Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modüllerinin ve 2-Çaprazlanmış Modüllerinin Eşçarpımı

Sultan Kaplan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

ARALIK 2020

Coproduct Of Crossed Modules and 2-Crossed Modules For Lie Algebras

Sultan Kaplan

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics - Computer

DECEMBER 2020

Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modüllerinin ve 2-Çaprazlanmış Modüllerinin Eşçarpımı

Sultan Kaplan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

ARALIK 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modüllerinin ve 2-Çaprazlanmış Modüllerinin Eşçarpımı**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. …/…/20…

Sultan Kaplan

ÖZET

Lie cebirlerin çaprazlanmış modüller ve 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin eşçarpım objesinin belirlenmesi üzerine hazırlanan bu tezde öncelikle Lie cebir etkisi ve Lie çaprazlanmış modül kategorisi tanıtılmıştır. Daha sonra Lie cebirler için 2-quasi çaprazlanmış modül tanımı yapılarak 2-çaprazlanmış modüller ile ilişkisini içeren sonuçlara yer verilmiştir. Bu iki kategori arasında ek funktor ikilisinin mevcut olduğu görülmüştür. Lie cebirler için 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisinin eşçarpım objesi belirlenerek bu kategoriden Lie cebirlerin 2-çaprazlanmış modüller kategorisine tanımlanan ve eşçarpım objesini koruyan uygun funktor ile istenilen eşçarpım objesi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie Cebirlerin 2-Çaprazlanmış Modülleri, Lie Cebirlerin 2-Quasi Çaprazlanmış Modülleri, Lie Etkisi, Eşçarpım Obje

SUMMARY

In this thesis prepared on the determination of the coproduct object of the category of crossed modules and 2-crossed modules of Lie algebras, firstly Lie algebra action and the category of crossed module on Lie algebras are introduced. Then by defining 2-quasi crossed module for Lie algebras the results including the relationship with 2-crossed modules are given. It is observed that there is a pair of adjoint functors between these two categories. The coproduct object of the category of 2-quasi crossed module for Lie algebras is constructed, and the desired coproduct object is obtained with the appropriate functor, which is defined from this category to the 2-crossed modules category of Lie algebras.

Keywords: 2-Quasi Crossed Modules of Lie Algebras, 2-Crossed Modules of Lie Algebras, Lie Action, Coproduct Object

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Matematikte, var olan yapılardan yeni yapılar elde etme arayışı çeşitli içeriklerde karşımıza çıkar. Bunun en basit örneği olarak iki kümenin kartezyen çarpımının bir küme olarak elde edilmesi verilebilir. Kategori Teori'de ise bu durum ilgili kategoriye ait iki obje yardımıyla yeni bir objenin nasıl elde edilebileceği problemi şeklinde karşılık bulur. Bu tezde ilgileneceğimiz eşçarpım obje herhangi bir kategorinin iki objesi için şu şekilde tanımlanır:

$\mathcal{K}$ bir kategori, L ve $L^{'}$ de $\mathcal{K}$ nın objeleri olsun. $\mathcal{K}$ nın herhangi bir N objesi ve morfizmleri

$$f_L : L \to N$$

ve

$$f_{L'} : L^{'} \to N$$

olmak üzere

$$g_L : L \to M$$

ve

$$g_{L'} : L^{'} \to M$$

morfizmleri yardımıyla

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g_L"] \arrow[dr, "f_L"'] & M \arrow[d, dashed, "\exists! \, h"] & L^{'} \arrow[l, "g_{L'}"'] \arrow[dl, "f_{L'}"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir tek

$$h : M \to N$$

morfizmi varsa M objesine L ve L' eşçarpımı denir.

Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kategorisinde eşçarpım objenin varlığı ise aynı tabanlı çaprazlanmış modül kategorisinde ön çaprazlanmış modül olarak elde edilen eşçarpım objenin ön çaprazlanmış modül kategorisinden çaprazlanmış modül kategorisine eşçarpımı koruyan uygun bir funktor ile taşınmasıyla elde edilir.

Bu tezde amacımız, bu yöntemi Lie cebirlerin çaprazlanmış modül kategorisinden bir boyut daha yüksek olan Lie cebirlerin 2-çaprazlanmış modül kategorisi için uygulayarak eşçarpım objesini elde etmektir. Bu durumda uygun funktorun belirlenmesi için öncelikle Lie 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisinin tanımlanması ve eşçarpım objesinin belirlenmesi gerekecektir. Daha sonra bu kategori ile Lie 2-çaprazlanmış modül kategorisi arasındaki funktorsal bağıntılar incelenecek ve tanımlanan eşçarpım objesini koruyan uygun funktor yardımıyla istenilen obje elde edilmiş olacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Whitehead (1941; 1946; 1949)'da gruplar üzerinde ilk defa çaprazlanmış modül yapısı kavramını homotopi 2-tiplerin cebirsel bir modellemesi olarak tanımlamıştır. Gruplar üzerinde bu kavramla ilgili yapılan çalışmalardan bazıları (Brown, 1982; Brown, 1984; Brown ve Higgins, 1981; Brown ve Higgins, 1982; Brown ve Huebschmann, 1981) şeklinde sıralanabilir. Dahası, Dedecker ve Lue (1966)'da asosyatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını ortaya atmıştır. Çaprazlanmış modül kavramının değişmeli cebirdeki tanımı Porter (1986) tarafından verilmiştir. Aynı zamanda, farklı adlandırmalarla çaprazlanmış modül kavramı tanımıyla karşılaşılabilmektedir (Lichtenbaum ve Schlessinger, 1967; Gerstenhaber, 1966). Daha sonra, çaprazlanmış modül kavramıyla ilgili değişmeli cebirler üzerinde birçok çalışma yapılmıştır (Arvasi ve Porter, 1996; Arvasi ve Ege, 2003). M. Sophus Lie'nin 1873'teki çalışmasına dayanan Lie cebir kavramı üzerine çaprazlanmış modül tanımı ise (Kassel ve Loday, 1982) tarafından verilmiştir.

Homotopi 3-tiplere model oluşturmak için gruplar üzerinde yeni bir cebirsel yapı olan 2-çaprazlanmış modül kavramını ise Conduché (1984) tanımlamıştır. Bu kavramın Lie cebir versiyonu Ellis (1993)'de yer almaktadır.

Çeşitli cebirsel yapılar üzerinde tanımlanmış çaprazlanmış ve 2-çaprazlanmış modül kategorileri için eş çarpım objenin belirlenmesine dair çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalardan bazıları, grupların çaprazlanmış modül kategorisi için Brown (1984), Emir (2012), cebirlerin çaprazlanmış modül kategorisi için Shammu (1992), cebiroidlerin çaprazlanmış modül kategorisi için Akça ve Avcıoğlu (2002), Lie cebirlerin çaprazlanmış modül kategorisi için Ellis (1993), grupların 2-çaprazlanmış modül kategorisi için Carrasco ve Porter (2015) ve değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modül kategorisi için Emir (2019) in çalışmaları şeklinde sıralanabilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Lie cebirleri, etkisi ve Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ile ilgili ileri bölümlerde kullanılan bazı temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

3.1 Lie Cebirleri

Tanım 1 *T değişmeli ve 1_T birimine sahip bir halka ve S bu halka üzerinde bir modül olmak üzere*

$$\begin{array}{rccc} [,]: & S\times S & \to & S \\ & (s_1,s_2) & \mapsto & [s_1,s_2] \end{array}$$

iki lineer (bilineer) dönüşümü her $s_1, s_2, s_3 \in S$ için

(i.) $[s_1, s_2] = 0$

(ii.) $[s_1, [s_2, s_3]] + [s_2, [s_3, s_1]] + [s_3, [s_1, s_2]] = 0$

eşitliklerini sağlıyorsa S T-modülüne bir Lie T-cebir adı verilir.

Her $s_1, s_2 \in S$ için

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & [s_1+s_2, s_1+s_2] & (\because (i)) \\ & = & [s_1, s_1+s_2] + [s_2, s_1+s_2] & (\because [,]\ bilineer) \\ & = & [s_1,s_1]+[s_1,s_2]+[s_2,s_1]+[s_2,s_2] & (\because [,]\ bilineer) \\ & = & 0+[s_1,s_2]+[s_2,s_1]+0 & (\because (i)) \\ & = & [s_1,s_2]+[s_2,s_1] & \end{array}$$

yazılabilir. Böylece,

$$[s_1, s_2] = -[s_2, s_1]$$

elde edilir.

$\forall s \in S$ *için*

$$[s, 0] = [s, 0 + 0] = [s, 0] + [s, 0]$$

yazılır. Buradan,

$$[s, 0] = 0$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$[0, s] = 0$$

olduğu gösterilebilir. $\forall s_1, s_2 \in S$ *için*

$$\begin{aligned} 0 &= [s_1, 0] \\ &= [s_1, s_2 + (-s_2)] \\ &= [s_1, s_2] + [s_1, -s_2] \\ &= [s_1, s_2] - [-s_2, s_1] \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$[s_1, s_2] = [-s_2, s_1]$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$[s_1, s_2] = [s_2, -s_1]$$

bulunur. Böylece,

$$-[s_2, s_1] = [s_1, s_2] = [-s_2, s_1] = [s_2, -s_1]$$

eşitlikleri geçerlidir. $[,]$ *birleşme özelliğine sahip değildir, ancak*

$$\begin{aligned} [[s_1, s_2], s_1]] &= -[s_1, [s_1, s_2]] \\ &= [s_1, -[s_1, s_2]] \\ &= [s_1, [s_2, s_1]] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca, $\forall s_1, s_2, s_3 \in S$ *için*

$$\begin{aligned} [s_1, [s_2, s_3]] &= -[s_2, [s_3, s_1]] - [s_3, [s_1, s_2]] \\ &= [s_2, -[s_3, s_1]] + [[s_1, s_2], s_3] \\ &= [s_2, [s_1, s_3]] + [[s_1, s_2], s_3] \end{aligned}$$

olur.

Örnek 1 S *bir* T*-cebir olmak üzere*

$$\begin{aligned} [,] : \quad S \times S &\to S \\ (s_1, s_2) &\mapsto [s_1, s_2] = s_1 s_2 - s_2 s_1 \end{aligned}$$

dönüşümü bilineerdir. Ayrıca, $s, s_1, s_2, s_3 \in S$ *için*

$$\begin{aligned} [s, s] &= ss - ss \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [s_1, [s_2, s_3]] + [s_2, [s_3, s_1]] + [s_3, [s_1, s_2]] &= [s_1, s_2 s_3 - s_3 s_2] + [s_2, s_3 s_1 - s_1 s_3] + [s_3, s_1 s_2 - s_2 s_1] \\ &= s_1(s_2 s_3 - s_3 s_2) - (s_2 s_3 - s_3 s_2) s_1 + s_2(s_3 s_1 - s_1 s_3) \\ &\quad -(s_3 s_1 - s_1 s_3) s_2 + s_3(s_1 s_2 - s_2 s_1) - (s_1 s_2 - s_2 s_1) s_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından S *bir Lie* T*-cebir yapısı oluşturur.*

Tanım 2 *S_1 ve S_2 iki Lie T-cebir olmak üzere*

$$f : S_1 \to S_2$$

dönüşümü $t \in T$ ve $s, s_1, s_2 \in S_1$ için

$$f(s_1 + s_2) = f(s_1) + f(s_2)$$

$$f(t \cdot s) = t \cdot f(s)$$

$$f([s_1, s_2]) = [f(s_1), f(s_2)]$$

eşitliklerini sağlıyorsa bir Lie T-cebir morfizmi adını alır. Eğer f birebir ve örten bir Lie T-cebir morfizmi ise bir Lie T-cebir izomorfizmi olarak adlandırılır.

Tanım 3 *S bir Lie T-cebir ve $R \subseteq S$ olmak üzere $\forall r, r_1, r_2 \in R$, $t \in T$, $s \in S$ için*

(i.) $r_1 - r_2 \in R$

(ii.) $tr \in R$

(iii.) $[r, s] \in R$

şartları sağlanıyorsa R'ye S Lie T-cebrinin ideali denir.

3.2 Lie Cebir Etkisi

Tanım 4 *L ve C iki Lie T-cebir olmak üzere L nin C üzerine Lie etkisi her $t \in T$, $c, c^{'} \in C$, $l, l^{'} \in L$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan*

$$\begin{array}{rcl} L \times C & \to & C \\ (l, c) & \mapsto & l \cdot c \end{array}$$

fonksiyonudur.

(i.) $t(l \cdot c) = (tl) \cdot c = l \cdot (tc)$

(ii.) $l \cdot (c + c^{'}) = l \cdot c + l \cdot c^{'}$

(iii.) $(l + l^{'}) \cdot c = l \cdot c + l^{'} \cdot c$

(iv.) $[l, l^{'}] \cdot c = l \cdot (l^{'} \cdot c) - l^{'} \cdot (l \cdot c)$

(v.) $l \cdot [c, c^{'}] = [l \cdot c, c^{'}] + [c, l \cdot c^{'}]$

Tanım 5 *T birimli değişmeli bir halka, S bir Lie T-cebir olmak üzere her $s_1, s_2 \in S$ için*

$$d([s_1, s_2]) = [s_1, ds_2] + [ds_1, s_2]$$

şartını sağlayan

$$d : S \to S$$

lineer dönüşümü derivasyon adını alır.

$$\{d \,|\, d : S \to S,\ d([s_1, s_2]) = [s_1, ds_2] + [ds_1, s_2]\ s_1, s_2 \in S\}$$

şeklindeki derivasyonların kümesi $Der(S)$ ile gösterilir.

Tanım 6 *S bir Lie T cebir olmak üzere her $s, s^{'} \in S$ için*

$$\begin{array}{rccl} ad_s : & S & \to & S \\ & s^{'} & \mapsto & ad_s(s^{'}) = [s, s^{'}] \end{array}$$

şeklinde tanımlanan ad_s bir derivasyondur ve iç derivasyon olarak adlandırılır.

$$\begin{array}{rcll} ad_s([s_1, s_2]) & = & [s, [s_1, s_2]] & \\ & = & -[s_1, [s_2, s]] - [s_2, [s, s_1]] & \\ & = & [s_1, [s, s_2]] + [[s, s_1], s_2] & \qquad (*) \\ & = & [s_1, ad_s s_2] + [ad_s s_1, s_2] & \end{array}$$

$(*)$ *eşitliği aşağıdaki eşitlikle elde edildi.*

$$0 = [s_1, 0] = [s_1, [s_2, s]] + [s_1, -[s_2, s]] = [s_1, [s_2, s]] + [s_1, [s, s_2]]$$

Buradan

$$-[s_1, [s_2, s]] = [s_1, [s, s_2]]$$

elde edilir.

Önerme 1 *S bir Lie T-cebiri ve S nin bütün derivasyonlarının kümesi*

$$Der(S) = \{d \,|\, d : S \to S,\ d([s_1, s_2]) = [s_1, ds_2] + [ds_1, s_2],\ s_1, s_2 \in S\}$$

olmak üzere;

$$\begin{array}{rrcllcl} \oplus : & Der(S) \times Der(S) & \to & Der(S) & & & \\ & (f, g) & \mapsto & f \oplus g : & S & \to & S \\ & & & & s & \mapsto & (f \oplus g)(s) = f(s) + g(s) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \circledast: & T \times Der(S) & \to & Der(S) \\ & (t,d) & \mapsto & t \circledast d: \quad \begin{array}{rcl} S & \to & S \\ s & \mapsto & (t \circledast d)(s) = t{\cdot}d(s) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} [,]: & Der(S) \times Der(S) & \to & Der(S) \\ & (f,g) & \mapsto & [f,g]: \quad \begin{array}{rcl} S & \to & S \\ s & \mapsto & [f,g](s) = f(g(s)) - g(f(s)) \end{array} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle $Der(S)$ bir Lie T-cebir yapısı oluşturur.

İspat 1 *$f, g \in Der(S)$ ve $x, y \in S$ için*

$$\begin{array}{rcl} (f \oplus g)([x,y]) & = & f([x,y]) + g([x,y]) \\ & = & [x, f(y)] + [f(x), y] + [x, g(y)] + [g(x), y] \\ & = & [x, f(y) + g(y)] + [f(x) + g(x), y] \\ & = & [x, (f \oplus g)(y)] + [(f \oplus g)(x), y] \end{array}$$

olduğundan $Der(S)$ üzerinde $\oplus$ iyi tanımlıdır.

$f, g, h \in Der(S)$ için

$$f \oplus (g \oplus h) = (f \oplus g) \oplus h \text{ ve } f \oplus g = g \oplus f$$

eşitliklerinin geçerliliği S Lie cebirinde $+$ işleminin birleşme ve değişme özelliğinden açıktır.

Her $s \in S$ için $\boldsymbol{0}(s) = 0_s$ şeklinde tanımlı $\boldsymbol{0} : S \to S$ dönüşümü $x, y \in S$ için $\boldsymbol{0}([x,y]) = 0_s = [x, 0_s] + [0_s, y] = [x, \boldsymbol{0}(y)] + [\boldsymbol{0}(x), y]$ eşitliği sağlandığından bir derivasyondur. Her $f \in Der(S)$ ve $s \in S$ için

$$(f \oplus \boldsymbol{0})(s) = f(s) + \boldsymbol{0}(s) = f(s) + 0_s = f(s)$$

ve

$$(\boldsymbol{0} \oplus f)(s) = \boldsymbol{0}(s) + f(s) = 0_s + f(s) = f(s)$$

olduğundan $\boldsymbol{0} : S \to S$ derivasyonu $\oplus$ işlemine göre $Der(S)$ kümesinin etkisiz elemanıdır.

$f \in Der(S)$ ve $s \in S$ için $(-f)(s) = -(f(s))$ şeklinde tanımlı $-f : S \to S$ dönüşümü her $x, y \in S$ için

$$\begin{array}{rcl} (-f)([x,y]) & = & -(f([x,y])) \\ & = & -([x, f(y)] + [f(x), y]) \\ & = & [x, -(f(y))] + [-(f(x)), y] \\ & = & [x, (-f)(y)] + [(-f)(x), y] \end{array}$$

eşitliği sağlandığından bir derivasyondur. Her $f \in Der(S)$ ve $s \in S$ için

$$(f \oplus -f)(s) = f(s) + (-f)(s) = f(s) + (-(f(s))) = 0_s = \boldsymbol{0}(s)$$

ve

$$(-f \oplus f)(s) = (-f)(s) + f(s) = (-(f(s))) + f(s) = 0_s = \boldsymbol{0}(s)$$

olduğundan $-f : S \to S$ derivasyonu $\oplus$ işlemine göre f derivasyonunun tersi olur. Böylece, $(Der(S), \oplus)$ bir Abel grubudur.

$\forall d, f, g \in Der(S)$, $t_1, t_2 \in T$, $s \in S$ *için*

$$\begin{aligned}
(t_1 \circledast (f \oplus g))(s) &= t_1 \cdot ((f \oplus g)(s)) \\
&= t_1 \cdot (f(s) + g(s)) \\
&= t_1 \cdot (f(s)) + t_1 \cdot (g(s)) \\
&= (t_1 \circledast f)(s) + (t_1 \circledast g)(s) \\
&= ((t_1 \circledast f) \oplus (t_1 \circledast g))(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((t_1 \boxplus t_2) \circledast d)(s) &= (t_1 \boxplus t_2) \cdot d(s) \\
&= t_1 \cdot d(s) + t_2 \cdot d(s) \\
&= (t_1 \circledast d)(s) + (t_2 \circledast d)(s) \\
&= ((t_1 \circledast d) \oplus (t_2 \circledast d))(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((t_1 \boxdot t_2) \circledast d)(s) &= (t_1 \boxdot t_2) \cdot d(s) \\
&= t_1 \cdot (t_2 \cdot d(s)) \\
&= t_1 \cdot ((t_2 \circledast d)(s)) \\
&= (t_1 \circledast (t_2 \circledast d))(s)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $Der(S)$ bir T-modül yapısı oluşturur.

$f, g, h \in Der(S)$, $s \in S$ *ve* $t_1, t_2 \in T$ *için*

$$\begin{aligned}
[t_1 \circledast f \oplus t_2 \circledast g, h](s) &= (t_1 \circledast f \oplus t_2 \circledast g)(h(s)) - h((t_1 \circledast f \oplus t_2 \circledast g)(s)) \\
&= (t_1 \circledast f)(h(s)) + (t_2 \circledast g)(h(s)) - h((t_1 \circledast f)(s) + (t_2 \circledast g)(s)) \\
&= t_1 \cdot f(h(s)) + t_2 \cdot g(h(s)) - h(t_1 \cdot f(s)) - h(t_2 \cdot g(s)) \\
&= t_1 \cdot f(h(s)) + t_2 \cdot g(h(s)) - t_1 \cdot h(f(s)) - t_2 \cdot h(g(s)) \\
&= t_1(f(h(s)) - h(f(s))) + t_2(g(h(s)) - h(g(s))) \\
&= t_1 \cdot ([f, h](s)) + t_2 \cdot ([g, h](s)) \\
&= (t_1 \circledast [f, h])(s) + (t_2 \circledast [g, h])(s) \\
&= ((t_1 \circledast [f, h]) \oplus (t_2 \circledast [g, h]))(s)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
[f, t_1 \circledast g \oplus t_2 \circledast h](s) &= f((t_1 \cdot g + t_2 \cdot h)(s)) - (t_1 \cdot g + t_2 \cdot h)(f(s)) \\
&= f(t_1 \cdot g(s)) + f(t_2 \cdot h(s)) - t_1 \cdot g(f(s)) - t_2 \cdot h(f(s)) \\
&= f(t_1 \cdot g(s)) - t_1 \cdot g(f(s)) + f(t_2 \cdot h(s)) - t_2 \cdot h(f(s)) \\
&= t_1 \cdot (f(g(s)) - g(f(s))) + t_2 \cdot (f(h(s)) - h(f(s))) \\
&= t_1 \cdot [f, g](s) + t_2 \cdot [f, h](s) \\
&= ((t_1 \circledast [f, g]) \oplus (t_2 \circledast [f, h]))(s)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlandığından $[,] : Der(S) \times Der(S) \to Der(S)$ *dönüşümü bilineerdir.*

$d \in Der(S)$ *için*

$$[d, d](s) = d(d(s)) - d(d(s)) = 0_S = \boldsymbol{0}(s)$$

olduğundan

$$[d, d] = 0_{Der(S)}$$

eşitliği elde edilir.

$f, g, h \in Der(S)$ *için*

$$[f, [g, h]] \oplus [g, [h, f]] \oplus [h, [f, g]] = 0_{Der(S)}$$

olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
[f, [g, h]](s) \oplus [g, [h, f]](s) \oplus [h, [f, g]](s) =& f([g, h](s)) - [g, h](f(s)) + g([h, f](s)) \\
& -[h, f](g(s)) + h([f, g](s)) - [f, g](h(s)) \\
=& f(g(h(s)) - h(g(s))) - (g(h(f(s)))) - h(g(f(s))) \\
& +g(h(f(s)) - f(h(s))) - (h(f(g(s)))) - f(h(g(s))) \\
& +h(f(g(s)) - g(f(s))) - (f(g(h(s)))) - g(f(h(s))) \\
=& 0_S
\end{aligned}
$$

Böylece, $Der(S)$ *bir Lie* T*-cebirdir.*

Önerme 2 S *bir Lie* T*-cebir olmak üzere*

$$
\begin{array}{rccclcl}
\mu : & S & \to & Der(S) & & & \\
& s & \mapsto & \mu(s) = \mu_s : & S & \to & S \\
& & & & s' & \mapsto & \mu_s(s') = [s, s']
\end{array}
$$

şeklinde tanımlı μ *dönüşümü bir Lie cebir morfizmidir.*

İspat 2 $\forall s, s_1, s_2 \in S$*,* $t \in T$ *için*

$$\begin{aligned} \mu(s_1+s_2)(s) &= \mu_{(s_1+s_2)}(s) \\ &= [s_1+s_2, s] \\ &= [s_1, s]+[s_2, s] \\ &= \mu_{(s_1)}(s)+\mu_{(s_2)}(s) \\ &= \mu(s_1)(s)+\mu(s_2)(s) \\ &= (\mu(s_1)+\mu(s_2))(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(ts_1)(s) &= \mu_{ts_1}(s) \\ &= [ts_1, s] \\ &= t[s_1, s] \\ &= t\mu_{s_1}(s) \\ &= t\mu(s_1)(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mu(s_1), \mu(s_2)](s) &= \mu_{s_1}(\mu_{s_2}(s)) - \mu_{s_2}(\mu_{s_1}(s)) \\ &= \mu_{s_1}[s_2, s] - \mu_{s_2}[s_1, s] \\ &= [s_1, [s_2, s]] - [s_2, [s_1, s]] \\ &= -[s_2, [s, s_1]] - [s, [s_1, s_2]] - [s_2, [s_1, s]] \\ &= -[s_2, [s, s_1]] - [s, [s_1, s_2]] + [s_2, -[s_1, s]] \\ &= -[s_2, [s, s_1]] - [s, [s_1, s_2]] + [s_2, [s, s_1]] \\ &= -[s, [s_1, s_2]] \\ &= [[s_1, s_2], s] \\ &= \mu_{[s_1, s_2]}(s) \\ &= \mu([s_1, s_2])(s) \end{aligned}$$

eşitlikleriyle birlikte μ *dönüşümü bir Lie cebir morfizmidir.*

L ve S Lie T-cebir olmak üzere

$$\begin{aligned} \emptyset : \quad L &\rightarrow Der(S) \\ l &\mapsto \emptyset(l) = \emptyset_l : \quad S \rightarrow S \\ & \qquad\qquad\qquad\quad s \mapsto \emptyset_l(s) = l \cdot s \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\emptyset$ Lie T-cebir homomorfizması L Lie cebirinin S Lie cebiri üzerine etkisini verir.

(i.) $\emptyset$ Lie T-cebir morfizmi olduğundan $l \in L, t \in T$ için

$$\emptyset(tl) = t \circledast \emptyset(l)$$

eşitliği geçerlidir. $\forall s \in S$ için

$$\emptyset(tl)(s) = (t \circledast \emptyset(l))(s) = t(\emptyset(l)(s))$$

olur. Buradan,

$$(tl) \cdot s = t(l \cdot s)$$

elde edilir. Ayrıca $\emptyset_l$ T-lineer morfizm olduğundan

$$\emptyset(l)(ts) = t\emptyset(l)(s)$$

eşitliği geçerlidir.

$$\emptyset(l)(ts) = \emptyset_l(ts) = l \cdot (ts)$$

ve

$$t\emptyset(l)(s) = t(l \cdot s)$$

eşitliklerinden

$$l \cdot (ts) = t(l \cdot s)$$

elde edilir.

(ii.) $\emptyset_l \in Der(S)$ olduğundan $\emptyset_l$ bir Lie T-cebir morfizmi olup $\forall s_1, s_2 \in S$, $l \in L$ için

$$\emptyset_l(s_1 + s_2) = \emptyset_l(s_1) + \emptyset_l(s_2)$$

eşitliği geçerlidir. Buradan,

$$l \cdot (s_1 + s_2) = l \cdot s_1 + l \cdot s_2$$

olur.

(iii.) $\emptyset$ Lie T-cebir homomorfizması bir modül homomorfizması olduğundan $l_1, l_2 \in L$ için

$$\emptyset(l_1 + l_2) = \emptyset(l_1) \oplus \emptyset(l_2)$$

eşitliği geçerlidir. $\forall s \in S$ için

$$\begin{aligned} \emptyset_{l_1+l_2}(s) &= (\emptyset l_1 \oplus \emptyset l_2)(s) \\ &= \emptyset_{l_1}(s) + \emptyset_{l_2}(s) \\ &= \emptyset_{l_1+l_2}(s) \\ &= (l_1 + l_2) \cdot s \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\emptyset_{l_1}(s) + \emptyset_{l_2}(s) = l_1 \cdot s + l_2 \cdot s$$

olduğundan

$$(l_1 + l_2) \cdot s = (l_1 \cdot s) + (l_2 \cdot s)$$

elde edilir.

(iv.) $\emptyset$ Lie T-cebir homomorfizması olduğundan $\forall l_1, l_2 \in L$ için

$$\emptyset([l_1, l_2]) = [\emptyset(l_1), \emptyset(l_2)]$$

eşitliği mevcuttur. $\forall s \in S$ için

$$\emptyset_{[l_1,l_2]}(s) = [\emptyset_{l_1}, \emptyset_{l_2}](s) = \emptyset_{l_1}(\emptyset_{l_2}(s)) - \emptyset_{l_2}(\emptyset_{l_1}(s))$$

olur. Ayrıca,

$$\emptyset_{[l_1,l_2]}(s) = [l_1, l_2] \cdot s$$

ve

$$\emptyset_{l_1}(\emptyset_{l_2}(s)) - \emptyset_{l_2}(\emptyset_{l_1}(s)) = l_1 \cdot (l_2 \cdot s) - l_2 \cdot (l_1 \cdot s)$$

olduğundan

$$[l_1, l_2] \cdot s = l_1 \cdot (l_2 \cdot s) - l_2 \cdot (l_1 \cdot s)$$

elde edilir.

(v.) $\emptyset_l \in Der(S)$ olduğundan $s_1, s_2 \in S$ için

$$\begin{aligned} \emptyset_l([s_1, s_2]) &= [s_1, \emptyset_l(s_2)] + [\emptyset_l(s_1), s_2] \\ &= [s_1, l \cdot s_2] + [l \cdot s_1, s_2] \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca,

$$\emptyset_l([s_1, s_2]) = l \cdot [s_1, s_2]$$

olduğundan

$$l \cdot [s_1, s_2] = [l \cdot s_1, s_2] + [s_1, l \cdot s_2]$$

elde edilir.

3.3 Lie Çaprazlanmış Modül Kategorisi

Tanım 7 *M ve L iki Lie T-cebir ve L Lie cebirinin M üzerine Lie cebir etkisi mevcut olmak üzere $\forall m, m' \in M$ ve $l \in L$ için*

LCM1) $\partial({}^l m) = [l, \partial(m)]$

LCM2) ${}^{\partial m} m' = [m, m']$

*şartları sağlanıyorsa $\partial : M \to L$ Lie T-cebir morfizmine Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül denir ve (M, L, ∂) şeklinde gösterilir. Sadece **LCM1** şartı sağlanıyorsa ∂ bir ön çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.*

Örnek 2

$$\begin{array}{rcl} \mu : \ S & \to & Der(S) \\ s & \mapsto & \mu(s) = \mu_s : \begin{array}{rcl} S & \to & S \\ s' & \mapsto & \mu_s(s') = [s, s'] \end{array} \end{array}$$

Lie T-cebir morfizmi

$$\begin{array}{rcl} Der(S) \times S & \to & S \\ (d, s) & \mapsto & {}^{d}s = d(s) \end{array}$$

şeklinde tanımlı etki ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür.

LCM1) *Her $s, s' \in S$ ve $d \in Der(S)$ için*

$$\mu({}^{d}s) = \mu(d(s)) = \mu_{d(s)}$$

ve

$$\mu({}^{d}s)(s') = \mu(d(s))(s') = \mu_{d(s)}(s') = [d(s), s']$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca,

$$\begin{array}{rcl} [d, \mu(s)](s') & = & d(\mu(s)(s')) - \mu(s)(d(s')) \\ & = & d[s, s'] - [s, d(s')] \\ & = & [s, d(s')] + [ds, s'] - [s, d(s')] \\ & = & [ds, s'] \end{array}$$

olduğundan

$$\mu({}^{d}s) = [d, \mu(s)]$$

eşitliği elde edilir.

LCM2) *Her $s, s' \in S$ ve her $d \in Der(S)$ için*

$${}^{\mu(s)}s' = {}^{(\mu s)}s' = \mu_s(s') = [s, s']$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 3 *M, L-modülü*

$$\begin{array}{rcl} [,] : \ M \times M & \to & M \\ (m_1, m_2) & \mapsto & [m_1, m_2] = 0 \end{array}$$

işlemiyle bir Lie cebir yapısı oluşturur.

$$\begin{array}{rcl} \partial : \ M & \to & L \\ m & \mapsto & \partial(m) = 0 \end{array}$$

bir çaprazlanmış modüldür. Her $l \in L$ ve $m, m^{'} \in M$ için

LCM1) $\partial({}^{l}m) = 0 = [l, 0] = [l, \partial m]$

LCM2) ${}^{\partial m}m^{'} = {}^{0}m^{'} = 0 = [m, m^{'}]$

eşitlikleri geçerlidir.

Örnek 4 *I; S Lie T-cebirinin bir ideali olmak üzere ${}^{s}i = [s, i]$ eşitliği ile verilen etki ile birlikte*

$$\begin{array}{rccc} \partial : & I & \rightarrow & S \\ & i & \mapsto & i \end{array}$$

içine Lie cebir morfizmi bir çaprazlanmış modüldür.

LCM1) $\partial({}^{s}i) = {}^{s}i = [s, i] = [s, \partial(i)]$

LCM2) ${}^{\partial i_1}i_2 = {}^{i_1}i_2 = [i_1, i_2]$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 8 (L, M, ∂) *ve* $(L^{'}, M^{'}, \partial^{'})$ *iki Lie çarpazlanmış modül olmak üzere*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\partial"'] & L^{'} \arrow[d, "\partial^{'}"] \\ M \arrow[r, "f_0"'] & M^{'} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\partial^{'} f_1 = f_0 \partial$$

ve

$$\begin{tikzcd} M \times L \arrow[r] \arrow[d, "(f_0, f_1)"'] & L \arrow[d, "f_1"] \\ M^{'} \times L^{'} \arrow[r] & M^{'} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$f_1({}^{m}l) = {}^{f_0(m)}f_1(l)$$

eşitliği sağlanıyorsa (f_1, f_0) *Lie cebir morfizm ikilisine* (L, M, ∂) *ile* $(L^{'}, M^{'}, \partial^{'})$ *çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizm denir.*

Örnek 5 *Lie çarpım ile verilen etki ile birlikte birer çaprazlanmış modül olan* $id_L : L \to L$, $id_{L'} : L^{'} \to L^{'}$ *birim dönüşümleri ve* $f : L \to L^{'}$ *Lie cebir morfizmi için*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_L"'] & L^{'} \arrow[d, "id_{L'}"] \\ L \arrow[r, "f"'] & L^{'} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ve $x, y \in L$ *için*

$$f(^{x}y) = f([x, y]) = [f(x), f(y)] = {}^{f(x)}f(y)$$

eşitliği sağlandığından (f, f) *ikilisi bir çaprazlanmış modül morfizmidir.*

$\mathcal{Z} = (Z, H, \partial)$, $\mathcal{Z}^{'} = (Z^{'}, H^{'}, \partial^{'})$ ve $\mathcal{Z}^{''} = (Z^{''}, H^{''}, \partial^{''})$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \circ : & Mor(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{'}) \times Mor(\mathcal{Z}^{'}, \mathcal{Z}^{''}) & \to & Mor(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{''}) \\ & ((p_1, p_0), (s_1, s_0)) & \mapsto & (p_1, p_0) \circ (s_1, s_0) = (s_1 p_1, s_0 p_0) \end{array}$$

şeklinde kompozisyon tanımlanabilir. Çünkü

$((p_1, p_0), (s_1, s_0)) \in Mor(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{'}) \times Mor(\mathcal{Z}^{'}, \mathcal{Z}^{''})$ için

$$\partial^{'} p_1 = p_0 \partial$$

ve

$$\partial^{''} s_1 = s_0 \partial^{'}$$

olduğundan

$$\partial^{''}(s_1 p_1) = (\partial^{''} s_1) p_1 = (s_0 \partial^{'}) p_1 = s_0(\partial^{'} p_1) = s_0(p_0 \partial) = (s_0 p_0) \partial$$

elde edilir. Eşitlikler aşağıdaki diyagramlar ile açıklanabilir

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\partial"'] & Z^{'} \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "\partial^{'}"] & Z^{''} \arrow[d, "\partial^{''}"] \\ H \arrow[r, "p_0"'] & H^{'} \arrow[r, "s_0"'] & H^{''} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & p_1(z) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & s_1p_1(z) \arrow[d, mapsto] \\ \partial(z) \arrow[r, mapsto] & p_0(\partial z) = \partial^{'}(p_1(z)) \arrow[r, mapsto] & (s_0p_0)(\partial z) = s_0(\partial^{'}(p_1(z))) = (\partial^{''}s_1)(p_1(z)) \end{tikzcd}$$

Ayrıca,

$$p_1({}^{h}z) = {}^{p_0(h)}p_1(z)$$

ve

$$s_1\left({}^{h^{'}}z^{'}\right) = {}^{s_0\left(h^{'}\right)}s_1\left(z^{'}\right)$$

olduğundan

$$s_1p_1\left({}^{h}z\right) = s_1({}^{p_0(h)}p_1(z)) = {}^{s_0(p_0(h))}s_1(p_1(z))$$

eşitliği sağlanır. Eşitlikler aşağıdaki diyagramlar ile açıklanabilir.

$$\begin{tikzcd} H \times Z \arrow[r, "(p_0,p_1)"] \arrow[d] & H^{'} \times Z^{'} \arrow[r, "(s_0,s_1)"] \arrow[d] & H^{''} \times Z^{''} \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "p_1"'] & Z^{'} \arrow[r, "s_1"'] & Z^{''} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (h,z) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (p_0(h), p_1(z)) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (s_0(p_0(h)), s_1(p_1(z))) \arrow[d, mapsto] \\ {}^{h}z \arrow[r, mapsto] & p_1({}^{h}z) = {}^{p_0(h)}p_1(z) \arrow[r, mapsto] & s_1(p_1({}^{h}z)) = s_1({}^{p_0(h)}p_1(z)) = {}^{s_0(p_0(h))}s_1(p_1(z)) \end{tikzcd}$$

$$(p_1, p_0) : (Z, H, \partial) \to (Z^{'}, H^{'}, \partial^{'})$$

$$(s_1, s_0) : (Z^{'}, H^{'}, \partial^{'}) \to (Z^{''}, H^{''}, \partial^{''})$$

$$(t_1, t_0) : (Z^{''}, H^{''}, \partial^{''}) \to (Z^{'''}, H^{'''}, \partial^{'''})$$

çaprazlanmış modül morfizmleri için

$$\begin{aligned} ((p_1,p_0) \circ (s_1,s_0)) \circ (t_1,t_0) &= (t_1,t_0)((s_1,s_0)(p_1,p_0)) \\ &= ((t_1,t_0)(s_1,s_0))(p_1,p_0) \\ &= (p_1,p_0) \circ ((s_1,s_0) \circ (t_1,t_0)) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır; yani "$\circ$" kompozisyonu asosyatiftir. (Z, H, ∂) çaprazlanmış modül olmak üzere $z \in Z$, $h \in H$ için

$$\partial id_Z(z) = \partial z = id_H(\partial z)$$

ve

$$id_Z({}^h z) = {}^h z = {}^{id_H(h)} id_Z(z)$$

eşitlikleri sağlandığından

$$1_{(Z,H,\partial)} : (id_Z, id_H) : (Z, H, \partial) \to (Z, H, \partial)$$

birim çaprazlanmış modül morfizmi mevcuttur. Ayrıca

$$(p_1, p_0) : (Z, H, \partial) \to (Z^{'}, H^{'}, \partial^{'})$$

morfizmi için

$$1_{(Z,H,\partial)} \circ (p_1, p_0) = (p_1, p_0)$$

yani

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "id_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ H \arrow[r, "id_H"'] & H \arrow[r, "p_0"'] & H^{'} \end{tikzcd}$$

ve

$$(p_1, p_0) \circ 1_{(Z',H',\partial')} = (p_1, p_0)$$

eşitlikleri sağlanır.

Böylece objeleri çaprazlanmış modüller, morfizmleri çaprazlanmış modül morfizmi olan ve morfizmler kümesinde yukarıda tanımlanan kompozisyon işlemiyle birlikte bir kategori oluşturulur. Bu kategoriye çaprazlanmış modül kategorisi denir ve $XMOD$ ile gösterilir. Objelerin değer kümesinin sabit H Lie cebiri olarak, morfizmlerin ise $(p_1, id_H) : (Z, H) \to (Z^{'}, H)$ şeklinde alınması durumunda $XMOD/H$ ile gösterilen bir alt kategori elde edilir.

4. 2-QUASİ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL İLE 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL ARASINDAKİ FUNKTORSAL BAĞINTILAR

4.1 Lie 2-Çaprazlanmış Modüller

Tanım 9 *Lie cebirler üzerinde bir 2-çaprazlanmış modül* $\{,\} : M \times M \to L$ *bilineer fonksiyonu ile birlikte* $\forall m, m', m'' \in M$, $l, l' \in L$ *ve* $p \in P$ *için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir* $L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$ *dizisidir.*

(i.) $\partial_1\partial_2 = 0$

(ii.) $\partial_2({}^{p}l) = {}^{p}(\partial_2 l)$, $\partial_1({}^{p}m) = [p, \partial_1(m)]$

(iii.) $\partial_2\{m, m'\} = {}^{(\partial_1 m)}m' - [m, m']$

(iv.) $\{\partial_2 l, \partial_2 l'\} = [l, l']$

(v.) $\{\partial_2 l, m\} + \{m, \partial_2 l\} = {}^{\partial_1 m}l$

(vi.) ${}^{p}\{m, m'\} = \{{}^{p}m, m'\} + \{m, {}^{p}m'\}$

(vii.) $\{[m, m'], m''\} = {}^{\partial_1 m}\{m', m''\} + \{m, [m', m'']\} - {}^{\partial_1 m'}\{m, m'\} - \{m', [m, m'']\}$

(viii.) $\{m, [m', m'']\} = {}^{\partial_1 m'}\{m, m''\} - {}^{\partial_1 m''}\{m, m'\} - \{m', {}^{\partial_1 m}m'' - [m, m'']\}$
$+\{m'', {}^{\partial_1 m}m' - [m, m']\}$

Bu 2-çaprazlanmış modül $(L, M, P, \partial_2, \partial_1, \{,\})$ *ile gösterilir (Ellis, 1993).*

Tanım 10 $(L, M, P, \partial_2, \partial_1, \{,\})$ *ve* $(L', M', P', \partial_2', \partial_1', \{,\}')$ *Lie 2-çaprazlanmış modüller olmak üzere*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] & P \arrow[d, "f_0"] \\ L' \arrow[r, "\partial_2'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1'"'] & P' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\partial_1{'} f_1 = f_0 \partial_1$$
$$\partial_2{'} f_2 = f_1 \partial_2,$$

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\{,\}"] \arrow[d, "(f_1,f_1)"'] & L \arrow[d, "f_2"] \\ M' \times M' \arrow[r, "\{,\}'"] & L' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$f_2\{,\} = \{,\}'(f_1, f_1)$$

ve

$$f_1({}^p m) = {}^{f_0(p)} f_1(m)$$
$$f_2({}^p l) = {}^{f_0(p)} f_2(l)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa (f_2, f_1, f_0) *üçlüsüne* $(L, M, P, \partial_2, \partial_1, \{,\})$ *ile* $(L', M', P', \partial_2', \partial_1', \{,\}')$ *Lie 2-çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.*

Böylece objeleri 2-çaprazlanmış modüller, morfizmleri bunlar arasındaki morfizmler olan ve LX_2MOD *ile gösterilen 2-çaprazlanmış modüller kategorisi elde edilir.*

Objelerinde $\partial_1 : M \to P$ *ön çaprazlanmış modülünün sabit, morfizmlerinin ise* (f, id_M, id_P) *olarak alınması ile* (M, P, ∂_1) *tabanlı* $LX_2MOD/(M, P)$ *alt kategorisi oluşturulur.*

4.2 Lie Cebirler Üzerinde 2-Quasi Çaprazlanmış Modüller

Tanım 11 *Lie cebirler üzerinde bir 2-quasi çaprazlanmış modül* $\{,\} : M \times M \to L$ *bilineer dönüşümü ile birlikte her* $m, m_0, m_1, m_2 \in M$ *ve* $l \in L$ *için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir* $L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$ *dizisidir.*

L2QX1) $\partial_1 \partial_2 = 0$

L2QX2) $\partial_2({}^p l) = {}^p(\partial_2 l)$, $\partial_1({}^p m) = [p, \partial_1(m)]$

L2QX3) ${}^p\{m_0, m_1\} = \{{}^p m_0, m_1\} + \{m_0, {}^p m_1\}$

L2QX4) $\partial_2\{m_0, m_1\} = {}^{\partial m_0}m_1 - [m_0, m_1]$

L2QX5) $\{m_0, [m_1, m_2]\} = {}^{\partial_1 m_1}\{m_0, m_2\} - {}^{\partial_1 m_2}\{m_0, m_1\} - \{m_1, {}^{\partial_1}m_2 - [m_0, m_2]\}$
$+\{m_2, {}^{\partial_1 m_0}m_1 - [m_0, m_1]\}$

L2QX6) $\{[m_0, m_1], m_2\} = {}^{\partial_1 m_0}\{m_1, m_2\} + \{m_0, [m_1, m_2]\} - {}^{\partial_1 m_1}\{m_1, m_2\}$
$-\{m_1, [m_0, m_2]\}$

L2QX7) $[\{m_0, m_1\}, {}^{\partial m_0}(m_1 \triangleleft l)] = \{{}^{\partial m_0}[m_1, \partial_2 l], \partial_2\{m_0, m_1\}\}$

$$m_1 \triangleleft l = {}^{\partial m}l - \{m, \partial_2 l\} = \{\partial_2 l, m\}$$

eşitliği geçerlidir. 2-çaprazlanmış modül morfizmine benzer şekilde morfizmleri tanımlanarak LQX_2MOD kategorisi elde edilir.

Ayrıca, (M, P, ∂) tabanlı Lie 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisi oluşturulur. Bu kategoriyi $LQX_2MOD/(M, P)$ ile göstereceğiz.

Önerme 3 *Her 2-çaprazlanmış modül bir 2-quasi çaprazlanmış modüldür ve $LX_2MOD \xrightarrow{G} LQX_2MOD$ içine funktoru mevcuttur.*

İspat 3 *$L \to M \to P$ bir 2-çaprazlanmış modül olsun. $L2QX7$ aksiyomunun geçerli olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. Her $m, m_0, m_1 \in M$ ve $l \in L$ için*

$$\begin{aligned}
[\{m_0, m_1\}, {}^{\partial m_0}(m_1 \triangleleft l)] &= \partial_2\{m_0, m_1\} \triangleleft {}^{\partial m_0}\{\partial_2 l, m\} \\
&= \partial_2\{m_0, m_1\} \triangleleft \{{}^{\partial m_0}\partial_2 l, m\} + \{\partial_2 l, {}^{\partial m_0}m_1\} \\
&= \partial_2\{m_0, m_1\} \triangleleft \{{}^{\partial m_0}\partial_2 l, m\} + \partial_2\{m_0, m_1\} \triangleleft \{\partial_2 l, {}^{\partial m_0}m_1\} \\
&= \left\{\partial_2\left(\{{}^{\partial m_0}\partial_2 l, m\}\right), \partial_2\{m_0, m_1\}\right\} + \\
&\quad \left\{\partial_2\left(\{\partial_2 l, {}^{\partial m_0}m_1\}\right), \partial_2\{m_0, m_1\}\right\} \\
&= \left\{{}^{(\partial_1({}^{\partial m_0}\partial_2 l))}m - \left[{}^{\partial m_0}\partial_2 l, m\right]\right\} + \\
&\quad \left\{{}^{(\partial_1(\partial_2 l))}\left({}^{\partial m_0}m_1\right) - \left[\partial_2 l, {}^{\partial m_0}m_1\right]\right\} \\
&= \left\{{}^{[\partial m_0, \partial_1(\partial_2 l)]}m - \left[{}^{\partial m_0}\partial_2 l, m\right], {}^{\partial m_0}m_1 - [m_0, m_1]\right\} + \\
&\quad \{0 - [\partial_2 l, {}^{\partial m_0}m_1], {}^{\partial m_0}m_1 - [m_0, m_1]\} \\
&= \{-[{}^{\partial m_0}\partial_2 l, m], {}^{\partial m_0}m_1 - [m_0, m_1]\} + \\
&\quad \{-[\partial_2 l, {}^{\partial m_0}m_1], {}^{\partial m_0}m_1 - [m_0, m_1]\} \\
&= \{[m_1, {}^{\partial m_0}\partial_2 l] + [{}^{\partial m_0}m_1, \partial_2 l], \partial_2\{m_0, m_1\}\} \\
&= \{{}^{\partial m_0}[m_1, \partial_2 l], \partial_2\{m_0, m_1\}\}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 4 *$(L, M, P, \partial_2, \partial_1, \{,\})$ Lie 2-quasi çaprazlanmış modül olmak üzere $l, l^{'} \in L$, $m \in M$ için*

$$m * l = {}^{\partial_1 m}l - \{m, \partial_2 l\} - \{\partial_2 l, m\}$$

$$l \circledast l^{'} = [l, l^{'}] - \{\partial_2 l, \partial_2 l^{'}\}$$

formundaki elemanlar ile üretilen $\overline{L}$ ideali, L Lie cebirinin P-değişmez idealidir.

İspat 4 *$p \in P$, $m \in M$, $l \in L$ için*

$$\begin{aligned}
{}^{p}(m * l) &= {}^{p}({}^{\partial_1 m}l - \{m, \partial_2 l\} - \{\partial_2 l, m\}) \\
&= {}^{p}({}^{\partial_1 m}l) - {}^{p}\{m, \partial_2 l\} - {}^{p}\{\partial_2 l, m\} \\
&= \{p, \partial_1 m\} \cdot l + (\partial_1 m) \cdot (p \cdot l) - \{p_m, \partial_2 l\} - \{m, \partial_2({}^{p}l)\} - \{\partial_2({}^{p}l), m\} - \{\partial_2 l, {}^{p}m\} \\
&= m * {}^{p}l + {}^{\partial_1(p_m)}l - \{p_m, \partial_2 l\} - \{\partial_2 l, {}^{p}m\} \\
&= m * {}^{p}l + ({}^{p}m * l) \in \overline{L}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
{}^{p}(l \circledast l^{'}) &= {}^{p}([l, l^{'}] - \{\partial_2 l, \partial_2 l^{'}\}) \\
&= [l, {}^{p}l^{'}] - \{{}^{p}\partial_2 l, \partial_2 l^{'}\} - \{\partial_2 l, {}^{p}\partial_2 l^{'}\} \\
&= [{}^{p}l, l^{'}] + [l, {}^{p}l^{'}] - \{\partial_2({}^{p}l), \partial_2 l^{'}\} - \{\partial_2 l, \partial_2({}^{p}l^{'})\} \\
&= [{}^{p}l, l^{'}] - \{\partial_2({}^{p}l), \partial_2 l^{'}\} + [l, {}^{p}l^{'}] - \{\partial_2 l, \partial_2({}^{p}l^{'})\} \\
&= ({}^{p}l \circledast l^{'}) + (l \circledast {}^{p}l^{'}) \in \overline{L}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1 *$(L, M, P, \partial_2, \partial_1, \{,\})$ Lie 2-quasi çaprazlanmış modül olmak üzere $l \in L$ ve $m_1, m_2 \in M$ için*

$$\overline{\partial}(l + \overline{L}) = \partial_2 l$$

ve

$$\overline{\{,\}}(m_1, m_2) = \{m_1, m_2\} + \overline{L}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümlerle birlikte $(L/\overline{L}, M, P, \overline{\partial}, \partial_1, \overline{\{,\}})$ bir 2-çaprazlanmış modüldür.

İspat 5 *$\forall m \in M$, $l, l^{'} \in L$ için*

$$\begin{aligned}
\partial_2(m * l) &= \partial_2({}^{\partial_1 m}l - \{m, \partial_2 l\} - \{\partial_2 l, m\}) \\
&= \partial_2({}^{\partial_1 m}l) - \partial_2(\{m, \partial_2 l\}) - \partial_2(\{\partial_2 l, m\}) \\
&= {}^{\partial_1 m}\partial_2 l - {}^{\partial_1 m}\partial_2 l + [m, \partial_2 l] - {}^{\partial_1(\partial_2 l)}m + [\partial_2 l, m] \\
&= 0 + [m, \partial_2 l] - {}^{0}m - [m, \partial_2 l] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\partial_2(l \circledast l') &= \partial_2([l,l'] - \{\partial l, \partial l'\}) \\ &= \partial_2([l,l']) - \partial_2(\{\partial l, \partial l'\}) \\ &= [\partial_2 l, \partial_2 l'] - {}^{\partial_1(\partial_2 l)}\partial_2 l' - [\partial_2 l, \partial_2 l'] \\ &= 0\end{aligned}$$

yani $\partial_2(\overline{L}) = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}\overline{\partial} : \quad L/\overline{L} &\to M \\ l + \overline{L} &\mapsto \overline{\partial}(l + \overline{L}) = \partial_2 l\end{aligned}$$

iyi tanımlıdır. Açık olarak, $l + \overline{L}, l' + \overline{L} \in L/\overline{L}$ *için*

$$l + \overline{L} = l' + \overline{L}$$

ise

$$l - l' \in \overline{L}$$

olur. $\partial_2(\overline{L}) = 0$ *olduğundan*

$$\partial_2(l - l') = \partial_2 l - \partial_2 l' = 0$$

ve

$$\partial_2 l = \partial_2 l'$$

yani

$$\overline{\partial}(l + \overline{L}) = \overline{\partial}(l' + \overline{L})$$

elde edilir.

$\forall m, m_1, m_2 \in M$, $l + \overline{L}, l' + \overline{L} \in L/\overline{L}$ *için*

$$\begin{aligned}\overline{\{\overline{\partial}(l+\overline{L}), \overline{\partial}(l'+\overline{L})\}} &= \overline{\{\partial_2 l, \partial_2 l'\}} \\ &= \{\partial_2 l, \partial_2 l'\} + \overline{L} \\ &= [l,l'] + \overline{L} \qquad (\because \{\partial_2 l, \partial_2 l'\} - [l,l'] \in \overline{L})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\{\overline{\partial}(l+\overline{L}), m\}} + \overline{\{m, \overline{\partial}(l+\overline{L})\}} &= \overline{\{\partial_2 l, m\}} + \overline{\{m, \partial_2 l\}} \\ &= \{\partial_2 l, m\} + \overline{L} + \{m, \partial_2 l\} + \overline{L} \\ &= {}^{\partial_1 m} l + \overline{L} \\ &= {}^{\partial_1 m}(l + \overline{L})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\,\overline{\{m_1, m_2\}} &= \overline{\partial}(\{m_1, m_2\} + \overline{L}) \\ &= \partial_2(\{m_1, m_2\}) \\ &= {}^{\partial_1 m_1} m_2 - [m_1, m_2]\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Diğer aksiyomların geçerliliği benzer şekilde görülebilir.

Böylece bu aksiyomlar ile birlikte $(L/\overline{L}, M, P, \overline{\partial}, \partial_1, \overline{\{,\}})$ *bir 2-çaprazlanmış modül olur.*

Sonuç 1

$$LQX_2MOD \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} LX_2MOD$$

olmak üzere (F,G) *ek (adjoint) funktor ikilisi mevcuttur.*

İspat 6 $\mathcal{L} = (L,M,P,\partial_2,\partial_1,\{,\})$ *ve* $\mathcal{L}' = (L',M',P',\partial_2',\partial_1',\{,\}')$ *iki Lie 2-quasi çaprazlanmış modül,*

$$(f_2,f_1,f_0) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$$

olmak üzere

$$F : LQX_2MOD \to LX_2MOD$$

funktoru

$$F(L,M,P) = (L/\overline{L},M,P,\overline{\partial},\partial_1,\overline{\{,\}})$$

$$F(L',M',P') = (L'/\overline{L'},M',P',\overline{\partial'},\partial_1',\overline{\{,\}'})$$

ve

$$f_2^*(l+\overline{L}) = f_2(l) + \overline{L'}$$

olmak üzere

$$F(f_2,f_1,f_0) = (f_2^*,f_1,f_0)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
f_2(m*l) &= f_2({}^{\partial_1 m}l - \{m,\partial_2 l\} - \{\partial_2 l,m\}) \\
&= f_2({}^{\partial_1 m}l) - f_2(\{m,\partial_2 l\}) - f_2(\{\partial_2 l,m\}) \\
&= {}^{f_0(\partial_1 m)}f_2(l) - \{f_1(m),f_1(\partial_2 l)\}' - \{f_1(\partial_2 l),f_1(m)\}' \\
&= {}^{\partial_1' f_1(m)}f_2(l) - \{f_1(m),\partial_2'(f_2(l))\}' - \{\partial_2'(f_2(l)),f_1(m)\}' \\
&= f_1(m)*f_2(l) \in f(L) \subseteq \overline{L'}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_2(l_1 \circledast l_2) &= f_2([l_1,l_2'] - \{\partial_2 l,\partial_2 l'\}) \\
&= f_2[l_1,l_2] - f_2(\{\partial_2 l_1,\partial_2 l_2\}) \\
&= [f_2 l_1,f_2 l_2] - (f_2(\{\,\})(\partial_2 l_1,\partial_2 l_2)) \\
&= [f_2 l_1,f_2 l_2] - \{\,\}'(f_1,f_2)(\partial_2 l_1,\partial_2 l_2) \\
&= [f_2 l_1,f_2 l_2] - \{f_1\partial_2 l_1,f_1\partial_2 l_2\}' \\
&= [f_2 l_1,f_2 l_2] - \{\partial_2' f_2 l_1,\partial_2' f_2 l_2\}' \\
&= f_2(l_1)*f_2(l_2) \in \overline{L'}
\end{aligned}$$

bulunur. $l_1+\overline{L}, l_2+\overline{L} \in L/\overline{L}$ *için*

$$l_1+\overline{L} = l_2+\overline{L}$$

ise

$$l_1 - l_2 \in \overline{L}$$

olur. $f_2(l_1 - l_2) \in f_2(\overline{L}) \subseteq \overline{L'}$ *olduğundan*

$$f_2 l_1 - f_2 l_2 \in \overline{L'}$$

bulunur. Böylece,

$$f_2 l_1 + \overline{L'} = f_2 l_2 + \overline{L'}$$

olup

$$f_2^*(l + \overline{L}) = (f_2 l) + \overline{L'}$$

şeklinde tanımlı

$$f^* : L/\overline{L} \to L^{'}/\overline{L'}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}
\overline{\partial_2'}(f_2^*(l + \overline{L})) &= \overline{\partial_2'}((f_2 l) + \overline{L'}) \\
&= \partial_2^{'}(f_2 l) \\
&= f_1(\partial_2(l)) \\
&= f_1(\overline{\partial}(l + \overline{L}))
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, (f_2, f_1, f_0) *Lie 2-quasi çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan*

$$\partial_1^{'} f_1 = f_0 \partial$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{tikzcd}
L/\overline{L} \arrow[r, "f_2^*"] \arrow[d, "\overline{\partial}"'] & L^{'}/\overline{L'} \arrow[d, "\overline{\partial_2'}"] \\
M \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] & M^{'} \arrow[d, "\partial_1^{'}"] \\
P \arrow[r, "f_0"] & P^{'}
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
f_2^* \overline{\{,\}}(m_1, m_2) &= f_2^*(\{m_1, m_2\} + \overline{L}) \\
&= f_2(\{m_1, m_2\}) + \overline{L} \\
&= \{f_1(m_1), f_1(m_2)\}^{'} \\
&= \{,\}(f_1, f_1)(m_1, m_2)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "\overline{\{,\}}"] \arrow[d, "(f_1, f_1)"'] & L/\overline{L} \arrow[d, "f_2^*"] \\
M^{'} \times M^{'} \arrow[r, "\{,\}^{'}"'] & L/\overline{L}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
(m_1, m_2) & \longmapsto & \{m_1, m_2\} + \overline{L} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(f_1(m_1), f_1(m_2)) & \longmapsto & \{f_1(m_1), f_1(m_2)\}^{'} = f_2^*(\{m_1, m_2\} + \overline{L})
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla,

$$(f_2^*, f_1, f_0) : (L/\overline{L}, M, P, \overline{\partial}, \partial_1, \overline{\{,\}}) \to (L^{'}/\overline{L^{'}}, M^{'}, P^{'}, \overline{\partial^{'}}, \partial_1^{'}, \overline{\{,\}^{'}})$$

bir 2-çaprazlanmış modül morfizmidir. Böylece,

$$\begin{array}{rcl}
LQX_2MOD & \xrightarrow{F} & LX_2MOD \\
(L/\overline{L}, M, P, \overline{\partial}, \partial_1, \overline{\{,\}}) & \mapsto & (L^{'}/\overline{L^{'}}, M^{'}, P^{'}, \overline{\partial^{'}}, \partial_1^{'}, \overline{\{,\}^{'}}) \\
(f_2, f_1, f_0) & \mapsto & (f_2^*, f_1, f_0)
\end{array}$$

olduğu görülür.

$\mathcal{K} = (K, N, Q, \partial_2^{'}, \partial_1^{'}, \{,\}^{'})$ ve $(f, f_1, f_0) : F(\mathcal{L}) \to \mathcal{K} \in Mor(LX_2MOD)$ için $q_{_L} : L \to L/\overline{L}$ olmak üzere

$$(fq_{_L}, f_1, f_0) : \mathcal{L} \to \mathcal{K} \in Mor(LQX_2MOD)$$

mevcuttur.

Tersine $(f_2, f_1, f_0) : \mathcal{L} \to G(\mathcal{K}) \in Mor(LQX_2MOD)$ için

$$(f_2^*, f_1, f_0) : (L/\overline{L}, M, P, \overline{\partial}, \partial, \overline{\{,\}}) \to (K, N, Q, \partial_2^{'}, \partial_1^{'}, \{,\}^{'})$$

vardır. Böylece,

$$LX_2MOD(F(\mathcal{L}), \mathcal{K}) \cong LQX_2MOD(\mathcal{L}, G(\mathcal{K}))$$

birebir eşlemesi geçerlidir.

$$h : (h_2, h_1, h_0) = \mathcal{L}^{'} \to \mathcal{L} \in Mor(LQX_2MOD)$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
LX_2MOD(F(\mathcal{L}), \mathcal{K}) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{L},\mathcal{K}}"] \arrow[d, "F(h)^* = - \circ F(h)"'] & LQX_2MOD(\mathcal{L}, G(\mathcal{K})) \arrow[d, "- \circ h = h^*"] \\
LX_2MOD(F(\mathcal{L}^{'}), \mathcal{K}) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{L}^{'},\mathcal{K}^{'}}"'] & LQX_2MOD(\mathcal{L}^{'}, G(\mathcal{K}))
\end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğu

$$\begin{tikzcd}
(f_2, f_1, f_0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f_2 q_{_L}, f_1, f_0) \arrow[d, mapsto] \\
(f_2 h_2^*, f_1 h_1, f_0 h_0) \arrow[r, mapsto] & ((f_2 h_2^*) q_{_L}, f_1 h_1, f_0 h_0) = ((f_2 q_{_L}) h_2, f_1 h_1, f_0 h_0)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
f_2 h_2^* q_{_L}(l^{'}) &= f_2 h_2^*(l^{'} + \overline{L^{'}}) \\
&= f_2(h_2(l^{'}) + \overline{L}) \\
&= f_2(q_{_L}(h_2(l^{'})))
\end{aligned}$$

eşitliği ile görülür. Böylece, $\mathcal{L}$ objesinde doğallık sağlanır.

$$k : (k_2, k_1, k_0) = \mathcal{K} \to \mathcal{K}^{'} \in Mor(LX_2MOD)$$

için

$$\begin{tikzcd}
LX_2MOD(F(\mathcal{L}), \mathcal{K}) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{L},\mathcal{K}}"] \arrow[d, "k^* = k \circ -"'] & LQX_2MOD(\mathcal{L}, G(\mathcal{K})) \arrow[d, "G(k) \circ - = G(k)^*"] \\
LX_2MOD(F(\mathcal{L}), \mathcal{K}^{'}) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{L}^{'},\mathcal{K}^{'}}"'] & LQX_2MOD(\mathcal{L}, G(\mathcal{K}^{'}))
\end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğu

$$\begin{tikzcd}
(f_2, f_1, f_0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f_2 q_{_L}, f_1, f_0) \arrow[d, mapsto] \\
(k_2 f_2, k_1 f_1, k_0 f_0) \arrow[r, mapsto] & ((k_2 f_2) q_{_L}, k_1 f_1, k_0 f_0) = (k_2(f_2 q_{_L}), k_1 f_1, k_0 f_0)
\end{tikzcd}$$

$$(k_2 f_2) q_{_L} = k_2(f_2 q_{_L})$$

eşitliği ile görülür. Böylece, $\mathcal{K}$ objesinde doğallık sağlanır.

5. EŞÇARPIMLAR

Birçok kategoride eşçarpım objenin oluşturulduğu çalışmalar mevcuttur. Bunlardan bazıları R. Brown (1984; 1999), Ellis (1993), Carrasco ve Porter (2015), Avcıoğlu ve Akça (2002) ve Emir (2019) şeklinde listelenebilir.

$\partial : L \to M$ bir Lie ön çaprazlanmış modül, I ise L Lie cebirinin her $l, l^{'} \in L$ için

$$^{\partial l}l' - [l, l^{'}]$$

şeklindeki elemanlarla üretilen ideali olmak üzere $\overline{\partial}(l + I) = \partial l$ eşitliğiyle tanımlanan $\overline{\partial} : L/I \to M$ dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür.

$$\begin{aligned}
\partial(I) &= \partial(^{\partial l}l' - [l, l^{'}]) \\
&= \partial(^{\partial l}l^{'}) - \partial([l, l^{'}]) \\
&= [\partial l, \partial l^{'}] - [\partial l, \partial l^{'}] \\
&= [\partial l, \partial l^{'}] + [\partial l, -\partial l^{'}] \\
&= [\partial l, \partial l^{'} - \partial l^{'}] \\
&= [\partial l, 0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\partial} : L/I \to M$ iyi tanımlıdır. $m \in M$, $l, l^{'} \in L$ için

$$^{m}(l + I) = (^{m}l) + I$$

etkisiyle birlikte

$$\begin{aligned}
^{\overline{\partial}(l+I)}(l' + I) &= {}^{\partial l}(l' + I) \\
&= {}^{\partial l}l' + I \\
&= [l, l^{'}] + I \\
&= [l + I, l^{'} + I]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}(^{m}(l + I)) &= \partial(^{m}l + I) \\
&= \partial(^{m}l) \\
&= [m, \overline{\partial}(l + I)]
\end{aligned}$$

eşitlikleriyle $\overline{\partial}$ çaprazlanmış modül şartlarını sağlar.

$(f_1, f_0) = (L, M, \partial) \to (L^{'}, M, \partial^{'})$ Lie ön çaprazlanmış modül morfizmi için I, $I^{'}$ sırasıyla L ve $L^{'}$ Lie cebirlerinin yukarıda tanımlanan ideallerine karşılık gelmek üzere

$(g_1, g_0) : (L/I, M, \overline{\partial}) \to (L^{'}/I^{'}, M, \overline{\partial^{'}})$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Böylece, M tabanlı ön çaprazlanmış modüller kategorisi $LPXMOD/M$ den $LXMOD/M$ kategorisine

$$\begin{array}{rcl} LPXMOD/M & \to & LXMOD/M \\ (L, M, \partial) & \mapsto & (L/I, M, \overline{\partial}) \\ (f_1, f_0) & \mapsto & (g_1, g_0) \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir funktor mevcuttur. Bu funktor

$$LXMOD/M \to LPXMOD/M$$

forgetful funktorunun sol ekidir.

Bu düşünceden hareketle M tabanlı çaprazlanmış modül kategorisindeki eş çarpım objesinin oluşturulmasında $LPXMOD/M \to LXMOD/M$ funktorunun önemli yere sahip olduğu aşağıdaki bölümde görülmektedir.

5.1 Lie Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı

(L, M, ∂) ve $(L^{'}, M, \partial^{'})$ Lie T-cebirlerin iki Lie çaprazlanmış modülü olmak üzere $l \in L, l^{'} \in L^{'}$ için ${}^{l^{'}}l = {}^{\partial^{'}l^{'}}l$ şeklinde tanımlı Lie cebir etkisi mevcuttur. Bu durumda,

$$L \rtimes L^{'} = \{(l, l^{'}) : l \in L, l^{'} \in L^{'}\}$$

kümesi $l_1, l_2 \in L, l_1^{'}, l_2^{'} \in L^{'}$ ve $t \in T$ için

$$(l_1, l_1^{'}) + (l_2, l_2^{'}) = (l_1 + l_2, l_1^{'} + l_2^{'})$$

$$t(l, l^{'}) = (tl, tl^{'})$$

$$[(l_1, l_1^{'}), (l_2, l_2^{'})] = ([l_1, l_2] - {}^{l_2^{'}}l_1 + {}^{l_1^{'}}l_2, [l_1^{'}, l_2^{'}])$$

şeklinde tanımlı işlemlerle birlikte bir Lie T-cebir yapısı oluşturur.

$$\begin{array}{rcl} L \rtimes L^{'} & \stackrel{\tilde{\partial}}{\to} & M \\ (l, l^{'}) & \mapsto & \partial l + \partial^{'} l^{'} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} M \times (L \rtimes L^{'}) & \to & L \rtimes L^{'} \\ (m, (l, l^{'})) & \mapsto & {}^{m}(l, l^{'}) = ({}^{m}l, {}^{m}l^{'}) \end{array}$$

dönüşümleri tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\partial}({}^{m}(l, l^{'})) & = & \tilde{\partial}({}^{m}l, {}^{m}l^{'}) \\ & = & \partial({}^{m}l) + \partial^{'}({}^{m}l^{'}) \\ & = & [m, \partial l] + [m, \partial^{'} l^{'}] \\ & = & [m, \partial l + \partial^{'} l^{'}] \\ & = & [m, \tilde{\partial}(l, l^{'})] \end{array}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, $\tilde{\partial}$ bir ön çaprazlanmış modüldür.

$(E, M, \overline{\overline{\partial}})$ herhangi bir çaprazlanmış modül ve $(f_L, Id_M) : (L, M, \partial) \to (E, M, \overline{\overline{\partial}})$, $(f_L^{'}, Id_M) : (L^{'}, M, \partial^{'}) \to (E, M, \overline{\overline{\partial}})$ birer çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
(L, M, \partial) \arrow[r] \arrow[dr, "f_L"'] & (L \rtimes L^{'}, M, \tilde{\partial}) \arrow[d, dashed, "\exists !\, (h, Id_M)"] & (L^{'}, M, \partial^{'}) \arrow[l] \arrow[dl, "f_{L^{'}}"] \\
& (E, M, \overline{\overline{\partial}}) &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $(h, Id_M) : (L \rtimes L^{'}, M, \tilde{\partial}) \to (E, M, \overline{\overline{\partial}})$ ön çaprazlanmış modül morfizmi vardır. Burada,

$$h : L \rtimes L^{'} \to E$$

morfizmi

$$(l, l^{'}) \mapsto h(l, l^{'}) = [f_L(l), f_{L^{'}}(l^{'})]$$

şeklinde tanımlıdır.

Böylece, (L, M, ∂) ve $(L^{'}, M, \partial^{'})$ çaprazlanmış modüllerinin eşçarpımı olarak $(L \rtimes L^{'}, M, \tilde{\partial})$ ön çaprazlanmış modülü bulunur. Ön çaprazlanmış modül kategorisindeki bu eş çarpım objesi $PXMOD/M \to XMOD/M$ funktoru yardımıyla taşınarak çaprazlanmış modüller kategorisindeki $(L \rtimes L^{'}/\mathrm{I}, M, \tilde{\partial})$ şeklindeki eşçarpım obje elde edilir. Burada, I, $L \rtimes L^{'}$ Lie cebirinin

$$\begin{aligned}
[(l_1, l_1^{'}), (l_2, l_2^{'})] - {}^{\partial(l_1, l_1^{'})}(l_2, l_2^{'}) &= [(l_1, l_1^{'}), (l_2, l_2^{'})] - {}^{(\partial l_1 + \partial^{'} l_1^{'})}(l_2, l_2^{'}) \\
&= [(l_1, l_1^{'}), (l_2, l_2^{'})] - ({}^{(\partial l_1 + \partial^{'} l_1^{'})}(l_2), {}^{(\partial l_1 + \partial^{'} l_1^{'})}(l_2^{'})) \\
&= [(l_1, l_1^{'}), (l_2, l_2^{'})] - ({}^{\partial l_1}l_2 + {}^{\partial^{'} l_1^{'}}l_2, {}^{\partial l_1}l_2^{'} + {}^{\partial^{'} l_1^{'}}l_2^{'}) \\
&= [(l_1, l_1^{'}), (l_2, l_2^{'})] - ([l_1, l_2] + {}^{\partial^{'} l_1^{'}}l_2, {}^{\partial l_1}l_2^{'} + [l_1^{'}, l_2^{'}]) \\
&= ([l_1, l_2] - {}^{l_2^{'}}l_1 + {}^{l_1^{'}}l_2, [l_1^{'}, l_2^{'}]) \\
&\quad -([l_1, l_2] + {}^{\partial^{'} l_1^{'}}l_2, {}^{\partial l_1}l_2^{'} + [l_1^{'}, l_2^{'}]) \\
&= (-{}^{\partial^{'}(l_2^{'})}l_1 + {}^{\partial^{'}(l_1^{'})}l_2 - {}^{\partial^{'}(l_1^{'})}l_2, -{}^{\partial l_1}l_2^{'}) \\
&= -({}^{\partial^{'}(l_2^{'})}l_1, {}^{\partial l_1}l_2^{'})
\end{aligned}$$

elemanlarıyla üretilen M-değişmez idealidir (Ellis, 1993). Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} : \quad L \rtimes L^{'}/\mathrm{I} &\to M \\
(l, l^{'}) + \mathrm{I} &\mapsto \tilde{\partial}(l, l^{'})
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\partial}$ bir çaprazlanmış modüldür.

$$\begin{aligned}
{}^{\overline{\partial}((l_1,l_1^{'})+\mathrm{I})}((l_2,l_2^{'})+\mathrm{I}) &= {}^{\tilde{\partial}((l_1,l_1^{'}))}((l_2,l_2^{'})+\mathrm{I}) \\
&= ({}^{\tilde{\partial}(l_1,l_1^{'})}l_2, {}^{\tilde{\partial}(l_1,l_1^{'})}l_2^{'})+\mathrm{I} \\
&= ({}^{(\partial l_1+\partial^{'}l_1^{'})}l_2, {}^{(\partial l_1+\partial^{'}l_1^{'})}l_2^{'})+\mathrm{I} \\
&= ({}^{\partial l_1}l_2+{}^{\partial^{'}l_1^{'}}l_2, {}^{\partial l_1}l_2^{'}+{}^{\partial^{'}l_1^{'}}l_2^{'})+\mathrm{I} \\
&= ([l_1,l_2]+{}^{\partial^{'}l_1^{'}}l_2, {}^{\partial l_1}l_2^{'}+[l_1^{'},l_2^{'}])+\mathrm{I} \\
&= ([l_1,l_2]-{}^{\partial l_2^{'}}l_1+{}^{\partial l_1^{'}}l_2, [l_1^{'},l_2^{'}])+\mathrm{I} \\
&= ([l_1,l_2]-{}^{l_2^{'}}l_1+{}^{l_1^{'}}l_2, [l_1^{'},l_2^{'}])+\mathrm{I} \\
&= [(l_1,l_1^{'}),(l_2,l_2^{'})]+\mathrm{I} \\
&= [(l_1,l_1^{'})+\mathrm{I},(l_2,l_2^{'})+\mathrm{I}]
\end{aligned}$$

5.2 Lie 2-Quasi Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı

Gruplar ve değişmeli cebirler üzerinde 2-quasi çaprazlanmış modül kategorileri için eşçarpım obje sırasıyla Carrasco ve T. Porter (2015) ve K. Emir (2019)'in çalışmalarında yer almaktadır. Biz Lie cebirler üzerinde 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisi için eşçarpım objenin yapılandırılmasını inceleyeceğiz.

$(L,M,P,\partial_2,\partial_1,\{,\})$ ve $(L^{'},M,P,\partial_2^{'},\partial_1,\{,\})$ (M,P,∂_1) tabanlı iki 2-quasi çaprazlanmış modülü için J, $L\rtimes L^{'}$ Lie cebirinin $(-\{m_1,m_2\},\{m_1,m_2\}^{'})$, $(\{m_1,m_2\},-\{m_1,m_2\}^{'})$ formundaki elemanlarıyla üretilen ideali ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}: \ L\rtimes L^{'} &\to M \\
(l,l^{'}) &\mapsto \tilde{\partial}(l,l^{'})=\partial_2 l+\partial_2^{'}l^{'}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\partial: \ L\rtimes L^{'}/\mathrm{J} &\to M \\
(l,l^{'})+\mathrm{J} &\mapsto \partial((l,l^{'})+\mathrm{J})=\partial_2 l+\partial_2^{'}l^{'}
\end{aligned}$$

dönüşümü

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}(\{m_1,m_2\},-\{m_1,m_2\}^{'}) &= \partial_2(\{m_1,m_2\})+\partial_2^{'}(-\{m_1,m_2\}^{'}) \\
&= {}^{\partial_1 m_1}m_2-[m_1,m_2]-{}^{\partial_1 m_1}m_2+[m_1,m_2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\tilde{\partial}(-\{m_1,m_2\},\{m_1,m_2\}^{'})=0$$

eşitlikleri sağlandığından iyi tanımlıdır.

$\forall m\in M$ ve $(l,l^{'})\in L\rtimes L^{'}$ için

$${}^{m}((l,l^{'})+\mathrm{J})=({}^{m}l,{}^{m}l^{'})+\mathrm{J}$$

şeklindeki Lie cebir etkisi ve

$$\begin{array}{rccl} \{,\}^{\#}: & M\times M & \to & L\rtimes L^{'}/\mathrm{J} \\ & (m_1,m_2) & \mapsto & \{m_1,m_2\}^{\#}=(0,\{m_1,m_2\}^{'})+\mathrm{J}=(\{m_1,m_2\},0)+\mathrm{J} \end{array}$$

lifting dönüşümü ile birlikte $(L\rtimes L^{'}/\mathrm{J},M,P,\partial,\partial_1,\{,\}^{\#})$ bir 2-quasi çaprazlanmış modüldür.

$(E,M,P,\delta^{*},\partial_1,\{,\}^{*})$ herhangi bir 2-quasi çaprazlanmış modül ve

$$\begin{tikzcd} (L,M,P,\delta,\partial_1,\tilde{\tilde{\{,\}}}) \arrow[r] \arrow[dr] & (L\rtimes L^{'}/\mathrm{J},M,P,\partial,\partial_1,\{,\}^{\#}) \arrow[d, dashed, "\exists!" ', "(k,Id_M,Id_P)"] & (L^{'},M,P,\overline{\overline{\delta}},\partial_1,\overline{\overline{\{,\}}}) \arrow[l] \arrow[dl] \\ & (E,M,P,\delta^{*},\partial_1,\{,\}^{*}) & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$(k,Id_M,Id_P):(L\rtimes L^{'}/\mathrm{J},M,P,\partial,\partial_1,\{,\}^{\#})\to(E,M,P,\delta^{*},\partial_1,\{,\}^{*})$$

2-quasi çaprazlanmış modül morfizmi vardır. Böylece, $(L,M,P,\delta,\partial_1,\tilde{\tilde{\{,\}}})$, $(L^{'},M,P,\overline{\overline{\delta}},\partial_1,\overline{\overline{\{,\}}})$ 2-quasi çaprazlanmış modüllerinin eş çarpımı olarak $(L\rtimes L^{'}/\mathrm{J},M,P,\partial,\partial_1,\{,\}^{\#})$ 2-quasi çaprazlanmış modülü bulunur.

5.3 Lie 2-Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı

Herhangi iki 2-çaprazlanmış modül birer 2-quasi çaprazlanmış modül olarak düşünülebileceğinden bunların eşçarpımı 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisinin bir objesi olup $LQX_2MOD\to LX_2MOD$ funktoru ile 2-çaprazlanmış modüllerin eşçarpım objesine taşınabilir. Bu şekilde 2-çaprazlanmış modül kategorisindeki eşçarpım objesi elde edilir

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında çeşitli cebirsel yapılar üzerindeki çaprazlanmış modül kategorisinde eşçarpım objenin belirlenmesi yöntemine dayanarak bu kategorinin bir yüksek boyutu olan 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin eşçarpım objesi Lie cebirler için araştırılmıştır. Çaprazlanmış modül kategorisinde eşçarpım objenin belirlenmesinde anahtar rol üstlenen ve ön çaprazlanmış modül kategorisinden çaprazlanmış modül kategorisine tanımlanan funktorun bu yüksek boyutlu içerikteki karşılığı araştırılmıştır. Bunun için de öncelikli olarak Lie 2-quasi çaprazlanmış modül kavramının tanımlanması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Daha sonra söz konusu funktorun Lie 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisinden 2-çaprazlanmış modül kategorisine tanımlanması gerektiği görülmüştür. Bu yöntemin daha önce grup ve değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modüller kategorisi için araştırılan eşçarpım objesinin yapılandırılması ile de uyumlu olduğu tespit edilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Grup, gruboid, değişmeli cebir, cebiroid ve Lie cebri gibi çeşitli cebirsel yapılar üzerindeki çaprazlanmış modül kategorilerinde eşçapım objenin oluşturulması fikrine dayanarak, Carrasco ve Porter (2015) ve K. Emir'in (2019) sırasıyla grup ve değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül kategorileri için yaptığı eşçarpım objenin yapılandırılmasının Lie 2-çaprazlanmış modüller için de mümkün olduğu sonucuna varılmıştır. Bunun için Lie cebirler için 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisi tanımlanarak eşçarpım objesi elde edilmiştir. Bu kategoriden 2-çaprazlanmış modül kategorisine eşçarpım objeyi koruyan uygun funktor tanımlamasıyla 2-çaprazlanmış modül kategorisinin eşçarpım objesinin varlığı sonucu çıkarılmıştır.

2-çaprazlanmış modül kategorisi ile 2-quasi çaprazlanmış modül kategorisi arasındaki ilişkinin, 2-çaprazlanmış modüller kategorisine denk olduğu bilinen Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisi için karşılığının nasıl oluştuğuna dair incelemeler yapmak literatüre katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Arvasi, Z. ve Ege, U., 2003, Annihilators, Multipliers and Crossed Modules, *Journal of Algebra* 11, 487–506.

Arvasi, Z. ve Porter, T., 1996, Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, *Journal of Algebra* 181, 426–448.

Avcıoğlu, O. ve Akça, ., 2002, Coproduct of Crossed A-Modules of R-Algebroids, *Topological Algebra and its Applications* 5.1, 37–48.

Brown, R, 1982, Higher Dimensional Group Theory, Low Dimensional Topology, *London Math. Soc. Lecture Note Series* 48, 215–238.

— 1984, Coproducts of Crossed P-modules: Applications to Second Homotopy Groups and to the Homology of Groups, *Topology* 23, 337–345.

— 1999, Groupoids and crossed ob jects in algebraic top, *Homology Homotopy and Application* 1.1, 1–78.

Brown, R. ve Higgins, P., 1981, Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups, *J. Pure Appl. Algebra* 22, 249–370.

— 1982, The Algebra of Cubes, Low Dimensional Topology, *London Math. Soc. Lecture Note Series* 48, 153–202.

Brown, R. ve Huebschmann, J., 1981, Identities among Relations, *J. Pure Appl. Algebra* 21, 233–260.

Carrasco, P. ve Porter, T., 2015, Coproduct of 2-crossed modules: applications to a definition of a tensor product for 2-crossed complexes, *Collectanea Mathematica* 67.3, 485–517.

Conduché, D., 1984, Modules croisés généralisés de longueur 2, *Journal of Pure and Applied Algebra* 34.2-3, 155–178.

Dedecker, P. ve Lue, A., 1966, A non-abelian two-dimensional cohomology for associative algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 72.6, 1044–1050.

Ellis, G. J., 1993, Homotopical Aspects of Lie Algebras, *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)* 54, 393–419.

Emir, K., 2012, Çaprazlanmış Modüllerin Eşçarpımı, Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

— 2019, 2-Quasi Crossed Modules of Commutative Algebras, URL: `https : / / www . researchgate . net / publication / 335929116 _ 2\ - Quasi_Crossed_Modules_of_Commutative_Algebras`.

Gerstenhaber, M., 1966, On the Deformation of Rings and Algebras, *Ann. Math.* pp. 84.

Kassel, C. ve Loday, J., 1982, Extensions centrales d'algèbres de Lie, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 32.4, 119–142.

Lichtenbaum, S. ve Schlessinger, M., 1967, The Cotangent Complex of a Morphism, *Trans. American Society* 128, 41–70.

Porter, T., 1986, Homology of commutative algebras and an invariant of simis and vasconcelos, *Journal of Algebra* 99.2, 458–465. DOI: `10.1016/0021-8693(86)90038-4`.

Shammu, N. M., 1992, Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Thesis. University College of North Wales.

Whitehead, J., 1941, On Adding Relations to Homotopy Groups, *Annals of Mathematics* 42.2, 409–428.

— 1946, Note on a Previous Paper Entitled "On Adding Relations to Homotopy Groups", *Annals of Mathematics* 47.4, 806–810.

— 1949, Combinatorial Homotopy II, *Bull. American Math. Society* 55, 453–456.