

Yüksek Dereceden B-spline Fonksiyonlar Üzerine

Beyza Koyulmuş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Nisan 2021

On High Degree B-spline Functions

Beyza Koyulmuş

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

April 2021

Yüksek Dereceden B-spline Fonksiyonlar Üzerine

Beyza Koyulmuş

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Dursun İrk

Nisan 2021

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Dursun İrk danışmanlığında hazırlamış olduğum “Yüksek Dereceden B-spline Fonksiyonlar Üzerine” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/06/2021

Beyza Koyulmuş

İmza

ÖZET

Bu Yüksek Lisans tezi yedi bölümden oluşmaktadır. Bu tezde, birinci dereceden onuncu dereceye kadar B-spline fonksiyonların çıkartılması yapıp belirli aralıklarda grafikleri çizilmiştir. B-pline fonksiyonların süreklilik özellikleri ve türevlenebilme özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde tezle ilgili genel bilgiler verilmiş ve tezin amacı açıklanmıştır. Sonraki bölümde, B-pline fonksiyonlar ile daha önce yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bazı temel terimler ve B-spline fonksiyon tanımından bahsedilmiştir. Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlarını hesaplayabilmek için indirgeme bağıntısı verilmiştir.

Dördüncü bölümde sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu kullanılarak Lineer B-spline hesaplanmıştır. Lineer B-Spline fonksiyondan onuncu dereceye kadar B-spline fonksiyonlar hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde bir problem üzerinde B-spline fonksiyonların karşılaştırılması yapılmıştır.

Son iki bölümde, elde edilen sonuçlar tartışılmış ve ileride yapılacak çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Polinom yaklaşımı, Spline fonksiyonlar, B-Spline fonksiyonlar

SUMMARY

This Master's thesis consists of seven chapters. In this thesis, B-spline functions from the first order to the tenth order are derived and their graphs are drawn over their supports interval. The continuity and differentiability properties of spline functions are examined. All B-spline functions on a problem are compared.

In the first chapter, general information about the thesis is given and the aim of the thesis is explained. In the next chapter, previous studies with Spline functions are examined.

In the third chapter, some basic terms and definition of B-spline function are mentioned. In order to calculate higher order B-spline functions, the recursion formula is given.

In the fourth chapter, Linear B-spline is calculated by using the zeroth order B-spline function and then B-spline functions from the linear to the tenth order are derived.

In the fifth chapter, the comparison of B-spline functions on a problem is made.

In the last two chapters, the obtained results are discussed, and some suggestions are given for future studies.

Keywords : Polynomial approximation, Spline functions, B-Spline functions

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	5
4. B-SPLINE FONKSİYONLARIN ELDE EDİLMESİ	7
4.1 Lineer B-spline	7
4.2 Kuadratik B-spline.....	11
4.3 Kübik B-spline.....	16
4.4 Kuartik B-spline	22
4.5 Kuintik B-spline	29
4.6 Sektik B-spline	38
4.7 Septik B-spline	48
4.8 8. Dereceden B-spline.....	60
4.9 9. Dereceden B-spline.....	71
4.10 10.Dereceden B-spline	85
5. B-SPLINE FONKSİYONLARIN UYGULANMASI	100
5.1 Kuadratik B-spline.....	102
5.2 Kübik B-spline.....	103
5.3 Kuartik B-spline	104
5.4 Kuintik B-spline	106

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.5 Sektik B-spline	107
5.6 Septik B-spline	109
5.7 8. Dereceden B-spline.....	111
5.8 9. Dereceden B-spline.....	113
5.9 10. Dereceden B-spline.....	115
6. BULGULAR VE TARTIŞMA	118
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	121
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	122

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 Lineer B-spline fonksiyonu	9
4.2 Lineer B-spline fonksiyonlar	10
4.3 Lineer B-spline şekil fonksiyonlar	10
4.4 Kuadratik B-spline fonksiyonu	14
4.5 Kuadratik B-spline fonksiyonun birinci türevi.....	14
4.6 Kuadratik B-spline fonksiyonlar	15
4.7 Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları	15
4.8 Kübik B-spline fonksiyonu	20
4.9 Kübik B-spline fonksiyonun birinci türevi.....	20
4.10 Kübik B-spline fonksiyonun ikinci türevi.....	20
4.11 Kübik B-spline fonksiyonlar	21
4.12 Kübik B-spline şekil fonksiyonları	21
4.13 Kuartik B-spline fonksiyon	26
4.14 Kuartik B-spline fonksiyonun birinci türevi	26
4.15 Kuartik B-spline fonksiyonun ikinci türevi.....	27
4.16 Kuartik B-spline fonksiyonun üçüncü türevi	27
4.17 Kuartik B-spline fonksiyonlar	28
4.18 Kuartik B-spline şekil fonksiyonları	28
4.19 Kuintik B-spline fonksiyonu	34
4.20 Kuintik B-spline fonksiyonun birinci türevi	34
4.21 Kuintik B-spline fonksiyonun ikinci türevi.....	34
4.22 Kuintik B-spline fonksiyonun üçüncü türevi	34
4.23 Kuintik B-spline fonksiyonun dördüncü türevi.....	35
4.24 Kuintik B-spline fonksiyonları.....	36
4.25 Kuintik B-spline şekil fonksiyonları	37
4.26 Sektik B-spline fonksiyonu	44
4.27 Sektik B-spline fonksiyonun birinci türevi	44
4.28 Sektik B-spline fonksiyonun ikinci türevi.....	45

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.29 Sektik B-spline fonksiyonun üçüncü türevi	45
4.30 Sektik B-spline fonksiyonun dördüncü türevi.....	45
4.31 Sektik B-spline fonksiyonun beşinci türevi	45
4.32 Sektik B-spline fonksiyonları.....	46
4.33 Sektik B-spline şekil fonksiyonları	47
4.34 Septik B-spline fonksiyonu	55
4.35 Septik B-spline fonksiyonun birinci türevi	55
4.36 Septik B-spline fonksiyonun ikinci türevi.....	56
4.37 Septik B-spline fonksiyonun üçüncü türevi	56
4.38 Septik B-spline fonksiyonun dördüncü türevi.....	56
4.39 Septik B-spline fonksiyonun beşinci türevi	56
4.40 Septik B-spline fonksiyonun altıncı türevi.....	56
4.41 Septik B-spline fonksiyonları.....	58
4.42 Septik B-spline şekil fonksiyonları	58
4.43 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonu	66
4.44 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun birinci türevi	66
4.45 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun ikinci türevi.....	67
4.46 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun üçüncü türevi	67
4.47 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun dördüncü türevi.....	67
4.48 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun beşinci türevi.....	67
4.49 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun altıncı türevi.....	67
4.50 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun yedinci türevi	67
4.51 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları	69
4.52 Sekizinci dereceden B-spline şekil fonksiyonları	69
4.53 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonu.....	79
4.54 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun birinci türevi.....	79
4.55 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun ikinci türevi	80
4.56 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun üçüncü türevi.....	80

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.57 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun dördüncü türevi	80
4.58 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun beşinci türevi	80
4.59 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun altıncı türevi	80
4.60 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun yedinci türevi.....	80
4.61 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun sekizinci türevi	81
4.62 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları	82
4.63 Dokuzuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonları.....	83
4.64 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonu	94
4.65 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun birinci türevi.....	94
4.66 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun ikinci türevi	94
4.67 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun üçüncü türevi.....	94
4.68 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun dördüncü türevi	95
4.69 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun beşinci türevi.....	95
4.70 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun altıncı türevi	95
4.71 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun yedinci türevi	95
4.72 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun sekizinci türevi	95
4.73 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonun dokuzuncu türevi.....	95
4.74 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonları	97
4.75 Onuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonları.....	98
5.1 $u(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	101
5.2 $u'(x)$ fonksiyonunun grafiği	101
5.3 $u''(x)$ fonksiyonunun grafiği	101
5.4 $u'''(x)$ fonksiyonunun grafiği	101
5.5 $u^{(4)}(x)$ fonksiyonunun grafiği	101
5.6 $u^{(5)}(x)$ fonksiyonunun grafiği	101
5.7 $u^{(6)}(x)$ fonksiyonunun grafiği	101
5.8 $u^{(7)}(x)$ fonksiyonunun grafiği	101

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)**Sekil****Sayfa**

5.9 $u^{(8)}(x)$ fonksiyonunun grafiği	102
5.10 $u^{(9)}(x)$ fonksiyonunun grafiği	102

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
5.1 Kuadratik B-spline fonksiyonu için hata normları.....	103
5.2 Kübik B-spline fonksiyonu için hata normları.....	104
5.3 Kuartik B-spline fonksiyonu için hata normları.....	106
5.4 Kuintik B-spline fonksiyonu için hata normları.....	107
5.5 Sektik B-spline fonksiyonu için hata normları.....	109
5.6 Septik B-spline fonksiyonu için hata normları.....	111
5.7 Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonu için hata normları.....	113
5.8 Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonu için hata normları	115
5.9 Onuncu dereceden B-spline fonksiyonu için hata normları	117
6.1 Birinci mertebeden türev için elde edilen hata normları	118
6.2 İkinci mertebeden türev için elde edilen hata normları.....	119
6.3 Üçüncü mertebeden türev için elde edilen hata normları.....	119

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ**Simgeler** h **Açıklama**

Konum adım uzunluğu

 u_m $x = x_m$ noktasındaki tam çözüm U_m $x = x_m$ noktasındaki yaklaşık çözüm**Kısaltmalar**

B-spline

Açıklama

Basis Spline

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Fonksiyonlar, bir çok fiziksel olayın analizi ve tanımlanması için temel matematiksel ifadelerdir. Bununla birlikte, fonksiyonlar bazı durumlarda açık olarak yazılamadığından bu tip fonksiyonlar için bazı kısıtlar altında yaklaşımlar yapmak gerekebilir. Bu tip yaklaşım problemleri, uygulamalı matematiğin temel konularından birisidir. Yaklaşım problemleri iki ana kısımda incelenebilir (Schumaker, 2007). Yaklaşım problemlerinin ilk ana bölümü, bilinmeyen bir fonksiyon için sonlu sayıda veri bilindiğinde fonksiyon için bir yaklaşım bulunması problemidir. Bu tip problemler veri uydurma problemi olarak adlandırılırlar. Yaklaşım problemleri için ikinci ana kısım ise çeşitli fiziksel olaylar için elde edilen matematiksel modellerde ortaya çıkan yaklaşım problemleridir. Adi veya kısmi diferensiyel denklemler için başlangıç veya sınır değer problemleri, özdeğer-özvektör problemleri ve integral denklemleri bu tip matematiksel modellere örnek olarak söylenebilir.

Bilinmeyen bir fonksiyon için her iki ana durumda da yaklaşım yapılırken genellikle polinom fonksiyonlar tercih edilir. Polinomların düzgün birer fonksiyon (tanım kümesindeki tüm noktalarda istenen mertebeden türevlenebilen fonksiyon) olmaları, türevlerinin ve integrallerinin kolaylıkla alınmaları, toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinin kolaylıkla yapılması gibi özelliklerinden dolayı, polinomlar yaklaşım için sıklıkla tercih edilmektedir. Bununla birlikte çok sayıdaki veri noktalarına bir tek polinom ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca yaklaşım yapılacak fonksiyon için bilinen verilerin sayısı arttıkça elde edilecek polinomun derecesi de artacağından yaklaşım polinomu hem yüksek dereceden olacaktır hem de polinomu belirleme işlemi zorlaşacaktır. Bu zorluğu aşmak için tanım bölgesinin alt bölgelerinde tanımlanan düşük dereceli parçalı polinomlar kullanılabilir. Polinomlardan parçalı polinoma geçildiğinde işlem kolaylığı kazanılırken, aynı zamanda önemli bir özellik olan tanım bölgesinin bölünme noktalarında süreklilik özelliğini kaybedebileceğimiz açıktır. Parçalı polinom fonksiyonların sahip olduğu özelliklere ilave olarak belirli

dereceye kadar bölünme noktalarında süreklilik ve türevlenebilme özelliği de eklendiğinde ise spline fonksiyonlar elde edilecektir. Sonuç olarak bir spline fonksiyon polinom parçalarının belli düzgünlük koşulları altında birleşmesi ile elde edilen bir fonksiyondur (Cheney ve Kincaid, 2008). Spline kavramı ilk kez Schoenberg'in bir makalesinde ortaya çıkmıştır ve Spline ismi verilen noktalardan düzgün bir eğri çizmek için kullanılan mekanik bir cihazdan gelmektedir (Schoenberg, 1946).

Belirli bir dereceden ve belirli bir mertebeye kadar türevlenebilen her spline fonksiyon, aynı derece ve aynı mertebeden türevlenebilen B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir (De Boor, 1978). Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir. Bu çalışmada literatürde sıklıkla kullanılan ilk 7 dereceden B-spline fonksiyon ile birlikte 8., 9. ve 10. dereceden olmak üzere ilk 10 dereceden B-spline fonksiyonların çıkartılması yapılacaktır. Elde edilen tüm B-spline için süreklilik özellikleri ve türevlenebilme özellikleri incelenecektir. Ayrıca şekli bir bir dalgaya karşılık gelen bir fonksiyon test problemi seçilerek öncelikle tüm B-spline fonksiyonların bölünme noktalarındaki değerleri bulunacak ve bölünme noktalarında B-spline fonksiyonun aldığı değerler ile fonksiyonun aldığı değerler kullanılarak türev yaklaşımları için mutlak hatalar elde edilecektir. Son olarak bulunan sonuçlar bir birleri ile kıyaslanacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Spline ve B-spline fonksiyonlar, bilinmeyen bir fonksiyon için sonlu sayıda veri bilindiğinde, bilinmeyen fonksiyon için bir yaklaşım bulunması problemlerinde, eğri veya yüzey yaklaşımlarında, adi veya kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, geometrik modelleme, otomatikleştirilmiş imalat, bilgisayar grafikleri ve sayısal simülasyonlar gibi bir çok alanda kullanılmaktadır (Höllig ve Hörner, 2013). Ayrıca hesaplamadaki kolaylığı ve uygulama esnekliğinden dolayı spline ve B-spline yaklaşım teknikleri, daha basit olan parçalı polinom yaklaşımlarına göre daha üstündür (Höllig ve Hörner, 2013). Bu sebeple de spline ve B-spline fonksiyonlar, uygulamalı matematik, bilgisayar bilimleri ve mühendislik gibi farklı bilim dallarında tercih edilen bir yaklaşım olmuştur ve olmaya da devam etmektedir.

Spline kavramı ilk kez 1946 yılında Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır (Schoenberg, 1946). 1960 yılına kadar ancak sınırlı sayıda spline ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Schumaker, 2007). Schumaker kitabında 1960 yılına kadar bildiği kadarıyla (Curry ve Schoenberg, 1947), (Schoenberg ve Whitney, 1947;1953), (Schoenberg, 1958) ve (Maclaren, 1958) isimli çalışmalarda spline isminin kullanıldığını belirtmiştir. Diğer taraftan spline fonksiyonunun (Runge, 1901), (Eagle, 1928), (Quade ve Collatz, 1938), (Favard, 1940), (Sard, 1949), (Meyers ve Sard, 1950a, b), (Holladay, 1957) ve (Golomb ve Weinberger, 1959) çalışmalarında ismi geçmeden çalışıldığı da bilinmektedir (Schumaker, 2007).

Spline fonksiyonlardan farklı olarak B-spline fonksiyonların ilk ne zaman kullanıldığını söylemek ise oldukça zordur. Schoenberg (1946), olasılık yoğunluk fonksiyonu rolüyle bağlantılı olarak B-spline fonksiyonların Laplace tarafından kullanıldığını söylemiştir. Favard (1940) ise B-spline fonksiyonlarını isimlendirmeden kullanmıştır. 1946 yılında Schoenberg, B-spline fonksiyonlarını taban spline eğrileri olarak adlandırmıştır (Schoenberg, 1946). 1967 yılında ise taban spline eğrileri ismini B-spline olarak kısaltmıştır (Schoenberg, 1967). Özellikle sayısal uygulamalarda B-spline fonksiyonların önemi indirgeme bağıntısının bulunmasıyla artmıştır (Cox, 1972; deBoor, 1972).

Spline ve B-spline fonksiyonların son yıllarda kullanıldığı bazı çalışmalara (Iqbal vd., 2020, 2021; Mirzaee ve Alipour, 2020; Roul 2020; Haradhan vd., 2021; Karakoç vd., 2021; Mittal vd., 2021) olarak örnek verilebilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Spline fonksiyonlar, yüksek dereceden polinomlar yerine, alt bölgelerde daha düşük dereceden parçalı polinomlarla çalışma metodudur. m . dereceden bir spline fonksiyon bir düşük mertebeden yani $(m - 1)$. mertebeden sürekli türevlere sahiptir. Ayrıca spline fonksiyonlar aşağıdaki bazı özelliklere sahiptir:

- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonlar yeterince mertebeden türevlere sahip sürekli fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar türev ve integralleri kolay hesaplanan, bu işlemler sonucunda yine bir spline elde edilen fonksiyonlardır.
- Bilgisayarda hesaplanmaya ve depolanmaya uygun fonksiyonlardır.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar polinomlardaki gibi keskin salınım sergilemezler.
- Spline fonksiyonlar yardımıyla sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir.

B-spline fonksiyonlar da parçalı polinom fonksiyonlardır. Belirli bir derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer birleşimi ile temsil edilebilir. Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir.

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları S_i^0 ile gösterilir ve

$$S_i^0(x) = \begin{cases} 1 & , x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. $k \geq 1$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere sıfırıncı dereceden S_i^0 B-spline fonksiyonları kullanılarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar

$$S_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} S_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} S_{i+1}^{k-1}(x) \quad (3.2)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir.

Bu çalışmada B-spline fonksiyonların tanımlı olduğu konum aralığı için $[a, b]$ seçimi yapılacaktır ve $[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı alt aralık uzunluğu h olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b,$$

olarak alınacaktır. Bu durumda konum aralığındaki bölünme noktaları için

$$x_m = x_{m-1} + h, \quad m = 1, \dots, N$$

olacaktır. Dolayısıyla parçalanma düzgün olduğu için konum aralığı üzerindeki tüm aralıkların uzunluğu h olacaktır.

4. B-SPLINE FONKSİYONLARIN ELDE EDİLMESİ

(3.2) bağıntısı kullanılarak 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar elde edilecektir. Ayrıca elde edilen B-spline fonksiyonlarının ve türevlerinin bölünme noktalarındaki süreklilik durumları şekiller çizilerek incelenecektir.

4.1. Linear B-spline

$S_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için (3.2) bağıntısında $k = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} S_m^1(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} S_m^0(x) + \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} S_{m+1}^0(x) \\ S_m^1(x) &= \frac{x - x_m}{h} S_m^0(x) + \frac{x_{m+2} - x}{h} S_{m+1}^0(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir. Hesaplamalarda kolaylık olması açısından bundan sonra yapılacak tüm hesaplamalarda

$$\begin{aligned} x - x_{m+i} &= g_{m+i}(x) \\ (x - x_m)^j &= g_m^j(x) \end{aligned}$$

olduğu kabul edilirse, (4.1) eşitliği

$$S_m^1(x) = \frac{g_m(x)}{h} S_m^0(x) + \frac{-g_{m+2}(x)}{h} S_{m+1}^0(x) \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. (4.1) eşitliğindeki terimler

$$\frac{g_m(x)}{h} S_m^0(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} g_m(x) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{-g_{m+2}(x)}{h} S_{m+1}^0(x) &= \frac{1}{h} \begin{cases} -g_{m+2}(x) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \\ \frac{-g_{m+2}(x)}{h} S_{m+1}^0(x) &= \frac{1}{h} \begin{cases} h - g_{m+1}(x) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden $S_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonu

$$S_m^1(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} g_m(x) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ h - g_{m+1}(x) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.3)$$

olarak parçalı polinom formunda elde edilir. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılırsa

$$B_m^1(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} g_{m-1}(x) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ h - g_m(x) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.4)$$

yazılabilir. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı lineer B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=0}^N B_i^1(x) \delta_i \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada B_i fonksiyonları lineer B-spline fonksiyonları, δ_i ise bilinmeyen değişkenleri göstermektedir.

$$\{B_0^1(x), B_1^1(x), \dots, B_N^1(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı lineer spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Lineer B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında sıfırdır ve $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı B_m^1 ve B_{m+1}^1 olarak iki lineer B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_m(x) = \frac{h - g_m(x)}{h}, \quad (4.6)$$

$$B_{m+1}(x) = \frac{g_m(x)}{h} \quad (4.7)$$

olarak tanımlanan ardışık iki lineer B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, $[0, h]$ aralığına dönüşeceğiinden bu aralık üzerinde tanımlı olan iki lineer B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_m(\xi) = \frac{h - \xi}{h}, \quad (4.8)$$

$$B_{m+1}(\xi) = \frac{\xi}{h} \quad (4.9)$$

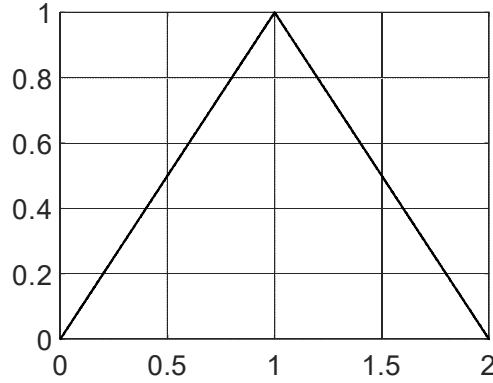
olarak bulunur. Lineer B-spline fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_m^+} B_m^1(x) &= \frac{1}{h} \lim_{x \rightarrow x_m^+} h - g_m(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_m^-} B_m^1(x) &= \frac{1}{h} \lim_{x \rightarrow x_m^-} g_{m-1}(x) = 1\end{aligned}$$

olduğundan lineer B-spline fonksiyonunun $x = x_m$ noktasında sürekli olduğu görülebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{dB_m^1(x)}{dx} &= \frac{1}{h} \lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{d}{dx} (h - g_m(x)) = -\frac{1}{h} \\ \lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{dB_m^1(x)}{dx} &= \frac{1}{h} \lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{d}{dx} g_{m-1}(x) = \frac{1}{h}\end{aligned}$$

olduğundan lineer B-spline fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin ve dolayısıyla daha yüksek mertebeden türevlerinin $x = x_m$ noktasında tanımlı olmadığı da görülebilir. $h = 1$ alınarak $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 2]$ aralığına dönüştürülmüş ve $B_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonu Şekil 4.1 de çizilmiştir. Şekilden $B_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonun iç noktalarda sürekli olduğu görülür. Konum aralığının iç noktalarında ise birinci mertebeden türevinin olmadığı görülebilir.



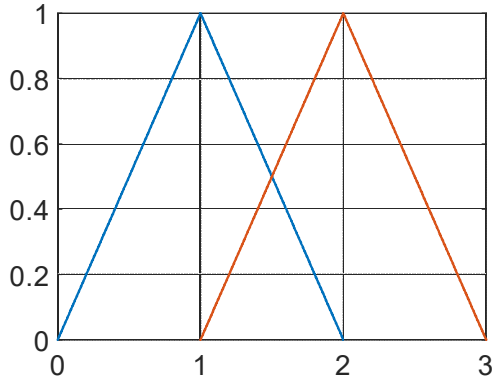
Şekil 4.1. Lineer B-spline fonksiyonu

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan $B_m^1(x)$, $B_{m+1}^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonların örttüğü aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

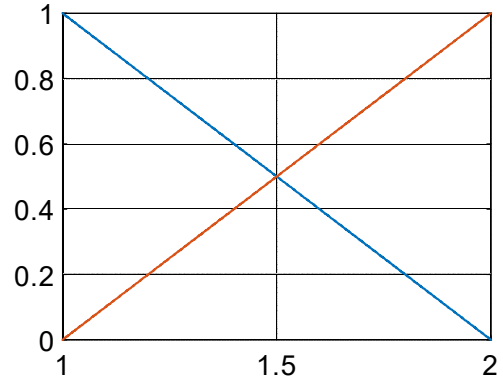
- $B_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve iki elemanı örtmektedir.

- $B_{m+1}^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve iki elemanı örtmektedir.

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 3]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki $B_m^1(x)$ ile $B_{m+1}^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonları Şekil 4.2 de çizilmiştir. Şekil 4.2 de görüldüğü gibi bir aralığa lineer B-spline fonksiyonların en fazla iki parçası denk gelmektedir. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[1, 2]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen lineer B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.3 de çizilmiştir.



Şekil 4.2. Lineer B-spline fonksiyonlar



Şekil 4.3. Lineer B-spline şekil fonksiyonları

$B_m^1(x)$ lineer B-spline fonksiyonlarının $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfır olması ve $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında ardışık iki elemanı örtmesinden dolayı her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı B_m^1 ve B_{m+1}^1 olarak iki lineer B-spline tarafından örtülecektir. Bu sebeple $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.5) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m}^{m+1} B_i^1(x)\delta_i = B_m^1(x)\delta_m + B_{m+1}^1(x)\delta_{m+1} \quad (4.10)$$

olacaktır. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ için yaklaşım ise (4.4) lineer B-spline eşitliklerinin (4.10) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} U(x_m) &= U_m = B_m^1(x_m)\delta_m + B_{m+1}^1(x_m)\delta_{m+1} \\ &= \frac{(-g_{m+1}(x_m))}{h}\delta_m + \frac{(g_m(x_m))}{h}\delta_{m+1} \\ U_m &= \delta_m \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak bulunur.

4.2. Kuadratik B-spline

$S_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için (3.2) bağıntısında $k = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} S_m^2(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} S_m^1(x) + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} S_{m+1}^1(x) \\ S_m^2(x) &= \frac{g_m(x)}{2h} S_m^1(x) + \frac{-g_{m+3}(x)}{2h} S_{m+1}^1(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir.

$$S_m^1(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} g_m(x) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ h - g_{m+1}(x) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunan (4.3) lineer B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} a_1 &= g_m^2(x) \\ a_2 &= g_m(x)(h - g_{m+1}(x)) = (g_{m+1}(x) + h)(h - g_{m+1}(x)) = h^2 - g_{m+1}^2(x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)}{2h} S_m^1(x) = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} a_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 &= -g_{m+3}(x)g_{m+1}(x) = -(g_{m+1}(x) - 2h)g_{m+1}(x) \\ &= 2hg_{m+1}(x) - g_{m+1}^2(x), \\ b_2 &= -g_{m+3}(x)(h - (g_{m+2}(x))) = -(g_{m+2}(x) - h)(h - (g_{m+2}(x))) \\ &= (h - g_{m+2}(x))^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+3}(x)}{2h} S_{m+1}^1(x) = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} b_1 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

yazılabilir. Böylece $S_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 = g_m^2(x) \\ c_2 &= a_2 + b_1 = h^2 + 2hg_{m+1}(x) - 2g_{m+1}^2(x) \\ c_3 &= b_2 = (h - g_{m+2}(x))^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^2(x) = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.13)$$

formunda bulunur. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} d_1 &= g_{m-1}^2(x) \\ d_2 &= h^2 + 2hg_m(x) - 2g_m^2(x) \\ d_3 &= (h - g_{m+1}(x))^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} d_1 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_2 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_3 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.14)$$

bulunur. Burada

$$\{B_{-1}^2(x), B_0^2(x), \dots, B_N^2(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı ikinci dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuadratik B-spline fonksiyonları ve onların birinci mertebeden türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu ardışık üç elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-1}^2(x) = \frac{(h - g_m(x))^2}{h^2}, \quad (4.15)$$

$$B_m^2(x) = \frac{h^2 + 2hg_m(x) - 2g_m^2(x)}{h^2}, \quad (4.16)$$

$$B_{m+1}^2(x) = \frac{g_m^2(x)}{h^2} \quad (4.17)$$

olarak tanımlanan ardışık üç kuadratik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan üç kuadratik B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-1}^2(\xi) = \left(\frac{h-\xi}{h}\right)^2, \quad (4.18)$$

$$B_m^2(\xi) = \frac{h^2 + 2h\xi - 2\xi^2}{h^2}, \quad (4.19)$$

$$B_{m+1}^2(\xi) = \left(\frac{\xi}{h}\right)^2 \quad (4.20)$$

olarak bulunur.

$[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının iç noktalarında $B_m^2(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler incelenirse

$$\lim_{x \rightarrow x_m^+} B_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^+} (h^2 + 2hg_m(x) - 2g_m^2(x)) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_m^-} B_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^-} g_{m-1}^2(x) = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^-} (x - x_{m-1})^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} B_m^2(x) = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} (h - g_{m+1}(x))^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} B_m^2(x) &= \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} (h^2 + 2hg_m(x) - 2g_m^2(x)) \\ &= \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} (h^2 + 2h(x - x_m) - 2(x - x_m)^2) = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{dB_m^2(x)}{dx} = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{d(h^2 + 2hg_m(x) - 2g_m^2(x))}{dx} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow x_m^+} 2h - 4g_m(x)\right)}{h^2} = \frac{2}{h},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{dB_m^2(x)}{dx} = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{dg_{m-1}^2(x)}{dx} = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^-} 2g_{m-1}(x) = \frac{2}{h},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} \frac{dB_m^2(x)}{dx} = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} \frac{d(h - g_{m+1}(x))^2}{dx} = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} -2(h - g_{m+1}(x)) = -\frac{2}{h},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} \frac{dB_m^2(x)}{dx} = \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} \frac{d(h^2 + 2hg_m(x) - 2g_m^2(x))}{dx} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} (2h - 4g_m(x))}{h^2} = -\frac{2}{h}$$

olduğundan

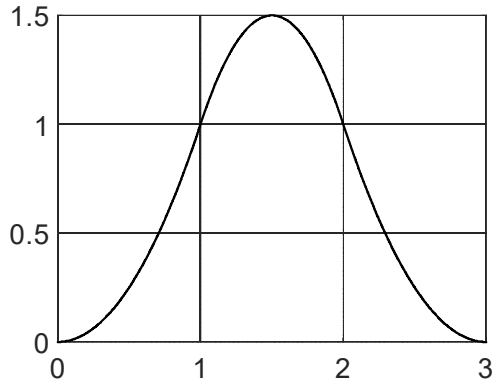
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_m^+} B_m^2(x) &= \lim_{x \rightarrow x_m^-} B_m^2(x) \text{ ve } \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} B_m^2(x) = \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} B_m^2(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{d}{dx} B_m^2(x) &= \lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{d}{dx} B_m^2(x) \text{ ve } \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} \frac{d}{dx} B_m^2(x) = \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} \frac{d}{dx} B_m^2(x) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu ve birinci türevinin $x = x_m$ ve $x = x_{m+1}$ bölünme noktalarında yani konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir. Ayrıca

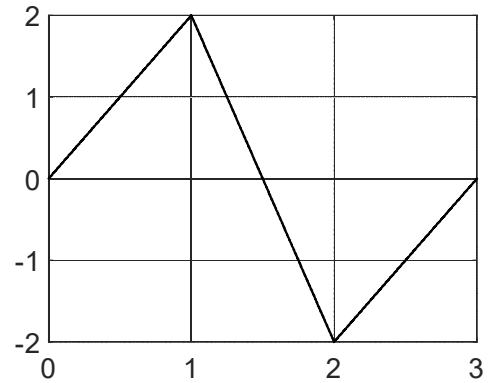
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{d^2}{dx^2} B_m^2(x) &= \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{d}{dx} (2h - 4g_m(x)) = -\frac{4}{h^2} \\ \lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{d^2}{dx^2} B_m^2(x) &= \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_m^-} \frac{d}{dx} 2g_{m-1}(x) = \frac{2}{h^2} \\ \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} \frac{d^2}{dx^2} B_m^2(x) &= \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} \frac{d}{dx} (-2(h - g_{m+1}(x))) = \frac{2}{h^2} \\ \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} \frac{d^2}{dx^2} B_m^2(x) &= \frac{1}{h^2} \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} \frac{d}{dx} (2h - 4g_m(x)) = -\frac{4}{h^2}\end{aligned}$$

olduğundan kuadratik B-spline fonksiyonunun ikinci mertebeden türevinin $x = x_m$ ve $x = x_{m+1}$ noktalarında sürekli olmadığı, dolayısıyla konum aralığının iç noktalarında kuadratik B-spline fonksiyonunun ikinci ve daha yüksek mertebeden türevlerinde olmadığı görülebilir.

$h = 1$ alınarak $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 3]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonuyla kuadratik B-spline fonksiyonunun birinci türevinin şekilleri Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 te çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu ve birinci mertebeden türevinin iç noktalarda sürekli olduğu görülür. Konum aralığının iç noktalarında ise ikinci ve daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



Şekil 4.4. Kuadratik B-spline fonksiyonu



Şekil 4.5. Kuadratik B-spline fonksiyonunun birinci türevi

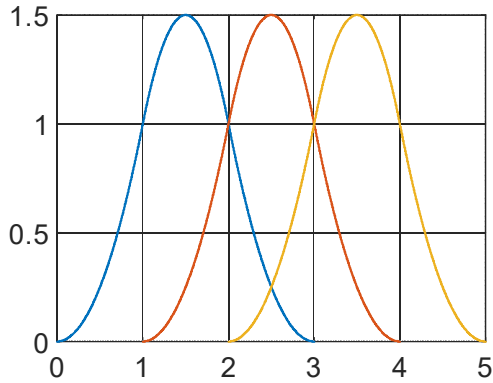
$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-1}^N B_i^2(x) \delta_i \quad (4.21)$$

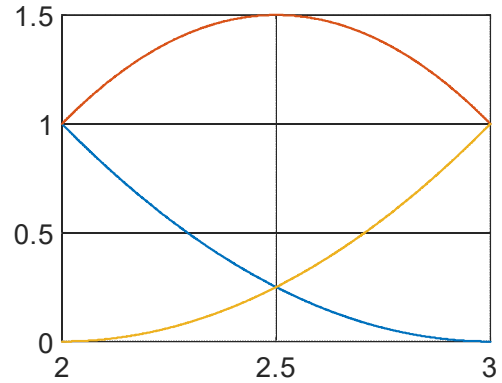
şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^2(x)$ fonksiyonları kuadratik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan $B_{m-1}^2(x)$, $B_m^2(x)$, $B_{m+1}^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonların örttüğü aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-1}^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.
- $B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.



Şekil 4.6. Kuadratik B-spline fonksiyonlar



Şekil 4.7. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı $[0, 5]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki $B_{m-1}^2(x)$, $B_m^2(x)$ ve $B_{m+1}^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları Şekil 4.6 da çizilmiştir. Şekil 4.6 da görüldüğü gibi kuadratik B-spline fonksiyonlar ve birinci mertebeden türevi ardışık üç elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında kuadratik B-spline fonksiyonların ve türevinin en fazla üç parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için

$h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı [2, 3] aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen üç adet kuadratik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.7 de çizilmiştir.

$B_m^2(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonları ile birinci türevinin $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfır olması ve $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık üç elemanı örtmesinden dolayı her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı B_{m-1}^2 , B_m^2 ve B_{m+1}^2 olarak üç kuadratik B-spline tarafından örtülecektir. Bu sebeple $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.21) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-1}^{m+1} B_i^2(x) \delta_i = B_{m-1}^2(x) \delta_{m-1} + B_m^2(x) \delta_m + B_{m+1}^2(x) \delta_{m+1} \quad (4.22)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonu ile birinci mertebeden türevi için yaklaşımlar ise

$$\begin{aligned} u(x_m) &\approx U(x_m) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} B_i^2(x_m) \delta_i \\ u'(x_m) &\approx \frac{dU(x_m)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{dB_i^2(x_m)}{dx} \delta_i \end{aligned}$$

olarak yazılır. (4.14) kuadratik B-spline eşitliğinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$ ve $u'(x_m)$ için

$$U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} B_i^2(x_m) \delta_i = \delta_{m-1} + \delta_m \quad (4.23)$$

ve

$$U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{dB_i^2(x_m)}{dx} \delta_i = \frac{2}{h} (-\delta_{m-1} + \delta_m) \quad (4.24)$$

yaklaşımları elde edilir.

4.3. Kübik B-spline

$S_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 3$ alındığında

$$\begin{aligned} S_m^3(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} S_m^2(x) + \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} S_{m+1}^2(x) \\ S_m^3(x) &= \frac{g_m(x)}{3h} S_m^2(x) + \frac{-g_{m+4}(x)}{3h} S_{m+1}^2(x) \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. Bir önceki alt bölümde

$$\begin{aligned} c_1 &= g_m^2(x) \\ c_2 &= h^2 + 2hg_{m+1}(x) - 2g_{m+1}^2(x) \\ c_3 &= (h - g_{m+2}(x))^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^2(x) = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunan (4.13) kuadratik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} a_1 &= g_m^3(x) \\ a_2 &= g_m(x) (h^2 + 2hg_{m+1}(x) - 2g_{m+1}^2(x)) \\ &= (g_{m+1}(x) + h) (h^2 + 2hg_{m+1}(x) - 2g_{m+1}^2(x)) \\ a_2 &= h^3 + 3h^2g_{m+1}(x) - 2g_{m+1}^3(x) \\ a_3 &= g_m(x) (h - g_{m+2}(x))^2 = (g_{m+2}(x) + 2h) [h - g_{m+2}(x)]^2 \\ a_3 &= 2h^3 - 3h^2g_{m+2}(x) + g_{m+2}^3(x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)S_m^2(x)}{3h} = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} a_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 &= -g_{m+4}(x)g_{m+1}^2(x) = -(g_{m+1}(x) - 3h)g_{m+1}^2(x) \\ &= 3hg_{m+1}^2(x) - g_{m+1}^3(x), \\ b_2 &= -g_{m+4}(x) (h^2 + 2hg_{m+2}(x) - 2g_{m+2}^2(x)) \\ &= -(g_{m+2}(x) - 2h) (h^2 + 2hg_{m+2}(x) - 2g_{m+2}^2(x)) \\ &= 2h^3 + 3h^2g_{m+2}(x) - 6hg_{m+2}^2(x) + 2g_{m+2}^3(x), \\ b_3 &= -g_{m+4}(x) (h - g_{m+3}(x))^2 = -(g_{m+3}(x) - h) (h - g_{m+3}(x))^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+4}(x)S_{m+1}^2(x)}{3h} = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} b_1 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $S_m^3(x)$ parçalı

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 = g_m^3(x) \\ c_2 &= a_2 + b_1 = h^3 + 3h^2g_{m+1}(x) + 3hg_{m+1}^2(x) - 3g_{m+1}(x)^3 \\ c_3 &= a_3 + b_2 = 4h^3 - 6hg_{m+2}^2(x) + 3g_{m+2}^3(x) \\ c_4 &= b_3 = (h - g_{m+3}(x))^3 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^3(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.26)$$

formunda elde edilir. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 6 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} d_1 &= g_{m-2}^3(x) \\ d_2 &= h^3 + 3h^2g_{m-1}(x) + 3hg_{m-1}^2(x) - 3g_{m-1}(x)^3 \\ d_3 &= 4h^3 - 6hg_m^2(x) + 3g_m^3(x) \\ d_4 &= (h - g_{m+1}(x))^3 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} d_1 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_2 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_3 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_4 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.27)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\{B_{-1}^3(x), B_0^3(x), \dots, B_N^3(x), B_{N+1}^3(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı 3. dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kübik B-spline fonksiyonları ve onların birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ardışık dört elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-1}^3(x) = \frac{(h - g_m(x))^3}{h^3}, \quad (4.28)$$

$$B_m^3(x) = \frac{4h^3 - 6hg_m^2(x) + 3g_m^3(x)}{h^3}, \quad (4.29)$$

$$B_{m+1}^3(x) = \frac{h^3 + 3h^2g_m(x) + 3hg_m^2(x) - 3g_m^3(x)}{h^3}, \quad (4.30)$$

$$B_{m+2}^3(x) = \frac{g_m^3(x)}{h^3} \quad (4.31)$$

olarak tanımlanan ardışık dört kübik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan dört kübik B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-1}^2(\xi) = \frac{(h - \xi)^3}{h^3}, \quad (4.32)$$

$$B_m^2(\xi) = \frac{4h^3 - 6h\xi^2 + 3\xi^3}{h^3}, \quad (4.33)$$

$$B_{m+1}^2(\xi) = \frac{h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3}{h^3}, \quad (4.34)$$

$$B_{m+2}^2(\xi) = \frac{\xi^3}{h^3} \quad (4.35)$$

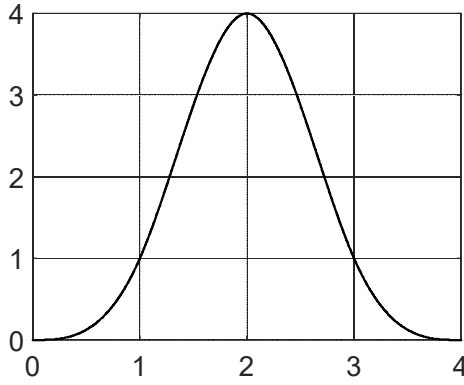
olarak bulunur.

Ayrıca $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının iç noktalarında $B_m^3(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler incelenirse $i = m - 1, m, m + 1$ olmak üzere,

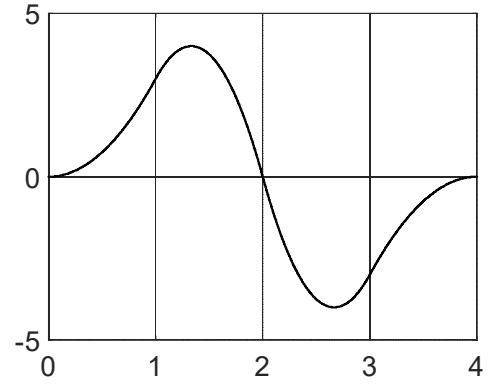
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^3(x) &= \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^3(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^3(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^3(x)), n = 1, 2 \end{aligned}$$

olduğundan $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonunun, birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin $x = x_{m-1}$, $x = x_m$ ve $x = x_{m+1}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

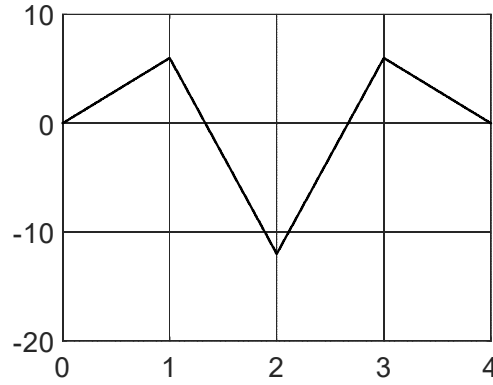
$h = 1$ alınarak $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 4]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonuyla kübik B-spline fonksiyonunun ilk iki türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 da çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonuyla birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu ve üçüncü mertebeden ve daha yüksek mertebeden türevlerinin ise olmadığı görülebilir.



Şekil 4.8. Kübik B-spline fonksiyonu



Şekil 4.9. Kübik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



Şekil 4.10. Kübik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi

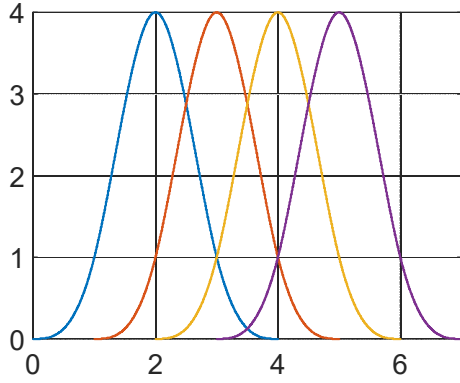
$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} B_i^3(x) \delta_i \quad (4.36)$$

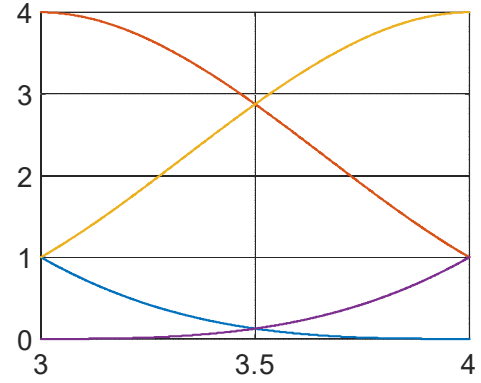
şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^3(x)$ fonksiyonları kübik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan $B_{m-1}^3, B_m^3, B_{m+1}^3, B_{m+2}^3$ kübik B-spline fonksiyonların örtükleri aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-1}^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.
- $B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dört elemanı örtmektedir.



Şekil 4.11. Kübik B-spline fonksiyonlar



Şekil 4.12. Kübik B-spline şekil fonksiyonları

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı $[0, 7]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki $B_{m-1}^3(x), B_m^3(x), B_{m+1}^3(x)$ ve $B_{m+2}^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları Şekil 4.11 de çizilmiştir. Şekil 4.11 de görüldüğü gibi kübik B-spline fonksiyonlar ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri ardışık dört elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında kübik B-spline fonksiyonların ve ilk iki türevinin en fazla dört parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu

gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[3, 4]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen dört adet kübik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.7 de çizilmiştir.

$B_m^3(x)$ kübik B-spline fonksiyonları ve ilk iki türevinin $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfır olması ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık dört elemanı örtmesinden dolayı her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $B_{m-1}^3, B_m^3, B_{m+1}^3$ ve B_{m+2}^3 olarak dört kübik B-spline tarafından örtülecektir. Bu sebeple $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.36) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-1}^{m+2} B_i^3(x) \delta_i \quad (4.37)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonu ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri için yaklaşımlar ise

$$\begin{aligned} U(x_m) &= U_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} B_i^3(x_m) \delta_i, \\ \frac{d^n U(x_m)}{dx^n} &= U_m^{(n)} = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^n B_i^3(x_m)}{dx^n} \delta_i, \quad n = 1, 2 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (4.27) kübik B-spline eşitliğinin kullanılmasıyla $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m), u'(x_m)$ ve $u''(x_m)$ için yaklaşımlar

$$U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (4.38)$$

$$U'_m = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}) \quad (4.39)$$

$$U''_m = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (4.40)$$

olarak elde edilir.

4.4. Kuartik B-spline

S_m^4 kuartik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 4$ alındığında

$$\begin{aligned} S_m^4(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+4} - x_m} S_m^3(x) + \frac{x_{m+5} - x}{x_{m+5} - x_{m+1}} S_{m+1}^3(x) \\ S_m^4(x) &= \frac{g_m(x)}{4h} S_m^3(x) + \frac{-g_{m+5}(x)}{4h} S_{m+1}^3(x) \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Bir önceki alt bölümde

$$\begin{aligned}
c_1 &= g_m^3(x) \\
c_2 &= h^3 + 3h^2g_{m+1}(x) + 3hg_{m+1}^2(x) - 3g_{m+1}^3(x) \\
c_3 &= 4h^3 - 6hg_{m+2}^2(x) + 3g_{m+2}^3(x) \\
c_4 &= (h - g_{m+3}(x))^3
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^3(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunan (4.26) kübik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
a_1 &= g_m^4(x) \\
a_2 &= g_m(x) (h^3 + 3h^2g_{m+1}(x) + 3hg_{m+1}^2(x) - 3g_{m+1}^3(x)) \\
&= (g_{m+1}(x) + h) (h^3 + 3h^2g_{m+1}(x) + 3hg_{m+1}^2(x) - 3g_{m+1}^3(x)) \\
&= h^4 + 4h^3g_{m+1}(x) + 6h^2g_{m+1}^2(x) - 3g_{m+1}^4(x), \\
a_3 &= g_m(x) (4h^3 - 6hg_{m+2}^2(x) + 3g_{m+2}^3(x)) \\
&= (g_{m+2}(x) + 2h) (4h^3 - 6hg_{m+2}^2(x) + 3g_{m+2}^3(x)) \\
&= 8h^4 + 4h^3g_{m+2}(x) - 12h^2g_{m+2}^2(x) + 3g_{m+2}^4(x), \\
a_4 &= g_m(x) (h - g_{m+3}(x))^3 = (g_{m+3}(x) + 3h) (h - g_{m+3}(x))^3 \\
a_4 &= 3h^4 - 8h^3g_{m+3}(x) + 6h^2g_{m+3}^2(x) - g_{m+3}^4(x)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)S_m^3(x)}{4h} = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} a_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+5}(x)g_{m+1}^3(x) = 4hg_{m+1}^3(x) - g_{m+1}^4(x), \\
b_2 &= -g_{m+5}(x) (h^3 + 3h^2g_{m+2}(x) + 3hg_{m+2}^2(x) - 3g_{m+2}^3(x)) \\
&= 3h^4 + 8h^3g_{m+2}(x) + 6h^2g_{m+2}^2(x) - 12hg_{m+2}^3(x) + 3g_{m+2}^4(x), \\
b_3 &= -g_{m+5}(x) (4h^3 - 6hg_{m+3}^2(x) + 3g_{m+3}^3(x)) \\
&= 8h^4 - 4h^3g_{m+3}(x) - 12h^2g_{m+3}^2(x) + 12hg_{m+3}^3(x) - 3g_{m+3}^4(x), \\
b_4 &= -g_{m+5}(x) (h - g_{m+4}(x))^3 = (h - g_{m+4}(x))^4
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+5}(x)S_{m+1}^3(x)}{4h} = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} b_1 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $S_{m+1}^4(x)$ parçalı fonksiyon olarak

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 = g_m^4(x), \\
c_2 &= a_2 + b_1 = h^4 + 4h^3g_{m+1}(x) + 6h^2g_{m+1}^2(x) + 4hg_{m+1}^3(x) - 4g_{m+1}^4(x), \\
c_3 &= a_2 + b_1 = 11h^4 + 12h^3g_{m+2}(x) - 6h^2g_{m+2}^2(x) - 12hg_{m+2}^3(x) + 6g_{m+2}^4(x), \\
c_4 &= a_4 + b_3 = 11h^4 - 12h^3g_{m+3}(x) - 6h^2g_{m+3}^2(x) + 12hg_{m+3}^3(x) - 4g_{m+3}^4(x), \\
c_5 &= b_4 = (h - g_{m+4}(x))^4
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^4(x) = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.42)$$

formunda elde edilir. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 24 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
d_1 &= g_{m-2}^4(x), \\
d_2 &= h^4 + 4h^3 g_{m-1}(x) + 6h^2 g_{m-1}^2(x) + 4h g_{m-1}^3(x) - 4g_{m-1}^4(x), \\
d_3 &= 11h^4 + 12h^3 g_m(x) - 6h^2 g_m^2(x) - 12h g_m^3(x) + 6g_m^4(x), \\
d_4 &= 11h^4 - 12h^3 g_{m+1}(x) - 6h^2 g_{m+1}^2(x) + 12h g_{m+1}^3(x) - 4g_{m+1}^4(x), \\
d_5 &= (h - g_{m+2}(x))^4
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^4(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} d_1 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_2 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_3 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_4 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_5 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.43)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\{B_{-2}^4(x), B_{-1}^4(x), \dots, B_N^4(x), B_{N+1}^4(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı dördüncü dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuartik B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonu ardışık beş elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-2}^4(x) = \frac{(h - g_m(x))^4}{h^4}, \quad (4.44)$$

$$B_{m-1}^4(x) = \frac{11h^4 - 12h^3 g_m(x) - 6h^2 g_m^2(x) + 12h g_m^3(x) - 4g_m^4(x)}{h^4}, \quad (4.45)$$

$$B_m^4(x) = \frac{11h^4 + 12h^3 g_m(x) - 6h^2 g_m^2(x) - 12h g_m^3(x) + 6g_m^4(x)}{h^4}, \quad (4.46)$$

$$B_{m+1}^4(x) = \frac{h^4 + 4h^3 g_m(x) + 6h^2 g_m^2(x) + 4h g_m^3(x) - 4g_m^4(x)}{h^4}, \quad (4.47)$$

$$B_{m+2}^4(x) = \frac{g_m^4(x)}{h^4} \quad (4.48)$$

olarak tanımlanan ardışık beş kuartik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

$\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına

dönüşeceğiinden bu aralık üzerinde tanımlı olan beş kuartik B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-2}^4(\xi) = \frac{(h-\xi)^4}{h^4}, \quad (4.49)$$

$$B_{m-1}^4(\xi) = \frac{11h^4 - 12h^3\xi - 6h^2\xi^2 + 12h\xi^3 - 4\xi^4}{h^4}, \quad (4.50)$$

$$B_m^4(\xi) = \frac{11h^4 + 12h^3\xi - 6h^2\xi^2 - 12h\xi^3 + 6\xi^4}{h^4}, \quad (4.51)$$

$$B_{m+1}^4(\xi) = \frac{h^4 + 4h^3\xi + 6h^2\xi^2 + 4h\xi^3 - 4\xi^4}{h^4}, \quad (4.52)$$

$$B_{m+2}^4(\xi) = \frac{\xi^4}{h^4} \quad (4.53)$$

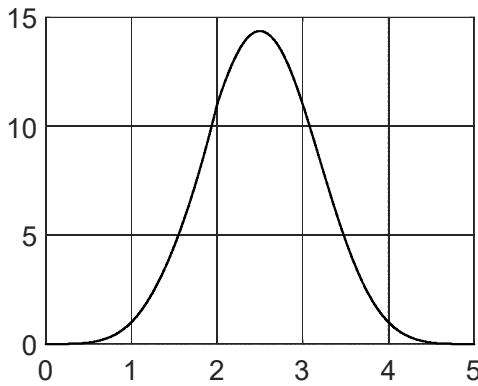
olarak bulunur.

Ayrıca $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının iç noktalarında $B_m^4(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler incelenirse $i = m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere,

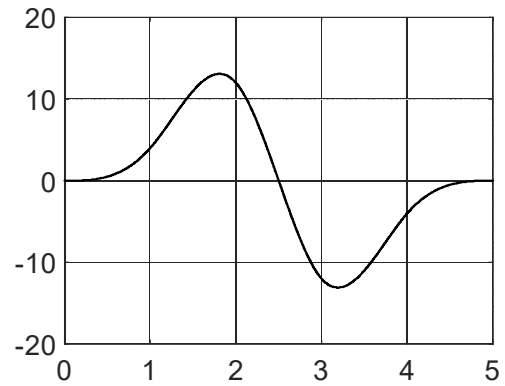
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^4(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^4(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^4(x)) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^4(x)), n = 1, 2, 3$$

olduğundan $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonu ile birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerinin $x = x_{m-1}$, $x = x_m$, $x = x_{m+1}$ ve $x = x_{m+2}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.



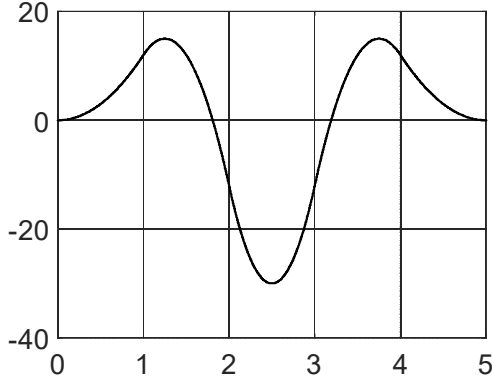
Şekil 4.13. Kuartik B-spline fonksiyonu



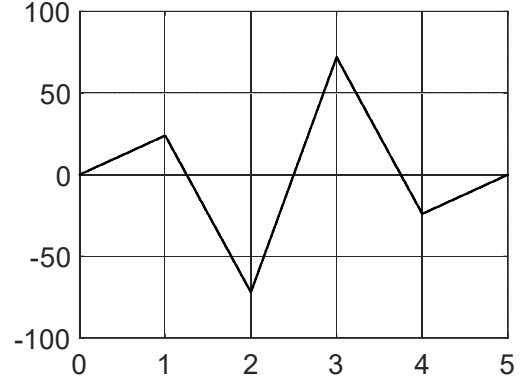
Şekil 4.14. Kuartik B-spline fonksiyonunun birinci türevi

$h = 1$ alınarak $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı $[0, 5]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonuyla ilk üç türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.13, Şekil 4.14, Şekil

4.15 ve Şekil 4.16 da çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonuyla ilk üç türevinin iç noktalarda sürekli olduğu görülür. Konum aralığının iç noktalarında ise dördüncü daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



Şekil 4.15. Kuartik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



Şekil 4.16. Kuartik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı kuartik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-2}^{N+1} B_i^4(x) \delta_i \quad (4.54)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^4(x)$ fonksiyonları kuartik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

$$B_{m-2}^4(x), B_{m-1}^4(x), B_m^4(x), B_{m+1}^4(x), B_{m+2}^4(x)$$

kuartik B-spline fonksiyonların örttüğü aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

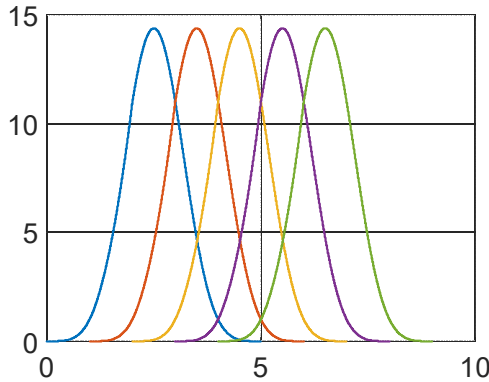
- $B_{m-2}^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ardışık beş elemanı örtmektedir.
- $B_{m-1}^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve beş elemanı örtmektedir.
- $B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve beş elemanı örtmektedir.

- $B_{m+1}^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve beş elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve beş elemanı örtmektedir.

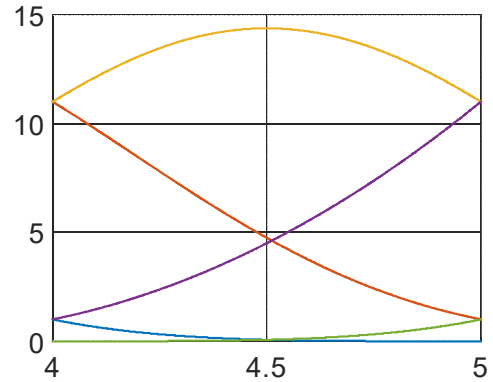
Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-4}, x_{m+5}]$ aralığı $[0, 9]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

$$B_{m-2}^4(x), B_{m-1}^4(x), B_m^4(x), B_{m+1}^4(x), B_{m+2}^4(x)$$

kuartik B-spline fonksiyonları Şekil 4.17 de çizilmiştir. Şekil 4.17 de görüldüğü gibi kuartik B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri ardışık beş elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında kuartik B-spline fonksiyonların ve ilk üç türevinin en fazla beş parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[4, 5]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen beş adet kuartik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.18 de çizilmiştir.



Şekil 4.17. Kuartik B-spline fonksiyonları



Şekil 4.18. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları

$B_m^4(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları ile ilk üç türevinin $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfır olması ve $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık beş elemanı örtmesinden dolayı her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı, B_{m-2}^4 , B_{m-1}^4 , B_m^4 , B_{m+1}^4 ve B_{m+2}^4 olarak beş kuartik

B-spline tarafından örtülecektir. Bu sebeple $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.54) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-2}^{m+2} B_i^4(x) \delta_i \quad (4.55)$$

olarak yazılabilir. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri için yaklaşımlar ise

$$U(x_m) = \sum_{i=m-2}^{m+2} B_i^4(x_m) \delta_i$$

$$\frac{d^n U(x_m)}{dx^n} = U_m^{(n)} = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{d^n B_i^4(x_m)}{dx^n} \delta_i, \quad n = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla (4.43) kuartik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$, $u'(x_m)$, $u''(x_m)$ ve $u'''(x_m)$ için yaklaşımlar

$$U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \quad (4.56)$$

$$U'_m = \frac{4}{h} (-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \quad (4.57)$$

$$U''_m = \frac{12}{h^2} (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \quad (4.58)$$

$$U'''_m = \frac{24}{h^3} (-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (4.59)$$

olarak bulunur.

4.5. Kuintik B-spline

S_m^5 kuintik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 5$ alındığında

$$S_m^5(x) = \frac{x - x_m}{x_{m+5} - x_m} S_m^4(x) + \frac{x_{m+6} - x}{x_{m+6} - x_{m+1}} S_{m+1}^4(x)$$

$$S_m^5(x) = \frac{g_m(x)}{5h} S_m^4(x) + \frac{-g_{m+6}(x)}{5h} S_{m+1}^4(x) \quad (4.60)$$

elde edilir. Bir önceki alt bölümde

$$c_1 = g_m^4(x)$$

$$c_2 = h^4 + 4h^3 g_{m+1}(x) + 6h^2 g_{m+1}^2(x) + 4h g_{m+1}^3(x) - 4g_{m+1}^4(x)$$

$$c_3 = 11h^4 + 12h^3 g_{m+2}(x) - 6h^2 g_{m+2}^2(x) - 12h g_{m+2}^3(x) + 6g_{m+2}^4(x)$$

$$c_4 = 11h^4 - 12h^3 g_{m+3}(x) - 6h^2 g_{m+3}^2(x) + 12h g_{m+3}^3(x) - 4g_{m+3}^4(x)$$

$$c_5 = (h - g_{m+4}(x))^4$$

olmak üzere

$$S_m^4(x) = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunan (4.42) kuartik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$a_1 = g_m(x)g_m^4(x) = g_m^5(x),$$

$$\begin{aligned} a_2 &= g_m(x) (h^4 + 4h^3g_{m+1}(x) + 6h^2g_{m+1}^2(x) + 4hg_{m+1}^3(x) - 4g_{m+1}^4(x)), \\ &= (g_{m+1}(x) + h) (h^4 + 4h^3g_{m+1}(x) + 6h^2g_{m+1}^2(x) + 4hg_{m+1}^3(x) - 4g_{m+1}^4(x)) \end{aligned}$$

$$a_2 = h^5 + 5h^4g_{m+1}(x) + 10h^3g_{m+1}^2(x) + 10h^2g_{m+1}^3(x) - 4g_{m+1}^5,$$

$$\begin{aligned} a_3 &= g_m(x) (11h^4 + 12h^3g_{m+2}(x) - 6h^2g_{m+2}^2(x) - 12hg_{m+2}^3(x) + 6g_{m+2}^4(x)) \\ &= (g_{m+2}(x) + 2h) (11h^4 + 12h^3g_{m+2}(x) - 6h^2g_{m+2}^2(x) - 12hg_{m+2}^3(x) + 6g_{m+2}^4(x)) \\ &= (g_{m+2}(x) + 2h) (11h^4 + 12h^3g_{m+2}(x) - 6h^2g_{m+2}^2(x) - 12hg_{m+2}^3(x) + 6g_{m+2}^4(x)) \end{aligned}$$

$$a_3 = 22h^5 + 35h^4g_{m+2}(x) - 30h^2g_{m+2}^3(x) + 6g_{m+2}^5(x),$$

$$\begin{aligned} a_4 &= g_m(x) (11h^4 - 12h^3g_{m+3}(x) - 6h^2g_{m+3}^2(x) + 12hg_{m+3}^3(x) - 4g_{m+3}^4(x)) \\ &= (g_{m+3}(x) + 3h) (11h^4 - 12h^3g_{m+3}(x) - 6h^2g_{m+3}^2(x) + 12hg_{m+3}^3(x) - 4g_{m+3}^4(x)) \end{aligned}$$

$$a_4 = 33h^5 - 25h^4g_{m+3}(x) - 30h^3g_{m+3}^2(x) + 30h^2g_{m+3}^3(x) - 4g_{m+3}^5(x),$$

$$a_5 = g_m(x) [h - g_{m+4}(x)]^4 = (g_{m+4}(x) + 4h) [h - g_{m+4}(x)]^4$$

$$a_5 = 4h^5 - 15h^4g_{m+4}(x) + 20h^3g_{m+4}^2(x) - 10h^2g_{m+4}^3(x) + g_{m+4}^5(x)$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)S_m^4(x)}{5h} = \frac{1}{120h^5} \begin{cases} a_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ a_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+6}(x)g_{m+1}^4(x) = 5hg_{m+1}^4(x) - g_{m+1}^5(x), \\
b_2 &= -g_{m+6}(x) (h^4 + 4h^3g_{m+2}(x) + 6h^2g_{m+2}^2(x) + 4hg_{m+2}^3(x) - 4g_{m+2}^4(x)) \\
&= -(g_{m+2}(x) - 4h) (h^4 + 4h^3g_{m+2}(x) + 6h^2g_{m+2}^2(x) + 4hg_{m+2}^3(x) - 4g_{m+2}^4(x)) \\
b_2 &= 4h^5 + 15h^4g_{m+2}(x) + 20h^3g_{m+2}^2(x) + 10h^2g_{m+2}^3(x) - 20hg_{m+2}^4(x) + 4g_{m+2}^5(x), \\
b_3 &= -g_{m+6}(x) (11h^4 + 12h^3g_{m+3}(x) - 6h^2g_{m+3}^2(x) - 12hg_{m+3}^3(x) + 6g_{m+3}^4(x)) \\
&= -(g_{m+3}(x) - 3h) (11h^4 + 12h^3g_{m+3}(x) - 6h^2g_{m+3}^2(x) - 12hg_{m+3}^3(x) + 6g_{m+3}^4(x)) \\
b_3 &= 33h^5 + 25h^4g_{m+3}(x) - 30h^3g_{m+3}^2(x) - 30h^2g_{m+3}^3(x) + 30hg_{m+3}^4(x) - 6g_{m+3}^5(x), \\
b_4 &= -g_{m+6}(x) (11h^4 - 12h^3g_{m+4}(x) - 6h^2g_{m+4}^2(x) + 12hg_{m+4}^3(x) - 4g_{m+4}^4(x)) \\
&= -(g_{m+4}(x) - 2h) (11h^4 - 12h^3g_{m+4}(x) - 6h^2g_{m+4}^2(x) + 12hg_{m+4}^3(x) - 4g_{m+4}^4(x)) \\
b_4 &= 22h^5 - 35h^4g_{m+4}(x) + 30h^2g_{m+4}^3(x) - 20hg_{m+4}^4(x) + 4g_{m+4}^5(x), \\
b_5 &= -g_{m+6}(x) [h - g_{m+5}(x)]^4 = -(g_{m+5}(x) - h) g_{m+6}(x) [h - g_{m+5}(x)]^4 \\
b_5 &= [h - g_{m+5}(x)]^5
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+6}(x)S_m^4(x)}{5h} = \frac{1}{120h^5} \begin{cases} b_1 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ b_5 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $S_{m+1}^5(x)$

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 = g_m^5(x), \\
c_2 &= a_2 + b_1 = h^5 + 5h^4g_{m+1}(x) + 10h^3g_{m+1}^2(x) + 10h^2g_{m+1}^3(x) \\
&\quad + 5hg_{m+1}^4(x) - 5g_{m+1}^5(x), \\
c_3 &= a_3 + b_2 = 26h^5 + 50h^4g_{m+2}(x) + 20h^3g_{m+2}^2(x) - 20h^2g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+2}^4(x) + 10g_{m+2}^5(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= a_4 + b_3 = 66h^5 - 60h^3g_{m+3}^2(x) + 30hg_{m+3}^4(x) - 10g_{m+3}^5(x), \\
c_5 &= a_5 + b_4 = 26h^5 - 50h^4g_{m+4}(x) + 20h^3g_{m+4}^2(x) + 20h^2g_{m+4}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+4}^4(x) + 5g_{m+4}^5(x), \\
c_6 &= b_5 = [h - g_{m+5}(x)]^5
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^5(x) = \frac{1}{120h^5} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.61)$$

formunda bulunur. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 120 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
d_1 &= g_{m-3}^5(x), \\
d_2 &= h^5 + 5h^4g_{m-2}(x) + 10h^3g_{m-2}^2(x) + 10h^2g_{m-2}^3(x) + 5hg_{m-2}^4(x) - 5g_{m-2}^5(x), \\
d_3 &= 26h^5 + 50h^4g_{m-1}(x) + 20h^3g_{m-1}^2(x) - 20h^2g_{m-1}^3(x) - 20hg_{m-1}^4(x) + 10g_{m-1}^5(x), \\
d_4 &= 66h^5 - 60h^3g_m^2(x) + 30hg_m^4(x) - 10g_m^5(x), \\
d_5 &= 26h^5 - 50h^4g_{m+1}(x) + 20h^3g_{m+1}^2(x) + 20h^2g_{m+1}^3(x) - 20hg_{m+1}^4(x) + 5g_{m+1}^5(x), \\
d_6 &= [h - g_{m+2}(x)]^5
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^5(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} d_1 & , x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ d_2 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_3 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_4 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_5 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_6 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.62)$$

elde edilir. Burada

$$\{B_{-2}^5(x), B_{-1}^5(x), \dots, B_{N+1}^5(x), B_{N+2}^5(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı beşinci dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuintik B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ardışık altı elemanı örtmektedir. Bu aralıkta, her bir $B_m^4(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ardışık altı elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-2}^5(x) = \frac{(h - g_m(x))^5}{h^5}, \quad (4.63)$$

$$B_{m-1}^5(x) = \frac{1}{h^5} (26h^5 - 50h^4g_m(x) + 20h^3g_m^2(x) + 20h^2g_m^3(x) - 20hg_m^4(x) + 5g_m^5(x)), \quad (4.64)$$

$$B_m^5(x) = \frac{1}{h^5} (66h^5 - 60h^3g_m^2(x) + 30hg_m^4(x) - 10g_m^5(x)), \quad (4.65)$$

$$B_{m+1}^5(x) = \frac{1}{h^5} (26h^5 + 50h^4g_m(x) + 20h^3g_m^2(x) - 20h^2g_m^3(x) - 20hg_m^4(x) + 10g_m^5(x)), \quad (4.66)$$

$$B_{m+2}^5(x) = \frac{1}{h^5} (h^5 + 5h^4g_m(x) + 10h^3g_m^2(x) + 10h^2g_m^3(x) + 5hg_m^4(x) - 5g_m^5(x)), \quad (4.67)$$

$$B_{m+3}^5(x) = \frac{g_m^5(x)}{h^5} \quad (4.68)$$

olarak tanımlanan ardışık altı kuintik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan altı kuintik B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-2}^5(\xi) = \frac{(h - \xi)^5}{h^5}, \quad (4.69)$$

$$B_{m-1}^5(\xi) = \frac{26h^5 - 50h^4\xi + 20h^3\xi^2 + 20h^2\xi^3 - 20h\xi^4 + 5\xi^5}{h^5}, \quad (4.70)$$

$$B_m^5(\xi) = \frac{66h^5 - 60h^3\xi^2 + 30hg_m^4(x) - 10\xi^5}{h^5}, \quad (4.71)$$

$$B_{m+1}^5(\xi) = \frac{26h^5 + 50h^4\xi + 20h^3\xi^2 - 20h^2\xi^3 - 20h\xi^4 + 10\xi^5}{h^5}, \quad (4.72)$$

$$B_{m+2}^5(\xi) = \frac{h^5 + 5h^4\xi + 10h^3\xi^2 + 10h^2\xi^3 + 5h\xi^4 - 5\xi^5}{h^5}, \quad (4.73)$$

$$B_{m+3}^5(\xi) = \frac{\xi^5}{h^5} \quad (4.74)$$

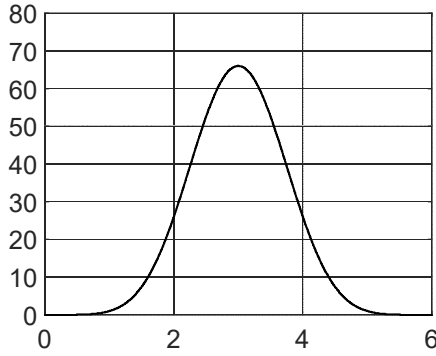
olarak bulunur.

Ayrıca (4.62) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları için $i = m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2$ olmak üzere

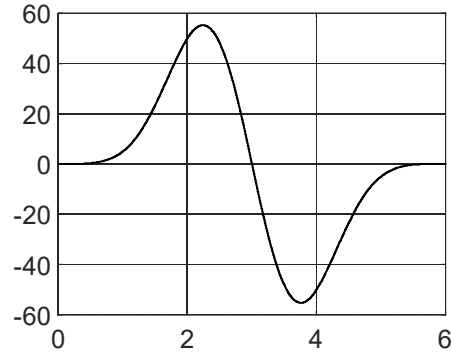
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^5(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^5(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^5(x)) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^5(x)), n = 1, 2, 3, 4$$

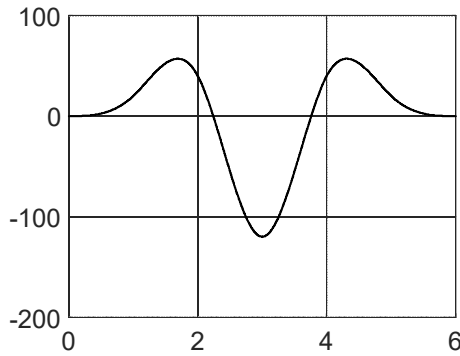
olduğundan kuintik B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevlerinin $x = x_{m-1}, x = x_m, x = x_{m+1}$ ve $x = x_{m+2}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.



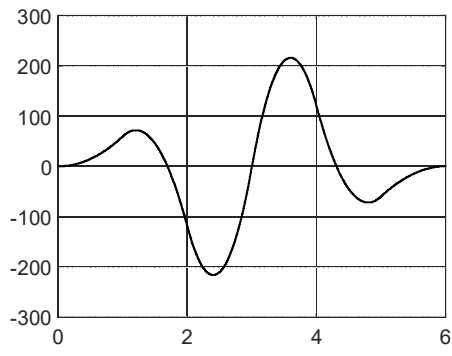
Şekil 4.19. Kuintik B-spline fonksiyonu



Şekil 4.20. Kuintik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



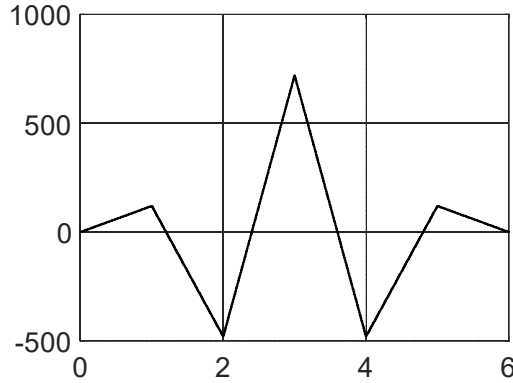
Şekil 4.21. Kuintik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



Şekil 4.22. Kuintik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi

$h = 1$ alınarak $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı $[0, 6]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonuyla ilk dört türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.19, Şekil 4.20, Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23 de çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonuyla ilk dört türevinin iç noktalarda sürekli olduğu, beşinci ve daha yüksek

mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



Şekil 4.23. Kuintik B-spline fonksiyonun dördüncü türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı kuintik B-spline kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-2}^{N+2} B_i^5(x) \delta_i \quad (4.75)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^5(x)$ fonksiyonları kuintik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

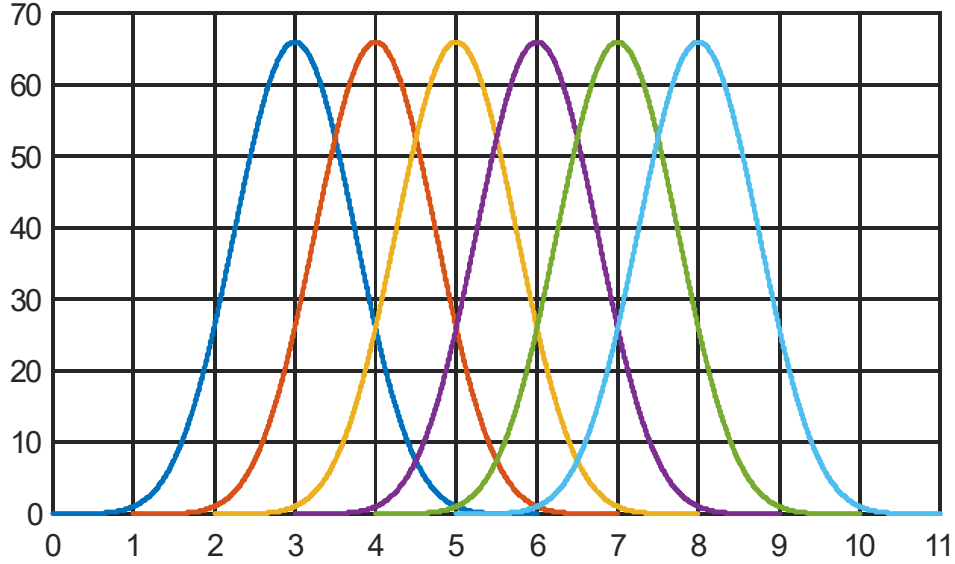
$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

$$B_{m-2}^5(x), B_{m-1}^5(x), B_m^5(x), B_{m+1}^5(x), B_{m+2}^5(x), B_{m+3}^5(x)$$

kuintik B-spline fonksiyonların örttikleri aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-2}^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-5}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve altı elemanı örtmektedir.
- $B_{m-1}^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve altı elemanı örtmektedir.
- $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve altı elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve altı elemanı örtmektedir.

- $B_{m+2}^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve altı elemanı örtmektedir.
- $B_{m+3}^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve altı elemanı örtmektedir.

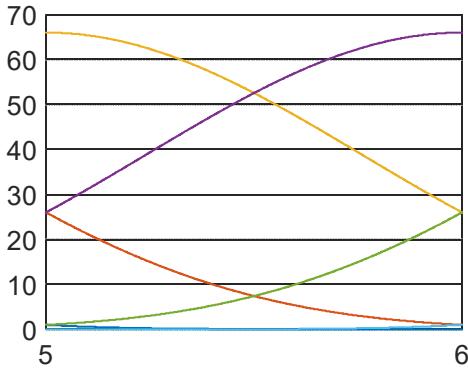


Şekil 4.24. Kuintik B-spline fonksiyonları

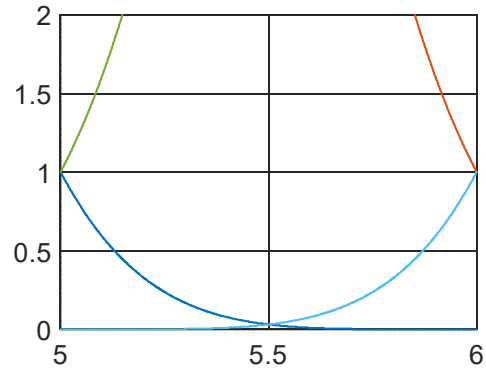
Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-5}, x_{m+6}]$ aralığı $[0, 11]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

$$B_{m-2}^5(x), B_{m-1}^5(x), B_m^5(x), B_{m+1}^5(x), B_{m+2}^5(x), B_{m+3}^5(x)$$

kuintik B-spline fonksiyonları Şekil 4.24 de çizilmiştir. Şekil 4.24 de görüldüğü gibi kuintik B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri ardışık altı elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında kuintik B-spline fonksiyonların ve ilk dört türevinin en fazla altı parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[5, 6]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen altı adet kuintik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.25a da çizilmiştir. Şekil 4.25a da çizilen şekil fonksiyonları içinde değeri sıfıra yakın olan iki şekil fonksiyonu tam gözükmediği için Şekil 4.25b şekli çizilmiştir. Şekil 4.25b şekli çizilirken şekil fonksiyonlarının aldığı değer sınırlandırılmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde $[5, 6]$ aralığına toplam altı şekil fonksiyonu düştüğü açıkça görülmektedir.



Şekil 4.25a



Şekil 4.25b

Şekil 4.25. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $B_m^5(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlar $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $B_m^5(x)$ B-spline fonksiyonları $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık altı elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $B_{m-2}^5, B_{m-1}^5, B_m^5, B_{m+1}^5, B_{m+2}^5$ ve B_{m+3}^5 olarak altı kuintik B-spline tarafından örtülmektedir. Bu durumda $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.62) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-2}^{m+3} B_i^5(x) \delta_i \quad (4.76)$$

olacaktır. Dolayısıyla $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri için yaklaşımlar

$$U(x_m) = U_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} B_i^5(x_m) \delta_i$$

$$\frac{d^n U(x_m)}{dx^n} = U_m^{(n)} = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^n B_i^5(x_m)}{dx^n} \delta_i, n = 1, 2, 3, 4$$

olarak yazılabilir. (4.62) kuintik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m), u'(x_m), u''(x_m), u'''(x_m)$ ve $u^{(4)}(x)$ için yaklaşımlar

$$U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \quad (4.77)$$

$$U'_m = \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.78)$$

$$U''_m = \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.79)$$

$$U'''_m = \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.80)$$

$$U_m^{(4)} = \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \quad (4.81)$$

olarak bulunur.

4.6. Sektik B-spline

S_m^6 sektik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 6$ alındığında

$$\begin{aligned} S_i^6(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+6} - x_m} S_m^5(x) + \frac{x_{m+7} - x}{x_{m+7} - x_{m+1}} S_{m+1}^5(x) \\ S_i^6(x) &= \frac{g_m(x)}{6h} S_m^5(x) + \frac{-g_{m+7}(x)}{6h} S_{m+1}^5(x) \end{aligned} \quad (4.82)$$

elde edilir. Bir önceki alt bölümde

$$\begin{aligned} c_1 &= g_m^5(x), \\ c_2 &= h^5 + 5h^4 g_{m+1}(x) + 10h^3 g_{m+1}^2(x) + 10h^2 g_{m+1}^3(x) + 5h g_{m+1}^4(x) - 5g_{m+1}^5(x) \\ c_3 &= 26h^5 + 50h^4 g_{m+2}(x) + 20h^3 g_{m+2}^2(x) - 20h^2 g_{m+2}^3(x) - 20h g_{m+2}^4(x) + 10g_{m+2}^5(x) \\ c_4 &= 66h^5 - 60h^3 g_{m+3}^2(x) + 30h g_{m+3}^4(x) - 10g_{m+3}^5(x), \\ c_5 &= 26h^5 - 50h^4 g_{m+4}(x) + 20h^3 g_{m+4}^2(x) + 20h^2 g_{m+4}^3(x) - 20h g_{m+4}^4(x) + 5g_{m+4}^5(x) \\ c_6 &= [h - g_{m+5}(x)]^5 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^5(x) = \frac{1}{120h^5} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunan (4.61) kuintik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} a_1 &= g_m(x) g_m^5(x) = g_m^6(x), \\ a_2 &= g_m(x) (h^5 + 5h^4 g_{m+1}(x) + 10h^3 g_{m+1}^2(x) + 10h^2 g_{m+1}^3(x) + 5h g_{m+1}^4(x) \\ &\quad - 5g_{m+1}^5(x)), \\ &= (g_{m+1}(x) + h) (h^5 + 5h^4 g_{m+1}(x) + 10h^3 g_{m+1}^2(x) + 10h^2 g_{m+1}^3(x) + 5h g_{m+1}^4(x) \\ &\quad - 5g_{m+1}^5(x)), \\ a_2 &= h^6 + 6h^5 g_{m+1}(x) + 15h^4 g_{m+1}^2(x) + 20h^3 g_{m+1}^3(x) + 15h^2 g_{m+1}^4(x) - 5g_{m+1}^6(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= g_m(x) (26h^5 + 50h^4g_{m+2}(x) + 20h^3g_{m+2}^2(x) - 20h^2g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+2}^4(x) + 10g_{m+2}^5(x)), \\
&= (g_{m+2}(x) + 2h) (26h^5 + 50h^4g_{m+2}(x) + 20h^3g_{m+2}^2(x) - 20h^2g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+2}^4(x) + 10g_{m+2}^5(x)), \\
a_3 &= (52h^6 + 126h^5g_{m+2}(x) + 90h^4g_{m+2}^2(x) - 20h^3g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 60h^2g_{m+2}^4(x) + 10g_{m+2}^6(x)), \\
a_4 &= g_m(x) (66h^5 - 60h^3g_{m+3}^2(x) + 30hg_{m+3}^4(x) - 10g_{m+3}^5(x)) \\
&= (g_{m+3}(x) + 3h) (66h^5 - 60h^3g_{m+3}^2(x) + 30hg_{m+3}^4(x) - 10g_{m+3}^5(x)), \\
a_4 &= (198h^6 + 66h^5g_{m+3}(x) - 180h^4g_{m+3}^2(x) - 60h^3g_{m+3}^3(x) + 90h^2g_{m+3}^4(x) \\
&\quad - 10g_{m+3}^6(x)), \\
a_5 &= g_m(x) (26h^5 - 50h^4g_{m+4}(x) + 20h^3g_{m+4}^2(x) + 20h^2g_{m+4}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+4}^4(x) + 5g_{m+4}^5(x)), \\
&= (g_{m+4}(x) + 4h) (26h^5 - 50h^4g_{m+4}(x) + 20h^3g_{m+4}^2(x) + 20h^2g_{m+4}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+4}^4(x) + 5g_{m+4}^5(x)), \\
a_5 &= 104h^6 - 174h^5g_{m+4}(x) + 30h^4g_{m+4}^2(x) + 100h^3g_{m+4}^3(x) - 60h^2g_{m+4}^4(x) + 5g_{m+4}^6(x), \\
a_6 &= g_m(x) [h - g_{m+5}(x)]^5 = (g_{m+5}(x) + 5h) [h - g_{m+5}(x)]^5 \\
&= 5h^6 - 24h^5g_{m+5}(x) + 45h^4g_{m+5}^2(x) - 40h^3g_{m+5}^3(x) + 15h^2g_{m+5}^4(x) - g_{m+5}^6(x)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)}{6h} S_m^5(x) = \frac{1}{720h^6} \begin{cases} a_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ a_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ a_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+7}(x)g_{m+1}^5(x) \\
&= -(g_{m+1}(x) - 6h)g_{m+1}^5(x) \\
&= 6hg_{m+1}^5(x) - g_{m+1}^6(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= -g_{m+7}(x) (h^5 + 5h^4g_{m+2}(x) + 10h^3g_{m+2}^2(x) + 10h^2g_{m+2}^3(x) \\
&\quad + 5hg_{m+2}^4(x) - 5g_{m+2}^5(x)), \\
&= -(g_{m+2}(x) - 5h) (h^5 + 5h^4g_{m+2}(x) + 10h^3g_{m+2}^2(x) + 10h^2g_{m+2}^3(x) \\
&\quad + 5hg_{m+2}^4(x) - 5g_{m+2}^5(x)), \\
&= (5h^6 + 24h^5g_{m+2}(x) + 45h^4g_{m+2}^2(x) + 40h^3g_{m+2}^3(x) + 15h^2g_{m+2}^4(x) \\
&\quad - 30hg_{m+2}^5(x) + 5g_{m+2}^6(x)), \\
b_3 &= -g_{m+7}(x) (26h^5 + 50h^4g_{m+3}(x) + 20h^3g_{m+3}^2(x) - 20h^2g_{m+3}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+3}^4(x) + 10g_{m+3}^5(x)), \\
&= -(g_{m+3}(x) + 4h) (26h^5 + 50h^4g_{m+3}(x) + 20h^3g_{m+3}^2(x) - 20h^2g_{m+3}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+3}^4(x) + 10g_{m+3}^5(x)), \\
b_3 &= (104h^6 + 174h^5g_{m+3}(x) + 30h^4g_{m+3}^2(x) - 100h^3g_{m+3}^3(x) - 60h^2g_{m+3}^4(x) \\
&\quad + 60hg_{m+3}^5(x) - 10g_{m+3}^6(x)), \\
&= -g_{m+7}(x) (66h^5 - 60h^3g_{m+4}^2(x) + 30hg_{m+4}^4(x) - 10g_{m+4}^5(x)) \\
&= -(g_{m+4}(x) - 3h) (66h^5 - 60h^3g_{m+4}^2(x) + 30hg_{m+4}^4(x) - 10g_{m+4}^5(x)) \\
b_4 &= (198h^6 - 66h^5g_{m+4}(x) - 180h^4g_{m+4}^2(x) + 60h^3g_{m+4}^3(x) + 90h^2g_{m+4}^4(x) \\
&\quad - 60g_{m+4}^5(x)h + 10g_{m+4}^6(x)), \\
b_5 &= -g_{m+7}(x) (26h^5 - 50h^4g_{m+5}(x) + 20h^3g_{m+5}^2(x) + 20h^2g_{m+5}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+5}^4(x) + 5g_{m+5}^5(x)), \\
&= -(g_{m+5}(x) - 2h) (26h^5 - 50h^4g_{m+5}(x) + 20h^3g_{m+5}^2(x) + 20h^2g_{m+5}^3(x) \\
&\quad - 20hg_{m+5}^4(x) + 5g_{m+5}^5(x)), \\
b_5 &= (52h^6 - 126h^5g_{m+5}(x) + 90h^4g_{m+5}^2(x) + 20h^3g_{m+5}^3(x) - 60h^2g_{m+5}^4(x) \\
&\quad + 30hg_{m+5}^5(x) - 5g_{m+5}^6(x)), \\
b_6 &= -g_{m+7}(x) [h - g_{m+6}(x)]^5 \\
&= -(g_{m+6}(x) - h) [h - g_{m+6}(x)]^5 \\
&= [h - g_{m+6}(x)]^6
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+7}(x)}{6h} S_{m+1}^5(x) = \frac{1}{720h^6} \begin{cases} b_1 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ b_5 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ b_6 & , x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.82) eşitliği

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 = g_m^6(x), \\ c_2 &= a_2 + b_1 = h^6 + 6h^5 g_{m+1}(x) + 15h^4 g_{m+1}^2(x) + 20h^3 g_{m+1}^3(x) + 15h^2 g_{m+1}^4(x) \\ &\quad + 6h g_{m+1}^5(x) - 6g_{m+1}^6(x), \\ c_3 &= a_3 + b_2 = 57h^6 + 150h^5 g_{m+2}(x) + 135h^4 g_{m+2}^2(x) + 20h^3 g_{m+2}^3(x) \\ &\quad - 45h^2 g_{m+2}^4(x) - 30h g_{m+2}^5(x) + 15g_{m+2}^6(x), \\ c_4 &= a_4 + b_3 = 302h^6 + 240h^5 g_{m+3}(x) - 150h^4 g_{m+3}^2(x) - 160h^3 g_{m+3}^3(x) \\ &\quad + 30h^2 g_{m+3}^4(x) + 60h g_{m+3}^5(x) - 20g_{m+3}^6(x), \\ c_5 &= a_5 + b_4 = 302h^6 - 240h^5 g_{m+4}(x) - 150h^4 g_{m+4}^2(x) + 160h^3 g_{m+4}^3(x) \\ &\quad + 30h^2 g_{m+4}^4(x) - 60h g_{m+4}^5(x) + 15g_{m+4}^6(x), \\ c_6 &= a_6 + b_5 = 57h^6 - 150h^5 g_{m+5}(x) + 135h^4 g_{m+5}^2(x) - 20h^3 g_{m+5}^3(x) \\ &\quad - 45h^2 g_{m+5}^4(x) + 30h g_{m+5}^5(x) - 6g_{m+5}^6(x), \\ c_7 &= b_6 = [h - g_{m+6}(x)]^6 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^6(x) = \frac{1}{720h^6} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ c_7 & , x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.83)$$

olarak bulunur. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 720 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
d_1 &= g_{m-3}^6(x), \\
d_2 &= h^6 + 6h^5 g_{m-2}(x) + 15h^4 g_{m-2}^2(x) + 20h^3 g_{m-2}^3(x) + 15h^2 g_{m-2}^4(x) \\
&\quad + 6h g_{m-2}^5(x) - 6g_{m-2}^6(x), \\
d_3 &= 57h^6 + 150h^5 g_{m-1}(x) + 135h^4 g_{m-1}^2(x) + 20h^3 g_{m-1}^3(x) - 45h^2 g_{m-1}^4(x) \\
&\quad - 30h g_{m-1}^5(x) + 15g_{m-1}^6(x), \\
d_4 &= 302h^6 + 240h^5 g_m(x) - 150h^4 g_m^2(x) - 160h^3 g_m^3(x) + 30h^2 g_m^4(x) \\
&\quad + 60h g_m^5(x) - 20g_m^6(x), \\
d_5 &= 302h^6 - 240h^5 g_{m+1}(x) - 150h^4 g_{m+1}^2(x) + 160h^3 g_{m+1}^3(x) + 30h^2 g_{m+1}^4(x) \\
&\quad - 60h g_{m+1}^5(x) + 15g_{m+1}^6(x), \\
d_6 &= 57h^6 - 150h^5 g_{m+2}(x) + 135h^4 g_{m+2}^2(x) - 20h^3 g_{m+2}^3(x) - 45h^2 g_{m+2}^4(x) \\
&\quad + 30h g_{m+2}^5(x) - 6g_{m+2}^6(x), \\
d_7 &= [h - g_{m+3}(x)]^6
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^6(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} d_1 & , x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ d_2 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_3 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_4 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_5 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_6 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ d_7 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.84)$$

olarak bulunur. Burada

$$\{B_{-3}^6(x), B_{-2}^6(x), B_{-1}^6(x), \dots, B_{N+1}^6(x), B_{N+2}^6(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı altıncı dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Sektik B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci mertebeden türevleri $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu

aralıkta, her bir $B_m^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonu ardışık yedi elemanı örtmektedir.

Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-3}^6(x) = \frac{[h - g_m(x)]^6}{h^6}, \quad (4.85)$$

$$B_{m-2}^6(x) = \frac{1}{h^6} (57h^6 - 150h^5g_m(x) + 135h^4g_m^2(x) - 20h^3g_m^3(x) - 45h^2g_m^4(x) + 30hg_m^5(x) - 6g_m^6(x)), \quad (4.86)$$

$$B_{m-1}^6(x) = \frac{1}{h^6} (302h^6 - 240h^5g_m(x) - 150h^4g_m^2(x) + 160h^3g_m^3(x) + 30h^2g_m^4(x) - 60hg_m^5(x) + 15g_m^6(x)), \quad (4.87)$$

$$B_m^6(x) = \frac{1}{h^6} (302h^6 + 240h^5g_m(x) - 150h^4g_m^2(x) - 160h^3g_m^3(x) + 30h^2g_m^4(x) + 60hg_m^5(x) - 20g_m^6(x)), \quad (4.88)$$

$$B_{m+1}^6(x) = \frac{1}{h^6} (57h^6 + 150h^5g_m(x) + 135h^4g_m^2(x) + 20h^3g_m^3(x) - 45h^2g_m^4(x) - 30hg_m^5(x) + 15g_m^6(x)), \quad (4.89)$$

$$B_{m+2}^6(x) = \frac{1}{h^6} (h^6 + 6h^5g_m(x) + 15h^4g_m^2(x) + 20h^3g_m^3(x) + 15h^2g_m^4(x) + 6hg_m^5(x) - 6g_m^6(x)), \quad (4.90)$$

$$B_{m+3}^6(x) = \frac{g_m^6(x)}{h^6} \quad (4.91)$$

olarak tanımlanan ardışık yedi sektik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

$\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan yedi sektik B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-3}^6(\xi) = \frac{(h - \xi)^6}{h^6}, \quad (4.92)$$

$$B_{m-2}^6(\xi) = \frac{1}{h^6} (57h^6 - 150h^5\xi + 135h^4\xi^2 - 20h^3\xi^3 - 45h^2\xi^4 + 30h\xi^5 - 6\xi^6), \quad (4.93)$$

$$B_{m-1}^6(\xi) = \frac{1}{h^6} (302h^6 - 240h^5\xi - 150h^4\xi^2 + 160h^3\xi^3 + 30h^2\xi^4 - 60h\xi^5 + 15\xi^6), \quad (4.94)$$

$$B_m^6(\xi) = \frac{1}{h^6} (302h^6 + 240h^5\xi - 150h^4\xi^2 - 160h^3\xi^3 + 30h^2\xi^4 + 60h\xi^5 - 20\xi^6), \quad (4.95)$$

$$B_{m+1}^6(\xi) = \frac{1}{h^6} (57h^6 + 150h^5\xi + 135h^4\xi^2 + 20h^3\xi^3 - 45h^2\xi^4 - 30h\xi^5 + 15\xi^6), \quad (4.96)$$

$$-30h\xi^5 + 15\xi^6), \quad (4.97)$$

$$B_{m+2}^6(\xi) = \frac{1}{h^6} (h^6 + 6h^5\xi + 15h^4\xi^2 + 20h^3\xi^3 + 15h^2\xi^4 + 6h\xi^5 - 6\xi^6), \quad (4.98)$$

$$B_{m+3}^6(\xi) = \frac{\xi^6}{h^6} \quad (4.99)$$

olarak bulunur.

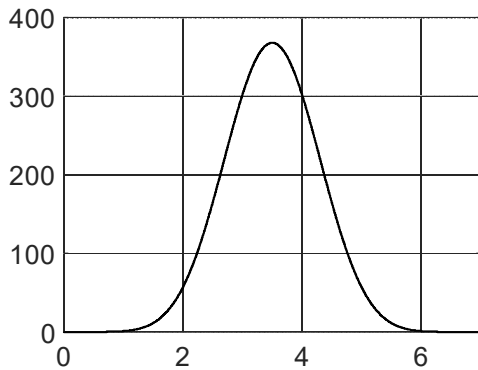
Ayrıca (4.84) ile verilen sektik B-spline için $i = m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2, m + 2, m + 3$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^6(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^6(x)$$

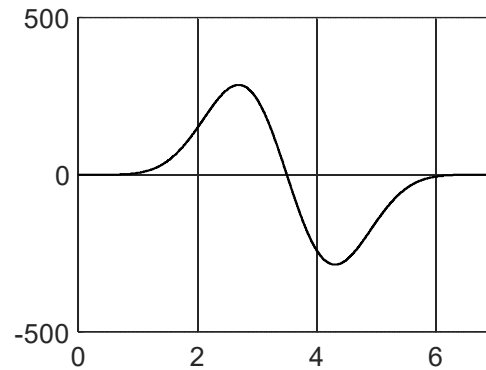
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^6(x)) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^6(x)), n = 1, 2, 3, 4, 5$$

olduğundan (4.84) sektik B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci mertebeden türevlerinin $x = x_{m-2}, x = x_{m-1}, x = x_m, x = x_{m+1}, x = x_{m+2}$ ve $x = x_{m+3}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

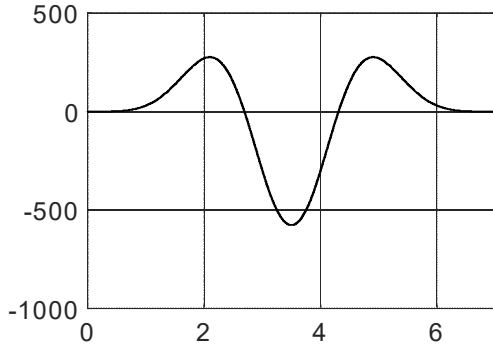
$h = 1$ alınarak $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı $[0, 7]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonuyla ilk beş türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.26, Şekil 4.27, Şekil 4.28, Şekil 4.29, Şekil 4.30 ve Şekil 4.31 de çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonuyla ilk beş türevinin iç noktalarda sürekli olduğu, altıncı ve daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



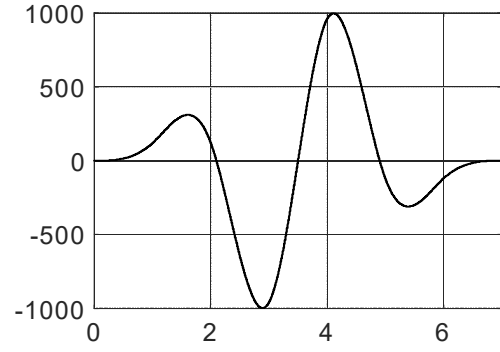
Şekil 4.26. Sektik B-spline fonksiyonu



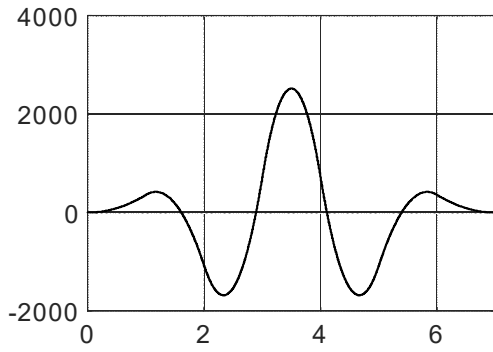
Şekil 4.27. Sektik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



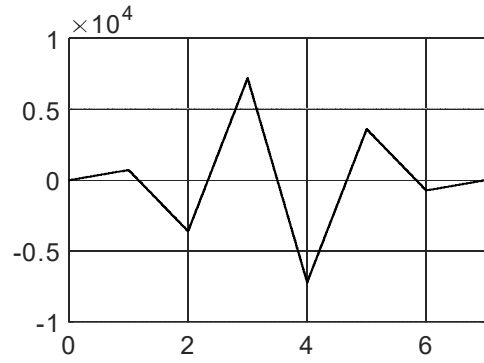
Şekil 4.28. Sektik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



Şekil 4.29. Sektik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi



Şekil 4.30. Sektik B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi



Şekil 4.31. Sektik B-spline fonksiyonunun beşinci türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı sektik B-spline kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-3}^{N+2} B_i^6(x) \delta_i \quad (4.100)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^6(x)$ fonksiyonları sektik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

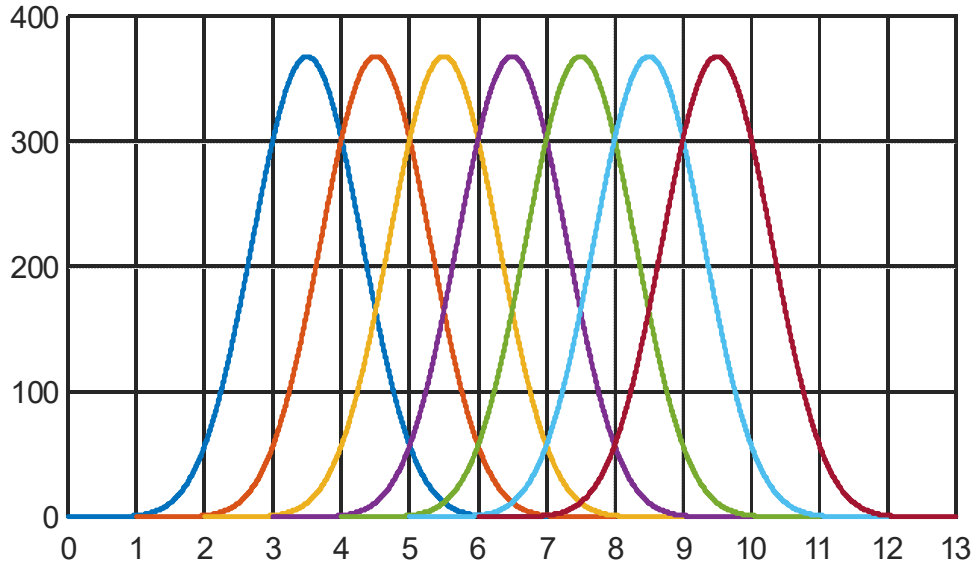
$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

$$B_{m-3}^6(x), B_{m-2}^6(x), B_{m-1}^6(x), B_m^6(x), B_{m+1}^6(x), B_{m+2}^6(x), B_{m+3}^6(x)$$

sektik B-spline fonksiyonların örttüğü aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-3}^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-6}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.
- $B_{m-2}^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-5}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.

- $B_{m-1}^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.
- $B_m^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.
- $B_{m+3}^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+7}]$ aralığının dışında sıfırdır ve yedi elemanı örtmektedir.



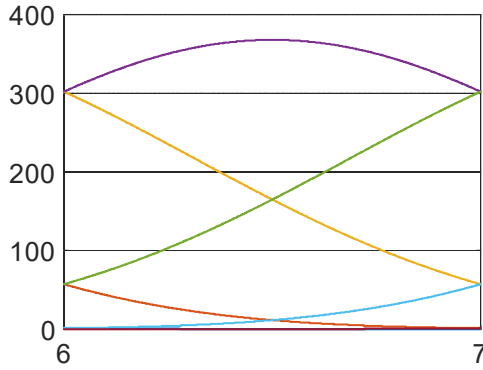
Şekil 4.32. Sektik B-spline fonksiyonları

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-6}, x_{m+7}]$ aralığı $[0, 13]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

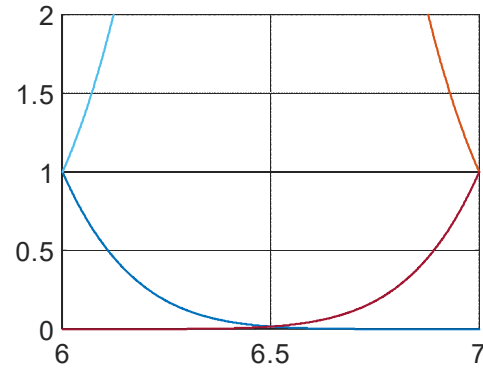
$$B_{m-3}^6(x), B_{m-2}^6(x), B_{m-1}^6(x), B_m^6(x), B_{m+1}^6(x), B_{m+2}^6(x), B_{m+3}^6(x)$$

sektik B-spline fonksiyonları Şekil 4.32 de çizilmiştir. Şekil 4.32 de görüldüğü gibi sektik B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci

mertebeden türevleri ardışık yedi elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında sektik B-spline fonksiyonların ve ilk beş türevinin en fazla yedi parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[6, 7]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen yedi adet sektik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.33a da çizilmiştir. Şekil 4.33a da çizilen şekil fonksiyonları içinde değeri sıfıra yakın olan iki şekil fonksiyonu tam gözükmeyeceği için Şekil 4.33b şekli çizilmiştir. Şekil 4.33b şekli çizilirken şekil fonksiyonlarının aldığı değer sınırlandırılmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde $[6, 7]$ aralığına toplam yedi şekil fonksiyonu düştüğü açıkça görülmektedir.



Şekil 4.33a



Şekil 4.33b

Şekil 4.33. Sektik B-spline şekil fonksiyonları

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $B_m^6(x)$ sektik B-spline fonksiyonlar $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $B_m^6(x)$ B-spline fonksiyonları $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık yedi elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $B_{m-3}^6, B_{m-2}^6, B_{m-1}^6, B_m^6, B_{m+1}^6, B_{m+2}^6$ ve B_{m+3}^6 olarak yedi B-spline tarafından örtülmektedir. Bu durumda $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.100) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-3}^{m+3} B_i^6(x) \delta_i$$

olacaktır. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci mertebeden türevleri için yaklaşımlar ise

$$U(x_m) = U_m = \sum_{i=m-3}^{m+3} B_i^6(x_m) \delta_i$$

$$\frac{d^n U(x_m)}{dx^n} = U_m^{(n)} = \sum_{i=m-3}^{m+3} \frac{d^n B_i^6(x_m)}{dx^n} \delta_i, n = 1, 2, 3, 4, 5$$

olarak yazılabilir. (4.84) sektik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$, $u'(x_m)$, $u''(x_m)$, $u'''(x_m)$, $u^{(4)}(x)$ ve $u^{(5)}(x)$ için yaklaşımlar

$$U_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \quad (4.101)$$

$$U'_m = \frac{6}{h} (-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.102)$$

$$U''_m = \frac{30}{h^2} (\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.103)$$

$$U'''_m = \frac{120}{h^3} (-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.104)$$

$$U_m^{(4)} = \frac{360}{h^4} (\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (4.105)$$

$$U_m^{(5)} = \frac{720}{h^5} (\delta_{m-3} - 5\delta_{m-2} + 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 5\delta_{m+1} - \delta_{m+2}) \quad (4.106)$$

olarak bulunur.

4.7. Septik B-spline

S_m^7 yedinci dereceden B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 7$ alındığında

$$\begin{aligned} S_i^7(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+7} - x_m} S_m^6(x) + \frac{x_{m+8} - x}{x_{m+8} - x_{m+1}} S_{m+1}^6(x) \\ S_i^7(x) &= \frac{g_m(x)}{7h} S_m^6(x) + \frac{-g_{m+8}(x)}{7h} S_{m+1}^6(x) \end{aligned} \quad (4.107)$$

elde edilir. Bir önceki alt bölümde

$$\begin{aligned} c_1 &= g_m^6(x), \\ c_2 &= h^6 + 6h^5 g_{m+1}(x) + 15h^4 g_{m+1}^2(x) + 20h^3 g_{m+1}^3(x) + 15h^2 g_{m+1}^4(x) \\ &\quad + 6h g_{m+1}^5(x) - 6g_{m+1}^6(x), \\ c_3 &= 57h^6 + 150h^5 g_{m+2}(x) + 135h^4 g_{m+2}^2(x) + 20h^3 g_{m+2}^3(x) - 45h^2 g_{m+2}^4(x) \\ &\quad - 30h g_{m+2}^5(x) + 15g_{m+2}^6(x), \\ c_4 &= 302h^6 + 240h^5 g_{m+3}(x) - 150h^4 g_{m+3}^2(x) - 160h^3 g_{m+3}^3(x) + 30h^2 g_{m+3}^4(x) \\ &\quad + 60h g_{m+3}^5(x) - 20g_{m+3}^6(x), \\ c_5 &= 302h^6 - 240h^5 g_{m+4}(x) - 150h^4 g_{m+4}^2(x) + 160h^3 g_{m+4}^3(x) + 30h^2 g_{m+4}^4(x) \\ &\quad - 60h g_{m+4}^5(x) + 15g_{m+4}^6(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6 &= 57h^6 - 150h^5 g_{m+5}(x) + 135h^4 g_{m+5}^2(x) - 20h^3 g_{m+5}^3(x) - 45h^2 g_{m+5}^4(x) \\
&\quad + 30h g_{m+5}^5(x) - 6g_{m+5}^6(x) \\
c_7 &= [h - g_{m+6}(x)]^6
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^6(x) = \frac{1}{720h^6} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ c_7 & , x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunan (4.83) sektik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
a_1 &= g_m(x) g_m^6(x) = g_m^7(x), \\
a_2 &= g_m(x) [h^6 + 6h^5 g_{m+1}(x) + 15h^4 g_{m+1}^2(x) + 20h^3 g_{m+1}^3(x) + 15h^2 g_{m+1}^4(x) \\
&\quad + 6h g_{m+1}^5(x) - 6g_{m+1}^6(x)] \\
a_2 &= h^7 + 7h^6 g_{m+1}(x) + 21h^5 g_{m+1}^2(x) + 35h^4 g_{m+1}^3(x) + 35h^3 g_{m+1}^4(x) \\
&\quad + 21h^2 g_{m+1}^5(x) - 6g_{m+1}^7(x), \\
a_3 &= g_m(x) [57h^6 + 150h^5 g_{m+2}(x) + 135h^4 g_{m+2}^2(x) + 20h^3 g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 45h^2 g_{m+2}^4(x) - 30h g_{m+2}^5(x) + 15g_{m+2}^6(x)] \\
a_3 &= 114h^7 + 357h^6 g_{m+2}(x) + 420h^5 g_{m+2}^2(x) + 175h^4 g_{m+2}^3(x) - 70h^3 g_{m+2}^4(x) \\
&\quad - 105h^2 g_{m+2}^5(x) + 15g_{m+2}^7(x), \\
a_4 &= g_m(x) [302h^6 + 240h^5 g_{m+3}(x) - 150h^4 g_{m+3}^2(x) - 160h^3 g_{m+3}^3(x) \\
&\quad + 30h^2 g_{m+3}^4(x) + 60h g_{m+3}^5(x) - 20g_{m+3}^6(x)], \\
a_4 &= 906h^7 + 1022h^6 g_{m+3}(x) - 210h^5 g_{m+3}^2(x) - 630h^4 g_{m+3}^3(x) - 70h^3 g_{m+3}^4(x) \\
&\quad + 210h^2 g_{m+3}^5(x) - 20g_{m+3}^7(x), \\
a_5 &= g_m(x) [302h^6 - 240h^5 g_{m+4}(x) - 150h^4 g_{m+4}^2(x) + 160h^3 g_{m+4}^3(x) \\
&\quad + 30h^2 g_{m+4}^4(x) - 60h g_{m+4}^5(x) + 15g_{m+4}^6(x)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= 1208h^7 - 658h^6 g_{m+4}(x) - 840h^5 g_{m+4}^2(x) + 490h^4 g_{m+4}^3(x) + 280h^3 g_{m+4}^4(x) \\
&\quad - 210h^2 g_{m+4}^5(x) + 15g_{m+4}^7(x), \\
a_6 &= g_m(x) [57h^6 - 150h^5 g_{m+5}(x) + 135h^4 g_{m+5}^2(x) - 20h^3 g_{m+5}^3(x) \\
&\quad - 45h^2 g_{m+5}^4(x) + 30h g_{m+5}^5(x) - 6g_{m+5}^6(x)], \\
a_6 &= 285h^7 - 693h^6 g_{m+5}(x) + 525h^5 g_{m+5}^2(x) + 35h^4 g_{m+5}^3(x) - 245h^3 g_{m+5}^4(x) \\
&\quad + 105h^2 g_{m+5}^5(x) - 6g_{m+5}^7(x), \\
a_7 &= g_m(x) [h - g_{m+6}(x)]^6, \\
&= 6h^7 - 35h^6 g_{m+6}(x) + 84h^5 g_{m+6}^2(x) - 105h^4 g_{m+6}^3(x) + 70h^3 g_{m+6}^4(x) \\
&\quad - 21h^2 g_{m+6}^5(x) + g_{m+6}^7(x),
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)}{x_{m+7} - x_m} S_m^6(x) = \frac{1}{7h \cdot 720h^6} \begin{cases} a_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ a_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ a_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ a_7 & , x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+8}(x) g_{m+1}^6(x) \\
&= 7h g_{m+1}^6(x) - g_{m+1}^7(x), \\
b_2 &= -g_{m+8}(x) (h^6 + 6h^5 g_{m+2}(x) + 15h^4 g_{m+2}^2(x) + 20h^3 g_{m+2}^3(x) + 15h^2 g_{m+2}^4(x) \\
&\quad + 6h g_{m+2}^5(x) - 6g_{m+2}^6(x)), \\
&= (6h^7 + 35h^6 g_{m+2}(x) + 84h^5 g_{m+2}^2(x) + 105h^4 g_{m+2}^3(x) + 70h^3 g_{m+2}^4(x) \\
&\quad + 21h^2 g_{m+2}^5(x) - 42h g_{m+2}^6(x) + 6g_{m+2}^7(x)), \\
b_3 &= -g_{m+8}(x) (57h^6 + 150h^5 g_{m+3}(x) + 135h^4 g_{m+3}^2(x) + 20h^3 g_{m+3}^3(x) - 45h^2 g_{m+3}^4(x) \\
&\quad - 30h g_{m+3}^5(x) + 15g_{m+3}^6(x)), \\
&= (285h^7 + 693h^6 g_{m+3}(x) + 525h^5 g_{m+3}^2(x) - 35h^4 g_{m+3}^3(x) - 245h^3 g_{m+3}^4(x) \\
&\quad - 105h^2 g_{m+3}^5(x) + 105h g_{m+3}^6(x) - 15g_{m+3}^7(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 &= -g_{m+8}(x) (302h^6 + 240h^5 g_{m+4}(x) - 150h^4 g_{m+4}^2(x) - 160h^3 g_{m+4}^3(x) \\
&\quad + 30h^2 g_{m+4}^4(x) + 60h g_{m+4}^5(x) - 20g_{m+4}^6(x)) , \\
&= (1208h^7 + 658h^6 g_{m+4}(x) - 840h^5 g_{m+4}^2(x) - 490h^4 g_{m+4}^3(x) + 280h^3 g_{m+4}^4(x) \\
&\quad + 210h^2 g_{m+4}^5(x) - 140h g_{m+4}^6(x) + 20g_{m+4}^7(x)) , \\
b_5 &= -g_{m+8}(x) (302h^6 - 240h^5 g_{m+5}(x) - 150h^4 g_{m+5}^2(x) + 160h^3 g_{m+5}^3(x) \\
&\quad + 30h^2 g_{m+5}^4(x) - 60h g_{m+5}^5(x) + 15g_{m+5}^6(x)) , \\
&= (906h^7 - 1022h^6 g_{m+5}(x) - 210h^5 g_{m+5}^2(x) + 630h^4 g_{m+5}^3(x) - 70h^3 g_{m+5}^4(x) \\
&\quad - 210h^2 g_{m+5}^5(x) + 105h g_{m+5}^6(x) - 15g_{m+5}^7(x)) , \\
b_6 &= -g_{m+8}(x) (57h^6 - 150h^5 g_{m+6}(x) + 135h^4 g_{m+6}^2(x) - 20h^3 g_{m+6}^3(x) \\
&\quad - 45h^2 g_{m+6}^4(x) + 30h g_{m+6}^5(x) - 6g_{m+6}^6(x)) , \\
&= (114h^7 - 357h^6 g_{m+6}(x) + 420h^5 g_{m+6}^2(x) - 175h^4 g_{m+6}^3(x) - 70h^3 g_{m+6}^4(x) \\
&\quad + 105h^2 g_{m+6}^5(x) - 42h g_{m+6}^6(x) + 6g_{m+6}^7(x)) , \\
b_7 &= -g_{m+8}(x) [h - g_{m+7}(x)]^6 \\
&= [h - g_{m+7}(x)]^7
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+8}(x)}{x_{m+8} - x_{m+1}} S_{m+1}^6(x) = \frac{1}{7h \cdot 720h^6} \begin{cases} b_1 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ b_5 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ b_6 & , x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ b_7 & , x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.107) eşitliği

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 = g_m^7(x) \\
c_2 &= a_2 + b_1 = h^7 + 7h^6 g_{m+1}(x) + 21h^5 g_{m+1}^2(x) + 35h^4 g_{m+1}^3(x) \\
&\quad + 35h^3 g_{m+1}^4(x) + 21h^2 g_{m+1}^5(x) + 7h g_{m+1}^6(x) - 7g_{m+1}^7(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= a_3 + b_2 = 120h^7 + 392h^6g_{m+2}(x) + 504h^5g_{m+2}^2(x) + 280h^4g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 84h^2g_{m+2}^5(x) - 42hg_{m+2}^6(x) + 21g_{m+2}^7(x), \\
c_4 &= a_4 + b_3 = 1191h^7 + 1715h^6g_{m+3}(x) + 315h^5g_{m+3}^2(x) - 665h^4g_{m+3}^3(x) \\
&\quad - 315h^3g_{m+3}^4(x) + 105h^2g_{m+3}^5(x) + 105hg_{m+3}^6(x) - 35g_{m+3}^7(x), \\
c_5 &= a_5 + b_4 = 2416h^7 - 1680h^5g_{m+4}^2(x) + 560h^3g_{m+4}^4(x) \\
&\quad - 140hg_{m+4}^6(x) + 35g_{m+4}^7(x), \\
c_6 &= a_6 + b_5 = 1191h^7 - 1715h^6g_{m+5}(x) + 315h^5g_{m+5}^2(x) + 665h^4g_{m+5}^3(x) \\
&\quad - 315h^3g_{m+5}^4(x) - 105h^2g_{m+5}^5(x) + 105hg_{m+5}^6(x) - 21g_{m+5}^7(x), \\
c_7 &= a_7 + b_6 = 120h^7 - 392h^6g_{m+6}(x) + 504h^5g_{m+6}^2(x) - 280h^4g_{m+6}^3(x) \\
&\quad + 84h^2g_{m+6}^5(x) - 42hg_{m+6}^6(x) + 7g_{m+6}^7(x), \\
c_8 &= b_7 = [h - g_{m+7}(x)]^7
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^7(x) = \frac{1}{5040h^7} \left\{ \begin{array}{l} c_1, \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2, \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3, \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4, \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5, \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6, \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ c_7, \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ c_8, \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ 0, \quad \text{diğer durumlarda} \end{array} \right. \quad (4.108)$$

olarak bulunur. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 5040 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
d_1 &= g_{m-4}(x)^7, \\
d_2 &= h^7 + 7h^6g_{m-3}(x) + 21h^5g_{m-3}^2(x) + 35h^4g_{m-3}^3(x) + 35h^3g_{m-3}^4(x) \\
&\quad + 21h^2g_{m-3}^5(x) + 7hg_{m-3}^6(x) - 7g_{m-3}^7(x), \\
d_3 &= 120h^7 + 392h^6g_{m-2}(x) + 504h^5g_{m-2}^2(x) + 280h^4g_{m-2}^3(x) \\
&\quad - 84h^2g_{m-2}^5(x) - 42hg_{m-2}^6(x) + 21g_{m-2}^7(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_4 &= 1191h^7 + 1715h^6g_{m-1}(x) + 315h^5g_{m-1}^2(x) - 665h^4g_{m-1}^3(x) \\
&\quad - 315h^3g_{m-1}^4(x) + 105h^2g_{m-1}^5(x) + 105hg_{m-1}^6(x) - 35g_{m-1}^7(x), \\
d_5 &= 2416h^7 - 1680h^5g_m^2(x) + 560h^3g_m^4(x) - 140hg_m^6(x) + 35g_m^7(x), \\
d_6 &= 1191h^7 - 1715h^6g_{m+1}(x) + 315h^5g_{m+1}^2(x) + 665h^4g_{m+1}^3(x) \\
&\quad - 315h^3g_{m+1}^4(x) - 105h^2g_{m+1}^5(x) + 105hg_{m+1}^6(x) - 21g_{m+1}^7(x), \\
d_7 &= 120h^7 - 392h^6g_{m+2}(x) + 504h^5g_{m+2}^2(x) - 280h^4g_{m+2}^3(x) \\
&\quad + 84h^2g_{m+2}^5(x) - 42hg_{m+2}^6(x) + 7g_{m+2}^7(x), \\
d_8 &= [h - g_{m+3}(x)]^7
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^7(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} d_1, & x_{m-4} \leq x < x_{m-3} \\ d_2, & x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ d_3, & x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_4, & x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_5, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_6, & x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_7, & x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ d_8, & x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.109)$$

elde edilir. Burada

$$\{B_{-3}^7(x), B_{-2}^7(x), B_{-1}^7(x), \dots, B_{N+2}^7(x), B_{N+3}^7(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı yedinci dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. 7.dereceden B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı mertebeden türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^7(x)$ 7.dereceden B-spline fonksiyonu ardışık sekiz elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-3}^7(x) = \frac{[h - g_m(x)]^7}{h^7}, \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned}
B_{m-2}^7(x) &= \frac{1}{h^7} (120h^7 - 392h^6g_m(x) + 504h^5g_m^2(x) - 280h^4g_m^3(x) \\
&\quad + 84h^2g_m^5(x) - 42hg_m^6(x) + 7g_m^7(x)), \quad (4.111)
\end{aligned}$$

$$B_{m-1}^7(x) = \frac{1}{h^7} (1191h^7 - 1715h^6g_m(x) + 315h^5g_m^2(x) + 665h^4g_m^3(x) - 315h^3g_m^4(x) - 105h^2g_m^5(x) + 105hg_m^6(x) - 21g_m^7(x)), \quad (4.112)$$

$$B_m^7(x) = \frac{1}{h^7} (2416h^7 - 1680h^5g_m^2(x) + 560h^3g_m^4(x) - 140hg_m^6(x) + 35g_m^7(x)), \quad (4.113)$$

$$B_{m+1}^7(x) = \frac{1}{h^7} (1191h^7 + 1715h^6g_m(x) + 315h^5g_m^2(x) - 665h^4g_m^3(x) - 315h^3g_m^4(x) + 105h^2g_m^5(x) + 105hg_m^6(x) - 35g_m^7(x)), \quad (4.114)$$

$$B_{m+2}^7(x) = \frac{1}{h^7} (120h^7 + 392h^6g_m(x) + 504h^5g_m^2(x) + 280h^4g_m^3(x) - 84h^2g_m^5(x) - 42hg_m^6(x) + 21g_m^7(x)), \quad (4.115)$$

$$B_{m+3}^7(x) = \frac{1}{h^7} (h^7 + 7h^6g_m(x) + 21h^5g_m^2(x) + 35h^4g_m^3(x) + 35h^3g_m^4(x) + 21h^2g_m^5(x) + 7hg_m^6(x) - 7g_m^7(x)), \quad (4.116)$$

$$B_{m+4}^7(x) = \frac{g_m(x)^7}{h^7} \quad (4.117)$$

olarak tanımlanan ardışık sekiz septik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan sekiz septik B-spline şekil fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-3}^7(\xi) = \frac{[h - \xi]^7}{h^7}, \quad (4.118)$$

$$B_{m-2}^7(\xi) = \frac{1}{h^7} (120h^7 - 392h^6\xi + 504h^5\xi^2 - 280h^4\xi^3 + 84h^2\xi^5 - 42h\xi^6 + 7\xi^7), \quad (4.119)$$

$$B_{m-1}^7(\xi) = \frac{1}{h^7} (1191h^7 - 1715h^6\xi + 315h^5\xi^2 + 665h^4\xi^3 - 315h^3\xi^4 - 105h^2\xi^5 + 105h\xi^6 - 21\xi^7), \quad (4.120)$$

$$B_m^7(\xi) = \frac{1}{h^7} (2416h^7 - 1680h^5\xi^2 + 560h^3\xi^4 - 140h\xi^6 + 35\xi^7), \quad (4.121)$$

$$B_{m+1}^7(\xi) = \frac{1}{h^7} (1191h^7 + 1715h^6\xi + 315h^5\xi^2 - 665h^4\xi^3 - 315h^3\xi^4 + 105h^2\xi^5 + 105h\xi^6 - 35\xi^7), \quad (4.122)$$

$$B_{m+2}^7(\xi) = \frac{1}{h^7} (120h^7 + 392h^6\xi + 504h^5\xi^2 + 280h^4\xi^3 - 84h^2\xi^5 - 42h\xi^6 + 21\xi^7), \quad (4.123)$$

$$B_{m+3}^7(\xi) = \frac{1}{h^7} (h^7 + 7h^6\xi + 21h^5\xi^2 + 35h^4\xi^3 + 35h^3\xi^4 + 21h^2\xi^5 + 7h\xi^6 - 7\xi^7), \quad (4.124)$$

$$B_{m+4}^7(\xi) = \frac{\xi^7}{h^7} \quad (4.125)$$

olarak bulunur.

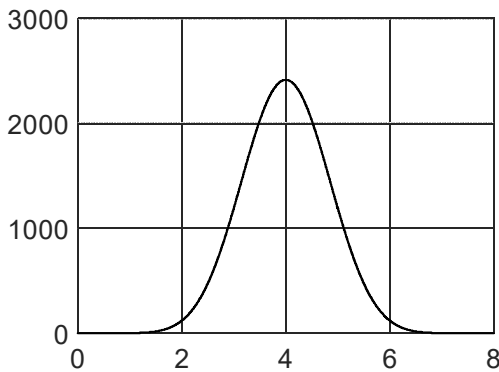
Ayrıca (4.109) ile verilen 7. dereceden B-spline için $i = m - 3, m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2, m + 2, m + 3$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^7(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^7(x)$$

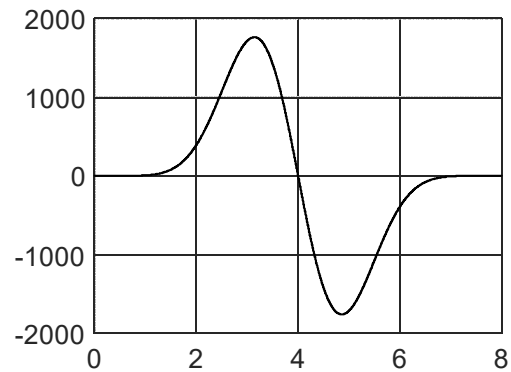
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^7(x)) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^7(x)), n = 1, \dots, 6$$

olduğundan (4.109) 7. dereceden B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı mertebeden türevlerinin $x = x_{m-3}, x = x_{m-2}, x = x_{m-1}, x = x_m, x = x_{m+1}, x = x_{m+2}$ ve $x = x_{m+3}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

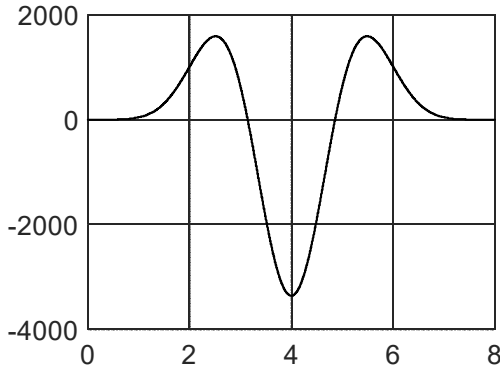
$h = 1$ alınarak $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı $[0, 8]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^7(x)$ septik B-spline fonksiyonuyla ilk altı türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.34, Şekil 4.35, Şekil 4.36, Şekil 4.37, Şekil 4.38, Şekil 4.39 ve Şekil 4.40 da çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^7(x)$ septik B-spline fonksiyonuyla ilk altı türevinin iç noktalarda sürekli olduğu, yedinci ve daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



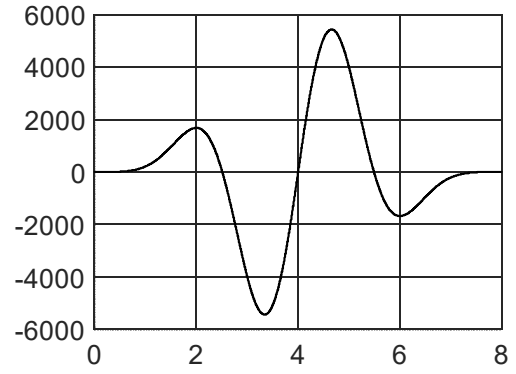
Şekil 4.34. Septik B-spline fonksiyonu



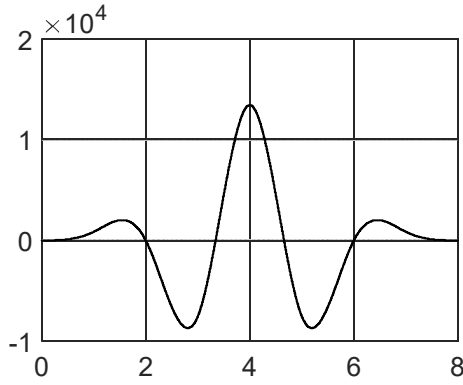
Şekil 4.35. Septik B-spline fonksiyonunun birinci türevi



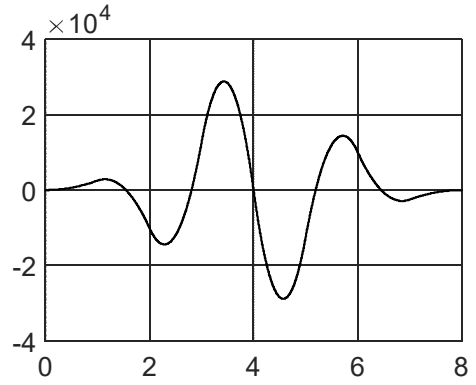
Şekil 4.36. Septik B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



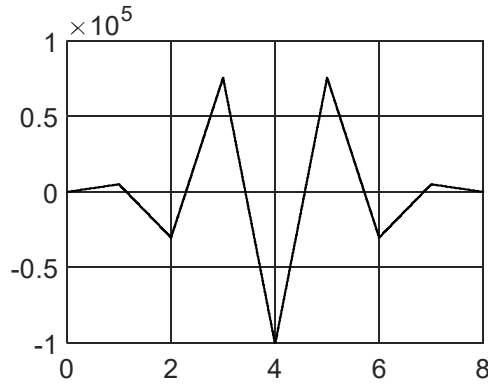
Şekil 4.37. Septik B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi



Şekil 4.38. Septik B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi



Şekil 4.39. Septik B-spline fonksiyonunun beşinci türevi



Şekil 4.40. Septik B-spline fonksiyonunun altıncı türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı septik B-spline kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-3}^{N+3} B_i^7(x) \delta_i \quad (4.126)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^7(x)$ septik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

$$B_{m-3}^7(x), B_{m-2}^7(x), B_{m-1}^7(x), B_m^7(x), B_{m+1}^7(x), B_{m+2}^7(x), B_{m+3}^7(x), B_{m+4}^7(x)$$

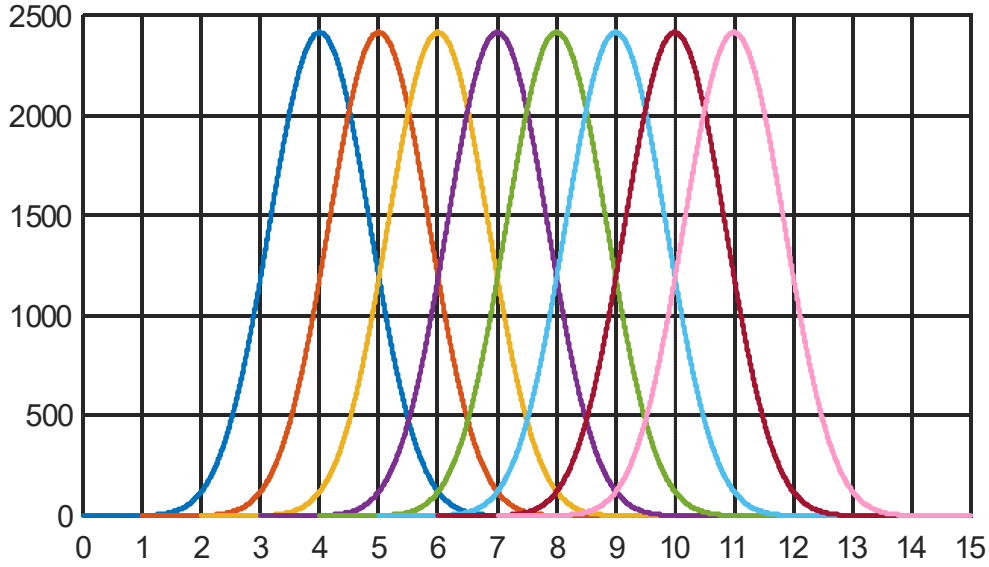
septik B-spline fonksiyonların örtükleri aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-3}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-7}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_{m-2}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-6}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_{m-1}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-5}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_m^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+3}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+7}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+4}^7(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+8}]$ aralığının dışında sıfırdır ve sekiz elemanı örtmektedir.

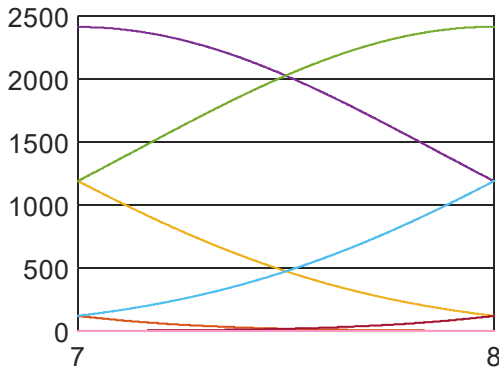
Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-7}, x_{m+8}]$ aralığı $[0, 15]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

$$B_{m-3}^7(x), B_{m-2}^7(x), B_{m-1}^7(x), B_m^7(x), B_{m+1}^7(x), B_{m+2}^7(x), B_{m+3}^7(x), B_{m+4}^7(x)$$

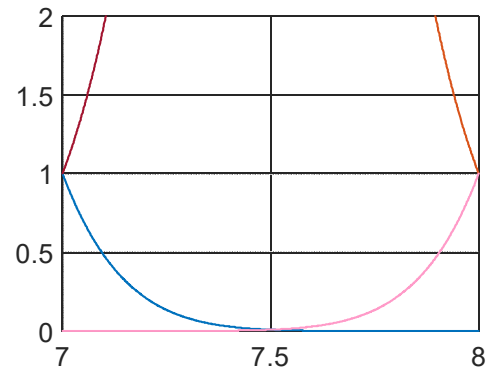
septik B-spline fonksiyonları Şekil 4.41 de çizilmiştir.



Şekil 4.41. Septik B-spline fonksiyonları



Şekil 4.42a



Şekil 4.42b

Şekil 4.42. Septik B-spline şekil fonksiyonları

Şekil 4.41 de görüldüğü gibi septik B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı mertebeden türevleri ardışık sekiz elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında septik B-spline fonksiyonların ve ilk altı türevinin en fazla sekiz parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[7, 8]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen sekiz adet septik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.42a da çizilmiştir. Şekil 4.42a da çizilen şekil fonksiyonları içinde değeri sıfıra yakın olan iki şekil fonksiyonu tam gözükmediği için Şekil 4.42b şekli çizilmiştir. Şekil 4.42b

şekli çizilirken sekil fonksiyonlarının aldığı değer sınırlandırılmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde [7, 8] aralığına toplam sekiz şekil fonksiyonu düştüğü açıkça görülmektedir.

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $B_m^7(x)$ septik B-spline fonksiyonlar $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $B_m^7(x)$ B-spline fonksiyonları $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık sekiz elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $B_{m-3}^7(x)$, $B_{m-2}^7(x)$, $B_{m-1}^7(x)$, $B_m^7(x)$, $B_{m+1}^7(x)$, $B_{m+2}^7(x)$, $B_{m+3}^7(x)$ ve $B_{m+4}^7(x)$ olarak sekiz B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Bu durumda $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.126) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-3}^{m+4} B_i^7(x) \delta_i \quad (4.127)$$

olacaktır. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı mertebeden türevleri için yaklaşımlar ise

$$\begin{aligned} U(x_m) &= U_m = \sum_{i=m-3}^{m+4} B_i^7(x_m) \delta_i \\ \frac{d^n U(x_m)}{dx^n} &= U_m^{(n)} = \sum_{i=m-3}^{m+4} \frac{d^n B_i^7(x_m)}{dx^n} \delta_i, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla (4.109) septik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$, $u'(x_m)$, $u''(x_m)$, $u'''(x_m)$, $u^{(4)}(x)$, $u^{(5)}(x)$ ve $u^{(6)}(x)$ için yaklaşımlar

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} \\ &\quad + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} U_m' &= \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} \\ &\quad + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} U_m'' &= \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} \\ &\quad + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$U_m''' = \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.131)$$

$$U_m^{(4)} = \frac{840}{h^4} (\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \quad (4.132)$$

$$U_m^{(5)} = \frac{2520}{h^5} (-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.133)$$

$$U_m^{(6)} = \frac{5040}{h^6} (\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \quad (4.134)$$

olarak bulunur.

4.8. 8. Dereceden B-spline

S_m^8 sekizinci dereceden B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 8$ alındığında

$$\begin{aligned} S_i^8(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+8} - x_m} S_m^7(x) + \frac{x_{m+9} - x}{x_{m+9} - x_{m+1}} S_{m+1}^7(x) \\ S_i^8(x) &= \frac{g_m(x)}{8h} S_m^7(x) + \frac{-g_{m+9}(x)}{8h} S_{m+1}^7(x) \end{aligned} \quad (4.135)$$

elde edilir. Bir önceki alt bölümde elde edilen (4.108) yedinci dereceden B-spline bağıntısının kullanılmasıyla, (4.135) eşitliğindeki $g_m(x)S_m^7(x)$ ve $-g_{m+9}(x)S_{m+1}^7(x)$ terimleri

$$\begin{aligned} a_1 &= g_m(x)g_m^7(x) = g_m^8(x), \\ a_2 &= g_m(x) [h^7 + 7h^6g_{m+1}(x) + 21h^5g_{m+1}^2(x) + 35h^4g_{m+1}^3(x) + 35h^3g_{m+1}^4(x) \\ &\quad + 21h^2g_{m+1}^5(x) + 7hg_{m+1}^6(x) - 7g_{m+1}^7(x)], \\ a_3 &= g_m(x) [120h^7 + 392h^6g_{m+2}(x) + 504h^5g_{m+2}^2(x) + 280h^4g_{m+2}^3(x) \\ &\quad - 84h^2g_{m+2}^5(x) - 42hg_{m+2}^6(x) + 21g_{m+2}^7(x)], \\ a_4 &= g_m(x) [1191h^7 + 1715h^6g_{m+3}(x) + 315h^5g_{m+3}^2(x) - 665h^4g_{m+3}^3(x) \\ &\quad - 315h^3g_{m+3}^4(x) + 105h^2g_{m+3}^5(x) + 105hg_{m+3}^6(x) - 35g_{m+3}^7(x)], \\ a_5 &= g_m(x) [2416h^7 - 1680h^5g_{m+4}^2(x) + 560h^3g_{m+4}^4(x) - 140hg_{m+4}^6(x) \\ &\quad + 35g_{m+4}^7(x)], \\ a_6 &= g_m(x) [1191h^7 - 1715h^6g_{m+5}(x) + 315h^5g_{m+5}^2(x) + 665h^4g_{m+5}^3(x) \\ &\quad - 315h^3g_{m+5}^4(x) - 105h^2g_{m+5}^5(x) + 105hg_{m+5}^6(x) - 21g_{m+5}^7(x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= g_m(x) [120h^7 - 392h^6g_{m+6}(x) + 504h^5g_{m+6}^2(x) - 280h^4g_{m+6}^3(x) \\
&\quad + 84h^2g_{m+6}^5(x) - 42hg_{m+6}^6(x) + 7g_{m+6}^7(x)], \\
a_8 &= g_m(x) [h - g_{m+7}(x)]^7
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)}{8h} S_m^7(x) = \frac{1}{8h(5040h^7)} \left\{ \begin{array}{l} a_1, \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2, \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3, \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4, \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ a_5, \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ a_6, \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ a_7, \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ a_8, \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ 0, \quad \text{diğer durumlarda} \end{array} \right.$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+9}(x)g_{m+1}^7(x), \\
b_2 &= -g_{m+9}(x) [h^7 + 7h^6g_{m+2}(x) + 21h^5g_{m+2}^2(x) + 35h^4g_{m+2}^3(x) + 35h^3g_{m+2}^4(x) \\
&\quad + 21h^2g_{m+2}^5(x) + 7hg_{m+2}^6(x) - 7g_{m+2}^7(x)], \\
b_3 &= -g_{m+9}(x) [120h^7 + 392h^6g_{m+3}(x) + 504h^5g_{m+3}^2(x) + 280h^4g_{m+3}^3(x) \\
&\quad - 84h^2g_{m+3}^5(x) - 42hg_{m+3}^6(x) + 21g_{m+3}^7(x)], \\
b_4 &= -g_{m+9}(x) [1191h^7 + 1715h^6g_{m+4}(x) + 315h^5g_{m+4}^2(x) - 665h^4g_{m+4}^3(x) \\
&\quad - 315h^3g_{m+4}^4(x) + 105h^2g_{m+4}^5(x) + 105hg_{m+4}^6(x) - 35g_{m+4}^7(x)], \\
b_5 &= -g_{m+9}(x) [2416h^7 - 1680h^5g_{m+5}^2(x) + 560h^3g_{m+5}^4(x) - 140hg_{m+5}^6(x) \\
&\quad + 35g_{m+5}^7(x)], \\
b_6 &= -g_{m+9}(x) [1191h^7 - 1715h^6g_{m+6}(x) + 315h^5g_{m+6}^2(x) + 665h^4g_{m+6}^3(x) \\
&\quad - 315h^3g_{m+6}^4(x) - 105h^2g_{m+6}^5(x) + 105hg_{m+6}^6(x) - 21g_{m+6}^7(x)], \\
b_7 &= -g_{m+9}(x) [120h^7 - 392h^6g_{m+7}(x) + 504h^5g_{m+7}^2(x) - 280h^4g_{m+7}^3(x) \\
&\quad + 84h^2g_{m+7}^5(x) - 42hg_{m+7}^6(x) + 7g_{m+7}^7(x)], \\
b_8 &= -g_{m+9}(x) [h - g_{m+8}(x)]^7
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+9}(x)}{8h} S_{m+1}^7(x) = \frac{1}{8h(5040h^7)} \left\{ \begin{array}{l} b_1, \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2, \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3, \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4, \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ b_5, \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ b_6, \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ b_7, \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ b_8, \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ 0, \quad \text{diğer durumlarda} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.135) 8. dereceden B-spline fonksiyonu

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 = g_m(x)^8, \\ c_2 &= a_2 + b_1 = h^8 + 8h^7 g_{m+1}(x) + 28h^6 g_{m+1}^2(x) + 56h^5 g_{m+1}^3(x) + 70h^4 g_{m+1}^4(x) \\ &\quad + 56h^3 g_{m+1}^5(x) + 28h^2 g_{m+1}^6(x) + 8hg_{m+1}^7(x) - 8g_{m+1}^8(x), \\ c_3 &= a_3 + b_2 = 247h^8 + 952h^7 g_{m+2}(x) + 1540h^6 g_{m+2}^2(x) + 1288h^5 g_{m+2}^3(x) \\ &\quad + 490h^4 g_{m+2}^4(x) - 56h^3 g_{m+2}^5(x) - 140h^2 g_{m+2}^6(x) - 56hg_{m+2}^7(x) + 28g_{m+2}^8(x), \\ c_4 &= a_4 + b_3 = 4293h^8 + 8568h^7 g_{m+3}(x) + 5292h^6 g_{m+3}^2(x) - 504h^5 g_{m+3}^3(x) \\ &\quad - 1890h^4 g_{m+3}^4(x) - 504h^3 g_{m+3}^5(x) + 252h^2 g_{m+3}^6(x) + 168hg_{m+3}^7(x) - 56g_{m+3}^8(x), \\ c_5 &= a_5 + b_4 = 15619h^8 + 9800h^7 g_{m+4}(x) - 6860h^6 g_{m+4}^2(x) - 5320h^5 g_{m+4}^3(x) \\ &\quad + 1330h^4 g_{m+4}^4(x) + 1400h^3 g_{m+4}^5(x) - 140h^2 g_{m+4}^6(x) - 280hg_{m+4}^7(x) + 70g_{m+4}^8(x), \\ c_6 &= a_6 + b_5 = 15619h^8 - 9800h^7 g_{m+5}(x) - 6860h^6 g_{m+5}^2(x) + 5320h^5 g_{m+5}^3(x) \\ &\quad + 1330h^4 g_{m+5}^4(x) - 1400h^3 g_{m+5}^5(x) - 140h^2 g_{m+5}^6(x) + 280hg_{m+5}^7(x) - 56g_{m+5}^8(x), \\ c_7 &= a_7 + b_6 = 4293h^8 - 8568h^7 g_{m+6}(x) + 5292h^6 g_{m+6}(x)^2 + 504h^5 g_{m+6}(x)^3 \\ &\quad - 1890h^4 g_{m+6}(x)^4 + 504h^3 g_{m+6}(x)^5 + 252h^2 g_{m+6}(x)^6 \\ &\quad - 168hg_{m+6}(x)^7 + 28g_{m+6}(x)^8, \\ c_8 &= a_8 + b_7 = 247h^8 - 952h^7 g_{m+7}(x) + 1540h^6 g_{m+7}^2(x) - 1288h^5 g_{m+7}^3(x) + \\ &\quad 490h^4 g_{m+7}^4(x) + 56h^3 g_{m+7}^5(x) - 140h^2 g_{m+7}^6(x) + 56hg_{m+7}^7(x) - 8g_{m+7}^8(x), \\ c_9 &= b_8 = [h - g_{m+8}(x)]^8 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^8(x) = \frac{1}{40320h^8} \begin{cases} c_1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ c_7 & , x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ c_8 & , x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ c_9 & , x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.136)$$

formunda elde edilir. İndis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 40320 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} d_1 &= g_{m-4}(x)^8, \\ d_2 &= h^8 + 8h^7g_{m-3}(x) + 28h^6g_{m-3}^2(x) + 56h^5g_{m-3}^3(x) + 70h^4g_{m-3}^4(x) + 56h^3g_{m-3}^5(x) \\ &\quad + 28h^2g_{m-3}^6(x) + 8hg_{m-3}^7(x) - 8g_{m-3}^8(x), \\ d_3 &= 247h^8 + 952h^7g_{m-2}(x) + 1540h^6g_{m-2}^2(x) + 1288h^5g_{m-2}^3(x) + 490h^4g_{m-2}^4(x) \\ &\quad - 56h^3g_{m-2}^5(x) - 140h^2g_{m-2}^6(x) - 56hg_{m-2}^7(x) + 28g_{m-2}^8(x), \\ d_4 &= 4293h^8 + 8568h^7g_{m-1}(x) + 5292h^6g_{m-1}^2(x) - 504h^5g_{m-1}^3(x) - 1890h^4g_{m-1}^4(x) \\ &\quad - 504h^3g_{m-1}^5(x) + 252h^2g_{m-1}^6(x) + 168hg_{m-1}^7(x) - 56g_{m-1}^8(x), \\ d_5 &= 15619h^8 + 9800h^7g_m(x) - 6860h^6g_m^2(x) - 5320h^5g_m^3(x) + 1330h^4g_m^4(x) \\ &\quad + 1400h^3g_m^5(x) - 140h^2g_m^6(x) - 280hg_m^7(x) + 70g_m^8(x), \\ d_6 &= 15619h^8 - 9800h^7g_{m+1}(x) - 6860h^6g_{m+1}^2(x) + 5320h^5g_{m+1}^3(x) + 1330h^4g_{m+1}^4(x) \\ &\quad - 1400h^3g_{m+1}^5(x) - 140h^2g_{m+1}^6(x) + 280hg_{m+1}^7(x) - 56g_{m+1}^8(x), \\ d_7 &= 4293h^8 - 8568h^7g_{m+2}(x) + 5292h^6g_{m+2}(x)^2 + 504h^5g_{m+2}(x)^3 - 1890h^4g_{m+2}(x)^4 \\ &\quad + 504h^3g_{m+2}(x)^5 + 252h^2g_{m+2}(x)^6 - 168hg_{m+2}(x)^7 + 28g_{m+2}(x)^8, \\ d_8 &= 247h^8 - 952h^7g_{m+3}(x) + 1540h^6g_{m+3}^2(x) - 1288h^5g_{m+3}^3(x) + 490h^4g_{m+3}^4(x) \\ &\quad + 56h^3g_{m+3}^5(x) - 140h^2g_{m+3}^6(x) + 56hg_{m+3}^7(x) - 8g_{m+3}^8(x), \\ d_9 &= (h - g_{m+4}(x))^8 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^8(x) = \frac{1}{h^8} \begin{cases} d_1 & , x_{m-4} \leq x < x_{m-3} \\ d_2 & , x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ d_3 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_4 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_5 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_6 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_7 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ d_8 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ d_9 & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.137)$$

elde edilir. Burada

$$\{B_{-4}^8(x), B_{-3}^8(x), B_{-2}^8(x), \dots, B_{N+2}^8(x), B_{N+3}^8(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı sekizinci dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. 8. dereceden B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci mertebeden türevleri $[x_{m-4}, x_{m+5}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^8(x)$ 8.dereceden B-spline fonksiyonu ardışık dokuz elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$B_{m-4}^8(x) = \frac{[h - g_m(x)]^8}{h^8}, \quad (4.138)$$

$$B_{m-3}^8(x) = \frac{1}{h^8} [247h^8 - 952h^7g_m(x) + 1540h^6g_m^2(x) - 1288h^5g_m^3(x) + 490h^4g_m^4(x) + 56h^3g_m^5(x) - 140h^2g_m^6(x) + 56hg_m^7(x) - 8g_m^8(x)], \quad (4.139)$$

$$B_{m-2}^8(x) = \frac{1}{h^8} [4293h^8 - 8568h^7g_m(x) + 5292h^6g_m^2(x) + 504h^5g_m^3(x) - 1890h^4g_m^4(x) + 504h^3g_m^5(x) + 252h^2g_m^6(x) - 168hg_m^7(x) + 28g_m^8(x)], \quad (4.140)$$

$$B_{m-1}^8(x) = \frac{1}{h^8} [15619h^8 - 9800h^7g_m(x) - 6860h^6g_m^2(x) + 5320h^5g_m^3(x) + 1330h^4g_m^4(x) - 1400h^3g_m^5(x) - 140h^2g_m^6(x) + 280hg_m^7(x) - 56g_m^8(x)], \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned}
B_m^8(x) &= \frac{1}{h^8} [15619h^8 + 9800h^7g_m(x) - 6860h^6g_m^2(x) - 5320h^5g_m^3(x) \\
&\quad + 1330h^4g_m^4(x) + 1400h^3g_m^5(x) - 140h^2g_m^6(x) \\
&\quad - 280hg_m^7(x) + 70g_m^8(x)], \tag{4.142}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m+1}^8(x) &= \frac{1}{h^8} [4293h^8 + 8568h^7g_m(x) + 5292h^6g_m^2(x) - 504h^5g_m^3(x) \\
&\quad - 1890h^4g_m^4(x) - 504h^3g_m^5(x) + 252h^2g_m^6(x) \\
&\quad + 168hg_m^7(x) - 56g_m^8(x)], \tag{4.143}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m+2}^8(x) &= \frac{1}{h^8} [247h^8 + 952h^7g_m(x) + 1540h^6g_m^2(x) + 1288h^5g_m^3(x) \\
&\quad + 490h^4g_m^4(x) - 56h^3g_m^5(x) - 140h^2g_m^6(x) \\
&\quad - 56hg_m^7(x) + 28g_m^8(x)], \tag{4.144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m+3}^8(x) &= \frac{1}{h^8} [h^8 + 8h^7g_m(x) + 28h^6g_m^2(x) + 56h^5g_m^3(x) + 70h^4g_m^4(x) \\
&\quad + 56h^3g_m^5(x) + 28h^2g_m^6(x) + 8hg_m^7(x) - 8g_m^8(x)], \tag{4.145}
\end{aligned}$$

$$B_{m+4}^8(x) = \frac{g_m^8(x)}{h^8} \tag{4.146}$$

olarak tanımlanan ardışık dokuz sekizinci dereceden B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan dokuz sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$B_{m-4}^8(\xi) = \frac{[h - \xi]^8}{h^8}, \tag{4.147}$$

$$\begin{aligned}
B_{m-3}^8(\xi) &= \frac{1}{h^8} [247h^8 - 952h^7\xi + 1540h^6\xi^2 - 1288h^5\xi^3 \\
&\quad + 490h^4\xi^4 + 56h^3\xi^5 - 140h^2\xi^6 + 56h\xi^7 - 8\xi^8], \tag{4.148}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m-2}^8(\xi) &= \frac{1}{h^8} [4293h^8 - 8568h^7\xi + 5292h^6\xi^2 + 504h^5\xi^3 \\
&\quad - 1890h^4\xi^4 + 504h^3\xi^5 + 252h^2\xi^6 - 168h\xi^7 + 28\xi^8], \tag{4.149}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m-1}^8(\xi) &= \frac{1}{h^8} [15619h^8 - 9800h^7\xi - 6860h^6\xi^2 + 5320h^5\xi^3 \\
&\quad + 1330h^4\xi^4 - 1400h^3\xi^5 - 140h^2\xi^6 + 280h\xi^7 - 56\xi^8], \tag{4.150}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m^8(\xi) &= \frac{1}{h^8} [15619h^8 + 9800h^7\xi - 6860h^6\xi^2 - 5320h^5\xi^3 \\
&\quad + 1330h^4\xi^4 + 1400h^3\xi^5 - 140h^2\xi^6 - 280h\xi^7 + 70\xi^8], \tag{4.151}
\end{aligned}$$

$$B_{m+1}^8(\xi) = \frac{1}{h^8} [4293h^8 + 8568h^7\xi + 5292h^6\xi^2 - 504h^5\xi^3 - 1890h^4\xi^4 - 504h^3\xi^5 + 252h^2\xi^6 + 168h\xi^7 - 56\xi^8], \quad (4.152)$$

$$B_{m+2}^8(\xi) = \frac{1}{h^8} [247h^8 + 952h^7\xi + 1540h^6\xi^2 + 1288h^5\xi^3 + 490h^4\xi^4 - 56h^3\xi^5 - 140h^2\xi^6 - 56h\xi^7 + 28\xi^8], \quad (4.153)$$

$$B_{m+3}^8(\xi) = \frac{1}{h^8} [h^8 + 8h^7\xi + 28h^6\xi^2 + 56h^5\xi^3 + 70h^4\xi^4 + 56h^3\xi^5 + 28h^2\xi^6 + 8h\xi^7 - 8\xi^8], \quad (4.154)$$

$$B_{m+4}^8(\xi) = \frac{\xi^8}{h^8} \quad (4.155)$$

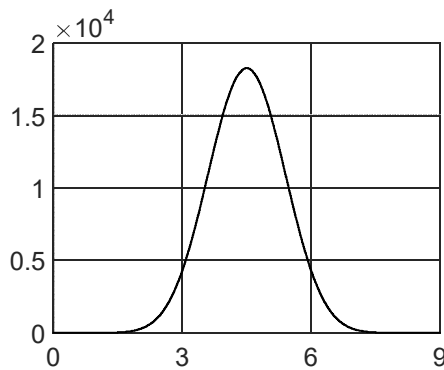
olarak bulunur.

Ayrıca (4.137) ile verilen 8.dereceden B-spline için $i = m - 3, m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4$ olmak üzere

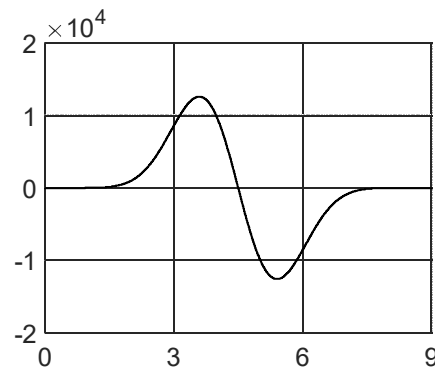
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^8(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^8(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^8(x)) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^8(x)), \quad n = 1, 2, \dots, 7$$

olduğundan (4.137) 8.dereceden B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci mertebeden türevlerinin $x = x_{m-3}, x = x_{m-2}, x = x_{m-1}, x = x_m, x = x_{m+1}, x = x_{m+2}, x = x_{m+3}$ ve $x = x_{m+4}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.



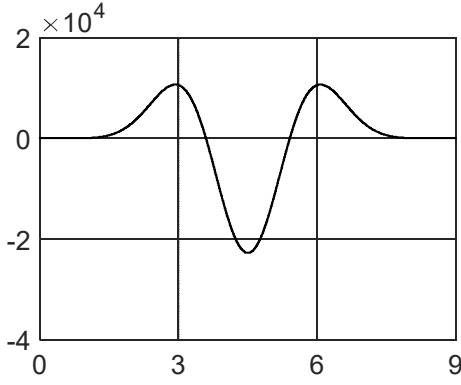
Şekil 4.43. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonu



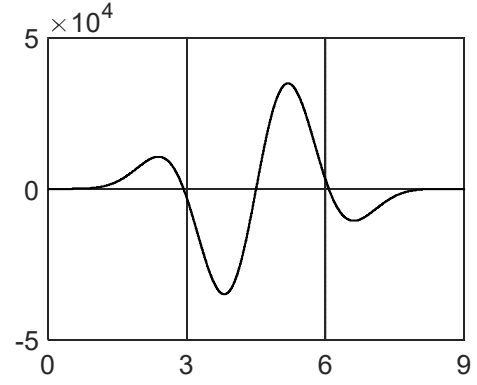
Şekil 4.44. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonun birinci türevi

$h = 1$ alınarak $[x_{m-4}, x_{m+5}]$ aralığı $[0, 9]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonuyla ilk yedi türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.43, Şekil

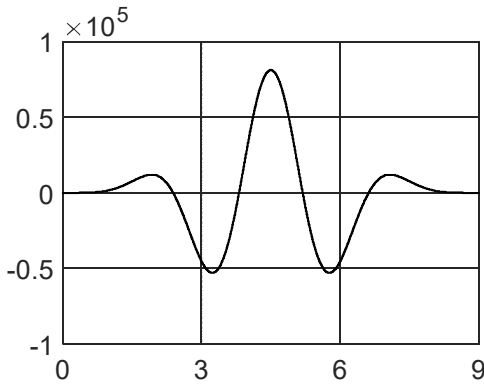
4.44, Şekil 4.45, Şekil 4.46, Şekil 4.47, Şekil 4.48, Şekil 4.49 ve Şekil 4.50 de çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonuyla ilk yedi türevinin iç noktalarda sürekli olduğu, sekizinci ve daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



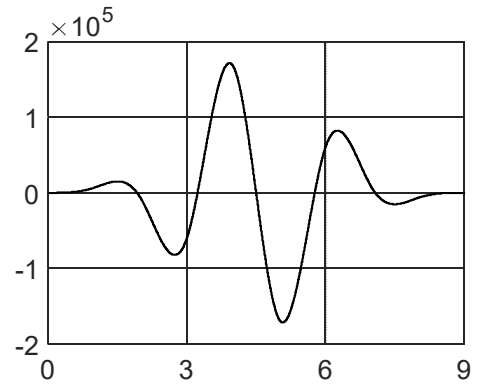
Şekil 4.45. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



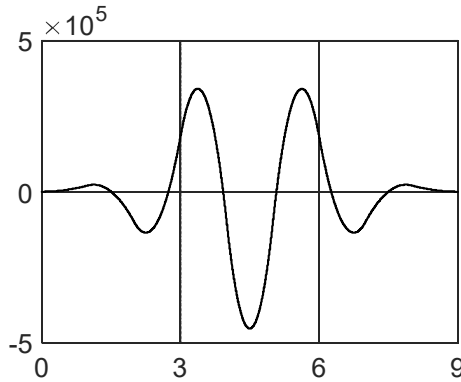
Şekil 4.46. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi



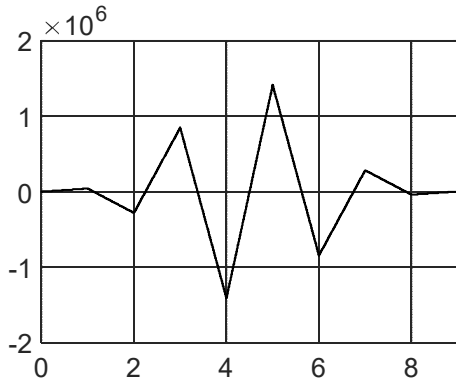
Şekil 4.47. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi



Şekil 4.48. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonunun beşinci türevi



Şekil 4.49. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonunun altıncı türevi



Şekil 4.50. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonunun yedinci türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı sekizinci dereceden B-spline kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-4}^{N+3} B_i^8(x) \delta_i \quad (4.156)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

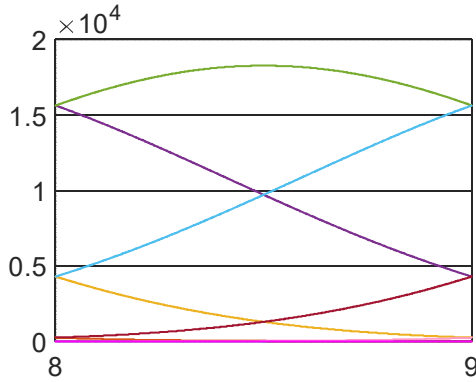
$$B_{m-4}^8(x), B_{m-3}^8(x), B_{m-2}^8(x), B_{m-1}^8(x), B_m^8(x), B_{m+1}^8(x), B_{m+2}^8(x), B_{m+3}^8(x), B_{m+4}^8(x)$$

septik B-spline fonksiyonların örttüğü aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

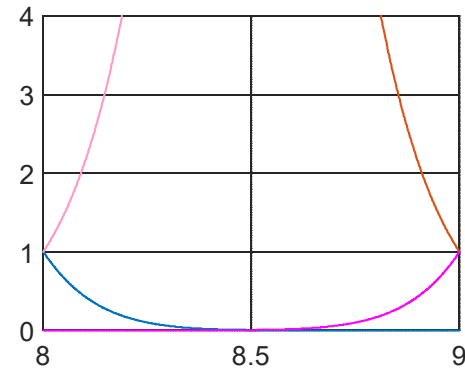
- $B_{m-4}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-8}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m-3}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-7}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m-2}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-6}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m-1}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-5}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_m^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+7}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+3}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+8}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.
- $B_{m+4}^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+9}]$ aralığının dışında sıfırdır ve dokuz elemanı örtmektedir.



Şekil 4.51. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları



Şekil 4.52a



Şekil 4.52b

Şekil 4.52. Sekizinci dereceden B-spline şekil fonksiyonları

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alarak $[x_{m-8}, x_{m+9}]$ aralığı $[0, 17]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

$$B_{m-4}^8(x), B_{m-3}^8(x), B_{m-2}^8(x), B_{m-1}^8(x), B_m^8(x), B_{m+1}^8(x), B_{m+2}^8(x), B_{m+3}^8(x), B_{m+4}^8(x)$$

sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları Şekil 4.51 de çizilmiştir. Şekil 4.51 de görüldüğü gibi sekizinci dereceden B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci mertebeden türevleri ardışık dokuz elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında sekizinci dereceden B-spline fonksiyonların ve ilk yedi türevinin en fazla dokuz parçası

(şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[8, 9]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen dokuz adet sekizinci dereceden B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.52a da çizilmiştir. Şekil 4.52a da çizilen şekil fonksiyonları içinde değeri sıfıra yakın olan dört şekil fonksiyonu tam gözükmeyeceği için Şekil 4.52b şekli çizilmiştir. Şekil 4.52b şekli çizilirken şekil fonksiyonlarının aldığı değer sınırlandırılmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde $[8, 9]$ aralığına toplam dokuz şekil fonksiyonu düştüğü açıkça görülmektedir.

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $B_m^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonlar $[x_{m-4}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $B_m^8(x)$ sekizinci dereceden B-spline fonksiyonları $[x_{m-4}, x_{m+5}]$ aralığında ardışık dokuz elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$B_{m-4}^8(x), B_{m-3}^8(x), B_{m-2}^8(x), B_{m-1}^8(x), B_m^8(x), B_{m+1}^8(x), B_{m+2}^8(x), B_{m+3}^8(x), B_{m+4}^8(x)$$

olarak dokuz B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Bu durumda $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.156) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-4}^{m+4} B_i^8(x) \delta_i \quad (4.157)$$

olacaktır. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü beşinci, altıncı ve yedinci mertebeden türevleri için yaklaşımlar ise

$$\begin{aligned} U(x_m) &= U_m = \sum_{i=m-4}^{m+4} B_i^8(x_m) \delta_i, \\ \frac{d^n U(x_m)}{dx^n} &= U_m^{(n)} = \sum_{i=m-4}^{m+4} \frac{d^n B_i^8(x_m)}{dx^n} \delta_i, n = 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (4.137) sekizinci dereceden B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$, $u'(x_m)$, $u''(x_m)$, $u'''(x_m)$, $u^{(4)}(x)$, $u^{(5)}(x)$, $u^{(6)}(x)$ ve $u^{(7)}(x)$ için yaklaşımlar

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-4} + 247\delta_{m-3} + 4293\delta_{m-2} + 15619\delta_{m-1} \\ &\quad + 15619\delta_m + 4293\delta_{m+1} + 247\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \end{aligned} \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned} U_m' &= \frac{8}{h} (-\delta_{m-4} - 119\delta_{m-3} - 1071\delta_{m-2} - 1225\delta_{m-1} \\ &\quad + 1225\delta_m + 1071\delta_{m+1} + 119\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \end{aligned} \quad (4.159)$$

$$U_m'' = \frac{56}{h^2} (\delta_{m-4} + 55\delta_{m-3} + 189\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} - 245\delta_m + 189\delta_{m+1} + 55\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.160)$$

$$U_m''' = \frac{336}{h^3} (-\delta_{m-4} - 23\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} + 95\delta_{m-1} - 95\delta_m - 9\delta_{m+1} + 23\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.161)$$

$$U_m^{(4)} = \frac{1680}{h^4} (\delta_{m-4} + 7\delta_{m-3} - 27\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} + 19\delta_m - 27\delta_{m+1} + 7\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.162)$$

$$U_m^{(5)} = \frac{6720}{h^5} (-\delta_{m-4} + \delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 25\delta_{m-1} + 25\delta_m - 9\delta_{m+1} - \delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.163)$$

$$U_m^{(6)} = \frac{20160}{h^6} (\delta_{m-4} - 5\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} - 5\delta_m + 9\delta_{m+1} - 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \quad (4.164)$$

$$U_m^{(7)} = \frac{40320}{h^7} (-\delta_{m-4} + 7\delta_{m-3} - 21\delta_{m-2} + 35\delta_{m-1} - 35\delta_m + 21\delta_{m+1} - 7\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \quad (4.165)$$

olarak bulunur.

4.9. 9.Dereceden B-spline

S_m^9 dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 9$ alındığında

$$\begin{aligned} S_i^9(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+9} - x_m} S_m^8(x) + \frac{x_{m+10} - x}{x_{m+10} - x_{m+1}} S_{m+1}^8(x) \\ S_i^9(x) &= \frac{g_m(x)}{9h} S_m^8(x) + \frac{-g_{m+10}(x)}{9h} S_{m+1}^8(x) \end{aligned} \quad (4.166)$$

elde edilir. (4.136) sekizinci dereceden B-spline bağıntısının kullanılmasıyla (4.166) eşitliğindeki $g_m(x)S_m^8(x)$ ve $-g_{m+10}(x)S_{m+1}^8(x)$ terimleri

$$\begin{aligned} a_1 &= g_m(x)g_m^8(x), \\ a_2 &= g_m(x) [h^8 + 8h^7g_{m+1}(x) + 28h^6g_{m+1}^2(x) + 56h^5g_{m+1}^3(x) \\ &\quad + 70h^4g_{m+1}^4(x) + 56h^3g_{m+1}^5(x) + 28h^2g_{m+1}^6(x) + 8hg_{m+1}^7(x) - 8g_{m+1}^8(x)], \\ a_3 &= g_m(x) [247h^8 + 952h^7g_{m+2}(x) + 1540h^6g_{m+2}^2(x) \\ &\quad + 1288h^5g_{m+2}^3(x) + 490h^4g_{m+2}^4(x) - 56h^3g_{m+2}^5(x) \\ &\quad - 140h^2g_{m+2}^6(x) - 56hg_{m+2}^7(x) + 28g_{m+2}^8(x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= g_m(x) [4293h^8 + 8568h^7 g_{m+3}(x) + 5292h^6 g_{m+3}^2(x) \\
&\quad - 504h^5 g_{m+3}^3(x) - 1890h^4 g_{m+3}^4(x) - 504h^3 g_{m+3}^5(x) \\
&\quad + 252h^2 g_{m+3}^6(x) + 168h g_{m+3}^7(x) - 56g_{m+3}^8(x)], \\
a_5 &= g_m(x) [15619h^8 + 9800h^7 g_{m+4}(x) - 6860h^6 g_{m+4}^2(x) \\
&\quad - 5320h^5 g_{m+4}^3(x) + 1330h^4 g_{m+4}^4(x) + 1400h^3 g_{m+4}^5(x) \\
&\quad - 140h^2 g_{m+4}^6(x) - 280h g_{m+4}^7(x) + 70g_{m+4}^8(x)], \\
a_6 &= g_m(x) [15619h^8 - 9800h^7 g_{m+5}(x) - 6860h^6 g_{m+5}^2(x) \\
&\quad + 5320h^5 g_{m+5}^3(x) + 1330h^4 g_{m+5}^4(x) - 1400h^3 g_{m+5}^5(x) \\
&\quad + 140h^2 g_{m+5}^6(x) + 280h g_{m+5}^7(x) - 56g_{m+5}^8(x)], \\
a_7 &= g_m(x) [4293h^8 - 8568h^7 g_{m+6}(x) + 5292h^6 g_{m+6}^2(x) \\
&\quad - 504h^5 g_{m+6}^3(x) - 1890h^4 g_{m+6}^4(x) + 504h^3 g_{m+6}^5(x) \\
&\quad + 252h^2 g_{m+6}^6(x) - 168h g_{m+6}^7(x) + 28g_{m+6}^8(x)], \\
a_8 &= g_m(x) [247h^8 - 952h^7 g_{m+7}(x) + 1540h^6 g_{m+7}^2(x) \\
&\quad - 1288h^5 g_{m+7}^3(x) + 490h^4 g_{m+7}^4(x) + 56h^3 g_{m+7}^5(x) \\
&\quad - 140h^2 g_{m+7}^6(x) + 56h g_{m+7}^7(x) - 8g_{m+7}^8(x)], \\
a_9 &= g_m(x) [h - g_{m+8}(x)]^8
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)}{9h} S_m^8(x) = \frac{1}{9h40320h^8} \left\{ \begin{array}{l} a_1, \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2, \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3, \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4, \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ a_5, \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ a_6, \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ a_7, \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ a_8, \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ a_9, \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ 0, \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+10}(x)g_{m+1}(x)^8, \\
b_2 &= -g_{m+10}(x) \left[h^8 + 8h^7g_{m+2}(x) + 28h^6g_{m+2}^2(x) + 56h^5g_{m+2}^3(x) \right. \\
&\quad \left. + 70h^4g_{m+2}^4(x) + 56h^3g_{m+2}^5(x) + 28h^2g_{m+2}^6(x) + 8hg_{m+2}^7(x) - 8g_{m+2}^8(x) \right], \\
b_3 &= -g_{m+10}(x) \left[247h^8 + 952h^7g_{m+3}(x) + 1540h^6g_{m+3}^2(x) \right. \\
&\quad \left. + 1288h^5g_{m+3}^3(x) + 490h^4g_{m+3}^4(x) - 56h^3g_{m+3}^5(x) - 140h^2g_{m+3}^6(x) \right. \\
&\quad \left. - 56hg_{m+3}^7(x) + 28g_{m+3}^8(x) \right], \\
b_4 &= -g_{m+10}(x) \left[4293h^8 + 8568h^7g_{m+4}(x) + 5292h^6g_{m+4}^2(x) - \right. \\
&\quad \left. 504h^5g_{m+4}^3(x) - 1890h^4g_{m+4}^4(x) - 504h^3g_{m+4}^5(x) + 252h^2g_{m+4}^6(x) \right. \\
&\quad \left. + 168hg_{m+4}^7(x) - 56g_{m+4}^8(x) \right], \\
b_5 &= -g_{m+10}(x) \left[15619h^8 + 9800h^7g_{m+5}(x) - 6860h^6g_{m+5}^2(x) \right. \\
&\quad \left. - 5320h^5g_{m+5}^3(x) + 1330h^4g_{m+5}^4(x) + 1400h^3g_{m+5}^5(x) \right. \\
&\quad \left. - 140h^2g_{m+5}^6(x) - 280hg_{m+5}^7(x) + 70g_{m+5}^8(x) \right], \\
b_6 &= -g_{m+9}(x) \left[15619h^8 - 9800h^7g_{m+6}(x) - 6860h^6g_{m+6}^2(x) + \right. \\
&\quad \left. 5320h^5g_{m+6}^3(x) + 1330h^4g_{m+6}^4(x) - 1400h^3g_{m+6}^5(x) \right. \\
&\quad \left. + 140h^2g_{m+6}^6(x) + 280hg_{m+6}^7(x) - 56g_{m+6}^8(x) \right], \\
b_7 &= -g_{m+10}(x) \left[4293h^8 - 8568h^7g_{m+7}(x) + 5292h^6g_{m+7}^2(x) + \right. \\
&\quad \left. 504h^5g_{m+7}^3(x) - 1890h^4g_{m+7}^4(x) + 504h^3g_{m+7}^5(x) + \right. \\
&\quad \left. 252h^2g_{m+7}^6(x) - 168hg_{m+7}^7(x) + 28g_{m+7}^8(x) \right], \\
b_8 &= -g_{m+10}(x) \left[247h^8 - 952h^7g_{m+8}(x) + 1540h^6g_{m+8}^2(x) \right. \\
&\quad \left. - 1288h^5g_{m+8}^3(x) + 490h^4g_{m+8}^4(x) + 56h^3g_{m+8}^5(x) \right. \\
&\quad \left. - 140h^2g_{m+8}^6(x) + 56hg_{m+8}^7(x) - 8g_{m+8}^8(x) \right], \\
b_9 &= -g_{m+10}(x) [h - g_{m+9}(x)]^8
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+10}(x)}{9h} S_{m+1}^8(x) = \frac{1}{9h40320h^8} \left\{ \begin{array}{l} b_1, \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2, \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3, \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4, \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ b_5, \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ b_6, \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ b_7, \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ b_8, \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ b_9, \quad x_{m+9} \leq x < x_{m+10} \\ 0, \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.166) 9. dereceden B-spline fonksiyonu

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 = g_m^9(x), \\ c_2 &= a_2 + b_1 = h^9 + 9h^8 g_{m+1}(x) + 36h^7 g_{m+1}^2(x) + 84h^6 g_{m+1}^3(x) \\ &\quad + 126h^5 g_{m+1}^4(x) + 126h^4 g_{m+1}^5(x) + 84h^3 g_{m+1}^6(x) \\ &\quad + 36h^2 g_{m+1}^7(x) + 9h g_{m+1}^8(x) - 9g_{m+1}^9(x), \\ c_3 &= a_3 + b_2 = 502h^9 + 2214h^8 g_{m+2}(x) + 4248h^7 g_{m+2}^2(x) \\ &\quad + 4536h^6 g_{m+2}^3(x) + 2772h^5 g_{m+2}^4(x) + 756h^4 g_{m+2}^5(x) \\ &\quad - 168h^3 g_{m+2}^6(x) - 216h^2 g_{m+2}^7(x) - 72h g_{m+2}^8(x) + 36g_{m+2}^9(x), \\ c_4 &= a_4 + b_3 = 14608h^9 + 36414h^8 g_{m+3}(x) + 34272h^7 g_{m+3}^2(x) \\ &\quad + 11256h^6 g_{m+3}^3(x) - 4032h^5 g_{m+3}^4(x) - 4284h^4 g_{m+3}^5(x) \\ &\quad - 672h^3 g_{m+3}^6(x) + 504h^2 g_{m+3}^7(x) + 252h g_{m+3}^8(x) - 84g_{m+3}^9(x), \\ c_5 &= a_5 + b_4 = 88234h^9 + 101934h^8 g_{m+4}(x) + 5544h^7 g_{m+4}^2(x) \\ &\quad - 36456h^6 g_{m+4}^3(x) - 10836h^5 g_{m+4}^4(x) + 5796h^4 g_{m+4}^5(x) \\ &\quad + 2856h^3 g_{m+4}^6(x) - 504h^2 g_{m+4}^7(x) - 504h g_{m+4}^8(x) + 126g_{m+4}^9(x), \\ c_6 &= a_6 + b_5 = 156190h^9 - 88200h^7 g_{m+5}^2(x) + 23940h^5 g_{m+5}^4(x) \\ &\quad - 4200h^3 g_{m+5}^6(x) + 630h g_{m+5}^8(x) - 126g_{m+5}^9(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= a_7 + b_6 = 88234h^9 - 101934h^8 g_{m+6}(x) + 5544h^7 g_{m+6}^2(x) \\
&\quad + 36456h^6 g_{m+6}^3(x) - 10836h^5 g_{m+6}^4(x) - 5796h^4 g_{m+6}^5(x) \\
&\quad + 2856h^3 g_{m+6}^6(x) + 504h^2 g_{m+6}^7(x) - 504h g_{m+6}^8(x) + 84g_{m+6}^9(x), \\
c_8 &= a_8 + b_7 = 14608h^9 - 36414h^8 g_{m+7}(x) + 34272h^7 g_{m+7}^2(x) \\
&\quad - 11256h^6 g_{m+7}^3(x) - 4032h^5 g_{m+7}^4(x) + 4284h^4 g_{m+7}^5(x) \\
&\quad - 672h^3 g_{m+7}^6(x) - 504h^2 g_{m+7}^7(x) + 252h g_{m+7}^8(x) - 36g_{m+7}^9(x), \\
c_9 &= a_9 + b_8 = 502h^9 - 2214h^8 g_{m+8}(x) + 4248h^7 g_{m+8}^2(x) \\
&\quad - 4536h^6 g_{m+8}^3(x) + 2772h^5 g_{m+8}^4(x) - 756h^4 g_{m+8}^5(x) \\
&\quad - 168h^3 g_{m+8}^6(x) + 216h^2 g_{m+8}^7(x) - 72h g_{m+8}^8(x) + 9g_{m+8}^9(x), \\
c_{10} &= b_9 = [h - g_{m+9}(x)]^9
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^9(x) = \frac{1}{362880h^9} \left\{ \begin{array}{l} c_1 \quad , \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 \quad , \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 \quad , \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 \quad , \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 \quad , \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 \quad , \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ c_7 \quad , \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ c_8 \quad , \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ c_9 \quad , \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ c_{10} \quad , \quad x_{m+9} \leq x < x_{m+10} \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \quad (4.167)$$

şeklinde bulunur. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 362880 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
d_1 &= g_{m-5}^9(x), \\
d_2 &= h^9 + 9h^8 g_{m-4}(x) + 36h^7 g_{m-4}^2(x) + 84h^6 g_{m-4}^3(x) \\
&\quad + 126h^5 g_{m-4}^4(x) + 126h^4 g_{m-4}^5(x) + 84h^3 g_{m-4}^6(x) \\
&\quad + 36h^2 g_{m-4}^7(x) + 9h g_{m-4}^8(x) - 9g_{m-4}^9(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= 502h^9 + 2214h^8g_{m-3}(x) + 4248h^7g_{m-3}^2(x) + 4536h^6g_{m-3}^3(x) + 2772h^5g_{m-3}^4(x) \\
&\quad + 756h^4g_{m-3}^5(x) - 168h^3g_{m-3}^6(x) - 216h^2g_{m-3}^7(x) - 72hg_{m-3}^8(x) + 36g_{m-3}^9(x), \\
d_4 &= 14608h^9 + 36414h^8g_{m-2}(x) + 34272h^7g_{m-2}^2(x) + 11256h^6g_{m-2}^3(x) - 4032h^5g_{m-2}^4(x) \\
&\quad - 4284h^4g_{m-2}^5(x) - 672h^3g_{m-2}^6(x) + 504h^2g_{m-2}^7(x) + 252hg_{m-2}^8(x) - 84g_{m-2}^9(x), \\
d_5 &= 88234h^9 + 101934h^8g_{m-1}(x) + 5544h^7g_{m-1}^2(x) \\
&\quad - 36456h^6g_{m-1}^3(x) - 10836h^5g_{m-1}^4(x) + 5796h^4g_{m-1}^5(x) \\
&\quad + 2856h^3g_{m-1}^6(x) - 504h^2g_{m-1}^7(x) - 504hg_{m-1}^8(x) + 126g_{m-1}^9(x), \\
d_6 &= 156190h^9 - 88200h^7g_m^2(x) + 23940h^5g_m^4(x) - 4200h^3g_m^6(x) + 630hg_m^8(x) - 126g_m^9(x), \\
d_7 &= 88234h^9 - 101934h^8g_{m+1}(x) + 5544h^7g_{m+1}^2(x) \\
&\quad + 36456h^6g_{m+1}^3(x) - 10836h^5g_{m+1}^4(x) - 5796h^4g_{m+1}^5(x) \\
&\quad + 2856h^3g_{m+1}^6(x) + 504h^2g_{m+1}^7(x) - 504hg_{m+1}^8(x) + 84g_{m+1}^9(x), \\
d_8 &= 14608h^9 - 36414h^8g_{m+2}(x) + 34272h^7g_{m+2}^2(x) \\
&\quad - 11256h^6g_{m+2}^3(x) - 4032h^5g_{m+2}^4(x) + 4284h^4g_{m+2}^5(x) \\
&\quad - 672h^3g_{m+2}^6(x) - 504h^2g_{m+2}^7(x) + 252hg_{m+2}^8(x) - 36g_{m+2}^9(x), \\
d_9 &= 502h^9 - 2214h^8g_{m+3}(x) + 4248h^7g_{m+3}^2(x) - 4536h^6g_{m+3}^3(x) + 2772h^5g_{m+3}^4(x) \\
&\quad - 756h^4g_{m+3}^5(x) - 168h^3g_{m+3}^6(x) + 216h^2g_{m+3}^7(x) - 72hg_{m+3}^8(x) + 9g_{m+3}^9(x), \\
d_{10} &= [h - g_{m+4}(x)]^9
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^9(x) = \frac{1}{h^9} \left\{ \begin{array}{l} d_1 \quad , \quad x_{m-5} \leq x < x_{m-4} \\ d_2 \quad , \quad x_{m-4} \leq x < x_{m-3} \\ d_3 \quad , \quad x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ d_4 \quad , \quad x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_5 \quad , \quad x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_6 \quad , \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_7 \quad , \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_8 \quad , \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ d_9 \quad , \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ d_{10} \quad , \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \quad (4.168)$$

elde edilir. Burada

$$\{B_{-4}^9(x), B_{-3}^9(x), B_{-2}^9(x), \dots, B_{N+2}^9(x), B_{N+3}^9(x), B_{N+4}^9(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı dokuzuncu dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. 9. dereceden B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci mertebeden türevleri $[x_{m-5}, x_{m+5}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^9(x)$ 9.dereceden B-spline fonksiyonu ardışık on elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h^9 B_{m-4}^9(x) = [h - g_m(x)]^9, \quad (4.169)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_{m-3}^9(x) &= 502h^9 - 2214h^8 g_m(x) + 4248h^7 g_m^2(x) - 4536h^6 g_m^3(x) \\ &\quad + 2772h^5 g_m^4(x) - 756h^4 g_m^5(x) - 168h^3 g_m^6(x) \\ &\quad + 216h^2 g_m^7(x) - 72h g_m^8(x) + 9g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_{m-2}^9(x) &= 14608h^9 - 36414h^8 g_m(x) + 34272h^7 g_m^2(x) \\ &\quad - 11256h^6 g_m^3(x) - 4032h^5 g_m^4(x) + 4284h^4 g_m^5(x) \\ &\quad - 672h^3 g_m^6(x) - 504h^2 g_m^7(x) + 252h g_m^8(x) - 36g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_{m-1}^9(x) &= 88234h^9 - 101934h^8 g_m(x) + 5544h^7 g_m^2(x) \\ &\quad + 36456h^6 g_m^3(x) - 10836h^5 g_m^4(x) - 5796h^4 g_m^5(x) \\ &\quad + 2856h^3 g_m^6(x) + 504h^2 g_m^7(x) - 504h g_m^8(x) + 84g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.172)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_m^9(x) &= 156190h^9 - 88200h^7 g_m^2(x) + 23940h^5 g_m^4(x) \\ &\quad - 4200h^3 g_m^6(x) + 630h g_m^8(x) - 126g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.173)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_{m+1}^9(x) &= 88234h^9 + 101934h^8 g_m(x) + 5544h^7 g_m^2(x) - 36456h^6 g_m^3(x) \\ &\quad - 10836h^5 g_m^4(x) + 5796h^4 g_m^5(x) + 2856h^3 g_m^6(x) \\ &\quad - 504h^2 g_m^7(x) - 504h g_m^8(x) + 126g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_{m+2}^9(x) &= 14608h^9 + 36414h^8 g_m(x) + 34272h^7 g_m^2(x) \\ &\quad + 11256h^6 g_m^3(x) - 4032h^5 g_m^4(x) - 4284h^4 g_m^5(x) \\ &\quad - 672h^3 g_m^6(x) + 504h^2 g_m^7(x) + 252h g_m^8(x) - 84g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.175)$$

$$\begin{aligned} h^9 B_{m+3}^9(x) &= 502h^9 + 2214h^8 g_m(x) + 4248h^7 g_m^2(x) + 4536h^6 g_m^3(x) \\ &\quad + 2772h^5 g_m^4(x) + 756h^4 g_m^5(x) - 168h^3 g_m^6(x) \\ &\quad - 216h^2 g_m^7(x) - 72h g_m^8(x) + 36g_m^9(x), \end{aligned} \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m+4}^9(x) &= h^9 + 9h^8 g_m(x) + 36h^7 g_m^2(x) + 84h^6 g_m^3(x) + 126h^5 g_m^4(x) \\
&\quad + 126h^4 g_m^5(x) + 84h^3 g_m^6(x) + 36h^2 g_m^7(x) \\
&\quad + 9h g_m^8(x) - 9g_m^9(x),
\end{aligned} \tag{4.177}$$

$$h^9 B_{m+5}^9(x) = g_m^9(x) \tag{4.178}$$

olarak tanımlanan ardışık on adet dokuzuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan on adet dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$h^9 B_{m-4}^9(x) = [h - \xi]^9, \tag{4.179}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m-3}^9(x) &= 502h^9 - 2214h^8 \xi + 4248h^7 \xi^2 - 4536h^6 \xi^3 \\
&\quad + 2772h^5 \xi^4 - 756h^4 \xi^5 - 168h^3 \xi^6 \\
&\quad + 216h^2 \xi^7 - 72h \xi^8 + 9\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.180}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m-2}^9(x) &= 14608h^9 - 36414h^8 \xi + 34272h^7 \xi^2 \\
&\quad - 11256h^6 \xi^3 - 4032h^5 \xi^4 + 4284h^4 \xi^5 \\
&\quad - 672h^3 \xi^6 - 504h^2 \xi^7 + 252h \xi^8 - 36\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.181}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m-1}^9(x) &= 88234h^9 - 101934h^8 \xi + 5544h^7 \xi^2 \\
&\quad + 36456h^6 \xi^3 - 10836h^5 \xi^4 - 5796h^4 \xi^5 \\
&\quad + 2856h^3 \xi^6 + 504h^2 \xi^7 - 504h \xi^8 + 84\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.182}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_m^9(x) &= 156190h^9 - 88200h^7 \xi^2 + 23940h^5 \xi^4 \\
&\quad - 4200h^3 \xi^6 + 630h \xi^8 - 126\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.183}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m+1}^9(x) &= 88234h^9 + 101934h^8 \xi + 5544h^7 \xi^2 - 36456h^6 \xi^3 \\
&\quad - 10836h^5 \xi^4 + 5796h^4 \xi^5 + 2856h^3 \xi^6 - 504h^2 \xi^7 \\
&\quad - 504h \xi^8 + 126\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.184}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m+2}^9(x) &= 14608h^9 + 36414h^8 \xi + 34272h^7 \xi^2 + 11256h^6 \xi^3 \\
&\quad - 4032h^5 \xi^4 - 4284h^4 \xi^5 - 672h^3 \xi^6 + 504h^2 \xi^7 \\
&\quad + 252h \xi^8 - 84\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.185}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m+3}^9(x) &= 502h^9 + 2214h^8\xi + 4248h^7\xi^2 + 4536h^6\xi^3 \\
&\quad + 2772h^5\xi^4 + 756h^4\xi^5 - 168h^3\xi^6 - 216h^2\xi^7 \\
&\quad - 72h\xi^8 + 36\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.186}$$

$$\begin{aligned}
h^9 B_{m+4}^9(x) &= h^9 + 9h^8\xi + 36h^7\xi^2 + 84h^6\xi^3 + 126h^5\xi^4 \\
&\quad + 126h^4\xi^5 + 84h^3\xi^6 + 36h^2\xi^7 + 9h\xi^8 - 9\xi^9,
\end{aligned} \tag{4.187}$$

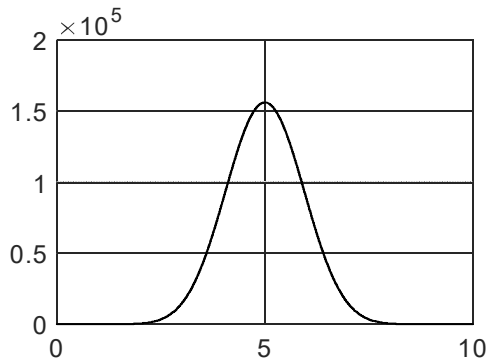
$$h^9 B_{m+5}^9(x) = \xi^9 \tag{4.188}$$

olarak bulunur.

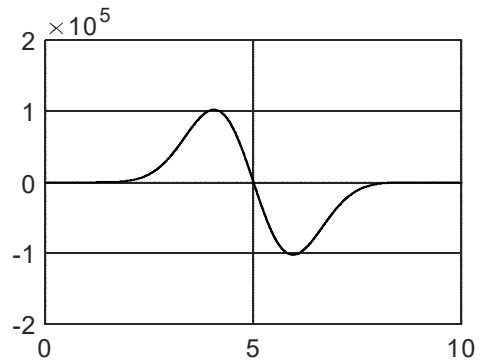
Ayrıca (4.168) ile verilen 9. dereceden B-spline için $i = m - 4, m - 3, m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2, m + 2, m + 3, m + 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^9(x) &= \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^9(x) \\
\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^9(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^9(x)), \quad n = 1, 2, 3, \dots, 8
\end{aligned}$$

olduğundan (4.168) 9. dereceden B-spline fonksiyonunun ve birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci mertebeden türevlerinin $x = x_{m-4}, x = x_{m-3}, x = x_{m-2}, x = x_{m-1}, x = x_m, x = x_{m+1}, x = x_{m+2}, x = x_{m+3}$ ve $x = x_{m+4}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.



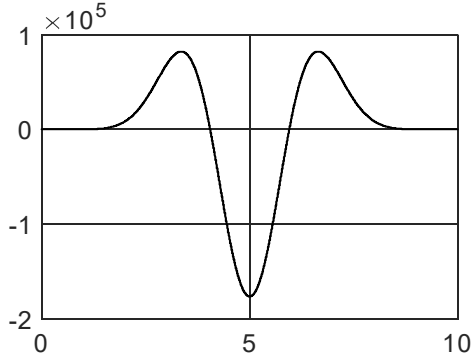
Şekil 4.53. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonu



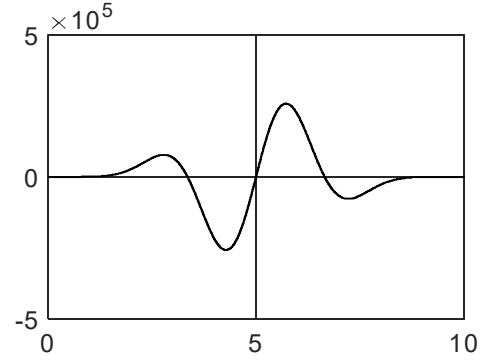
Şekil 4.54. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun birinci türevi

$h = 1$ alınarak $[x_{m-5}, x_{m+5}]$ aralığı $[0, 10]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonuyla ilk sekiz türevinin şekilleri sırasıyla

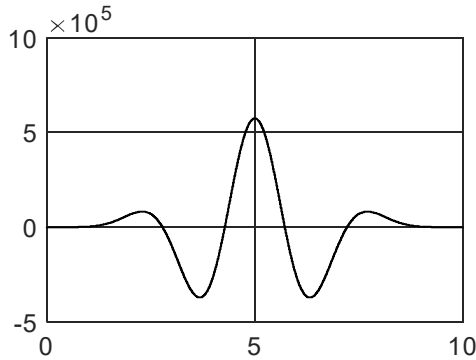
Şekil 4.53, Şekil 4.54, Şekil 4.55, Şekil 4.56, Şekil 4.57, Şekil 4.58, Şekil 4.59, Şekil 4.60.ve Şekil 4.61 de çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonuyla ilk sekiz türevinin iç noktalarda sürekli olduğu, dokuzuncu ve daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



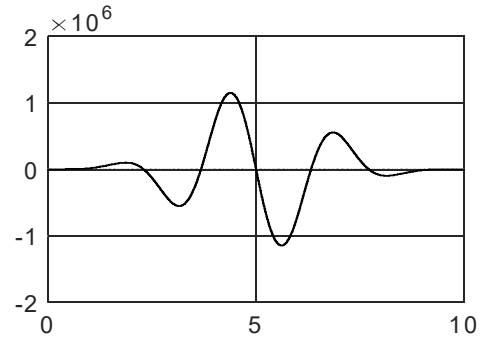
Şekil 4.55. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



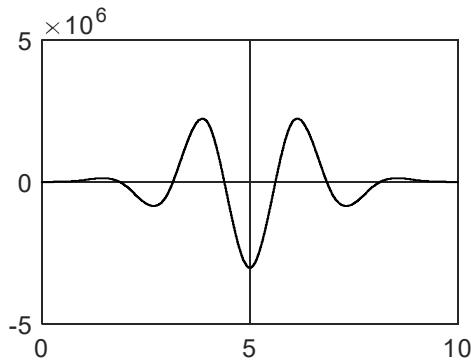
Şekil 4.56. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi



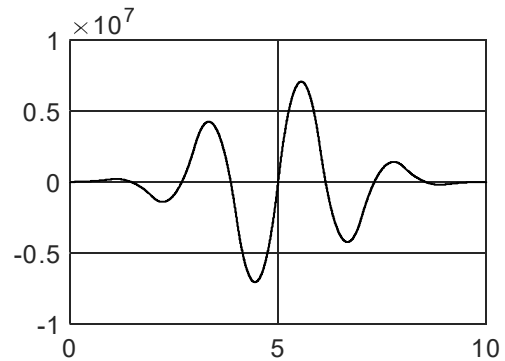
Şekil 4.57. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi



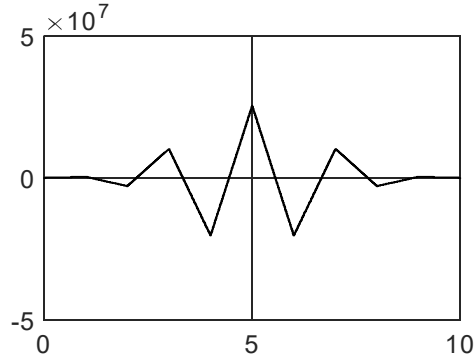
Şekil 4.58. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun beşinci türevi



Şekil 4.59. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun altıncı türevi



Şekil 4.60. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonunun yedinci türevi



Şekil 4.61. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonun sekizinci türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı dokuzuncu dereceden B-spline kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-4}^{N+4} B_i^9(x) \delta_i \quad (4.189)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonlarını gösterir.

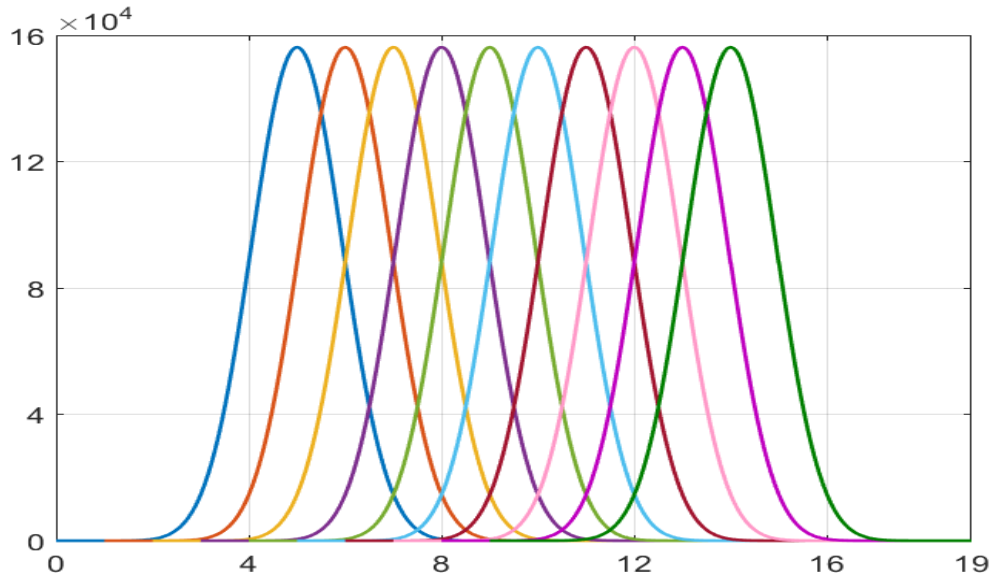
$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

$$B_{m-4}^9(x), B_{m-3}^9(x), \dots, B_{m+4}^9(x), B_{m+5}^9(x)$$

dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonların örttikleri aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-4}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-9}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m-3}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-8}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m-2}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-7}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m-1}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-6}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_m^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-5}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.

- $B_{m+1}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+7}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m+3}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+8}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m+4}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+9}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.
- $B_{m+5}^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+10}]$ aralığının dışında sıfırdır ve on elemanı örtmektedir.

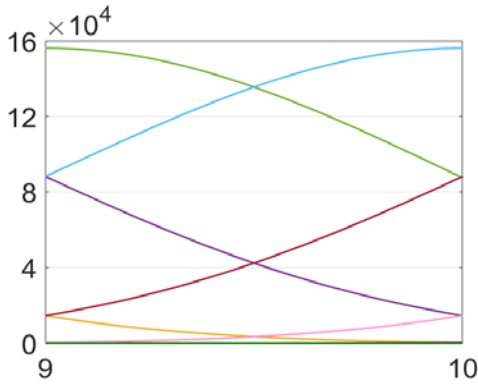


Şekil 4.62. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları

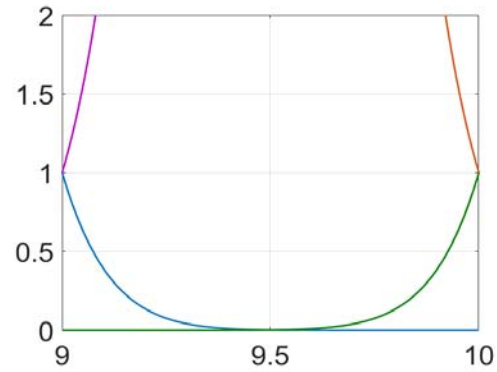
Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-9}, x_{m+10}]$ aralığı $[0, 19]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

$$B_{m-4}^9(x), B_{m-3}^9(x), \dots, B_{m+4}^9(x), B_{m+5}^9(x)$$

dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları Şekil 4.62 de çizilmiştir. Şekil 4.62 de görüldüğü gibi dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci mertebeden türevleri ardışık on elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonların ve ilk sekiz türevinin en fazla on parçası (şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[9, 10]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen on adet dokuzuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.63a da çizilmiştir. Şekil 4.63a da çizilen şekil fonksiyonları içinde değeri sıfıra yakın olan dört şekil fonksiyonu tam gözükmeyeceği için Şekil 4.63b şekli çizilmiştir. Şekil 4.63b şekli çizilirken şekil fonksiyonlarının aldığı değer sınırlandırılmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde $[9, 10]$ aralığına toplam on şekil fonksiyonu düştüğü açıkça görülmektedir.



Şekil 4.63a



Şekil 4.63b

Şekil 4.63. Dokuzuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonları

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $B_m^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonlar $[x_{m-5}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $B_m^9(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonları $[x_{m-5}, x_{m+5}]$ aralığında ardışık on elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$B_{m-4}^9(x), B_{m-3}^9(x), B_{m-2}^9(x), \dots, B_{m+3}^9(x), B_{m+4}^9(x), B_{m+5}^9(x)$$

olarak on B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Bu durumda $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.189) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-4}^{m+5} B_i^9(x) \delta_i \quad (4.190)$$

olacaktır. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci mertebeden türevleri için yaklaşımlar ise

$$U(x_m) = U_m = \sum_{i=m-4}^{m+5} B_i^9(x) \delta_i,$$

$$\frac{d^n U(x_m)}{dx^n} = U'_m = \sum_{i=m-4}^{m+5} \frac{d^n B_i^9(x_m)}{dx^n} \delta_i, n = 1, \dots, 8$$

olarak yazılabilir. (4.168) dokuzuncu dereceden B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$, $u'(x_m)$, $u''(x_m)$, $u'''(x_m)$, $u^{(4)}(x)$, $u^{(5)}(x)$, $u^{(6)}(x)$, $u^{(7)}(x)$ ve $u^{(8)}(x)$ için yaklaşımlar

$$U_m = \delta_{m-4} + 502\delta_{m-3} + 14608\delta_{m-2} + 88234\delta_{m-1} + 156190\delta_m \\ + 88234\delta_{m+1} + 14608\delta_{m+2} + 502\delta_{m+3} + \delta_{m+4}, \quad (4.191)$$

$$U'_m = \frac{9}{h} (-\delta_{m-4} - 246\delta_{m-3} - 4046\delta_{m-2} - 11326\delta_{m-1} \\ + 11326\delta_{m+1} + 4046\delta_{m+2} + 246\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.192)$$

$$U''_m = \frac{72}{h^2} (\delta_{m-4} + 118\delta_{m-3} + 952\delta_{m-2} + 154\delta_{m-1} - 2450\delta_m \\ + 154\delta_{m+1} + 952\delta_{m+2} + 118\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.193)$$

$$U'''_m = \frac{504}{h^3} (-\delta_{m-4} - 54\delta_{m-3} - 134\delta_{m-2} + 434\delta_{m-1} - 434\delta_{m+1} \\ + 134\delta_{m+2} + 54\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.194)$$

$$U^{(4)}_m = \frac{3024}{h^4} (\delta_{m-4} + 22\delta_{m-3} - 32\delta_{m-2} - 86\delta_{m-1} + 190\delta_m \\ - 86\delta_{m+1} - 32\delta_{m+2} + 22\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.195)$$

$$U^{(5)}_m = \frac{15120}{h^5} (\delta_{m+4} + 6\delta_{m+3} - 34\delta_{m+2} + 46\delta_{m+1} - 46\delta_{m-1} \\ + 34\delta_{m-2} - 6\delta_{m-3} - \delta_{m-4}), \quad (4.196)$$

$$U^{(6)}_m = \frac{60480}{h^6} (\delta_{m-4} - 2\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 34\delta_{m-1} - 50\delta_m \\ + 34\delta_{m+1} - 8\delta_{m+2} - 2\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.197)$$

$$U^{(7)}_m = \frac{181440}{h^7} (-\delta_{m-4} + 6\delta_{m-3} - 14\delta_{m-2} + 14\delta_{m-1} \\ - 14\delta_{m+1} + 14\delta_{m+2} - 6\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.198)$$

$$U^{(8)}_m = \frac{362880}{h^8} (\delta_{m-4} - 8\delta_{m-3} + 28\delta_{m-2} - 56\delta_{m-1} \\ + 70\delta_m - 56\delta_{m+1} + 28\delta_{m+2} - 8\delta_{m+3} + \delta_{m+4}) \quad (4.199)$$

olarak bulunur.

4.10. 10. Dereceden B-spline

S_m^{10} onuncu dereceden B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (3.2) bağıntısında $k = 10$ alındığında

$$\begin{aligned} S_i^{10}(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+10} - x_m} S_m^9(x) + \frac{x_{m+11} - x}{x_{m+11} - x_{m+1}} S_{m+1}^9(x) \\ S_i^{10}(x) &= \frac{g_m(x)}{10h} S_m^9(x) + \frac{-g_{m+11}(x)}{10h} S_{m+1}^9(x) \end{aligned} \quad (4.200)$$

elde edilir. (4.167) dokuzuncu dereceden B-spline bağıntısının kullanılmasıyla (4.200) eşitliğindeki $g_m(x)S_m^9(x)$ ve $-g_{m+11}(x)S_{m+1}^9(x)$ terimleri

$$\begin{aligned} a_1 &= g_m(x)g_m^9(x) \\ a_2 &= g_m(x) [h^9 + 9h^8g_{m+1}(x) + 36h^7g_{m+1}^2(x) + 84h^6g_{m+1}^3(x) + 126h^5g_{m+1}^4(x) \\ &\quad + 126h^4g_{m+1}^5(x) + 84h^3g_{m+1}^6(x) + 36h^2g_{m+1}^7(x) + 9hg_{m+1}^8(x) - 9g_{m+1}^9(x)], \\ a_3 &= g_m(x) [502h^9 + 2214h^8g_{m+2}(x) + 4248h^7g_{m+2}^2(x) \\ &\quad + 4536h^6g_{m+2}^3(x) + 2772h^5g_{m+2}^4(x) + 756h^4g_{m+2}^5(x) \\ &\quad - 168h^3g_{m+2}^6(x) - 216h^2g_{m+2}^7(x) - 72hg_{m+2}^8(x) + 36g_{m+2}^9(x)], \\ a_4 &= g_m(x) [14608h^9 + 36414h^8g_{m+3}(x) + 34272h^7g_{m+3}^2(x) \\ &\quad + 11256h^6g_{m+3}^3(x) - 4032h^5g_{m+3}^4(x) - 4284h^4g_{m+3}^5(x) \\ &\quad - 672h^3g_{m+3}^6(x) + 504h^2g_{m+3}^7(x) + 252hg_{m+3}^8(x) - 84g_{m+3}^9(x)], \\ a_5 &= g_m(x) [88234h^9 + 101934h^8g_{m+4}(x) + 5544h^7g_{m+4}^2(x) \\ &\quad - 36456h^6g_{m+4}^3(x) - 10836h^5g_{m+4}^4(x) + 5796h^4g_{m+4}^5(x) \\ &\quad + 2856h^3g_{m+4}^6(x) - 504h^2g_{m+4}^7(x) - 504hg_{m+4}^8(x) + 126g_{m+4}^9(x)], \\ a_6 &= g_m(x) [156190h^9 - 88200h^7g_{m+5}^2(x) + 23940h^5g_{m+5}^4(x) \\ &\quad - 4200h^3g_{m+5}^6(x) + 630hg_{m+5}^8(x) - 126g_{m+5}^9(x)], \\ a_7 &= g_m(x) [(88234h^9 - 101934h^8g_{m+6}(x) + 5544h^7g_{m+6}^2(x) \\ &\quad + 36456h^6g_{m+6}^3(x) - 10836h^5g_{m+6}^4(x) - 5796h^4g_{m+6}^5(x) \\ &\quad + 2856h^3g_{m+6}^6(x) - 504h^2g_{m+6}^7(x) - 504hg_{m+6}^8(x) + 84g_{m+6}^9(x)], \\ a_8 &= g_m(x) [14608h^9 - 36414h^8g_{m+7}(x) + 34272h^7g_{m+7}^2(x) \\ &\quad - 11256h^6g_{m+7}^3(x) - 4032h^5g_{m+7}^4(x) + 4284h^4g_{m+7}^5(x) \\ &\quad - 672h^3g_{m+7}^6(x) - 504h^2g_{m+7}^7(x) + 252hg_{m+7}^8(x) - 36g_{m+7}^9(x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_9 &= g_m(x) [502h^9 - 2214h^8 g_{m+8}(x) + 4248h^7 g_{m+8}^2(x) \\
&\quad - 4536h^6 g_{m+8}^3(x) + 2772h^5 g_{m+8}^4(x) - 756h^4 g_{m+8}^5(x) \\
&\quad + 168h^3 g_{m+8}^6(x) + 216h^2 g_{m+8}^7(x) - 72h g_{m+8}^8(x) + 9g_{m+8}^9(x)], \\
a_{10} &= g_m(x) [h - g_{m+9}(x)]^9
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{g_m(x)}{10h} S_m^9(x) = \frac{1}{10h362880h^9} \left\{ \begin{array}{l} a_1 \quad , \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ a_2 \quad , \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ a_3 \quad , \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ a_4 \quad , \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ a_5 \quad , \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ a_6 \quad , \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ a_7 \quad , \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ a_8 \quad , \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ a_9 \quad , \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ a_{10} \quad , \quad x_{m+9} \leq x < x_{m+10} \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

ve

$$\begin{aligned}
b_1 &= -g_{m+11}(x) g_{m+1}^9(x), \\
b_2 &= -g_{m+11}(x) [h^9 + 9h^8 g_{m+2}(x) + 36h^7 g_{m+2}^2(x) \\
&\quad + 84h^6 g_{m+2}^3(x) + 126h^5 g_{m+2}^4(x) + 126h^4 g_{m+2}^5(x) \\
&\quad + 84h^3 g_{m+2}^6(x) + 36h^2 g_{m+2}^7(x) + 9h g_{m+2}^8(x) - 9g_{m+2}^9(x)], \\
b_3 &= -g_{m+11}(x) [502h^9 + 2214h^8 g_{m+3}(x) + 4248h^7 g_{m+3}^2(x) \\
&\quad + 4536h^6 g_{m+3}^3(x) + 2772h^5 g_{m+3}^4(x) + 756h^4 g_{m+3}^5(x) \\
&\quad - 168h^3 g_{m+3}^6(x) - 216h^2 g_{m+3}^7(x) - 72h g_{m+3}^8(x) + 36g_{m+3}^9(x)], \\
b_4 &= -g_{m+11}(x) [14608h^9 + 36414h^8 g_{m+4}(x) + 34272h^7 g_{m+4}^2(x) \\
&\quad + 11256h^6 g_{m+4}^3(x) - 4032h^5 g_{m+4}^4(x) - 4284h^4 g_{m+4}^5(x) \\
&\quad - 672h^3 g_{m+4}^6(x) + 504h^2 g_{m+4}^7(x) + 252h g_{m+4}^8(x) - 84g_{m+4}^9(x)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_5 &= -g_{m+11}(x) [88234h^9 + 101934h^8g_{m+5}(x) + 5544h^7g_{m+5}^2(x) \\
&\quad - 36456h^6g_{m+5}^3(x) - 10836h^5g_{m+5}^4(x) + 5796h^4g_{m+5}^5(x) \\
&\quad + 2856h^3g_{m+5}^6(x) - 504h^2g_{m+5}^7(x) - 504hg_{m+5}^8(x) + 126g_{m+5}^9(x)], \\
b_6 &= -g_{m+11}(x) [116190h^9 - 88200h^7g_{m+6}^2(x) + 23940h^5g_{m+6}^4(x) \\
&\quad - 4200h^3g_{m+6}^6(x) + 630hg_{m+6}^8(x) - 126g_{m+6}^9(x)], \\
b_7 &= -g_{m+11}(x) [(88234h^9 - 101934h^8g_{m+7}(x) + 5544h^7g_{m+7}^2(x) \\
&\quad + 36456h^6g_{m+7}^3(x) - 10836h^5g_{m+7}^4(x) - 5786h^4g_{m+7}^5(x) \\
&\quad + 2856h^3g_{m+7}^6(x) + 504h^2g_{m+7}^7(x) - 504hg_{m+7}^8(x) + 84g_{m+7}^9(x)], \\
b_8 &= -g_{m+11}(x) [14608h^9 - 36414h^8g_{m+8}(x) + 34272h^7g_{m+8}^2(x) \\
&\quad - 11256h^6g_{m+8}^3(x) - 4032h^5g_{m+8}^4(x) + 4284h^4g_{m+8}^5(x) \\
&\quad - 632h^3g_{m+8}^6(x) - 504h^2g_{m+8}^7(x) + 252hg_{m+8}^8(x) - 36g_{m+8}^9(x)], \\
b_9 &= -g_{m+11}(x) [502h^9 - 2214h^8g_{m+9}(x) + 4248h^7g_{m+9}^2(x) \\
&\quad - 4536h^6g_{m+9}^3(x) + 2772h^5g_{m+9}^4(x) - 756h^4g_{m+9}^5(x) \\
&\quad - 168h^3g_{m+9}^6(x) + 216h^2g_{m+9}^7(x) - 72hg_{m+9}^8(x) + 9g_{m+9}^9(x)], \\
b_{10} &= -g_{m+11}(x) [h - g_{m+10}(x)]^9
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{-g_{m+11}(x)}{10h} S_{m+1}^9(x) = \frac{1}{10h362880h^9} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \quad , \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ b_2 \quad , \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ b_3 \quad , \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ b_4 \quad , \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ b_5 \quad , \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ b_6 \quad , \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ b_7 \quad , \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ b_8 \quad , \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ b_9 \quad , \quad x_{m+9} \leq x < x_{m+10} \\ b_{10} \quad , \quad x_{m+10} \leq x < x_{m+11} \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.200) 10. dereceden B-spline fonksiyonu

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 = g_m^{10}(x), \\
c_2 &= a_2 + b_1 = h^{10} + 10h^9 g_{m+1}(x) + 45h^8 g_{m+1}^2(x) + 120h^7 g_{m+1}^3(x) \\
&\quad + 210h^6 g_{m+1}^4(x) + 252h^5 g_{m+1}^5(x) + 210h^4 g_{m+1}^6(x) \\
&\quad + 120h^3 g_{m+1}^7(x) + 45h^2 g_{m+1}^8(x) + 10h g_{m+1}^9(x) - 10g_{m+1}^{10}(x), \\
c_3 &= a_3 + b_2 = 1013h^{10} + 5010h^9 g_{m+2}(x) + 11025h^8 g_{m+2}^2(x) + 14040h^7 g_{m+2}^3(x) \\
&\quad + 11130h^6 g_{m+2}^4(x) + 5292h^5 g_{m+2}^5(x) + 1050h^4 g_{m+2}^6(x) \\
&\quad - 360h^3 g_{m+2}^7(x) - 315h^2 g_{m+2}^8(x) - 90h g_{m+2}^9(x) + 45g_{m+2}^{10}(x), \\
c_4 &= a_4 + b_3 = 47840h^{10} + 141060h^9 g_{m+3}(x) + 171000h^8 g_{m+3}^2(x) \\
&\quad + 100080h^7 g_{m+3}^3(x) + 16800h^6 g_{m+3}^4(x) - 13608h^5 g_{m+3}^5(x) - 8400h^4 g_{m+3}^6(x) \\
&\quad - 720h^3 g_{m+3}^7(x) + 900h^2 g_{m+3}^8(x) + 360h g_{m+3}^9(x) - 120g_{m+3}^{10}(x), \\
c_5 &= a_5 + b_4 = 455192h^{10} + 736260h^9 g_{m+4}(x) + 327600h^8 g_{m+4}^2(x) \\
&\quad - 95760h^7 g_{m+4}^3(x) - 119280h^6 g_{m+4}^4(x) - 13608h^5 g_{m+4}^5(x) + 16800h^4 g_{m+4}^6(x) \\
&\quad + 5040h^3 g_{m+4}^7(x) - 1260h^2 g_{m+4}^8(x) - 840h g_{m+4}^9(x) + 210g_{m+4}^{10}(x), \\
c_6 &= a_6 + b_5 = 1310354h^{10} + 679560h^9 g_{m+5}(x) - 509670h^8 g_{m+5}^2(x) \\
&\quad - 312480h^7 g_{m+5}^3(x) + 91140h^6 g_{m+5}^4(x) + 69552h^5 g_{m+5}^5(x) - 9660h^4 g_{m+5}^6(x) \\
&\quad - 10080h^3 g_{m+5}^7(x) + 630h^2 g_{m+5}^8(x) + 1260h g_{m+5}^9(x) - 252g_{m+5}^{10}(x), \\
c_7 &= a_7 + b_6 = 1310354h^{10} - 679560h^9 g_{m+6}(x) - 509670h^8 g_{m+6}^2(x) \\
&\quad + 312480h^7 g_{m+6}^3(x) + 91140h^6 g_{m+6}^4(x) - 69552h^5 g_{m+6}^5(x) - 9660h^4 g_{m+6}^6(x) \\
&\quad + 10080h^3 g_{m+6}^7(x) + 630h^2 g_{m+6}^8(x) - 1260h g_{m+6}^9(x) + 210g_{m+6}^{10}(x), \\
c_8 &= a_8 + b_7 = 455192h^{10} - 736260h^9 g_{m+7}(x) + 327600h^8 g_{m+7}^2(x) \\
&\quad + 95760h^7 g_{m+7}^3(x) - 119280h^6 g_{m+7}^4(x) + 13608h^5 g_{m+7}^5(x) + 16800h^4 g_{m+7}^6(x) \\
&\quad - 5040h^3 g_{m+7}^7(x) - 1260h^2 g_{m+7}^8(x) + 840h g_{m+7}^9(x) - 120g_{m+7}^{10}(x), \\
c_9 &= a_9 + b_8 = 47840h^{10} - 141060h^9 g_{m+8}(x) + 171000h^8 g_{m+8}^2(x) \\
&\quad - 100080h^7 g_{m+8}^3(x) + 16800h^6 g_{m+8}^4(x) + 13608h^5 g_{m+8}^5(x) - 8400h^4 g_{m+8}^6(x) \\
&\quad + 720h^3 g_{m+8}^7(x) + 900h^2 g_{m+8}^8(x) - 360h g_{m+8}^9(x) + 45g_{m+8}^{10}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{10} &= a_{10} + b_9 = 1013h^{10} - 5010h^9g_{m+9}(x) + 11025h^8g_{m+9}^2(x) - 14040h^7g_{m+9}^3(x) + \\
&11130h^6g_{m+9}^4(x) - 5292h^5g_{m+9}^5(x) + 1050h^4g_{m+9}^6(x) + 360h^3g_{m+9}^7(x) \\
&- 315h^2g_{m+9}^8(x) + 90hg_{m+9}^9(x) - 10g_{m+9}^{10}(x), \\
c_{11} &= b_{10} = [h - g_{m+10}(x)]^{10}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_m^{10}(x) = \frac{1}{3628800h^{10}} \left\{ \begin{array}{l} c_1 \quad , \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ c_2 \quad , \quad x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ c_3 \quad , \quad x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ c_4 \quad , \quad x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ c_5 \quad , \quad x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ c_6 \quad , \quad x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ c_7 \quad , \quad x_{m+6} \leq x < x_{m+7} \\ c_8 \quad , \quad x_{m+7} \leq x < x_{m+8} \\ c_9 \quad , \quad x_{m+8} \leq x < x_{m+9} \\ c_{10} \quad , \quad x_{m+9} \leq x < x_{m+10} \\ c_{11} \quad , \quad x_{m+10} \leq x < x_{m+11} \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \quad (4.201)$$

şeklinde bulunur. Literatürdeki sonuçlarla uygun olması için indis ötelemesi yapılır ve her iki taraf 3628800 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
d_1 &= g_{m-5}^{10}(x), \\
d_2 &= h^{10} + 10h^9g_{m-4}(x) + 45h^8g_{m-4}^2(x) + 120h^7g_{m-4}^3(x) + 210h^6g_{m-4}^4(x) \\
&+ 252h^5g_{m-4}^5(x) + 210h^4g_{m-4}^6(x) + 120h^3g_{m-4}^7(x) \\
&+ 45h^2g_{m-4}^8(x) + 10hg_{m-4}^9(x) - 10g_{m-4}^{10}(x), \\
d_3 &= 1013h^{10} + 5010h^9g_{m-3}(x) + 11025h^8g_{m-3}^2(x) + \\
&14040h^7g_{m-3}^3(x) + 11130h^6g_{m-3}^4(x) + 5292h^5g_{m-3}^5(x) \\
&+ 1050h^4g_{m-3}^6(x) - 360h^3g_{m-3}^7(x) - 315h^2g_{m-3}^8(x) \\
&- 90hg_{m-3}^9(x) + 45g_{m-3}^{10}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_4 &= 47840h^{10} + 141060h^9g_{m-2}(x) + 171000h^8g_{m-2}^2(x) + \\
&\quad 100080h^7g_{m-2}^3(x) + 16800h^6g_{m-2}^4(x) - 13608h^5g_{m-2}^5(x) \\
&\quad - 8400h^4g_{m-2}^6(x) - 720h^3g_{m-2}^7(x) + 900h^2g_{m-2}^8(x) \\
&\quad + 360hg_{m-2}^9(x) - 120g_{m-2}^{10}(x), \\
d_5 &= 455192h^{10} + 736260h^9g_{m-1}(x) + 327600h^8g_{m-1}^2(x) - 95760h^7g_{m-1}^3(x) \\
&\quad - 119280h^6g_{m-1}^4(x) - 13608h^5g_{m-1}^5(x) + 16800h^4g_{m-1}^6(x) + 5040h^3g_{m-1}^7(x) \\
&\quad - 1260h^2g_{m-1}^8(x) - 840hg_{m-1}^9(x) + 210g_{m-1}^{10}(x), \\
d_6 &= 1310354h^{10} + 679560h^9g_m(x) - 509670h^8g_m^2(x) - 312480h^7g_m^3(x) \\
&\quad + 91140h^6g_m^4(x) + 69552h^5g_m^5(x) - 9660h^4g_m^6(x) - 10080h^3g_m^7(x) \\
&\quad + 630h^2g_m^8(x) + 1260hg_m^9(x) - 252g_m^{10}(x), \\
d_7 &= 1310354h^{10} - 679560h^9g_{m+1}(x) - 509670h^8g_{m+1}^2(x) + 312480h^7g_{m+1}^3(x) \\
&\quad + 91140h^6g_{m+1}^4(x) - 69552h^5g_{m+1}^5(x) - 9660h^4g_{m+1}^6(x) + 10080h^3g_{m+1}^7(x) \\
&\quad + 630h^2g_{m+1}^8(x) - 1260hg_{m+1}^9(x) + 210g_{m+1}^{10}(x), \\
d_8 &= 455192h^{10} - 736260h^9g_{m+2}(x) + 327600h^8g_{m+2}^2(x) + 95760h^7g_{m+2}^3(x) \\
&\quad - 119280h^6g_{m+2}^4(x) + 13608h^5g_{m+2}^5(x) + 16800h^4g_{m+2}^6(x) - 5040h^3g_{m+2}^7(x) \\
&\quad - 1260h^2g_{m+2}^8(x) + 840hg_{m+2}^9(x) - 120g_{m+2}^{10}(x), \\
d_9 &= 47840h^{10} - 141060h^9g_{m+3}(x) + 171000h^8g_{m+3}^2(x) - 100080h^7g_{m+3}^3(x) \\
&\quad + 16800h^6g_{m+3}^4(x) + 13608h^5g_{m+3}^5(x) - 8400h^4g_{m+3}^6(x) + 720h^3g_{m+3}^7(x) \\
&\quad + 900h^2g_{m+3}^8(x) - 360hg_{m+3}^9(x) + 45g_{m+3}^{10}(x), \\
d_{10} &= 1013h^{10} - 5010h^9g_{m+4}(x) + 11025h^8g_{m+4}^2(x) - 14040h^7g_{m+4}^3(x) \\
&\quad + 11130h^6g_{m+4}^4(x) - 5292h^5g_{m+4}^5(x) + 1050h^4g_{m+4}^6(x) \\
&\quad + 360h^3g_{m+4}^7(x) - 315h^2g_{m+4}^8(x) + 90hg_{m+4}^9(x) - 10g_{m+4}^{10}(x), \\
d_{11} &= [h - g_{m+5}(x)]^{10}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$B_m^{10}(x) = \frac{1}{h^{10}} \begin{cases} d_1 & , x_{m-5} \leq x < x_{m-4} \\ d_2 & , x_{m-4} \leq x < x_{m-3} \\ d_3 & , x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ d_4 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ d_5 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ d_6 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ d_7 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ d_8 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ d_9 & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ d_{10} & , x_{m+4} \leq x < x_{m+5} \\ d_{11} & , x_{m+5} \leq x < x_{m+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.202)$$

formunda bulunur. Burada

$$\{B_{-5}^{10}(x), B_{-4}^{10}(x), B_{-3}^{10}(x), B_{-2}^{10}(x), \dots, B_{N+2}^{10}(x), B_{N+3}^{10}(x), B_{N+4}^{10}(x)\}$$

kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı onuncu dereceden spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. 10.dereceden B-spline fonksiyonları ve onların birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu mertebeden türevleri $[x_{m-5}, x_{m+6}]$ aralığı dışında sıfırdır. Bu aralıkta, her bir $B_m^{10}(x)$ 10.dereceden B-spline fonksiyonu ardışık on bir elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h^{10}B_{m-5}^{10}(x) = [h - g_m(x)]^{10} \quad (4.203)$$

$$\begin{aligned} h^{10}B_{m-4}^{10}(x) &= 1013h^{10} - 5010h^9g_m(x) + 11025h^8g_m^2(x) - 14040h^7g_m^3(x) \\ &+ 111130h^6g_m^4(x) - 5292h^5g_m^5(x) + 1050h^4g_m^6(x) \\ &+ 360h^3g_m^7(x) - 315h^2g_m^8(x) + 90hg_m^9(x) - 10g_m^{10}(x), \end{aligned} \quad (4.204)$$

$$\begin{aligned} h^{10}B_{m-3}^{10}(x) &= 47840h^{10} - 141060h^9g_m(x) + 171000h^8g_m^2(x) - 100080h^7g_m^3(x) \\ &+ 16800h^6g_m^4(x) + 13608h^5g_m^5(x) - 8400h^4g_m^6(x) \\ &+ 720h^3g_m^7(x) + 900h^2g_m^8(x) - 360hg_m^9(x) + 45g_m^{10}(x), \end{aligned} \quad (4.205)$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m-2}^{10}(x) &= 455192h^{10} - 736260h^9g_m(x) + 327600h^8g_m^2(x) + 95760h^7g_m^3(x) \\
&\quad - 119280h^6g_m^4(x) + 13608h^5g_m^5(x) + 16800h^4g_m^6(x) \\
&\quad - 5040h^3g_m^7(x) - 1260h^2g_m^8(x) + 840hg_m^9(x) - 120g_m^{10}(x), \quad (4.206)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m-1}^{10}(x) &= 1310354h^{10} - 679560h^9g_m(x) - 509670h^8g_m^2(x) + 312480h^7g_m^3(x) \\
&\quad + 91140h^6g_m^4(x) - 69552h^5g_m^5(x) - 9660h^4g_m^6(x) + 10080h^3g_m^7(x) + \\
&\quad 630h^2g_{m+1}^8(x) - 1260hg_{m+1}^9(x) + 210g_{m+1}^{10}(x), \quad (4.207)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_m^{10}(x) &= 1310354h^{10} + 679560h^9g_m(x) - 509670h^8g_m^2(x) - 312480h^7g_m^3(x) \\
&\quad + 91140h^6g_m^4(x) + 69552h^5g_m^5(x) - 9660h^4g_m^6(x) \\
&\quad - 10080h^3g_m^7(x) + 630h^2g_m^8(x) + 1260hg_m^9(x) - 252g_m^{10}(x), \quad (4.208)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+1}^{10}(x) &= 455192h^{10} + 736260h^9g_m(x) + 327600h^8g_m^2(x) - 95760h^7g_m^3(x) \\
&\quad - 119280h^6g_m^4(x) - 13608h^5g_m^5(x) + 16800h^4g_m^6(x) + 5040h^3g_m^7(x) \\
&\quad - 1260h^2g_m^8(x) - 840hg_m^9(x) + 210g_m^{10}(x), \quad (4.209)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+2}^{10}(x) &= 47840h^{10} + 141060h^9g_m(x) + 171000h^8g_m^2(x) + 100080h^7g_m^3(x) \\
&\quad + 16800h^6g_m^4(x) - 13608h^5g_m^5(x) - 8400h^4g_m^6(x) \\
&\quad - 720h^3g_m^7(x) + 900h^2g_m^8(x) + 360hg_m^9(x) - 120g_m^{10}(x), \quad (4.210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+3}^{10}(x) &= 1013h^{10} + 5010h^9g_m(x) + 11025h^8g_m^2(x) + 14040h^7g_m^3(x) \\
&\quad + 11130h^6g_m^4(x) + 5292h^5g_m^5(x) + 1050h^4g_m^6(x) \\
&\quad - 360h^3g_m^7(x) - 315h^2g_m^8(x) - 90hg_m^9(x) + 45g_m^{10}(x), \quad (4.211)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+4}^{10}(x) &= h^{10} + 10h^9g_m(x) + 45h^8g_m^2(x) + 120h^7g_m^3(x) + 210h^6g_m^4(x) \\
&\quad + 252h^5g_m^5(x) + 210h^4g_m^6(x) + 120h^3g_m^7(x) \\
&\quad + 45h^2g_m^8(x) + 10hg_m^9(x) - 10g_m^{10}(x), \quad (4.212)
\end{aligned}$$

$$h^{10}B_{m+5}^{10}(x) = g_m^{10}(x) \quad (4.213)$$

olarak tanımlanan ardışık onbir adet onuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. $\xi = x - x_m = g_m(x)$ dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden bu aralık üzerinde tanımlı olan onbir adet onuncu dereceden B-spline fonksiyonları bölünme noktalarından bağımsız olacak şekilde

$$h^{10}B_{m-5}^{10}(\xi) = [h - \xi]^{10}, \quad (4.214)$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m-4}^{10}(\xi) &= 1013h^{10} - 5010h^9\xi + 11025h^8\xi^2 - 14040h^7\xi^3 \\
&\quad + 11130h^6\xi^4 - 5292h^5\xi^5 + 1050h^4\xi^6 \\
&\quad + 360h^3\xi^7 - 315h^2\xi^8 + 90h\xi^9 - 10\xi^{10}, \tag{4.215}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m-3}^{10}(\xi) &= 47840h^{10} - 141060h^9\xi + 171000h^8\xi^2 - 100080h^7\xi^3 \\
&\quad + 16800h^6\xi^4 + 13608h^5\xi^5 - 8400h^4\xi^6 + 720h^3\xi^7 \\
&\quad + 900h^2\xi^8 - 360h\xi^9 + 45\xi^{10}, \tag{4.216}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m-2}^{10}(\xi) &= 455192h^{10} - 736260h^9\xi + 327600h^8\xi^2 + 95760h^7\xi^3 \\
&\quad - 119280h^6\xi^4 + 13608h^5\xi^5 + 16800h^4\xi^6 - 5040h^3\xi^7 \\
&\quad - 1260h^2\xi^8 + 840h\xi^9 - 120\xi^{10}, \tag{4.217}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m-1}^{10}(\xi) &= 1310354h^{10} - 679560h^9\xi - 509670h^8\xi^2 + 312480h^7\xi^3 \\
&\quad + 91140h^6\xi^4 - 69552h^5\xi^5 - 9660h^4\xi^6 + 10080h^3\xi^7 \\
&\quad + 630h^2g_{m+1}^8(x) - 1260hg_{m+1}^9(x) + 210g_{m+1}^{10}(x), \tag{4.218}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_m^{10}(\xi) &= 1310354h^{10} + 679560h^9\xi - 509670h^8\xi^2 - 312480h^7\xi^3 \\
&\quad + 91140h^6\xi^4 + 69552h^5\xi^5 - 9660h^4\xi^6 - 10080h^3\xi^7 \\
&\quad + 630h^2\xi^8 + 1260h\xi^9 - 252\xi^{10}, \tag{4.219}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+1}^{10}(\xi) &= 455192h^{10} + 736260h^9\xi + 327600h^8\xi^2 - 95760h^7\xi^3 \\
&\quad - 119280h^6\xi^4 - 13608h^5\xi^5 + 16800h^4\xi^6 + 5040h^3\xi^7 \\
&\quad - 1260h^2\xi^8 - 840h\xi^9 + 210\xi^{10}, \tag{4.220}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+2}^{10}(\xi) &= 47840h^{10} + 141060h^9\xi + 171000h^8\xi^2 + 100080h^7\xi^3 \\
&\quad + 16800h^6\xi^4 - 13608h^5\xi^5 - 8400h^4\xi^6 - 720h^3\xi^7 \\
&\quad + 900h^2\xi^8 + 360h\xi^9 - 120\xi^{10}, \tag{4.221}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+3}^{10}(\xi) &= 1013h^{10} + 5010h^9\xi + 11025h^8\xi^2 + 14040h^7\xi^3 \\
&\quad + 11130h^6\xi^4 + 5292h^5\xi^5 + 1050h^4\xi^6 \\
&\quad - 360h^3\xi^7 - 315h^2\xi^8 - 90h\xi^9 + 45\xi^{10}, \tag{4.222}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{10}B_{m+4}^{10}(\xi) &= h^{10} + 10h^9\xi + 45h^8\xi^2 + 120h^7\xi^3 + 210h^6\xi^4 + 252h^5\xi^5 \\
&\quad + 210h^4\xi^6 + 120h^3\xi^7 + 45h^2\xi^8 + 10h\xi^9 - 10\xi^{10}, \tag{4.223}
\end{aligned}$$

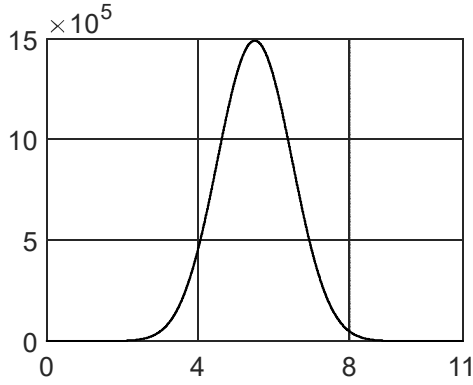
$$h^{10}B_{m+5}^{10}(\xi) = \xi^{10} \tag{4.224}$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.202) ile verilen 10. dereceden B-spline fonksiyonu için $i = m - 4, \dots, m + 5$ olmak üzere

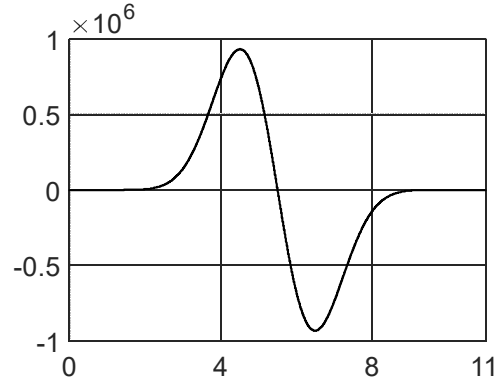
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_m^{10}(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} B_m^{10}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^{10}(x)) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{d^n}{dx^n} (B_m^{10}(x)), n = 1, 2, \dots, 9$$

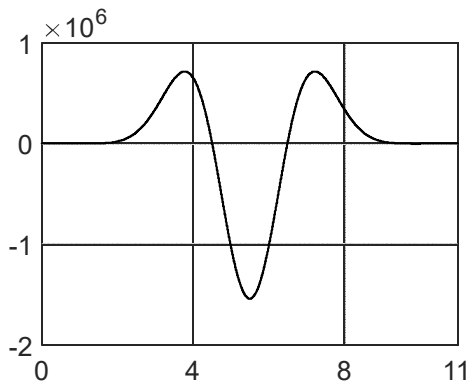
olduğundan (4.202) 10.dereceden B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu mertebeden türevlerinin $x = x_{m-4}, x = x_{m-3}, x = x_{m-2}, x = x_{m-1}, x = x_m, x = x_{m+1}, x = x_{m+2}, x = x_{m+3}, x = x_{m+4}$ ve $x = x_{m+5}$ bölünme noktalarında dolayısıyla da komu aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.



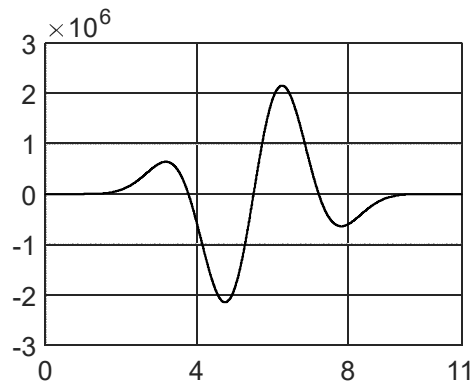
Şekil 4.64. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonu



Şekil 4.65. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun birinci türevi



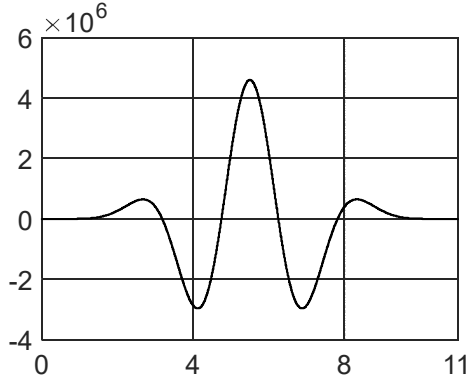
Şekil 4.66. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun ikinci türevi



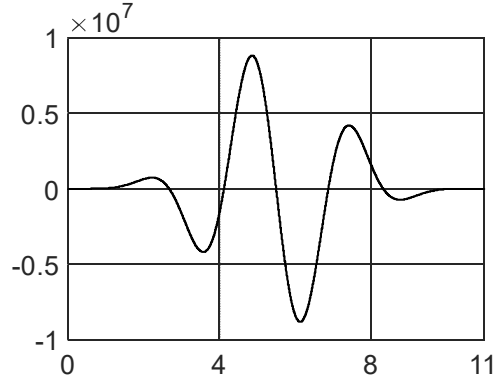
Şekil 4.67. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun üçüncü türevi

$h = 1$ alınarak $[x_{m-5}, x_{m+6}]$ aralığı $[0, 11]$ aralığına dönüştürülerek $B_m^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonuyla ilk dokuz türevinin şekilleri sırasıyla Şekil 4.64,

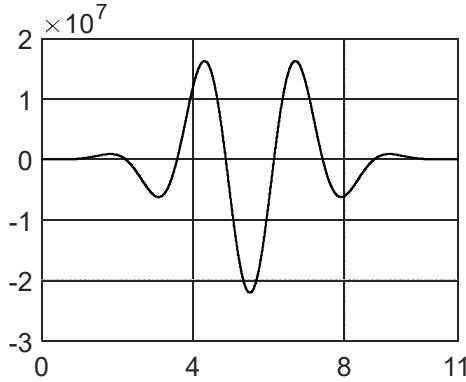
Şekil 4.65, Şekil 4.66, Şekil 4.67, Şekil 4.68, Şekil 4.69, Şekil 4.70, Şekil 4.71., Şekil 4.72 ve Şekil 4.73 de çizilmiştir. Şekillerden de $B_m^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonu ilk dokuz türevinin iç noktalarda sürekli olduğu, onuncu ve daha yüksek mertebeden türevlerinin olmadığı görülebilir.



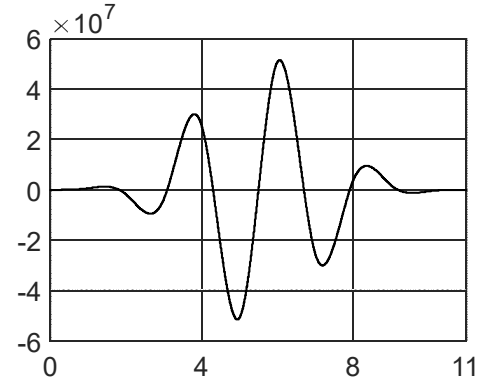
Şekil 4.68. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun dördüncü türevi



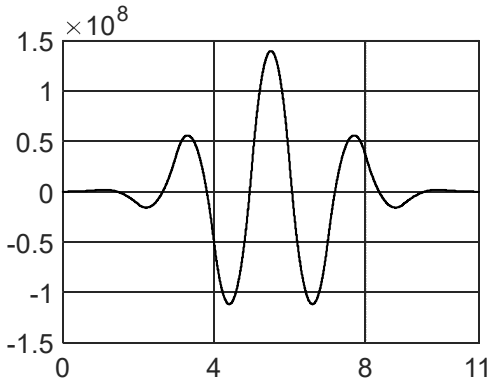
Şekil 4.69. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun beşinci türevi



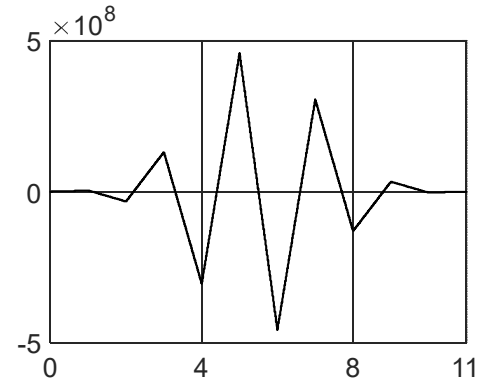
Şekil 4.70. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun altıncı türevi



Şekil 4.71. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun yedinci türevi



Şekil 4.72. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun sekizinci türevi



Şekil 4.73. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonunun dokuzuncu türevi

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için $U(x)$ yaklaşımı onuncu dereceden B-spline kullanılarak

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=-5}^{N+4} B_i^{10}(x) \delta_i \quad (4.225)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları bilinmeyen değişkenler olmak üzere $B_i^{10}(x)$ dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonlarını gösterir.

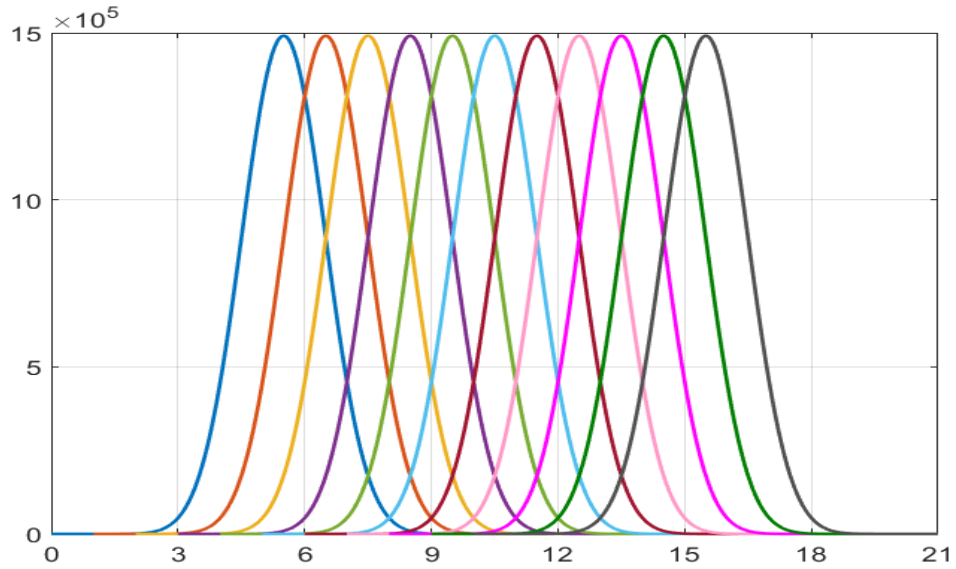
$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı içinde parçası olan

$$B_{m-5}^{10}(x), B_{m-4}^{10}(x), \dots, B_{m+3}^{10}(x), B_{m+4}^{10}(x), B_{m+5}^{10}(x)$$

onuncu dereceden B-spline fonksiyonların örttüğü aralıklar ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

- $B_{m-5}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-10}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m-4}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-9}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m-3}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-8}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m-2}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-7}, x_{m+4}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m-1}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-6}, x_{m+5}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_m^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-5}, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m+1}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-4}, x_{m+7}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m+2}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-3}, x_{m+8}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.

- $B_{m+3}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-2}, x_{m+9}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m+4}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_{m-1}, x_{m+10}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.
- $B_{m+5}^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları, $[x_m, x_{m+11}]$ aralığının dışında sıfırdır ve onbir elemanı örtmektedir.



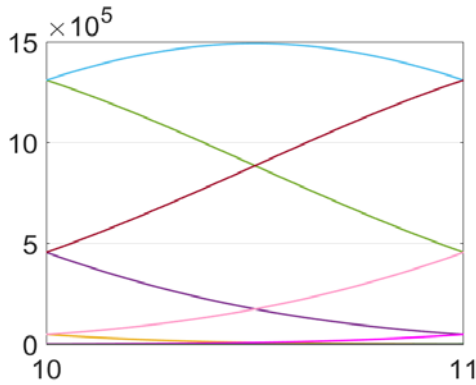
Şekil 4.74. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonları

Bu durumu göstermek için $h = 1$ alınarak $[x_{m-10}, x_{m+11}]$ aralığı $[0, 21]$ aralığına dönüştürülmüş ve aralıktaki

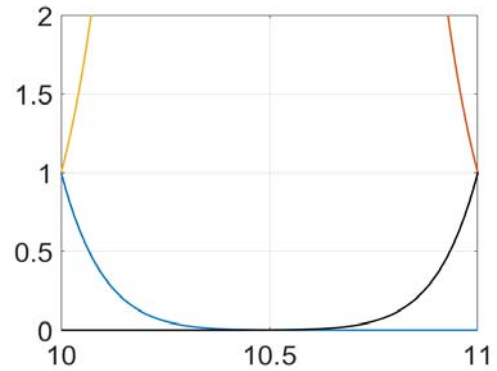
$$B_{m-5}^{10}(x), B_{m-4}^{10}(x), \dots, B_{m+3}^{10}(x), B_{m+4}^{10}(x), B_{m+5}^{10}(x)$$

onuncu dereceden B-spline fonksiyonları Şekil 4.74 de çizilmiştir. Şekil 4.74 de görüldüğü gibi onuncu dereceden B-spline fonksiyonlar ile birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu mertebeden türevleri ardışık onbir elemanı örtecektir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında onuncu dereceden B-spline fonksiyonların ve ilk dokuz türevinin en fazla onbir parçası

(şekil fonksiyonları) bulunacaktır. Bu durumu gösterebilmek için $h = 1$ alınarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[10, 11]$ aralığına dönüştürülmüş ve bu aralığa düşen onbir adet onuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonları Şekil 4.75a da çizilmiştir. Şekil 4.75a da çizilen şekil fonksiyonları içinde değeri sıfıra yakın olan dört şekil fonksiyonu tam gözükmeyeceği için Şekil 4.75b şekli çizilmiştir. Şekil 4.75b şekli çizilirken şekil fonksiyonlarının aldığı değer sınırlandırılmıştır. Her iki şekil birlikte incelendiğinde $[10, 11]$ aralığına toplam onbir şekil fonksiyonu düştüğü açıkça görülmektedir.



Şekil 4.75a



Şekil 4.75b

Şekil 4.75. Onuncu dereceden B-spline şekil fonksiyonları

Çizilen tüm şekillerden de görüldüğü gibi $B_m^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonlar $[x_{m-5}, x_{m+6}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $B_m^{10}(x)$ onuncu dereceden B-spline fonksiyonları $[x_{m-5}, x_{m+6}]$ aralığında ardışık onbir elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$B_{m-5}^{10}(x), B_{m-4}^{10}(x), \dots, B_{m+3}^{10}(x), B_{m+4}^{10}(x), B_{m+5}^{10}(x)$$

olarak onbir B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Bu durumda $x \in [x_m, x_{m+1}]$ için (4.225) yaklaşımı

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{i=m-5}^{m+5} B_i^{10}(x) \delta_i \quad (4.226)$$

olacaktır. $x = x_m$ noktasındaki $u(x_m)$ bilinmeyen fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu mertebeden

türevleri için yaklaşımlar ise

$$U(x_m) = U_m = \sum_{i=m-5}^{m+5} B_i^{10}(x)\delta_i,$$

$$\frac{d^n U(x_m)}{dx^n} = U'_m = \sum_{i=m-5}^{m+5} \frac{d^n B_i^{10}(x_m)}{dx^n} \delta_i, n = 1, \dots, 9$$

olarak yazılabilir. (4.202)onuncu dereceden B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki $u(x_m)$, $u'(x_m)$, $u''(x_m)$, $u'''(x_m)$, $u^{(4)}(x)$, $u^{(5)}(x)$, $u^{(6)}(x)$, $u^{(7)}(x)$, $u^{(8)}(x)$ ve $u^{(9)}(x)$ için yaklaşımlar

$$U_m = (\delta_{m-5} + 1013\delta_{m-4} + 47840\delta_{m-3} + 455192\delta_{m-2} + 1310354\delta_{m-1} + 1310354\delta_m + 455192\delta_{m+1} + 47840\delta_{m+2} + 1013\delta_{m+3} + \delta_{m+4}) \quad (4.227)$$

$$U'_m = \frac{10}{h} (-\delta_{m-5} - 501\delta_{m-4} - 14106\delta_{m-3} - 73626\delta_{m-2} - 67956\delta_{m-1} + 67956\delta_m + 73626\delta_{m+1} + 14106\delta_{m+2} + 501\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.228)$$

$$U''_m = \frac{90}{h^2} (\delta_{m-5} + 245\delta_{m-4} + 3800\delta_{m-3} + 7280\delta_{m-2} - 11326\delta_{m-1} - 11326\delta_m + 7280\delta_{m+1} + 3800\delta_{m+2} + 245\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.229)$$

$$U'''_m = \frac{720}{h^3} (-\delta_{m-5} - 117\delta_{m-4} - 834\delta_{m-3} + 798\delta_{m-2} + 2604\delta_{m-1} - 2604\delta_m - 798\delta_{m+1} + 834\delta_{m+2} + 117\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.230)$$

$$U_m^{(4)} = \frac{5040}{h^4} (\delta_{m-5} + 53\delta_{m-4} + 80\delta_{m-3} - 568\delta_{m-2} + 434\delta_{m-1} + 434\delta_m - 568\delta_{m+1} + 80\delta_{m+2} + 53\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.231)$$

$$U_m^{(5)} = \frac{30240}{h^5} (-\delta_{m-5} - 21\delta_{m-4} + 54\delta_{m-3} + 54\delta_{m-2} - 276\delta_{m-1} + 276\delta_m - 54\delta_{m+1} - 54\delta_{m+2} + 21\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.232)$$

$$U_m^{(6)} = \frac{151200}{h^6} (\delta_{m-5} + 5\delta_{m-4} - 40\delta_{m-3} + 80\delta_{m-2} - 46\delta_{m-1} - 46\delta_m + 80\delta_{m+1} - 40\delta_{m+2} + 5\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.233)$$

$$U_m^{(7)} = \frac{604800}{h^7} (-\delta_{m-5} + 3\delta_{m-4} + 6\delta_{m-3} - 42\delta_{m-2} + 84\delta_{m-1} - 84\delta_m + 42\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} - 3\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.234)$$

$$U_m^{(8)} = \frac{1814400}{h^8} (\delta_{m-5} - 7\delta_{m-4} + 20\delta_{m-3} - 28\delta_{m-2} + 14\delta_{m-1} + 14\delta_m - 28\delta_{m+1} + 20\delta_{m+2} - 7\delta_{m+3} + \delta_{m+4}), \quad (4.235)$$

$$U_m^{(9)} = \frac{3628800}{h^9} (-\delta_{m-5} + 9\delta_{m-4} - 36\delta_{m-3} + 84\delta_{m-2} - 126\delta_{m-1} + 126\delta_m - 84\delta_{m+1} + 36\delta_{m+2} - 9\delta_{m+3} + \delta_{m+4}) \quad (4.236)$$

olarak bulunur.

5. B-SPLINE FONKSİYONLARIN UYGULANMASI

$[a, b] = [-50, 50]$ konum aralığı N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa konum artım uzunluğu

$$h = \frac{b - a}{N}$$

olacaktır. Bu durumda

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h, \dots, x_N = x_{N-1} + h = b$$

olacak şekilde $[a, b]$ konum aralığının bir düzgün parçalanması elde edilir. Bu bölümde $[a, b] = [-50, 50]$ konum aralığının bir düzgün parçalanması üzerinde tanımlı olan

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

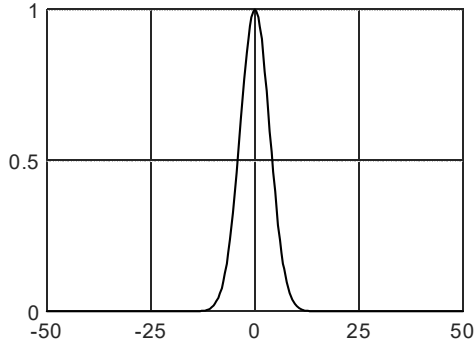
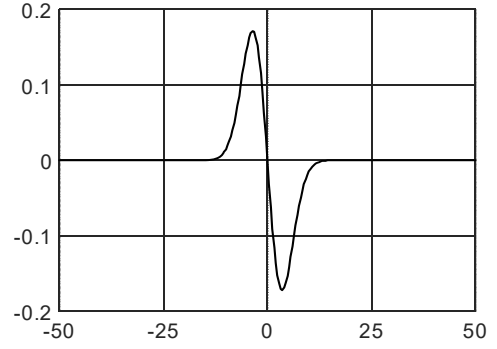
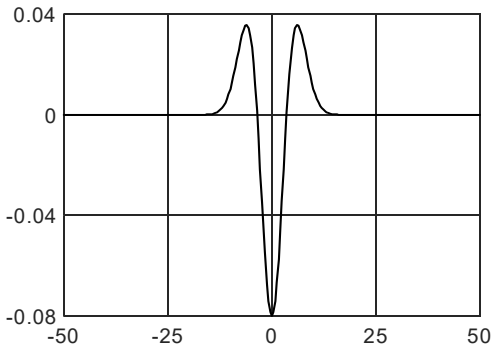
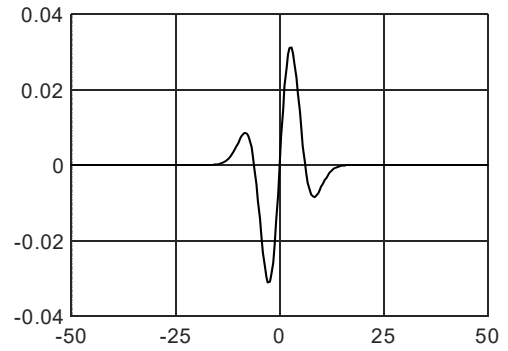
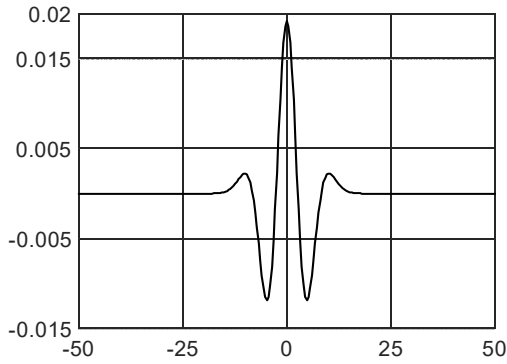
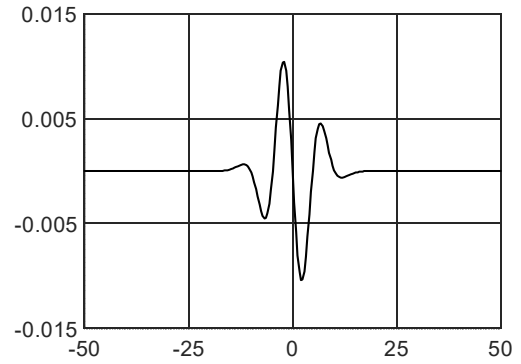
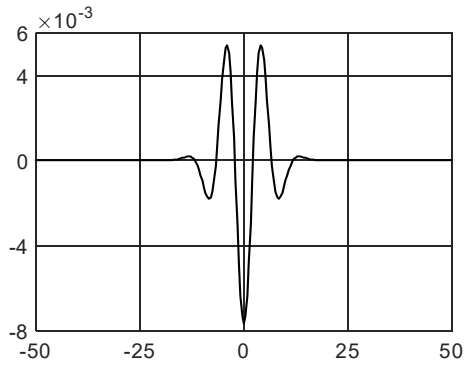
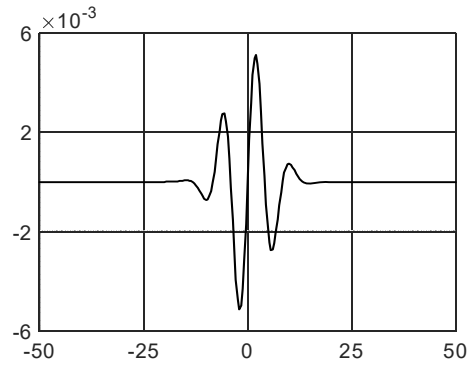
fonksiyonuna ve türevlerine B-spline yaklaşımlarının nasıl yapılacağı gösterilecektir. Bunun için konum aralığının parçalanması üzerinde u tam çözümüyle B-spline fonksiyonlar kullanılarak bulunacak olan U yaklaşık çözümü arasında mutlak değerce maksimum hatayı veren L_∞ hata normu

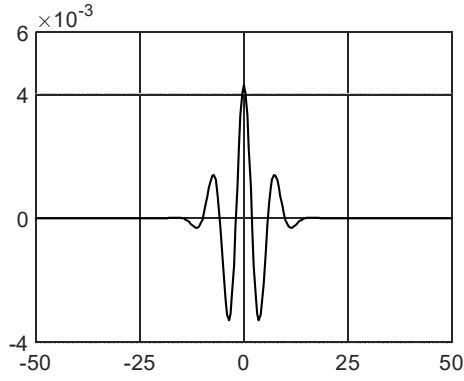
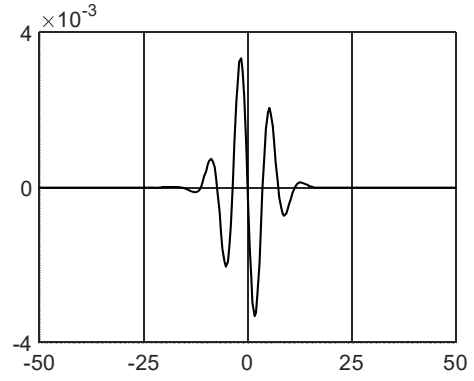
$$L_\infty = \max |u_m - U_m|, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

formülü ile hesaplanacaktır. Türev için L_∞ hata normu hesaplanırken de konum aralığının parçalandığı tüm noktalarda u tam çözümünün türevi ile U yaklaşık çözümünün türevi arasındaki farkların mutlak değerce maksimumu hesaplanacaktır.

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu ve ilk 9 türevinin $[-50, 50]$ konum aralığı üzerindeki grafikleri Şekil 5.1-Şekil 5.10 da verilmiştir. Şekil 5.1 de $u(x)$ fonksiyonunu nispeten modellemenin kolay olduğu bir fonksiyona karşılık gelirken, fonksiyonun türevleri alındıkça dalgalının ekstremum noktalarının sayısının arttığı için modelleme gittikçe zorlaşmaktadır.

Şekil 5.1. $u(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.2. $u'(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.3. $u''(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.4. $u'''(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.5. $u^{(4)}(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.6. $u^{(5)}(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.7. $u^{(6)}(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.8. $u^{(7)}(x)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 5.9. $u^{(8)}(x)$ fonksiyonunun grafiğiŞekil 5.10. $u^{(9)}(x)$ fonksiyonunun grafiği

5.1. Kuadratik B-spline

Kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m = e^{-(x_m/5)^2}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \delta_{-1} + \delta_0 &= U(x_0), \\ \delta_0 + \delta_1 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_N) \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N$$

olmak üzere $N + 2$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayılarını eşitlemek için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki birinci mertebeden türevi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{2}{h} (\delta_1 - \delta_{-1}) &= U'(x_0), \\ \delta_{-1} + \delta_0 &= U(x_0), \\ \delta_0 + \delta_1 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_N) \end{aligned}$$

olarak $N + 2$ denklem ve $N + 2$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek

$$\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve birinci mertebeden türevleri için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.1 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.1. Kuadratik B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	1.15×10^{-2}	2.62×10^{-3}	1.17×10^{-3}	6.54×10^{-4}	4.16×10^{-4}

5.2. Kübik B-spline

Kübik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} = e^{-(x_m/5)^2}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 &= U(x_0), \\ \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_N), \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}$$

olmak üzere $N + 3$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken iki denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ ve $x = x_N$

noktalarındaki birinci mertebeden türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{3}{h}(-\delta_{-1} + \delta_1) &= U'(x_0), \\
\delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 &= U(x_0), \\
\delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 &= U(x_1), \\
&\vdots \\
\delta_{N-2} + 4\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-1}), \\
\delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_N), \\
\frac{3}{h}(-\delta_{N-1} + \delta_{N+1}) &= U'(x_N)
\end{aligned}$$

olarak $N + 3$ denklem ve $N + 3$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi çözümlenerek

$$\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci mertebeden türevleri için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.2 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.2. Kübik B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	1.17×10^{-3}	6.12×10^{-5}	1.17×10^{-5}	3.66×10^{-6}	1.49×10^{-6}
U_{xx} için L_∞	6.61×10^{-3}	1.62×10^{-3}	7.15×10^{-4}	4.01×10^{-4}	2.57×10^{-4}

5.3. Kuartik B-spline

Kuartik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1} = e^{-(x_m/5)^2}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}\delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1 &= U(x_0), \\ \delta_{-1} + 11\delta_0 + 11\delta_1 + \delta_2 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_N),\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}$$

olmak üzere $N + 4$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken üç denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki birinci ve ikinci mertebeden türevleriyle $x = x_N$ noktasındaki birinci mertebeden türevi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{4}{h}(-\delta_{-2} - 3\delta_{-1} + 3\delta_0 + \delta_1) &= U'(x_0), \\ \frac{12}{h^2}(\delta_{-2} - \delta_{-1} - \delta_0 + \delta_1) &= U''(x_0), \\ \delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1 &= U(x_0), \\ \delta_{-1} + 11\delta_0 + 11\delta_1 + \delta_2 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_N), \\ \frac{4}{h}(-\delta_{N-2} - 3\delta_{N-1} + 3\delta_N + \delta_{N+1}) &= U'(x_N)\end{aligned}$$

olarak $N + 4$ denklem ve $N + 4$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi çözümlenerek

$$\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi, birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.3 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.3. Kuartik B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	4.61×10^{-4}	1.72×10^{-5}	3.08×10^{-6}	9.42×10^{-7}	3.80×10^{-7}
U_{xx} için L_∞	5.45×10^{-4}	3.27×10^{-5}	6.38×10^{-6}	2.01×10^{-6}	8.22×10^{-7}
U_{3x} için L_∞	3.93×10^{-3}	8.88×10^{-4}	3.89×10^{-4}	2.18×10^{-4}	1.39×10^{-4}

5.4. Kuintik B-spline

Kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} = e^{-(x_m/5)^2}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 = U(x_0),$$

$$\delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 = U(x_1),$$

⋮

$$\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = U(x_N)$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$$

olmak üzere $N + 5$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken dört denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki birinci ve ikinci mertebeden türevleriyle $x = x_N$ noktasındaki birinci ve ikinci mertebeden türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{5}{h} (-\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2) &= U'(x_0), \\ \frac{20}{h^2} (\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2) &= U''(x_0), \\ \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 &= U(x_0), \\ \delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4 &= U(x_2), \\
&\vdots \\
\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N), \\
\frac{5}{h}(-\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2}) &= U'(x_N), \\
\frac{20}{h^2}(\delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2}) &= U''(x_N)
\end{aligned}$$

olarak $N + 5$ denklem ve $N + 5$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek

$$\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve ilk dört türevi için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.4 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.4. Kuintik B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	1.21×10^{-4}	1.18×10^{-6}	9.55×10^{-8}	1.65×10^{-8}	4.27×10^{-9}
U_{xx} için L_∞	2.55×10^{-4}	1.20×10^{-5}	2.22×10^{-6}	6.89×10^{-7}	2.78×10^{-7}
U_{3x} için L_∞	4.48×10^{-4}	2.27×10^{-5}	4.33×10^{-6}	1.36×10^{-6}	5.52×10^{-7}
U_{4x} için L_∞	2.84×10^{-3}	6.58×10^{-4}	2.88×10^{-4}	1.61×10^{-4}	1.03×10^{-4}

5.5. Sektik B-spline

Sektik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2} = e^{-(x_m/5)^2}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \delta_{-3} + 57\delta_{-2} + 302\delta_{-1} + 302\delta_0 + 57\delta_1 + \delta_2 &= U(x_0), \\ \delta_{-2} + 57\delta_{-1} + 302\delta_0 + 302\delta_1 + 57\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-4} + 57\delta_{N-3} + 302\delta_{N-2} + 302\delta_{N-1} + 57\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-1}), \\ \delta_{N-3} + 57\delta_{N-2} + 302\delta_{N-1} + 302\delta_N + 57\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N) \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$$

olmak üzere $N + 6$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken beş denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleriyle $x = x_N$ noktasındaki birinci ve ikinci mertebeden türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{6}{h} (-\delta_{-3} - 25\delta_{-2} - 40\delta_{-1} + 40\delta_0 + 25\delta_1 + \delta_2) &= U'(x_0), \\ \frac{30}{h^2} (\delta_{-3} + 9\delta_{-2} - 10\delta_{-1} - 10\delta_0 + 9\delta_1 + \delta_2) &= U''(x_0), \\ \frac{120}{h^3} (-\delta_{-3} - \delta_{-2} + 8\delta_{-1} - 8\delta_0 + \delta_1 + \delta_2) &= U'''(x_0), \\ \delta_{-3} + 57\delta_{-2} + 302\delta_{-1} + 302\delta_0 + 57\delta_1 + \delta_2 &= U(x_0), \\ \delta_{-2} + 57\delta_{-1} + 302\delta_0 + 302\delta_1 + 57\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-4} + 57\delta_{N-3} + 302\delta_{N-2} + 302\delta_{N-1} + 57\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-1}), \\ \delta_{N-3} + 57\delta_{N-2} + 302\delta_{N-1} + 302\delta_N + 57\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N), \\ \frac{6}{h} (-\delta_{N-3} - 25\delta_{N-2} - 40\delta_{N-1} + 40\delta_N + 25\delta_{N+1} + \delta_{N+2}) &= U'(x_N), \\ \frac{30}{h^2} (\delta_{N-3} + 9\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} - 10\delta_N + 9\delta_{N+1} + \delta_{N+2}) &= U''(x_N) \end{aligned}$$

olarak $N + 6$ denklem ve $N + 6$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi çözümlenerek

$$\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve ilk beş türevi için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.5 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.5. Sektik B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	4.88×10^{-5}	2.57×10^{-7}	1.80×10^{-8}	2.96×10^{-9}	7.45×10^{-10}
U_{xx} için L_∞	6.47×10^{-5}	7.85×10^{-7}	6.53×10^{-8}	1.14×10^{-8}	2.96×10^{-9}
U_{3x} için L_∞	2.20×10^{-4}	8.29×10^{-6}	1.51×10^{-6}	4.63×10^{-7}	1.87×10^{-7}
U_{4x} için L_∞	3.54×10^{-4}	1.90×10^{-5}	3.63×10^{-6}	1.14×10^{-6}	4.63×10^{-7}
U_{5x} için L_∞	1.98×10^{-3}	4.42×10^{-4}	1.93×10^{-4}	1.08×10^{-4}	6.88×10^{-5}

5.6. Septik B-spline

Septik B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$\begin{aligned} U(x_m) = u(x_m) = e^{-(x_m/5)^2} = & \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2414\delta_m \\ & + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3} \end{aligned}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2414\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 = U(x_0),$$

$$\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2414\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 = U(x_1),$$

⋮

$$\delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2414\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = U(x_{N-1}),$$

$$\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2414\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = U(x_N)$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$$

olmak üzere $N + 7$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken altı denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleriyle $x = x_N$ noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{7}{h} (\delta_3 + 56\delta_2 + 245\delta_1 - 245\delta_{-1} - 56\delta_{-2} - \delta_{-3}) &= U'(x_0) \\
\frac{42}{h^2} (\delta_3 + 24\delta_2 + 15\delta_1 - 80\delta_0 + 15\delta_{-1} + 24\delta_{-2} + \delta_{-3}) &= U''(x_0) \\
\frac{210}{h^3} (\delta_3 + 8\delta_2 - 19\delta_1 + 19\delta_{-1} - 8\delta_{-2} - \delta_{-3}) &= U'''(x_0) \\
\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2414\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 &= U(x_0), \\
\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2414\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 &= U(x_1), \\
&\vdots \\
\delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2414\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_{N-1}), \\
\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2414\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= U(x_N), \\
\frac{7}{h} (\delta_{N+3} + 56\delta_{N+2} + 245\delta_{N+1} - 245\delta_{N-1} - 56\delta_{N-2} - \delta_{N-3}) &= U'(x_N), \\
\frac{42}{h^2} (\delta_{N+3} + 24\delta_{N+2} + 15\delta_{N+1} - 80\delta_N + 15\delta_{N-1} + 24\delta_{N-2} + \delta_{N-3}) &= U''(x_N), \\
\frac{210}{h^3} (\delta_{N+3} + 8\delta_{N+2} - 19\delta_{N+1} + 19\delta_{N-1} - 8\delta_{N-2} - \delta_{N-3}) &= U'''(x_N)
\end{aligned}$$

olarak $N + 7$ denklem ve $N + 7$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek

$$\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve ilk altı türevi için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.6 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.6. Septik B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	1.81×10^{-5}	2.86×10^{-8}	9.50×10^{-10}	9.16×10^{-11}	1.51×10^{-11}
U_{xx} için L_∞	2.70×10^{-5}	1.99×10^{-7}	1.46×10^{-8}	2.43×10^{-9}	6.17×10^{-10}
U_{3x} için L_∞	6.57×10^{-5}	6.17×10^{-7}	4.50×10^{-8}	8.80×10^{-9}	2.31×10^{-9}
U_{4x} için L_∞	1.78×10^{-4}	7.08×10^{-6}	1.27×10^{-6}	3.90×10^{-7}	1.57×10^{-7}
U_{5x} için L_∞	2.85×10^{-4}	1.43×10^{-5}	2.74×10^{-6}	8.68×10^{-7}	3.58×10^{-7}
U_{6x} için L_∞	1.65×10^{-3}	3.72×10^{-4}	1.62×10^{-4}	9.04×10^{-5}	5.77×10^{-5}

5.7. 8. Dereceden B-spline

8. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = e^{-(x_m/5)^2} = \delta_{m-4} + 247\delta_{m-3} + 4293\delta_{m-2} + 15619\delta_{m-1} \\ + 15619\delta_m + 4293\delta_{m+1} + 247\delta_{m+2} + \delta_{m+3}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \delta_{-4} + 247\delta_{-3} + 4293\delta_{-2} + 15619\delta_{-1} + 15619\delta_0 + 4293\delta_1 + 247\delta_2 + \delta_3 &= U(x_0), \\ \delta_{-3} + 247\delta_{-2} + 4293\delta_{-1} + 15619\delta_0 + 15619\delta_1 + 4293\delta_2 + 247\delta_3 + \delta_4 &= U(x_1), \\ &\vdots \\ \delta_{N-5} + 247\delta_{N-4} + 4293\delta_{N-3} + 15619\delta_{N-2} + 15619\delta_{N-1} &= U(x_{N-1}) \\ + 4293\delta_N + 247\delta_{N+1} + \delta_{N+2} & \\ \delta_{N-4} + 247\delta_{N-3} + 4293\delta_{N-2} + 15619\delta_{N-1} + 15619\delta_N &= U(x_N) \\ + 4293\delta_{N+1} + 247\delta_{N+2} + \delta_{N+3} & \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-4}, \delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$$

olmak üzere $N + 8$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken yedi denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki

birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleriyle $x = x_N$ noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{8}{h} (-\delta_{-4} - 119\delta_{-3} - 1071\delta_{-2} - 1225\delta_{-1} + 1225\delta_0 + 1071\delta_1 + 119\delta_2 + \delta_3) &= U'(x_0), \\
\frac{56}{h^2} (\delta_{-4} + 55\delta_{-3} + 189\delta_{-2} - 245\delta_{-1} - 245\delta_0 + 189\delta_1 + 55\delta_2 + \delta_3) &= U''(x_0), \\
\frac{336}{h^3} (-\delta_{-4} - 23\delta_{-3} + 9\delta_{-2} + 95\delta_{-1} - 95\delta_0 - 9\delta_1 + 23\delta_2 + \delta_3) &= U'''(x_0), \\
\frac{1680}{h^4} (\delta_{-4} + 7\delta_{-3} - 27\delta_{-2} + 19\delta_{-1} + 19\delta_0 - 27\delta_1 + 7\delta_2 + \delta_3) &= U^{(4)}(x_0), \\
\delta_{-4} + 247\delta_{-3} + 4293\delta_{-2} + 15619\delta_{-1} + 15619\delta_0 + 4293\delta_1 + 247\delta_2 + \delta_3 &= U(x_0), \\
\delta_{-3} + 247\delta_{-2} + 4293\delta_{-1} + 15619\delta_0 + 15619\delta_1 + 4293\delta_2 + 247\delta_3 + \delta_4 &= U(x_1), \\
&\vdots \\
\delta_{N-5} + 247\delta_{N-4} + 4293\delta_{N-3} + 15619\delta_{N-2} + 15619\delta_{N-1} + 4293\delta_N + 247\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_{N-1}), \\
\delta_{N-4} + 247\delta_{N-3} + 4293\delta_{N-2} + 15619\delta_{N-1} + 15619\delta_N + 4293\delta_{N+1} + 247\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= U(x_N), \\
\frac{8}{h} (-\delta_{N-4} - 119\delta_{N-3} - 1071\delta_{N-2} - 1225\delta_{N-1} + 1225\delta_N + 1071\delta_{N+1} + 119\delta_{N+2} + \delta_{N+3}) &= U'(x_N), \\
\frac{56}{h^2} (\delta_{N-4} + 55\delta_{N-3} + 189\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} - 245\delta_N + 189\delta_{N+1} + 55\delta_{N+2} + \delta_{N+3}) &= U''(x_N), \\
\frac{336}{h^3} (-\delta_{N-4} - 23\delta_{N-3} + 9\delta_{N-2} + 95\delta_{N-1} - 95\delta_N - 9\delta_{N+1} + 23\delta_{N+2} + \delta_{N+3}) &= U'''(x_N)
\end{aligned}$$

olarak $N + 8$ denklem ve $N + 8$ bilinmeyen den oluşan denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi çözülerek

$$\delta_{-4}, \delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve ilk yedi türevi için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.7 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.7. Sekizinci dereceden B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	8.77×10^{-6}	5.67×10^{-9}	1.50×10^{-10}	1.32×10^{-11}	2.08×10^{-12}
U_{xx} için L_∞	1.07×10^{-5}	2.26×10^{-8}	7.77×10^{-10}	7.43×10^{-11}	1.22×10^{-11}
U_{3x} için L_∞	3.14×10^{-5}	1.57×10^{-7}	1.12×10^{-8}	1.89×10^{-9}	4.82×10^{-10}
U_{4x} için L_∞	5.94×10^{-5}	5.98×10^{-7}	4.81×10^{-8}	8.31×10^{-9}	2.15×10^{-9}
U_{5x} için L_∞	1.53×10^{-4}	5.38×10^{-6}	9.62×10^{-7}	2.99×10^{-7}	1.22×10^{-7}
U_{6x} için L_∞	2.75×10^{-4}	1.39×10^{-5}	2.63×10^{-6}	8.21×10^{-7}	3.34×10^{-7}
U_{7x} için L_∞	1.29×10^{-3}	2.80×10^{-4}	1.22×10^{-4}	6.90×10^{-5}	4.46×10^{-5}

5.8. 9. Dereceden B-spline

9. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$U(x_m) = u(x_m) = e^{-(x_m/5)^2} = \delta_{m-4} + 502\delta_{m-3} + 14608\delta_{m-2} + 88234\delta_{m-1} \\ + 156190\delta_m + 88234\delta_{m+1} + 14608\delta_{m+2} + 502\delta_{m+3} + \delta_{m+4}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \delta_{-4} + 502\delta_{-3} + 14608\delta_{-2} + 88234\delta_{-1} + 156190\delta_0 &= U(x_0), \\ +88234\delta_1 + 14608\delta_2 + 502\delta_3 + \delta_4 & \\ \delta_{-3} + 502\delta_{-2} + 14608\delta_{-1} + 88234\delta_0 + 156190\delta_1 &= U(x_1), \\ +88234\delta_2 + 14608\delta_3 + 502\delta_4 + \delta_5 & \\ &\vdots \\ \delta_{N-4} + 502\delta_{N-3} + 14608\delta_{N-2} + 88234\delta_{N-1} + 156190\delta_N &= U(x_N), \\ +88234\delta_{N+1} + 14608\delta_{N+2} + 502\delta_{N+3} + \delta_{N+4} & \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi $N + 1$ denklem ve

$$\delta_{-4}, \delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}, \delta_{N+4}$$

olmak üzere $N + 9$ bilinmeyenden oluşur. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken sekiz denklem için $u(x) = e^{-(x/5)^2}$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki

birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleriyle $x = x_N$ noktasındaki birinci, ikinci, üçüncü dördüncü mertebeden türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{h} (-\delta_{-4} - 246\delta_{-3} - 4046\delta_{-2} - 11326\delta_{-1} + 11326\delta_1 + 4046\delta_2 + 246\delta_3 + \delta_4) = U'(x_0), \\
& \frac{72}{h^2} (\delta_{-4} + 118\delta_{-3} + 952\delta_{-2} + 154\delta_{-1} - 2450\delta_0 + 154\delta_1 + 952\delta_2 + 118\delta_3 + \delta_4) = U''(x_0), \\
& \frac{504}{h^3} (-\delta_{-4} - 54\delta_{-3} - 134\delta_{-2} + 434\delta_{-1} - 434\delta_1 + 134\delta_2 + 54\delta_3 + \delta_4) = U'''(x_0), \\
& \frac{3024}{h^4} (\delta_{-4} + 22\delta_{-3} - 32\delta_{-2} - 86\delta_{-1} + 190\delta_0 - 86\delta_1 - 32\delta_2 + 22\delta_3 + \delta_4) = U^{(4)}(x_0), \\
& \delta_{-4} + 502\delta_{-3} + 14608\delta_{-2} + 88234\delta_{-1} + 156190\delta_0 + 88234\delta_1 + 14608\delta_2 + 502\delta_3 + \delta_4 = U(x_0), \\
& \delta_{-3} + 502\delta_{-2} + 14608\delta_{-1} + 88234\delta_0 + 156190\delta_1 + 88234\delta_2 + 14608\delta_3 + 502\delta_4 + \delta_5 = U(x_1), \\
& \vdots \\
& \delta_{N-4} + 502\delta_{N-3} + 14608\delta_{N-2} + 88234\delta_{N-1} + 156190\delta_N + 88234\delta_{N+1} + 14608\delta_{N+2} + 502\delta_{N+3} + \delta_{N+4} = U(x_N), \\
& \frac{9}{h} (-\delta_{N-4} - 246\delta_{N-3} - 4046\delta_{N-2} - 11326\delta_{N-1} + 11326\delta_{N+1} + 4046\delta_{N+2} + 246\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) = U'(x_N), \\
& \frac{72}{h^2} (\delta_{N-4} + 118\delta_{N-3} + 952\delta_{N-2} + 154\delta_{N-1} - 2450\delta_N + 154\delta_{N+1} + 952\delta_{N+2} + 118\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) = U''(x_N), \\
& \frac{504}{h^3} (-\delta_{N-4} - 54\delta_{N-3} - 134\delta_{N-2} + 434\delta_{N-1} - 434\delta_{N+1} + 134\delta_{N+2} + 54\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) = U'''(x_N), \\
& \frac{3024}{h^4} (\delta_{N-4} + 22\delta_{N-3} - 32\delta_{N-2} - 86\delta_{N-1} + 190\delta_N - 86\delta_{N+1} - 32\delta_{N+2} + 22\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) = U^{(4)}(x_n)
\end{aligned}$$

olarak $N + 9$ denklem ve $N + 9$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi çözümlenerek

$$\delta_{-4}, \delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}, \delta_{N+4}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve ilk sekiz türevi için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.8 de verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.8. Dokuzuncu dereceden B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	3.79×10^{-6}	8.43×10^{-10}	1.21×10^{-11}	6.28×10^{-13}	6.33×10^{-14}
U_{xx} için L_∞	4.85×10^{-6}	5.01×10^{-9}	1.38×10^{-10}	1.20×10^{-11}	1.89×10^{-12}
U_{3x} için L_∞	1.28×10^{-5}	1.89×10^{-8}	6.79×10^{-10}	6.56×10^{-11}	1.07×10^{-11}
U_{4x} için L_∞	2.79×10^{-5}	1.58×10^{-7}	1.10×10^{-8}	1.79×10^{-9}	4.51×10^{-10}
U_{5x} için L_∞	5.27×10^{-5}	4.79×10^{-7}	4.12×10^{-8}	7.26×10^{-9}	1.88×10^{-9}
U_{6x} için L_∞	1.49×10^{-4}	5.29×10^{-6}	9.32×10^{-7}	2.83×10^{-7}	1.14×10^{-7}
U_{7x} için L_∞	2.26×10^{-4}	1.11×10^{-5}	2.24×10^{-6}	7.15×10^{-7}	2.91×10^{-7}
U_{8x} için L_∞	1.23×10^{-3}	2.70×10^{-4}	1.17×10^{-6}	6.52×10^{-5}	4.16×10^{-5}

5.9. 10. Dereceden B-spline

10. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılırsa $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için yaklaşım

$$\begin{aligned} U(x_m) = u(x_m) = e^{-(x_m/5)^2} = & \delta_{m-5} + 1013\delta_{m-4} + 47840\delta_{m-3} \\ & + 455192\delta_{m-2} + 1310354\delta_{m-1} + 1310354\delta_m \\ & + 455192\delta_{m+1} + 47840\delta_{m+2} + 1013\delta_{m+3} + \delta_{m+4} \end{aligned}$$

olacaktır. Yaklaşım açık olarak yazılırsa sırasıyla $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \delta_{-5} + 1013\delta_{-4} + 47840\delta_{-3} + 455192\delta_{-2} + 1310354\delta_{-1} \\ + 1310354\delta_0 + 455192\delta_1 + 47840\delta_2 + 1013\delta_3 + \delta_4 = U(x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{10}{h} (-\delta_{N-5} - 501\delta_{N-4} - 14106\delta_{N-3} - 73626\delta_{N-2} - 67956\delta_{N-1} &= U'(x_N), \\
+67956\delta_N + 73626\delta_{N+1} + 14106\delta_{N+2} + 501\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) & \\
\frac{90}{h^2} (\delta_{N-5} + 245\delta_{N-4} + 3800\delta_{N-3} + 7280\delta_{N-2} - 11326\delta_{N-1} &= U''(x_N), \\
-11326\delta_N + 7280\delta_{N+1} + 3800\delta_{N+2} + 245\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) & \\
\frac{720}{h^3} (-\delta_{N-5} - 117\delta_{N-4} - 834\delta_{N-3} + 798\delta_{N-2} + 2604\delta_{N-1} &= U'''(x_N), \\
-2604\delta_N - 798\delta_{N+1} + 834\delta_{N+2} + 117\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) & \\
\frac{5040}{h^4} (\delta_{N-5} + 53\delta_{N-4} + 80\delta_{N-3} - 568\delta_{N-2} + 434\delta_{N-1} &= U^{(4)}(x_N) \\
+434\delta_N - 568\delta_{N+1} + 80\delta_{N+2} + 53\delta_{N+3} + \delta_{N+4}) &
\end{aligned}$$

olarak $N + 10$ denklem ve $N + 10$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Denklem sistemi çözülerek

$$\delta_{-5}, \delta_{-4}, \delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}, \delta_{N+4}$$

bilinmeyenleri bulunabilir. Bilinmeyenler kullanılarak

$$u(x) = e^{-(x/5)^2}$$

fonksiyonu için hata normları, fonksiyonun kendisi ve ilk dokuz türevi için hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.9 da verilmiştir. Sonuçlar tabloya yazılırken 10^{-15} den küçük gelen L_∞ hataları 0 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.9. Onuncu dereceden B-spline fonksiyonu için hata normları					
N	50	100	150	200	250
U için L_∞	0	0	0	0	0
U_x için L_∞	2.70×10^{-6}	1.76×10^{-10}	1.80×10^{-12}	7.97×10^{-14}	9.06×10^{-15}
U_{xx} için L_∞	2.45×10^{-6}	7.94×10^{-10}	1.08×10^{-11}	5.61×10^{-13}	5.64×10^{-14}
U_{3x} için L_∞	7.73×10^{-6}	4.22×10^{-9}	1.23×10^{-10}	1.07×10^{-11}	1.70×10^{-12}
U_{4x} için L_∞	1.34×10^{-5}	2.16×10^{-8}	7.08×10^{-10}	6.67×10^{-11}	1.08×10^{-11}
U_{5x} için L_∞	2.91×10^{-5}	1.27×10^{-7}	9.52×10^{-9}	1.58×10^{-9}	3.97×10^{-10}
U_{6x} için L_∞	6.06×10^{-5}	5.42×10^{-7}	4.29×10^{-8}	7.37×10^{-9}	1.90×10^{-9}
U_{7x} için L_∞	1.38×10^{-4}	4.23×10^{-6}	7.99×10^{-7}	2.48×10^{-7}	9.96×10^{-8}
U_{8x} için L_∞	3.63×10^{-4}	1.24×10^{-5}	2.33×10^{-6}	7.25×10^{-7}	2.95×10^{-7}
U_{9x} için L_∞	1.03×10^{-3}	2.15×10^{-4}	9.95×10^{-5}	5.68×10^{-5}	3.63×10^{-5}

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

2. dereceden 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar test pobleminde kullanıldığında birinci mertebeden türev için elde edilen hata normları bir önceki bölümde hesaplanmıştı. Kıyaslama yapılabilmesi için sonuçlar Çizelge 6.1 de tekrar verilmiştir. 2. dereceden başlayarak 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar için alt konum aralık sayıları arttırıldığında veya başka bir ifade ile alt konum uzunlukları azaltıldığında birinci mertebeden türev için elde edilen hataların azaldığı açıkça görülmektedir. B-spline fonksiyonlar karşılaştırıldığında ise birinci mertebeden türev için en düşük hatanın en yüksek dereceden B-spline fonksiyon kullanıldığında geldiği de açıkça görülmektedir.

Çizelge 6.1: Birinci mertebeden türev için elde edilen hata normları

Metotlar	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
2. Der. B-spline	1.15×10^{-2}	2.62×10^{-3}	1.17×10^{-3}	6.54×10^{-4}	4.16×10^{-4}
3. Der. B-spline	1.17×10^{-3}	6.12×10^{-5}	1.17×10^{-5}	3.66×10^{-6}	1.49×10^{-6}
4. Der. B-spline	4.61×10^{-4}	1.72×10^{-5}	3.08×10^{-6}	9.42×10^{-7}	3.80×10^{-7}
5. Der. B-spline	1.21×10^{-4}	1.18×10^{-6}	9.55×10^{-8}	1.65×10^{-8}	4.27×10^{-9}
6. Der. B-spline	4.88×10^{-5}	2.57×10^{-7}	1.80×10^{-8}	2.96×10^{-9}	7.45×10^{-10}
7. Der. B-spline	1.81×10^{-5}	2.86×10^{-8}	9.50×10^{-10}	9.16×10^{-11}	1.51×10^{-11}
8. Der. B-spline	8.77×10^{-6}	5.67×10^{-9}	1.50×10^{-10}	1.32×10^{-11}	2.08×10^{-12}
9. Der. B-spline	3.79×10^{-6}	8.43×10^{-10}	1.21×10^{-11}	6.28×10^{-13}	6.33×10^{-14}
10. Der. B-spline	2.70×10^{-6}	1.76×10^{-10}	1.80×10^{-12}	7.97×10^{-14}	9.06×10^{-15}

3. dereceden 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar test pobleminde kullanıldığında ikinci mertebeden türev için elde edilen hata normları bir önceki bölümde hesaplanmıştı. Kıyaslama yapılabilmesi için sonuçlar Çizelge 6.2 de tekrar verilmiştir. 3. dereceden başlayarak 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar için alt konum aralık sayıları arttırıldığında veya başka bir ifade ile alt konum uzunlukları azaltıldığında ikinci mertebeden türev için elde edilen hataların azaldığı açıkça görülmektedir. B-spline fonksiyonlar karşılaştırıldığında ise aynı birinci türev

için elde edilen durumda olduğu gibi ikinci mertebeden türev için elde edilen en düşük hatanın en yüksek dereceden B-spline fonksiyon kullanıldığında geldiği de açıkça görülmektedir.

Çizelge 6.2: İkinci mertebeden türev için elde edilen hata normları

Metotlar	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
3. Der. B-spline	6.61×10^{-3}	1.62×10^{-3}	7.15×10^{-4}	4.01×10^{-4}	2.57×10^{-4}
4. Der. B-spline	5.45×10^{-4}	3.27×10^{-5}	6.38×10^{-6}	2.01×10^{-6}	8.22×10^{-7}
5. Der. B-spline	2.55×10^{-4}	1.20×10^{-5}	2.22×10^{-6}	6.89×10^{-7}	2.78×10^{-7}
6. Der. B-spline	6.47×10^{-5}	7.85×10^{-7}	6.53×10^{-8}	1.14×10^{-8}	2.96×10^{-9}
7. Der. B-spline	2.70×10^{-5}	1.99×10^{-7}	1.46×10^{-8}	2.43×10^{-9}	6.17×10^{-10}
8. Der. B-spline	1.07×10^{-5}	2.26×10^{-8}	7.77×10^{-10}	7.43×10^{-11}	1.22×10^{-11}
9. Der. B-spline	4.85×10^{-6}	5.01×10^{-9}	1.38×10^{-10}	1.20×10^{-11}	1.89×10^{-12}
10. Der. B-spline	2.45×10^{-6}	7.94×10^{-10}	1.08×10^{-11}	5.61×10^{-13}	5.64×10^{-14}

4. dereceden 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar test pobleminde kullanıldığında üçüncü mertebeden türev için elde edilen hata normları bir önceki bölümde hesaplanmıştı. Kıyaslama yapılabilmesi için sonuçlar Çizelge 6.3 de tekrar verilmiştir.

Çizelge 6.3: Üçüncü mertebeden türev için elde edilen hata normları

Metotlar	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
4. Der. B-spline	3.93×10^{-3}	8.88×10^{-4}	3.89×10^{-4}	2.18×10^{-4}	1.39×10^{-4}
5. Der. B-spline	4.48×10^{-4}	2.27×10^{-5}	4.33×10^{-6}	1.36×10^{-6}	5.52×10^{-7}
6. Der. B-spline	2.20×10^{-4}	8.29×10^{-6}	1.51×10^{-6}	4.63×10^{-7}	1.87×10^{-7}
7. Der. B-spline	6.57×10^{-5}	6.17×10^{-7}	4.50×10^{-8}	8.80×10^{-9}	2.31×10^{-9}
8. Der. B-spline	3.14×10^{-5}	1.57×10^{-7}	1.12×10^{-8}	1.89×10^{-9}	4.82×10^{-10}
9. Der. B-spline	1.28×10^{-5}	1.89×10^{-8}	6.79×10^{-10}	6.56×10^{-11}	1.07×10^{-11}
10. Der. B-spline	7.73×10^{-6}	4.22×10^{-9}	1.23×10^{-10}	1.07×10^{-11}	1.70×10^{-12}

Çizelge 6.3 incelendiğinde 4. dereceden başlayarak 10. dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar için alt konum aralık sayıları arttırıldığında veya başka bir ifade

ile alt konum uzunlukları azaltıldığında üçüncü mertebeden türev için elde edilen hataların azaldığı açıkça görülmektedir. B-spline fonksiyonlar karşılaştırıldığında ise aynı birinci ve ikinci mertebeden türev için elde edilen durumda olduğu gibi üçüncü mertebeden türev için elde edilen en düşük hatanın en yüksek dereceden B-spline fonksiyon kullanıldığında geldiği açıkça görülmektedir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bir çok uygulama alanı olan birinci dereceden onuncu dereceye kadarki B-spline fonksiyonlar incelenmiştir. Öncelikle birinci dereceden onuncu dereceye kadarki tüm B-spline fonksiyonlar indirgeme bağıntısı kullanılarak çıkartılmıştır. Çıkartılan B-spline fonksiyonların ve türevlerinin tanımlı oldukları aralık üzerindeki şekilleri çizilmiş ve süreklilik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca B-spline fonksiyonların kaç aralığı örttükleri ve bir alt aralıkta bulunan şekil fonksiyonlarının sayısı da görsel olarak gösterilmek için grafikleri çizilmiştir. Çıkartılan spline fonksiyonların nasıl uygulandığını gösterebilmek için bir test problemi kullanılmış ve analitik olarak bilinen bir fonksiyon ve türevlerine nasıl yaklaşım yapıldığı her bir spline fonksiyon için incelenmiştir. Elbetteki yüksek dereceden B-spline fonksiyon kullanılması işlem maliyetlerini ve programların bilgisayarlardaki çalışma sürelerini arttırmaktadır. Fakat elde edilen sonuçlar kıyaslandığında ise türevlere yapılan yaklaşımların B-spline fonksiyonun derecesi arttığında daha iyi olduğu test probleminden görülmektedir.

Bilim insanları genellikle 8. dereceye kadarki B-spline fonksiyonları interpolasyon polinomu olarak ve diferensiyel denklemlerin çözümlerinde yoğun olarak kullanmıştır. Bu çalışmada ise literatürde hemen hemen hiç kullanılmayan 8., 9. ve 10. dereceden B-spline fonksiyonların çıkartılması yapılmıştır. Bilindiği üzere B-spline fonksiyonlar ile bilinmeyen fonksiyonun türevlerine de yaklaşım yapılabilir. Bu durumu göstermek için seçilen test probleminde de görüldüğü üzere çıkartılması yapılan 8., 9. ve 10. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanıldığında bilinmeyen fonksiyonun yüksek mertebeden türevlerine de yüksek doğruluklu yaklaşımlar yapılabilir. Dolayısıyla elde edilen 8., 9. ve 10. dereceden B-spline fonksiyonlar interpolasyon polinomu olarak veya yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Cheney W., Kincaid D., 2008, Numerical Mathematics and Computing, Thomson Brooks/Cole, p.763.
- Cox, M.G, 1972, "The numerical evaluation of B-splines," J. Inst. Math. App., 10, p.134-149.
- Curry, H. B., Schoenberg I. J., 1947, On spline distributions and their limits: the Polya distribution functions, Abstract 380t, Bull. Am. Math. Soc., 53, 1114.
- De Boor, C., 1978, A practical guide to splines, Springer-Verlag, p.392.
- De Boor, C., 1972, On calculating with B-splines, J. Approximation Theory, 6, p.50-62.
- Eagle, A. 1928, On the relation between the Fourier constants of a periodic function and the coefficients determined by harmonic analysis, Phil. Mag., 5, p.113-132.
- Favard, J. ,1940, Sur l'interpolation, J. Math. Pures Appl. (9), 19, p.281-306.
- Golumb, M., Weinberger H., 1959, Optimal approximation and error bounds, in On Numerical Approximation, R. E. Langer, Ed., University of Wisconsin Press, p.117-190.
- Haradhan Chel H, Bora P.K., Ramchiary K.K., 2021, A fast technique for hyper-echoic region separation from brain ultrasound images using patch based thresholding and cubic B-spline based contour smoothing, Ultrasonics Volume 111, 106304.
- Holladay, J. C. ,1957, A smoothest curve approximation, Math. Tables Aids Computation, 11, p.233-243.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Höllig, Hörner, 2013, Approximation and modeling with B-splines, SIAM, p.214.

Iqbal A., Abd Hamid N.N., Md. Ismail A.I., 2020, Cubic B-spline Galerkin method for numerical solution of the coupled nonlinear Schrödinger equation, Mathematics and Computers in Simulation, Volume 174, p.32-44.

Iqbal A., Abd Hamid N.N., Md. Ismail A.I., Abbas M., 2021, Galerkin approximation with quintic B-spline as basis and weight functions for solving second order coupled nonlinear Schrödinger equations, Mathematics and Computers in Simulation, Volume 187, p.1-16.

Karakoc S. B. G., Omrani K., Sucu D., 2021, Numerical investigations of shallow water waves via generalized equal width (GEW) equation, Applied Numerical Mathematics, Volume 162, p.249-264.

Maclaren, D. H. 1958, Formulas for fitting a spline curve through a set of points," Boeing Appl. Math. Report #2.

Meyers, L. F., Sard A. 1950, Best interpolation formulas, J. Math. and Phys., 29, p.198-206.

Meyers, L. F., Sard A. 1950, Best approximate integration formulas, J. Math. and Phys., 29, p.118-123.

Mirzaee F., Alipour S. 2020, Quintic B-spline collocation method to solve n-dimensional stochastic Itô-Volterra integral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 384, 113153.

Mittal R.C., Goel R., Ahlawat N., 2021, An Efficient Numerical Simulation of a Reaction-Diffusion Malaria Infection Model using B-splines Collocation, Chaos, Solitons & Fractals Volume 143, 110566.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Quade, W., Collatz L., 1938, Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen, Aka. Wiss. (Math-Phys. KI), 30, p.383-429.
- Roul P., 2020, A fourth order numerical method based on B-spline functions for pricing Asian options, Computers & Mathematics with Applications Volume 80, Issue 3, p.504-521.
- Runge, C., 1901, Über die Darstellung willkiirlicher Funktionen und die Interpolation zwischen aquidistanten Ordinaten, Z. Angew. Math. Phys., 46, p.224-243.
- Sard, A., 1949, Best approximate integration formulas, best approximation formulas, Am. J. Math., 71, p.80-91.
- Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing of graduation, a first class of analytic approximation formulae, Quarterly of Applied Mathematics, 4, p.112-141.
- Schoenberg, I. J., A. Whitney, 1949, Sur la positivite des determinants de translations des fonctions de frequence de Polya avec une application a une probleme d'interpolation par les fonctions 'spline', Compt. Rend., 228, p.1996-1998.
- Schoenberg, I. J., A. Whitney, 1953 On Polya frequency functions III. The positivity of translation determinants with application to the interpolation problem by spline curves, Trans. Am. Math. Soc., 74, p.246-259.
- Schoenberg, I. J., 1958, Spline functions, convex curves and mechanical quadrature, Bull. Am. Math. Soc., 64, p.352-357.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Schoenberg, I.J., 1967 On spline functions, in Inequalities, O. Shisha, Ed. Academic Press, New York, p.255-291.

Schumaker, L.L., 2007, Spline functions: Basic Theopry., Cambridge University Press, p.582.