Braided Çaprazlanmış Modüllerin Sınıflandırılması

Mustafa Mücahid Toker

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Aralık 2020

Classification of Braided Crossed Modules

Mustafa Mücahid Toker

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

December 2020

Braided Çaprazlanmış Modüllerin Sınıflandırılması

Mustafa Mücahid Toker

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç.Dr. Alper Odabaş

Bu tez ESOGÜ BAP tarafından 2020-2970 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.

Aralık 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç.Dr. Alper Odabaş danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Braided Çaprazlanmış Modüllerin Sınıflandırılması**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 14/12/2020

Mustafa Mücahid Toker

OZET

Cebirin bir bilgisayar uygulaması olan GAP (Group, Algortima ve Programlama), yeni matematiksel yapıların bilgisayar ortamına aktarılmasında birçok avantajları olan güçlü bir programlama dilidir. Whitehead tarafından tanımlanan çaprazlanmış modül kavramı bir cebirsel sistemdir. Gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin GAP ortak paketi XMod, Wensley vd. tarafından geliştirilmiştir.

Bu tezin temel amacı birçok yeni fonksiyonu GAP a eklemek, yüksek mertebeden çaprazlanmış modüllere uygulamasını geliştirmek ve braided (örgülü) çaprazlanmış modül gibi 3-boyutlu cebirsel sistemleri inceleyerek program içerisine yerleştirmektir. Bu yaklaşım, daha yüksek boyutlu cebirsel yapıların genelleştirilmesini kolaylaştıracaktır. Bu avantajlar combinatorial cebir teorisinde ve cebirsel topolojinin önemli bir aracı olan simplisel teorisindeki hesaplamalar için önemli yer teşkil edecektir.

Anahtar Kelimeler : Çaprazlanmış modül, örgü, GAP

SUMMARY

The powerful computer algebra system GAP (Group, Algorithm and Programming) provides a high level programming language with several advantages for coding of new mathematical structures. Crossed modules introduced by Whitehead is one of important algebraic system. The GAP share package on crossed modules over group, XMod, has been developed by Wensley et al.

The main objective of this thesis is to add many new functions to the GAP and to develop in the direction of application to higher dimensional crossed modules and to give some analogue to other three dimensional algebraic systems such as bradied crossed modules. This facilities will be important for specific calculations in combinatorial algebra theory and in simplicial theory which is an important tool in algebraic topology. This also given many applications to theoretical computer sciences.

Keywords : Crossed modules, brading, GAP

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Hocam, sayın **Doç. Dr. Alper Odabaş**'a, kıymetli eşim ve aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Grup cebirsel yapısı, 1-tip olarak adlandırılan bir cebirsel modeldir. Yani

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{B} & : & Grp & \longrightarrow & \textit{CW-kompleks} \\ & & G & \rightsquigarrow & \mathcal{B}(G) \end{array}$$

funktoru

$$\pi_1(\mathcal{B}(G)) \cong G \text{ ve } \pi_i(\mathcal{B}(G)) = 0 \ \ (i > 1)$$

özelliğini sağlayan bir sınıflandırma funktorudur. Bununla birlikte X, *CW-kompleks*

$$\pi_j(X) = 0$$

olmak üzere, X, $\mathcal{B}\pi_1(X)$ nin homotopi tipidir. Çaprazlanmış modüller (crossed modules) 2-tip adlandırılan bir cebirsel modeldir. Bu yapı Whitehead, 1948 tarafından inşa edilmiştir. Kısaca bu cebirsel yapı G ve N gruplar olmak üzere

$$\left(G,\ N,\ N \overset{\partial \sim \text{hom}}{\longrightarrow} G,\ \begin{array}{ccc} G \times N & \overset{\cdot}{\longrightarrow} & N \\ (g,n) & \longmapsto & n^g \end{array},\ 2 \text{ aksiyom} \right)$$

Aksiyomlar :

1. $\partial(n^g) = g\partial(n)g^{-1} \quad (g \in G, n \in N)$
2. $n'^{\partial(n)} = nn'n^{-1} \quad (n, n' \in N)$

biçimindedir. Böylece Whitehead bu yapıyı tanımlayarak $\partial : N \longrightarrow G$ çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{B} & : & XMod & \longrightarrow & \textit{CW-kompleks} \\ & & (N \longrightarrow G) & \rightsquigarrow & \mathcal{B}(N \longrightarrow G) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} (\pi_1\mathcal{B})(N \longrightarrow G) & \cong & coker\partial \\ (\pi_2\mathcal{B})(N \longrightarrow G) & \cong & ker\partial \\ (\pi_j\mathcal{B})(N \longrightarrow G) & = & 0 \quad (j > 2) \end{array}$$

şeklinde sınıflandırma funktoru elde edilmiştir. Böylece (bağlantılı) X, *CW-kompleks*, $(\pi_j(X) = 0, j > 2)$ $\mathcal{B}(N \longrightarrow G)$ nin homotopi tipidir.

Çaprazlanmış modüller, homolojiksel cebirin birçok dalında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin

- iki homoloji grupları
- topolojik grupların temel gruboidleri
- K-theory, vb.

Bununla birlikte, çaprazlanmış modüllerin otomorfizm yapısı gözönüne alındığında, çaprazlanmış kare (crossed square) kavramı karşımıza çıkmaktadır. Bu yapı cebirsel K-theory de uygulama alanı bulmaktadır. Temel çaprazlanmış kare, Van Kampan Teoremini Brown ve Loday, 1987 genelleştirmiştir.

Conduché, 1984 2-çaprazlanmış modül yapısını tanımlamış olup 3-tip cebirsel modeldir. Bu cebirsel modelin bir kısmı braided (örgülü) çaprazlanmış modül" olarak adlandırılmıştır. Şöyleki $\partial : N \longrightarrow G$ çaprazlanmış modül üzerine örgü

$$\{,\} : G \times G \longrightarrow N$$

fonksiyonu $a, b, c \in G$ ve $n \in N$ olmak üzere

1. $\{a, bc\} = \{a, b\}^c\{a, c\}$
2. $\{ab, c\} = \{b, c\}\{a, c\}^b$
3. $\partial\{a, b\} = [b, a]$
4. $\{a, \partial(n)\} = n^{-1}n^a$
5. $\{\partial(n), b\} = (n^{-1})^b n$

şartlarını sağlıyorsa $\{,\}$ fonksiyonuna, ∂ nın bir örgüsü ve $\partial : N \longrightarrow G$ çaprazlanmış modülüne ise braided (örgülü) çaprazlanmış modül denir. Örgülü çaprazlanmış modüller kategorisini **BrXMod** ile göstereceğiz.

Brown ve Gilbert, 1989 örgülü çaprazlanmış modüllerin 3-tip den bir cebirsel model olduğunu göstermiştir. Daha sonra, bu çalışmada **2-XMod**, 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ve $\textbf{SimpGrp}_{\leq 2}$ Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel gruplar kategorisi olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
\textbf{BrXMod} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \textbf{2-XMod} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \textbf{SimpGrp}_{\leq 2} &
\end{tikzcd}$$

kategorilerinin denkliğini (indirgenmiş) göstermişlerdir.

Joyal ve Street, 1986 kategorisel grup üzerinde örgü kategori ile örgülü çaprazlanmış modül kategorisinin birbirine denk olduğunu göstermiştir.

Bu tez çalışmasında örgülü çaprazlanmış modüllerin bilgisayar cebir (computer algebra) sistemleri kullanılarak bilgisayar ortamına aktarılması amaçlanmaktadır. Böylelikle karmaşık, teorik örgülü çaprazlanmış modül cebirsel yapsının uygulama alanı bularak sınıflandırılmasına olanak sağlanacaktır. Bilgisayar cebir sistemleri, matematiksel formüllerin işlenmesinde kullanılan yazlılım paketlerinin oluşturduğu sistemlerdir. Bir Bilgisayar Cebir sisteminin temel amacı, karmaşık ve zor cebirsel işlemlerin hesaplanmasını ve yeni cebirsel yapıların tanımlanması otomatik hale getirmektir. Bilgisayar cebir sistemi ile geleneksel bir hesap makinesi arasındaki temel fark, cebirsel denklemleri sayısal olarak değil sembolik olarak ele alma becerisidir. Bu sistemlerin belirli kullanımları ve yetenekleri bir sistemden diğerine büyük ölçüde değişir, ancak amaç aynı kalır: sembolik denklemlerin manipülasyonu. Bilgisayar Cebir sistemleri genellikle denklemlerin grafiğini çizmek için olanaklar içerir ve kullanıcının kendi prosedürlerini tanımlaması için bir programlama dili sağlar. Bilgisayar Cebir sistemleri yalnızca matematiğin birçok üniversitede öğretilme şeklini değiştirmekle kalmamış, aynı zamanda dünya çapındaki matematikçiler için esnek bir araç sağlamıştır. Popüler bilgisayar cebir sistemleri arasında

- Maple,
- Matlab,
- Mathematica,
- MathCAD,
- Sage,
- CoCoA,
- Magma,
- GAP

bulunur.

Bu tez çalışmasında cebir ve sayılar teorisi alanında en etkin bilgisayar cebir sistemi olan GAP (Group, Algorithm and Programming) *GAP, Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.0* 2020 kullanılmıştır. GAP, kendine özgü bir programlama diline ve bu programlama dili ile yazılmış, cebirsel algoritmaları uygulayan binlerce fonksiyondan oluşan bir kütüphaneye sahiptir. Ayrıca farklı cebirsel yapılar için kullanıcılar tarafından geliştirilen büyük veri kütüphaneleri sağlar. Bu veri kütüphaneleri GAP paketleri olarak adlandırılır.

GAP, grupları ve grup temsillerini, halkaları, vektör uzaylarını, cebirleri, kombinatoryal yapıları ve diğer pekçok cebirsel yapıyı araştırma ve öğretimde kullanılır. Ayrıca açık kaynak kodlu ve ücretsiz bir sistem olmasının verdiği avantajla kaynak kodları serbestçe dağıtılır ve diğer kullanıcıların değiştirmesine ve geliştirmesine izin verilir. Birçok sembolik problem son derece büyük hesaplama ve yüksek dereceden algoritmalar gerektirir. Bu nedende bu tür problemlerin çözümü yüksek performanslı hesaplama (high-performance computing (HPC)) sistemleri de dâhil olmak üzere hem büyük hem de küçük ölçekli paralel sistemlerin uygulanmasını gerektirir. Yaygın çok çekirdekli sistemlerin mevcudiyeti, küçük paylaşımlı bellek bilgisayarlarında sembolik hesaplama için etkin destek sağlama ihtiyacını artırmaktadır. Problemlerin büyüklüğü ve karmaşıklığının birlikte ele alınmasıyla, dağıtılmış bellek sistemleri kümelerinde ve potansiyel olarak tam gelişmiş GAP-HPC sistemleri için sembolik hesaplama yöntemleri geliştirilmektedir. (ayrıntılar için Behrends vd., 2016 çalışmasına bakınız.)

GAP programının cebir ve sayılar teorisinde çok güçlü olmasının temel sebeplerinden birisi grupların sınıflandırılması probleminin 2000. mertebeye kadar çözülmüş olmasıdır. Grupların izomorfizm farkıyla sınıflandırılması için p-gruplarını kullanma fikri ilk olarak Eamonn A O'Brien, 1990 çalışmasıyla ortaya atılmıştır. Edward Anthony O'Brien, 1991, Eick ve E. O'Brien, 1999, Besche ve Eick, 1999 çalışmalarında sırasıyla 256, 512 ve 1000. mertebeye kadar olan grupların sınıflandırılması yapılmıştır. 2002 yılında milenyum projesi adıyla Besche, Eick ve Eamonn A O'Brien, 2002 tarafından 2000. mertebeye kadar grupların izomorfizm altında sınıflandırılmıştır. Ancak 1024. mertebe için sınıflandırılma halen yapılabilmiş değildir. 2000 mertebeye kadar olan sınıflandırma için elde edilen 423 milyondan fazla grup *SmallGroup* kütüphanesi adı altında GAP programına aktarılmıştır. Bu sınıflandırma teorik cebir konularına geniş bir uygulama alanı kazandırılmış ve elde edilen birçok yeni örnekler yardımıyla farklı cebirsel yapıların anlaşılması ve geliştirilmesi sağlanmıştır.

SmallGroup kütüphanesinden herhangi bir grubu üretmek için n grubun mertebesi ve m ise izomorfizm sınıfını göstermek üzere *SmallGroup(n,m)* fonksiyonu kullanılır.

Örneğin eleman sayısı 6 olan (6. mertebeden) izomorfizm farkıyla yalnızca 2 grup bulunur. Bu gruplar $S_3 =< x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^3 = e >$ simetrik grubu ve $C_6 = \langle x \rangle = \{e = x^0, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, 6. mertebeden devirli grubudur. Aşağıdaki GAP oturumunda *SmallGroup* kütüphanesi kullanılarak S_3 ve C_6 grupları oluşturulmuştur.

```
gap> S3 := SmallGroup(6,1);
<pc group of size 6 with 2 generators>
gap> StructureDescription(S3);
"S3"
gap> GeneratorsOfGroup(S3);
[ f1, f2 ]
gap> Elements(S3);
[ <identity> of ..., f1, f2, f1*f2, f2^2, f1*f2^2 ]
gap> C6 := SmallGroup(6,2);
<pc group of size 6 with 2 generators>
gap> StructureDescription(C6);
"C6"
gap> NumberSmallGroups(6);
2
```

Yukarıda ki GAP oturumunda kullanılan

- *StructureDescription* fonksiyonu grubunun hangi izomorfizm sınıfından olduğunu,
- *GeneratorsOfGroup* fonksiyonu grubun üreteçlerini,
- *Elements* fonksiyonu ise grubun elemanlarını,
- *NumberSmallGroups* fonksiyonu verilen mertebeden izomorfizm farkıyla oluşturulabilecek grupların sayısını

bulur. *SmallGroup* fonksiyonu varsayılan olarak üretilen grupları polycyclic grup (PC group) biçiminde oluşturur. Burada f1 ve f2 ifadesi oluşturulan grubun üreteçlerini göstermektedir. Cayley teoreminden herhangi bir G grubuna izomorf olan bir permütasyonik grup bulunabilir. Çoğu zaman PC gruplar yerine permutasyonik gruplar üzerinden işlemler yapmak daha kolaydır. *IsomorphismPermGroup(G)* fonksiyonu H bir permütasyonik grup olmak üzere $f : G \longrightarrow H$ grup izomorfizmini verir. *Range(f)* fonksiyonu ile H permutasyonik grubuna ulaşılır.

```
gap> f := IsomorphismPermGroup(G);;
gap> H := Range(f);
Group([ (1,2)(3,6)(4,5), (1,3,5)(2,4,6) ])
gap> StructureDescription(H);
"S3"
gap> Elements(H);
[ (), (1,2)(3,6)(4,5), (1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,3)(5,6),
(1,5,3)(2,6,4), (1,6)(2,5)(3,4) ]
```

SmallGroup kütüphanesinin bir diğer fonksiyonu *SmallGroupsInformation(n)* fonksiyonu n. merteben gruplar hakkında bilgi verir.

```
gap> SmallGroupsInformation(64);
  There are 267 groups of order 64.
  They are sorted by their ranks.
     1 is cyclic.
     2 - 54 have rank 2.
     55 - 191 have rank 3.
     192 - 259 have rank 4.
     260 - 266 have rank 5.
     267 is elementary abelian.
```

AllSmallGroups(n) fonksiyonu n. mertebeden (izomorfizm farkıyla) tüm grupları oluşturur. Aşağıdaki GAP oturumunda 8. mertebeden grupların izomorfizm sınıfları oluşturulmuş ve bu izomorfizm sınıfları içerisinde hangilerinin abelyan olduğu gösterilmektedir.

```
gap> A := AllSmallGroups(8);;
gap> List(A, x-> StructureDescription(x));
[ "C8", "C4 x C2", "D8", "Q8", "C2 x C2 x C2" ]
gap> List(A, x-> IsAbelian(x));
[ true, true, false, false, true ]
```

GAP programı bünyesinde binlerce fonksiyon bulundurmasına karşın özel matematiksel konular için kullanıcıların kendi paketlerini geliştirmesi gerekir. GAP'da paket yazımı için geliştirilmiş programlama dili ve yöntemler kullanılır. Bazı paketler, oldukça büyük bir matematiksel yayına eşdeğer bir çalışmayı temsil eder. Bu tür bir çalışmayı kabul etmek için 1996'dan beri paketler için bir hakemlik süreci uygulanmaktadır. Hakemlik denetiminden geçen paketler GAP dağıtımıyla birlikte sunulmaktadır. *LoadPackage* fonksiyonu ile çalışılmak istenilen paket yüklenir. GAP dağıtımıyla birlikte sunulan bazı paketler

- *AutPGrp*, $p-$Grupların Otomorfizm Gruplarının Hesaplanması
- *Circle*, Sonlu Halkaların Adjoint (ek) Grupları
- *GBNP*, Değişmeli olmayan polinomların Gröbner tabanlarının hesaplanması
- *LAGUNA*, Grup cebirlerinin Lie Cebirleri
- *QuaGroup*, Quantum gruplarının hesaplanması

şeklinde verilebilir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, birinci bölümde kısaca 2-tip cebirsel sistem olarak adlandırılan iki denk kategoriden bahsedeceğiz.

- **XMod**, çaprazlanmış modüller ve morfizmleri kategorisi;
- **Cat**1, cat^1-grouplar ve morfizmleri kategorisi;

Ayrıca bu kategoriler arasındaki funktorlar verilerek denklik özellikleri incelenecektir. Bu konuda ayrıntılı bilgi için Tim Porter, 2019 ve Wensley, 2019 çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 1 *G bir grup ve $A \neq \emptyset$ biçiminde bir küme olmak üzere*

$$\begin{array}{cccc} \cdot \ : & G \times A & \longrightarrow & A \\ & (g,a) & \longmapsto & g \cdot a \end{array}$$

fonksiyonu $g, g_0 \in G$ ve $a, a_0 \in A$ olmak üzere

(i) $e \cdot a = a$

(ii) $(gg_0) \cdot a = g \cdot (g_0 \cdot a)$

şartlarını sağlıyorsa $\cdot$ fonksiyonuna G nin A kümesi üzerine bir etkisi denir. A ya ise bir G-küme adı verilir. Özel olarak eğer A bir grup ise ve

(iii) $g \cdot (aa_0) = (g \cdot a)(g \cdot a_0)$

şartı da sağlanıyorsa G grubu A grubu üzerine etki eder denir.

Herhangi bir kategoride etki, split exact sequence (bölünmüş tam dizi) yardımıyla elde edilir.

Tanım 2 *S ve T iki G-küme olsun. Yani*

$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & G \times S & \longrightarrow & S \\ & (g,s) & \longmapsto & g \cdot s \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} * : & G \times T & \longrightarrow & T \\ & (g,t) & \longmapsto & g * t \end{array}$$

etkileri tanımlı olmak üzere $f : S \longrightarrow T$ fonksiyonu $g \in G$ ve $s \in S$ için

$$f(g \cdot s) = g * f(s)$$

şartını sağlıyor ise f fonksiyonuna G-equivariant fonksiyon denir.

Not 1 *Tez boyunca yazım kolaylığı olması sebebiyle, g nin a üzerindeki etkisini göstermek için $g \cdot a$ ifadesi yerine a^g gösterimi kullanılacaktır.*

Örnek 1 *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olmak üzere, G nin N üzerine $(g,a) \longmapsto a^g = g^{-1}ag$ biçiminde tanımlanan etkisine* eşlenik etki *adı verilir. Her grubun kendi üzerine eşlenik etkisi tanımlanabilir.*

Örnek 2 *S ve T herhangi iki grup olmak üzere, T nin S üzerine $(t,s) \longmapsto s^t = s$ biçimiden tanımlanan etkisine* aşikar etki *denir.*

Örnek 3 *S ve T herhangi iki grup olmak üzere, $\alpha : T \to \mathrm{Aut}(S)$ homomorfizmi*

$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & T \times S & \longrightarrow & S \\ & (t,s) & \longmapsto & s^t = \alpha(t)(s) \end{array}$$

şeklinde bir etki tanımlar. Burada $\alpha(t) : S \to S$ biçiminde bir grup homomorfizmidir. Buradaki α homomorfizmleri kullanılarak bir grubun diğeri üzerine tüm etkileri bulunabilir.

2.1 Çaprazlanmış Modüller

$\partial : S \to T$ bir grup homomorfizmi, S ve T nin kendi üzerine eşlenik etkileriyle birlikte bir $\alpha : T \to \mathrm{Aut}(S)$ etkisi verildiğinde, her $s \in S$ ve $t \in T$ için

$$\textbf{X1:} \quad \partial(s^t) = (\partial s)^t$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{X} = (S, T, \partial, \alpha)$ cebirsel yapsına bir *ön çaprazlanmış modül* denir. α etkisi açık olarak belirli ise çoğu zaman $\mathcal{X} = (S, T, \partial)$ veya $\mathcal{X} = (\partial : S \to T)$ ile gösterilir. Bazen (S, ∂) ikilisi bir önçaprazlanmış T-modül olarak adlandırılır. Buradaki S ve T gruplarına $\mathcal{X}$ in *tanım* ve *değer* grubu, ∂ homomorfizmine ise *boundary (sınır)* dönüşümü adı verilir.

$\mathcal{X}$ ön çaprazlanmış modülü, $s_0, s \in S$ olmak üzere

$$\textbf{X2:} \quad {s_0}^{\partial s} = {s_0}^{s}$$

şartını sağlarsa *çaprazlanmış modül* olarak adlandırılır.

Buradaki **X1** şartı ∂ nin T-equivariant olması demektir. **X2** şartı ise *Peiffer özdeşliği* olarak adlandırılır.

2.2 Örnekler

Çaprazlanmış modüller için aşağıdaki standart örnekler verilebilir:

1. $S \trianglelefteq T$ normal alt grup olmak üzere inc $: S \longrightarrow T$ bir içine homomorfizmi ve T nin S üzerine eşlenik etkisi ile birlikte (S, T, inc) *eşlenik çaprazlanmış modülü* elde edilir. Örneğin A_4 alterne grubu ve S_4 simetrik grubu kullanılarak (A_4, S_4, inc) çaprazlanmış modülü elde edilir.

   Tersine (S, T, ∂) herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde *her zaman* $\partial(S) \trianglelefteq T$ elde edilir. Herhangi bir grup homomorfizmi için ise bu durum her zaman geçerli değildir.

2. R-modül tanımında halka yerine bir grup alınmasıyla elde edilen yapı G-modül olarak bilinir. Buna göre M bir G-modül verildiğinde $\partial : M \longrightarrow G$, $m \longmapsto e_G$ homomorfizmi çaprazlanmış modül tanımlar.

   Tersine $\forall s \in S$ için $\partial(s) = e_T$ özelliğinde bir (S, T, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde ker(∂) bir T-modüldür. Bu iki örnekten

$$\begin{tikzcd}
\ker(\partial) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "0"'] & S \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \partial(S) \arrow[d, hook, "i"] \\
T \arrow[r] & T \arrow[r] & T
\end{tikzcd}$$

diyagramı elde edilir. Yani çaprazlanmış modül yapısı, normal alt gruplar ile G-modüller arasında bir yerdedir. Ayrıca burada

$$0 \longrightarrow \ker(\partial) \longrightarrow S \longrightarrow \partial(S) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi oluşmaktadır.

3. Bir S grubu verildiğinde, $\mathrm{Aut}(S)$, S nin tüm otomorfizmlerinin oluşturduğu grup olmak üzere
$$\mathrm{Inn}(S) = \{\sigma_a \mid a \in S\} \subset \mathrm{Aut}(S)$$
biçimindeki iç otomorizm grubu alt grubu elde edilir. Burada σ_a iç otomorfizmi $s \in S$ olmak üzere $\sigma_a(s) = asa^{-1}$ biçiminde tanımlanır ve açıkça $\mathrm{Inn}(S) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(S)$ dir. $\partial : S \longrightarrow \mathrm{Inn}(S)$, $a \longmapsto \sigma_a$ homomorfizmi ve $\mathrm{Inn}(S)$ nin S üzerine
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Inn}(S) \times S & \longrightarrow & S \\ (\sigma_a, s) & \longmapsto & \sigma_a(s) = asa^{-1} \end{array}$$
etkisiyle $(S, \mathrm{Inn}(S), \partial)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Bu çaprazlanmış modüle *otomorfizm çaprazlanmış modül* adı verilir.

4. S abelyan grup olmak üzere, $\mathrm{im}\,(\partial)$ görüntüsü T nin merkezinde kalacak şekildeki herhangi $\partial : S \to T$ homomorfizmi, T nin S üzerine aşikar etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül oluşturur.

5. T, S grubunun bir merkezsel genişlemesi olsun. Bu durumda çekirdeği S nin merkezinde kalacak biçimde bir $\partial : S \to T$ örten homomorfizmi vardır. $s^t = s^{-1}(\partial^{-1}t)s$ biçiminde tanımlanan T nin S üzerine etkisiyle birlikte oluşan çaprazlanmış modüle *merkezsel genişleme çaprazlanmış modül* adı verilir.

6. $\mathcal{X}_1 = (S_1, T_1, \partial_1)$ ve $\mathcal{X}_2 = (S_2, T_2, \partial_2)$ iki çaprazlanmış modül olmak üzere $T_1 \times T_2$ nin $S_1 \times S_2$ üzerine aşikar etkisi ile birlikte elde edilen $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 = (S_1 \times S_2, T_1 \times T_2, \partial_1 \times \partial_2)$ çaprazlanmış modülüne, *çaprazlanmış modüllerin direkt çarpımı* denir.

2.3 Çaprazlanmış Modüllerin Özellikleri

Tanım 3 *$\mathcal{X}_1 = (S_1, T_1, \partial_1)$ ve $\mathcal{X}_2 = (S_2, T_2, \partial_2)$ iki ön çaprazlanmış modül olmak üzere $\zeta : S_1 \to S_2$ ve $\eta : T_1 \to T_2$ homomorfizmleri*

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\partial_1"'] & S_2 \arrow[d, "\partial_2"] \\ T_1 \arrow[r, "\eta"'] & T_2 \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde, etki özelliklerini koruyorsa yani;

$$\partial_2 \circ \zeta = \eta \circ \partial_1, \quad \zeta(s^t) = \zeta(s)^{\eta(t)}$$

şartlarını sağlıyorsa $(\zeta, \eta) : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ ikilisine ön çaprazlanmış modül morfizmi *denir.*

$\mathcal{X}_1$ ve $\mathcal{X}_2$ birer çaprazlanmış modül ise ekstra bir şarta ihtiyaç duyulmadan (ζ, η) ikilisi bir *çaprazlanmış modül morfizmi* olarak adlandırılır. Buradan **PreXMod** ön çaprazlanmış modüller kategori ve **XMod** çaprazlanmış modüller kategorisi elde edilir. Ayrıca, **XMod** kategorisi **PreXMod** kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

$\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1$ ve ζ ile η bir otomorfizm ise (ζ, η) ikilisi $\mathcal{X}_1$ çaprazlanmış modülünün omotomorfizmi olur. Çaprazlanmış modülün otomorfizm grubu Aut$(\mathcal{X}_1)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 4 *$\mathcal{X}_1 = (S_1, T_1, \partial_1)$ ve $\mathcal{X} = (S, T, \partial)$ iki çaprazlanmış modül olmak üzere;*

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "i_{S_1}"] \arrow[d, "\partial_1"'] & S \arrow[d, "\partial"] \\ T_1 \arrow[r, "i_{T_1}"'] & T \end{tikzcd}$$

- *$S_1 \leqslant S$ ve $T_1 \leqslant T$,*

- *∂_1 homomorfizmi ∂ nin S_1 alt grubuna kısıtlanmışı,*
- *T_1 in S_1 üzerine etkisi, T nin S üzerine etkisinin indirgenmişi.*

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{X}_1$ e bir *alt çaprazlanmış modül* denir ve $\mathcal{X}_1 \leqslant \mathcal{X}$ ile gösterilir.

Tanım 5 *$\mathcal{X}_1 \leqslant \mathcal{X}$ olacak şekilde iki çaprazlanmış modül verildiğinde*

$$i_{S_1} : S_1 \to S \quad ve \quad i_{T_1} : T_1 \to T$$

içine homomorfizmleri yardımıyla elde edilen $(i_{S_1}, i_{R_1}) : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$ çaprazlanmış modül morfizmine içine morfizm *adı verilir.*

Tanım 6 *Bir $\mathcal{X}_1$ alt çaprazlanmış modülü verildiğinde*

1. *$T_1 \trianglelefteq T$,*
2. *her $t \in T$ ve $s_1 \in S_1$ için ${s_1}^t \in S_1$,*
3. *her $t_1 \in T_1$ ve $s \in S$ için $s^{-1}s^{r_1} \in S_1$,*

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{X}_1$ çaprazlanmış modülüne normal alt çaprazlanmış modül debir ve $\mathcal{X}_1 \trianglelefteq \mathcal{X}$ ile gösterilir.

Burada çaprazlanmış modülün ${s_1}^s = {s_1}^{\partial s}$ şartından $S_1 \trianglelefteq S$ olduğu açıktır.

Tanım 7 *$\mathcal{X}_1 = (S_1, T_1, \partial_1)$ ve $\mathcal{X}_2 = (S_2, T_2, \partial_2)$ bir $\mathcal{X} = (S, T, \partial)$ çaprazlanmış modülünün iki normal alt çaprazlanmış modülü ve ∂', ∂ nın $[S_1, S_2]$ komütatör alt grubuna kısıtlanmışı olmak üzere olmak üzere $[\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2] = ([S_1, S_2], [T_1, T_2], \partial')$ çaprazlanmış modülüne* komütatör alt çaprazlanmış modül *denir.*

Önerme 1 $[\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2] \trianglelefteq \mathcal{X}$

İspat 1 *$\partial'[s_1, s_2] = [\partial s_1, \partial s_2]$ ve $[s_1, s_2]^{t_1} = [{s_1}^{t_1}, {s_2}^{t_1}]$ olduğundan $[\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2]$ bir alt çaprazlanmış modüldür. Şimdi normallik şartlarını gösterelim.*

1. *$t^{-1}[t_1,t_2]t = [t^{-1}t_1t, t^{-1}t_2t]$ olduğundan $[T_1,T_2] \trianglelefteq T$,*

2. *$[s_1,s_2]^t = [{s_1}^t, {s_2}^t] \in [S_1,S_2]$,*

3. *Komütatör ve etki tanımından $s^{-1}s^{[r_1,r_2]}$ çarpımı,*

$$\left[s^{-1}s^{r_1^{-1}}\right]\left[\left(s^{r_1^{-1}}\right)^{-1}\left(s^{r_1^{-1}}\right)^{r_2^{-1}}\right]\left[\left(s^{r_1^{-1}r_2^{-1}}\right)^{-1}\left(s^{r_1^{-1}r_2^{-1}}\right)^{r_1}\right]\left[\left(s^{r_1^{-1}r_2^{-1}r_1}\right)^{-1}\left(s^{r_1^{-1}r_2^{-1}r_1}\right)^{r_2}\right],$$

biçiminde olup $s^{-1}s^{[r_1,r_2]} \in S_1$ sağlanır ve $[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2] \trianglelefteq \mathcal{X}$ elde edilir.

$(\zeta,\eta) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\ker(\zeta,\eta) \;=\; (\partial\,|_{\ker\zeta} :\ \ker\zeta \to \ker\eta)$$

çaprazlanmış modülüne (ζ,η) nin çekirdeği denir. Buradan

$$\begin{tikzcd}
\ker\zeta \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial|_{\ker\zeta}"'] & S \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\partial"] & S' \arrow[d, "\partial'"] \\
\ker\eta \arrow[r, "i"'] & T \arrow[r, "\eta"'] & T'
\end{tikzcd}$$

diyagramı yardımıyla

$$\begin{aligned}
s \in \ker\zeta \quad &\Leftrightarrow \quad \zeta(s) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \partial'(\zeta(s)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \eta(\partial(s)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \partial(s) \in \ker\eta
\end{aligned}$$

olduğundan $\ker(\zeta,\eta) \leq \mathcal{X}$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 1 $\ker(\zeta,\eta) \trianglelefteq \mathcal{X}$.

İspat 2 *$s \in S, s_1 \in S_1, t \in T$ ve $t_1 \in T_1$ olmak üzere*

1. *$\ker\eta \trianglelefteq T$ olduğu açıktır,*

2. *$\zeta(s_1) = 1$ ve $\zeta(s_1^t) = (\zeta(s_1))^{\eta(t)} = 1^{\eta(t)} = 1$ olup $s_1^t \in \ker\zeta$ elde edilir,*

3. *$\eta(t_1) = 1$ ve $\zeta((s^{-1})^{t_1}s) = (\zeta(s^{-1}))^{\eta t_1}(\zeta(s)) = 1$ olup $(s^{-1})^{t_1}s \in \ker\zeta$ elde edilir.*

Teorem 1 *$\mathcal{X} = (S,T,\partial)$ çaprazlanmış modülünün herhangi bir $\mathcal{X}_1$ normal alt çaprazlanmış modülü verildiğinde grup teorideki bölüm grubuna benzer şekilde bölüm çaprazlanmış modülü tanımlanabilir. T/T_1 bölüm grubunun S/S_1 bölüm grubu üzerine etkisi $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünün etkisi yardımıyla*

$$(S_1 s)^{T_1 r} := S_1(s^t)$$

biçiminde ve $\delta : S/S_1 \to T/T_1$ baundary dönüşümü ise, ∂ yardımıyla

$$\delta(S_1 s) := T_1(\partial(s)).$$

biçiminde tanımlanır. Bölüm çaprazlanmış modülü $\mathcal{X}/\mathcal{X}_1 = (S/S_1, T/T_1, \delta)$ biçiminde gösterilir.

İspat 3 *$\mathcal{X}$ bir çaprazlanmış modül olduğundan*

$$(S_1 s)^{T_1 r} := S_1(s^t)$$

dönüşümünün etki şartlarını sağladığı açıktır. Çaprazlanmış modül şartlarını kontrol edelim.

$$\begin{array}{llcl}
\mathbf{X1}: & \delta((S_1 s)_1^{T_1 t}) & = & \delta(S_1 s^t) \\
 & & = & T_1\partial(s^t) \\
 & & = & T_1(t^{-1}(\partial(s))t) \\
 & & = & (T_1 t^{-1})(T_1\partial(s))(T_1 t) \\
 & & = & (\delta(S_1 s))^{T_1 t}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
\mathbf{X2}: & S_1 s'^{\delta(S_1 s)} & = & S_1 s'^{T_1(\partial(s))} \\
 & & = & S_1(s'^{\partial(s)}) \\
 & & = & S_1(s^{-1}s's) \\
 & & = & (S_1 s^{-1})(S_1 s')(S_1 s) \\
 & & = & (\delta(S_1 s))^{T_1 t}
\end{array}$$

elde edilir.

Şimdi Tim Porter, 2019 çalışmasında sunulan aşağıdaki önemli teoremi verelim.

Teorem 2
Her çaprazlanmış modül bir içine çaprazlanmış modülün bölüm çaprazlanmış modülüdür.

İspat 4 *Herhangi $\mathcal{X} = (S, T, \partial)$, çaprazlanmış modülü verildiğinde, $\epsilon(s) = (1, s)$ biçiminde tanımlanan $\epsilon : S \to T \ltimes S$ dönüşümü ve ${s_1}^{(t,s)} = s^{-1}{s_1}^t s = {s_1}^{t(\partial s)}$ şeklinde verilen $T \ltimes S$ nin S üzerine ektisiyle birlikte;*

X1:

$$\begin{aligned}
(\epsilon(s_1))^{(t,s)} &= (t^{-1}, (s^{-1})^{t^{-1}})(1, s_1)(r, s) \\
&= (1, s^{-1}s_1^t s) \\
&= \left(1, s_1^{(t,s)}\right) \\
&= \epsilon\left(s_1^{(t,s)}\right)
\end{aligned}$$

X2:

$$\begin{aligned}
{s_1}^{\epsilon(s)} &= {s_1}^{(1,s)} \\
&= s^{-1}s_1 s
\end{aligned}$$

şartları sağlandığından $\Gamma_0\mathcal{X} = (S, T \ltimes S, \epsilon)$ çaprazlanmış modülü elde edilir. Ayrıca $\Gamma_1\mathcal{X} = (1, S, 0)$ çaprazlanmış modülü ve

- $\zeta(s) = (\partial(s), s^{-1})$,
- $h(t, s) = t(\partial s), \quad (t_1, s)^t = (t^{-1}t_1 t, s^t)$

biçiminde tanımlanan dönüşümler ve etkiler yardımıyla

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & S \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\epsilon"] & S \arrow[d, "\partial"] \\
S \arrow[r, "\zeta"'] & T \ltimes S \arrow[r, "h"'] & T \\
\Gamma_1\mathcal{X} & \Gamma_0\mathcal{X} & \mathcal{X}
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

biçiminde çaprazlanmış modüllerin kısa tam dizisi elde edilir. Yarı-direkt çarpım özellikleri kullanılarak $(T \ltimes S, T, h)$ nin bir çaprazlanmış modül olduğu kolayca gösterilebilir ve aşikar etkiyle birlikte $(S, S, 1)$ in de bir çaprazlanmış modül olduğu açıktır.

Şimdi $(1, h)$ ve (ϵ, ∂) ikililerinin birer çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim :

- $h(\epsilon(s)) \;=\; h(1, s) \;=\; \partial(s)$,

- $$\begin{aligned} 1({s_1}^{(t,s)}) &= {s_1}^{(t,s)} = s^{-1}{s_1}^t s, \\ (1(s_1))^{h(t,s)} &= {s_1}^{t(\partial(s))} = s^{-1}{s_1}^t s. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \epsilon({s_1}^s) &= (1, {s_1}^s) = (1, s^{-1}s_1 s), \\ (\epsilon(s_1))^{\partial(s)} &= (1, s_1)^{\partial(s)} = (1, s_1)^{(1,\partial(s))} = (1, {s_1}^{\partial(s)}) = (1, s^{-1}s_1 s). \end{aligned}$$

Ayrıca

$$h(\zeta(s)) = h(\partial(s), s^{-1}) = \partial(s)\partial(s^{-1}) = 1.$$

olduğundan $h \circ \zeta = 0$. *elde edilir. Son olarak* $(0, \zeta)$ *ikilisinin bir bir normal alt çaprazlanmış modülün içine dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için* ${s_1}^{-1}{s_1}^{\zeta(s)} = 1$ *olduğunu göstememiz yeterli olduğundan*

$${s_1}^{-1}{s_1}^{\zeta(s)} = {s_1}^{-1}{s_1}^{(\partial s, s^{-1})} = {s_1}^{-1}s{s_1}^{\partial s}s^{-1} = 1.$$

elde edilir.

2.4 Cat^1-gruplar ve Morfizmleri

Cat^1-gruplar kavramı ilk olarak homotopi n-tipleri için cebirsel bir model olarak Loday, 1982 tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde cat^1-grup kavramının iki farklı tanımını vereceğiz. İlk olarak genel kullanılan tanımı verelim.

Tanım 8 *G bir grup ve* $s, t : G \longrightarrow G$ *biçiminde, G üzerinde iki endomorfizm olmak üzere:*

C1: $s \circ t = t$ *and* $t \circ s = s$,

C2: $[\ker s, \ker t] = \{1_G\}$.

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{C} = (G; s, t)$ cebirsel yapısına *cat^1-grup* adı verilir. Buradaki s ve t homomorfzimleri *source* ve *target* fonksiyonu olarak adlandırılır. Ancak *source* ifadesi GAP programında bir fonksiyonun tanım kümesini işaret ettiğinden XMod paketinde *source* ve *target* terimleri yerine *tail* ve *head* terimleri kullanılmaktadır. **C1** şartından herhangi $\mathcal{C}$ cat^1-grubu için:

$$s^2 = s, \quad t^2 = t, \quad \operatorname{im} s = \operatorname{im} t$$

olduğu açıktır.

Şimdi cat^1-grupların, GAP fonksiyonları açısından daha kullanışlı olan ikinci bir tanımını verelim.

Tanım 9 *G bir grup ve $R \leq G$ olmak üzere $t, h : G \longrightarrow R$ örten grup homomorfizmleri ve $e : R \longrightarrow G$ bir gömme fonksiyonu olmak üzere*

$$G \underset{e}{\overset{t,h}{\rightleftarrows}} R$$

C1: $(t \circ e)$ *ve* $(h \circ e)$ *R üzerinde birim fonksiyon,*

C2: $[\ker t, \ker h] = \{1_G\}$.

şartlarını sağlanıyorsa $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ cebirsel yapısına *cat*[1]*-grup* adı verilir.

C1 şartından

$$t \circ e \circ t = t, \quad h \circ e \circ h = h, \quad t \circ e \circ h = h, \quad h \circ e \circ t = t$$

olduğu açıktırç Ayrıca e bir gömme fonksiyonu olduğundan R nin G üzerine $g^r = (e(r))^{-1} g(e(r))$ biçiminde eşlenik etkisinden bahsedilebilir. Ayrıca bir $\mathcal{C}$ cat^1-grubunda $t = h$ ise

$$t \circ e \circ h = h \circ e \circ t$$

olup $\mathcal{C}$ *simetriktir* denir.

Buradaki ikinici tanım ilk tanıma denktir. $\mathcal{C} = (e'; t', h' : G \to R)$ ikinci tanıma göre verilen bir cat^1-grup olmak üzere

$$s = e' \circ t', \quad t = e' \circ h', \quad ,$$

$\operatorname{im} s = \operatorname{im} t = e'R$ elde edilir. Buradan $\ker s = \ker t'$, $\ker t = \ker h'$ ve $s \circ t = e' \circ t' \circ e' \circ h' = e' \circ h' = t$ elde edilir.

Tanım 10 *$\mathcal{C}_1 = (e_1; t_1, h_1 : G_1 \to R_1)$ ve $\mathcal{C}_2 = (e_2; t_2, h_2 : G_2 \to R_2)$ iki cat^1-grup olmak üzere $\gamma : G_1 \to G_2$ ve $\rho : R_1 \to R_2$ homomorfizmleri*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, shift left, "t_1,h_1"] & G_2 \arrow[d, shift left, "t_2,h_2"] \\
R_1 \arrow[r, "\rho"'] \arrow[u, shift left, "e_1"] & R_2 \arrow[u, shift left, "e_2"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde şekilde yani

$$t_2 \circ \gamma = \rho \circ t_1, \quad h_2 \circ \gamma = \rho \circ h_1, \quad e_2 \circ \rho = \gamma \circ e_1.$$

eşitliklerini sağlayak şekilde varsa (γ, ρ) *ikilisine bir cat*^{1}*-grup homomorfizmi denir.*

Örnek 4 *Herhangi bir* $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ *cat*^{1}*-grubu kullanılarak* $\mathcal{C}_1 = (\mathrm{inc}_Q; e \circ t, e \circ h : G \to eR)$ *biçiminde bir cat*^{1}*-grup elde edilir. Ayrıca* (id_G, e) *ikilisinin cat*^{1}*-grup homomorfizmi olduğu kolayca gösterilebilir.* id_G *ve* $e : R \to eR$ *birebir ve örten olduğundan* (id_G, e) *ikilisi aynı zamanda cat*^{1}*-grup izomorfizmidir.*

Bir sonraki ispatta kullanılacak aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilıştir.

Yardımcı Teorem 2 *Bir* $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ *cat*^{1}*-grubu verildiğinde*

$$\begin{array}{rccl} u: & G & \to & \ker t \\ & g & \mapsto & (e(t(g^{-1})))g \end{array}$$

homomorfizmi

1. $u^2 = u,$
2. $t(u(g)) = 1_R, \quad h(u(g)) = (t(g^{-1}))(h(g)), \quad u(e(r)) = 1_G,$
3. $u(g_1 g_2) = (u(g_2))(u(g_1))^{g_2},$
4. $(u(g))^{-1} = g^{-1}(e(t(g))) = (u(g^{-1}))^g.$

şartlarını sağlayacak şekilde vardır.

Önerme 2 *Bir* $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ *cat*^{1}*-grubu verildiğinde* $S = \ker t$ *ve*

$$\begin{array}{rcccl} t' & : & R \ltimes S & \to & R \\ & & (r, s) & \mapsto & t'(r, s) = r \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} h' & : & R \ltimes S & \to & R \\ & & (r, s) & \mapsto & h'(r, s) = r(h(s)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} e' & : & R & \to & R \ltimes S \\ & & r & \mapsto & e'(r) = (r, 1) \end{array}$$

olmak üzere $\mathcal{C}' = (e'; t', h' : R \ltimes S \to R)$*, çaprazlamış modülüne* $\mathcal{C}$ *nin* semidirect formu *denir. Bir çaprazlanmış modül ve semidirect formu izomorftur. Ayrıca* R *nin* S *üzerine etkisi* $(r_0, s_0)^r = (r^{-1} r_0 r, s_0^r)$ *ile verilir.*

İspat 5 *İlk olarak bir $\phi : G \to R \ltimes S$ izomorfizmini*

$$\begin{array}{rcl} \phi : G & \to & R \ltimes S \\ g & \mapsto & (t(g), u(g)) \end{array}$$

biçiminde tanımlayalım. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \phi(g_1)\phi(g_2) &= (t(g_1), u(g_1))(t(g_2), u(g_2)) \\ &= \big((t(g_1))(t(g_2)), (u(g_1))^{t(g_2)}(u(g_2))\big) \\ &= \big(t(g_1g_2), (e(t(g_2)))^{-1}(u(g_1))(e(t(g_2)))(u(g_2))\big) \\ &= \big(t(g_1g_2), (e(t(g_2)))^{-1}g_2g_2^{-1}(u(g_1))(e(t(g_2)))(e(t(g_2)))^{-1}g_2\big) \\ &= (t(g_1g_2), (u(g_2))(u(g_1))^{g_2}) \ = \ \phi(g_1g_2). \end{aligned}$$

olduğundan ϕ bir homomorfizmdir. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} \phi^{-1} : R \ltimes S & \to & G \\ (r, s) & \mapsto & (er)s \end{array}$$

dönüşümünün ϕ tersi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(t(g), (e(t(g^{-1}))g) &= (e(t(g)))(e(t(g^{-1}))g = g, \\ \phi((e(r))s) &= \big((t(e(r)))(t(s)), (e(t(s^{-1})))(e(t(e(r^{-1}))))(e(r))s\big) \\ &= (r, s) \end{aligned}$$

olup ϕ bir izomorfizmdir. Buna göre $(\phi, \mathrm{id}) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ikilisi

$$\begin{aligned} t'(t(g), u(g)) &= t(g), \\ h'^{-1}(h(g)) &= h(g), \\ \phi(e(r)) &= (t(e(r)), (e(t(e(r^{-1}))))(e(r))) = (r, 1) \end{aligned}$$

şartlarını sağladığından bir cat^1-grup izomorfizmidir.

Bir $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ cat^1-grubu verildiğinde $\partial = h|_S$ sınır dönüşümü ve $s^t := s^{e(t)}$ biçiminde tanımlanan R nin S üzerinde etkisiyle birlikte $\mathcal{X} = (S, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü elde edilir. Tersine herhangi bir $\mathcal{X} = (S, R, \partial)$ verildiğinde $G = R \ltimes S$ ve

$$t(r, s) = r, \quad h(r, s) = r(\partial(s)), \quad e(r) = (r, 1).$$

alınarak $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$ elde edilir. S nin G deki içine fonksiyonunu (inclusion) ϵ ile gösterelim bu durumda $\partial = h\epsilon$ elde edilir.

Benzer şekilde bir $(\sigma, \rho) : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ çaprazlanmış modül morfizmi verildiğinde $\gamma(r_1, s_1) = (\rho r_1, \sigma s_1)$ olmak üzere $(\gamma, \rho) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ cat^1-grup morfizmi elde edilir. Tersine bir $(\gamma, \rho) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ cat^1-grup morfizmi verildiğinde $\sigma s = \gamma(1, s)$ olmak üzere $(\sigma, \rho) : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ çarazlanmış modül morfizmi elde edilir.

Yardımcı Teorem 3 *$\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ cat^1-grubu verildiğinde t ve h homomorfizimleri yardımıyla*

$$\begin{array}{rcccl} (t,h) & : & G & \to & R \times R \\ & & g & \mapsto & (t(g), h(g)) \end{array}$$

grup homomorfizmi her zaman tanımlanabilir.

Önerme 3 (Tim Porter, 2019)
Bir R grubu üzerindeki herhangi $\sim$ denklik bağıntısı yardımıyla cat^1-grup tanımlanır.

İspat 6 *$R \times R$ grubunun $\sim$ yardımıyla tanımlanan*

$$G = \{(r_1, r_2) \in R \times R \mid r_1 \sim r_2\}$$

alt grubu G olsun. Aşağıdaki gibi tanımlananan

$$t(r_1, r_2) = r_1, \qquad h(r_1, r_2) = r_2, \qquad e(r) = (r, r).$$

homomorfizmleriyle birlikte $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ bir cat^1-gruptur. $\mathcal{C}$ den elde edilecek çaprazlanmış modülün sınır dönüşümünün tanım kümesi

$$\ker t = \{(r, 1) \mid r \sim 1\}$$

olup bu ise normal alt grup elemanlarında $\sim$ bağıntısına göre 1_R ye denk olan elemanları işaret eder.

2.5 Ön-cat^1-gruplar ve alt-cat^1-gruplar

Çaprazlanmış modül tanımında verilen **X2** şartını sağlamayıp diğer tüm şartları sağlayan $\mathcal{Q} = (\delta : Q \to R)$ cebirsel yapısı *ön-çaprazlanmış modül* olarak adlandırılır. Benzer şekilde cat^1-grup tanımında **C2** şartını sağlamayan $\mathcal{B} = (e; t, h : R \ltimes Q \to R)$, cebirsel yapısı *ön-cat^1-grup* olarak adlandırılır.

Tanım 11 *$\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ bir cat^1-grup verildiğinde $G_1 \leq G$, $R_1 \leq R$ ve e_1, t_1, h_1 homomorfizmleri e, t, h nın kısıtlanmışı olmak üzere $\mathcal{C}_1 = (e_1; t_1, h_1 : G_1 \to R_1)$ cat^1-grubuna bir* alt cat^1-grup *denir ve $\mathcal{C}_1 \leqslant \mathcal{C}$ ile gösterilir. Ayrıca $G_1 \trianglelefteq G$ ve $R_1 \trianglelefteq R$ ise* normal alt cat^1-grup *denir.*

$\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, bir cat^1-grup homomorfizmi olmak üzere bu homomorfizmin çekirdeğini ($\ker \mu = (\ker \bar{\mu}, \ker \dot{\mu})$) belirlemek için aşağıdaki diyagram kullanılarak

$$\begin{tikzcd}
\ker \bar{\mu} \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift left=2] & G \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, shift left, "t,h"] \arrow[d, shift left=2] & G' \arrow[d, shift left, "t',h'"] \arrow[d, shift left=2] \\
\ker \dot{\mu} \arrow[r] \arrow[u, shift left] & R \arrow[r, "\dot{\mu}"'] \arrow[u, shift left, "e"] & R' \arrow[u, shift left, "e'"]
\end{tikzcd}$$

$$g \in \ker \bar{\mu} \;\;\Rightarrow\;\; t'\bar{\mu}g = 1,\; h'\bar{\mu}g = 1 \;\Rightarrow\; \dot{\mu}tg = 1,\; \dot{\mu}hg = 1 \;\Rightarrow\; tg \in \ker \dot{\mu},\; hg \in \ker \dot{\mu},$$
$$r \in \ker \dot{\mu} \;\;\Rightarrow\;\; e'\dot{\mu}r = 1 \;\Rightarrow\; \bar{\mu}er = 1 \;\Rightarrow\; er \in \ker \bar{\mu}.$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan diyagramın solunda oluşan cat^1-grup, μ nin çekirdeğidir. Ayrıca solda oluşan cat^1-grup t, h ve e morfizmlerinin kısıtlanmasından oluştuğundan $\ker \mu$, $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ nin bir içine alt-cat^1-grubu olur.

3. INTERNAL KATEGORİLER VE ÖRGÜLÜ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

C, genişleme özelliğine sahip bir kategori olsun

i) $C_1 = Arr(C)$ ve $C_0 = Ob(C)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

diyagramı :

ii)

$$\begin{aligned} C_1 \times_{C_0} C_1 &= \{(a,b) \mid t(a) = s(b)\} \\ k &: C_1 \times_{C_0} C_1 \longrightarrow C_1 \end{aligned}$$

kompozisyon :

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} C_0 \arrow[r, "k"] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

cebirsel yapısına C kategorisinde internal kategori denir ve $\mathbf{C} = (C_1, C_0, s, t, e, k)$ ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} : \arrow[dd] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[dd, "F_1"'] & C_0 \arrow[dd, "F_0"] \\ & & \\ \mathbf{C}' : & C_1' \arrow[r, shift left, "s'"] \arrow[r, shift right, "t'"'] & C_0' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise $\mathbf{F} = (F_1, F_0)$ morfizmine internal kategoriler arasında funktor denir. Böylece internal kategorilerin kategorisi kolayca tanımlanabilir. Bu kategoriyi

$$\mathbf{IntCat}(C)$$

ile göstereceğiz. *C* kategorisinde internal kategori, bazen *C* de kategoriksel obje olarak adlandırılır.

Teorem 3 *(Baez ve Lauda, 2004)* $\mathrm{C} = \mathrm{Grp}$ *ise*

$$\mathbf{IntCat}(\mathrm{Grp}) \cong \boldsymbol{XMod}(\mathrm{Grp})$$

dir.

Not 2 $\cong$*, kategoriler arasındaki denkliği göstermekte olup izomorf kategoriliği değildir.*

Internal kategori üzerinde örgü (braiding) tanımı, ilk olarak Joyal ve Street, 1986; Joyal ve Street, 1993 tarafından verilmiştir. Daha sonra Brown ve Gilbert, 1989 bu tanımı grupoidlerin çaprazlanmış modüller üzerinde tanımlanmıştır.

Tanım 12 $\mathbf{C} = (C_1, C_0, s, t, 1, k)$ *bir kategoriksel grup olsun.*

$$\begin{array}{rccl} \xi : & C_0 \times C_0 & \longrightarrow & C_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & \xi_{x,y} \end{array}$$

fonksiyonu

1. $\xi_{x,y} : xy \cong yx$
2.

$$\begin{tikzcd} s(x)s(y) \arrow[r] \arrow[d] & t(x)t(y) \arrow[d] \\ s(y)s(x) \arrow[r] & t(y)t(x) \end{tikzcd}$$

   diyagramı değişmeli

3.

$$\xi_{ab,c} = (\xi_{a,c}1(b)) \cdot (1(a)\xi_{b,c})$$
$$\xi_{a,bc} = (1(b)\xi_{a,c}) \cdot (\xi_{a,b}1(c))$$

şartları sağlanıyorsa ξ fonksiyonuna **C** *üzerinde bir örgü (braiding) denir.*

Bu durumda

$$\mathrm{B} = (C_1, C_0, s, t, 1, k, \xi)$$

sistemine örgü kategorisel grup denir.

Bununla birlikte

$$\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}'$$

morfizmi kolaylıkla tanıplanıp

$$\mathbf{BCat}(\mathrm{Grp})$$

örgü kategoriksel grup kategorisi tanımlanır.

Çaprazlanmış modüller üzerinde örgü Conduché, 1984 tarafından verilmiştir. Şimdi bu tanımı vereceğiz.

Tanım 13 *$\mathcal{BX} = (\partial : S \to R)$ çaprazlanmış modülü verilsin. $\{,\} : R \times R \to S$ fonksiyonu $r, r_1, r_2, r_3 \in R$ ve $s \in S$ olmak üzere:*

BC1: $\{r_1, r_2r_3\} = \{r_1, r_2\}^{r_3}\{r_1, r_3\}$

BC2*:* $\{r_1r_2, r_3\} = \{r_2, r_3\}\{r_1, r_3\}^{r_2}$

BC3*:*

$$\begin{tikzcd} R \times R \arrow[r, "\{,\}"] \arrow[rr, bend right, "\partial\circ\{,\}"'] & S \arrow[r, "\partial"] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcccc} \partial \circ \{,\} & : & R \times R & \longrightarrow & R \\ & & (r_1, r_2) & \longmapsto & [r_2, r_1] \end{array}$$

yani

$$\partial\{r_1, r_2\} = [r_2, r_1]$$

BC4*:* $\{r, \partial(s)\} = s^{-1}s^r$

BC5: $\{\partial(s), r\} = (s^{-1})^r s$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{BX} = (\partial : S \to R)$ çaprazlanmış modülüne braided (örgülü) çaprazlanmış modül ve $\{,\} : R \times R \to S$ fonksiyonuna ise $\mathcal{BX}$ çaprazlanmış modülü üzerinde bir örgü denir.

Eğer örgü fonksiyonu simetrik ise, yani

$$\{r_1, r_2\} = \{r_2, r_1\} = 1$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{BX} = (\partial : S \to R)$ çaprazlanmış modülü simetrik çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.

Örnek 5 $\mathcal{X} = (1_T : R \to R)$ *birim çaprazlanmış modülü verildiğinde*

$$\{r_1, r_2\} = [r_2, r_1] = r_2 r_1 r_2^{-1} r_1^{-1}$$

komutatör fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde bir örgüdür.

Örnek 6 $\mathcal{X} = (\partial : R \otimes R \to R)$ *çaprazlanmış modülü*

$$\begin{array}{rcccc} \partial & = & R \otimes R & \longrightarrow & R \\ & & r_1 \otimes r_2 & \longmapsto & [r_2, r_1] \end{array}$$

biçimde tanımlansın.

$$\begin{array}{rcccc} \{,\} & = & R \times R & \longrightarrow & R \otimes R \\ & & (r_2, r_1) & \longmapsto & r_1 \otimes r_2 \end{array}$$

fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde bir örgüdür.

Örnek 7 $\mathcal{X} = (\partial : S \to R)$*, çaprazlanmış modül ve* $\{,\} : R \times R \longrightarrow S$*,* $\mathcal{X}$ *üzerinde bir örgü olsun. Bu durumda*

$$\begin{array}{rcccc} f & = & R \otimes R & \longrightarrow & S \\ & & r_1 \otimes r_2 & \longmapsto & \{r_1, r_2\} \end{array}$$

bir grup homomorfizmidir.

$\mathcal{BX}$ ve $\mathcal{BX}'$iki örgülü çaprazlanmış modül olsun

$$\begin{array}{rcc} \mathcal{BX} & = & (\partial : S \to R, \{r_1, r_2\}) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{BX}' & = & (\partial' : S' \to R', \{r_1', r_2'\}') \end{array}$$

şeklinde örgü çaprazlanmış modül morfizmi kolayca tanımlanabilir. Böylece BrXMod örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi elde edilir.

Teorem 4 *Garzon ve Miranda, 1997*

$$\mathbf{BCat}(\mathrm{Grp}) \approx \mathbf{BrXMod}(\mathrm{Grp})$$

Conduché, 1984 2-çaprazlanmış modül yapısını tanımlamış olup bu yapı 3-tip cebirsel modeldir. Bu konuda ayrıntılı bilgi için Tim Porter, 2019 ve Wensley, 2019 çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 14 $\partial_1 \circ \partial_2 = 0 : S \to N$ *özelliğini sağlayan*

$$S \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} N$$

gruplar üzerinde bir 2*-kompleks;*

- N *grubunun* S *ve* R *üzerine etkileri ayrıca kendisi üzerine eşlenik etkisi,*
- $\{\ ,\ \} : R \times R \to S$,Peiffer lifting *fonksiyonu yardımıyla tanımlanan* R *nin* S *üzerine*

$$s^r \mapsto s\{\partial_2 s, r\}$$

etkisiyle $(\partial_2 : S \to R)$ *bir çaprazlanmış modül,*

özellikleriyle birlikte $r, r_1, r_2, r_3 \in R$, $s \in S$ *ve* $n \in N$ *olmak üzere aşağıdaki şartları sağlıyorsa:*

2CM1: $\partial_2\{r_1, r_2\} = \langle r_1, r_2\rangle = r_1^{-1} r_2^{-1} r_1 r_2^{\partial_1 r_1}$ *(Peiffer komutator),*

2CM2: $\{r, \partial_2 s\} = (s^{-1})^r s^{\partial_1 r}$*,*

2CM3: $\{r_1 r_2, r_3\} = \{r_1, r_3\}^{r_2}\{r_2, r_3^{\partial_1 r_1}\}$*,*

2CM4: $\{r_1, r_2 r_3\} = \{r_1, r_3\}\{r_1, r_2\}^{r_3^{\partial_1 r_1}}$*,*

2CM5: $\{r_1, r_2\}^n = \{r_1^n, r_2^n\}$

şartlarını sağlıyorsa bir 2*-çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.*

Bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi

$$(\theta, \psi, \chi):\ (S \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} N) \rightarrow (S' \xrightarrow{\partial_2'} R' \xrightarrow{\partial_1'} N')$$

özelliğinde

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\theta"'] & R \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\psi"'] & N \arrow[d, "\chi"'] \\ S' \arrow[r, "\partial_2'"] & R' \arrow[r, "\partial_1'"] & N' \end{tikzcd}$$

diyagramı yardımıyla elde edilen

$$\psi\partial_2 = \partial_2'\theta,\ \ \chi\partial_1 = \partial_1'\psi,\ \ \theta(s^n) = (\theta s)^{\chi n},\ \ \psi(r^n) = (\psi r)^{\chi n},\ \ \theta\{r_1, r_2\} = \{\psi r_1, \psi r_2\}.$$

şartlarını sağlayan (θ, ψ, χ) grup homomorfizmi üçlüsünden oluşur. Böylelikle 2-XMod ile göstereceğimiz 2-çaprazlanmış modüller kategorisi tanımlanır.

Aşağıda 2-çaprazlanmış modüller ve örgülü çaprazlanmış modüllerin ilişkilerini gösteren örnekler verilmiştir. (Bu konuda daha detaylı bilgi için Pizzamiglio, 2013 çalışmasına bakınız.)

Örnekler

1. Herhangi $\mathcal{X} = (\partial : S \rightarrow R)$ çarpazlanmış modülünden

$$1 \xrightarrow{1} S \xrightarrow{\partial} R$$

2-çaprazlanmış modülü elde edilir. Buradan **XMod** kategorisi 2-XMod kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

2. 2-çaprazlanmış modül tanımında $N = \{1\}$ alınırsa braided (örgülü) çaprazlanmış modül tanımı elde edilir. Başka bir ifadeyle $\mathcal{BX} = (\partial : S \rightarrow R)$ bir örgülü çaprazlanmış modüldür ancak ve ancak

$$S \xrightarrow{\partial} R \xrightarrow{1} 1$$

bir 2-çaprazlanmış modüldür. Buradan BrXMod, örgülü çaprazlanmış modüller kategorisinden 2-XMod, 2-çaprazlanmış modül kategorisine bir funktor elde edilir. Yani BrXMod kategorisi 2-XMod kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

3. $\mathcal{BX} = (\partial : S \to R)$ bir N-equivariant örgülü çaprazlanmış modül ancak ve ancak

$$S \xrightarrow{\partial} R \xrightarrow{1} N$$

bir 2-çaprazlanmış modüldür.

4. Eğer $S \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} N$ bir 2-çaprazlanmış modül ise,

$$(1, \partial_1) : (\partial_2 : S \to R) \to (i : 1 \to N)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmi olur.

5. Bir $S \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} N$ 2-çaprazlanmış modülü verildiğinde $(\partial_1 : R/Im\partial_2 \to N)$ indirgenmiş çaprazlanmış modülü elde edilir.

4. GAP UYGULAMASI

Alp ve Wensley, 2000 çalışmasında, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı bilgisayar ortamına aktarılmış ve XMod adı altında bir GAP paketi oluşturulmuştur. XMod paketi ile çaprazlanmış modüller kategorisi üzerinde objeler geliştirilip buna denk olan cat1-gruplar kategorisine geçiş yapılabilir. XMod paketi kullanılarak 2-tipten cebirsel model olarak cat1-grupların sınıflandırılması Alp ve Wensley, 2002 tarafından yapılmıştır. Çaprazlanmış modüller için izomorfizmden daha zayıf bir denklik bağıntısı olan izokilinizm altında farklı bir sınıflandırma Odabaş vd., 2016 tarafından tanımlanmış ayrıca gruplar ve çaprazlanmış modüler için izokilinizm sınıfları XMod (2016) paketine eklenerek bilgisayar ortamına aktarılmıştır.

Degismeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı Timothy Porter, 1987 çalışmasında tanımlamıştır. Daha sonra yapılan Arvasi ve Timothy Porter, 1997, Arvasi ve Timothy Porter, 1996,Arvasi ve Timothy Porter, 1998 gibi bir çok çalışma ile gruplar üzerinde oluşturulan tüm bu yapıların değişmeli cebir versiyonları tanımlanmıştır. Arvasi ve Odabaş, 2015 çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modülleri ve cat1-cebirleri XModAlg paketi adı altında GAP kullanarak bilgisayar ortamına aktarmışlardır. XModAlg paketi kullanılarak cat1-cebirlerin sınıflandırılması Arvasi ve Odabaş, 2016 tarafından yapılmıştır.

4.1 GAP ile Çaprazlanmış Modüller ve Cat^1-Gruplar

Herhangi bir boundary homomorfizmi ve grup etkisi kullanılarak bir çaprazlanmış modül oluşturmak için *XModByBoundaryAndAction* fonksiyonu kullanılır. Ancak oluşan cebirsel yapı her zaman çaprazlanmış modül şartlarını sağlamak zorunda değildir. *IsXMod* fonskiyonu çaprazlanmış modül tanımında verilen iki koşulun sağlanıp sağlanmadığını kontrol eder. Elde edilen yapı çaprazlamış modül değilse, yalnızca ilk şartın sağlanıp sağlanmadığı ise *IsPreXMod* fonksiyonu kullanılarak kontrol edilir. *Display* fonksiyonu ise elde edilen cebirsel yapının özelliklerini görmek için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda bu fonksiyonların kullanımına örnek verilmiştir.

```
gap> S := Group((1,2,3),(4,5));
Group([ (1,2,3), (4,5) ])
gap> SetName(S,"S");
gap> id := IdentityMapping(S);
```

```
IdentityMapping( S )
gap> A_S := AutomorphismGroup(S);
<group with 2 generators>
gap> act := MappingToOne(S,A_S);
[ (1,2,3), (4,5) ] -> [ IdentityMapping( S ), IdentityMapping( S ) ]
gap> XM := XModByBoundaryAndAction(id,act);
[S->S]
gap> IsPreXMod(XM);
true
gap> IsXMod(XM);
true
gap> Display(XM);
Crossed module [S->S] :-
: Source group S has generators:
[ (1,2,3), (4,5) ]
: Range group S has generators:
[ (1,2,3), (4,5) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
[ (1,2,3), (4,5) ]
: Action homomorphism maps range generators to automorphisms:
(1,2,3) -->  source gens --> [ (1,2,3), (4,5) ]
(4,5) -->  source gens --> [ (1,2,3), (4,5) ]
These 2 automorphisms generate the group of automorphisms.
```

$\mathcal{X} = (S, T, \partial)$ XMod kullanılarak oluşturulmuş bir çaprazlanmış modül olmak üzere, aşağıdaki nitelik fonksiyonları

- *Source($\mathcal{X}$)* : çaprazlanmış modülün tanım kümesi (grubu) olan S grubunu,
- *Range($\mathcal{X}$)* : çaprazlanmış modülün değer kümesi (grubu) olan T grubunu,
- *Boundary($\mathcal{X}$)* : çaprazlanmış modülün sınır dönüşümü olan $\partial : S \to T$ homomorfizmini,
- *XModAction($\mathcal{X}$)* : çaprazlanmış modülün etki dönüşümü olan $\alpha : T \to \mathrm{Aut}(S)$ homomorfizmini,
- *Size($\mathcal{X}$)* : çaprazlanmış modülün boyutu olarak $[|S|, |T|]$ ikilisini,
- *IdGroup($\mathcal{X}$)* : çaprazlanmış modülü oluşturan $[S, T]$ ikilisinin GAP id değerlerini,

- *ImageElmXModAction($\mathcal{X}$,s,t)* : $s \in S$ ve $t \in T$ olmak üzere $s^t = \alpha(t)(s) \in S$ elemanı,

  elde etmek için kullanılır.

XModByNormalSubgroup fonksiyonu herhangi bir G grubu ve $N \trianglelefteq G$ normal alt grubu verildiğinde bir (N, G, ∂) çaprazlanmış modülünü oluşturmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda $G := C_8 \ltimes C_4 = \langle a, b \mid a^8 = b^4 = e, bab^{-1} = a^3 \rangle$ biçiminde tanımlanan 32. mertebeden $C_8 \ltimes C_4$ grubu ve $N = C_4 \times C_2$ normal alt grubu kullanılarak $(C_4 \times C_2, C_8 \ltimes C_4, \partial)$ çaprazlanmış modülü oluşturulmuştur.

```
gap> G := SmallGroup(32,13);
<pc group of size 32 with 5 generators>
gap> StructureDescription(G);
"C8 : C4"
gap> all_nsubgroups := NormalSubgroups(G);
[ C8 : C4, Group([ f2, f3, f4, f5 ]), Group([ f1*f2*f3, f3, f4, f5 ]),
 Group([ f1, f3, f4, f5 ]), Group([ f2, f3, f5 ]),
 Group([ f2*f4, f3, f5 ]), C4 x C2, Group([ f4, f5 ]),
 Group([ f3*f4, f5 ]), Group([ f3, f5 ]), Group([ f4 ]),
 Group([ f4*f5 ]), Group([ f5 ]), Group([  ]) ]
gap> Length(all_nsubgroups);
14
gap> N := all_nsubgroups[7];
C4 x C2
gap> StructureDescription(N);
"C4 x C2"
gap> XM1 := XModByNormalSubgroup(G,N);
[Group( [ f3, f4, f5 ] )->Group( [ f1, f2, f3, f4, f5 ] )]
gap> IsXMod(XM1);
true
gap> Display(XM1);

Crossed module :-
: Source group has generators:
[ f3, f4, f5 ]
: Range group has generators:
[ f1, f2, f3, f4, f5 ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
[ f3, f4, f5 ]
```

```
: Action homomorphism maps range generators to automorphisms:
f1 -->  source gens --> [ f3*f5, f4, f5 ]
f2 -->  source gens --> [ f3, f4, f5 ]
f3 -->  source gens --> [ f3, f4, f5 ]
f4 -->  source gens --> [ f3, f4, f5 ]
f5 -->  source gens --> [ f3, f4, f5 ]
These 5 automorphisms generate the group of automorphisms.
```

XModByTrivialAction fonksiyonu S abelyan grup ve $\mathrm{im}\,(\partial)$ görüntüsü T nin merkezinde kalacak şekildeki herhangi $\partial : S \to T$ homomorfizmi verildiğinde T nin S üzerine aşikar etkisiyle birlikte (S, T, ∂) çaprazlanmış modülünü oluşturmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda $S = C_{16}$ devirli grubu ve $T = A_6$ 360. mertebeden alterne grubu alındığında $\mathrm{im}\,(\partial) \leq Z(T)$ özelliğindeki bir $\partial : S \to T$ grup homomorfizmi kullanılarak (C_{16}, A_6, ∂) çaprazlanmış modülü oluşturulmuştur.

```
gap> C16 := CyclicGroup(IsPermGroup,16);
Group([ (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16) ])
gap> IsAbelian(C16);
true
gap> A6 := AlternatingGroup(6);
Alt( [ 1 .. 6 ] )
gap> IsAbelian(A6);
false
gap> all_homs := AllHomomorphisms(C16,A6);;
gap> Length(all_homs);
136
gap> bdy := all_homs[1];;
gap> IsSubgroup(Centre(A6),Image(bdy));
true
gap> XM2 := XModByTrivialAction(bdy);
[Group( [ ( 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15,16) ] )->
AlternatingGroup( [ 1 .. 6 ] )]
gap> Size(XM2);
[ 16, 360 ]
gap> IsXMod(XM2);
true
gap> Display(XM2);

Crossed module :-
```

```
: Source group has generators:
[ ( 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15,16) ]
: Range group has generators:
[ (1,2,3,4,5), (4,5,6) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
[ () ]
The automorphism group is trivial
```

XModByCentralExtension fonksiyonu T grubu S nin bir merkezsel genişlemesi olmak üzere $\partial : S \to T$ örten homomorfizmi ve T nin S üzerine $s^t = s^{-1}(\partial^{-1}t)s$ biçiminde tanımlanan eşlenik etkisiyle birlikte çaprazlanmış modül oluşturmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda $T = S_3$ simetrik grubu ve $S = D_{12}$ dihedral grubu ile $\partial : D_{12} \to S_3$ grup homomorfizmi kullanılarak (D_{12}, S_3, ∂) çaprazlanmış modülü oluşturulmuştur.

```
gap> d12 := DihedralGroup(IsPermGroup,12);
Group([ (1,2,3,4,5,6), (2,6)(3,5) ])
gap> s3 := SymmetricGroup(IsPermGroup,3);
Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> gen_d12 := GeneratorsOfGroup(d12);;
gap> gen_s3 := GeneratorsOfGroup(s3);;
gap> bdy := GroupHomomorphismByImages(d12,s3,gen_d12,gen_s3);
[ (1,2,3,4,5,6), (2,6)(3,5) ] -> [ (1,2,3), (1,2) ]
gap> Kernel(bdy) = Center(d12);
true
gap> XM3 := XModByCentralExtension(bdy);
[Group( [ (1,2,3,4,5,6), (2,6)(3,5) ] )->SymmetricGroup( [ 1 .. 3 ] )]
gap> IsXMod(XM3);
true
gap> Display(XM3);

Crossed module :-
: Source group has generators:
[ (1,2,3,4,5,6), (2,6)(3,5) ]
: Range group has generators:
[ (1,2,3), (1,2) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
```

XModByAutomorphismGroup fonksiyonu bir S grubu verildiğinde Inn(S) iç otomorizm grubu kullanılarak çaprazlanmış modül oluşturmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda $S = \langle a, x \mid a^8 = x^2 = e, xax^{-1} = a^3 \rangle$ yarı dihedral (quasi dihedral) grubu kullanılarak $(S, \text{Inn}(S), \partial)$ çaprazlanmış modülü oluşturulmuştur.

```
gap> G := SmallGroup(16,8);
<pc group of size 16 with 4 generators>
gap> SD16 := Range(IsomorphismPermGroup(G));;
gap> StructureDescription(SD16);
"QD16"
gap> XM4 := XModByAutomorphismGroup(SD16);;
gap> IsXMod(XM4);
true
```

DirectProductOp fonksiyonu iki çaprazlanmış modülün direkt çarpım çaprazlanmış modülünü oluşturmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda daha önce oluşturduğumuz iki çaprazlanmış modül kullanılarak direkt çarpım çaprazlanmış modülü oluşturulmuştur.

```
gap> XM5 := DirectProductOp([XM3,XM4],XM3);;
gap> IsXMod(XM5);
true
gap> Size(XM5);
[ 192, 96 ]
```

PreCat1GroupByEndomorphisms ve *PreCat1GroupByTailHeadEmbedding* fonksiyonları cat^1-grup oluşturmak için kullanılır. Bu fonksiyonların parametre olarak aldığı endomorfizm ve diğer dönüşümler her zaman cat^1-grup oluşturmaz. Cebirsel yapının cat^1-grup veya ön cat^1-grup olup olmadığı *IsCat1Group* ve *IsPreXCat1Group* fonksiyonları kullanılarak kontrol edilir.

```
gap> G := Group([(1,2,3),(4,5,6),(2,3)(5,6)]);
Group([ (1,2,3), (4,5,6), (2,3)(5,6) ])
gap> StructureDescription(G);
"(C3 x C3) : C2"
gap> H := Group([(7,8,9),(8,9)]);;
gap> StructureDescription(H);
```

```
"S3"
gap> tail := GroupHomomorphismByImages(G,H,GeneratorsOfGroup(G),
[(7,8,9),(),(8,9)]);
[ (1,2,3), (4,5,6), (2,3)(5,6) ] -> [ (7,8,9), (), (8,9) ]
gap> head := GroupHomomorphismByImages(G,H,GeneratorsOfGroup(G),
[(7,8,9),(7,8,9),(8,9)]);
[ (1,2,3), (4,5,6), (2,3)(5,6) ] -> [ (7,8,9), (7,8,9), (8,9) ]
gap> embedding := GroupHomomorphismByImages(H,G,GeneratorsOfGroup(H),
[(1,2,3),(2,3)(5,6)]);
[ (7,8,9), (8,9) ] -> [ (1,2,3), (2,3)(5,6) ]
gap> C1 := Cat1Group(tail,head,embedding);
[Group( [ (1,2,3), (4,5,6), (2,3)(5,6) ] ) =>Group( [ (7,8,9), (8,9) ] )]
gap> IsPreCat1Group(C1);
true
gap> IsCat1Group(C1);
true
gap> Display(C1);

Cat1-group :-
: Source group has generators:
[ (1,2,3), (4,5,6), (2,3)(5,6) ]
: Range group has generators:
[ (7,8,9), (8,9) ]
: tail homomorphism maps source generators to:
[ (7,8,9), (), (8,9) ]
: head homomorphism maps source generators to:
[ (7,8,9), (7,8,9), (8,9) ]
: range embedding maps range generators to:
[ (1,2,3), (2,3)(5,6) ]
: kernel has generators:
[ (4,5,6) ]
: boundary homomorphism maps generators of kernel to:
[ (7,8,9) ]
: kernel embedding maps generators of kernel to:
[ (4,5,6) ]
```

XMod paketi kullanılarak oluşturulan çaprazlanmış modüllerde olduğu gibi $\mathcal{C} = (e; t, h : G \to R)$ biçimindeki herhangi bir cat^1-grup içinde nitelik fonksiyonları oluşturulmuştur. Bunlardan *Source*, *Range*, *Size*, *IdGroup* fonksiyonları çaprazlanmış modüllerde verilen şekliyle sonuç verirken;

- *Boundary(C)* : $h : G \to R$ homomorfizminin $\ker t$ ye kısıtlanmışını,
- *TailMap(C)* : $t : G \to R$ homomorfizmini,
- *TailMap(C)* : $h : G \to R$ homomorfizmini,
- *RangeEmbedding(C)* : $e : R \to G$ gömme homomorfizmini,
- *KernelEmbedding(C)* : $\ker t$ nin G içindeki gömme homomorfizmini

elde etmek için kullanılır.

Bununla birlike XMod paketi cat^1-gruplar üretmek için gruplar üzerindeki endomorfizmler aracılığıyla oluşturulmuş bir kütüphaneye sahiptir. *Cat1Select(m,n,k)* fonksiyonu bu kütüphane içerisinden cat^1-grup seçmek için kullanılır. Buradaki m grubun mertebesini, n izomorfizm sınıfını, k ise seçilecek olan cat^1-grubun sırasını verir. Aşağıdaki GAP oturumunda bu fonksiyonun kullanımına örnek verilmiştir.

```
gap> G := SmallGroup(32,20);
<pc group of size 32 with 5 generators>
gap> StructureDescription(G);
"Q32"
gap> C2 := Cat1Select(32,20,1);
[Q32 =>Q32]
gap> IsCat1Group(C2);
true
```

Cat1GroupOfXMod(CM) fonksiyonu verilen bir çaprazlanmış modülden bu yapıya kategoriksel denk olan bir cat^1-grup elde etmek için kullanılır.

```
gap> C1 := Cat1GroupOfXMod(CM);
[..|X.. =>Group( [ f1, f2, f3, f4, f5 ] )]
gap> IsCat1Group(C1);
true
gap> Display(C1);

Cat1-group :-
: Source group ..|X.. has generators:
```

```
[ f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7 ]
: Range group has generators:
[ f1, f2, f3, f4, f5 ]
: tail homomorphism maps source generators to:
[ f1, f2, f3, f4, f5, <identity> of ..., <identity> of ... ]
: head homomorphism maps source generators to:
[ f1, f2, f3, f4, f5, f4, f5 ]
: range embedding maps range generators to:
[ f1, f2, f3, f4, f5 ]
: kernel has generators:
[ f6, f7 ]
: boundary homomorphism maps generators of kernel to:
[ f4, f5 ]
: kernel embedding maps generators of kernel to:
[ f6, f7 ]
: associated crossed module is [Group( [ f4, f5 ] ) ->
Group( [ f1, f2, f3, f4, f5 ] )]
```

Yine *XModOfCat1Group(C1)* fonksiyonu verilen C_1 cat^1-grubundan kategoriksel denk olan çaprazlanmış modülü oluşturmak için kullanılır.

```
gap> CM2 := XModOfCat1Group(C2);
[triv->Q32]
gap> IsXMod(CM2);
true
```

4.2 GAP ile Örgülü Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde ilk olarak örgülü çaprazlanmış modülleri bilgisayar ortamına aktarmak için tez kapsamında yazılan GAP fonksiyonlarını tanıtacağız. *AllMappings* fonksiyonu giriş parametresi olarak verilen iki grup arasındaki tüm fonksiyonları bulmak için kullanılır. $\mathcal{X} = (S, T, \partial)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere $\{,\} : T \times T \longrightarrow S$ biçimindeki tüm örgü fonksiyonu *AllMappings* fonksiyonu kullanılarak tanımlanır. Bu fonksiyonun kaynak kodları aşağıdaki biçimdedir.

```
######################################################################
f := G -> H
#####################
AllMappings := function (G,H)
local  nG,nH,eG,eH,T,nT,x,elems,t,maps,f,i;

nG := Size(G);
nH := Size(H);
eG := Elements(G);
eH := Elements(H);
T := Tuples([1..nH],nG);
nT := Length(T);
maps := [];
for x in T do
elems := [];
        for i in [1..nG] do;
        t := Tuple([eG[i],eH[x[i]]]);
        Add(elems,t);
        od;
f := GeneralMappingByElements(G,H,elems);
Add(maps,f);
od;
return maps;
end;
######################################################################
```

IsBraidedXMod fonksiyonu giriş parametresi olarak verilen bir çaprazlanmış modül ve örgü fonksiyonun örgülü çaprazlanmış modül olup olmadığını kontrol eder. Bunun için tanım 13 de verilen beş şartın kontrolü yapılır. Fonksiyonun kaynak kodları aşağıdaki biçimdedir.

```
######################################################################
f := G -> H
#####################
IsBraidedXMod := function (XM,bm)
local  G1,G0,G0xG0,bdy,act,k, bm1l,bm1r,bm2l,bm2r,bm3l,bm3r,bm4l,
bm4r,bm5l,bm5r,x,y,x1,x2,y1,y2,a,b,e1,e2,p1,p2;
```

```
if  not (IsXMod(XM)) then
        Print("xmod degil");
        return false;
fi;

G1 := Source(XM);
G0 := Range(XM);
bdy := Boundary(XM);
act := XModAction(XM);
G0xG0 := DirectProduct(G0,G0);
e1 := Embedding(G0xG0,1);
e2 := Embedding(G0xG0,2);
p1 := Projection(G0xG0,1);
p2 := Projection(G0xG0,2);

if (Source(bm) <> G0xG0) then
        Print("s(bm) <> G0xG0 ");
        return false;
fi;
if (Range(bm) <> G1) then
        Print("t(bm) <> G1 ");
        return false;
fi;

# braiding map sartlari

# bm1
for x in G0 do
        for y1 in G0 do
                for y2 in G0 do
                bm1l := ((x ^ e1) * ((y1*y2) ^ e2)) ^ bm;
                bm1r := ( (((x ^ e1) * (y1 ^ e2)) ^ bm ) ^
                ( y2 ^ act ) ) * (((x ^ e1) * (y2 ^ e2)) ^ bm);
                if  ( bm1l <> bm1r ) then
                Print("bm1 is not satisfying ");
                Print("For x = ",x,", y1 = ",y1," and
                y2 = ",y2," => ",bm1l, " <> ", bm1r ," " );
                return false;
                fi;
                od;
        od;
```

```
od;

# bm2
for x1 in G0 do
        for x2 in G0 do
                for y in G0 do
                bm2l := (((x1*x2) ^ e1) * (y ^ e2)) ^ bm;
                bm2r := (((x2 ^ e1) * (y ^ e2)) ^ bm) *
                (( ((x1 ^ e1) * (y ^ e2)) ^ bm ) ^ ( x2 ^ act ) );
                if  ( bm2l <> bm2r ) then
                Print("bm2 is not satisfying ");
                Print("For x1 = ",x1,", x2 = ",x2," and y = ",y," =>
                ",bm2l, " <> ", bm2r ," " );
                return false;
                fi;
                od;
        od;
od;

# bm3

for x in G0 do
        for y in G0 do
        bm3l := (((x ^ e1) * (y ^ e2)) ^ bm) ^ bdy;
        bm3r := Comm(y,x);
        if  ( bm3l <> bm3r ) then
        Print("bm3 is not satisfying ");
        Print("For x = ",x," and y = ",y," => ",bm3l, "
        <> ", bm3r ," " );
        return false;
        fi;
        od;
od;

# bm4
for x in G0 do
        for a in G1 do
        bm4l := ((x ^ e1) * ((a ^ bdy ) ^ e2)) ^ bm;
        bm4r := Inverse(a) *   ( a ^ ( x ^ act ) );
        if  ( bm4l <> bm4r ) then
        Print("bm4 is not satisfying ");
```

```
        Print("For x = ",x," and a = ",a," => ",bm4l, "
        <> ", bm4r ," " );
        return false;
        fi;
        od;
od;

# bm5
for y in G0 do
        for b in G1 do
        bm5l := (((b ^ bdy ) ^ e1) * (y ^ e2)) ^ bm;
        bm5r := (Inverse(b) ^ (y ^ act)) * b;
        if  ( bm5l <> bm5r ) then
        Print("bm5 is not satisfying ");
        Print("For y = ",y," and b = ",b," => ",bm5l, "
        <> ", bm5r ," " );
        return false;
        fi;
        od;
od;

return true;
end;
######################################################################
```

AllBraidedXMod fonksiyonu giriş parametresi olarak verilen herhangi bir çaprazlanmış modül üzerinde tanımlanabilecek olan tüm çaprazlanmış modülleri oluşturur. Fonksiyonun kaynak kodları aşağıdaki biçimdedir.

```
######################################################################
f := G -> H
#####################
AllBraidedXMod := function (XM)
local  G1,G0,G0xG0,nG,nH,eG,eH,T,nT,x,elems,t,maps,f,i;

if  not (IsXMod(XM)) then
Print("xmod degil ");
return false;
fi;
```

```
G1 := Source(XM);
G0 := Range(XM);
G0xG0 := DirectProduct(G0,G0);

nG := Size(G0xG0);
nH := Size(G1);
eG := Elements(G0xG0);
eH := Elements(G1);
T := Tuples([1..nH],nG);
nT := Length(T);

maps := [];
for x in T do
elems := [];
        for i in [1..nG] do;
        t := Tuple([eG[i],eH[x[i]]]);
        Add(elems,t);
        od;
f := GeneralMappingByElements(G0xG0,G1,elems);
if ( IsBraidedXMod(XM,f) ) then
Add(maps,f);
fi;
od;

return maps;
end;
######################################################################
```

Aşağıdaki GAP oturumunda ilk olarak $Kl_4 = C_2 \times C_2$ klein 4 grubu üzerinde tanımlanmış bir cat^1-gruptan elde edilen $\mathcal{X}1 = (S, T, \partial)$ çaprazlanmış modülü ve *AllMappings* fonksiyonu kullanılarak $T \times T \longrightarrow S$ biçimindeki tüm fonksiyonlar elde edilmiştir.

```
gap> C := Cat1Group(4,2,2);
[C2 x C2 =>Group( [ f1, <identity> of ... ] )]
gap> CM := XMod(C);
[Group( [ f2 ] )->Group( [ f1, <identity> of ... ] )]
gap> h := IsomorphismPermObject(CM);
```

```
[[Group( [ f2 ] ) -> Group( [ f1, <identity> of ... ] )] =>
[Group( [ (1,2) ] ) -> Group( [ (1,2) ] )]]
gap> CM2 := Range(h);
[Group( [ (1,2) ] )->Group( [ (1,2) ] )]
gap> G1 := Source(CM2);
Group([ (1,2) ])
gap> G0 := Range(CM2);
Group([ (1,2) ])
gap> K := DirectProduct(G0,G0);
Group([ (1,2), (3,4) ])
gap> fler := AllMappings(K,G1);
[ <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) >,
 <general mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) -> Group( [ (1,2) ] ) > ]
```

Aşağıdaki GAP oturumunda yukarıda elde edilen $\{,\} : T \times T \longrightarrow S$ biçimindeki tüm fonksiyonlardan *IsBraidedXMod* kullanılarak yalnızca ikisinin $\mathcal{X}1$ ile birlikte bir örgülü çaprazlanmış modül olduğu, diğerlerinin ise hangi şartı sağlamadığı gösterilmiştir.

```
gap> List(fler, f -> IsBraidedXMod(CM2,f));
bm1 is not satisfying
For x = (1,2), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (1,2), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm2 is not satisfying
For x1 = (), x2 = () and y = (1,2) => (1,2) <> ()
```

```
bm2 is not satisfying
For x1 = (), x2 = () and y = (1,2) => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (1,2), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (1,2), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
bm1 is not satisfying
For x = (), y1 = () and y2 = () => (1,2) <> ()
[ true, true, false, false, false, false, false, false, false, false,
false, false, false, false, false, false ]
```

Aşağıdaki GAP oturumunda herhangi bir çaprazlanmış modül üzerinde oluşturulabilek tüm örgülü çaprazlanmış modüller elde edilmiştir.

```
gap> C2 := Cat1Group(8,2,2);
[C4 x C2 =>Group( [ <identity> of ..., f2 ] )]
gap> XM := XModOfCat1Group(C2);
[Group( [ f1, f3 ] )->Group( [ <identity> of ..., f2 ] )]
gap> f := IsomorphismPerm2DimensionalGroup(XM);
[[Group( [ f1, f3 ] ) -> Group( [ <identity> of ..., f2 ] )] =>
[Group( [ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ] ) -> Group([ (1,2) ] )]]
gap> XM2 := Range(f);
[Group( [ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ] )->Group( [ (1,2) ] )]
gap> AllBraidedXMod(XM2);
[ <mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) ->
```

```
Group( [ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ] ) >,
<mapping: Group( [ (1,2), (3,4) ] ) ->
Group( [ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ] ) > ]
```

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada

$$\begin{tikzcd} \mathbf{BrXMod} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathbf{2\text{-}XMod} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \mathbf{SimpGrp}_{\leq 2} & \end{tikzcd}$$

diyagramında verilen 3-tipten cebirsel sistem olarak **BrXMod** örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi incelenmiştir. GAP bilgisayar cebir (computer algebra) sistemi kullanılarak örgülü çaprazlanmış modüller bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Böylelikle 3-tipten cebirsel sistemler için bir sınıflandırma yapılması mümkün olmuştur.

Bununla birlikte diyagramda verilen **2-XMod** ve $\mathbf{SimpGrp}_{\leq 2}$ kategorileri henüz bilgisayar ortamına aktarılabilmiş değildir. Bu kategorilerin bilgisayar ortamına aktarılmasıyla, bu kategorilerdeki bir objeden braided (örgülü) çaprazlanmış modüller elde edilebilir. Böylelikle 3-tipten cebirsel sistem kategorilerinin denkliği bilgisayar ortamına aktarılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alp, M., ve Wensley, C. D. (2000). Enumeration of cat1-groups of low order. *International Journal of algebra and computation*, *10*(04), 407–424.

Alp, M., ve Wensley, C. D. (2002). Crossed modules and cat1-groups in GAP,version 2.1 Manual for the XMOD share package.

Arvasi, Z., ve Odabaş, A. (2015). Crossed Modules of Commutative Algebras and Cat1-algebras in GAP, Version 1.12 Manual for the XModAlg share package for GAP4.

Arvasi, Z., ve Odabaş, A. (2016). Computing 2-dimensional algebras: Crossed modules and cat1-algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, *15*(10), 1650185.

Arvasi, Z., & Porter, T. (1996). Simplicial and crossed resolutions of commutative algebras. *Journal of Algebra*, *181*(2), 426–448.

Arvasi, Z., ve Porter, T. (1997). Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras. *Theory and Applications of Categories*, *3*(1), 1–23.

Arvasi, Z., ve Porter, T. (1998). Freeness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras. *Applied Categorical Structures*, *6*(4), 455–471.

Baez, J. C., ve Lauda, A. D. (2004). Higher-Dimesional Algebra V: 2-Groups. *Theory and Applications of Categories*, *12*(14), 423–491.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Behrends, R., Hammond, K., Janjic, V., Konovalov, A., Linton, S., Loidl, H.-W., Maier, P., ve Trinder, P. (2016). HPC-GAP: engineering a 21st-century high-performance computer algebra system. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, *28*(13), 3606–3636.

Besche, H. U., ve Eick, B. (1999). The groups of order at most 1000 except 512 and 768. *Journal of Symbolic Computation*, *27*(4), 405–413.

Besche, H. U., Eick, B., ve O'Brien, E. A . (2002). A millennium project: constructing small groups. *International Journal of Algebra and Computation*, *12*(05), 623–644.

Brown, R., ve Gilbert, N. D. (1989). Algebraic Models of 3-Types and Automorphism Structures for Crossed Modules. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s3-59*(1), 51–73. https://doi.org/10.1112/plms/s3-59.1.51

Brown, R., ve Loday, J.-L. (1987). Van Kampen theorems for diagrams of spaces. *Topology*, *26*(3), 311–335. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90004-8

Conduché, D. (1984). Modules croisés généralisés de longueur 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, *34*(2), 155–178. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-4049(84)90034-3

Eick, B., ve O'Brien, E. (1999). The groups of order 512, 379–380.

GAP, Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.0. (2020). The GAP Group. https://www.gap-system.org

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Garzon, A. R., ve Miranda, J. G. (1997). Homotopy theory for (braided) cat-groups. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, *38*(2), 99–139. http://www.numdam.org/item/CTGDC_1997__38_2_99_0

Joyal, A., ve Street, R. (1986). Braided monoidal categories. *Macquarie Math. Reports*, (10). http://web.science.mq.edu.au/~street/JS1.pdf

Joyal, A., ve Street, R. (1993). Braided Tensor Categories. *Advances in Mathematics*, *102*(1), 20–78. https://doi.org/https://doi.org/10.1006/aima.1993.1055

Loday, J.-L. (1982). Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, *24*(2), 179–202. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90014-7

O'Brien, E. A. (1990). The p-group generation algorithm. *Journal of Symbolic Computation* *9*(5-6), 677–698.

O'Brien, E. A. (1991). The groups of order 256. *Journal of algebra*, *143*(1), 219–235.

Odabaş, A., Uslu, E. Ö., ve Ilgaz, E. (2016). Isoclinism of crossed modules. *Journal of Symbolic Computation*, *74*, 408–424.

Pizzamiglio, L. (2013). *Cohomologies of crossed modules* (phdthesis). L'Università di Milano-Bicocca.

Porter, T. (2019). *The Crossed Menagerie: an introduction to crossed gadgetry and cohomology in algebra and topology.*

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Porter, T. (1987). Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras. *Journal of Algebra*, *109*(2), 415–429.

Wensley, C. D. (2019). *Notes on higher dimensional groups and groupoids and related topics*.

Whitehead, J. H. C. (1948). On Operators in Relative Homotopy Groups. *Annals of Mathematics*, *49*(3), 610–640. http://www.jstor.org/stable/1969048