkleminin sayısal çözümünü Quasi-Lagrange kübik spline metodu kullanarak araştırmışlardır. Ahmet (2000) ile Ahmad ve Kothiyari (2001) tek boyutlu AD denklemini, adveksiyon terimi için Crank-Nicolson yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Gardner ve Dağ (1994) AD denklemini çözmek için kübik B-spline Galerkin metodunu kullanmışlardır. Ayrıca kübik B-spline kollakasyon metodu da AD denkleminin sayısal çözümü için önerilmiştir (Goh vd., 2010, 2012), (Dağ vd., 2006) çalışmasında AD denkleminin sayısal çözümü için en küçük kareler B-spline sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Kapoor ve Dhawan (2010) ile (Dhawan vd. 2011, 2012) AD denkleminin sayısal çözümünü kübik/kuadratik B-spline en küçük kareler sonlu elemanlar kullanarak yapmışlardır. Kübik ve kuadratik B-spline Taylor/Galerkin metotları ile denklemin sayısal çözümü (Dağ vd., 2011) çalışmasında verilmiştir. AD denklemini çözmek için spline fonksiyonlarıyla karakteristik metotlar önerilmiştir. Szymkiewicz (1993), sonlu elemanlar ve spline fonksiyonlarını kullanarak AD denkleminin çözümünü bulmuştur. Funara ve Pontrelli (1999) kolokasyon düğümlerinin çözümüne yönelik spline tahminiyle AD denklemin çözmüşlerdir. (Zoppou vd., 2000) çalışmasında AD denklemini spline interpolasyonu yöntemi ile çözmüştür. Oluşturulan AD denkleminin nümerik çözümleri kübik B-spline diferansiyel kuadrature metotla Korkmaz ve Dağ (2012)'nin çalışmasında verilmiştir. Kuadratik Galerkin sonlu elemanlar metodu ile AD denkleminin çözümü (Bulut. vd, 2013) çalışmasında verilmiştir. AD denkleminin nümerik çözümü genişletilmiş B-spline fonksiyonları üzerinde kolokasyon metodu ile (Irk vd., 2014) yayınında çözülmüştür.

RLW denklemini üzerinde pek çok çalışma yapılmıştır. Sıklıkla nümerik çalışmalarda kullanılan denklemin, ilk olarak tek yönlü zayıf doğrusal olmayan ve zayıf dispersif su dalgalarının yayılmasını modellemek için Peregrine (1966) tarafından önerilmiş olup, çalışmasında sonlu farklar metodu kullanarak ilk nümerik çözümü de vermiştir. Benjamin vd. (1972) RLW denkleminin KdV (Korteweg-de Vries) denklemine benzerliğini belirterek bu denklemin bir alternatifi olarak ele almıştır. Eilbeck ve McGuire (1975) (1977) RLW denkleminin nümerik çözümü için birinci ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu fark metotları üzerinde çalışmışlar ve bu metotları ayrıntılandırmışlardır. Padam ve Iskandar (1979) sonlu farklar metodu kullanarak

denklemin çözümünü elde etmişlerdir. Alexander ve Morris (1979) RLW denkleminin nümerik çözümünü kübik spline kullanarak Galerkin metodu ile bulmuşlar ve Fourier analizi yardımıyla stabilize analizi yapmışlardır. Gardner L.R.T ve Gardner G.A (1990) kübik spline şekil fonksiyonları ile Galerkin sonlu elemanlar metodu yardımıyla denklemi çözmüşlerdir. Gardner vd. (1995) RLW denkleminin, kuadratik B-spline fonksiyonları ile sonlu elemanlar metodu yardımıyla çözümünü araştırmışlardır. Bona ve Bryant (1972) denklem üzerinde yaptıkları ayrıntılı çalışmada çözümün varlığı ve tekliğini vermişlerdir. Chang vd. (1991) dispersif dalgalar için korunumlu fark şeması vermişlerdir, ayrıca yöntemin yakınsama ve kararlılık durumlarını incelemişlerdir. Jain vd. (1993) denklemi parçalayarak kübik spline fonksiyonları ile sonlu farklar metodu kullanarak çözümü araştırmışlardır. Gardner vd. (1996) RLW denklemini lineer konum-zaman sonlu elemanları kullanarak en küçük kareler yöntemiyle nümerik olarak çözmüş ve doğruluğunu kübik spline sonlu fark ve kuadratik B-spline sonlu elemanlar metotları ile kıyaslamışlardır. Gardner vd. (1997) kuintik B-spline fonksiyonları ile Petrov-Galerkin sonlu elemanlar metodu kullanarak RLW denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Bhardwaj ve Shankar (2000) RLW denklemini parçalayarak kuintik spline fonksiyonları ile sonlu farklar metodunu kullanarak çözümünü araştırmışlar, ayrıca hata ve stabilize analizi de yapmışlardır. Dağ (2000) kuadratik B-spline fonksiyonları ile en küçük kareler sonlu elemanlar metodu kullanarak denklemi çözmüştür. Dağ ve Özer (2001) kübik B-spline fonksiyonları ile en küçük kareler sonlu elemanlar metodu ile denklemin çözümü üzerinde çalışmışlardır. Zaki (2001) RLW denklemini parçalayarak kübik B-spline şekil fonksiyonları ile Bubnov-Galerkin sonlu elemanlar metodu kullanarak çözümü araştırmıştır. Doğan (2001, 2002) çalışmalarında kuadratik B-spline fonksiyonları ile Petrov-Galerkin ve lineer şekil fonksiyonları ile Galerkin metotlarını kullanarak RLW denklemini için nümerik çözümler önermiştir. Soliman ve Raslan (2001) kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını bölünme noktalarının orta noktalarında kullanmak suretiyle kolokasyon metodu ile çözüm önermişlerdir. Dağ vd. (2003) RLW denklemini parçalayarak diferensiyel denklem sistemi elde etmişler ve bu sisteme kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu uygulayarak nümerik çözüm elde etmişlerdir. Dağ vd. (2004) RLW denklemini çözmek için kübik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu kullanmışlardır. Saka vd. (2004) RLW denklemini kuadratik B-spline fonksiyonları ile Galerkin sonlu elemanlar metodu

aracılığı ile çözmüşlerdir. Irk vd. (2005) kübik spline kolokasyon metodu ile denklemi çözmüşlerdir. Soliman ve Hussien (2005) septik spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu kullanarak denklemin çözümünü elde etmişlerdir. Raslan (2005) kübik B-spline şekil fonksiyonları ile kolokasyon metodu kullanarak çözümü araştırmıştır. Saka ve Dağ (2005) RLW denklemini parçalamışlar ve kübik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu kullanarak çözümü elde etmişlerdir. Esen ve Kutluay (2006) kuadratik B-spline fonksiyonları ile Lumped Galerkin sonlu elemanlar metodu kullanarak RLW denkleminin çözümünü araştırmışlardır. Dağ vd. (2006) kuintik B-spline şekil fonksiyonları ile Galerkin sonlu elemanlar metodu kullanarak çözümü bulmuşlardır, ayrıca zaman parçalanması içinde aynı metodu kullanmayı önermişlerdir. Saka ve Dağ (2007, 2008) kuartik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu ve Galerkin sonlu elemanlar metodunu kullanarak denklemin çözümü üzerinde çalışmışlardır. Saka vd. (2008) kuintik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu kullanarak RLW denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Saka vd. (2011) RLW denkleminin çözümü için septik ve sektik B-spline fonksiyonları kullanarak kolokasyon metodu ile araştırmıştır. Irk (2012) konum ayrıştırmasını kuintik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu kullanarak yapmış, ayrıca zaman ayrıştırması için Adams Moulton metodunu önermiştir. Görgülü vd. (2015) RLW denkleminin sayısal çözümünü Galerkin metodu ile elde etmişler ve şekil fonksiyonu olarak üstel B-spline kullanmışlardır. Keskin (2016) yaptığı doktora tez çalışmasında RLW denkleminin çözümü için trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin metodu ile elde etmiştir. Sun ve Wang (2017) RLW denkleminin sayısal çözümünü Galerkin metodu ile elde etmişler ve hata analizini yapmışlardır.

Burgers denklemi ilk olarak Bateman (1915) akışkanların hareketleri ile ilgili makalesinde değinilmiştir. Denklemin yaygınlaşması ise türbülansın modellenmesi için kullanılması ile olmuştur (Burgers, 1948). Bununla birlikte ısı iletimi (Cole, 1951), sayılar teorisi (Van der Pol, 1951), gazların dinamiği, aerodinamik, ses yayılımı (Lighthill, 1952), elastikiyet (Pospedov, 1966) gibi alanlarda çeşitli problemlerin modellenmesinde kullanılmıştır. Lineer olmayan terimden dolayı Burgers denklemi, denkleme ismini veren J.M. Burgers (1939), Navier-Stokes denkleminin sadeleştirmesini içeren çalışmalarda bu denklemden yararlanmışlardır.

Burgers denklemi lineer olmayan bir denklem olmasına rağmen analitik çözümü mevcut olan az sayıda diferensiyel denklemden biridir. Ayrıca Navier-Stokes denklemi gibi çözümü oldukça karışık olan bir denkleme benzerliği, denklemin nümerik çalışmalarda çalışılan metodun kararlılık ve doğruluğunun test edilmesine yardımcı olması gibi sebeplerden, denklem ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur.

Hopf (1950) ve Cole (1951) birbirinden ayrı ayrı denklemi lineer difüzyon denklemi şeklinde ifade etmek suretiyle analitik çözüm elde etmişlerdir. Fakat küçük viskozite değerleri için sonsuz seriler içermesi, analitik çözümün yavaş yakınsamasına neden olmaktadır. Bu nedenle denklemin, etkili nümerik çözümlerinin elde edilmesi önem kazanmaktadır.

Burgers denkleminin çözümü için pek çok nümerik metot kullanılmıştır. Bunların başlıcaları sonlu farklar, sonlu elemanlar, ağırlıklı rezidü, Chebychev ve Legendre spektral yöntemleri olarak sayılabilir. Rubin ve Khosla (1976) Burgers denkleminin kübik spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu kullanarak çözümünü araştırmışlardır. Jain ve Holla (1978) kübik spline fonksiyonları ile sonlu farklar metodu kullanarak bir ve iki boyutlu Burgers denkleminin çözümünü araştırmışlardır. Jain ve Lohar (1979) Burgers denklemini iki parçaya ayırmak suretiyle çözümü kübik spline fonksiyonları ile sonlu farklar metodu kullanarak araştırmışlardır. Varoğlu ve Finn (1980) ağırlıklı rezidü formülasyonuna dayalı sonlu elemanlar metodunu kullanmıştır. Christie vd. (1981) kuadratik şekil fonksiyonları ile Petrov-Galerkin sonlu elemanlar metodu kullanarak Burgers denklemini çözmüştür. Caldwell vd. (1981) Galerkin sonlu elemanlar metodu ile nümerik çözümü araştırmışlardır. Herbst vd. (1982) lineer ve kübik şekil fonksiyonları ile Petrov-Galerkin sonlu elemanlar metodu kullanarak Burgers denkleminin çözümü üzerinde çalışmıştır. Fletcher (1983) çalışmasında lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonları ile sonlu elemanlar ve üç, beş ve yedi noktalı sonlu farklar metodlarını kullanarak Burgers denklemini çözmüş ve elde ettiği sonuçları karşılaştırmıştır. Evans ve Abdullah (1984) Burgers denkleminin çözümünü sonlu farklar metoduna dayalı açık grup metodunu kullanarak yapmışlardır. Nyugen ve Reymann (1982) lineer şekil fonksiyonları ile en küçük kareler metodu kullanarak çözümü elde etmişlerdir. Ali vd. (1992) kübik spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu, (1990) kuadratik B-spline fonksiyonları ile Galerkin metodunu kullanarak

çözüm üzerine çalışmalar vermişlerdir. Kakuda ve Tosaka (1990) genelleştirilmiş sınır elemanları yaklaşımı ile Burgers denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlardır. Iskandar ve Mohsen (1992) Burgers denklemini iki parçaya ayırarak ve sonlu farklar metodu ile çözüm önermişlerdir. Jain vd. (1995) Burgers denklemini üç parçaya ayırmış ve kübik spline ile sonlu farklar metodunu kullanarak çözüm üzerinde çalışmışlardır. Dang-Vu ve Delcarte (1995) Chebyshev pseudospektral ve tau spektral çözümü araştırmışlardır. Öziş ve Özdeş (1996) direkt varyasyonel metotların Burgers denklemine uygulamasını vermişlerdir. Kutluay vd. (1999) açık ve tam açık sonlu farklar yaklaşımı ile çözümü araştırmıştır. Gardner vd. (1997) kuadratik B-spline fonksiyonları ile Petrov-Galerkin metodunu kullanarak çözüm önermiştir. Katsuhiko (1997) farklı bir sonlu fark metodu kullanarak çözüm elde etmiştir. Hon ve Mau (1998) Multi kuadrik metot ile yüksek mertebeden sonlu elemanlar metotlarına göre daha hızlı yakınsayan bir nümerik çözüm önermiştir. Lin ve Zhou (2001) katsayı bağlantıları ve interpolasyon yöntemi aracılığı ile denklemin çözümünü araştırmıştır. Öziş vd. (2003) Galerkin sonlu elemanlar yaklaşımı ile çözümü araştırmıştır. Aksan (2005) zaman ayrıştırmasına dayalı sonlu elemanlar metodu kullanarak çözümü bulmuştur. Abdou ve Soliman (2005) varyasyonel iterasyon yöntemi ile denklemini çözmüşlerdir. Darvishi ve Javidi (2005) pseudospektral metot ile çözüm elde etmişlerdir. Abbasbandy ve Darvishi (2005) Burgers denkleminin çözümü için modifiye Adomian metodunu kullanmışlardır. Öziş ve Aslan (2005) Burgers denkleminin büyük Reynolds sayılarını içeren yani çok küçük viskozite sabiti değeri için nümerik çözümü araştırmışlardır. Bahadır ve Sağlam (2005) sonlu farklar ve sınır elemanı yaklaşımlarının birleşimi bir yöntem ile bir boyutlu Burgers denkleminin çözümünü vermişlerdir. Dağ vd. (2005) kübik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu kullanarak denklemini çözmüşlerdir. Gülsu ve Öziş (2005) Burgers denkleminin nümerik çözümünü kısıtlı Taylor açılımı metodu kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Hassanien vd. (2005) dördüncü mertebeden sonlu fark metodu ile denklemin çözümünü araştırmıştır. Kutluay vd. (2004) kuadratik B-spline fonksiyonları ile en küçük kareler sonlu elemanlar metodunu önermişlerdir. Kutluay ve Esen (2004) yığılmalı Galerkin metodunu kullanarak çözümü bulmuştur. Aksan ve Özdeş (2004) zaman ayrıştırması üzerine kurulu olan varyasyonel metot ile Burgers denkleminin çözümü üzerinde çalışmışlardır. Dağ vd. (2005) kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonları ile Galerkin metodunu kullanarak

denklemleri çözmüşlerdir. Öziş vd. (2005) kuadratik B-spline fonksiyonları ile Galerkin sonlu elemanlar metodunu kullanarak çözüm elde etmişlerdir. Ramadan vd. (2005) septik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu ile çözümü araştırmıştır. Aksan (2006) zaman ayrıştırmasına dayalı kuadratik B-spline ile sonlu elemanlar metodunu kullanarak çözümü araştırmıştır. Gülsu (2006) sonlu fark metoduna kısıtlı Pade yaklaşımını adapte ederek çözüm önermiştir. Kadalbajoo vd. (2005) bir parametrelili düzgün kapalı fark şeması ile, Kadalbajoo ve Awasthi (2006) Hopf-Cole dönüşümü uygulayarak Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı ile Burgers denkleminin çözümü üzerinde çalışmışlardır. Ramadan vd. (2007) polinom olmayan spline yaklaşımı ile çözümü araştırmışlardır. Saka ve Dağ (2008) kuintik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodunu kullanarak Burgers ve modifiye Burgers denklemlerinin çözümünü elde etmişlerdir. Inc (2008) homotopi analiz metodu kullanarak denklemin çözümünü vermiştir. Sarı ve Gürarlan (2009) altıncı dereceden kompakt sonlu fark şemaları yardımıyla çözüm elde etmişlerdir. Zhu ve Wang (2009) kübik B-spline fonksiyonları ile quasi-interpolasyon metodunu kullanarak çözümü bulmuşlardır. İrk (2009) septik B-spline fonksiyonları ile kolokasyon metodu kullanarak modifiye Burgers denkleminin çözümünü bulmuştur. Khalifa vd. (2010) Burgers denkleminin çözümünü Chebychev ve Legendre polinomlarına dayalı spektral metotlar ile araştırmışlardır. Asaithambi (2010) Taylor seri açılımına dayalı otomatik farklılaştırma metodunu çözüm için önermiştir. Abazari ve Borhanifar (2010) diferensiyel transformasyon metodu ile Burgers ve coupled Burgers denklemlerini çözmüşlerdir. Altıparmak ve Öziş (2011) çarpınlara ayrılmış köşegen Pade yaklaşımını kullanarak Burgers denkleminin nümerik çözümünü yapmışlardır. Dağ vd. (2011) B-spline fonksiyonlar ile Taylor-Galerkin ve Taylor-kolokasyon metotlarını kullanarak nümerik çözüm elde etmişlerdir. Korkmaz ve Dağ (2011) polinom tabanlı diferensiyel kuadrature metodu ile Burgers denklemini çözmüşlerdir. Korkmaz ve Dağ (2011) Burgers denklemini Sinc diferensiyel kuadrature metodu kullanarak çözmüşlerdir. Mittal ve Jain (2012) modifiye kübik B-spline kolokasyon metodu kullanarak denklemin çözümünü araştırmışlardır. Soliman (2012) kübik B-spline ile Galerkin sonlu elemanlar metodunu kullanarak çözümü elde etmiştir. Zhang ve Wang (2012) kompakt sonlu fark şemaları yardımıyla çözüm önermiştir. Jiwari (2013) Burgers denkleminin çözümü için ağırlıklı ortalama diferensiyel kuadrature yöntemiyle sayısal bir şema vermiştir.

Korkmaz ve Dağ (2013) kübik B-spline ile diferensiyel kuadrature metodu kullanarak denklemin çözümünü vermişler ve kararlılık analizi yapmışlardır. Mittal vd. (2013) Burgers denklemi için diferensiyel kuadrature metoduna dayalı sayısal bir şema vermişlerdir. İnan ve Bahadır (2014) Crank-Nicolson üstel sonlu fark metodu ile çözümü araştırmışlardır.

Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) istatistiksel prosedürlerin bilimsel deneylerin tasarımına uygulanmasına öncülük eden İngiliz istatistikçi ve genetikçidir. Matematik ve astronomi eğitimi olmasına rağmen, asıl çalışmalarını istatistik ve biyoloji alanlarında gerçekleştirmiştir. İstatistik alanında yeterlilik, yardımcı istatistik, maksimum olabilirlik, varyanslar analizi, ayırıcı analiz ve Fisher bilişimi gibi birçok temel kavram ve konuyu ortaya atmıştır. 1928'de yayınladığı makale ile nüfus içinde gen çokluluk dağılımının hesaplanması için difüzyon denklemlerini kullanması modern niceliksel genetik biliminin doğumu sayılmaktadır. Bu anlamda Fisher'in "Hemen hemen tek başına modern istatistiğin temellerinin kurucusu" olduğu iddia edilir (Hald, 1998).

Fisher 1936 yılındaki çalışmasında, denklemi avantajlı bir seçim yoğunluğuna sahip bir mutant genin yayılması için bir model olarak önermiştir. Aynı denklem alev yayılımında dallanan Brownian hareket sürecinde ve nükleer reaktör teorisinde de ortaya çıkar (Canosa, 1969). Ablowitz ve Zepetella (1979) çalışmalarında denklemin özel dalga hızları için çözümünü vermişlerdir. Denklemin sayısal çözümleri üzerine de pek çok çalışma yapılmıştır. Al-Khaled (2001) çalışmasında Sinc kolokasyon metodu kullanmıştır. Zhao ve Wei (2003) çalışmalarında ayırık singüler dönüşüm yöntemi kullanmışlar ve bunu üç farklı metot ile karşılaştırmışlardır. Qiu ve Sloan (1998) hareketli ağ metodu kullanarak denklemin sayısal çözümünü bulmuşlardır. Şahin vd. (2008) Fisher denklemini kuartik B-spline kullanarak çözmüşlerdir. Dağ vd. (2010) kuadratik B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin yöntemiyle denklemin çözümünü çalışmışlardır. Dağ ve Ersoy (2016) denklemin çözümü için üstel kübik B-spline algoritması kullanmışlardır. Chandraker vd. (2015) çalışmalarında sonlu farklar yöntemi kullanarak Fisher denkleminin sayısal çözümünü bulmuşlardır. Mehnaz (2016) ağsız çizgi metodu kullanarak denklemin çözümü üzerine çalışmıştır. Dağ ve Görgülü (2017) üstel B-spline Galerkin yöntemiyle denklemin çözümünü elde

etmişlerdir. Balyan vd. (2020) çalışmalarında pseudospectral metodunu kullanmışlar, ayrıca yöntemin kararlılık analizini yaparak yüksek doğrulukta çözüm elde etmişlerdir.

Bilim adamları NLS denklemi ile de oldukça ilgilenmişlerdir. Bunun nedeni fizik, kimya, biyoloji, ekonomi gibi pek çok alandaki durumların bu denklemler ile modellenbilmesidir. Denklemi ilk bulan Avusturyalı bilim adamı Erwin Schrödinger'dir. 1967 yılında da ilk defa Benney ve Newell tarafından zayıf dalga paketleri için bu denklem verilmiştir ve 1968'de Zakhorav tarafından Benney ve Newell'den bağımsız olarak bu denklem zayıf dalga paketleri için tekrar üretilmiştir. Dalga fonksiyonunun konum ve zamana bağlı değişimini gösteren NLS denklemi; optik titreşimlerin yayılması, su ve plazma ortamındaki dalgaların yayılması, tek bir dalganın kendi kendine modülasyonunda, lineer olmayan optiklerin kendi kendine tuzaklanma olaylarında, bir katıda nabız ısısının yayılmasında, süper iletkenliğin Ginzberg-Landau denklemi ile tanımlanması gibi pek çok konuda kullanılmaktadır. Ayrıca bazı kesin durumlar için bu denklemin çözümleri atomik, nükleer, yoğunlaşmış ve yüksek enerjili fizik ile parçacık fiziğinde önemli uygulamalara sahiptir (Tezcan ve Sever, 2008). NLS denkleminin çözümünde yeterince büyük x 'ler için türevleri göz ardı edilen bir $u(x, t_0)$ ve onun başlangıç koşulu kullanılarak ters saçılma metodu geliştirilmiş ve denklem analitik olarak çözülmüştür (Karpman vd.,1969; Zakharov vd., 1972; Scott vd., 1973). Bu metot kompakt destek başlangıç verileri için uygulanabilir olduğundan NLS denkleminin teorik çözümü genel başlangıç koşulları için bilinmez. Bu yüzden çeşitli metotlarla NLS denklemi için yaklaşık analitik çözümler bulunmaya çalışılmıştır. (Tezcan ve Sever, 2008) makalesinde Nikiforov-Uvarov metodu kullanılarak NLS denkleminin kesin çözümü için genel bir yaklaşım sunmuştur. Gardner vd. (1993), NLS denkleminin kararlılığı için Leap Frog algoritma çalışmaları yapmıştır. Adomian ayrışma metodu, varyasyonel iterasyon metodu ve tanh fonksiyon metodu kullanılarak NLS denklemi için yaklaşık analitik çözüm (Khuri, S.A. , 2004; El-Sayed, S.m. ve Kaya, D. 2006; Wazwaz, A.M., 2008) çalışmalarında verilmiştir. NLS denklemini çözmek için çeşitli sayısal metotlar kullanılmıştır. Bu amaçla farklı derecelerden spline fonksiyonlar, tesirli ve doğru bir şekilde sayısal yöntemler geliştirilerek NLS denkleminin çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Gardner vd. (1993), spline fonksiyonlarını kullanarak sonlu elemanlar metoduyla çalışmalar yapmıştır. (Robinson,

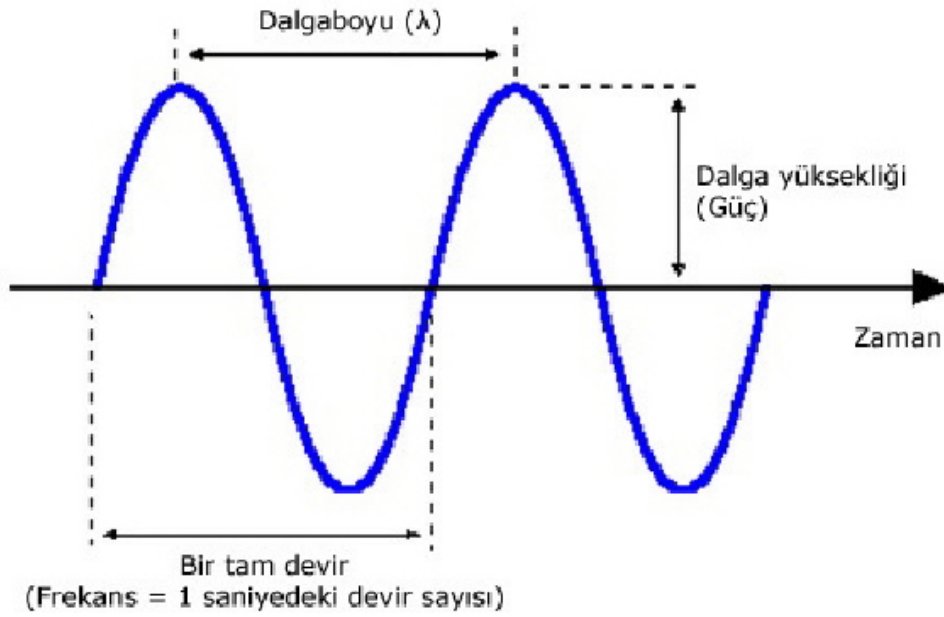
1997), ortogonal spline kolokasyon metodu kullanarak NLS denkleminin çözümüne gitmiştir. Dağ (1999), kuartik B-spline sonlu elemanlar metodu ile NLS çözümünü yapmıştır. Sheng vd. (2001), kuartik spline yaklaşımı ile geliştirilmiş NLS çözümü yapmışlardır. (Saka, 2012) çalışmasında ise kuintik B-spline sonlu elemanlar ile NLS çözümü yapılmıştır. Bu yöntemler Taha ve Ablowitz (1984) tarafından karşılaştırılmıştır. (Fairweather ve Khebchareon, 2002) makalesinde NLS denkleminin nümerik metotları hakkında aktüel ve geniş bir araştırma verilmiştir. (Korkmaz ve Dağ, 2009) çalışmasında diferansiyel kuadrature metotla ve (Dereli, Irk, Dağ, 2009; Dereli, 2012) çalışmalarında doğruların meshless çekirdek-tabanlı metotla NLS denkleminin sayısal çözümlü yapılmıştır. (Aksoy, Irk, Dağ, 2013) çalışmasında kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Taylor-Kolokasyon metodu ile NLS denkleminin nümerik çözümüne gitmişlerdir. (Saka, 2015) çalışmasında NLS denkleminin nümerik çözümü için kuartik B-Spline kolokasyon metodu kullanılmıştır.. Kaplan ve Dereli (2017), çalışmalarında hareketli en küçük kareler yöntemine dayanan ağsız metot kullanarak elde ettikleri algoritma ile NLS denkleminin sayısal çözümünü yapmışlardır. Başhan vd. (2018), NLS denkleminin sayısal çözümü için modifiye kuintik B-spline diferansiyel kuadrature metodunu kullanmışlardır.

2.1. Dalgalar Hakkında Genel Bilgi

Dalga enerjinin taşınımını sağlayan ve bir ortam içerisinde veya boşlukta hareket eden titreşim olarak ifade edilebilir. Dalgalar hiç madde taşınımı olmadan veya çok az madde taşınımı ile hareket ederler. Sabit konumda titreşim hareketi yapan dalgalar, zamanla konumlarının değişimini gösteren denklemlerle gösterilirler. Bu denklemler dalganın çeşidine göre farklılık gösterir. Bununla birlikte tüm dalgaların sahip oldukları ortak bazı özellikler vardır. Dalgalar bu özellikler yardımıyla matematiksel olarak modellenirler.

Bir enerji sonucunda oluşan dalganın ulaştığı en üst konum dalga tepesi olarak isimlendirilir. Ardışık iki tepe noktası arasındaki minimum uzaklığı (λ) dalga boyu denir. Bir noktadan geçen ardışık dalgaların aynı şekilde tekrar etmesi için geçen süreye (s) periyot adı verilir. Frekans ise, periyodun çarpmaya göre tersi olup, birim zamanda belli bir noktadan geçen tepe, çukur veya herhangi bir noktanın sayısıdır.

Dalganın herhangi bir anda titreşim doğrultusu üzerinde bulunduğu konuma (x) uzanım, uzanımın maksimum değerine (x_o) genlik adı verilir. Basit bir dalga profili Şekil 2.1'de gösterildiği gibidir. Dalga, bu ortak özellikler kullanılarak, bir zaman değişkeni ve bir ya da daha fazla boyutlu konum değişkenini içeren kısmi türevli diferensiyel denklemler ile matematiksel olarak ifade edilir.



Şekil 2.1. Basit bir dalga profili

Dalgaları sınıflandırırken bir çok farklı ayırt edici özelliği göz önünde bulundurmak gerekir. Temel olarak dalgalar, mekanik ve elektromanyetik olmak üzere ikiye ayrılabilir. Mekanik dalgalar, bir ortam içerisinde, ortamdaki madde moleküllerinin birbirine enerji aktarması ile yayılan dalgalardır. Ortamın yoğunluğu ve dalganın türüne göre farklı hızlarda hareket ederler. Elektromanyetik dalgalar ise yayılım için herhangi bir ortama gereksinim duymazlar. Işık, x-ışınları, mikrodalgalar, radyo dalgaları boşlukta (c) ışık hızında hareket eden elektromanyetik dalgalardır. Ayrıca doğrusal dalgalar, doğrusal diferensiyel denklemlerle, doğrusal olmayan dalgalarda doğrusal olmayan diferensiyel denklemlerle ifade edilirler. Duran ve ilerleyen dalgalar olarak ele alınırsa, duran dalgalar sabit konumda kalırken bulunduğu ortam ters yönde hareket eder veya hareketsiz bir ortamda zıt yönlü dalgaların girişimi söz konusu

olabilir. İlerleyen dalgalar ise bir yerden başka bir yere enerji taşımını sağlayan dalgalardır. Titreşim doğrultusu, dalganın ilerleme yönüne dik olan dalgalar enine dalga, paralel olan dalgalar ise boyuna dalga olarak isimlendirilir. Elektromanyetik dalgalar enine, ses dalgaları boyuna, su, yay ve deprem dalgalarında hem enine hem boyuna dalgalara örnek olarak verilebilir. Çok geniş kapsamlı olan dalgalar konusu ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Crawford, 1968) incelenebilir.

2.2. Soliton ve Solitary Dalgalar

Solitary ve soliton dalgalar doğrusal olmayan sistemlerin davranışlarının incelenmesi kapsamında pek çok bilim dalının çalışma alanı içerisinde olmuştur. Solitary dalgalar üzerine ilk gözlem ve deney çalışmalarını İskoçyalı mühendis John Scott Russell 1834 yılında gerçekleştirmiştir. Russell Edinburg ile Glasgow'u birbirine bağlayan Union kanalında at sırtında gerçekleştirdiği gözlemini şu şekilde ifade etmektedir (Russell, 1844).

"İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, boya hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı tarafından toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm formdaki dairesel ve düzgün bir su kütleinin kanal boyunca şekil ve hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 feet mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında ilk baştaki orjinal şekilde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarında kaybolduğunu gördüm. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansını bulduğum zamandı."

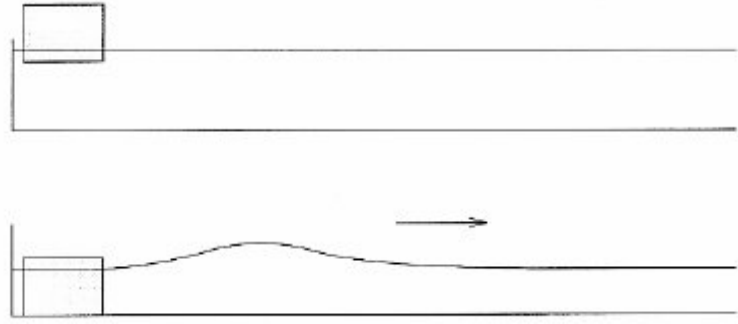
Russell gözlemleri sonucunda gerçekleştirdiği bu keşfi neticesinde şu iki sonucu ortaya koymuştur (Wadati, 2001).

1) Yerleşik (lokalize) bir dalga şekil ve hız gibi özelliklerinde değişim olmaksızın yayılır.

2) Yerleşik (lokalize) dalgalar karşılıklı çarpışma neticesinde kararlı bir şekilde özelliklerini korur.

İlk olarak Russell tarafından ortaya konulan birinci madde, solitary dalga özelliğidir. İkinci madde dalganın parçacık özelliğine sahip olduğu anlamına gelmektedir. Zabusky ve Kruskal (1965) solitary dalganın parçacık özelliğini vurgulamak için "soliton" terimini kullanmışlardır.

"Solitary dalga" ifadesini icat eden Russell bu yeni fenomeni araştırmak için kapsamlı laboratuvar deneyleri yaptı. Bir su tankının bir ucuna bıraktığı ağırlık vasıtasıyla ve bölmelerin çıkarılmasıyla su birikintilerini serbest bırakarak solitary dalgalar üretti (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Russell'in solitary dalga üretimi deneyi

Yer değiştiren su miktarına bağlı olarak bir veya birkaç solitary dalga oluşabileceğini buldu. Her iki durumda da bir artık dalga katarı oluşabilir veya oluşmayabilir. Russell ayrıca solitary dalgaların yükselti oluşturabildiğini fakat çukur oluşturmadığını keşfetti. Böyle bir dalga oluşturma girişimleri her zaman kademeli azalan genliğe sahip bir salımlı dalga dizisinin oluşmasına neden olur. Deneylerinden, solitary dalga yayılım hızını (v),

$$v = \sqrt{g(h + k)} \quad (2.1)$$

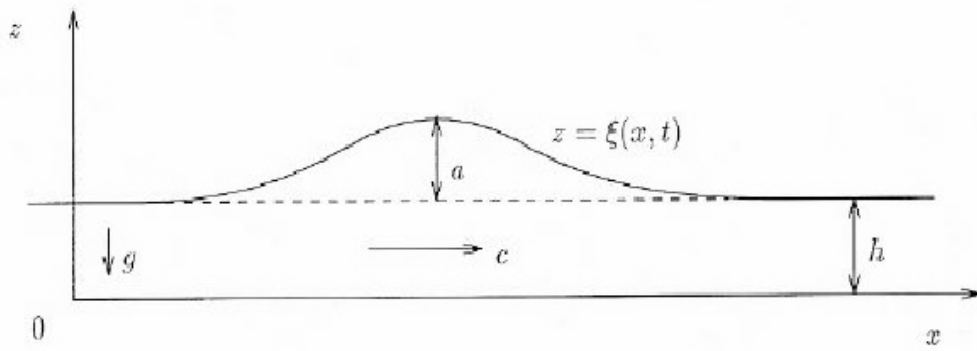
olarak elde etmiştir. Burada g yerçekimi ivmesi h durgun haldeki suyun derinliği ve k da dalga yüksekliğini ifade etmektedir. Buradan, daha büyük genlikli dalgaların daha hızlı hareket ettiği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla, daha büyük genlikli bir dalga

başlangıçta daha küçük genlikli bir dalganın arkasındaysa, birincisi sonunda yakalanır ve ikinci ile çarpışır. Böyle bir çarpışma gerçekleştiikten sonra her iki dalgada orjinal şekli ve hızı ile yoluna devam eder (Remoissenet, 1999).

O zamanki mevcut teorinin, dalgaların dağılımının, dalgaların dikleşmesini önleme eğiliminde olmasını ihmal etmesi tartışmalara neden olmuştur. Bunun üzerine, 1871’de Joseph Boussinesq ve 1876’da Lord Rayleigh tarafından bağımsız olarak yapılan çalışmalarda lineer olmama ve dağılımın etkilerinin dalgaların şekil değişikliği olmadan yayılacağı şekilde birbirini destekleyeceğini göstermişlerdir. Russell’ın keşfini destekleyen bu çalışmalarıyla dalga denkleminin $\alpha > 0$ ve $k/n < 1$ için $\beta = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{3\alpha}{(h+k)}}$ olmak üzere,

$$z = \xi(x, t) = \alpha \cdot \text{sech}^2 [\beta(x - vt)] \quad (2.2)$$

olduğunu bulmuşlardır. Kullanılan parametre ve değişkenler Şekil 2.3’de verilmiştir (Shahrill vd., 2015).



Şekil 2.3. Solitary dalgalar için kullanılan parametre ve değişkenler

1895’de Hollandalı bilim insanları Diedrik Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries sığ bir kanalın yüzeyindeki dalgaların yayılmasını açıklayan ve daha sonra isimleriyle anılan KdV denklemini elde etmişlerdir. Kanalın derinliği l ve η de denge seviyesine göre dalganın yüksekliği olmak üzere dalganın hareketini gösteren denklemi

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \delta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (2.3)$$

şeklinde bulmuşlardır. Burada ρ suyun yoğunluğu, T yüzey gerilimi, α keyfi sabit ve $\delta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ dir Denklemi basitleştirmek için

$$\eta = -\frac{2}{3}\alpha(6u+1), \tau = \sqrt{\frac{2\alpha^3 g}{\delta l}}, \xi = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}x \quad (2.4)$$

olarak alınırsa, denklem

$$u_\tau - 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. Bu şekilde, Korteweg ve de Vries, Russell tarafından keşfedilen solitary dalgaların hareketini modelleyen KdV denkleminin lokalize, hareketli dalga çözümünü bulmuşlardır. Fakat, çalışmalarında dalgaların kararlı olup olmadığı ve çarpışma sonucunda şeklinin değişip değişmediği gibi konularda bir cevap sunmamışlardır (Irk, 2007).

Martin Zabusky ve Norman Kruskal, 1965 yılında KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümünü üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalar sonucunda solitary dalgaların çarpışma sonucunda şekil değiştirmedeğini ve bu durumun parçacık davranışına benzediğini ifade etmişlerdir. Solitary dalgaların bu durumunu göz önünde bulundurarak Yunanca parçacık anlamına gelen "on" ekini kullanarak ilk defa soliton dalga ifadesini kullanmışlardır (Zabusky ve Kruskal, 1965). Bu çalışmanın ardından soliton dalgalara olan ilgi artmış ve üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Gardner vd. 1967 yılında KdV denkleminin analitik çözümünü ters saçılım dönüşümü yöntemi kullanarak elde etmişlerdir.

Hem parçacık, hem dalga özelliği gösteren solitonlar fiziksel pek çok sistemde görülmektedir. Bununla birlikte, soliton çözümlerinin analitik ve sayısal olarak elde edilmesi, bu konu üzerindeki çalışmaları arttırmıştır. Fiber optik, parçacık fiziği, nükleer fizik, manyetizma, biyofizik, biyoloji gibi bir çok alanda soliton dalga yapısı gözlenmekte ve solitonlar üzerine araştırmalar devam etmektedir.

2.3. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bir oluşum denklemi genel olarak bağımsız değişkenlerinden biri zaman (t) olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere denilmektedir. $u(x, t)$ denklemin bir çözümü olmak üzere,

$$u_t = K[u] \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $K[u]$; u ve u 'nun x 'e göre türevlerini içeren tanımlı bir fonksiyondur. Eğer $K[u]$, u terimine göre lineer ise bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri, diğer taraftan, u 'ya göre lineer değil ise bu tip denklemlere de lineer olmayan oluşum denklemleri denir. Örneğin ipin titreşimini veya ısı iletimini tanımlayan lineer dalga denklemi veya lineer ısı denklemi birer lineer oluşum denklemidir. Bununla birlikte, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi bilim dallarında lineer olmayan oluşum denklemleri üzerine bir çok çalışma yapılmaktadır. Aşağıda bu tür denklemlere ait bazı örnekler verilmiştir.

a) Difüzyon denklemleri: Doğrusal $u_t = \Delta u$, ($\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, Laplace operatörü) difüzyon denkleminin birçok lineer ve lineer olmayan genellemesi vardır. Örnek olarak,

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u), & \text{reaksiyon-difüzyon denklemi} \\ u_t + f(u)_x &= \Delta u, & \text{adveksiyon-difüzyon denklemi} \\ u_t &= \nabla [D(u) \nabla u], & \text{lineer olmayan difüzyon matrisi} \end{aligned}$$

Reaksiyon-difüzyon denklemleri kimyasal reaksiyonların modellenmesinde ve popülasyon biyolojisinde ortaya çıkar. Adveksiyon-difüzyon denklemleri kirleticilerin taşınımının modellenmesinde ortaya çıkar ve viskoz akışkan hareketlerini tanımlayan denklemlerle yakından ilişkilidir. Doğrusal olmayan difüzyon matrisleri gözenekli ortamdan akış gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır.

b) Dalga denklemleri: Doğrusal olmayan hiperbolik denklemlerin en basit sınıflarından biri doğrusal olmayan dalga denklemleridir.

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \quad (2.7)$$

Bu denklem, doğrusal olmayan klasik alan teorileri için basit bir model sağlar.

Hiperbolik kısmi diferensiyel denklemlerin bir diğer önemli sınıfında simetrik hiperbolik sistemlerdir:

$$u_t + A^i(u)u_{x_i} = 0 \quad (2.8)$$

Burada A^i simetrik matrisleri göstermektedir.

c) Schrödinger denklemi: Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi:

$$iu_t + \Delta u - f(|u|^2)u = 0 \quad (2.9)$$

Burada $u(x, t)$ kompleks değerli bir fonksiyondur. Adı, denklemin kuantum mekaniğinde lineer Schrödinger denklemi ile aynı forma sahip olmasından kaynaklanmaktadır:

$$iu_t + \Delta u - V(x, t)u = 0, \quad (2.10)$$

ancak, çözümünün kendisi $V = f(|u|^2)$ potansiyel fonksiyonuna bağlıdır. Bir diğer özel durumda lineer olmayan kübik Schrödinger denklemdir (cNLS):

$$iu_t + \Delta u - \delta |u|^2 u = 0 \quad (2.11)$$

burada $\delta = \pm 1$ dir. δ 'nın işaretinin seçimi önemlidir. Eğer $\delta = -1$ ise, denkleme odaklı cNLS, $\delta = 1$ ise odaksız cNLS adı verilir.

cNLS denklemi, uygun bir asimptotik sınırdaki çok genel doğrusal olmayan dağıtıcı dalga sistemlerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin cNLS denklemi, bir lazer ışımının fiber optik kablo ile doğrusal olmayan bir optik kablo ile doğrusal olmayan bir optik ortamdan yayılmasını tarif eder.

Bunların dışında, Sine-Gordon denklemi, Klein-Gordon denklemi, KdV denklemi, Burgers denklemi lineer olmayan oluşum denklemlerine birer örnek olarak verilebilir.

2.4. Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri

Diferensiyel denklemlerin çözümü için birçok analitik ve sayısal yöntem geliştirilmiştir. Bazı durumlarda denklemlerin analitik çözümünü bulmak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle sayısal bir yöntemin kullanılması ve bu yöntemin en az hata ile sonuca götürmesi önem kazanmaktadır.

Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri hem adi diferensiyel denklemlerin hem de kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasında oldukça kullanışlıdır. Bununla birlikte, aralarında bazı farklar mevcuttur.

*Sonlu farklar yönteminde üzerinde çalışılan tanım aralığı birbirinden farklı olan noktalar kümesi ile yer değiştirirken, sonlu elemanlar metodunda, tanım bölgesi sonlu elemanlar adı verilen alt tanım bölgelerine ayrılır.

*Sonlu elemanlar metodunda, bulunmak istenen çözüm fonksiyonu her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilir.

*Sonlu farklar metodunda, diferensiyel denklemdaki türev değerleri için yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar metodunda ise denklemin çözümüne yaklaşım yapılır.

*Sonlu farklar metodunda, sınır şartlarının düzensizliği ve çözüm bölgesinin düzgün geometrik şekiller olmaması çözümün bulunmasını zorlaştırmakta ve iyi sonuçlar alınmamaktadır. Diğer taraftan, sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hem de düzgün olmayan karmaşık geometriye sahip çözümlerde daha iyi sonuçlar vermektedir.

*Sonlu farklar metodunun uygulanması sonlu elemanlar metoduna göre daha kolaydır.

*Sonlu farklar metodu ile bölünme noktaları arasında kalan herhangi bir değer için yaklaşım yapılamaz. Fakat sonlu elemanlar metodunda her bir alt aralığa karşılık bir interpolasyon fonksiyonu tanımlandığı için bölünme noktaları arasında kalan değerler için de yaklaşım yapılabilir.

*Problemin yapısına bağlı olarak değişmekle birlikte, genel olarak sonlu elemanlar yaklaşımı, sonlu farklar yaklaşımından daha iyi sonuç vermektedir.

*Sonlu farklar metotlarını kullanmak için Taylor seri açılımları yeterlidir, fakat sonlu elemanlar metotlarını kullanmak daha karmaşık işlemler gerektirir.

2.4.1. Ağırlıklı rezidüer yöntemi

Ağırlıklı rezidüer yöntemi sonlu elemanlar metotlarının temelini oluşturmaktadır. Genel şekliyle bir diferensiyel denklem

$$Lu - f = 0 \quad (2.12)$$

olarak verilsin. Burada L lineer operatör, f bilinen fonksiyon ve u aranan çözüm fonksiyonudur. Ağırlıklı rezidüler yöntemi kullanılarak, bulunmaya çalışılan çözüm fonksiyonu $u(x, t)$ yerine,

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x) \quad (2.13)$$

şekilde U sonlu yaklaşım serisi kullanılır. (2.13) eşitliğindeki $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, N$ deneme fonksiyonu diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve a_j , $j = 1, 2, \dots, N$, t ' ye bağlı bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda, $\varphi_j(x)$ deneme fonksiyonları problemde verilen sınır şartlarını sağlayacak şekilde belirlenir, fakat genel olarak denklemini sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidüler yönteminin temel amacı U yaklaşık çözümünü ile orjinal denklemde yerine yazıldığında oluşan farkı en aza indirmektedir. Bu fark rezidü ile ifade edilir.

$$R = LU - f \quad (2.14)$$

W_j lineer bağımsız ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek şekilde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (2.14) ile verilen rezidü ifadesi W_j ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak Ω tanım bölgesi üzerinde integral alınırsa,

$$\int_{\Omega} W_j R(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

formunda N bilinmeyenli N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden a_j bilinmeyen katsayılar bulunarak (2.13)'de yerine yazıldığında U yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

Ağırlık fonksiyonlarının seçimine göre, metotların farklı isimleri vardır.

2.4.1.1. Kolokasyon metodu

Bu metotta ağırlık fonksiyonları tanım bölgesi içerisindeki Dirac δ fonksiyon ailesinden seçilir. Bu fonksiyonlar $W_i(x) = \delta(x - x_i)$ şeklinde olup,

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.16)$$

özelliğine sahiptir.

Bu şekilde, ağırlıklı rezidü ifadesinin integrasyonu ile rezidünün tanım bölgesindeki belirli noktalarda sıfır olması sağlanır. (2.15) ifadesinde $W_i(x) = \delta(x - x_i)$ alınarak integrasyonu yapıldığında $R(x_i) = 0$ olduğu görülür.

2.4.1.2. Sub-domain metodu

Bu metot ağırlıklandırma faktörlerini kullanmaz, dolayısıyla tam olarak ağırlıklı rezidüler ailesinin bir üyesi değildir. Bununla birlikte kolokasyon yönteminin bir modifikasyonu olarak düşünülebilir. Buradaki fikir, ağırlıklı rezidüyü sadece tanım bölgesindeki sabit noktalarda değil, bölgenin çeşitli alt bölümlerinde de sıfır yapmaktır. Bunu başarmak için ağırlık fonksiyonları bütünlük oluştururlar ve tüm bölge üzerindeki integral bilinmeyen tüm parametreleri belirlemek için yeterli olacak şekilde bir dizi alt alana bölünür.

$$\int_{\Omega} W_i R(x) dx = \sum_j \left(\int_{\Omega} R(x) dx \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.17)$$

2.4.1.3. En küçük kareler metodu

İsminden de anlaşılacağı gibi rezidülerin kareleri toplamının minimize edilmesi prensibine dayanmaktadır. Yani,

$$S = \int_{\Omega} R(x) R(x) dx = \int_{\Omega} R^2(x) dx \quad (2.18)$$

ifadesinin minimum olması amaçlanmaktadır. Bu skaler fonksiyonun minimum olması için S 'nin bilinmeyen parametrelere göre türevlerinin sıfır olması gerekir.

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 2 \int_{\Omega} R(x) \frac{\partial R}{\partial a_i} dx = 0, \quad (2.19)$$

(2.15) ifadesi ile karşılaştırıldığında ağırlık fonksiyonunun

$$W_i = 2 \frac{\partial R}{\partial a_i} \quad (2.20)$$

olduğu görülmüştür. Burada "2" değeri atılabilir. Dolayısıyla en küçük kareler metodu için ağırlık fonksiyonları sadece rezidütün bilinmeyen sabitlere göre türevleridir.

$$W_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}$$

2.4.1.4. Galerkin metodu

Bu metot en küçük kareler metodunun bir modifikasyonu olarak görülebilir. Rezidü türevini bilinmeyen a_i katsayılarına göre kullanmak yerine, yaklaşım fonksiyonunun türevi kullanılır. Yani, ağırlık fonksiyonu olarak (2.13)'deki yaklaşım fonksiyonu alınır,

$$W_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.21)$$

elde edilir. Bunlar (2.13)'deki orjinal baz fonksiyonları ile aynıdır.

$$W_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

2.4.1.5. Petrov-Galerkin metodu

Bu metot, Galerkin metodu ile benzer prensipleri içerir, fakat Galerkin metodunda ağırlık fonksiyonu deneme fonksiyonu ile aynı olurken, Petrov-Galerkin metodunda bu durum gerekli değildir. Yani,

$$W_i = \Psi_i(x) \neq \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.23)$$

olarak şekildi ağırlık fonksiyonu seçilebilir.

2.4.1.6 Momentler metodu

Bu metotta, ağırlık fonksiyonları polinom ailesinden seçilir. Yani ağırlık fonksiyonu

$$W_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.24)$$

formundadır. Yaklaşımın baz fonksiyonları ($\varphi_i(x)$ ler) polinom olarak seçilmesi durumunda momentler yöntemi Galerkin metodu ile aynı olur.

2.5. Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonlardan ilk kez 1946 yılında Schoenberg bahsetmiştir ve spline fonksiyonlar 1960'ların başında teorikte ve pratikte oldukça gelişme göstermiştir (Schoenberg, 1946). Spline fonksiyonlar interpolasyon, veri uydurma, eğri ve yüzey uydurma, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri gibi birçok alanda sıkça kullanılmaktadır. Çünkü Spline fonksiyonlar yapısal özellikleri sebebiyle oldukça kullanışlı olduğu için bilgisayar hesaplamalarında bilim adamlarına büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Fakat yüksek dereceli polinomlarla yapılan interpolasyonlarda işlem hatalarını arttırabilir. Ayrıca yaklaşım yapılan fonksiyonun özelliklerinden interpolasyon formüllerinin $[a, b]$ aralığının bir kısmında hızlı, bir kısmında yavaş değiştiğinde fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlar vermeyebilir. Bu tür sebeplerden birinci, ikinci veya üçüncü dereceden, derecesi yüksek olmayan, fonksiyonlar ile yaklaşım yaparak spline interpolasyonu tanımlı aralıkta, sonlu noktalarda birbirini örtmeyen alt aralıklarda küçük dereceli polinom bulma yöntemidir.

$S(x)$, reel sayıların monoton artan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ 'ye bağlı k . dereceden spline fonksiyonu reel doğru üzerinde tanımlıdır ve aşağıdaki şartları sağlar:

a) $S(x)$, her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k . veya daha küçük dereceden bir polinomdur. (Burada $x = -\infty$ ve $x_N = \infty$ olabilir)

b) $S(x)$ ve kendisinin $1, 2, \dots, k - 1$. basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve $x_m, m = 1, 2, \dots, N - 1$, bölünme noktalarında süreklidir.

Spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar yardımı ile sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir.

- Nümerik analizde ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrislerin tersi kolayca alınabilir. Dolayısıyla spline fonksiyonlar kullanıldığında elde edilecek denklem sistemleri rahatlıkla çözülebilir.

- Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon; k . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.

- Düşük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

2.5.1. B-spline fonksiyonlar

B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesi $\dots < x_{-1} < x_{-2} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = -\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \infty$ olmak üzere çalışmamızda kullanacağımız kübik trigonometrik B-spline ve daha düşük dereceden B-spline fonksiyonlarını inceleyelim.

2.5.1.1. Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları B_m^0 ile gösterilir ve

$$B_m^0(x) = \begin{cases} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlıdır. $\{B_m^0 : m \in \mathbb{Z}\}$ kümesi B-spline formunun sonlu bir dizisi olmak üzere önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

- * B_m^0 fonksiyonun desteği $[x_m, x_{m+1})$ aralığıdır.
- * Bütün x ve m değerleri için $B_m^0(x) \geq 0$ eşitsizliği vardır.
- * B_m^0 fonksiyonu sayı doğrusu üzerinde sağdan sürekldir.
- * Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^0(x) = 0$ eşitliği vardır.

Verilen düğüm noktaları dizisi üzerinde sıfırıncı dereceden tüm spline fonksiyonlar için bir taban oluştururlar.

B_m^0 fonksiyonları bütün yüksek dereceden B-spline fonksiyonları tanımlamak için bir başlangıç noktasıdır. Yüksek mertebeden B-spline fonksiyonlar aşağıdaki indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir (Höllig, 2003):

$$B_m^k(x) = \left(\frac{x - x_m}{x_{m+k} - x_m} \right) B_m^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{m+k+1} - x}{x_{m+k+1} - x_{m+1}} \right) B_{m+1}^{k-1}(x), (k \geq 1) \quad (2.26)$$

2.5.1.2. Linear B-spline fonksiyonlar

x_m 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarında $B_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonları

$$B_m^1(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x_m) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.27)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ olarak tanımlanır. $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı $B_m^1(x)$ ve $B_{m+1}^1(x)$ gibi yukarıda tanımlanan ardışık iki B-spline fonksiyonları tarafından örtülür.

2.5.1.3. Kuadratik B-spline fonksiyonlar

x_m 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarında $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları

$$B_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.28)$$

olarak tanımlanır. Burada $h = x_{m+1} - x_m$ 'dir. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onların birinci mertebeden türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $B_{m-1}^2, B_m^2, B_{m+1}^2$ gibi yukarıda tanımlanan ardışık üç kuadratik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür.

2.5.1.4. Kübik B-spline fonksiyonlar

x_m 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_m noktalarında $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları

$$B_m^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.29)$$

olarak tanımlanır (Prenter, 1975). Burada $h = x_{m+1} - x_m$ 'dir. Kübik B-spline fonksiyonları ve onların birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı B_{m-1}^3 , B_m^3 , B_{m+1}^3 ve B_{m+2}^3 gibi yukarıda tanımlanan ardışık dört kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür.

2.5.2. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar

Trigonometrik spline fonksiyonları ile interpolasyon yaklaşımı, Schoenberg'in (1964) ayrıntılı bir şekilde ele aldığı çalışmasında ilk olarak görülmektedir. Bu çalışmasında aynı zamanda B-spline fonksiyonlarının varlığını ve bir trigonometrik spline fonksiyonunun trigonometrik B-spline fonksiyonlarının lineer bileşimi olarak elde edilebileceğini de kanıtlamıştır. Ayrıca $m = 2k + 1$ (tek) boyutlu parçalı fonksiyon uzayı

$$T_m = L\{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(kx), \cos(kx)\} \quad (2.30)$$

olarak belirtilmiş fakat, $m = 2k$ boyutlu uzayı daha sonra Lyche ve Winther (1979) çalışmalarında ele almışlardır.

$$T_m = L\left\{\sin\left(\frac{x}{2}\right), \cos\left(\frac{x}{2}\right), \dots, \sin\left(\frac{kx}{2}\right), \cos\left(\frac{kx}{2}\right)\right\} \quad (2.31)$$

trigonometrik B-spline fonksiyonları için genel bir yineleme formülü geliştiren Lyche ve Winther (1979) trigonometrik B-spline fonksiyonları bölünmüş farklar metodu ile tanımlamışlar ve fonksiyonların türevlenebilirliğini göstermişlerdir.

Trigonometrik B-spline fonksiyonların üretilmesi için yineleme formülü, sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$T_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.32)$$

ve $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere,

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k}-x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x_{i+1}}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x) \quad (2.33)$$

şeklinde ifade edilebilir (Walz, 1992). Eğer $[a, b]$ aralığı her bir alt aralığının uzunluğu h olacak şekilde düzgün parçalanmış ise (2.33) yineleme bağıntısı

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x) \quad (2.34)$$

olarak ifade edilebilir.

2.5.2.1. Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonu

Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında tanımlı olmak üzere, bu aralıkta bir düzgün parçalanma

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

şeklinde olsun. Ayrıca $h = \frac{b-a}{N} = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, N$ ve $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere (2.34) yineleme bağıntısını kullanarak $T_i^1(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonlarını $k = 1$ için

$$T_i^1(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} T_i^0(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+2}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} T_{i+1}^0(x) \quad (2.35)$$

olarak yazabiliriz. Parçalı fonksiyon olarak

$$T_i^1(x) = S_1 \begin{cases} \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right), & [x_i, x_{i+1}] \\ \sin\left(\frac{x_{i+2}-x}{2}\right), & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{d.d} \end{cases} \quad (2.36)$$

elde edilir. Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığındaki bölünme noktalarına göre düzenlenirse,

$$T_m^1(x) = S_1 \begin{cases} \sin\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right), & [x_{m-1}, x_m] \\ \sin\left(\frac{x_{m+1}-x}{2}\right), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.37)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$S_1 = \frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

dir. Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları x_m bölünme noktalarında süreklidir.

Bir $u(x, t)$ fonksiyonuna yaklaşım yapılırsa $U(x, t)$ fonksiyonu trigonometrik B-spline yardımıyla,

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=0}^N T_i^1(x) \varphi_i(t) \quad (2.38)$$

olarak tanımlanır. T^1 lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları, $\varphi_i(t)$ zamana bağlı değişkeni göstermektedir. T^1 lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında iki ardışık elemanı örter ve bu aralık dışında sıfırdır. Lineer trigonometrik B-spline'lar ile $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında yaklaşım

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m}^{m+1} T_i^1(x) \varphi_i(t) = T_m^1(x) \varphi_m(t) + T_{m+1}^1(x) \varphi_{m+1}(t) \quad (2.39)$$

olarak ifade edilebilir. $x = x_m$ noktasındaki yaklaşım için (2.37) deki lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları (2.39) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} U(x_m, t) &= U_m = T_m^1(x_m) \varphi_m(t) + T_{m+1}^1(x_m) \varphi_{m+1}(t) \\ U_m &= -S_1 \sin\left(\frac{x_m - x_{m+1}}{2}\right) \varphi_m(t) + S_1 \sin\left(\frac{x_m - x_m}{2}\right) \varphi_{m+1}(t) = \varphi_m(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

şeklinde bulunur. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\eta h = x - x_m$ dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$\begin{aligned} T_m^1(x) &= S_1 \sin\left(\frac{x_{m+1}-x}{2}\right) \\ T_m^1(\eta) &= S_1 \sin\left(\frac{h-h\eta}{2}\right) \\ T_{m+1}^1(x) &= S_1 \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right) \\ T_{m+1}^1(\eta) &= S_1 \sin\left(\frac{\eta h}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

olur.

2.5.2.2. Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu

Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları $k = 2$ için (2.34) daki yineleme formülünden

$$T_i^2(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin(h)} T_i^1(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+3}-x}{2}\right)}{\sin(h)} T_{i+1}^1(x) \quad (2.42)$$

olarak bulunur. Buradan $T_i^2(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonu parçalı olarak

$$T_i^2(x) = S_2 \begin{cases} \sin^2\left(\frac{x-x_i}{2}\right), & [x_i, x_{i+1}] \\ -\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+2}}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-x_{i+3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+1}}{2}\right), & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \sin^2\left(\frac{x-x_{i+3}}{2}\right), & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.43)$$

şeklinde elde edilebilir. $m = 0, 1, \dots, N$ için $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığına göre düzenleme yapılırsa

$$T_m^2(x) = S_2 \begin{cases} \sin^2\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right), & [x_{m-1}, x_m] \\ -\sin\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{m+1}}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-x_{m+2}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right), & [x_m, x_{m+1}] \\ \sin^2\left(\frac{x-x_{m+2}}{2}\right), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.44)$$

şeklinde kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları elde edilir. Burada

$$S_2 = \frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h)}$$

dir. $T_m^2(x)$ fonksiyonu ve birinci türevi x_m ve x_{m+1} bölünme noktalarında süreklidir.

Bir $u(x, t)$ fonksiyonuna yaklaşım yapılırsa $U(x, t)$ fonksiyonu kuadratik trigonometrik B-spline yardımıyla,

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=0}^N T_i^2(x) \varphi_i(t) \quad (2.45)$$

olarak tanımlanabilir. T_m^2 kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları, $\varphi_i(t)$ zamana bağlı değişkeni göstermektedir. T_m^2 kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında üç ardışık elemanı örter ve bu aralık dışında sıfırdır. x_m, x_{m+1} gibi ardışık iki düğüm noktası için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki sonlu eleman $T_{m-1}^2, T_m^2, T_{m+1}^2$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Buradan (2.45) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x) \varphi_i(t) = \quad (2.46)$$

$$T_{m-1}^2(x) \varphi_{m-1}(t) + T_m^2(x) \varphi_m(t) + T_{m+1}^2(x) \varphi_{m+1}(t)$$

olur. (2.44) de bulunan $T_m^2(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonu yardımıyla $x = x_m$ noktasında $u(x_m, t)$ ve x 'e göre birinci türevine yaklaşım

$$U(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x) \varphi_i(t) \quad (2.47)$$

$$\frac{dU(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{dT_i^2(x)}{dx} \varphi_i(t) \quad (2.48)$$

şeklinde olup,

$$U_m = S_2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \varphi_{m-1}(t) + S_2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \varphi_m(t) \quad (2.49)$$

$$U'_m = -S_2 \sin(h) \varphi_{m-1}(t) + S_2 \sin(h) \varphi_m(t) \quad (2.50)$$

olarak bulunur. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\eta h = x - x_m$ dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$\begin{aligned}
T_{m-1}^2(\eta) &= S_2 \sin^2\left(\frac{h-h\eta}{2}\right), \\
T_m^2(\eta) &= S_2 \left[\sin\left(\frac{h+h\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{h-h\eta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h-h\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{h\eta}{2}\right) \right], \\
T_{m+1}^2(\eta) &= S_2 \sin^2\left(\frac{h\eta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

olur.

2.5.2.3. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları

Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları $k = 3$ için (2.34) daki yineleme formülünden

$$T_i^3(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+4}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) \tag{2.52}$$

olarak bulunur. Buradan $T_i^3(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonu parçalı olarak

$$T_i^3(x) = S_3 \left\{ \begin{array}{ll} \sin^3\left(\frac{x-x_i}{2}\right), & [x_i, x_{i+1}] \\ -\sin^2\left(\frac{x-x_i}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+2}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+1}}{2}\right), & x_{i+1}, \llbracket x_{i+2} \\ -\sin^2\left(\frac{x-x_{i+1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+4}}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{x-x_{i+3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right) & \\ +\sin\left(\frac{x-x_{i+4}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+1}}{2}\right), & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ +\sin^2\left(\frac{x-x_{i+4}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{i+2}}{2}\right) \\ -\sin^3\left(\frac{x-x_{i+4}}{2}\right), & [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{array} \right. \tag{2.53}$$

şeklinde elde edilebilir. $m = 0, 1, \dots, N$ için $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığına göre düzenleme yapılırsa

$$T_m^3(x) = S_3 \begin{cases} \sin^3\left(\frac{x-x_{m-2}}{2}\right), & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ -\sin^2\left(\frac{x-x_{m-2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{x-x_{m-2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{m+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right), & [x_{m-1}, x_m] \\ -\sin^2\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{m+2}}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{x-x_{m+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{m-2}}{2}\right) \\ +\sin\left(\frac{x-x_{m+2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{m+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right), & [x_m, x_{m+1}] \\ +\sin^2\left(\frac{x-x_{m+2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right) \\ -\sin^3\left(\frac{x-x_{m+2}}{2}\right), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.54)$$

şeklinde kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların elde edilir. Burada

$$S_3 = \frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}$$

dir. $T_m^3(x)$ fonksiyonu, birinci türevi ve ikinci türevi x_{m-1}, x_m, x_{m+1} bölünme noktalarında süreklidir.

Bir $u(x, t)$ fonksiyonuna yaklaşım yapılırsa $U_N(x, t)$ fonksiyonu trigonometrik B-spline yardımıyla,

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} T_i^3(x)\varphi_i(t) \quad (2.55)$$

olarak tanımlanabilir. T_m^3 kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları, $\varphi_i(t)$ zamana bağlı değişkeni göstermektedir. T_m^3 kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında dört ardışık elemanı örter ve bu aralık dışında sıfırdır. $x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ gibi ardışık dört düğüm noktası için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki sonlu eleman $T_{m-1}^3, T_m^3, T_{m+1}^3, T_{m+2}^3$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Buradan (2.55) yaklaşımı

$$\begin{aligned} u(x, t) \approx U(x, t) &= \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x)\varphi_i(t) \\ &= T_{m-1}^3(x)\varphi_{m-1}(t) + T_m^3(x)\varphi_m(t) + T_{m+1}^3(x)\varphi_{m+1}(t) + T_{m+2}^3(x)\varphi_{m+2}(t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

olur. (2.54)'de bulunan $T_m^3(x)$ trigonometrik B-spline fonksiyonu yardımıyla $x = x_m$ noktasında $u(x_m, t)$ ve x 'e göre birinci ve ikinci türevine yaklaşımlar

$$U(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x) \varphi_i(t) \quad (2.57)$$

$$\frac{dU(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{dT_i^3(x)}{dx} \varphi_i(t) \quad (2.58)$$

$$\frac{d^2U(x_m, t)}{dx^2} = U''_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^2T_i^3(x)}{dx^2} \varphi_i(t) \quad (2.59)$$

şeklinde olup, kübik trigonometrik b-spline $T_i^3(x)$ nin $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında bölünme noktalarındaki birinci türevi T'_i ve ikinci türevi T''_i Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Bölünme noktalarında kübik trigonometrik B-spline değerleri

	$T_i^3(x)$	$T'_i(x)$	$T''_i(x)$
x_{i-2}	0	0	0
x_{i-1}	$\sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$	$\frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}$	$\frac{3(3 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1)}{4(\sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right))}$
x_i	$\frac{2}{(1+2 \cos(h))}$	0	$\frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{(2+4 \cos(h))}$
x_{i+1}	$\sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$	$-\frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}$	$\frac{3(3 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1)}{4(\sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right))}$
x_{i+2}	0	0	0

Çizelge 2.1'deki değerlerden yararlanarak U_m , U'_m , U''_m yaklaşım fonksiyonları

$$\begin{aligned} U_m &= a_1 \varphi_{m-1}(t) + a_2 \varphi_m(t) + a_1 \varphi_{m+1}(t) \\ U'_m &= -b \varphi_{m-1}(t) + b \varphi_{m+1}(t) \\ U''_m &= c_1 \varphi_{m-1}(t) - c_2 \varphi_m(t) + c_1 \varphi_{m+1}(t) \end{aligned} \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), & a_2 &= \frac{2}{(1+2 \cos(h))} \\ b &= \frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}, & & \\ c_1 &= \frac{3(3 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1)}{4(\sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right))}, & c_2 &= \frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{(2+4 \cos(h))} \end{aligned} \quad (2.61)$$

dir. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\eta h = x - x_m$ dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu durumda kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$T_{m-1}^3(\eta) = S_3 \sin^3\left(\frac{h - h\eta}{2}\right) \quad (2.62)$$

$$T_m^3(\eta) = S_3 \left[\begin{array}{c} \sin\left(\frac{2h+h\eta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{h-h\eta}{2}\right) \\ + \sin\left(\frac{2h-h\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{h+h\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{h-h\eta}{2}\right) \\ + \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{2h-\eta}{2}\right) \end{array} \right] \quad (2.63)$$

$$T_{m+1}^3(\eta) = S_3 \left[\begin{array}{c} \sin\left(\frac{h-h\eta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{h+h\eta}{2}\right) \\ + \sin\left(\frac{2h-h\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{h+h\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{h\eta}{2}\right) \\ + \sin\left(\frac{3h-\eta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{array} \right] \quad (2.64)$$

$$T_{m+2}^3(\eta) = S_3 \sin^3\left(\frac{h\eta}{2}\right) \quad (2.65)$$

olur. Yerel koordinatlarda elde edilen (2.62), (2.63), (2.64) ve (2.65) fonksiyonları yardımıyla (2.56) yaklaşım fonksiyonu

$$U(\eta, \tau) = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^3(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \quad (2.66)$$

şeklinde elde edilir.

Denklemleri çözmek için en küçük kareler yaklaşımı yapılırken kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacağı için bundan sonra T^3 ifadesi yerine T ifadesi kullanılacaktır.

2.6. AD Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Mühendislik ve doğa bilimlerinde sıkça karşılaşılan adveksiyon ve difüzyon kavramları akışkanlar dinamiğinde önemli bir yere sahiptir. Adveksiyon, akış içerisinde parçacıkların yatay toplu hareketini ifade ederken, difüzyon ise parçacıkların yüksek konsantrasyondan düşük konsantrasyona doğru hareketi olarak tanımlanabilir.

AD denklemi

$$u_t + \alpha u_x - \mu u_{xx} = 0 \quad (2.67)$$

şeklinde kısmi türevli lineer diferensiyel denklemdir.

AD denkleminin sayısal çözümünde,

$$\begin{aligned}
u(a, t) &= \alpha_1(t), & u(b, t) &= \alpha_2(t), \\
u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0, & t > 0 \\
u(x, 0) &= f_0(x) & a \leq x \leq b
\end{aligned} \tag{2.68}$$

sınır ve başlangıç koşulları, test problemine göre değerler verilerek kullanılacaktır. (2.67) denklemindeki u_x adveksiyon terimi, u_{xx} difüzyon terimi, α ve μ sabitleri de sırasıyla akış hızını ve difüzyon katsayısını belirtmektedir.

Bölüm 3’de (2.67) denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi ile sayısal çözümü yapılacaktır. U sayısal çözümü yerel koordinatlarda (2.66) şeklinde bulunacak ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacak olup, dört farklı test problemi ile çalışılacaktır. Önerilen yöntemin doğruluğunu test etmek için,

L_2 ortalama hata normu:

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - U_j|^2}, \tag{2.69}$$

L_∞ maksimum hata normu:

$$L_\infty = \|u - U\|_\infty = \max_j |u_j - U_j| \tag{2.70}$$

değerleri hesaplanacak ve sonuçlar çizelge ile verilecektir.

2.7. RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

RLW denklemi

$$u_t + u_x + \varepsilon u_x - \mu u_{xxt} = 0 \tag{2.71}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ε ve μ pozitif sabitlerdir. İlk olarak Peregrine tarafından tek yönlü zayıf lineer olmayan ve zayıf dispersif su dalgalarının yayılmasını modellemek için önerilmiştir (Peregrine, 1966). Daha sonra (Benjamin vd., 1972) RLW denkleminin, bir çok fiziksel fenomeni modellemek için kullanılan (KdV) denklemine bir alternatif olarak kullanılabileceği belirtilmiştir.

(2.71) da verilen RLW denkleminin sayısal çözümü bölüm 4'de kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemiyle çözülecektir. (2.71) denkleminin sayısal çözümü için,

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1, & u(b, t) &= \alpha_2, \\ u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f_0(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (2.72)$$

sınır ve başlangıç koşulları, test problemine göre değerler verilerek kullanılacaktır. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılarak U sayısal çözümü yerel koordinatlarda (2.66) şeklinde elde edilecektir.

RLW denkleminin korunum değerleri sırasıyla kütle, momentum ve enerji olmak üzere

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_a^b u dx \simeq h \sum_{m=1}^N U_m, \\ C_2 &= \int_a^b [u^2 + \mu(u_x)^2] dx \simeq h \sum_{m=1}^N [(U_m)^2 + \mu [(U_x)_m]^2], \\ C_3 &= \int_a^b (u^3 + 3u^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N ((U_m)^3 + 3(U_m)^2) \end{aligned} \quad (2.73)$$

şeklinde verilmiştir. (Olver, 1979). Çözüm için önerilen yöntemin doğruluğunu test etmek için üç farklı test problemi ile çalışılacaktır. Korunum değerleri, L_2 ortalama hata normu ve L_∞ maksimum hata normunun değerleri hesaplanacak ve sonuçlar tablo ile verilecektir.

2.8. Burgers Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Burgers denkleminin ilk olarak Bateman'in (1915) akışkanların hareketleri ile ilgili makalesinde değinilmiştir. Denklem yaygınlaşması ise türbülansın modellenmesi için kullanılması ile olmuştur (Burgers, 1948). Bununla birlikte ısı iletimi (Cole, 1951), sayılar teorisi (Van der Pol, 1951), gazların dinamiği, aerodinamik, ses yayılımı (Lighthill, 1952), elastikiyet (Pospedov, 1966) gibi alanlarda çeşitli problemlerin modellenmesinde kullanılmıştır.

Burgers denklemi olarak bilinen lineer olmayan parabolik kısmi türevli diferensiyel denklem matematiksel olarak

$$u_t + u_x u + \lambda u_{xx} = 0, \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1, & u(b, t) &= \alpha_2 \\ u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f_0(x) \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (2.75)$$

sınır koşulları ve başlangıç şartları ile verilmiştir. Burada $a, b \in \mathbb{R}$, α_1, α_2 ve $f_0(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca $\lambda \geq 0$ değerine viskozite sabiti adı verilir, eğer $\lambda = 0$ ise viskoz olmayan Burgers denklemi, $\lambda > 0$ ise viskoz Burgers denklemi olarak isimlendirilir. Denkleminde bulunan u_{xx} difüzyon terimi, $u_x u$ lineer olmayan terimi de konveksiyon terimidir. Lineer olmayan terimden dolayı Burgers denklemi, denkleme ismini veren J.M. Burgers (1939), Navier-Stokes denkleminin sadeleştirmesini içeren çalışmalarda bu denklemden yararlanmıştı.

Bölüm 5'de (2.74) denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi ile sayısal çözümünü yapılacaktır. U sayısal çözümünü yerel koordinatlarda (2.66) şeklinde bulunacak ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacak olup, 2 farklı test problemi ile çalışılacaktır. Önerilen yöntemin doğruluğunu test etmek için,

$\|e\|_1$ hata normu

$$\|e\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{u_j - U_j}{u_j} \right| \quad e = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{N-1}]^T \quad (2.76)$$

L_2 ortalama hata normu ve L_∞ maksimum hata normu değerleri hesaplanacak ve sonuçlar tablo ile verilecektir.

2.9. Fisher Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Reaksiyon-difüzyon denklemleri biyoloji, kimya, mühendislik gibi birçok alanda karşılaşılan fiziksel olayların modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bir boyutlu reaksiyon-difüzyon denklemi genel şekliyle

$$u_t = \lambda u_{xx} + \phi(u) \quad (2.77)$$

formunda ifade edilebilir. Burada $u = u(x, t)$ zamana bağlı reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca u_{xx} difüzyon terimi, λ negatif olmayan sabit ve $\phi(u)$ reaksiyon terimini ifade etmektedir. Bu tip denklemlerin en önemlilerinden biri çözümü üzerinde çalışılacak olan

$$u_t = \lambda u_{xx} + \beta u(1 - u) \quad (2.78)$$

formundaki Fisher denklemdir. Bu denklemin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1, & u(b, t) &= \alpha_1, \\ u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= f_0(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (2.79)$$

sınır ve başlangıç şartları kullanılacaktır. Burada $f_0(x)$ fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir. Bölüm 6'de (2.78) denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi ile sayısal çözümü yapılacaktır. U sayısal çözümü yerel koordinatlarda (2.66) şeklinde bulunacak ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacak olup, 2 farklı test problemi ile çalışılacaktır. Önerilen yöntemin doğruluğunu test etmek için,

L_2 ortalama hata normu ile L_∞ maksimum hata normu ve Rel bağıl hata normu

$$Rel = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^N |U_j^{n+1} - U_j^n|^2}{\sum_{j=0}^N |U_j^{n+1}|^2}} \quad (2.80)$$

değerleri hesaplanacak ve sonuçlar tablo ile verilecektir.

2.10. NLS Denklemleri, Başlangıç ve Sınır Şartları

NLS denklemleri matematiksel formül olarak;

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \quad (2.81)$$

olarak tanımlanır. Bu denklemlerde x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre kısmi türevleri göstermekte olup, $i = \sqrt{-1}$ ve q reel birer parametredir. Burada u

kompleks değerli bir fonksiyon olup derin bir sudaki dalgalar gibi dağılmayan sabit bir sistemdeki yavaş değişen dalga dizilerinin hareketi olarak tanımlanabilir.

Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1, & u(b, t) &= \alpha_2 \\ u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f_0(x) \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (2.82)$$

sınır şartları ve başlangıç şartları kullanılacaktır. Burada $f_0(x)$ fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir. Bölüm 7'de (2.81) denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi ile sayısal çözümü yapılacaktır. U sayısal çözümü yerel koordinatlarda (2.66) şeklinde bulunacak ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacak olup, 2 farklı test problemi ile çalışılacaktır. Önerilen yöntemin doğruluğunu test etmek için L_∞ maksimum hata normu:

$$L_\infty = \| |u| - |U| \|_\infty = \max_j ||u_j| - |U_j|| \quad (2.83)$$

ve NLS denkleminin için korunum sabitleri

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \simeq h \sum_{m=0}^N |U_m|^2, \\ C_2 &= \int_a^b [|(u_x)|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4] dx \simeq h \sum_{m=0}^N [|(U_x)_m|^2 - \frac{1}{2}|U_m|^4], \end{aligned} \quad (2.84)$$

değerleri hesaplanacak ve sonuçlar tablo ile verilecektir.

3. AD DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde AD denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü yapılacaktır. Hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar çizelge ve şekiller ile ifade edilecektir. Ayrıca, yöntemin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanacaktır.

3.1. AD Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Metodu

Konum ve zaman sınırlarına göre integral altında (2.67) denklemi için en küçük kareler metodu

$$\delta \int_0^t \int_a^b (U_t + \alpha U_x - \mu U_{xx})^2 dx dt = 0 \quad (3.1)$$

denklemi ile verilir. dx , dt , U_x , U_t ve U_{xx} için

$$x = x_m + \eta h, \quad t = t^n + \tau \Delta t$$

dönüşümleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x d\eta \\ dt &= \Delta t d\tau \\ U_t &= \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x} \\ U_{xx} &= (U_x)_x = \frac{\partial (U_\eta \frac{1}{\Delta x})}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu ifadeler (3.1) denkleminde yerel koordinatlarda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau \frac{1}{\Delta t} + \alpha U_\eta \frac{1}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2})^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (\frac{1}{\Delta t})^2 (U_\tau + \alpha U_\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta} \frac{\Delta t}{\Delta x^2})^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} U_\eta - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta})^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

halini alır. Burada $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde $\widehat{a} = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ve $\widehat{b} = -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ olarak alınmıştır. Leibniz integral kuralı kullanılarak (Abramowitz ve Stegun, 1972),

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 2(U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta}) \delta(U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta}) \delta(U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta (U_\tau + \widehat{a} U_\eta + \widehat{b} U_{\eta\eta}) \tag{3.5}$$

olan Petrov-Galerkin metoduna dönüştür. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları $T^3(x)$ yerine kolaylık için $T(x)$ olarak alınmıştır. (2.66) kullanılarak U_τ , U_η ve $U_{\eta\eta}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
U_\tau &= \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau} \\
&= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (3.7)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j),$$

$$U_{\eta\eta} = \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (3.8)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)$$

olarak bulunur. (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri ağırlık fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \left(U_\tau + \hat{a} U_\eta + \hat{b} U_{\eta\eta} \right) = \\ &= \delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j + \hat{a} \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \right. \\ &\quad \left. \hat{b} \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right] = \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) + \hat{a} \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) \tau + \hat{b} \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) \tau = \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[T_j(\eta) + \hat{a} \tau T'_j(\eta) + \hat{b} \tau T''_j(\eta) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Diğer bir ifade ile ağırlık fonksiyonu

$$w_i = T_i(\eta) + \hat{a} \tau T'_i(\eta) + \hat{b} \tau T''_i(\eta), \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.10) ifadeleri (3.4) da yerine yazılırsa

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j \Delta \varphi_j + \hat{a} \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \hat{b} \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right] \\ \left(T_i + \hat{a} \tau T'_i + \hat{b} \tau T''_i \right) d\eta d\tau =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 \left[T_j \Delta \varphi_j + \widehat{a} T_j' (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \widehat{b} T_j'' (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right] \\
& \left(T_i + \widehat{a} \tau T_i' + \widehat{b} \tau T_i'' \right) d\eta d\tau = \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [T_i T_j + \widehat{a} \tau (T_i T_j' + T_i' T_j) + \right. \\
& \widehat{a}^2 \tau^2 T_i' T_j' + \widehat{b} \tau (T_i T_j'' + T_i'' T_j) + \\
& \left. \widehat{a} \widehat{b} \tau^2 (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \widehat{b}^2 \tau^2 T_i'' T_j''] \Delta \varphi_j + \right. \\
& \left[\widehat{a} T_i T_j' + \widehat{a}^2 \tau T_i' T_j' + \widehat{b} T_i T_j'' \right. \\
& \left. \widehat{a} \widehat{b} \tau (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \widehat{b}^2 \tau T_i'' T_j' \right] \varphi_j \left. \right\} d\eta d\tau = \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left\{ \left[T_i T_j + \frac{\widehat{a}}{2} (T_i T_j' + T_i' T_j) + \frac{\widehat{a}^2}{3} T_i' T_j' + \right. \right. \\
& \frac{\widehat{b}}{2} (T_i T_j'' + T_i'' T_j) + \\
& \left. \frac{\widehat{a} \widehat{b}}{3} (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \frac{\widehat{b}^2}{3} T_i'' T_j' \right] \Delta \varphi_j + \\
& \left[\widehat{a} T_i T_j' + \frac{\widehat{a}^2}{2} T_i' T_j' + \widehat{b} T_i T_j'' + \right. \\
& \left. \frac{\widehat{a} \widehat{b}}{2} (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \frac{\widehat{b}^2}{2} T_i'' T_j' \right] \varphi_j \left. \right\} d\eta = \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 [T_i T_j + \frac{\widehat{a}}{2} (T_i T_j' + T_i' T_j) + \right. \\
& \frac{\widehat{a}^2}{3} T_i' T_j' + \frac{\widehat{b}}{2} (T_i T_j'' + T_i'' T_j) + \\
& \left. \frac{\widehat{a} \widehat{b}}{3} (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \frac{\widehat{b}^2}{3} T_i'' T_j' \right] d\eta \left. \right\} \Delta \varphi_j + \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[\widehat{a} T_i T_j' + \frac{\widehat{a}^2}{2} T_i' T_j' + \widehat{b} T_i T_j'' + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\widehat{a} \widehat{b}}{2} (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \frac{\widehat{b}^2}{2} T_i'' T_j' \right] d\eta \right\} \varphi_j = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilen denklem (3.11) matris formunda

$$\begin{aligned}
& \left[A^e + \frac{\widehat{a}}{2} (B^e + (B^e)^\top) + \frac{\widehat{a}^2}{3} C^e + \frac{\widehat{b}}{2} (D^e + (D^e)^\top) + \right. \\
& \left. \frac{\widehat{a} \widehat{b}}{3} (E^e + (E^e)^\top) + \frac{\widehat{b}^2}{3} F^e \right] \Delta \varphi^e + \\
& \left[\widehat{a} B^e + \frac{\widehat{a}^2}{2} C^e + \widehat{b} D^e + \frac{\widehat{a} \widehat{b}}{2} (E^e + (E^e)^\top) + \frac{\widehat{b}^2}{2} F^e \right] \varphi^e = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. Burada $(\cdot)^\top$ matrisin transpozunu göstermektedir. $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\varphi^e = [\varphi_{m-1}^e, \varphi_m^e, \varphi_{m+1}^e, \varphi_{m+2}^e]^T \quad (3.13)$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri Çizelge 2.1'deki değerler kullanılarak

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij} &= \int_0^1 T_i T_j d\eta & D^e = D_{ij} &= \int_0^1 T_i T_j'' d\eta \\ B^e = B_{ij} &= \int_0^1 T_i T_j' d\eta, & E^e = E_{ij} &= \int_0^1 T_i' T_j'' d\eta \\ C^e = C_{ij} &= \int_0^1 T_i' T_j' d\eta & F^e = F_{ij} &= \int_0^1 T_i'' T_j'' d\eta \end{aligned} \quad (3.14)$$

$i, j = m-1, m, m+1, m+2$

olarak bulunmuştur. Örneğin, A^e eleman matrisinin elemanları

$$A^e = A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta = \begin{bmatrix} \int_0^1 T_{m-1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_m T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_m T_m d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+2} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklinde olup, diğer eleman matrisleri de benzer şekilde hesaplanmıştır, daha sonra (3.12) her bir eleman matrisi birleştirilerek oluşturulan matrisler cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\hat{a}}{2} (B + B^T) + \frac{\hat{a}^2}{3} C + \frac{\hat{b}}{2} (D + D^T) + \right. \\ & \left. \frac{\hat{a}\hat{b}}{3} (E + E^T) + \frac{\hat{a}^2}{3} F \right] \Delta\varphi + \\ & \left[\hat{a}B + \frac{\hat{a}^2}{2} C + \hat{b}D + \frac{\hat{a}\hat{b}}{2} (E + E^T) + \frac{\hat{b}^2}{2} F \right] \varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\varphi = [\varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin birer vektörü ve

$$\varphi = \varphi^n, \quad \Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n \quad (3.17)$$

olarak tanımlanarak (3.16) denkleminde yerine yazılarak tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\hat{a}}{2} (B + B^T) + \frac{\hat{a}^2}{3} C + \frac{\hat{b}}{2} (D + D^T) + \frac{\hat{a}\hat{b}}{3} (E + E^T) + \frac{\hat{a}^2}{3} F \right] (\varphi^{n+1} - \varphi^n) + \\ & \left[\hat{a}B + \frac{\hat{a}^2}{2} C + \hat{b}D + \frac{\hat{a}\hat{b}}{2} (E + E^T) + \frac{\hat{b}^2}{2} F \right] \varphi^n = 0 \\ & \left[A + \frac{\hat{a}}{2} (B + B^T) + \frac{\hat{a}^2}{3} C + \frac{\hat{b}}{2} (D + D^T) + \frac{\hat{a}\hat{b}}{3} (E + E^T) + \frac{\hat{b}^2}{3} F \right] \varphi^{n+1} = \\ & \left[A + \frac{\hat{a}}{2} (B^T - B) - \frac{\hat{a}^2}{6} C + \frac{\hat{b}}{2} (D^T - D) - \frac{\hat{a}\hat{b}}{6} (E + E^T) - \frac{\hat{b}^2}{6} F \right] \varphi^n \end{aligned} \quad (3.18)$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada $\hat{a} = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\hat{b} = -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ dir. Son elde edilen denklem sistemi (3.18), (2.68) sınır koşulları ve Çizelge 2.1'deki değerler kullanılarak,

$$a_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad a_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))} \quad \text{o.ü.}$$

$$a_1\varphi_{-1} + a_2\varphi_0 + a_1\varphi_1 = \alpha_1$$

$$\varphi_{-1} = (\alpha_1 - a_2\varphi_0 - a_1\varphi_1)/a_1$$

(3.19)

$$a_1\varphi_{N-1} + a_2\varphi_N + a_1\varphi_{N+1} = \alpha_2$$

$$\varphi_{N+1} = (\alpha_2 - a_1\varphi_{N-1} - a_2\varphi_N)/a_1$$

olacak şekilde φ_{-1} ve φ_{N+1} elimine edilerek $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemine dönüştürülmüştür.

3.2. Başlangıç Durumu

(3.18) denkleminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\varphi^0 = [\varphi_{-1}^0, \varphi_0^0, \dots, \varphi_N^0, \varphi_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.55) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} T_m(x) \varphi_m^0$$

(2.68) sınır ve başlangıç koşulları ile Çizelge 2.1 birlikte kullanıldığında

$$b = \frac{3 \csc(\frac{3h}{2})}{4}, \text{ o.ü}$$

$$\begin{aligned} -b\varphi_{-1} + 0\varphi_0 + b\varphi_1 &= 0 \\ -b\varphi_{N-1} + 0\varphi_N + b\varphi_{N+1} &= 0 \\ U(x_m) &= a_1\varphi_{m-1} + a_2\varphi_m + a_1\varphi_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & b & & & & & & & & \\ a_1 & a_2 & a_1 & & & & & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & a_1 & a_2 & a_1 & & & & & \\ & & & & a_1 & a_2 & a_1 & & & & \\ & & & & & -b & 0 & b & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}^0 \\ \varphi_0^0 \\ \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^0 \\ \varphi_N^0 \\ \varphi_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$(N+3) \times (N+3)$ boyutlu matris denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlenerek (3.18) denklemine iterasyona başlanır ve t zamanına kadar iterasyon yapılır. Bulunan φ^n ler (2.55) ifadesinde yerine yazılarak her zaman adımında yaklaşım fonksiyonunun değeri hesaplanır.

(3.18) ve (3.21) denklem sistemlerinin çözümü için MATLAB paket programı kullanılmıştır.

3.3. Test Problemleri

Bu kısımda, lineer olmayan AD denkleminin sayısal çözümü için bir önceki kısımda tanımlanan sayısal yöntemin güvenilirliği dört test problemi ile gösterilmeye çalışılmıştır.

3.3.1. Problem (1)

(2.67) denklemine sınır koşulu olarak

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.22)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.23)$$

alınmıştır. AD denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\mu\pi^2 t) \quad (3.24)$$

olarak verilmiştir . Burada $\mu = 1$ alınarak analitik çözüm,

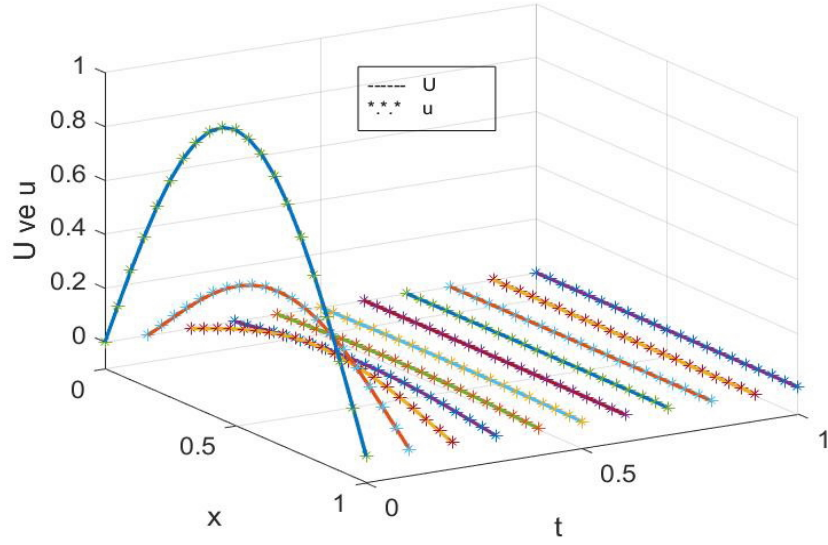
$$u(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t) \quad (3.25)$$

olarak alınmıştır. Konum aralığı $0 \leq x \leq 1$, konum adımı $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$ olarak ve herbir konum adımı için zaman aralığı sırasıyla $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$ olarak alınarak L_∞ hata normu için Çizelge 3.1'deki sonuçlar elde edilmiştir:

Çizelge 3.1. $t = 1$ anındaki hata normları

h	Δt	$L_\infty \times 10^5$	h	Δt	$L_\infty \times 10^5$
0.1	0.1	8.792515	0.025	0.1	2.662118
	0.05	0.276703		0.05	0.227732
	0.025	0,035312		0.025	0.028939
	0.01	0.001007		0.01	0.001190
h	Δt	$L_\infty \times 10^5$	h	Δt	$L_\infty \times 10^5$
0.05	0.1	4.915011	0.01	0.1	1.494789
	0.05	0.247381		0.05	0.213093
	0.025	0.030048		0.025	0.028517
	0.01	0.002115		0.01	0.000370

Buna göre, $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.05$ için U yaklaşık çözüm ile u analitik çözümün zaman ve konuma göre değişimi Şekil 3.1'de gösterilmiş olup burada sayısal çözüm ile analitik çözümün uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 3.1. U ile u 'nun konum ve zamana göre değişimi

3.3.2. Problem (2)

(2.67) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(0, t) = 1, \quad u(100, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad (3.26)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.27)$$

almacaktır. Problem (2) için analitik çözüm, $erfc(x)$ tamamlayıcı hata fonksiyonu

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (3.28)$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\alpha x}{\mu}\right) erf c\left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4\mu t}}\right) \quad (3.29)$$

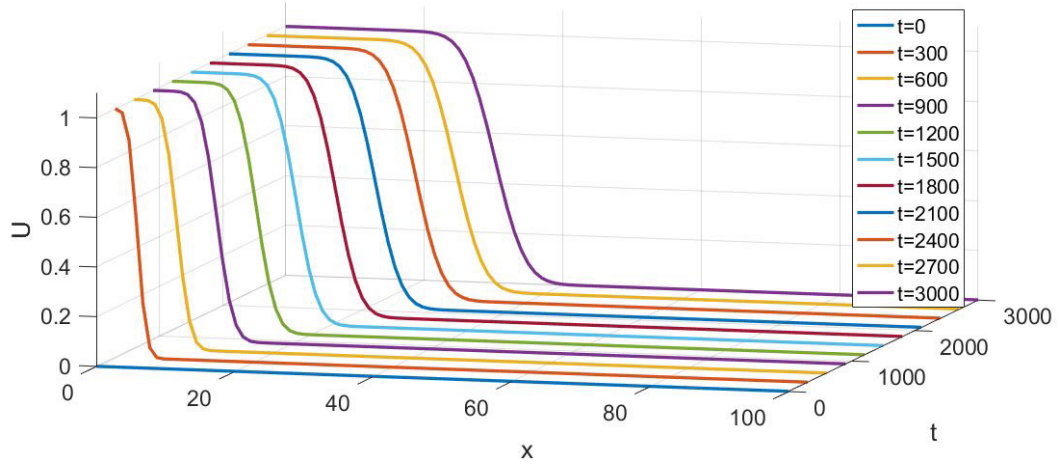
olarak verilmiştir. Test probleminde önceki çalışmalarla uyum olması için kanal uzunluğu 100 m, difüzyon katsayısı $\mu = 0.002$ ve akış hızı $\alpha = 0.01$ alınmıştır.

Konum aralığı $0 \leq x \leq 100$, $h = 1, 0.5, 0.25, 0.1$ konum adımlarında ve $\Delta t = 50, 25, 10, 5, 1$ zaman artımları için program $t = 3000$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Elde edilen hata normları Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. $t = 3000$ anındaki hata normları

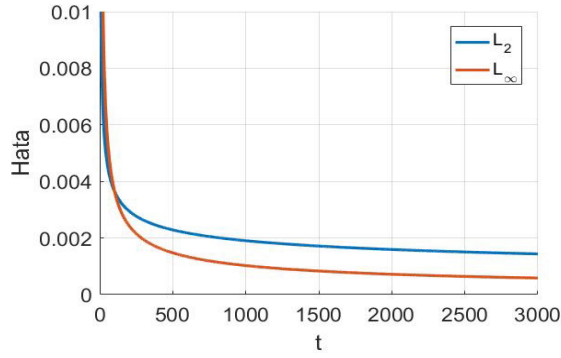
h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞
1	50	0.040644	0.25	50	0.040693
	25	0.017315		25	0.017507
	10	0.006078		10	0.006279
	5	0.002823		5	0.003017
	1	0.000468		1	0.000584
h	Δt	L_∞	h	Δt	L_∞
0.5	50	0.040693	0.1	50	0.040691
	25	0.017438		25	0.017505
	10	0.006267		10	0.006282
	5	0.003008		5	0.003020
	1	0.000574		1	0.000584

Problem (2) için sayısal çözümün zaman ve konuma göre değişimi $t = 0, 300, 600, 900, 1200, 1500, 1800, 2100, 2400, 2700, 3000$ zamanlarında $h = 1$ ve $\Delta t = 1$ için Şekil 3.2'de verilmiştir. Çizelge 3.2'de hata değerlerinin küçük olduğu ve sayısal çözümün analitik çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir.

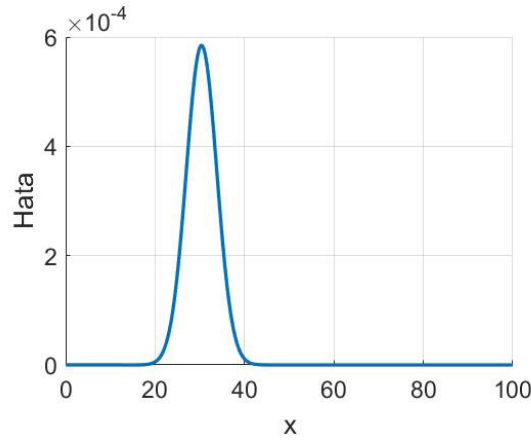


Şekil 3.2. U sayısal çözümün konum ve zamana göre değişimi

Hata normları L_2 ve L_∞ değerlerinin $t \in [0, 3000]$ aralığında zamana göre değişimi Şekil 3.3 (a)'da ve $x \in [0, 100]$ aralığında mutlak hata normunun konuma göre değişimi Şekil 3.3 (b)'de verilmiştir. Buradan hatanın $x = 30$ konumunda oluştuğu görülmektedir.



Şekil 3.3. (a) Hata normlarını zamana göre değişimi



Şekil 3.3. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi

3.3.3. Problem (3) (Uzun bir kanalda adveksiyon)

(2.67) denkleminde $\mu = 0$ alınmıştır. AD denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = 10 \exp \left[-\frac{1}{2\rho^2} (x - \hat{x} - \alpha t)^2 \right] \quad (3.30)$$

olarak alınmıştır. Burada $t = 0$ anında başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = 10 \exp \left[-\frac{1}{2\rho^2} (x - \hat{x})^2 \right] \quad (3.31)$$

olarak elde edilir. Sınır koşulları da

$$u(0, t) = 0 \quad u(9, t) = 0 \quad (3.32)$$

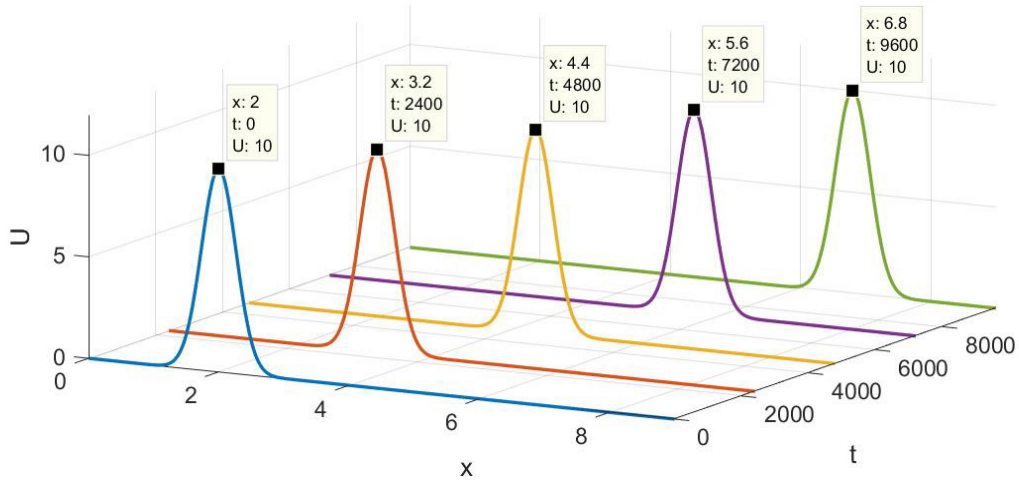
şeklinde alınmıştır. Analitik çözümdeki standart sapma değeri $\rho = 0.264$, dalganın en yüksek noktası $\hat{x} = 2$ km uzaklığa 10 birim ve $\alpha = 0.0005$ km/sn olarak alınarak test

problemde kullanılacaktır. Kanal uzunluğu kilometre cinsinden $[0, 9]$ ve zaman aralığı $t_{son} = 9600$ sn için $[0, 9600]$ şeklinde kullanılarak farklı h (metre cinsinden alınmıştır) ve Δt değerleri için elde edilen sonuçlar Çizelge 3 3'de verilmiştir.

Çizelge 3 3. $t = 9600$ anındaki hata normları

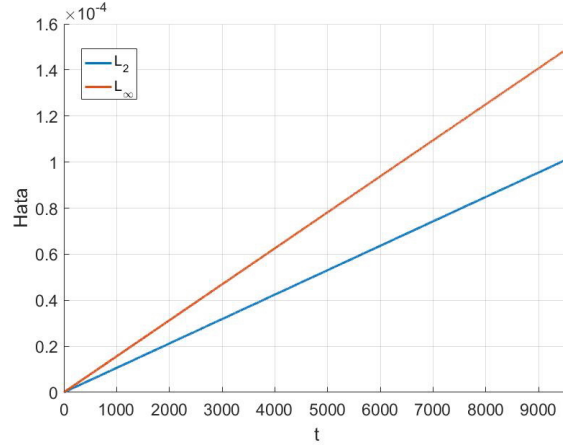
h	Δt	L_2	L_∞	h	Δt	L_2	L_∞
100	100	0.919779	1.397077	25	100	0.919797	1.402078
	50	0.250116	0.373222		50	0.0250079	0.378982
	25	0.063470	0.094479		25	0.063417	0.094231
	10	0.010233	0.015196		10	0.010177	0.015016
	1	0.000209	0.000348		1	0.000102	0.000150
50	100	0.919796	1.397155	10	100	0.919797	1.404720
	50	0.250079	0.373044		50	0.250079	0.378899
	25	0.063417	0.094232		25	0.063417	0.094231
	10	0.010177	0.015016		10	0.010177	0.015016
	1	0.000102	0.000150		1	0.000102	0.000150

Dalganın $t = 0, 2400, 4800, 7200, 9600$ zamanlarında hareketi Şekil 3.4'de verilmiştir. Buna göre dalganın tepe noktasının $t = 0$ anında $x = 2$ km de iken $t = 9600$ anında $x = 6.8$ km konumunda olduğu görülmektedir.

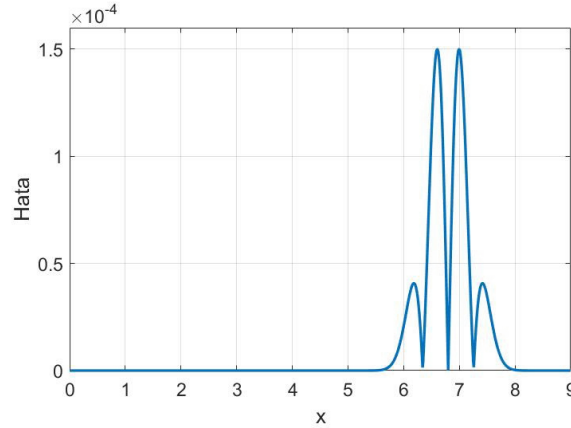


Şekil 3.4. Farklı zamanlarda U sayısal çözümünün hareketi

L_2 ve L_∞ hata normları $t \in [0, 9600]$ zaman aralığında değişimi Şekil 3.5 (a)'da ve L_∞ hata normunun $x \in [0, 9]$ konum aralığındaki değişimi Şekil 3.5 (b)'de vermiştir. Buna göre hatanın sınır değerlerinden kaynaklanmadığı ve zaman içinde arttığı görülmektedir.



Şekil 3.5. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi



Şekil 3.5. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi

3.3.4 Problem (4)

(2.67) denkleminde sınır koşulları

$$u(0, t) = 0 \quad u(9, t) = 0 \quad (3.33)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x} - \alpha t)^2}{\mu(4t+1)} \right] \quad (3.34)$$

analitik çözümünün (Sankaranarayanan vd., 1998) $t = 0$ daki değeri

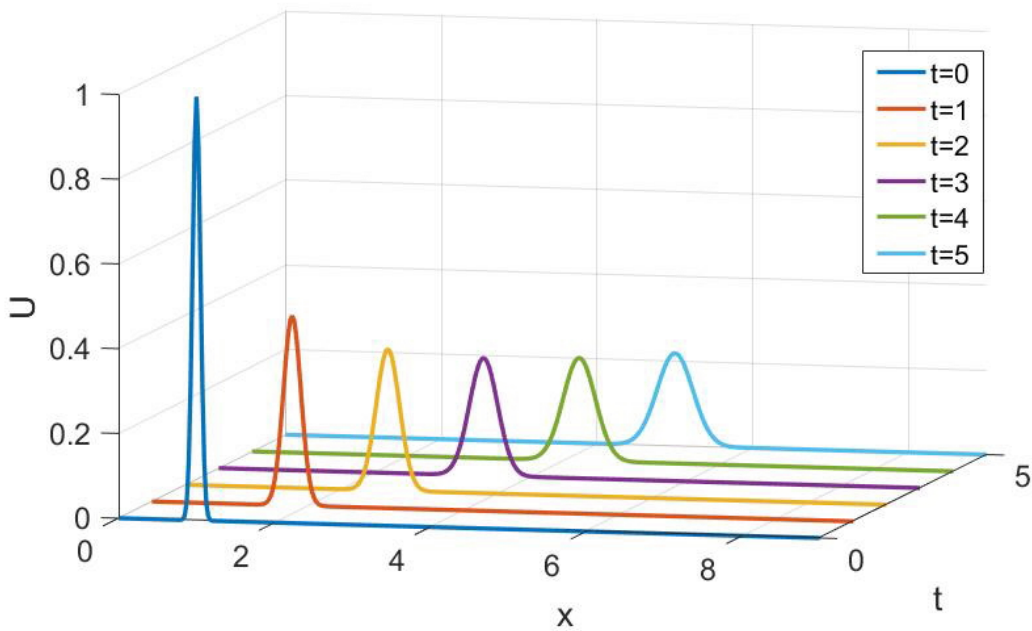
$$u(x, 0) = \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x})^2}{\mu} \right] \quad (3.35)$$

olarak alınmıştır. Test probleminde parametre değerleri $\tilde{x} = 1$, $\mu = 0.005 \text{ m}^2/\text{sn}$ ve $\alpha = 0.8 \text{ m/s}$ olarak alınmıştır. Buna göre sayısal çözüm konum aralığı $0 \leq x \leq 9$ zaman aralığı $0 \leq t \leq 5$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.0125$ olarak alınarak farklı konum adımı (h) değerleri için bulunarak, $t = 5$ zamanındaki L_∞ ve L_2 değerleri hesaplanarak Çizelge 3.4'de verilmiştir.

Çizelge 3.4. $\Delta t = 0.0125$ için $t = 5$ anındaki hata normları

h	L_2	L_∞
0.2	0.085925	0.132202
0.1	2.634×10^{-3}	4.930×10^{-3}
0.05	1.055×10^{-3}	1.672×10^{-3}
0.025	1.055×10^{-3}	1.675×10^{-3}

Aynı parametre değerlerini, konum ve zaman aralıklarını kullanarak zaman adımı $\Delta t = 0.005$ değeri için hata normlarının değerleri Çizelge 3.5 ve U sayısal çözümü zaman ve konuma göre grafiği Şekil 3.6'da verilmiştir.

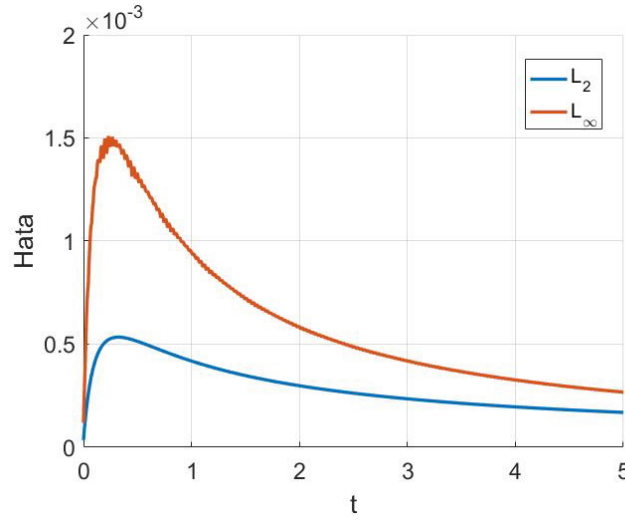


Şekil 3.6. Farklı zamanlarda U sayısal çözümün hareketi

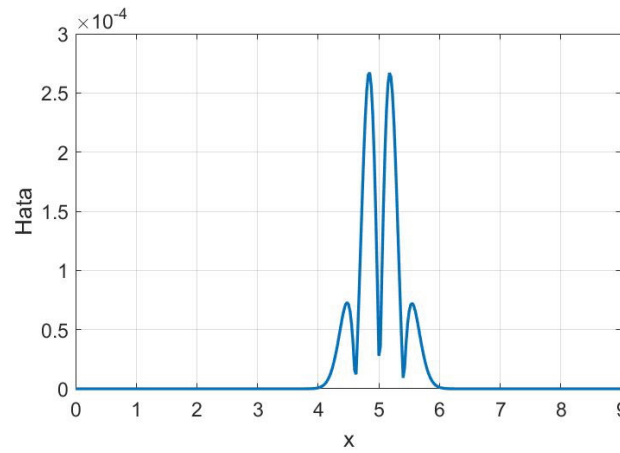
Çizelge 3.5. $\Delta t = 0.005$ için $t = 5$ anındaki hata normları

h	L_2	L_∞
0.2	0.085923	0.132577
0.1	2.464×10^{-3}	3.989×10^{-3}
0.05	1.691×10^{-4}	2.672×10^{-4}
0.025	1.691×10^{-4}	2.671×10^{-4}

Hata normlarının zamana göre değişimi ve L_∞ hata normunun $t = 5$ anındaki değeri Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.7. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi



Şekil 3.7. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi

4. RLW DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan RLW denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi ile sayısal çözümü çalışılmıştır. Çözüm için uygulanan yöntemin ve algoritmanın doğruluğunu test etmek için, üç test problemi kullanılmış ve sonuçlar L_2 ve L_∞ hata normları ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

4.1. RLW Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Metodu

Bu bölümde RLW denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü yapılacaktır. konum ve zaman sınırlarına göre integral altında (2.71) denklemi için en küçük kareler metodu

$$\delta \int_0^t \int_a^b (U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt})^2 dx dt = 0 \quad (4.1)$$

ifadesi ile verilir. dx , dt , U_x , U_t ve U_{xx} için

$$x = x_m + \eta h, \quad t = t^n + \tau \Delta t$$

dönüşümleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x d\eta \\ dt &= \Delta t d\tau \\ U_t &= \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x} \\ U_{xxt} &= (U_x)_x = \left(\frac{\partial (U_\mu \frac{1}{\Delta x})}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_t = (U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2})_t = \frac{U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_{\eta\eta t} \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) deki ifadeler (4.1) denkleminde yerel koordinatlarda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^t \int_a^b (U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt})^2 dx dt = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau \frac{1}{\Delta t} + U_\eta \frac{1}{\Delta x} + \varepsilon \widehat{U} U_\eta \frac{1}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta\tau} \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta t})^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (\frac{1}{\Delta t})^2 (U_\tau + U_\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} + \varepsilon \widehat{U} U_\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta\tau} \frac{1}{\Delta x^2})^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x} U_\eta + \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} \widehat{U} U_\eta - \frac{\mu}{\Delta x^2} U_{\eta\eta\tau})^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon \widehat{U}) U_\eta - \frac{\mu}{\Delta x^2} U_{\eta\eta\tau})^2 d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau})^2 d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

halini alır. Burada \widehat{U} , $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde sabit olarak alınmış olup, $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon \widehat{U})$ ve $\beta = -\frac{\mu}{\Delta x^2}$ dir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau})^2 d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 2 (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \tag{4.5}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. Kübik trigonometrik B-spline'lar kullanılarak U_τ, U_η ve $U_{\eta\eta\tau}$ hesaplanırsa

$$U_\tau = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau} \quad (4.6)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j,$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (4.7)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j),$$

$$U_{\eta\tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} \right)}{\partial \tau} \quad (4.8)$$

$$= \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau}$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) \Delta \varphi_j$$

elde edilir. (4.6) , (4.7) ve (4.8) ifadeleri ağırlık fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\tau}) = \\ &\delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) \Delta \varphi_j \right] \\ &\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) \tau + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) = \\ &\sum_{j=m-1}^{m+2} [T_j(\eta) + \alpha T'_j(\eta) \tau + \beta T''_j(\eta)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece (4.4)

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta\varphi_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) \Delta\varphi_j \right] [T_i(\eta) + \alpha T_i'(\eta) \tau + \beta T_i''(\eta)] d\eta d\tau =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [T_j \Delta\varphi_j + \alpha T_j' (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) + \beta T_j'' \Delta\varphi_j] (T_i + \alpha T_i' \tau + \beta T_i'') d\eta d\tau = \quad (4.10)$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 (T_i T_j \Delta\varphi_j + \beta T_i T_j'' \Delta\varphi_j + \beta T_j T_i'' \Delta\varphi_j + \alpha T_i T_j' \varphi_j + \beta^2 T_i'' T_j'' \Delta\varphi_j + \alpha^2 \tau T_i' T_j' \varphi_j + \alpha^2 \tau^2 T_i' T_j' \Delta\varphi_j + \alpha \tau T_i T_j' \Delta\varphi_j + \alpha \tau T_j T_i' \Delta\varphi_j + \beta \alpha T_j' T_i'' \varphi_j + \beta \alpha \tau T_i' T_j'' \Delta\varphi_j + \beta \alpha \tau T_j' T_i'' \Delta\varphi_j) d\eta d\tau =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [(T_i T_j + \beta T_i T_j'' + \beta T_j T_i'' + \beta^2 T_i'' T_j'' + \alpha^2 \tau^2 T_i' T_j' + \alpha \tau T_i T_j' + \alpha \tau T_j T_i' + \beta \alpha \tau T_i' T_j'' + \beta \alpha \tau T_j' T_i'') \Delta\varphi_j + (\alpha T_i T_j' + \alpha^2 \tau T_i' T_j' + \beta \alpha T_j' T_i'') \varphi_j] d\eta d\tau =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 [(T_i T_j + \beta T_i T_j'' + \beta T_j T_i'' \\
& + \beta^2 T_i'' T_j'' + \frac{\alpha^2}{3} T_i' T_j' + \frac{\alpha}{2} T_i T_j' + \frac{\alpha}{2} T_j T_i' \\
& + \beta \frac{\alpha}{2} T_i' T_j'' + \beta \frac{\alpha}{2} T_j' T_i'') \Delta \varphi_j \\
& + (\alpha T_i T_j' + \frac{\alpha^2}{2} T_i' T_j' + \beta \alpha T_j' T_i'') \varphi_j] d\eta = \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 [T_i T_j + \frac{\alpha}{2} (T_i T_j' + T_j T_i') + \right. \\
& \frac{\alpha^2}{3} T_i' T_j' + \beta (T_i T_j'' + T_j T_i'') + \frac{\beta \alpha}{2} (T_i' T_j'' + T_j' T_i'') + \\
& \left. \beta^2 T_i'' T_j''] d\eta \right\} \Delta \varphi_j + \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 (\alpha T_i T_j' + \frac{\alpha^2}{2} T_i' T_j' + \beta \alpha T_j' T_i'') d\eta \right] \varphi_j = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak düzenlenebilir. Elde edilen denklem sistemi matris formunda ifade edilirse,

$$\begin{aligned}
& \left[A^e + \frac{\alpha}{2} (B^e + (B^e)^T) + \frac{\alpha^2}{3} C^e + \beta (D^e + (D^e)^T) + \frac{\alpha \beta}{2} (E^e + (E^e)^T) + \beta^2 F^e \right] \Delta \varphi^e + \\
& \left[\alpha B^e + \frac{\alpha^2}{2} C^e + \alpha \beta (E^e)^T \right] \varphi^e = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

yazılır, burada $(.)^T$ matrisin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere

$$\varphi^e = [\varphi_{m-1}^e, \varphi_m^e, \varphi_{m+1}^e, \varphi_{m+2}^e]^T \tag{4.13}$$

matrisi bir eleman üzerindeki parametreleri göstermektedir. (4.12) de elde edilen matris formundaki denklem sisteminde bulunan elemanlar ise,

$$\begin{aligned}
A^e &= A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta, & D^e &= D_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j'' d\eta, \\
B^e &= B_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j' d\eta, & E^e &= E_{ij}^e = \int_0^1 T_i' T_j'' d\eta, \\
C^e &= C_{ij}^e = \int_0^1 T_i' T_j' d\eta, & F^e &= F_{ij}^e = \int_0^1 T_i'' T_j'' d\eta,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$i, j = m - 1, m, m + 1, m + 2$

dir. Bir eleman üzerindeki A^e matrisi

$$A^e = A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta = \begin{bmatrix} \int_0^1 T_{m-1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_m T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_m T_m d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+2} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

matrisinin her bir elemanını (2.62), (2.63), (2.64), (2.65) bağıntıları ve Çizelge 2.1 yardımıyla ifade edersek, her bir eleman matrisi birleştirilerek elde edilen matrisler cinsinden denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} A + \frac{\alpha^2}{3}C + \beta^2 F + \frac{\alpha}{2}(B + B^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E + E^T) + \beta(D + D^T) \\ \left(\alpha B + \frac{\alpha^2}{2}C + \alpha\beta E^T\right) \end{bmatrix} \Delta\varphi + \quad (4.16)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\varphi = [\varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin bir vektörüdür ve

$$\varphi = \varphi^n, \quad \Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n \quad (4.17)$$

biçiminde tanımlanabilir. (4.16) denklem sistemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} A + \frac{\alpha}{2}(B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3}C + \beta(D + D^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E + E^T) + \beta^2 F \\ \left(\alpha B + \frac{\alpha^2}{2}C + \alpha\beta E^T\right) \end{bmatrix} (\varphi^{n+1} - \varphi^n) + \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} A + \frac{\alpha}{2}(B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3}C + \beta(D + D^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E + E^T) + \beta^2 F \\ A + \frac{\alpha}{2}(B^T - B) - \frac{\alpha^2}{6}C + \beta(D + D^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E - E^T) + \beta^2 F \end{bmatrix} \varphi^n =$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada α 'nın eleman değeri

$$\alpha_m^e = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \varepsilon \hat{U} \right) = \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon U_m) = \frac{\Delta t}{\Delta x} [1 + \varepsilon (a_1 \varphi_{m-1} + a_2 \varphi_m + a_1 \varphi_{m+1})] \quad (4.19)$$

ifadesinden hesaplanabilir.

(4.18) denklem sistemi (2.72) sınır koşulu ile birlikte kullanıldığında

$$a_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad a_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))}, \quad \text{o.ü.}$$

$$\begin{aligned} U(x_0) &= a_1 \varphi_{-1} + a_2 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 = \alpha_1 \\ \varphi_{-1} &= (\alpha_1 - a_2 \varphi_0 - a_1 \varphi_1) / a_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} U(x_N) &= a_1 \varphi_{N-1} + a_2 \varphi_N + a_1 \varphi_{N+1} = \alpha_2 \\ \varphi_{N+1} &= (\alpha_2 - a_1 \varphi_{N-1} - a_2 \varphi_N) / a_1 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve φ_{-1} , φ_{N+1} elimine edilerek $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemi elde edilmiş olur.

4.2. Başlangıç Durumu

(4.18) denklem sisteminde iterasyona başlayabilmek için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\varphi^0 = [\varphi_{-1}^0, \varphi_0^0, \dots, \varphi_N^0, \varphi_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.55) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} T_m(x) \varphi_m^0,$$

(2.72) sınır ve başlangıç koşulları ile Çizelge 2.1 birlikte kullanıldığında

$$b = \frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}, \quad \text{o.ü.}$$

$$\begin{aligned} U'(x_0) &= -b\varphi_{-1} + 0\varphi_0 + b\varphi_1 = 0 \\ U'(x_N) &= -b\varphi_{N-1} + 0\varphi_N + b\varphi_{N+1} = 0 \\ U(x_m) &= a_1 \varphi_{m-1} + a_2 \varphi_m + a_1 \varphi_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & b & & & \\ a_1 & a_2 & a_1 & & & \\ & a_1 & a_2 & a_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & a_2 & a_1 \\ & & & & a_1 & a_2 & a_1 \\ & & & & & -b & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}^0 \\ \varphi_0^0 \\ \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^0 \\ \varphi_N^0 \\ \varphi_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu matris denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek (4.18) denklem sisteminde iterasyona başlanır ve t zamanına kadar iterasyon yapılır. Bulunan φ^n ler (2.55) ifadesinde yerine yazılarak her zaman adımında yaklaşım fonksiyonunun değeri hesaplanır.

(4.18) ve (4.22) denklem sistemlerinin çözümü için MATLAB paket programı kullanılmıştır.

4.3. Test Problemleri

Bu kısımda, önceki kısımda tanımlanan RLW denkleminin sayısal çözüm yönteminin güvenilirliğini görebilmek için üç test problemi çalışılmıştır.

4.3.1. Problem (1) (Tek dalga çözümü)

RLW denkleminin tek dalga çözümü için başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2 [k(x - x_0)] \quad (4.23)$$

kullanılmıştır. RLW denkleminin tek dalga analitik çözümü $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1 + \varepsilon c)}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 [k(x - x_0 - vt)] \quad (4.24)$$

ile verilir (Peregrine, 1966). Bu çözüm, $v = 1 + \varepsilon c$ hızıyla sağa doğru ilerleyen $3c$ genlikli bir dalgayı gösterir. Tek dalga çözümünün simülasyonu bazı sayısal yöntemler ile herhangi bir problem olmaksızın çalışılmıştır. Mevcut bazı çalışmalarla kıyaslama

yapabilmek için hesaplamalar, $-40 \leq x \leq 60$ ve $0 \leq t \leq 20$ aralığı içinde $\varepsilon = \mu = 1$, $x_0 = 0$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{1+c}}$ parametre değerleri ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sınır koşulları ile yapılmıştır.

$t = 0$ anındaki tek dalga çözümü için (2.73)'da verilen korunum değerlerinin, parametrelere bağlı olarak, analitik değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} C_1 &\simeq \frac{6c}{k} \\ C_2 &\simeq \frac{12c^2}{k} + \frac{48\mu kc^2}{5} \\ C_3 &\simeq \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \end{aligned} \quad (4.25)$$

ile hesaplanabilir. Uygun parametre değerleri ile birlikte (4.25) kullanıldığında $3c = 0,09$ genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik ve yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} C_1 &= 2.1070468, \quad C_1 \simeq \frac{6c}{k} = 2.1094075 \\ C_2 &= 0.1273013, \quad C_2 \simeq \frac{12c^2}{k} + \frac{48\mu kc^2}{5} = 0.1273017 \\ C_3 &= 0.3888046, \quad C_3 \simeq \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} = 0.3888060 \end{aligned} \quad (4.26)$$

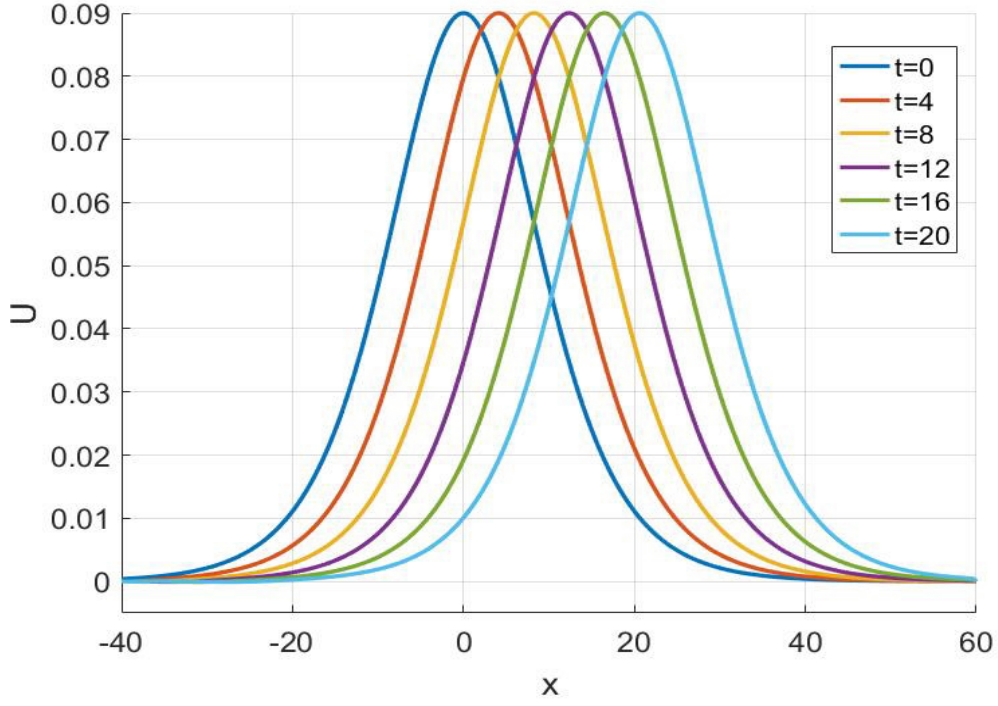
dir. Hesaplamalarda konum artımı $h = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ alınmıştır. Sırasıyla $3c = 0.09$ ve $3c = 0.3$ genlikli tek dalga çözümleri için program $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılmış, elde edilen verilerle L_2 ve L_∞ hata normları ile C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin sayısal değerleri hesaplanıp, Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri

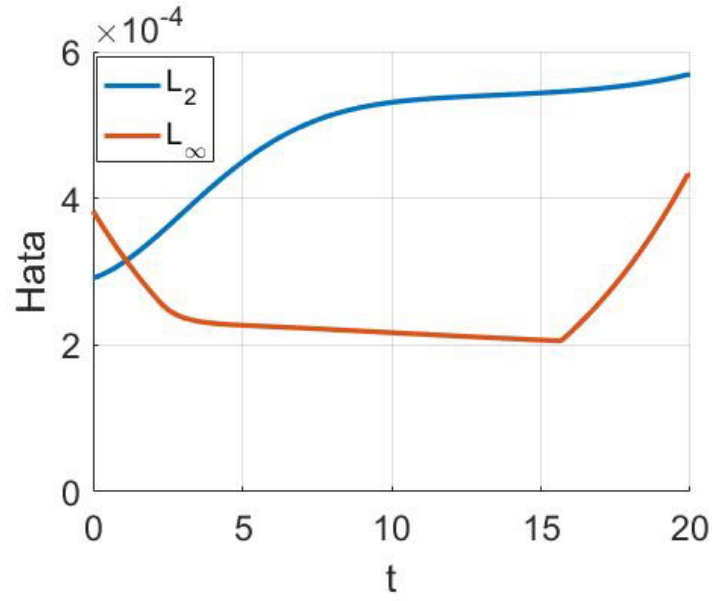
Genlik = 0.09, $-40 \leq x \leq 60$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$					
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	2.107072	0.127301	0.388805
4	0.412933	0.230190	2.107130	0.127304	0.388814
8	0.512433	0.221349	2.106959	0.127308	0.388825
12	0.537472	0.212868	2.106642	0.127311	0.388835
16	0.546049	0.213871	2.106047	0.127315	0.388845
20	0.568452	0.431512	2.104750	0.127318	0.388854

Burada korunum değerlerinin sayısal değerleri ile analitik değerlerinin uyumlu olduğu görülmektedir. $3c = 0.09$ genlik değeri için sayısal çözümün $t=0, 4, 8, 12,$

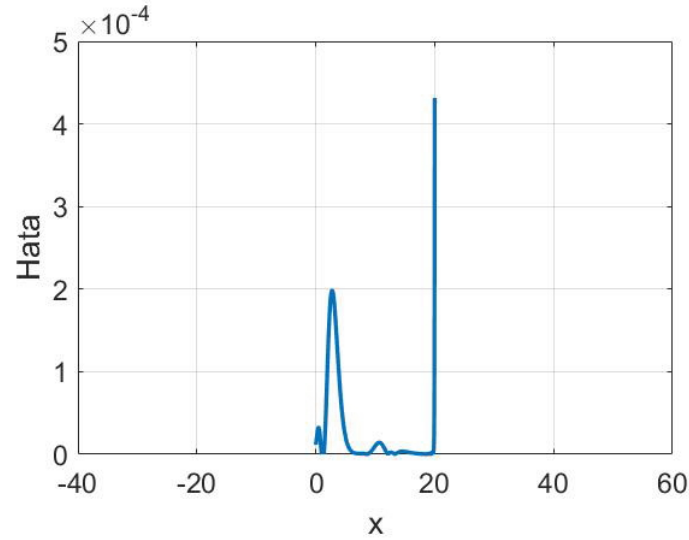
16, 20 zamanlarındaki hareketi Şekil 4.1'de verilmiştir. Şekil 4.2 (a)'da L_2 ve L_∞ hata normlarının zamana göre ve Şekil 4.2 (b)'de mutlak hatanın konuma göre değişimi verilmiştir.



Şekil 4.1. $3c = 0.09$ genlik değeri için tek dalga çözümü

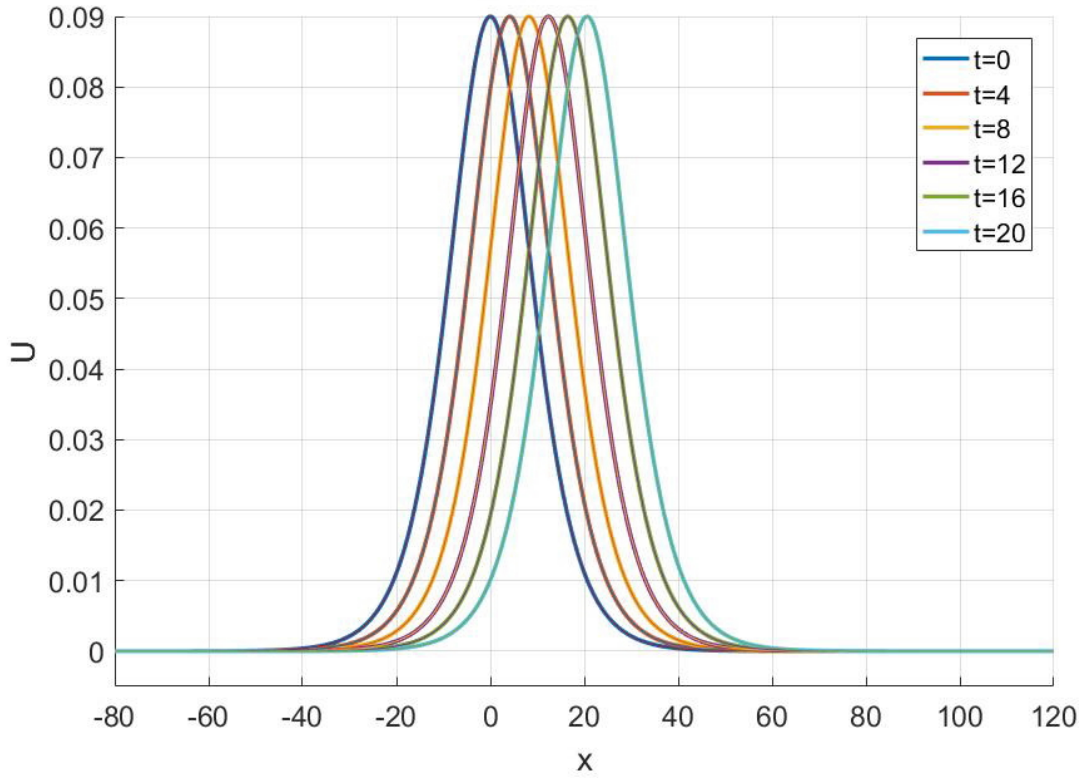


Şekil 4.2. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi

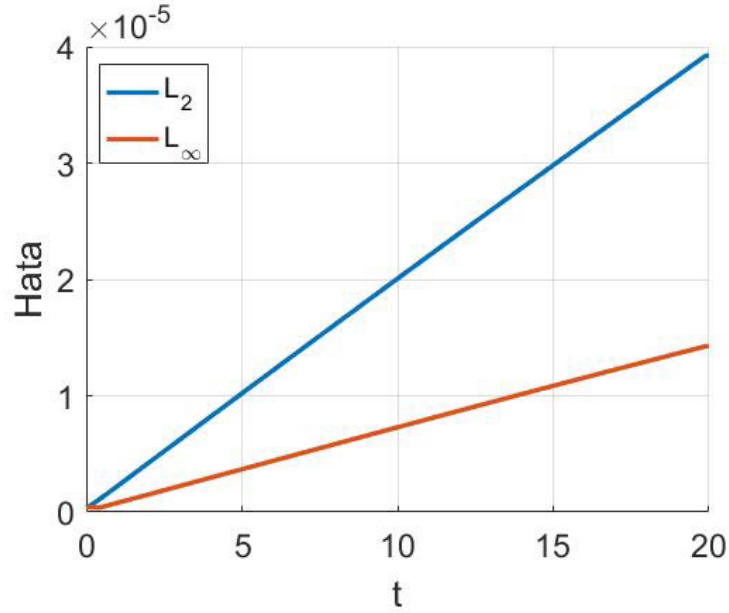


Şekil 4.2. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi

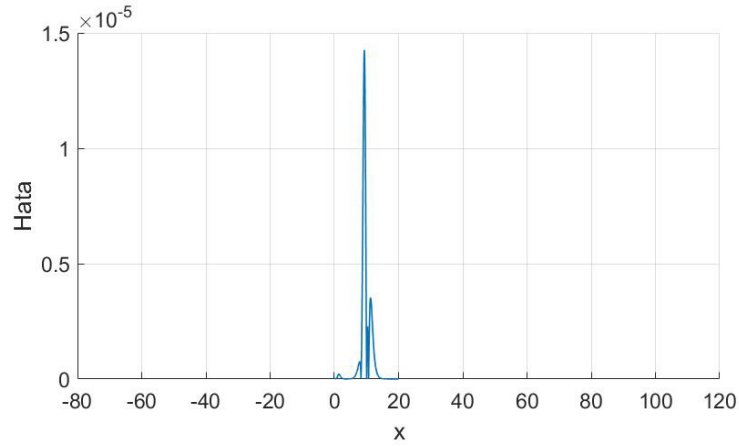
Şekil 4.2 de mutlak hatanın sağa kayık olduğu görülmektedir. Fakat beklenen durum hatanın ortalarda olmasıdır. Bu nedenle hatanın sınır şartlarından kaynaklanıp kaynaklanmadığını görmek için konum aralığı genişlerilerek $-80 \leq x \leq 120$ alınmış ve tekrar hesaplama yapılmıştır. Şekil 4.3 de sayısal çözümün konuma göre durumu ve Şekil 4.4 (a)'da hata normlarının zamana ve Şekil 4.4 (a)'de mutlak hatanın konuma göre değişimleri verilmiştir.



Şekil 4.3. $-80 \leq x \leq 120$ konum aralığında tek dalga çözümü



Şekil 4.4 (a) $-80 \leq x \leq 120$ için hata normlarının zamana göre değişimi



Şekil 4.4. (b) Mutlak hatanın konuma göre değişimi

Şekil 4.4'de mutlak hatanın beklenildiği gibi ortalarda olduğu görülmektedir. Bu da hatanın sınır koşullarından kaynaklandığını gösterir. Ayrıca $t = 20$ zamanındaki L_∞ hata normunun $-40 \leq x \leq 60$ aralığına göre $-80 \leq x \leq 120$ aralığında daha küçük değere sahip olduğu görülmektedir. Bunun sebebi ise $x \rightarrow \pm\infty$ için $u \rightarrow 0$ ve $u_x \rightarrow 0$ olması ve bu şekilde sınır şartları ile daha uyumlu olmasını sağlamasıdır. Ayrıca $3c = 0.09$ genlik değeri, $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığında $\Delta t = 0.1$ zaman artımı için farklı h konum adımları ile korunum değerleri C_1, C_2, C_3 ve hata normları L_2 ve L_∞ değerlerinin değişimi Çizelge 4.2 de incelenmiştir.

Çizelge 4.2. $t = 20$ anındaki hata ve korunum değerleri

h	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0.05	0.562789	0.431512	2.104210	0.127261	0.388678
0.1	0.564429	0.431512	2.104571	0.127299	0.388795
0.125	0.568452	0.431512	2.104750	0.127318	0.388854
0.2	0.592472	0.431512	2.105284	0.127375	0.389029
0.25	0.617397	0.431512	2.105638	0.127414	0.389147

Buradan h konum adımının değerinin artması ile L_2 hata değerinin çok az arttığı ve korunum değerlerinin biraz bozulduğu gözlemlenmiştir.

Genlik değeri $3c = 0.3$ alınarak uygun parametre değerleri kullanılarak tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik ve yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= 3.9799266, & C_1 &\simeq \frac{6c}{k} = 3.9799497 \\
C_2 &= 0.8104625, & C_2 &\simeq \frac{12c^2}{k} + \frac{48\mu kc^2}{5} = 0.8104625 \\
C_3 &= 2.5790074, & C_3 &\simeq \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} = 2.5790074
\end{aligned} \tag{4.27}$$

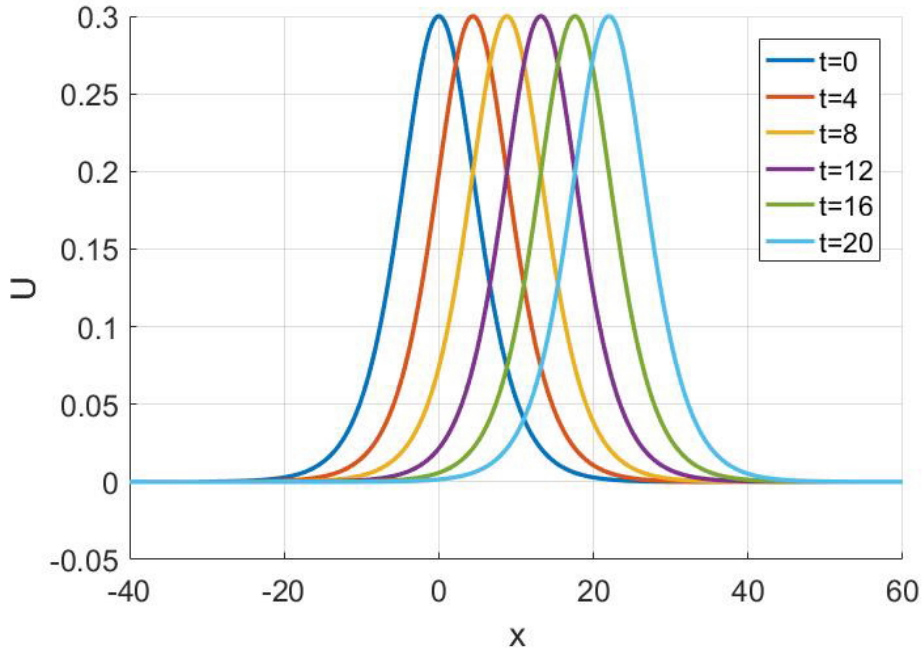
olarak bulunabilir.

Tek dalga çözümü için genlik değeri $3c = 0.3$ alınarak $t = 0, 4, 8, 12, 16, 20$ zamanlarında $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığında $h = 0.125$ konum adımı $\Delta t = 0.1$ zaman adımı için korunum değerleri C_1, C_2, C_3 ve hata normları L_2 ve L_∞ değerlerinin değişimi Çizelge 4.3'de verilmiştir.

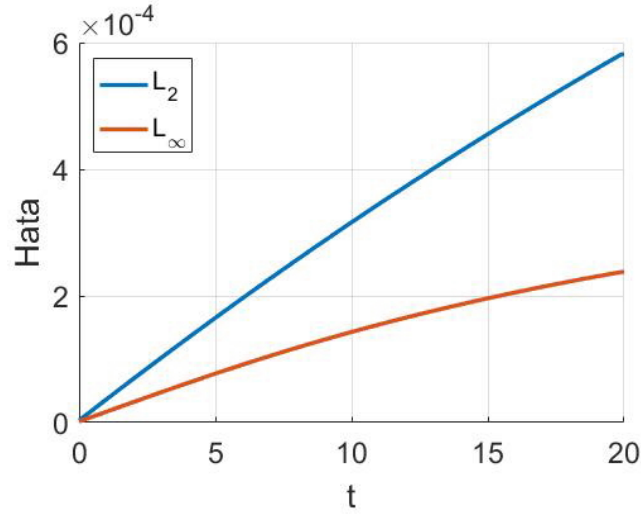
Çizelge 4.3. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri

Genlik = 0.3, $-40 \leq x \leq 60$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$					
t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	3.979927	0.810462	2.579007
4	0.130667	0.061138	3.980364	0.810611	2.579497
8	0.254326	0.116998	3.980797	0.810759	2.579987
12	0.370514	0.164646	3.981229	0.810908	2.580477
16	0.479368	0.204469	3.981655	0.811056	2.580966
20	0.581531	0.237706	3.982055	0.811204	2.581456

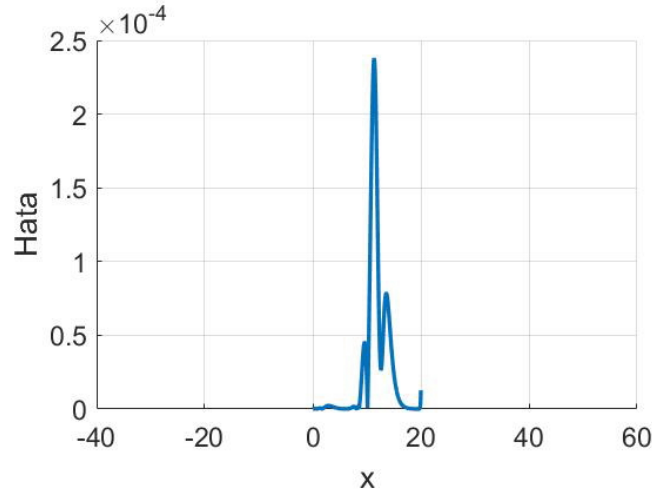
Korunum sabitlerinin bulunan sayısal değerlerinin analitik değerlerle uyumlu olduğu ve hata normlarının $3c = 0,09$ genlik değeri için bulunan sonuçlara göre daha iyi çıktığı görülmüştür. Genlik değeri 0.3 değeri için tek dalganın sayısal çözümü Şekil 4.5 verilmiştir. Şekil 4.6 (a)'da L_2 ve L_∞ değerlerinin zamana göre değişimi ve Şekil 4.6 (b)'da mutlak hatanın konuma göre değişimi görülmektedir.



Şekil 4.5. $3c = 0.3$ genlik değeri için tek dalga sayısal çözümü



Şekil 4.6. (a) Hata normlarının zamana göre değişimi



Şekil 4.6. (b) Mutlak hata normunun konuma göre değişimi

Buradan hatanın konum aralığı içinde orta konumda oluştuğu görülmektedir ve hatanın sınır şartlarından kaynaklanmadığı söylenebilir.

4.3.2. Problem (2) (İki tek dalganın çarpışması)

Bu test probleminde iki tek dalganın çarpışması durumu için sayısal çözüm üzerinde çalışılacaktır. Başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = 3c_i \operatorname{sech}^2 [k_i (x - \tilde{x}_i)] \quad (4.28)$$

alınacak olup, sınır koşulları da $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ dır. Burada $k_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_i}{\mu (1 + \varepsilon c_i)}}$, $i = 1, 2$ olarak alınmıştır. Parametre değerleri $\varepsilon = \mu = 1$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\tilde{x}_1 = 40$, $\tilde{x}_2 = 90$

şeklinde alındığında 0.9 ve 0.3 genlik değerlerine sahip aynı yönde hareket eden iki tek dalga elde edilmiştir. Program $h = \Delta t = 0.1$ için konum aralığı $0 \leq x \leq 500$ ve zaman aralığı $0 \leq t \leq 300$ alınarak çalıştırılmıştır.

Buna göre korunum sabitleri

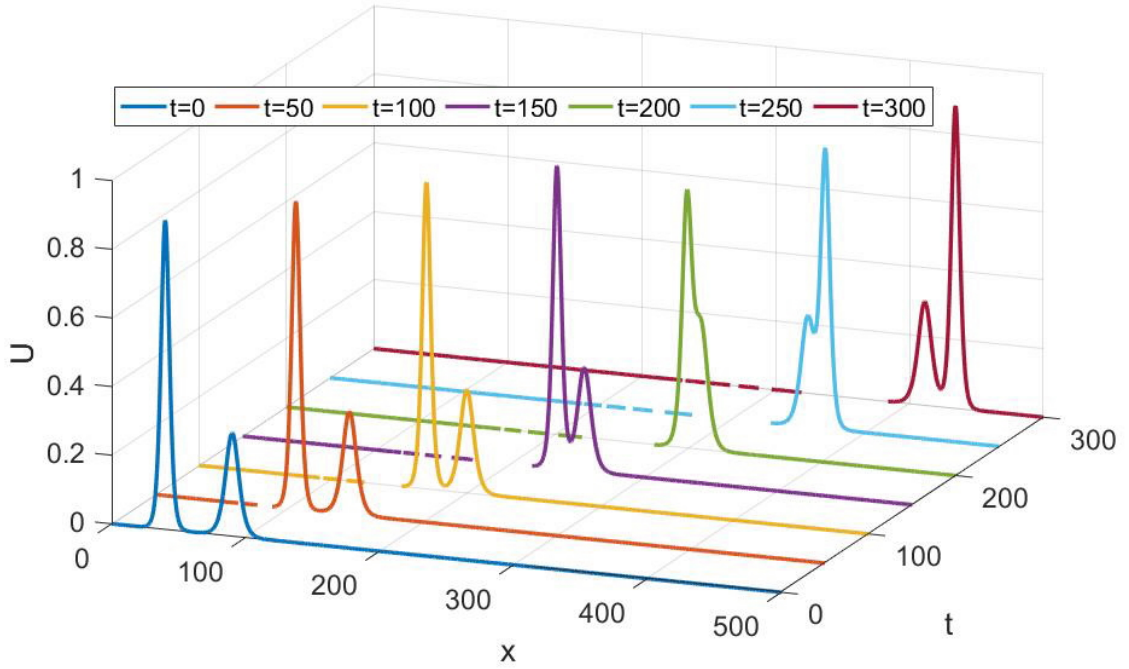
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2} \simeq 11.47394734, \\ C_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5} \simeq 5.51438714, \\ C_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1} \left(1 + \frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2} \left(1 + \frac{4c_2}{5}\right) \simeq 19.30561007 \end{aligned} \quad (4.29)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Şekil 4.7'de iki dalganın aynı yönlü harekete başladıktan sonra $t = 200$ zamanında, genliği büyük olanın küçük genlikli dalgaya yetişerek şekli bozulmadan yoluna devam ettikleri görülmektedir. Çizelge 4.4'de $3c_1 = 0.9$, $3c_2 = 0.3$, $h = \Delta t = 0.1$ parametre değerleri için ve $0 \leq x \leq 500$ konum aralığında farklı zamanlardaki korunum değerleri görülmektedir.

Çizelge 4.4. İki dalganın çarpışması için korunum değerleri

t	C_1	C_2	C_3
0	11.473947	5.514397	19.305649
50	11.319621	5.359146	18.702120
100	11.175016	5.216624	18.150579
150	11.040981	5.086729	17.650065
200	10.936734	4.986634	17.266321
250	10.892723	4.950650	17.133121
300	10.802329	4.866211	16.813052

Buradan çarpışma probleminde, önerilen yöntem ile sayısal çözümünden elde edilen korunum değerlerinin zamanla bir miktar bozulduğu görülmektedir.

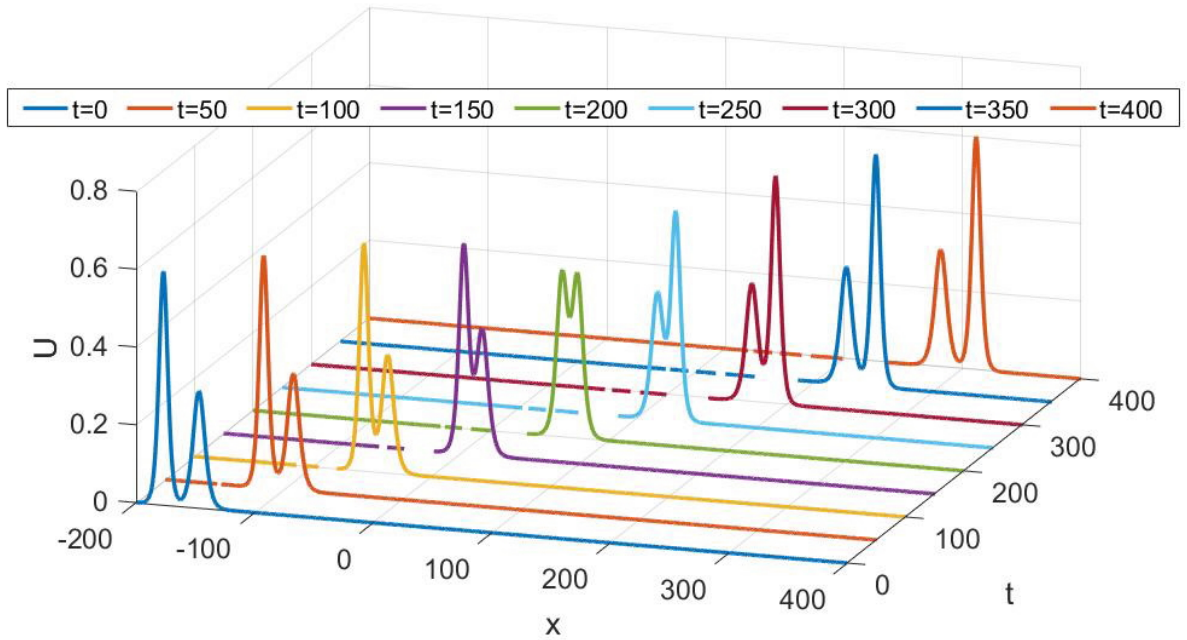


Şekil 4.7. $3c_1 = 0.9, 3c_2 = 0.3$ genlikli iki dalganın çarpışması

Diğer bir çarpışma durumunda, parametre değerleri $c_1 = 0.2, c_2 = 0.1, x_1 = -177, x_2 = -147$, konum aralığı $-200 \leq x \leq 400$ zaman aralığı $0 \leq t \leq 400$, konum adımı $h = 0.12$, zaman adımı $\Delta t = 0.1$ olarak alınmıştır. Şekil 4.8'de hızlı hareket eden dalganın yavaş hareket eden küçük dalgayı yakalayarak iki dalganın girişiminin gerçekleştiği ve genliklerinde bir değişiklik yaşanmadan yollarına devam ettikleri görülmektedir. Çizelge 4.5'de $3c_1 = 0.6, 3c_2 = 0.3, h = 0.12, \Delta t = 0.1$ parametre değerleri ve $-200 \leq x \leq 400$ konum aralığında farklı zamanlardaki korunum sabirlerinin değerleri verilmiş olup, $t = 0$ ve $t = 400$ zamanları arasında ciddi bir farklılık oluşmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.5. İki dalganın çarpışması için korunum sabitlerinin değişimi

t	C_1	C_2	C_3
0	9.858245	3.244789	10.778329
40	9.861173	3.245718	10.781363
80	9.863986	3.246672	10.784461
120	9.866826	3.247725	10.787856
160	9.869922	3.249066	10.782212
200	9.873584	3.250865	10.798311
240	9.977215	3.252729	10.804944
280	9.880247	3.254160	10.810074
320	9.883036	3.255251	10.813842
360	9.885835	3.256203	10.817023
400	9.888674	3.257111	10.820011

Şekil 4.8. $3c_1 = 0.6$, $3c_2 = 0.3$ genlikli iki dalganın çarpışması

4.3.3. Problem (3) (Dalga oluşumu)

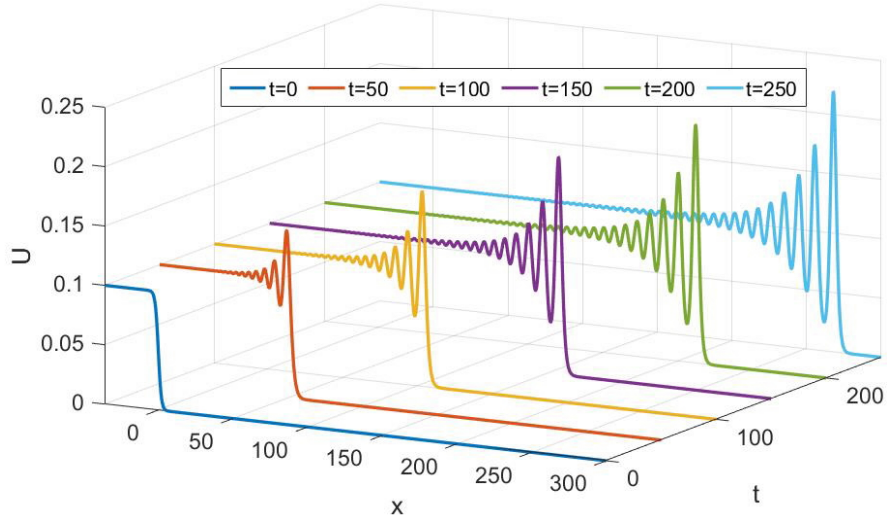
Bu test probleminde yatay bir kanaldaki durgun su alanına daha derin bir su akışı sonucu oluşan dalga oluşumu olayı (Peregrine, 1966) ele alınmıştır. Başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x - x_0}{d} \right) \right] \quad (4.30)$$

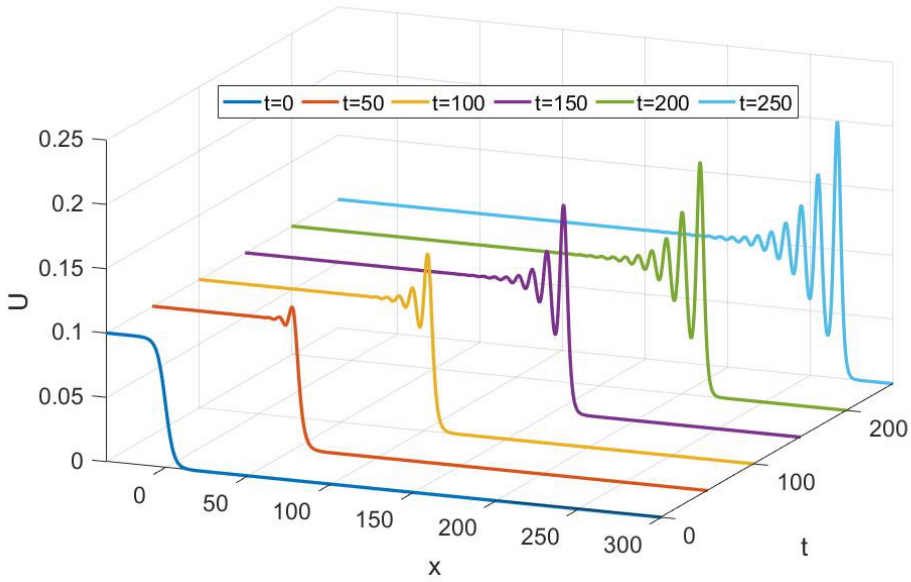
ve sınır koşulları olarak

$$\alpha_1 = U_0, \quad \alpha_2 = 0 \quad (4.31)$$

değerleri alınmıştır. Durgun su ile derin su arasındaki geçiş, yumuşak bir eğim ile oluşacaktır. $u(x, 0)$, $t = 0$ anındaki suyun denge yüzeyinin üzerindeki yüksekliği belirtir. Su seviyesindeki U_0 değeri kadar değişim $x = x_0$ da dengelenir. d ise durgun su ile derin su arasındaki değişimin dikliğini belirtir ve d ne kadar küçük ise eğim o kadar diktir. Dalga oluşumu ile ilgili önceden yapılmış çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek için parametre değerleri $\varepsilon = 1.5$, $\mu = 1/6$, $U_0 = 0.1$, $x_0 = 0$ ve $d = 2$, $d = 5$ olarak alınmıştır. Fiziksel sınır koşulları $x \rightarrow \infty$ için $u \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow -\infty$ için $u \rightarrow U_0$ olmakla birlikte, sayısal çözüm için sınırlar $a = -36$, $b = 300$ olarak alınmıştır. Dalga oluşumlarını modellemek için konum adımı $h = 0.24$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.1$, $d = 2$ ve $d = 5$ değerleri alınarak program $0 \leq t \leq 250$ zaman aralığında çalıştırılarak sırasıyla Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da gösterilmiştir.



Şekil 4.9. $d = 2$ için ardışık dalga oluşumu



Şekil 4.10. $d = 5$ için ardışık dalga oluşumu

Grafiklerden küçük d değeri için eğimin daha dik olduğu ve daha çok ardışık dalga oluşumu olduğu görülmüştür. Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7’de sırasıyla $d = 2$ ve $d = 5$ eğim değerleri için farklı zamanlar için korunum değerleri verilmiştir. Çizelge 4.8’de ise

$t = 250$ zamanında oluşan ardışık ilk dört dalganın tepe noktalarının konumu ve genlik değerleri görülmektedir.

Çizelge 4.6. $d = 2$ için ardışık dalga oluşumu korunum değerleri

$h = 0.24, \Delta t = 0.1, -36 \leq x \leq 300$			
t	C_1	C_2	C_3
0	3.612000	0.351478	1.088220
50	9.003660	0.904083	2.801426
100	14.417869	1.461623	4.529996
150	19.861990	2.025953	6.279976
200	25.341728	2.598785	8.056975
250	30.862565	3.182127	9.867581

Çizelge 4.7. $d = 5$ için ardışık dalga oluşumu korunum değerleri

$h = 0.24, \Delta t = 0.1, -36 \leq x \leq 300$			
t	C_1	C_2	C_3
0	3.612000	0.336311	1.040970
50	8.991939	0.886865	2.748178
100	14.379779	1.438873	4.459683
150	19.785814	1.994757	6.183117
200	25.219573	2.556907	7.926240
250	30.687662	3.127215	9.695266

Çizelge 4.8. $t = 250$ anında ardışık dalgaların konum ve genlikleri

	$d = 2$		$d = 5$	
	Konum	Genlik	Konum	Genlik
1.dalga	267.8	0.2193	266.2	0.1995
2.dalga	255.4	0.1724	254.4	0.1569
3.dalga	244.6	0.1454	244.3	0.1315
4.dalga	235.2	0.1293	235	0.1167

Ardışık dalga oluşumu simülasyonunda fiziksel sınır koşullarında korunum sabitleri C_1, C_2, C_3 değerleri sabit kalmazlar. Bu yüzden için korunum sabitlerinin zamana göre değişiminin analitik değerleri

$$M_1 = \frac{d}{dt} C_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} C_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu(U_x)^2) dx = U_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3} U_0^3 = 0.0110$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} C_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^3 + 3U^2) dx = 3U_0^2 + 3U_0^3 + \frac{3\varepsilon}{4} U_0^4 = 0.0331125$$

şeklinde hesaplanmıştır. Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'da $t = 50, 100, 150, 200, 250$ zamanlarında M_1, M_2, M_3 değerleri $d = 2$ ve $d = 5$ için Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7 yardımıyla sayısal olarak hesaplanarak verilmiştir.

Çizelge 4.9. $d = 2, U_0 = 0.1, \varepsilon = 1.5, \mu = 1/6$ için M_1, M_2, M_3 değerleri

t	M_1	M_2	M_3
50	0.1078	0.0110	0.0342
100	0.1080	0.0110	0.0344
150	0.1083	0.111	0.0346
200	0.1086	0.112	0.0348
250	0.1090	0.113	0.0351

Çizelge 4.10. $d = 5, U_0 = 0.1, \varepsilon = 1.5, \mu = 1/6$ için M_1, M_2, M_3 değerleri

t	M_1	M_2	M_3
50	0.1075	0.0110	0.0341
100	0.1076	0.0110	0.0341
150	0.1078	0.110	0.0342
200	0.1080	0.111	0.0344
250	0.1083	0.111	0.0346

5. BURGERS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan Burgers denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, L_2 , L_∞ ve $\|e_1\|$ hata normları ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

5.1. Burgers Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu bölümde Burgers denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü yapılacaktır. Konum ve zaman aralıklarına göre integral altında (2.74) denklemi için en küçük kareler metodu

$$\delta \int_0^t \int_a^b (U_t + UU_x - \lambda U_{xx})^2 dx dt = 0 \quad (5.1)$$

denklemi ile verilir. dx , dt , U_x , U_t ve U_{xx} için

$$x = x_m + \eta h, \quad t = t^n + \tau \Delta t \quad (5.2)$$

dönüşümleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x d\eta \\ dt &= \Delta t d\tau \\ U_t &= \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x} \\ U_{xx} &= (U_x)_x = \frac{\partial (U_\eta \frac{1}{\Delta x})}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} = \frac{U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}}{\partial \tau} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilir. Bu ifadeler ilk denkleminizde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^t \int_a^b (U_t + UU_x - \lambda U_{xx})^2 dx dt = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau \frac{1}{\Delta t} + UU_\eta \frac{1}{\Delta x} - \lambda U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2})^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (\frac{1}{\Delta t})^2 (U_\tau + \tilde{U} U_\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} - \lambda U_{\eta\eta} \frac{\Delta t}{\Delta x^2})^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{U} U_\eta - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta}) \frac{2\Delta x}{\Delta t} d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir. Burada \tilde{U} , $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde sabit olarak alınmış olup, $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{U}$ ve $\beta = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ dir. Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 2 (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonları

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) \tag{5.6}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. B-spline fonksiyonlarını kullanarak $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde yerel koordinatlarda $u(\eta, \tau)$ fonksiyonunun sayısal çözümü,

$$U(\eta, \tau) = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \tag{5.7}$$

biçiminde verilebilir. Burada $\varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}$ ve φ_{m+2} zaman adımlarının başlangıçlarının düğüm parametreleri ve $\Delta \varphi_{m-1}, \Delta \varphi_m, \Delta \varphi_{m+1}$ ve $\Delta \varphi_{m+2}$ bir Δt zaman adımında düğüm parametrelerindeki artışları göstermektedir. (5.7) kullanılarak U_τ, U_η

ve $U_{\eta\tau}$ hesaplanırsa

$$U_{\tau} = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau} \quad (5.8)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j$$

$$U_{\eta} = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (5.9)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)$$

$$U_{\eta\tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U_{\eta}}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} \quad (5.10)$$

$$= \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau}$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) \Delta \varphi_j$$

elde edilir. (5.8),(5.9) ve (5.10) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta (U_{\tau} + \alpha U_{\eta} - \beta U_{\eta\tau}) = \\ &= \delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j'(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) - \right. \\ &\quad \left. \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right] = \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j'(\eta) \tau - \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) \tau = \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} [T_j(\eta) + \alpha \tau T_j'(\eta) - \beta \tau T_j''(\eta)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

haline dönüştür. Burada ağırlık fonksiyonu kısaca

$$w_i = T_i(\eta) + \alpha\tau T_i'(\eta) - \beta\tau T_i''(\eta), \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (5.12)$$

olarak yazılabilir. İndis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonlarının indisi i olarak alınmıştır. (5.8), (5.9), (5.10) ve (5.12) değerleri (5.5) denkleminde yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j \Delta\varphi_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j'(\varphi_j + \tau\Delta\varphi_j) - \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\varphi_j + \tau\Delta\varphi_j) \right] (T_i + \alpha\tau T_i' - \beta\tau T_i'') d\eta d\tau =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [T_j \Delta\varphi_j + \alpha T_j'(\varphi_j + \tau\Delta\varphi_j) - \beta T_j''(\varphi_j + \tau\Delta\varphi_j)] (T_i + \alpha\tau T_i' - \beta\tau T_i'') d\eta d\tau =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 \{ [T_i T_j + \alpha\tau (T_i T_j' + T_i' T_j) + \alpha^2 \tau^2 T_i' T_j' - \beta\tau (T_i T_j'' + T_i'' T_j) - \alpha\beta\tau^2 (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \beta^2 \tau^2 T_i'' T_j''] \Delta\varphi_j + \alpha T_i T_j' + \alpha^2 \tau T_i' T_j' - \beta T_i T_j'' - \alpha\beta\tau (T_i' T_j'' + T_i'' T_j') + \beta^2 \tau T_i'' T_j'' \varphi_j \} d\eta d\tau =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left\{ [T_i T_j + \frac{\alpha}{2} (T_i T'_j + T'_i T_j) + \right. \\
& \frac{\alpha^2}{3} T'_i T'_j - \frac{\beta}{2} (T_i T''_j + T''_i T_j) - \\
& \left. \frac{\alpha\beta}{3} (T'_i T''_j + T''_i T'_j) + \frac{\beta^2}{3} T''_i T''_j \right] \Delta\varphi_j + \\
& \alpha T_i T'_j + \frac{\alpha^2}{2} T'_i T'_j - \beta T_i T''_j - \\
& \left. \frac{\alpha\beta}{2} (T'_i T''_j + T''_i T'_j) + \frac{\beta^2}{2} T''_i T''_j \varphi_j \right\} d\eta = \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 [T_i T_j + \frac{\alpha}{2} (T_i T'_j + T'_i T_j) + \right. \\
& \frac{\alpha^2}{3} T'_i T'_j - \frac{\beta}{2} (T_i T''_j + T''_i T_j) - \\
& \left. \frac{\alpha\beta}{3} (T'_i T''_j + T''_i T'_j) + \frac{\beta^2}{3} T''_i T''_j \right] d\eta \Big\} \Delta\varphi + \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left[\alpha T_i T'_j + \frac{\alpha^2}{2} T'_i T'_j - \beta T_i T''_j - \right. \\
& \left. \frac{\alpha\beta}{2} (T'_i T''_j + T''_i T'_j) + \frac{\beta^2}{2} T''_i T''_j \right] d\eta \varphi_j = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

denklem sistemi elde edilir. (5.13) denklem sistemi bir matris formunda

$$\begin{aligned}
& \left[A^e + \frac{\alpha}{2} (B^e + (B^e)^T) + \frac{\alpha^2}{3} C^e - \frac{\beta}{2} (D^e + (D^e)^T) - \right. \\
& \left. \frac{\alpha\beta}{3} (E^e + (E^e)^T) + \frac{\beta^2}{3} F^e \right] \Delta\varphi^e + \\
& \left[\alpha B^e + \frac{\alpha^2}{2} C^e - \beta D^e - \frac{\alpha\beta}{2} (E^e + (E^e)^T) + \frac{\beta^2}{2} F^e \right] \varphi^e = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

olarak yazabilir. Burada $(.)^T$ matrisin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\varphi^e = [\varphi_{m-1}^e, \varphi_m^e, \varphi_{m+1}^e, \varphi_{m+2}^e]^T \tag{5.15}$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned}
A^e &= A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta, & B^e &= B_{ij}^e = \int_0^1 T_i T'_j d\eta, \\
C^e &= C_{ij}^e = \int_0^1 T'_i T'_j d\eta, & D^e &= D_{ij}^e = \int_0^1 T_i T''_j d\eta, \\
E^e &= E_{ij}^e = \int_0^1 T'_i T''_j d\eta, & F^e &= F_{ij}^e = \int_0^1 T''_i T''_j d\eta,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$i, j = m-1, m, m+1, m+2$

dir. A^e eleman matrisinin elemanları

$$A^e = A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta = \begin{bmatrix} \int_0^1 T_{m-1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_m T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_m T_m d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+2} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \quad (5.17a)$$

şeklinde kübik trigonometrik B-spline'lar yardımıyla hesaplanabilir. Diğer eleman matrisleride benzer şekilde hesaplanmıştır.

(5.14) denklem sistemi, herbir eleman matrislerinin birleştirilmesi ile elde edilen matrisler cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3} C - \frac{\beta}{2} (D + D^T) - \right. \\ & \left. \frac{\alpha\beta}{3} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{3} F \right] \Delta\varphi + \\ & \left[\alpha B + \frac{\alpha^2}{2} C - \beta D - \frac{\alpha\beta}{2} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{2} F \right] \varphi = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\varphi = [\varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin birer vektörüdür ve

$$\varphi = \varphi^n, \quad \Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n \quad (5.19)$$

biçiminde tanımlanabilir. (5.18) denklem sistemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3} C - \frac{\beta}{2} (D + D^T) - \frac{\alpha\beta}{3} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{3} F \right] (\varphi^{n+1} - \varphi^n) + \\ & \left[\alpha B + \frac{\alpha^2}{2} C - \beta D - \frac{\alpha\beta}{2} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{2} F \right] \varphi^n = 0 \\ & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3} C - \frac{\beta}{2} (D + D^T) - \frac{\alpha\beta}{3} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{3} F \right] \varphi^{n+1} = \\ & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B^T - B) - \frac{\alpha^2}{6} C + \frac{\beta}{2} (D - D^T) + \frac{\alpha\beta}{6} (E + E^T) - \frac{\beta^2}{6} F \right] \varphi^n \end{aligned} \quad (5.20)$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada α 'nın eleman değeri

$$\begin{aligned}\alpha_m^e &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \check{U} \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} [(a_1 \varphi_{m-1} + a_2 \varphi_m + a_1 \varphi_{m+1})]\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$a_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad a_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))}, \quad \text{o.ü.}$$

dir. (5.20) denklem sistemi, (2.75) sınır koşulları ve kübik trigonometrik B-spline değerleri birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned}U(x_0) &= a_1 \varphi_{-1} + a_2 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 = \alpha_1 \\ \varphi_{-1} &= (\alpha_1 - a_2 \varphi_0 - a_1 \varphi_1)/a_1\end{aligned}\tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}U(x_N) &= a_1 \varphi_{N-1} + a_2 \varphi_N + a_1 \varphi_{N+1} = \alpha_2 \\ \varphi_{N+1} &= (\alpha_2 - a_1 \varphi_{N-1} - a_2 \varphi_N)/a_1\end{aligned}$$

olacak şekilde φ_{-1} ve φ_{N+1} elimine edilerek, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemine dönüştürülür.

5.2. Başlangıç Durumu

(5.20) denklem sisteminde iterasyona başlayabilmek için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\varphi^0 = [\varphi_{-1}^0, \varphi_0^0, \dots, \varphi_N^0, \varphi_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.55) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} T_m(x) \varphi_m^0\tag{5.22}$$

(2.75) sınır ve başlangıç koşulları ile Çizelge 2.1 birlikte kullanıldığında

$$b = \frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}, \quad \text{o.ü.}$$

$$\begin{aligned}
 U'(x_0) &= -b\varphi_{-1} + 0\varphi_0 + b\varphi_1 = 0 \\
 U'(x_N) &= -b\varphi_{N-1} + 0\varphi_N + b\varphi_{N+1} = 0 \\
 U(x_m) &= a_1\varphi_{m-1} + a_2\varphi_m + a_1\varphi_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.22) ve (5.23) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & b & & & & & \\ a_1 & a_2 & a_1 & & & & & \\ & & a_1 & a_2 & a_1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a_1 & a_2 & a_1 & \\ & & & & & a_1 & a_2 & a_1 \\ & & & & & & -b & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}^0 \\ \varphi_0^0 \\ \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^0 \\ \varphi_N^0 \\ \varphi_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu matris denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek (5.20) denklem sisteminde iterasyona başlanır ve t zamanına kadar iterasyon yapılır. Bulunan φ^n ler (2.55) ifadesinde yerine yazılarak her zaman adımında yaklaşım fonksiyonlarının değerleri hesaplanır.

(5.20) ve (5.24) denklem sistemlerinin çözümü için MATLAB paket programı kullanılmıştır.

5.3. Test Problemleri

Bu kısımda, lineer olmayan Burgers denkleminin sayısal çözümü, trigonometrik B-spline en küçük kareler metodunun doğruluğunu test etmek için iki problem ile çalışılmıştır.

5.3.1. Problem (1)

(2.74) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \tag{5.25}$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{5.26}$$

alınacaktır. Problem (1) için bir Fourier serisi (analitik) çözümü Cole (1951) tarafından

$$u(x, t) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} j a_j e^{-j^2 \pi^2 \lambda t} \sin(j \pi x)}{a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j^2 \pi^2 \lambda t} \cos(j \pi x)} \quad (5.27)$$

olarak verilmiştir. Burada Fourier katsayıları

$$a_0 = \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x) - 1}{2\pi\lambda}} dx$$

$$a_j = 2 \int_0^1 e^{\frac{\cos(\pi x) - 1}{2\pi\lambda}} \cos(j\pi x) dx, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.28)$$

biçimindedir. Problem (1) için $0 \leq x \leq 1$ konum aralığında $\lambda = 1$ ve $t = 0, t = 0.1$ zaman aralığında $\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.001, \Delta t = 0.0001$ ve $\Delta t = 0.00001$ şeklinde dört farklı zaman adımı için ve $h_1 = 0.1, h_2 = 0.05, h_3 = 0.01, h_4 = 0.005, h_5 = 0.001$ beş farklı konum artımı için $t = 0.1$ zamanındaki $\|e\|_1$ hata normları hesaplanmıştır. Bulunan sayısal değerlerle analitik değerlerin karşılaştırılması Çizelge 5.1, Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. $\Delta t = 0.01$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler

x	Sayısal					Analitik
	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$	$h_4 = 0.005$	$h_5 = 0.001$	
0.1	0.11145	0.11038	0.10946	0.10933	0.10923	0.10954
0.2	0.21296	0.21125	0.20967	0.20946	0.20928	0.20979
0.3	0.29586	0.29380	0.29184	0.29156	0.29134	0.29190
0.4	0.35237	0.35021	0.34807	0.34776	0.34750	0.34792
0.5	0.37639	0.37424	0.37203	0.37171	0.37144	0.37158
0.6	0.36410	0.36200	0.35982	0.35949	0.35923	0.35904
0.7	0.31491	0.31293	0.31087	0.31057	0.31032	0.30990
0.8	0.23212	0.23044	0.22873	0.22848	0.22828	0.22781
0.9	0.12336	0.12228	0.12125	0.12111	0.12099	0.12068
$\ e\ _1$	0.014329	0.008329	0.001965	0.001786	0.001780	

Çizelge 5.2. $\Delta t = 0.001$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler

	Sayısal					Analitik
x	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$	$h_4 = 0.005$	$h_5 = 0.001$	
0.1	0.11148	0.11050	0.10970	0.10960	0.10952	0.10954
0.2	0.21298	0.21139	0.21007	0.20990	0.20977	0.20979
0.3	0.29573	0.29384	0.29224	0.29204	0.29188	0.29190
0.4	0.35201	0.35003	0.34832	0.34810	0.34792	0.34792
0.5	0.37572	0.37376	0.37201	0.37179	0.37160	0.37158
0.6	0.36316	0.36125	0.35951	0.35928	0.35910	0.35904
0.7	0.31384	0.31203	0.31037	0.31015	0.30998	0.30990
0.8	0.23119	0.22963	0.22822	0.22804	0.22789	0.22781
0.9	0.12280	0.12183	0.12094	0.12082	0.12073	0.12068
$\ e\ _1$	0.012563	0.007067	0.001512	0.000746	0.000171	

Çizelge 5.3. $\Delta t = 0.0001$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler

	Sayısal					Analitik
x	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$	$h_4 = 0.005$	$h_5 = 0.001$	
0.1	0.11149	0.11052	0.10973	0.10963	0.10955	0.10954
0.2	0.21300	0.21142	0.21011	0.20994	0.20981	0.20979
0.3	0.29575	0.29387	0.29228	0.29208	0.29193	0.29190
0.4	0.35202	0.35004	0.34834	0.34813	0.34796	0.34792
0.5	0.37571	0.37374	0.37201	0.37179	0.37161	0.37158
0.6	0.36127	0.36121	0.35949	0.35926	0.35909	0.35904
0.7	0.31379	0.31197	0.31033	0.31012	0.30995	0.30990
0.8	0.23114	0.22958	0.22818	0.22800	0.22785	0.22781
0.9	0.12277	0.12179	0.12091	0.12080	0.12071	0.12068
$\ e\ _1$	0.012512	0.007021	0.001502	0.000755	0.000149	

Çizelge 5.4. $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum adımları için sayısal çözümler

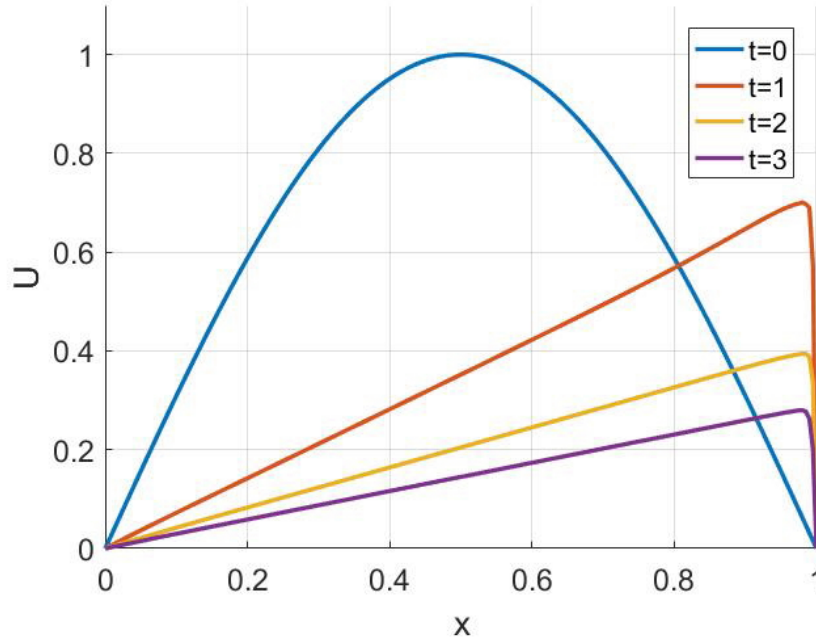
x	Sayısal					Analitik
	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$	$h_4 = 0.005$	$h_5 = 0.001$	
0.1	0.11150	0.11052	0.10973	0.10963	0.10955	0.10954
0.2	0.21300	0.21142	0.21011	0.20995	0.20982	0.20979
0.3	0.29576	0.29387	0.29228	0.29209	0.29193	0.29190
0.4	0.35202	0.35005	0.34834	0.34813	0.34796	0.34792
0.5	0.37571	0.37374	0.37201	0.37179	0.37162	0.37158
0.6	0.36312	0.36121	0.35949	0.35926	0.35909	0.35904
0.7	0.31378	0.31197	0.31033	0.31011	0.30994	0.30990
0.8	0.23113	0.22958	0.22818	0.22799	0.22785	0.22781
0.9	0.12276	0.12178	0.12091	0.12080	0.12070	0.12068
$\ e\ _1$	0.012510	0.007021	0.001502	0.000757	0.000152	

Problem (1) için ikinci olarak konum aralığı $0 \leq x \leq 1$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 3$, $h = 0.0125$ ve $\Delta t = 0.0001$ alınarak farklı λ değerleri için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar üç farklı konum ve beş farklı zaman için Çizelge 5.5'de verilmiştir.

Çizelge 5.5. Farklı viskozite değerleri için sayısal çözümler

		$\lambda_1 = 1.0$		$\lambda_2 = 0.1$		$\lambda_3 = 0.01$	
x	t	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.25	0.4	0.01360	0.01357	0.31219	0.30889	0.34825	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24362	0.24074	0.27542	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.19816	0.19568	0.22756	0.22148
	1	0.00004	0.00004	0.16473	0.16256	0.19378	0.18819
	3	0.00000	0.00000	0.02770	0.02720	0.07753	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.57299	0.56963	0.66548	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.45092	0.44721	0.53528	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.36289	0.35924	0.44528	0.43914
	1	0.00005	0.00005	0.29534	0.29192	0.38049	0.37442
	3	0.00000	0.00000	0.04097	0.04021	0.15362	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.63044	0.62544	0.91206	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.49274	0.48721	0.77135	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37917	0.37392	0.65246	0.64740
	1	0.00004	0.00004	0.29207	0.28747	0.56159	0.55605
	3	0.00000	0.00000	0.03037	0.02977	0.22874	0.22481

Bununla birlikte, bu test problemi için analitik çözüm $\lambda < 0.01$ değeri için çok yavaş yakınsadığından iyi sonuçlar elde edilememektedir. Dolayısıyla viskozite değeri $\lambda = 0.001$ alınarak, $0 \leq x \leq 1$ konum aralığı, $0 \leq t \leq 3$ zaman aralığında $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.125$ alınarak sayısal çözüm elde edilmiştir. Çözümün dalga hareketini modellediği Şekil 5.1'den görülebilir.



Şekil 5.1. Vizkozite değeri $\lambda = 0.001$ için U 'nun konuma göre değişimi

5.3.2. Problem (2)

(2.74) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 1 \quad (5.29)$$

ve başlangıç koşulu olarak $t = 1$ zamanı için

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{4\lambda}(x^2 - \frac{1}{4})}} \quad (5.30)$$

alınacaktır. Problem (2) için analitik çözüm $t_0 = e^{\frac{1}{8\lambda}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0} e^{\frac{x^2}{4\lambda t}}}}, \quad t > 1 \quad (5.31)$$

olarak verilmiştir (Nguyen ve Reynen, 1982).

Problem (2) için konum aralığı $[a, b] = [0, 8]$, zaman aralığı $1 \leq t \leq 3.75$, $\lambda = 0.5$ değerleri ile $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.01$, $h_4 = 0.005$ konum artımı ve $\Delta t = 0.1$, $\Delta t = 0.05$, $\Delta t = 0.01$ zaman artımı değerleri için üç farklı zamandaki sayısal çözüm

bulunmuş ve bu değerler Çizelge.5.6, Çizelge.5.7, Çizelge.5.8, Çizelge.5.9, Çizelge.5.10, Çizelge.5.11, Çizelge.5.12, Çizelge.5.13, Çizelge.5.14'de verilmiştir. Bulunan sayısal değerler ve analitik çözüm arasında tatmin edici bir uyum gözlenmiştir.

Çizelge 5.6. $h_1 = 0.1$, $\Delta t = 0.1$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

x	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19776	0.19698	0.12542	0.12374	0.07646	0.07584
1.6	0.27421	0.27335	0.19323	0.19228	0.12807	0.12721
2.4	0.19543	0.19441	0.17839	0.17726	0.13909	0.13809
3.2	0.07751	0.07719	0.10914	0.10831	0.11221	0.11126
4.0	0.01837	0.01834	0.04571	0.04541	0.06927	0.06863
4.8	0.00279	0.00279	0.01368	0.01362	0.03339	0.03309
5.6	0.00028	0.00028	0.00303	0.00302	0.01286	0.01276
6.4	0.00001	0.00001	0.00050	0.00050	0.00402	0.00401
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00100	0.00103
$L_2 \times 10^3$		1.447144		1.690695		1.691323
$L_\infty \times 10^3$		1.092253		1.128402		1.016599

Çizelge 5.7. $h_1 = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19148	0.19034	0.12478	0.12374	0.07532	0.07456
1.6	0.26781	0.26686	0.19344	0.19228	0.12638	0.12533
2.4	0.19555	0.19445	0.17850	0.17726	0.13780	0.13664
3.2	0.08084	0.08030	0.10928	0.10831	0.11200	0.11090
4.0	0.02017	0.02007	0.04583	0.04541	0.06990	0.06613
4.8	0.00325	0.00324	0.01373	0.01362	0.03417	0.03378
5.6	0.00035	0.00035	0.00304	0.00302	0.01337	0.01323
6.4	0.00002	0.00002	0.00050	0.00050	0.00426	0.00423
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00108	0.00111
$L_2 \times 10^3$		1.754095		2.017411		2.002820
$L_\infty \times 10^3$		1.152960		1.235508		1.163278

Çizelge 5.8. $h_1 = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19175	0.19034	0.12498	0.12374	0.07544	0.07456
1.6	0.26790	0.26686	0.19362	0.19228	0.12655	0.12533
2.4	0.19563	0.19445	0.17860	0.17726	0.13794	0.13664
3.2	0.08097	0.08030	0.10940	0.10831	0.11212	0.11090
4.0	0.02021	0.02007	0.04592	0.04541	0.07001	0.06613
4.8	0.00326	0.00324	0.01376	0.01362	0.03423	0.03378
5.6	0.00035	0.00035	0.00305	0.00302	0.01340	0.01323
6.4	0.00002	0.00002	0.00050	0.00050	0.00427	0.00423
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00108	0.00111
$L_2 \times 10^3$		2.083576		2.302875		2.270165
$L_\infty \times 10^3$		1.482503		1.347946		1.300774

Çizelge 5.9. $h_2 = 0.05$, $\Delta t = 0.1$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19693	0.19698	0.12383	0.12374	0.07597	0.07584
1.6	0.27363	0.27335	0.19247	0.19228	0.12740	0.12721
2.4	0.19481	0.19441	0.17765	0.17726	0.13838	0.13809
3.2	0.07718	0.07719	0.10855	0.10831	0.11156	0.11126
4.0	0.01831	0.01834	0.04544	0.04541	0.06881	0.06863
4.8	0.00276	0.00279	0.01361	0.01362	0.03315	0.03309
5.6	0.00028	0.00028	0.00302	0.00302	0.01277	0.01276
6.4	0.00001	0.00001	0.00050	0.00050	0.00400	0.00401
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00100	0.00103
$L_2 \times 10^3$		0.447656		0.452897		0.468941
$L_\infty \times 10^3$		0.483839		0.394093		0.313116

Çizelge 5.10. $h_2 = 0.05$, $\Delta t = 0.05$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19070	0.19034	0.12411	0.12374	0.07485	0.07456
1.6	0.26725	0.26686	0.19272	0.19228	0.12573	0.12533
2.4	0.19494	0.19445	0.17779	0.17726	0.13711	0.13664
3.2	0.08049	0.08030	0.10871	0.10831	0.11136	0.11090
4.0	0.02009	0.02007	0.04556	0.04541	0.06944	0.06913
4.8	0.00324	0.00324	0.01365	0.01362	0.03393	0.03378
5.6	0.00035	0.00035	0.00303	0.00302	0.01328	0.01323
6.4	0.00002	0.00002	0.00050	0.00050	0.00423	0.00423
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00107	0.00111
$L_2 \times 10^3$		0.790677		0.676097		0.806094
$L_\infty \times 10^3$		0.527318		0.511179		0.477075

Çizelge 5.11. $h_2 = 0.05$, $\Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19100	0.19034	0.12433	0.12374	0.07498	0.07456
1.6	0.26736	0.26686	0.19292	0.19228	0.12591	0.12533
2.4	0.19502	0.19445	0.17791	0.17726	0.13727	0.13664
3.2	0.08062	0.08030	0.10884	0.10831	0.11149	0.11090
4.0	0.02013	0.02007	0.04565	0.04541	0.06955	0.06913
4.8	0.00325	0.00324	0.01368	0.01362	0.03400	0.03378
5.6	0.00035	0.00035	0.00303	0.00302	0.01331	0.01323
6.4	0.00002	0.00002	0.00050	0.00050	0.00424	0.00423
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00107	0.00111
$L_2 \times 10^3$		0.960653		1.100685		1.092235
$L_\infty \times 10^3$		0.663218		0.651429		0.625284

Çizelge 5.12. $h_3 = 0.01$, $\Delta t = 0.1$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19623	0.19698	0.12327	0.12374	0.07558	0.07584
1.6	0.27314	0.27335	0.19185	0.19228	0.12685	0.12721
2.4	0.19430	0.19441	0.17705	0.17726	0.13780	0.13809
3.2	0.07692	0.07719	0.10808	0.10831	0.11103	0.11126
4.0	0.01826	0.01834	0.04523	0.04541	0.06844	0.06886
4.8	0.00278	0.00279	0.01355	0.01362	0.03326	0.03309
5.6	0.00028	0.00028	0.00301	0.00302	0.01270	0.01276
6.4	0.00001	0.00001	0.00050	0.00050	0.00398	0.00401
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00099	0.00103
$L_2 \times 10^3$		0.742458		0.659311		0.569907
$L_\infty \times 10^3$		0.746963		0.526467		0.358840

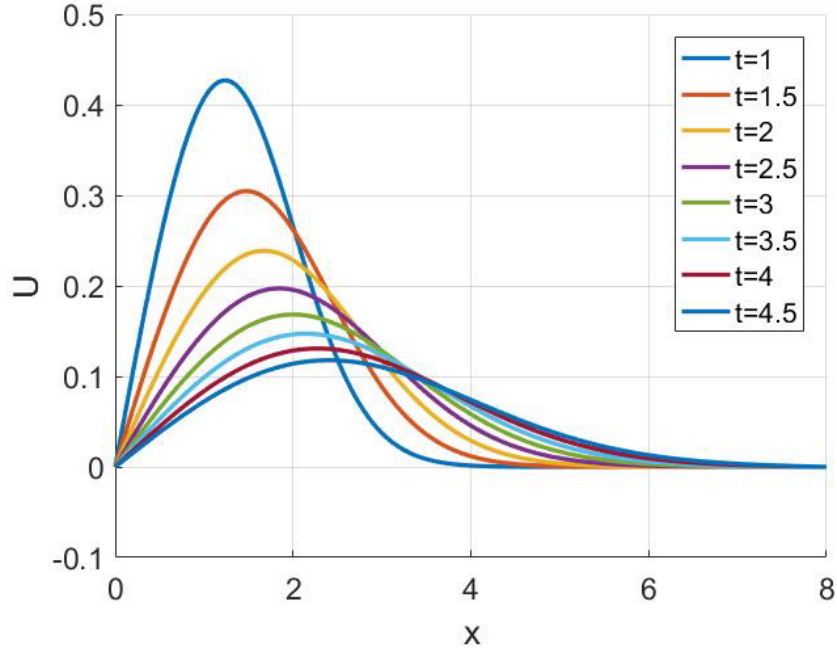
Çizelge 5.13. $h_3 = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19006	0.19034	0.12357	0.12374	0.07447	0.07456
1.6	0.26678	0.26686	0.19213	0.19228	0.12521	0.12533
2.4	0.19444	0.19445	0.17721	0.17726	0.13656	0.13664
3.2	0.08021	0.08030	0.10825	0.10831	0.11085	0.11090
4.0	0.02003	0.02007	0.04535	0.04541	0.06908	0.06913
4.8	0.00324	0.00324	0.01359	0.01362	0.03374	0.03378
5.6	0.00035	0.00035	0.00302	0.00302	0.01321	0.01323
6.4	0.00002	0.00002	0.00050	0.00050	0.00421	0.00423
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00107	0.00111
$L_2 \times 10^3$		0.274224		0.659311		0.210002
$L_\infty \times 10^3$		0.282153		0.526467		0.245641

Çizelge 5.14. $h_3 = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

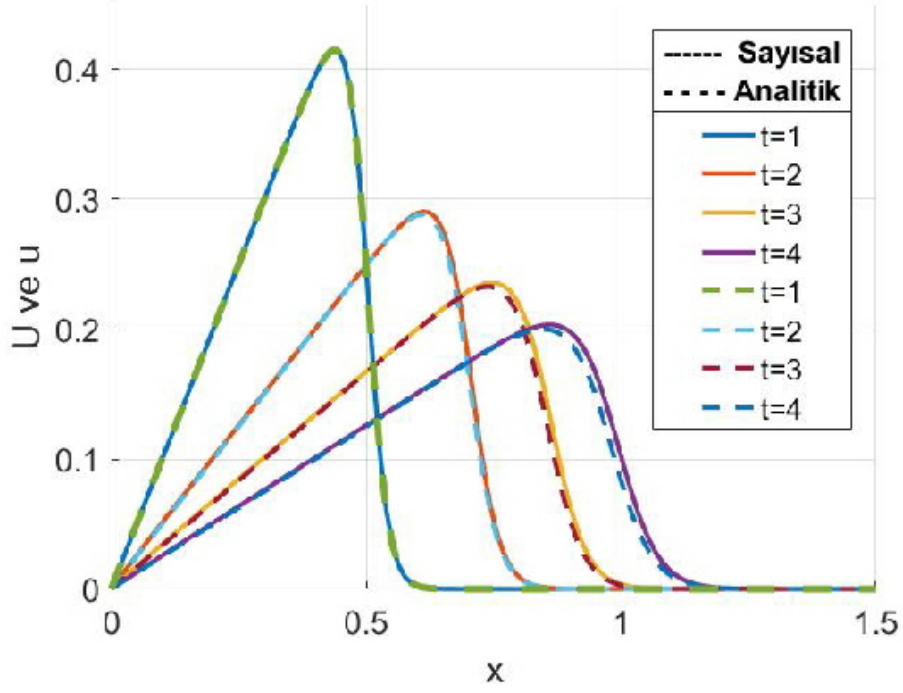
	$t_1 = 1.75$		$t_2 = 2.5$		$t_3 = 3.75$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.8	0.19040	0.19034	0.12381	0.12374	0.07461	0.07456
1.6	0.26693	0.26686	0.19236	0.19228	0.12541	0.12533
2.4	0.19454	0.19445	0.17736	0.17726	0.13673	0.13664
3.2	0.08034	0.08030	0.10836	0.10831	0.11099	0.11090
4.0	0.02007	0.02007	0.04544	0.04541	0.06919	0.06913
4.8	0.00324	0.00324	0.01363	0.01362	0.03381	0.03378
5.6	0.00035	0, 00035	0.00302	0.00302	0.01324	0.01323
6.4	0.00002	0.00002	0.00050	0.00050	0.00422	0.00423
7.2	0.00000	0.00000	0.00006	0.00006	0.00107	0.00111
$L_2 \times 10^3$		0.124000		0.148035		0.193753
$L_\infty \times 10^3$		0.095728		0.099113		0.245641

Çizelgelerdeki veriler incelendiğinde konum ve zaman adımlarının küçük seçilmesinin sonuçları olumlu yönde etkilediği görülmektedir. Bununla birlikte $\lambda = 0.5$ değeri için sayısal simülasyon farklı t zamanları için Şekil 5.2’de verilmiştir.



Şekil 5.2. Vizkozite değeri $\lambda = 0.5$ için U 'nun konuma göre değişimi

Problemin sayısal ve analitik çözümünü aynı anda resmetmek amacıyla $\lambda = 0.005$, $h = 0.012$, $\Delta t = 0.05$ değerleri için grafik Şekil 5.3’de çizilmiştir.



Şekil 5.3. Vizkozite değeri $\lambda = 0.005$ için U ve u 'nun konuma göre değişimi

İncelenen iki test problemine göre, lineer olmayan Burgers denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yönteminin tatmin edici sonuçlar verdiği söylenebilir.

6. FISHER DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan Fisher denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, L_2 ve L_∞ hata normları ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

6.1. Fisher Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu bölümde Fisher denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü yapılacaktır. Konum ve zaman aralıklarına göre integral altında (2.78) denklemini için en küçük kareler metodu

$$\delta \int_0^t \int_a^b [U_t - \lambda U_{xx} - \beta U(1 - U)]^2 dx dt = 0 \quad (6.1)$$

denklemini ile verilir. dx , dt , U_x , U_t ve U_{xx} için

$$x = x_m + \eta h, \quad t = t^n + \tau \Delta t \quad (6.2)$$

yerel koordinatlarda dönüşümleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x d\eta \\ dt &= \Delta t d\tau \\ U_t &= \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x} \\ U_{xx} &= (U_x)_x = \frac{\partial (U_\eta \frac{1}{\Delta x})}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} = \frac{U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}}{\frac{\partial \tau}{\partial t}} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler (6.1) denklemin yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau \frac{1}{\Delta t} - \lambda U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} - \beta \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \tilde{U} \right]^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \left[U_\tau - \lambda U_{\eta\eta} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \Delta t \beta \tilde{U} \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right]^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} - \Delta t \beta \tilde{U} \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right]^2 d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right]^2 d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilir. Burada \tilde{U} , $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde sabit olarak alınmış olup, $\varepsilon = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ve $\mu = \Delta t \beta \tilde{U}$ dir. Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right]^2 d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 2 \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right] \\
& \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right] d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right] \\
& \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right] d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right] \tag{6.6}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. B-spline fonksiyonlarını kullanarak $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde yerel koordinatlarda $u(\eta, \tau)$ fonksiyonunun sayısal çözümü,

$$U(\eta, \tau) = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \quad (6.7)$$

biçiminde verilebilir. Burada $\varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}$ ve φ_{m+2} zaman adımlarının başlangıçlarının düğüm parametreleri ve $\Delta \varphi_{m-1}, \Delta \varphi_m, \Delta \varphi_{m+1}$ ve $\Delta \varphi_{m+2}$ bir Δt zaman adımında düğüm parametrelerindeki artışları göstermektedir.

(6.7) kullanılarak U_τ, U_η ve $U_{\eta\tau}$ hesaplanırsa

$$U_\tau = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau} \quad (6.8)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (6.9)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)$$

$$U_{\eta\tau} = \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j'(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (6.10)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)$$

elde edilir. (6.8), (6.9), (6.10) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\delta W &= \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) \right) \right] = \\
&\delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta\varphi_j - \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) - \right. \\
&\left. \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) \right) \right] = \\
&\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) - \varepsilon \tau \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j''(\eta) - \mu \tau \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) = \\
&\sum_{j=m-1}^{m+2} [(1 - \mu\tau) T_j(\eta) - \varepsilon \tau T_j''(\eta)]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

haline dönüştür. Burada ağırlık fonksiyonu kısaca

$$w_i = (1 - \mu\tau) T_j - \varepsilon \tau T_j'', \quad i = m - 1, m, m + 1, m + 2 \tag{6.12}$$

olarak yazılabilir. İndis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonlarının indisi i olarak alınmıştır.(6.8), (6.9), (6.10) ve (6.12) değerleri (6.4) denkleminde yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j \Delta\varphi_j - \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j'' (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) \right) \right] \\
&[(1 - \mu\tau) T_i - \varepsilon \tau T_i''] d\eta d\tau = \\
&\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [T_j \Delta\varphi_j - \varepsilon T_j'' (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j) - \mu T_j (\varphi_j + \tau \Delta\varphi_j)] \\
&[(1 - \mu\tau) T_i - \varepsilon \tau T_i''] d\eta d\tau = \\
&\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [(1 - \mu\tau) T_i T_j \Delta\varphi_j - (1 - \mu\tau) \varepsilon T_i T_j'' \varphi_j - \\
&(1 - \mu\tau) \varepsilon \tau T_i T_j'' \Delta\varphi_j - (1 - \mu\tau) \mu T_i T_j \varphi_j - \\
&(1 - \mu\tau) \mu \tau T_i T_j \Delta\varphi_j - \varepsilon \tau T_i'' T_j \Delta\varphi_j + \varepsilon^2 \tau T_i'' T_j'' \varphi_j + \\
&\varepsilon^2 \tau^2 T_i'' T_j'' \Delta\varphi_j + \varepsilon \tau \mu T_i'' T_j \varphi_j + \varepsilon \tau^2 \mu T_i'' T_j \Delta\varphi_j] d\eta d\tau =
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [((1-\mu\tau)T_iT_j - (1-\mu\tau)\varepsilon\tau T_iT_j'' - (1-\mu\tau)\mu\tau T_iT_j - \\
& \varepsilon\tau T_i''T_j + \varepsilon^2\tau^2 T_i''T_j'' + \varepsilon\tau^2\mu T_i''T_j)\Delta\varphi_j + \\
& (- (1-\mu\tau)\varepsilon T_iT_j'' - (1-\mu\tau)\mu T_iT_j + \\
& \varepsilon^2\tau T_i''T_j''\varphi_j + \varepsilon\tau\mu T_i''T_j)\varphi_j]d\eta d\tau =
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [((1-\mu\tau)^2 T_iT_j - (1-\mu\tau)\varepsilon\tau T_iT_j'' + \\
& (\varepsilon\tau^2\mu - \varepsilon\tau) T_i''T_j + \varepsilon^2\tau^2 T_i''T_j'')\Delta\varphi_j + \\
& ((\mu\tau - 1)\mu T_iT_j + (\mu\tau - 1)\varepsilon T_iT_j'' + \\
& \varepsilon\tau\mu T_i''T_j + \varepsilon^2\tau T_i''T_j'')\varphi_j]d\eta d\tau =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 [((1-\mu + \frac{\mu^2}{3}) T_iT_j - (\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}) \varepsilon T_iT_j'' + \\
& (\frac{\varepsilon\mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2}) T_i''T_j + \frac{\varepsilon^2}{3} T_i''T_j'')\Delta\varphi_j + \\
& ((\frac{\mu}{2} - 1)\mu T_iT_j + (\frac{\mu\tau}{2} - 1)\varepsilon T_iT_j'' + \frac{\varepsilon\mu}{2} T_i''T_j + \frac{\varepsilon^2}{2} T_i''T_j'')\varphi_j]d\eta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 ((1-\mu + \frac{\mu^2}{3}) T_iT_j - (\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}) \varepsilon T_iT_j'' + \right. \\
& \left. (\frac{\varepsilon\mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2}) T_i''T_j + \frac{\varepsilon^2}{3} T_i''T_j'')d\eta \right] \Delta\varphi_j + \\
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 ((\frac{\mu}{2} - 1)\mu T_iT_j + (\frac{\mu\tau}{2} - 1)\varepsilon T_iT_j'' + \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon\mu}{2} T_i''T_j + \frac{\varepsilon^2}{2} T_i''T_j'')d\eta \right] \varphi_j = 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

denklem sistemi elde edilir.(6.15) denklem sistemi bir matris formunda

$$\begin{aligned}
& \left[\left((1-\mu + \frac{\mu^2}{3}) A^e - (\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}) \varepsilon B^e + (\frac{\varepsilon\mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2}) (B^e)^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C^e \right) \Delta\varphi^e + \right. \\
& \left. \left[(\frac{\mu}{2} - 1)\mu A^e + (\frac{\mu\tau}{2} - 1)\varepsilon B^e + \frac{\varepsilon\mu}{2} (B^e)^T + \frac{\varepsilon^2}{2} C^e \right] \varphi^e = 0 \right.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

olarak yazabilir. Burada $(.)^T$ matrisin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\varphi^e = [\varphi_{m-1}^e, \varphi_m^e, \varphi_{m+1}^e, \varphi_{m+2}^e]^T \quad (6.17)$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned} A^e &= A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta \\ B^e &= B_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j'' d\eta, \\ C^e &= C_{ij}^e = \int_0^1 T_i'' T_j'' d\eta, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$i, j = m - 1, m, m + 1, m + 2$

olarak alınmıştır. Örnek olarak A^e eleman matrisinin elemanları

$$A^e = A_{ij}^e = \int_0^1 T_i T_j d\eta = \begin{bmatrix} \int_0^1 T_{m-1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_m T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_m T_m d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 T_{m+2} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

şeklinde kübik trigonometrik B-spline'lar yardımıyla hesaplanabilir. Diğer eleman matrisleride benzer şekilde hesaplanmıştır.

(6.16) denklem sistemi, tüm eleman matrislerinin oluşturduğu matrisler cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[\left(\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) A - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon B + \left(\frac{\varepsilon \mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \right) (B)^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C \right) \Delta \varphi + \right. \\ & \left. \left[\left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \mu A + \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \varepsilon B + \frac{\varepsilon \mu}{2} (B)^T + \frac{\varepsilon^2}{2} C \right] \varphi = 0 \right. \end{aligned} \quad (6.20)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\varphi = [\varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin birer vektörüdür ve

$$\varphi = \varphi^n, \quad \Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n \quad (6.21)$$

biçiminde tanımlanabilir.(6.20) denklem sistemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[\left(\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) A - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon B + \left(\frac{\varepsilon\mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \right) (B)^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C \right) \varphi^{n+1} - \varphi^n + \right. \\ & \left. \left[\left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \mu A + \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \varepsilon B + \frac{\varepsilon\mu}{2} (B)^T + \frac{\varepsilon^2}{2} C \right] \varphi^n = 0 \right. \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) A - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon B - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon (B)^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C \right) \varphi^{n+1} + \right. \\ & \left. \left[\left(1 - \frac{\mu^2}{6} \right) A + \left(1 - \frac{\mu}{3} \right) \frac{\varepsilon}{2} B - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{\mu}{3} \right) (B)^T + \frac{\varepsilon^2}{6} C \right] \varphi^n = 0 \right. \end{aligned} \quad (6.23)$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada μ eleman değeri

$$\begin{aligned} \mu_m^e &= \beta \Delta t \check{U} = \beta \Delta t (1 - U_m) = \\ & \beta \Delta t \left[(a_1 \varphi_{m-1} + a_2 \varphi_m + a_1 \varphi_{m+1}) \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$a_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad a_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))}, \quad \text{o.ü.} \quad (6.25)$$

dir. (6.23) denklemi, (2.79) sınır koşulları ile kübik trigonometrik B-spline değerleri birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned} U(x_0) &= a_1 \varphi_{-1} + a_2 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 \\ \varphi_{-1} &= (U(x_0) - a_2 \varphi_0 - a_1 \varphi_1) / a_1 \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} U(x_N) &= a_1 \varphi_{N-1} + a_2 \varphi_N + a_1 \varphi_{N+1} \\ \varphi_{N+1} &= (U(x_N) - a_1 \varphi_{N-1} - a_2 \varphi_N) / a_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde φ_{-1} ve φ_{N+1} elimine edilerek $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemi elde edilir.

6.2. Başlangıç Durumu

(6.23) denklem sisteminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\varphi^0 = [\varphi_{-1}^0, \varphi_0^0, \dots, \varphi_N^0, \varphi_{N+1}^0]^T$

hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.55) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} T_m(x) \varphi_m^0. \quad (6.27)$$

(2.79), sınır ve başlangıç koşulları ile Çizelge 2.1 birlikte kullanıldığında

$$b = \frac{3 \csc(\frac{3h}{2})}{4}, \text{ o.ü.}$$

$$\begin{aligned} U'(x_0) &= -b\varphi_{-1} + 0\varphi_0 + b\varphi_1 = 0, \\ U'(x_N) &= -b\varphi_{N-1} + 0\varphi_N + b\varphi_{N+1} = 0, \\ U(x_m) &= a_1\varphi_{m-1} + a_2\varphi_m + a_1\varphi_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.28)$$

elde edilir. (6.27) ve (6.28) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & b & & & & \\ a_1 & a_2 & a_1 & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_1 & a_2 & a_1 & \\ & & & & a_1 & a_2 & a_1 \\ & & & & & -b & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}^0 \\ \varphi_0^0 \\ \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^0 \\ \varphi_N^0 \\ \varphi_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu matris denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlenerek (6.23) denklem sisteminde iterasyona başlanır ve t zamanına kadar iterasyon yapılır. Bulunan φ^n ler (2.55) ifadesinde yerine yazılarak her zaman adımında yaklaşım fonksiyonlarının değerleri hesaplanır.

(6.23) ve (6.29) denklem sistemlerinin çözümü için MATLAB paket programı kullanılmıştır.

6.3. Test Problemleri

Bu kısımda, kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yönteminin Fisher denkleminde uygulanması sonucunda elde edilen sonuçların güvenilirliğini kontrol etmek amacıyla iki test problemi üzerinde çalışılmıştır.

6.3.1. Problem (1)

Fisher denkleminin özel bir analitik çözümü Ablowitz ve Zepetella (1979) tarafından

$$u(x, t) = \left[1 + \exp(\sqrt{\beta/6}x - (5\beta/6)t) \right]^{-2} \quad (6.30)$$

olarak verilmiştir. Bu çözüm $\nu = 5\sqrt{\beta/6}$ sabit hızla hareket eden bir dalga çözümüdür. β parametresi büyüdükçe bu dalga şok dalgası halini alır.

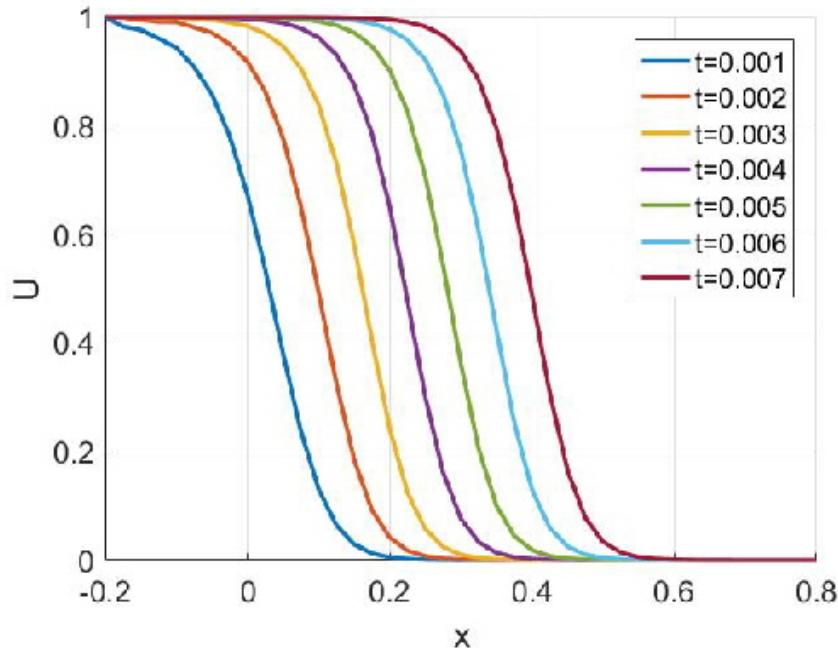
Sayısal çözümün başlangıç koşulu olarak, analitik çözümün $t=0$ anındaki değeri alınırsa

$$u(x, 0) = \left[1 + \exp(\sqrt{\beta/6}x) \right]^{-2} \quad (6.31)$$

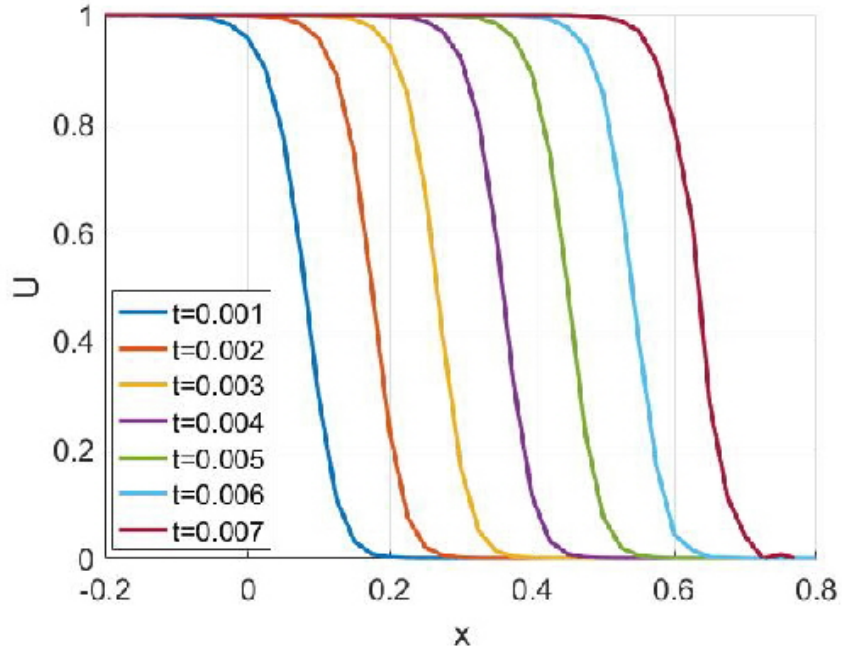
elde edilir. Sınır koşulları

$$u(a, t) = 1, u(b, t) = 0 \quad (6.32)$$

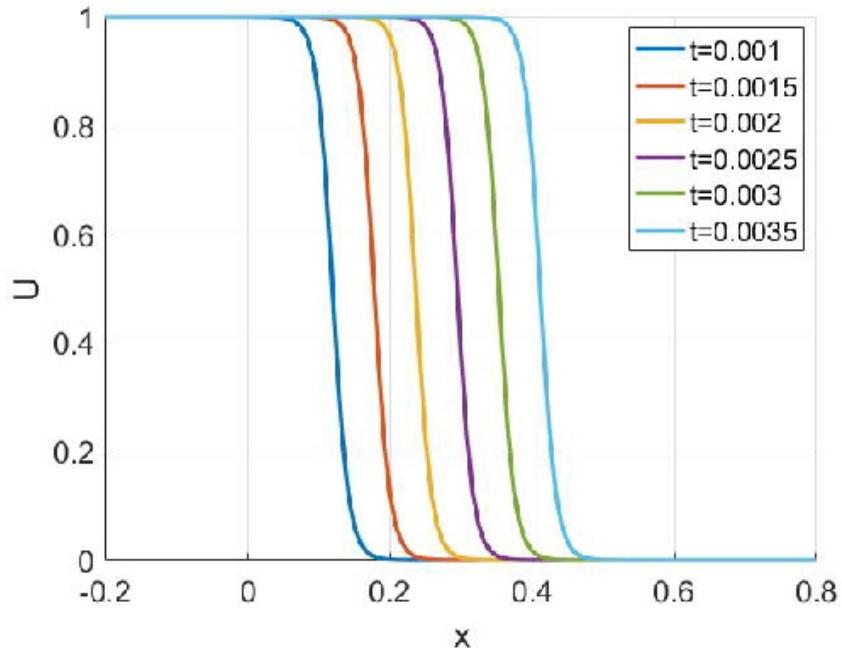
olarak alınmıştır. Daha önceden yapılmış bazı çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla, konum aralığı $-0.2 \leq x \leq 0.8$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 0.007$ olarak alınmıştır. Bu aralık değerleri içerisinde zaman artımı $\Delta t = 10^{-4}$, konum artımı $h = 1/40, 1/120$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 2000, 5000, 10000$ parametre değerleri alınarak yapılan çözümden elde edilen değerler Şekil 6.1, Şekil 6.2 ve Şekil 6.3'te gösterilmiştir.



Şekil 6.1. $h = 1/40, \beta = 2000$ için U 'nun konuma göre değişimi



Şekil 6.2. $h = 1/40$, $\beta = 5000$ için U 'nun konuma göre değişimi



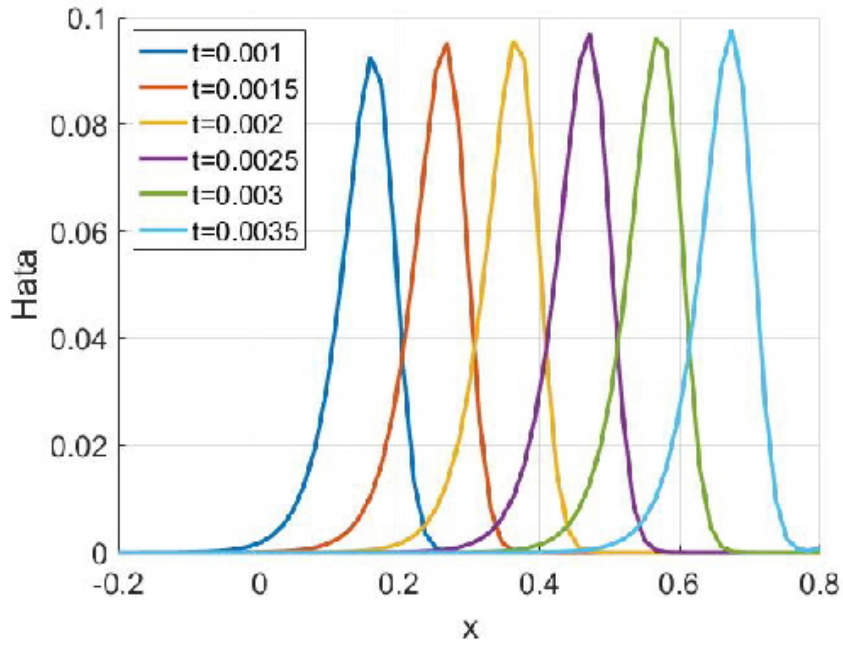
Şekil 6.3. $h = 1/120$, $\beta = 10000$ için U 'nun konuma göre değişimi

Problem (1) için, $\lambda = 1$, $\beta = 10^4$, konum aralığı $-0.2 \leq x \leq 0.8$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 0.0035$ ve $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$, $h = 1/64, 1/150, 1/250$ parametre değerleri kullanılarak, farklı zamanlarda L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 6.1'de gösterilmiştir.

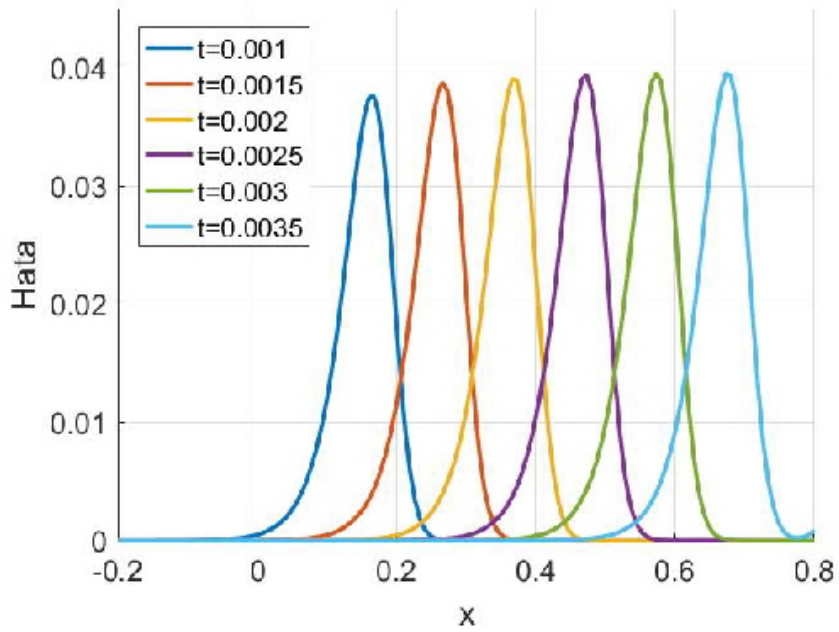
Çizelge 6.1. Farklı zamanlarda L_2 ve L_∞ hata normları

h	t	$L_2 \times 10^2$	$L_\infty \times 10^2$
1/64	0.005	2.116590	8.313321
	0.0015	2.457509	9.513104
	0.0025	2.480878	9.700409
	0.0035	2.496035	9.770077
1/150	0.005	0.840793	3.397110
	0.0015	0.965320	3.877288
	0.0025	0.982372	3.937503
	0.0035	0.988474	3.947813
1/250	0.005	0.447752	1.825246
	0.0015	0.514088	2.081232
	0.0025	0.523655	2.118827
	0.0035	0.527504	2.133479

Ayrıca $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ alınarak $h = 1/64$ ve $h = 1/150$ değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının grafikleri Şekil 6.4 ve Şekil 6.5'de verilmiştir.



Şekil 6.4. $h = 1/64$ ve $\beta = 10^4$ için mutlak hata



Şekil 6.5. $h = 1/150$ ve $\beta = 10^4$ için mutlak hata

6.3.2. Problem (2) (Başlangıç titreşim profili)

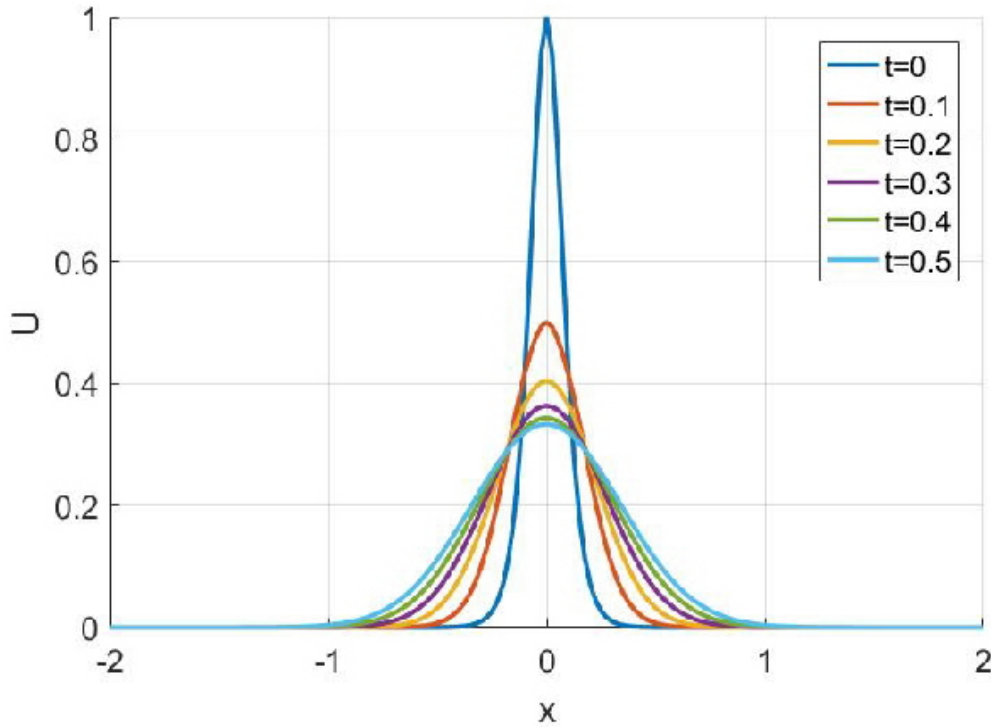
(2.78) dekleminde sınır koşulları olarak

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (6.33)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = \text{sech}^2(10x) \quad (6.34)$$

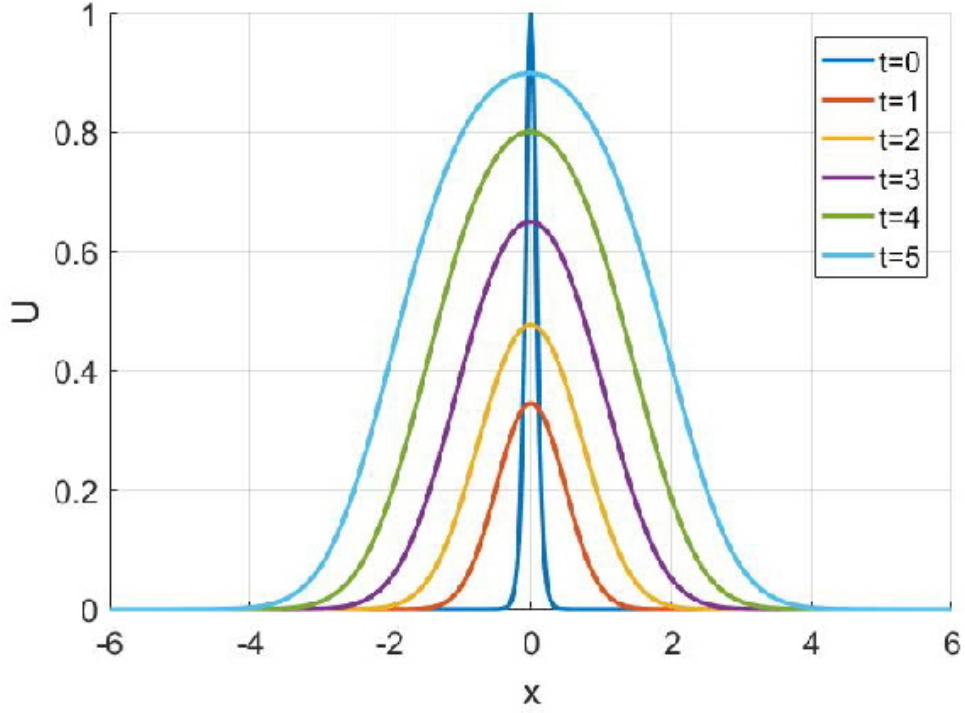
alınmıştır. Test probleminde konum aralığı $[a, b] = [-50, 50]$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 40$ olarak, parametreler $\lambda = 0.1$, $\beta = 1$, $\Delta t = 0.05$ ve konum artımı $h = 0.025$ olarak alınmıştır. Ayrıca konum aralığı $[a, b] = [-2, 2]$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 0.5$ alınarak, başlangıç anına yakın zamanlarda çözümler yapılmış ve Şekil 6.6'da verilmiştir.



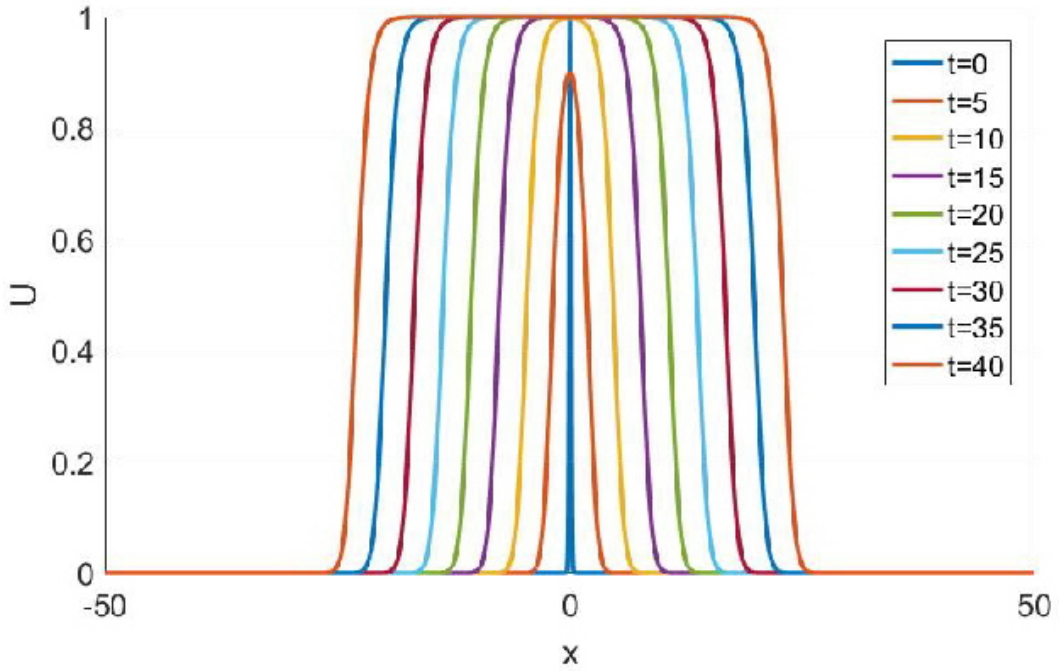
Şekil 6.6. Başlangıç anına yakın zamanda U 'nun konuma göre değişimi

Buradan, başlangıç anında difüzyon teriminin reaksiyon terimine göre kuvvetli olduğu ve bu etkinin zamanla azaldığı görülmektedir. Kısa zaman aralığı $0 \leq t \leq 5$,

$[a, b] = [-6, 6]$ ve uzun zaman aralığı $0 \leq t \leq 40$, $[a, b] = [-50, 50]$ değerleri için çözümler sırasıyla Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'de verilmiştir.



Şekil 6.7. Kısa zaman aralığı için U 'nun konuma göre değişimi



Şekil 6.8. Uzun zaman aralığı için U 'nun konuma göre değişimi

Buradan görülmektedir ki tepe noktası yaklaşık olarak 0.33'e kadar düştükten sonra zamanla reaksiyon terimleri difüzyon terimini etkilemeye başlar ve $U = 1$ maksimum değerine ulaştığı ve düz bir hale geldiği ve difüzyonun baskın hale geldiği görülmektedir.

Test problemi (2) için analitik çözüm bulunmadığı için sayısal çözümden elde edilen değerleri kontrol etmek amacıyla bağıl hata normu (2.80) kullanılmıştır. Parametre değerleri $\lambda = 0.1$, $\beta = 1$, $\Delta t = 0.05$ ve konum artımı $h = 0.025$ ve konum aralığı $[a, b] = [-50, 50]$ alınarak farklı zamanlarda hesaplanan bağıl hata normlarının (2.80) değerleri Çizelge 6.2 de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Farklı zamanlar için *Rel* hata normu

Zaman	<i>Rel</i>
$t = 5$	1.3855×10^{-2}
$t = 10$	7.859×10^{-3}
$t = 15$	6.0535×10^{-3}
$t = 20$	5.0894×10^{-3}
$t = 40$	3.4341×10^{-3}

Fisher denklemi, kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları ile en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözümler yapılmıştır. Hesaplanan değerlerin daha önceden yapılmış çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür. Bu nedenle kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yönteminin makul sonuçlar verdiği söylenebilir.

7. NLS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan NLS denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, L_2 , L_∞ hata normları ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

7.1. NLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Trigonometrik B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu bölümde NLS denkleminin kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü yapılacaktır. Konum ve zaman aralıklarına göre integral altında (2.81) denklemini için en küçük kareler metodu

$$\delta \int_0^t \int_a^b [iU_t + U_{xx} + q|U|^2 U]^2 dx dt = 0 \quad (7.1)$$

denklemini ile verilir. dx , dt , U_x , U_t ve U_{xx} için

$$x = x_m + \eta h, \quad t = t^n + \tau \Delta t \quad (7.2)$$

dönüşümleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x d\eta \\ dt &= \Delta t d\tau \\ U_t &= \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x} \\ U_{xx} &= (U_x)_x = \frac{\partial (U_\eta \frac{1}{\Delta x})}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} = \frac{U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}}{\partial \tau} = U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

elde edilir. Bu ifadeler (7.1) denklemde yerel koordinatlarda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[iU_\tau \frac{1}{\Delta t} + U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} + q |U|^2 U \right]^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \left[iU_\tau + U_{\eta\eta} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \Delta t q |U|^2 U \right]^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[iU_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} + \Delta t q |U|^2 U \right]^2 d\eta d\tau = \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[iU_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right]^2 d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

elde edilir. Burada $\alpha_m, [x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde sabit olarak alınmış olup, $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ve $\mu = \Delta t q |U|^2$ dir. Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta \left[iU_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right]^2 d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 2 \left[iU_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right] \delta \left[iU_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right] d\eta d\tau = \\
& \int_0^1 \int_0^1 \left[iU_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right] \delta \left[iU_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right] d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{7.5}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta \left[U_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U \right] \tag{7.6}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. B-spline fonksiyonlarını kullanarak $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde yerel koordinatlarda $u(\eta, \tau)$ fonksiyonunun sayısal çözümü,

$$U(\eta, \tau) = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \tag{7.7}$$

biçiminde verilebilir. Burada $\varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}$ ve φ_{m+2} zaman adımlarının başlangıçlarının düğüm parametreleri ve $\Delta \varphi_{m-1}, \Delta \varphi_m, \Delta \varphi_{m+1}$ ve $\Delta \varphi_{m+2}$ bir Δt zaman adımında düğüm parametrelerindeki artışları göstermektedir.

(7.7) kullanılarak U_τ, U_η ve $U_{\eta\eta\tau}$ hesaplanırsa

$$U_\tau = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \tau} \quad (7.8)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (7.9)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)$$

$$U_{\eta\eta} = \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} T'_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)}{\partial \eta} \quad (7.10)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)$$

elde edilir. (7.8), (7.9), (7.10) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \delta [U_\tau + \beta U_{\eta\eta} + \alpha_m U] =$$

$$\delta \left[i \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) \Delta \varphi_j + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \right.$$

$$\left. \alpha_m \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right) \right] = \quad (7.11)$$

$$i \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) + \beta \tau \sum_{j=m-1}^{m+2} T''_j(\eta) + \alpha_m \tau \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j(\eta) =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} [iT_j(\eta) + \beta \tau T''_j(\eta) + \alpha_m \tau T_j(\eta)]$$

haline döndür. Burada ağırlık fonksiyonu kısaca

$$w_i = iT_i(\eta) + \beta \tau T''_i(\eta) + \alpha_m \tau T_i(\eta), \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (7.12)$$

olarak yazılabilir. İndis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonlarının indisi i olarak alınmıştır. (7.8), (7.9), (7.10) ve (7.12) değerleri (7.4) denkleminde yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[i \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j \Delta \varphi_j + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j'' (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \alpha_m \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) \right] [iT_i(\eta) + \beta\tau T_i''(\eta) + \alpha_m \tau T_i(\eta)] d\eta d\tau =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [iT_j \Delta \varphi_j + \beta T_j'' (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j) + \alpha_m T_j (\varphi_j + \tau \Delta \varphi_j)] [iT_i(\eta) + \beta\tau T_i''(\eta) + \alpha_m \tau T_i(\eta)] d\eta d\tau =$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 \{ [-T_j T_i + i\beta\tau T_j T_i'' + 2i\alpha_m T_j T_i + i\beta\tau T_j'' T_i + \beta^2 \tau^2 T_j'' T_i'' + \beta\alpha_m \tau^2 T_j'' T_i + \beta\alpha_m \tau^2 T_j T_i'' + \alpha_m^2 \tau^2 T_j T_i] \Delta \varphi_j + [i\beta T_j'' T_i + \beta^2 \tau T_j'' T_i'' + \beta\alpha_m \tau T_j'' T_i + \beta\alpha_m \tau T_j T_i'' + i\alpha_m T_j T_i + \alpha_m^2 \tau T_j T_i] \varphi_j \} d\eta d\tau =$$
(7.13)

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{3} (\beta^2 T_j'' T_i'' + \beta\alpha_m T_j'' T_i + \beta\alpha_m T_j T_i'' + \alpha_m^2 T_j T_i) + \frac{i}{2} (\beta T_j T_i'' + 2\alpha_m T_j T_i + \beta T_j'' T_i) - T_j T_i \right] \Delta \varphi_j + \left[\frac{1}{2} (\beta^2 T_j'' T_i'' + \beta\alpha_m T_j'' T_i + \beta\alpha_m T_j T_i'' + \alpha_m^2 T_j T_i) + i (\beta T_j'' T_i + \alpha_m T_j T_i) \right] \varphi_j \right\} d\eta =$$
(7.14)

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \frac{1}{3} (\beta^2 T_j'' T_i'' + \beta\alpha_m T_j'' T_i + \beta\alpha_m T_j T_i'' + \alpha_m^2 T_j T_i) + \frac{i}{2} (\beta T_j T_i'' + 2\alpha_m T_j T_i + \beta T_j'' T_i) - T_j T_i \right] d\eta \} \Delta \varphi_j + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (\beta^2 T_j'' T_i'' + \beta\alpha_m T_j'' T_i + \beta\alpha_m T_j T_i'' + \alpha_m^2 T_j T_i) + i (\beta T_j'' T_i + \alpha_m T_j T_i) \right] d\eta \right\} \varphi_j = 0$$
(7.15)

denklem sistemi elde edilir. (7.15) denklem sistemi eleman matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{3} \left(\beta^2 C^e + \beta \alpha_m \left(B^e + (B^e)^T \right) + \alpha_m^2 A^e \right) + \right. \\
& \left. \frac{i}{2} \left(\beta (B^e)^T + 2 \alpha_m A^e + \beta B^e \right) - A^e \right] \Delta \varphi^e + \\
& \left[\frac{1}{2} \left(\beta^2 C^e + \beta \alpha_m \left(B^e + (B^e)^T \right) + \alpha_m^2 A^e \right) + \right. \\
& \left. i (\beta B^e + \alpha_m A^e) \right] \varphi^e = 0
\end{aligned} \tag{7.16}$$

olarak yazabilir. Burada $(\cdot)^T$ matrisin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\varphi^e = [\varphi_{m-1}^e, \varphi_m^e, \varphi_{m+1}^e, \varphi_{m+2}^e]^T \tag{7.17}$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned}
A^e &= A_{ij}^e = \int_0^1 T_j T_i d\eta \\
B^e &= B_{ij}^e = \int_0^1 T_j'' T_i d\eta, \\
C^e &= C_{ij}^e = \int_0^1 T_j'' T_i'' d\eta, \\
& i, j = m-1, m, m+1, m+2
\end{aligned} \tag{7.18}$$

olarak alınmıştır. Örnek olarak A^e eleman matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
A^e &= A_{ji}^e = \int_0^1 T_j T_i d\eta = \\
& \left[\begin{array}{cccc}
\int_0^1 T_{m-1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} \phi_m d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m-1} T_{m+2} d\eta \\
\int_0^1 T_m T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_m T_m d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_m T_{m+2} d\eta \\
\int_0^1 T_{m+1} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+1} T_{m+2} d\eta \\
\int_0^1 T_{m+2} T_{m-1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_m d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+1} d\eta & \int_0^1 T_{m+2} T_{m+2} d\eta
\end{array} \right]
\end{aligned} \tag{7.19}$$

şeklinde kübik trigonometrik B-splinelere yardımıyla hesaplanabilir. Diğer eleman matrisleride benzer şekilde hesaplanmıştır.

(7.16) denklemi, tüm eleman matrislerinin oluşturduğu matrisler cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} \left(\beta^2 C + \beta \alpha_m \left(B + (B)^T \right) + \alpha_m^2 A \right) + \right. \\ & \left. \frac{i}{2} \left(\beta \left((B)^T + B \right) + 2\alpha_m A \right) - A \right] \Delta\varphi + \\ & \left[\frac{1}{2} \left(\beta^2 C + \beta \alpha_m \left(B + (B)^T \right) + \alpha_m^2 A \right) + \right. \\ & \left. i(\beta B + \alpha_m A) \right] \varphi = 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\varphi = [\varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin birer vektörüdür ve

$$\varphi = \varphi^n, \quad \Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n \quad (7.21)$$

biçiminde tanımlanabilir. (7.20) denklemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} \left(\beta^2 C + \beta \alpha_m \left(B + (B)^T \right) + \alpha_m^2 A \right) + \right. \\ & \left. \frac{i}{2} \left(\beta \left((B)^T + B \right) + 2\alpha_m A \right) - A \right] (\varphi^{n+1} - \varphi^n) + \\ & \left[\frac{1}{2} \left(\beta^2 C + \beta \alpha_m \left(B + (B)^T \right) + \alpha_m^2 A \right) + i(\beta B + \alpha_m A) \right] \varphi^n = 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} \left(\beta^2 C + \beta \alpha_m \left(B + (B)^T \right) + \alpha_m^2 A + \frac{i}{2} \left(\beta \left((B)^T + B \right) + 2\alpha_m A \right) - A \right) \right] \varphi^{n+1} + \\ & \left[\frac{i}{2} \left(\beta \left((B)^T + B \right) + 2\alpha_m A \right) - \frac{1}{6} \left(\beta^2 C + \beta \alpha_m \left(B + (B)^T \right) + \alpha_m^2 A \right) - \right. \\ & \left. A - i(\beta B + \alpha_m A) \right] \varphi^n = 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

$(N+3) \times (N+3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada α_m eleman değeri

$$\alpha_m^e = \Delta t q |U|^2 = \Delta t q \left| a_1 \varphi_{m-1} + a_2 \varphi_m + a_1 \varphi_{m+1} \right|^2 \quad (7.24)$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$a_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad a_2 = \frac{2}{(1+2\cos(h))}, \quad \text{o.ü.} \quad (7.25)$$

dir. (7.23) denklemi, (2.82) sınır koşulları ve trigonometrik B-spline değerleri ile birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned}
U(x_0) &= a_1\varphi_{-1} + a_2\varphi_0 + a_1\varphi_1 \\
\varphi_{-1} &= (U(x_0) - a_2\varphi_0 - a_1\varphi_1)/a_1,
\end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}
U(x_N) &= a_1\varphi_{N-1} + a_2\varphi_N + a_1\varphi_{N+1} \\
\varphi_{N+1} &= (U(x_N) - a_1\varphi_{N-1} - a_2\varphi_N)/a_1
\end{aligned}$$

olacak şekilde φ_{-1} ve φ_{N+1} elimine edilerek, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemine dönüştürülür.

7.2. Başlangıç Durumu

(7.23) denklem sisteminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\varphi^0 = [\varphi_{-1}^0, \varphi_0^0, \dots, \varphi_N^0, \varphi_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.55) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} T_m(x)\varphi_m^0 \tag{7.27}$$

(2.82) sınır ve başlangıç koşulları ile Çizelge 2.1 birlikte kullanıldığında

$$b = \frac{3 \csc(\frac{3h}{2})}{4}, \text{ o.ü.}$$

$$\begin{aligned}
U'(x_0) &= -b\varphi_{-1} + 0\varphi_0 + b\varphi_1 = 0 \\
U'(x_N) &= -b\varphi_{N-1} + 0\varphi_N + b\varphi_{N+1} = 0 \\
U(x_m) &= a_1\varphi_{m-1} + a_2\varphi_m + a_1\varphi_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{7.28}$$

elde edilir. (7.27) ve (7.28) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & b & & & & \\ a_1 & a_2 & a_1 & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_1 & a_2 & a_1 & \\ & & & & a_1 & a_2 & a_1 \\ & & & & & -b & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1}^0 \\ \varphi_0^0 \\ \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^0 \\ \varphi_N^0 \\ \varphi_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu matris denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlenerek (7.23) denkleminde iterasyona başlanır ve t zamanına kadar iterasyon yapılır. Bulunan φ^n ler (2.55) ifadesinde yerine yazılarak her zaman adımında yaklaşım fonksiyonlarının değerleri hesaplanır.

(7.23) ve (7.29) denklem sistemlerinin çözümü için MATLAB paket programı kullanılmıştır.

7.3. Test Problemleri

Bu kısımda, kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yönteminin NLS denkleminde uygulanması sonucunda elde edilen sonuçların güvenilirliğini kontrol etmek amacıyla iki test problemi üzerinde çalışılmıştır.

7.3.1. Problem (1) (Tek soliton çözümü)

Schrödinger denkleminin tek soliton çözümü

$$U(x, t) = \alpha \sqrt{\frac{2}{q}} \exp i \left\{ \frac{1}{2} Sx - \frac{1}{4} (S^2 - \alpha^2) t \right\} \operatorname{sech}(\alpha(x - St)) \quad (7.30)$$

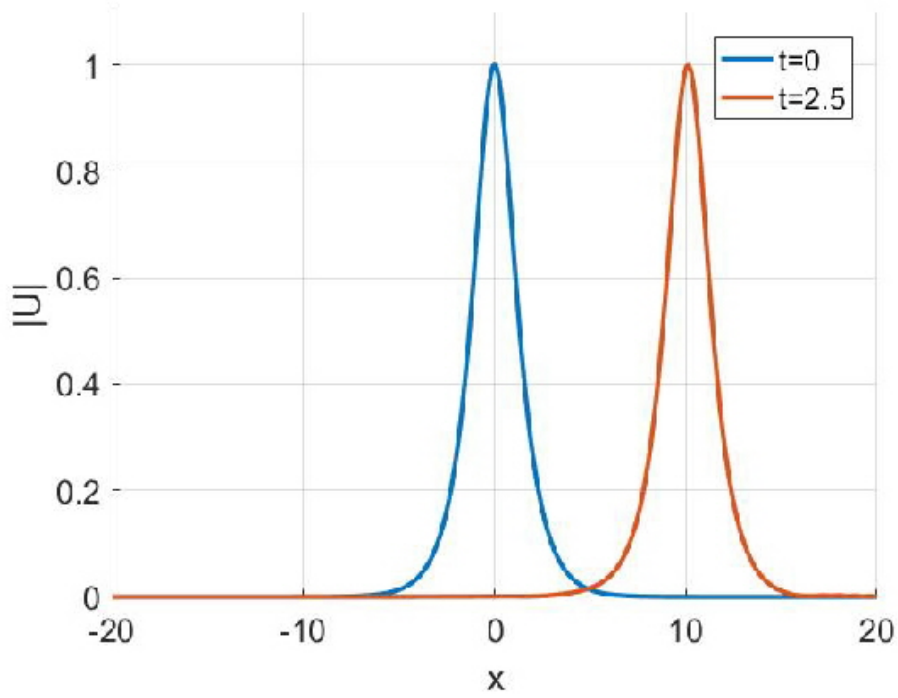
ile verilir. Buradaki çözümde, solitonun hızı S ve büyüklüğü de α parametresi ile belirtilmektedir. Sonuçların karşılaştırılması amacıyla önceki bazı çalışmalarda kullanılan değerler kullanılacaktır. Buna göre, $-20 \leq x \leq 20$ konum aralığında, $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$, $\Delta t = 0.005$, $h = 0.05$ parametreleri kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır. Kompleks değerli U fonksiyonunun modülü $\alpha = 1$ için,

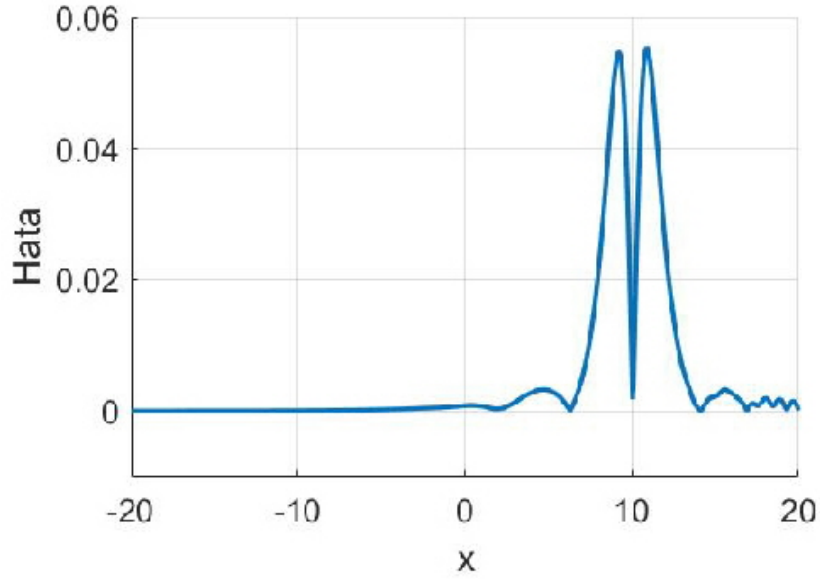
$$|U| = \operatorname{sech}(x - 4t) \quad (7.31)$$

dir ve bu ifade 4 hızıyla sağa doğru sabit hızla ilerleyen solitonu belirtmektedir. Program $t = 2.5$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen L_∞ ve korunum sabitlerinin değerleri Çizelge 7.1 de verilmiştir. $t = 0$ ve $t = 2.5$ zamanlarında solitonun modülünün ilerlemesi Şekil 7.1 de gösterilmiştir. L_∞ hata grafiği de Şekil 7.2 de, (yaklaşık sonuç-tam sonuç) için hata değerleri Şekil 7.3 de verilmiştir. Buradan, hatanın $x = 10$ civarında olduğu ve sınır değerlerinden kaynaklanmadığı görülmektedir.

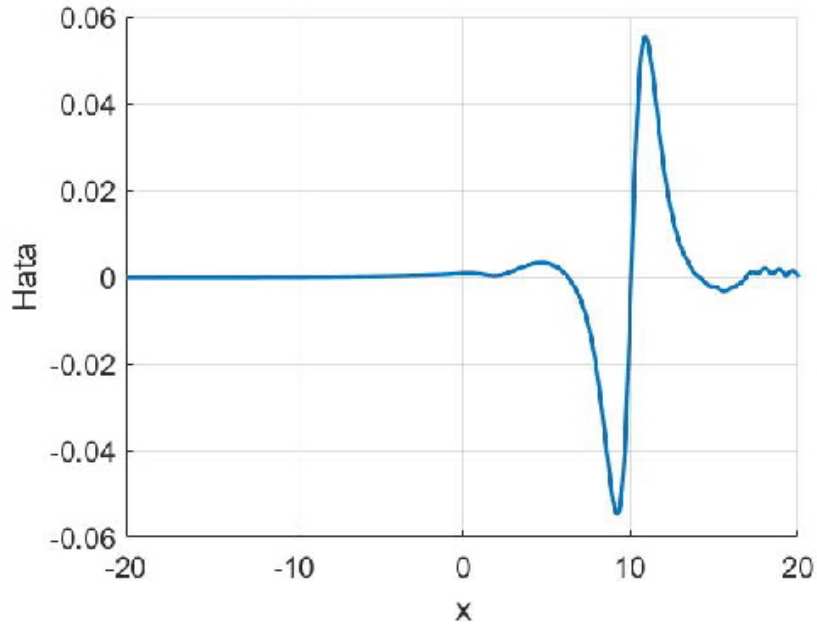
Çizelge 7.1. $\Delta t = 0.005$, $h = 0.05$ için L_∞ hata normları ve korunum sabitleri

t	C_1	C_2	L_∞
0	2	7.333317	0
0.5	1.999995	7.397310	0.005959
1	1.999989	7.461297	0.014132
1.5	1.999984	7.525253	0.024599
2	1.999978	7.589189	0.038165
2.5	1.999973	7.653129	0.055368

Şekil 7.1. $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0$ ve $t = 2.5$ zamanlarındaki $|U|$



Şekil 7.2. $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanlarındaki mutlak hata



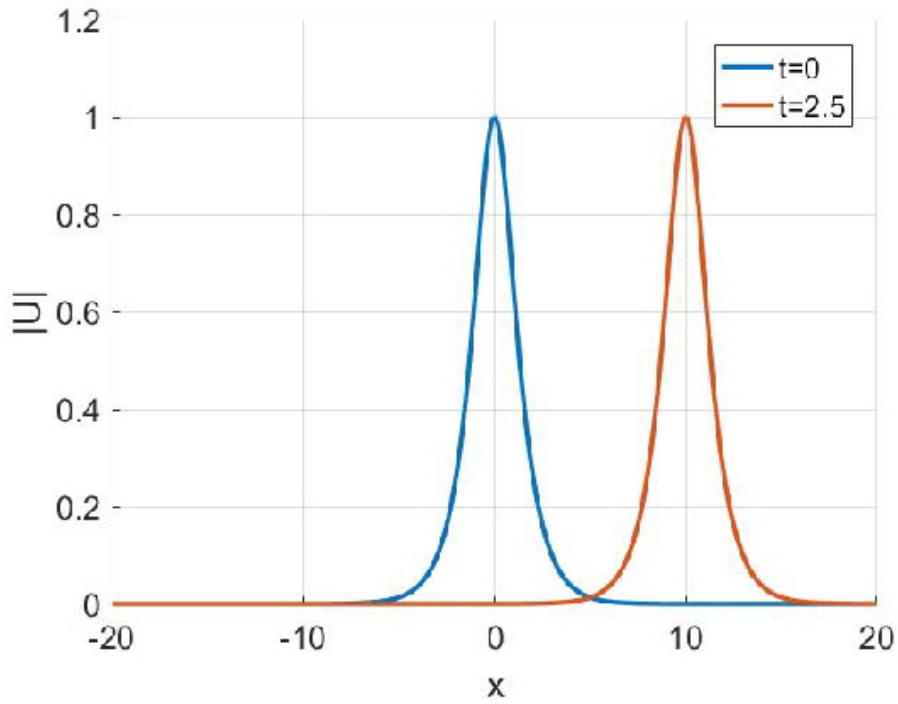
Şekil 7.3. $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanlarındaki hata

Bununla birlikte $\Delta t = 0.005$, $h = 0.02$ değerleri için hesaplama yapıldığında yöntem için en iyi sonuçların elde edildiği görülmektedir (Çizelge 7.2). $t = 0$ ve $t = 2.5$

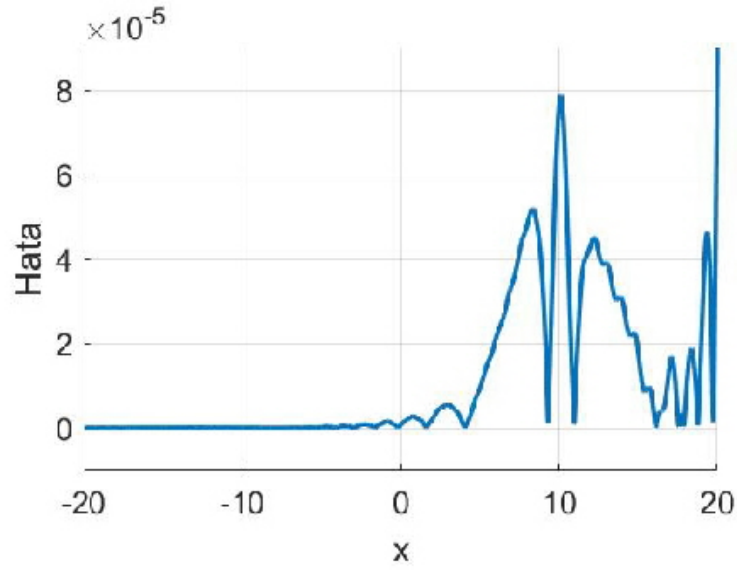
zamanlarında solitonun modülünün ilerlemesi Şekil 7.4'de, L_∞ hata grafiği de Şekil 7.5'de, (yaklaşık sonuç-tam sonuç) için hata değerleri de Şekil 7.6'da gösterilmiştir.

Çizelge 7.2. $\Delta t = 0.005$, $h = 0.02$ için L_∞ hata normları ve korunum sabitleri

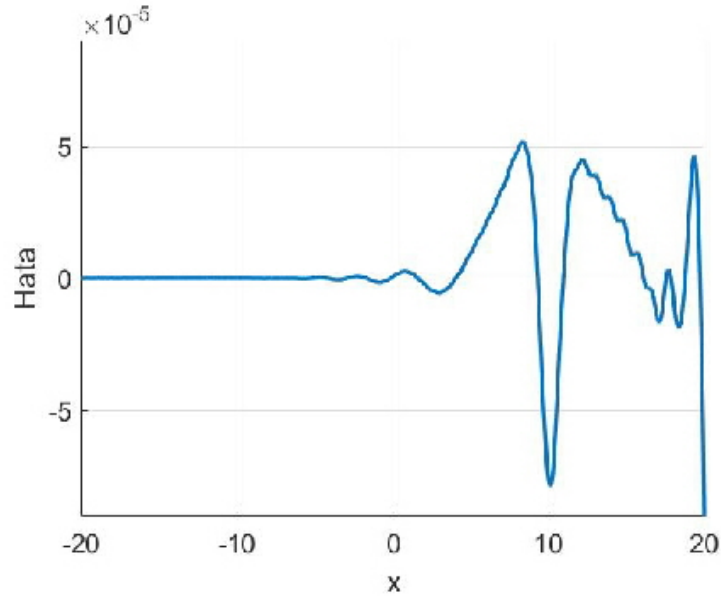
t	C_1	C_2	L_∞
0	2	7.333333	0
0.5	1.999994	7.333275	3×10^{-5}
1	1.999989	7.333218	5×10^{-5}
1.5	1.999984	7.333161	6.4×10^{-4}
2	1.999978	7.333103	7.3×10^{-4}
2.5	1.999973	7.333046	9.1×10^{-5}



Şekil 7.4. $h = 0.02$ ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 0$ ve $t = 2.5$ zamanındaki $|U|$



Şekil 7.5. $h = 0.02$ ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanında mutlak hata



Şekil 7.6. $h = 0.02$ ve $\Delta t = 0.005$ için $t = 2.5$ zamanında hata

Daha önceden yapılan bazı sayısal çözüm çalışmaları ile karşılaştırma yapabilmek için Çizelge 7.3 ve Çizelge 7.4'de genlik=1 ve genlik=2 için farklı konum ve zaman adımlarında L_∞ ve \widehat{C}_1 ve \widehat{C}_2 değerleri verilmiştir. Burada $\widehat{C}_1 = \frac{C_1 - C_{10}}{C_{10}}$ ve $\widehat{C}_2 = \frac{C_2 - C_{20}}{C_{20}}$ olarak alınmıştır. C_1 ve C_2 , $t = 1$ zamanındaki korunum değerlerini, C_{10} ve C_{20} değerleri de $t = 0$ zamanındaki korunum değerlerini göstermektedir.

Çizelge 7.3. $t = 1$ zamanında genlik=1 için sonuçlar

h	Δt	L_∞	\widehat{C}_1	\widehat{C}_2
0.05	0.005	0.014132	-0.00001	0.01745
0.3125	0.02	0.104141	0.00024	0.13101
0.02	0.005	0.000050	-0.00001	-0.00002
0.05	0.001	0.021765	0.00000	0.02696
0.08	0.002	0.019854	0.00000	0.02458
0.3125	0.0026	0.134831	0.00025	0.171161

Çizelge 7.4. $t = 1$ zamanında genlik=2 için sonuçlar

h	Δt	L_∞	\widehat{C}_1	\widehat{C}_2
0.1	0.05	1.115394	-0.00772	-0.72020
0.02	0.05	0.131335	-0.00394	-0.09976
0.01	0.005	3.268353	-0.00660	-1.02942
0.02	0.005	0.000388	-0.00002	-0.00032
0.02	0.0001	0.341420	0.000001	0.25980
0.05	0.0012	0.029885	-0.00024	0.01903

7.3.2. Problem (2) (İki soliton dalganın çarpışması)

Zıt yönde hareket eden iki solitonun çarpışması $t = 0$ başlangıç anında,

$$U(x, 0) = \alpha_1 \sqrt{\frac{2}{q}} \exp i\left(\left(\frac{S_1}{2}(x - x_1)\right) \operatorname{sech}(\alpha_1(x - x_1))\right) + \alpha_2 \sqrt{\frac{2}{q}} \exp i\left(\left(\frac{S_2}{2}(x - x_2)\right) \operatorname{sech}(\alpha_2(x - x_2))\right) \quad (7.32)$$

ile verilir. Burada tepe noktaları x_1 ve x_2 , $[a, b]$ konum aralığında genlikleri $\alpha_1 \sqrt{\frac{2}{q}}$ ve $\alpha_2 \sqrt{\frac{2}{q}}$ değerleri ile belirtilmektedir. İki soliton çarpışması test probleminde $q = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $S_1 = -4$, $S_2 = 4$, $x_1 = 10$, $x_2 = -10$ parametre değerleri alınarak $-20 \leq x \leq 20$ konum aralığında $t = 5$ zamanına kadar program çalıştırılarak hesaplama yapılmıştır.

Soliton dalgaları başlangıç konumlarından birbirlerine zıt yönde harekete başladıktan bir süre sonra çarpışarak şekillerinde herhangi bir değişiklik olmadan

yollarına devam etmektedirler. Dalga hareketleri ve çarpışma modellenmesi $h = 0.02$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için Şekil 7.7’de verilmiştir. Korunum değerlerinin zaman içerisinde değişmeden kalması beklenmektedir. Çizelge 7.5’de $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için, Çizelge 7.6’de $h = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için ve Çizelge 7.7’de $h = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için korunum değerlerinin farklı zamanlardaki değişimi verilmiştir.

Çizelge 7.5. $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri

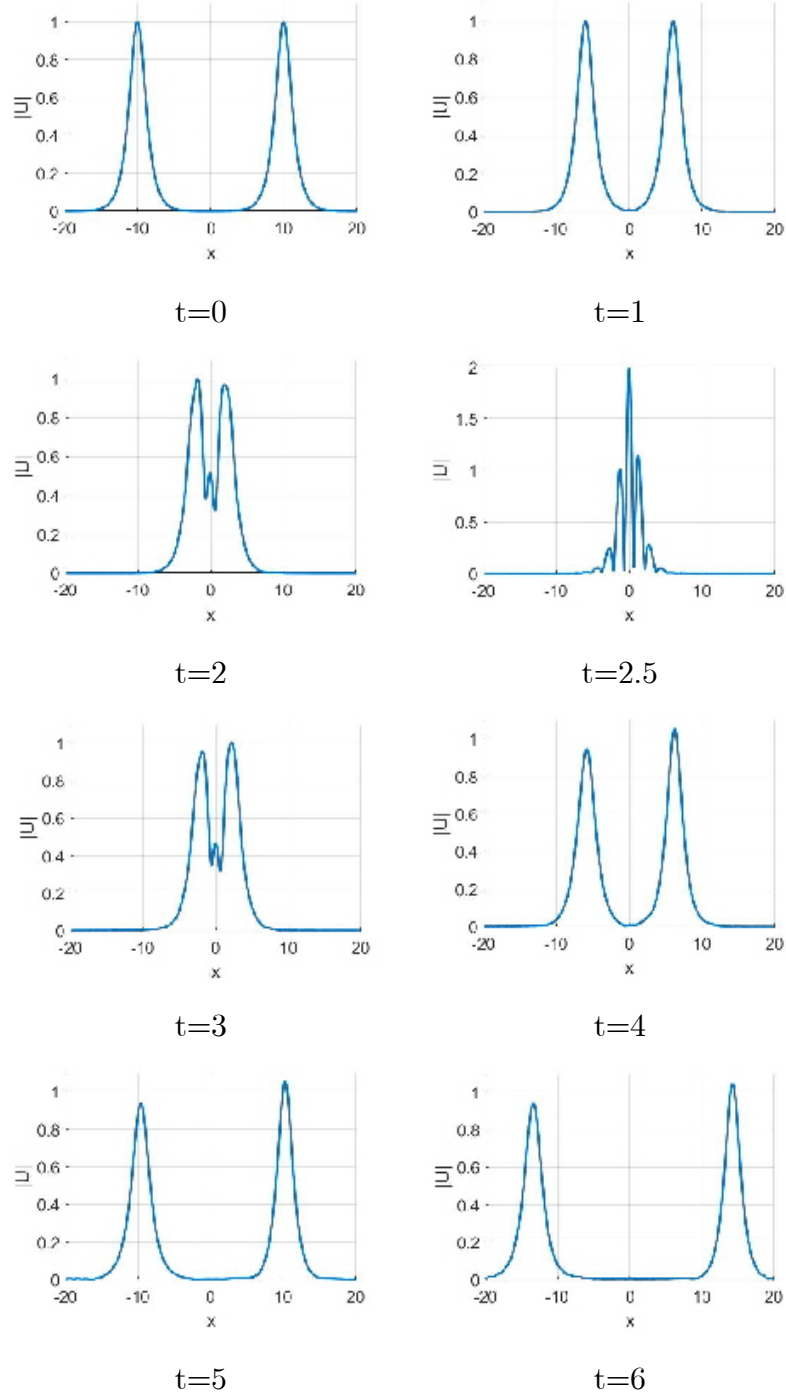
t	C_1	C_2	t	C_1	C_2
0	4.000000	14.666150	3	4.000553	14.563420
0.5	3.999924	14.506014	3.5	4.000460	14.742422
1	3.999851	14.355495	4	4.000338	15.037575
1.5	3.999779	14.213780	4.5	4.000189	15.392817
2	3.999710	14.079742	5	4.000022	15.748364
2.5	4.000119	14.125999			

Çizelge 7.6. $h = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri

t	C_1	C_2	t	C_1	C_2
0	4.000000	14.666150	3	3.999477	13.559655
0.5	3.999902	14.497650	3.5	3.999398	13.403474
1	3.999807	14.330466	4	3.999321	13.252378
1.5	3.999715	14.164735	4.5	3.999247	13.252378
2	3.999626	13.998468	5	3.999175	12.955779
2.5	3.999548	13.773531			

Çizelge 7.7. $h = 0.02$, $\Delta t = 0.005$ için korunum sabitleri

t	C_1	C_2	t	C_1	C_2
0	4.000000	14.666666	3	3.999954	14.143332
0.5	3.999988	14.582139	3.5	3.999943	14.076092
1	3.999976	14.498276	4	3.999932	14.014161
1.5	3.999964	14.414954	4.5	3.999920	13.955311
2	3.999953	14.331028	5	3.999909	13.897685
2.5	3.999954	14.232133			



Şekil 7.7. İki soliton dalganın çarpışması

Çizelgelerden görülmektedir ki, konum ve zaman adımının özel seçimi korunum sabitlerinin yaklaşık değeri analitik değere yaklaşmayı sağlamakta fakat yöntem soliton dalgaların çarpışmadan sonra şeklini değiştirmeden yoluna devam ettiği durumu az bir hata ile modelleyebilmektedir.

NLS denklemi, kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları ile en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal olarak zlmtır. Hesaplanan değerlerin daha önceden yapılmış çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu grlmtır. Bu nedenle kübik trigonometrik B-spline en küçük kareler yönteminin makul sonuçlar verdiği söylenebilir.

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS gibi lineer ve lineer olmayan bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için önerilen trigonometrik B-spline en küçük kareler metodu ile elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Bu tez çalışmasında kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılarak, sonlu elemanlar sayısal çözüm yöntemine dayanan en küçük kareler metodu önerilmiştir. Trigonometrik B-spline en küçük kareler metodu ile lineer AD, lineer olmayan RLW, Burgers, Fisher ve NLS kısmi diferansiyel denklemleri sayısal çözülmüş, çeşitli test problemleri kullanılarak yöntemin doğruluğu değerlendirilmiştir. Yöntem uygulanırken kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. En küçük kareler yönteminin yapısı gereği önce konum parçalanması ile çözüm algoritması oluşturulmuş ardından da zamana göre ayrıştırma yapılmıştır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözerken lineerleştirme yaptığımız için sonuçları iyileştirebilmek amacıyla iç iterasyon kullanılmış, fakat iterasyon sayısının artması sonuçların iyileşmesini sağlamamış, bazı durumlarda da sonuçların bozulmasına neden olmuştur. Bu nedenle çözüm algoritmalarında iç iterasyon kullanılmamıştır. Test problemlerinin çözümü için problemin yapısına göre farklı zaman ve konum adımları ile çalışılmıştır. Bulgular çizelge ve şekiller ile gösterilmiştir. Elde edilen algoritmaların çözülmesi için MATLAB paket programı kullanılmıştır.

AD denklemi, farklı difüzyon katsayıları " μ " ve farklı akış hızı " α " parametre değerleri içeren dört test problemi ile sayısal çözümleri üzerine çalışılmıştır. Birinci ve ikinci test problemlerinde L_∞ hata normu, üçüncü ve dördüncü test problemlerinde L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanmıştır. Buna göre, konum ve zaman adımlarının küçük seçilmesinin sonuçların iyileşmesini sağladığı görülmüştür. Dahası zaman adımının küçük olmasının bu iyileşmede daha fazla etkili olduğu tespit edilmiştir. Kısmi diferansiyel denklemin lineer olmasında yöntemin doğruluğu üzerinde olumlu etki gösterdiği düşünülmüştür. Üçüncü test probleminde, literatürde daha çok görülen konum aralığı metre cinsinden olup, bu çalışmada konum adımının küçük seçilebilmesi amacıyla kilometre cinsinden alınmıştır.

RLW denklemi üç test problemi ile çalışılmıştır. Birinci test probleminde RLW denkleminin tek dalga hareketini modelleyen problemin sayısal çözümü çalışılmıştır. İki farklı genlik değeri kullanılarak yapılan çözümlerde büyük genlik değeri için hata normlarının daha küçük olduğu gözlemlenmiştir. Bunun sebebinin küçük genlik kullandığımızda hataların uç kısımlarda gelmesinden kaynaklanmaktadır. Sınırlardaki bu hataları indirmek için çözüm aralığı genişletilmiştir. Her iki genlik değeri içinde korunum değerinin analitik sonuçları ile sayısal sonuçlarının uyumlu olduğu görülmüştür.

İki dalganın çarpışması test problemi iki farklı durum için incelenmiştir. Dalga çarpışması probleminin analitik çözümü mevcut olmadığı için sadece korunum değerleri hesaplanmıştır. Sayısal sonuçların zaman içerisinde bir miktar bozulmaya uğradığı görülmüştür. Şekil 4.7’de dalga çarpışması simülasyonu verilmiş olup, genliği büyük olan dalganın küçük genlikli dalgayı yakalayarak çarpışmanın gerçekleştiği ve ardından şekilde bariz bir bozulma olmadan yollarına devam ettiği görülmektedir. İkinci durumda sonuçlar daha iyi olmakla birlikte korunum değerlerinde küçük bozulmalar gözlemlenmiştir.

Dalga oluşumu test probleminde "d" parametresinin iki farklı değeri için sayısal çözüm yapılmıştır. Sonuçları değerlendirmek için korunum değerleri hesaplanmıştır. Farklı zamanlarda farklı korunum değerleri elde edilmesi değerlendirme yapılmasına uygun olmadığından lineer artış oranını gösteren $M_1 = \frac{dC_1}{dt}$, $M_2 = \frac{dC_2}{dt}$, $M_3 = \frac{dC_3}{dt}$ değerleri hesaplanarak Çizelge 4.9 ve 4.10’da verimmiştir. Bu sonuçların önceki çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Burgers denklemi için de iki farklı test probleminin sayısal çözümü yapılarak elde edilen veriler değerlendirilmiştir. Birinci test problemi, farklı konum ve zaman adımları kullanılarak $x \in [0, 1]$ konum aralığında hesaplanmış, sayısal ve analitik değerler kıyaslanmıştır. Yöntemin doğruluğunu önceki çalışmalar ile karşılaştırmak amacıyla $\|e\|_1$ hata normu kullanılmıştır. Sonuçların, küçük konum ve zaman adımları için iyileştiği ve önceki çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

İkinci test probleminde farklı konum ve zaman adımları için hesaplama yapılmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanmış ve konum ve zaman adımlarının küçük seçilmesi ile

hata değerlerinin de küçüldüğü görülmüştür. Şekil 5.3 de $\lambda = 0.005$ gibi küçük viskozite değeri için sayısal ve analitik çözüm bir arada gösterilmiş ve çözümlerin uyumlu olduğu görülmüştür.

Fisher denkleminin iki test problemi için sayısal çözümü yapılmıştır. Birinci test probleminde L_2 ve L_∞ hata normları literatürde sık karşılaşılan parametre değerleri ve konum ve zaman adımları kullanılarak hesaplanmıştır.

İkinci test problemi titreşim profili başlığı ile verilmiştir. Bu test probleminin analitik çözümü olmadığı için sonuçların değerlendirilmesi amacıyla bağıl hata normu (*Rel*) kullanılmıştır. Farklı konum aralıkları için çözümler Çizelge 6.6, 6.7 ve 6.8'de gösterilmiştir. Her iki test probleminde önceki çalışmalar ile tatmin edici düzeyde uyumlu olduğu görülmüştür.

NLS denklemi tek soliton çözümü ve iki soliton dalganın çarpışması başlıkları ile iki farklı test probleminin sayısal çözümü yapılarak incelenmiştir. Bu denklem kompleks terim içerdiği için, literatürde genellikle sayısal çözüm bulunurken çözüm fonksiyonu reel ve sanal kısımlara ayrılmaktadır. Fakat bu çalışmada U sayısal çözümü sanal ve reel terim ayrıştırması yapılmadan kullanılmıştır. Tek soliton çözümü test probleminde L_∞ hata normu $\Delta t = 0.005$, $h = 0.05$, 0.02 değerleri için hesaplanmıştır. $h = 0.02$ konum adımı için hata normunun daha küçük olduğu gözlemlenmiştir.

İki solitonun çarpışması test problemi farklı konum ve zaman adımları için çözülmüş ve korunum değerleri Çizelge 7.5, 7.6 ve 7.7'de verilmiştir. Burada korunum değerlerinin zaman içinde az da olsa bozulmaya uğradığı görülmektedir. Şekil 7.7'de zıt yönlü hareket eden iki soliton dalganın çarpışma anından sonra genliklerinde ufak bir değişiklik oluşarak yollarına devam ettikleri görülmektedir. Sonuçların yüksek doğrulukda olmamakla birlikte kabul edilebilir olduğu söylenebilir.

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS denklemlerinin trigonometrik B-spline en küçük kareler metodu ile sayısal çözümü araştırılmıştır. Toplam 9 bölümden oluşan çalışmanın ikinci bölümünde yöntemin daha kolay anlaşılabilmesi için bazı temel bilgi ve kavramlar hakkında kısa açıklamalar yapılmıştır.

Trigonometrik B-spline en küçük kareler metodu uygulanırken kübik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Kullanılan yöntem gereği zaman ayrıştırması yapılmadan, öncelikle konum ayrıştırması uygulanmıştır. Konum ayrıştırmasında kullanılan " h " konum adımının uzunluğunun küçük seçilmesi, aynı zamanda zaman adımının da küçük seçilmesi sonuçların iyileşmesini sağlamıştır. Konum adımının 1'den büyük olduğu durumlarda sonuçlarda ciddi bozulmalar ile karşılaşmıştır. Bu nedenle AD denkleminin üçüncü test probleminde metre cinsinden olan konum aralığı km cinsine çevrilerek konum adımının 1'den küçük alınabilmesi sağlanmıştır.

AD denkleminin sayısal çözümünden elde edilen sonuçlar, denklemin lineer olması sebebiyle diğer denklemlerden elde edilen sonuçlardan daha iyi olarak gelmiştir. Hatta birinci test probleminde analitik çözüm trigonometrik olduğu için B-spline fonksiyonları ile uyum göstermiş ve sonuçlara olumlu yönde etki etmiştir. AD denklemi için çözümü yapılan diğer test problemlerinden de iyi sonuçlar elde edilmiştir.

RLW denklemi için çalışılan üç test probleminden birincisinde tek dalga çözümü sayısal olarak yapılmıştır. İki farklı genlik kullanılarak bulunan sonuçlardan büyük genlikli durumda elde edilen değerlerin daha iyi olduğu görülmüştür. İki dalganın çarpışması test probleminde korunum değerlerinde bir miktar bozulma gerçekleşmiştir. Fakat kabul edilebilir sınırlar içinde bir fark olduğu söylenebilir. Dalga oluşumu test probleminde ardışık dalga oluşumunun başarı ile modellenemediği ve önceki çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Burgers denklemi iki farklı test problemi ile incelenmiştir. Birinci problemde birçok farklı zaman ve konum adımı için $\|e\|_1$ hata normu hesaplanmıştır. Hata normu zaman ve konum adımlarının küçülmesine paralel olarak küçülmektedir, ayrıca farklı vizkozite değerleri için yapılan hesaplamalarda sayısal çözüm ile analitik çözüm

uyumludur. Burgers denkleminin analitik çözümün bozulduğu $\lambda < 0.01$ vizkozite değeri için $\lambda = 0.001$ alınarak bulunan sayısal çözümün dalga hareketini modellediği görülmektedir (Bkz. Şekil 5.1). İkinci test probleminde de benzer şekilde farklı konum ve zaman adımları ile çalışılmış ve $\lambda = 0.5$ vizkozite değeri için elde edilen sayısal çözümlerden en iyi sonuç $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için bulunmuştur. $\lambda = 0.005$ için yapılan sayısal ve analitik çözümlerin birbiri ile uyumlu olduğu görülmüştür (Bkz. Şekil 5.3).

Fisher denklemi için iki test problemi ile yöntemin uygulaması yapılmıştır. Literatürdeki çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla belirlenen parametre değerleri ile çalışılmıştır. Buna göre birinci test probleminde üç farklı β parametresi için iki farklı konum adımı ile hesaplamalar yapılmıştır. Farklı zamanlar için L_2 ve L_∞ hata normları Çizelge 6.1'de verilmiş olup sonuçların, benzer çalışmalar ile kıyaslandığında kabul edilebilir sınırlar içinde olduğu görülmüştür. İkinci test problemi başlangıç titreşim profili başlığı ile verilmiştir. Farklı zaman aralıkları için sayısal çözümler Şekil 6.6, 6.7 ve 6.8'de gösterilmiştir. Problemin analitik çözüm olmadığı için sonuçlar bağıl hata (*Rel*) ile hesaplanmış ve Çizelge 6.2'de verilmiştir. Sonuçların literatürdeki çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

NLS denklemi, tek soliton dalga ve iki soliton dalganın çarpışması başlıkları ile verilen iki test probleminin sayısal çözümü ile çalışılmıştır. Tek soliton dalga çözümü için iki farklı konum ve zaman adımı değeri ile hesaplamalar yapılmıştır. Korunum değerleri ve L_∞ hata normu verileri Çizelge 7.1 ve 7.2'de verilmiştir. Şekil 7.1 ve 7.2'de $|U|$ 'nin konuma göre değişimi gösterilmiştir. Elde edilen değerlerin makul sınırlar içinde olduğu söylenebilir. İki soliton dalganın çarpışması test probleminde zıt yönlerde birbirine doğru hareket eden iki dalganın çarpışması ve sonrasındaki durumları modellenmiştir (Bkz. Şekil 7.7). Çarpışmadan sonra iki dalganın yollarına devam ettiği, fakat dalgaların çarpışma sonrasında şekillerinde bir miktar bozulma olduğu görülmüştür. Farklı konum ve zaman adımları için hesaplanan korunum değerleri Çizelge 7.5, 7.6 ve 7.7'de verilmiştir. $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için korunum değerlerinin en iyi olduğu görülmüştür. NLS denklemi ile yapılan çalışmada sonuçların kabul edilebilir değerlerde olduğu söylenebilir.

Sonuç olarak, trigonometrik B-spline en küçük kareler metodu AD, RLW, Burgers, Fisher ve NLS kısmi diferensiyel denklemlerinin sayısal çözümleri için başarı ile uygulanmıştır. En küçük kareler yönteminde lineerleştirmeden kaynaklı hataları indirgeyebilmek için uyguladığımız iç iterasyonun iyi sonuçlar vermemesi sonuçların iyileşmesi anlamında sınırlayıcı etki göstermiştir. Bu nedenle algoritmalarda iç iterasyon kullanılmamıştır. Zaman ve konum adımı değerleri değiştirilerek birçok kez hesaplama yapılmış ve küçük konum ve zaman adımlarının seçiminin sonuçların iyileşmesinde etkili olduğu görülmüştür. Fakat, bu durumda da işlem maliyetinin arttığı ve bir yerden sonra da bilgisayarında bellek aşımı gerçekleştiği tespit edilmiştir. Bu anlamda, ileride yapılacak çalışmalarda sonuçların hata değerlerini küçültmek amacıyla en küçük kareler yöntemi zaman parçalanması ile birlikte kullanılabilir. Trigonometrik B-spline fonksiyonları için en iyi konum adımı stratejisi için çalışma yapılabilir. Bu çalışmada yalnızca kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları ile çalışılmış olup, farklı dereceden B-spline'lar ile çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abazari, R., Borhanifar, A., 2010, Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2711-2722.
- Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014a, Numerical method using cubic trigonometric B-spline technique for nonclassical diffusion problems, *Abstract and applied analysis*, Vol. 2014, Hindawi.
- Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014b, The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems, *Applied Mathematics and Computation* 239, p. 74–88.
- Abbasbandy, S., Darvishi, M. T., 2005, A numerical solution of Burgers' equation by modified Adomian method, *Applied Mathematics and Computation* 163(3), p. 1265–1272.
- Abdou, M.A., Soliman, A.A., 2005, Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 181(2), 245-251.
- Ablowitz, M.J., Zeppetella, A., 1979, Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. *Bulletin of Mathematical Biology*, 41(6), 835-840.
- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (10th Printing), Dover Publications, p.11.
- Ahmad, Z., Kothiyari, U.C., 2001, Time-line cubic spline interpolation scheme for solution of advection equation. *Computer & Fluids*, 30(6), 737-752.
- Ahmet, Z., 2000, Numerical solution for advection-diffusion equation with spatially variable coefficients. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 6(1), 46-54.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Aksan, E.N. and Ozdes, A., 2004 “ A numerical solution of Burgers’ equation”, Appl. Math. Comput., 156(2), 395-402.
- Aksan, E.N., 2005, A numerical solution of Burgers’ equation by finite element method constructed on the method of discretization on time, Appl. Math. Comput., 170(2), p.895-904.
- Aksan, E.N., 2006, Quadratic B-spline finite element method for numerical solution of the Burgers’ equation. Applied Mathematics and Computation, 174(2), 884-896.
- Aksan, E.N., Özdeş, A., Öziş, T., 2006, A numerical solution of Burgers’ equation based on least squares approximation. Applied Mathematics and Computation, 176(1), 270-279.
- Aksoy, A.M., Irk, D., Dağ, İ., 2013, Taylor collocation method for the numerical solution of the NLS equation using cubic B-spline basis, International Journal of Nonlinear Science, 15(4), p.322-333.
- Aksoy, A.M., Irk, D., Dağ, İ., 2012, Taylor collocation method for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation using quintic B-Spline basis, Physics of Wave Phenomena, 20(1), p.67-79.
- Alexander, M.E., Morris, J. L., 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves. Journal of Computational Physics, 30(3), 428-451.
- Ali, A.H.A., Gardner, G.A., Gardner, L.R.T., 1992, A collocation solution for Burgers’ equation using cubic B-spline finite elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 100, p.325-337.
- Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., 1990, A Galerkin approach to the solution of Burgers’ equation, Maths Preprint Series, No.90.04.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Al-Khaled, K., 2001, Numerical study of Fisher's reaction–diffusion equation by the Sinc collocation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 137(2), 245-255.
- Alshomrani, A.S., Pandit, S., Alzahrani, A.K., Alghamdi, M. S., & Jiware, R. (2017). A numerical algorithm based on modified cubic trigonometric B-spline functions for computational modelling of hyperbolic-type wave equations. *Engineering Computations*.
- Altıparmak, K., Öziş, T., 2011, Numerical solution of Burgers' equation with factorized diagonal Padé approximation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- Asaithambi, A., 2010, Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation. *Applied Mathematics and Computation*, 216(9), 2700-2708.
- Ay, B., Dağ, I., Gorgulu, M.Z., 2015, Trigonometric quadratic B-spline subdomain Galerkin algorithm for the Burgers' equation, *Open Phys.*, 13, p.400-406.
- Bahadır, A.R., Sağlam, M., 2005, A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 160(3), 663-673.
- Balyan, L.K., Mittal, A. K., Kumar, M., Choube, M., 2020, Stability analysis and highly accurate numerical approximation of Fisher's equations using pseudospectral method. *Mathematics and Computers in Simulation*, 177, 86-104.
- Başhan, A., Uçar, Y., Yağmurlu, N. M., Esen, A., 2018, A new perspective for quintic B-spline based Crank-Nicolson-differential quadrature method algorithm for numerical solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *The European Physical Journal Plus*, 133(1), 1-15.
- Bateman, H., 1915, Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review* 43, 163–170.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., 1972, Model Equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 272, 47-78.
- Bhardwaj, D., Shankar, R. 2000, A computational method for regularized long wave equation. Computers & Mathematics with Applications, 40(12), 1397-1404.
- Bona, J. L., Bryant, P. J., 1973, A mathematical model for long waves generated by wavemakers in non-linear dispersive systems. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 73, No. 2, pp. 391-405). Cambridge University Press.
- Boussinesq, J. (1871). "Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire". Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 72: 755–759. (1.2)
- Bulut, H., Akturk, T., Ucar, Y., 2013, The solution of advection diffusion equation by the finite elements method. convergence, 2, 9.
- Burgers, J.M., 1948, A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Advances in Applied Mechanics, Elsevier, Vol. 1, p. 171-199
- Burgers, J. M., 1939, Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, Trans. Roy. Neth. Acad. Sci., cilt 17, no. 2, p. 1-53.
- Caldwell, J., Wanless, P., & Cook, A. E. (1981). A finite element approach to Burgers' equation. Applied Mathematical Modelling, 5(3), 189-193.
- Canosa, J., 1969, Diffusion in nonlinear multiplicative media. Journal of Mathematical Physics, 10(10), 1862-1868.
- Chandraker, V., Awasthi, A., Jayaraj, S., 2015, A numerical treatment of Fisher equation. Procedia Engineering, 127, 1256-1262.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Chang, Q., Wang, G., Guo, B., 1991, Conservative scheme for a model of nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary motion. *Journal of Computational Physics*, 93(2), 360-375.
- Chatwin P.C. , Allen C.M. Mathematical models of dispersion in rivers and estuaries *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17 (1985), p. 119-149.
- Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A. R., & Sanz-Serna, J. M. (1981). Product approximation for non-linear problems in the finite element method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1(3), 253-266.
- Cole, J.D., 1951, On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl.*, 9, p. 225–236.
- Crawford, F.S., 1968, *Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3*, Berkeley physics course, McGraw-Hill Book Company.
- Dağ, İ., 1999, A quadratic B-spline finite element method for solving nonlinear Schrodinger equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 174(1-2), 247-258.
- Dağ, İ., Ersoy, O., Kacmaz, O., 2014, The trigonometric cubic B-spline algorithm for Burgers' equation, arXiv:1407.5434.
- Dağ, İ., 2000, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 182, Issues 1–2, p. 205-215.
- Dağ, İ., Özer M. N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 25(3), p. 221-231.
- Dağ, İ., Saka B., Irk D., 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation* 159(2), p. 373-389.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dağ, İ., Doğan, A., Saka, B., 2003, B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation. *International journal of computer mathematics*, 80(6), 743-757.
- Dağ, I., Canivar A. , A. Sahin, 2011, Taylor–Galerkin and Taylor collocation methods for the numerical solutions of Burgers’ equation using B-splines, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16 , 2696-2708.
- Dağ, İ., Irk D. , Saka B., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 163, no. 1, p. 199–211.
- Dağ, İ., Irk, D., Tombul, M., 2006, Least-squares finite element method for the advection diffusion equation. *Appl. Math. Comput.*, 173, 554-65.
- Dağ, İ., Saka, B. and Boz, A., 2005, B-spline Galerkin methods for numerical solution of Burgers equation, *Appl. Math. Comput.*, 166, 506-522
- Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 190(1-2), 532-547.
- Dağ, İ., Şahin, A., Korkmaz, A., 2010, Numerical investigation of the solution of Fisher's equation via the B-spline Galerkin method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26(6), 1483-1503.
- Dag, İ., Ersoy, Ö., 2016, The exponential cubic B-spline algorithm for Fisher equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 86, 101-106.
- Dang-Vu, H., Delcarte, C., 1995, Hopf bifurcation and strange attractors in Chebyshev spectral solutions of the Burgers equation. *Applied mathematics and computation*, 73(2-3), 99-113.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Darvishi, M.T., Javidi, M., 2006, A numerical solution of Burgers' equation by pseudospectral method and Darvishi's preconditioning. *Applied mathematics and computation*, 173(1), p. 421-429.
- De Boor, C., 1978, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, p.392.
- Dereli, Y., 2012, The meshless kernel-based method of lines for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation, *Engineering analysis with boundary elements*, 36(9), 1416-1423.
- Dereli, Y., Irk, D., Dağ, İ., 2009, Soliton solutions for NLS equation using radial basis functions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2), 1227-1233.
- Dhawan, S., Rawat, S., Kumar, S. and Kapoor, S., 2011, Solution of advection diffusion equation using finite Element Method. *Modelling Simulation and applied optimization international conference (ICMSAO), IEEE* , 1-4.
- Dhawan, S., Kapoor, S. and Kumar, S., 2012, Numerical method for advection diffusion equation using FEM and B-splines. *Journal of Computational Science* 3,429-43.
- Dogan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov–Galerkin method. *Communications in numerical methods in engineering*, 17(7), 485-494.
- Dogan, A., 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method. *Applied Mathematical Modelling*, 26(7), 771-783.
- Döken, F. Taşcan, 2002, *İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi. (1.3.1)
- Drazin, P.G.; Johnson, R. S., 1989, *Solitons: an introduction* (2nd ed.), Cambridge University Press, ISBN 0-521-33655-4. p. 15, (1.2)
- Eilbeck, J.C., McGuire, G. R., 1975, Numerical study of the regularized long-wave equation I: numerical methods. *Journal of Computational Physics*, 19(1), 43-57.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Eilbeck, J.C., McGuire, G.R., 1977, Numerical study of the regularized long-wave equation. II: Interaction of solitary waves. *Journal of Computational Physics*, 23(1), 63-73.
- El-Sayed, S. M., Kaya, D., 2006, A numerical solution and an exact explicit solution of the NLS equation. *Applied mathematics and computation*, 172(2), 1315-1322.
- Ersoy, Ö., Dağ, İ., 2016, A trigonometric cubic b-spline finite element method for solving the nonlinear coupled Burger equation. *arXiv preprint arXiv:1604.04419*.
- Esen, A., Kutluay, S., 2006, Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 174, p.833-845.
- Evans, D.J., Abdullah, A. R., 1984, The group explicit method for the solution of Burger's equation. *Computing*, 32(3), 239-253.
- Fairweather, G., Khebchareon, M., 2002, Numerical methods for Schrödinger-type problems. *Trends in Industrial and Applied Mathematics*, 219-250.
- Fletcher, C.A.J., 1983, A comparison of finite element and finite difference solutions of the one-and two-dimensional Burgers' equations. *Journal of Computational Physics*, 51(1), 159-188.
- Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: a survey of results, *Manchester Univ Pr*, 300, p. 5, (1.3.1)
- Funaro, D., Pontrelli, G., 1999, Spline approximation of advection–diffusion problems using upwind type collocation nodes. *Journal of computational and applied mathematics*, 110(1), 141-153.
- Gardner, C.S., Greene, J. M.; Kruskal, M. D.; Miura, R. M., 1967, Method for Solving the Korteweg–deVries Equation, *Physical Review Letters* 19 (19): 1095–1097.
- Gardner, L., Gardner, G. A., Doğan, A., 1997, A Petrov-Galerkin finite element scheme for Burgers' equation.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Gardner, L.R.T., Dağ, İ., 1994, A numerical solution of the advection-diffusion equation using B-spline finite element. Proceedings International AMSE Conference SYSTEMS Analysis, Control & Design Lyon, France, July 4-6, 1,109-16.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G. A., 1990, Solitary waves of the regularised long-wave equation. *Journal of Computational Physics*, 91(2), 441-459.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A., Amein, N. K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 147(1-2), p. 147-152.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G. A., Dag, I., 1995, A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 11: 59–68.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G. A., Dogan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12(11), p. 795-804.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Zaki, S.I., El Sharawi, Z., 1993 b, B-spline finite element studies of the non-linear Schrödinger equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108(3-4), p.303-318.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Zaki, S.I., El Sharawi, Z., 1993 a, A leapfrog algorithm and stability studies for the non- linear Schrödinger equation, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 18(1) p.23-32.
- Goh J., Majid AA., Ismail AIMd., 2012, Cubic B-spline collocation method for one-dimensional heat and advection-diffusion equations, *Journal of Applied Mathematics*, 1-8.
- Goh, J., Abd. Majid, A. and Md. Ismail, A.I., 2010, A comparison of some splinesbased methods for the one-dimensional heat equation. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 70, p. 858-861.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Görgülü, M.Z., Dağ, İ., 2018, Exponential B-splines Galerkin Method for the Numerical Solution of the Fisher's Equation, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42(4), 2189-2198.
- Gorgulu, M.Z., Dağ, İ., Irk, D., 2017, Simulations of solitary waves of RLW equation by exponential B-spline Galerkin method, *Chinese Physics B*, 26(8), 080202.
- Görgülü, M.Z., İdris, D., Doğan, S., Dursun, I., 2018, A Numerical Solution of the Advection-Diffusion Equation by Using Extended Cubic B-spline Functions, *Anadolu Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi A-Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik*, 19(2), 347-355.
- Görgülü, M.Z., Dağ, I., Irk, D., 2015, Galerkin Method for the numerical solution of the RLW equation by using exponential B-splines, arXiv:1504.05901.
- Gu, Chaohao, 1995, *Soliton theory and its applications*, Springer, p. 403, (1.2).
- Gülsu, M., 2006, A finite difference approach for solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1245-1255.
- Gülsu, M., Öziş, T., 2005, Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation, *Applied mathematics and computation*, 171(2), 1192-1200.
- Hald, A., 1998, *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930 (Vol. 2, No. 4)*. New York: Wiley.
- Hamid, N.N.A., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., 2010, Cubic trigonometric B-spline applied to linear two-point boundary value problems of order two, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, Vol 4, No:10, p.1377-1382.
- Han, X., 2003, Piecewise quadratic trigonometric polynomial curves, *Mathematics of Computation*, 72, p.1369-1377.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Han, X., 2006, Quadratic trigonometric polynomial curves concerning local control, *Applied Numerical Mathematics*, 56, p.105-115.
- Hassanien, I. A., Salama, A. A., Hosham, H. A., 2005, Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 170(2), 781-800.
- Herbst, B. M., Schoombie, S. W. and Mitchell, A. R., 1982, A moving Petrov-Galerkin method for transport equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18, p. 1321-1336.
- Hon, Y. C., Mao, X.Z., 1998, An efficient numerical scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 95(1), 37-50.
- Hopf, E., 1950, The partial differential equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math.*, 3, p. 201–230.
- Höllig, K., 2003, *Finite element methods with B-splines*. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, p.143
- Hunter, J. K., 1996, *Nonlinear evolution equations*. University of California, Davis.
- Hussain, M. Z., Abbas, S., Irshad, M., 2017, Quadratic trigonometric B-spline for image interpolation using GA, *PloS one*, 12(6).
- İnan, B., Bahadır, A. R., 2014, A numerical solution of the Burgers' equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method, *J. Math. Comput. Sci.*, 4(5), 849-860.
- Inc, M., 2008, On numerical solution of Burgers' equation by homotopy analysis method, *Physics Letters A*, 372(4), 356-360.
- Irk, D., 2012, Solitary wave solutions for the regularized long-wave equation, *Physics of Wave Phenomena*, 20, p.174–183.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, s.148.
- Irk, D., 2009, Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers' equation, *Kybernetes*.
- Irk, D., Dağ, İ., Doğan, A., 2005, Numerical integration of the RLW equation using cubic splines. *The ANZIAM Journal*, 47(1), 131-142.
- Irk, D, Dağ, İ, Tombul, M, 2015, Extended cubic B-spline solution of the advection-diffusion equation, *KSCE Journal of Civil Engineers*, 19,p. 929-934.
- Irk, D., Keskin, P., 2017, Quadratic trigonometric B-spline Galerkin methods for the regularized long wave equation, *J Appl Anal Comput*, 7, 617-631.
- Irk, D., Keskin, P., 2016, Cubic trigonometric B-spline Galerkin methods for the regularized long wave equation. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 766, No. 1, p. 012032). IOP Publishing.
- Irk, D., Yıldız, P. K., Görgülü, M.Z., 2019, Quartic trigonometric B-spline algorithm for numerical solution of the regularized long wave equation, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 112-125.
- Iskandar, L., Mohsen, A., 1992, Some numerical experiments on the splitting of Burgers' equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8(3), 267-276.
- Jain, P.C., Iskandar L., 1979, Numerical solutions of the regularized long-wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20(2), p. 195-201.
- Jain, P.C., Raja, M., 1979, Splitting-up technique for Burgers' equations, *Indian J. pure appl. Math.*, 10, p. 1543-1551.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Jain, P.C., Holla, D.N., 1978, Numerical solution of coupled Burgers' equations, *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 13(4), p. 213-222.
- Jain, P. C., Lohar, B.L., 1979, Cubic spline technique for coupled non-linear parabolic equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 5(3), 179-185.
- Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T.V., 1995, Numerical technique for solving convective-reaction-diffusion equation. *Mathematical and computer modelling*, 22(9), 113-125.
- Jain, P.C., Shankar, R., and Singh, T.V., 1992, Cubic spline technique for solution of Burgers' equation with a semi-linear boundary condition, *Comm. Appl. Num. Meth.*, 8, p. 235-242.
- Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T. V., 1993, Numerical solution of regularized long-wave equation, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 9, p. 579–586.
- Jiwari R., Alshomrani, A.S., 2017, A new algorithm based on modified trigonometric cubic B-splines functions for nonlinear Burgers'-type equations, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 27 Issue: 8, p.1638-1661.
- Jiwari, R., Mittal, R.C., Sharma, K.K., 2013, A numerical scheme based on weighted average differential quadrature method for the numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 219(12), 6680-6691.
- Jiwari, R., Pandit, S., Koksai, M.E., 2019, A class of numerical algorithms based on cubic trigonometric B-spline functions for numerical simulation of nonlinear parabolic problems, *Computational and Applied Mathematics*, 38(3), 1-22.
- Kadalbajoo, M.K., Awasthi, A., 2006, A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, *Applied mathematics and computation*, 182(2), 1430-1442.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kadalbajoo, M.K., Sharma, K.K., Awasthi, A., 2005, A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers' equations. Applied mathematics and computation, 170(2), 1365-1393.
- Kakuda, K., Tosaka, N., 1990, The generalized boundary element approach to Burgers' equation. International journal for numerical methods in engineering, 29(2), 245-261.
- Kaplan, A.G., Dereli, Y., 2017, A meshless method and stability analysis for the nonlinear Schrödinger equation, Waves in Random and Complex Media, 27(4), p. 602-614.
- Kapoor, S., Dhawan, S., 2010, B-spline finite element technique for advectiondiffusion equation. Int. J. of Appl. Math. and Mech. 6, p. 75-94.
- Karpman, V.I., Krushkal, E.M., 1969, Modulated waves in non-linear dispersive media, Soviet Physics JETP, 28, p.277-281
- Katsuhiko, S., 1997, A new finite variable difference method with application to nonlinear Burgers' equation, Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications, 30, 2169-2180.
- Keskin, P. 2016, RLW denkleminin trigonometrik b-spline çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora tezi.
- Khalifa, A.K., Noor, K.I., Noor, M. A., 2011, Some numerical methods for solving Burgers equation. International Journal of Physical Sciences, 6(7), 1702-1710.
- Khuri, S.A., 2004, A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type. Chaos, Solitons & Fractals, 20(5), 1037-1040.
- Koch P.E., 1988, Multivariate trigonometric B-splines, Journal of Approximation Theory, 54, p.162-168.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Koch, P.E., Lyche, T., Neamtu, M., Schumaker, L.L., 1995, Control curves and knot insertion for trigonometric splines, *Advances in Computational Mathematics*, 3, p. 405-424.
- Korteweg, D.J., de Vries, G., 1895, On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, *Philosophical Magazine*, 5th series 39 (240): 422-443.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2011,. Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers' equation. *Journal of the Franklin Institute*, 348(10), 2863-2875.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., (2009). “A differential quadrature algorithm for nonlinear Schrödinger equation”, *Nonlinear Dynamics* 56.1, p. 69–83.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2011, Shock wave simulations using sinc differential quadrature method. *Engineering Computations*.
- Korkmaz A, Dağ, İ., 2012, Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation, *Int J Numer Method H*, 22, p. 1021-1036.
- Korkmaz A., Dağ, İ, 2013, Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers’ equation, *Engineering Computations*, 30,p. 320-344.
- Kumar, R., 2008, A Least-squares/Galerkin Split Finite Element Method for Incompressible and Compressible Navier-Stokes Equations (1.4.1).
- Kutluay, S., Bahadır, A. R., Özdeş, A., 1999, Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103(2), 251-261.
- Kutluay, S., Esen A., 2004a, A linearized numerical scheme for Burgers-like equations, *Applied mathematics and computation* 156.2, p. 295–305.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kutluay, S., Esen, A., 2004b, A lumped Galerkin method for solving the Burgers equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 81(11), p. 1433-1444.
- Kutluay S., A. Esen, 2006, A finite difference solution of the regularized long-wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 85743, p. 14, vol 2006.
- Kutluay, S., Esen, A., Dağ, İ., 2004, Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167(1), 21-33.
- Lighthill, M.J., 1954, On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 222(1148), 1-32.
- Lin, E.B., Zhou, X., 2001, Connection coefficients on an interval and wavelet solutions of Burgers equation. *Journal of computational and applied mathematics*, 135(1), 63-78.
- Lyche, T., Winther, R., 1979, A stable recurrence relation for trigonometric B-splines, *Journal of Approximation Theory*, 25, p.266-279.
- Mccartin, B.J., 1981, Theory, computation, and application of exponential splines, phdthesis, New York University.
- Mittal, R.C., Jain, R.K., 2012, Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method, *Appl. Math. Comp.*, 218, 7839- 7855.
- Mittal, R.C., Jiwari, R., Sharma, K.K., 2013, A numerical scheme based on differential quadrature method to solve time dependent Burgers' equation. *Engineering Computations*.
- Mehnaz M.H., 2016, Numerical Solution of Fisher's Equation by Using Meshless Method of Lines.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Nazir, T., Abbas, M., Ismail, A.I.M., Majid, A.A., Rashid, A., 2016, The numerical solution of advection–diffusion problems using new cubic trigonometric B-splines approach. *Applied Mathematical Modelling*, 40(7-8), 4586-4611.
- Nguyen, H., Reynen, J., 1982, A space-time finite element approach to Burgers' equation, C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen, E. Onate (Eds.), *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, Vol. 2, Pineridge Publisher, Swansea, p. 718–728.
- Nikolis, A., 2004, Numerical solutions of ordinary differential equations with quadratic trigonometric splines, *Applied Mathematics E-Notes*, 4, p.142-149.
- Nikolis, A., Seimenis, I., 2005, Solving dynamical systems with cubic trigonometric splines, *Applied Mathematics E-Notes*, 5, p.116-123.
- Okamoto S, Sakai K, Matsumoto K, Horiuchi K, Kobayashi K., 1998, Development and application of a three-dimensional Taylor-Galerkin numerical model for air quality simulation near roadway tunnel portals, *J Appl Meteor*, 37, 1010-1025.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85p. 143-160,
- Onarcan, A.T., Adar, N., Dağ, İ., 2018, Trigonometric cubic B-spline collocation algorithm for numerical solutions of reaction–diffusion equation systems. *Computational and Applied Mathematics*, 37(5), 6848-6869.
- Öziş, T., Özdeş, A., 1996, A direct variational methods applied to Burgers' equation. *Journal of computational and applied mathematics*, 71(2), 163-175.
- Öziş, T., Esen, A., Kutluay, S., 2005, Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements. *Applied Mathematics and Computation*, 165(1), 237-249.
- Öziş, T., Aksan, E.N., Özdeş, A., 2003, A finite element approach for solution of Burgers' equation, *Appl. Math. Comput.*, 139, 43-57, .

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Öziş, T., Aslan, Y., 2005, The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number. *Applied Mathematics and Computation*, 163(1), 131-145.
- Peregrine D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore. *Journal of Fluid Mechanics*, 25, p. 321-330.
- Pepper, D.W., Kern C.D. and Long, P.E.Jr., 1979, Modeling the dispersion of atmospheric pollution using cubic splines and chapeau functions, *Atmos. Environ.*, 13, 223-237.
- Pospelov, L.A. ,1966, Propagation of finite amplitude elastic waves(Longitudinal elastic wave of finite amplitude propagation in isotropic solid), *Soviet Physics-Acoustics*, 11, 302-304.
- Prenter, P.M., 1975, *Splines and variational methods*, Wiley, New York, p. 323.
- Qiu, Y., Sloan, D., 1998, Numerical solution of Fisher's equation using a moving mesh method, *Journal of Computational Physics*, 146(2), p. 726-746.
- Ramadan, M.A., El-Danaf, T. S., Abd Alaal, F. E., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using septic B-splines. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(4), p. 1249-1258.
- Ramadan, M.A., El-Danaf, T. S., Abd Alaal, F. E., 2007, Application of the non-polynomial spline approach to the solution of the Burgers' equation. *The Open Applied Mathematics Journal*, 1(1).
- Raslan, K.R., 2003, A collocation solution for Burgers equation using quadratic B-spline finite elements, *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 80, no. 7, p. 931-938.
- Raslan, K.R., 2005, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation. *Applied Mathematics and Computation*, 167(2), 1101-1118.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Rayleigh, L., 1876, On waves, Philosophical Magazine. Series 5 1 (4), p. 257–279.
- Rayleigh, L., 1914, On the theory of long waves and bores. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 90(619), p. 324-328.
- Remoissenet, M., 1999, Basic Concepts and the Discovery of Solitons, Waves Called Solitons. Springer, p. 1–11.
- Roache P., 1972, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Press, Albuquerque, NM.
- Robinson, M.P., Fairweather, G., 1994, Orthogonal spline collocation methods for Schrödinger-type equation in one space variable, Numerische Mathematik, 68(3), p.303-318.
- Rubin, S.G., Khosla, P.K., 1976, Higher-order numerical solutions using cubic splines. AIAA Journal, 14(7), 851-858.
- Russel, J.S., 1845, Report on waves, British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845), p 311-390, Plates XLVII-LVII).
- Saka, B., 2012, A quintic B-spline finite-element method for solving the nonlinear Schrödinger equation. Physics of Wave Phenomena, 20(2), 107-117.
- Saka, B., 2015, A Quartic B-spline Collocation Method for Solving the Nonlinear Schrödinger Equation.
- Saka, B., Dağ, İ., 2005, A Collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis, The Arabian Journal for Science and Engineering, 30, p.39-50.
- Saka B., Dağ, İ., 2007, Quartic B-spline collocation methods to the numerical solutions of the Burgers' equation, Chaos, Solitons and Fractals, 32, 1125-1137.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Saka, B., Dağ, İ., 2008, A numerical study of the Burgers' equation. *Journal of the Franklin Institute*, 345(4), 328-348.
- Saka, B., Dağ, İ., 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines. *Communications in numerical methods in engineering*, 24(11), 1339-1361.
- Saka, B., Dağ, İ., Doğan, A., 2004, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-splines. *International Journal of Computer Mathematics*, 81(6), p. 727-739.
- Saka, B., Dağ, İ., Irk, D., 2008, Quintic B-spline collocation method for numerical solutions of the RLW equation, *The ANZIAM Journal*, 49, p.389–410.
- Saka, B., Şahin, A., Dağ, İ., 2011, B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27, p.581–607.
- Sankaranarayanan S., Shankar N.J., Cheong H.F., 1998, Threedimensional finite difference model for transport of conservative pollutants, *Ocean Engineering*, vol. 25, no. 6, p. 425–442.
- Sari, M., Gürarşlan, G., 2009, A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 208(2), 475-483.
- Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, p.112-141.
- Schoenberg, I.J., 1964, On trigonometric spline interpolation, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 13, p.795-825.
- Scott, A.C., Chu, F.Y.F., Mclaughlin, D.W., 1973, The soliton: A new concept in applied science, *Proceedings of the IEEE* 61(10), p.1443-1483.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Sever, R., Tezcan, C. 2008, Exact solution of the Schroedinger equation for the modified Kratzer's molecular potential with position-dependent mass. *International Journal of Modern Physics E*, 17(07), 1327-1334.
- Shabat, A., Zakharov, V., 1972, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet physics JETP* 34.1, p. 62.
- Shahrill, M., Fang, M.S.C., Nor, H.N.H.M., 2015, Applying explicit schemes to the korteweg-de vries equation, *Modern Applied Science* 9(4), p. 200.
- Sheng, Q., Khaliq, A.Q.M., Al-Said, E.A., 2001, Solving the generalized nonlinear Schrödinger equation via quartic spline approximation. *Journal of Computational Physics*, 166(2), 400-417.
- Soliman, A.A., 2012, A Galerkin solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Abstract and Applied Analysis*, **Vol.** 2012, Hindawi.
- Soliman, A.A., Hussien, M.H., 2005, Collocation solution for RLW equation with septic spline", *Applied Mathematics and Computation* 161(2), p. 623–636.
- Soliman, A.A., Raslan, K.R., 2001, Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation, *International journal of computer mathematics* 78(3), p. 399-412.
- Sun, F., Wang, J., 2017, Interpolating element-free Galerkin method for the regularized long wave equation and its error analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 315, p. 54-69.
- Szymkiewicz, R., 1993, Solution of the advection–diffusion equation using the spline function and finite elements. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 9, p. 197–206
- Şahin, A., Dağ, İ., Saka, B., 2008, AB-spline algorithm for the numerical solution of Fisher's equation. *Kybernetes*.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Taha, T.R., Ablowitz, M.I., 1984, Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*, 55(2), 203-230.
- Van Der Pol, B., 1951, On a Non-Linear Partial Differential Equation Satisfied by the Logarithm of The Jacobian Thetafunctions, With Arithmetical Applications I, *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* (Vol. 54, p. 261-271). North-Holland.
- Varoğlu, E., Finn W.D.L., 1980, Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equation, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, 16 (1980), p. 171-184.
- Wadati, M., 2001, Introduction to solitons. *Pramana*, 57(5), 841-847.
- Walz, G., 1997, Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, *BIT*, 37, 1, p.189-201.
- Wazwaz, A.M., 2008, A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(4), 1136-1142.
- Whitham, G.B., 1974, *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, Pure and Applied Mathematics.
- Yaseen, M., Abbas, M., Ismail, A.I., Nazir, T., 2017, A cubic trigonometric B-spline collocation approach for the fractional sub-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*, 293, p. 311-319.
- Yaseen, M., Abbas, M., Nazir, T., Baleanu, D., 2017, A finite difference scheme based on cubic trigonometric B-splines for a time fractional diffusion-wave equation. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1-18.
- Yousaf, A., Abdeljawad, T., Yaseen, M., Abbas, M., 2020, Novel Cubic Trigonometric B-Spline Approach Based on the Hermite Formula for Solving the Convection-Diffusion Equation, *Mathematical Problems in Engineering*.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Zabusky, N.J.; Kruskal, M.D., 1965, Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* 15 (6), p. 240-243.
- Zaki, S.I., 2001, Solitary waves of the splitted RLW equation, *Computer Physics Communications*, 138(1), 80-91.
- Zhang, P.G., Wang, J.P., 2012, A predictor–corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219(3), p. 892-898.
- Zhao, S., Wei, G.W., 2003, Comparison of the discrete singular convolution and three other numerical schemes for solving Fisher's equation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(1), 127-147.
- Zheng, S., 2004, *Nonlinear evolution equations*, Chapman & Hall/CRC, 304 p. (1.3)
- Zhu, C.G., Wang, R.H., 2009, Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation*, 208(1), 260-272.
- Zlatev, Z., Berkowicz, R. and Prahm, L.P., 1984, Implementation of a variable stepsize variable formula method in the timeintegration part of a code for treatment of long-range transport of air pollutants, *Journal of Computational Physics*, 55, 278-301.
- Zoppou, C., Roberts, S., Renka, R.J., 2000, Exponential spline interpolation in characteristic based scheme for solving the advective–diffusion equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33(3), 429-452.