Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Kapalı Bağıntıları Sağlayan Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Seda Önçırak

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Kasım 2020

Fixed Points of Mappings Satisfying Implicit Relations in Generalized Metric Spaces

Seda Önçırak

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

November 2020

Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Kapalı Bağıntıları Sağlayan Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Seda Önçırak

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Temel Ermiş

”Bu tez ESOGÜ BAP tarafından 202019A114 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Kasım 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Temel Ermiş danışmanlığında hazırlamış olduğum “Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Kapalı Bağıntıları Sağlayan Dönüşümlerin Sabit Noktaları” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 27/11/2020

Seda Önçırak

ÖZET

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmada, G ve G_n-metrik uzaylar tanıtılmıştır. Daha sonra $G-$metrik uzayda bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin G_n-metrik uzaydaki genellemeleri verilmiştir. Bu genellemelerin alışılmış metrik uzaydan elde edilip edilemeyeceğide gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, $G-$metrik uzay ile alışılmış metrik uzay arasındaki ilgi verilmiştir. Daha sonra $G-$metrik uzayda bazı önemli eşitsizlikler ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak ise $G-$metrik topolojide yakınsaklık ve süreklilik kavramları ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, G_n-metrik uzay ile alışılmış metrik uzay arasındaki ilgi verilmiştir. Daha sonra G_n-metrik uzayda bazı önemli eşitsizlikler ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak ise G_n-metrik topolojide yakınsaklık ve süreklilik kavramları ele alınmıştır.

Altıncı bölümde, $G-$metrik uzayda bilinen bazı sabit nokta teoremleri G_n-metrik uzayda genelleştirilmiştir. Bu genelleştirilmiş teoremler klasik yöntemle (Picard iterasyonu) ispatlandıktan sonra, ispatların kapalı bağıntılar yardımıyla daha da basit ve kısa olarak verilebileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, Genelleştirilmiş Metrik Uzay, $G-$Metrik Uzay, G_n-Metrik Uzay, Sabit Nokta Teoremleri, Kapalı Bağıntı.

SUMMARY

In this study which is consist of eight parts, G and G_n-metric spaces are introduced. Then the generalizations of some fixed point theorems, which are known in G metric space, in G_n-metric space are given. It has also been shown whether these generalizations can be derived from conventional metric space.

In the fourth chapter, the relation between $G-$metric space and usual metric space is given. Later, some important inequalities in $G-$metric space have been expressed and proved. Finally, the concepts of convergence and continuity in $G-$metric topology are discussed.

In the fifth chapter,the relation between G_n-metric space and usual metric space is given. Later, some important inequalities in G_n-metric space have been expressed and proved. Finally, the concepts of convergence and continuity in G_n-metric topology are discussed.

In the sixth chapter, some known fixed point theorems in $G-$metric space are generalized in G_n-metric space. After these generalized theorems are proven by classical method (Picard iteration), it has been shown that proofs can be given more simply and briefly with the help of implicit relations.

Key Words: Metric Space, Generalized Metric Space, $G-$Metric Space, G_n-Metric Space, Fixed Point Theorems, Implicit Relation.

TEŞEKKÜR

[redacted]

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Matematikte bazı problemleri çözerken, uygun bir f fonksiyonu için $f(x) = x$ şeklindeki bir denklemi çözme zorunluluğu ortaya çıkabilir. Bu türdeki denklemlerin çözümlerine sabit noktalar denir. Bu sabit noktaların varlığını ve tekliğinin incelendiği teoremlere de sabit nokta teoremleri denir. Sabit nokta teorisinin başlangıcı 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek amacıyla başlamıştır.

Sabit noktanın tanımını biraz daha irdelemek gerekirse, X boştan farklı bir küme ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasına f dönüşümünün sabit noktası denir. Bu tanıma göre akla aşağıdaki soruların gelmesi gayet doğaldır;

1) bir dönüşümünün sabit noktası her zaman var mıdır ?

2) bir dönüşümünün sabit noktası yoksa, hangi koşullar altında vardır ?

3) bir dönüşümünün sabit noktası birden fazla olabilir mi ?

4) bir dönüşümünün sabit noktası veya noktaları varsa, bu noktalar nasıl tespit edilir?

Bu sorulara cevap aranırken üç farklı eğilimden bahsedilebilir. X kümesi üzerinde cebirsel veya topolojik yapılar dikkate alınarak f dönüşümünün sabit noktasının olması adına gerekli şartların belirlenmesidir. Örneğin X in bir kısmi sıralı küme olması durumunda f dönüşümünün monotonluk özelliği kullanılarak sabit noktalarının varlığı için araştırmalar yapılmıştır. Tarski teoreminin örnek olarak verildiği bu yöndeki çalışmalara ayrık sabit nokta teorisi adı verilmektedir. Eğer X bir normlu uzay ise süreklilik, kompaktlık veya bunlara benzer topolojik kavramlar yardımıyla sabit noktalarının varlığının araştırıldığı teoriye topolojik sabit nokta teorisi denir, bu gruba aşağıda ifade edilecek olan Brouwer ve Schauder teoremleri örnek verilebilir. Ancak burada dikkat edilecek husus bu teoremlerin sabit noktanın varlığını garanti etmesi olup, tekliği hakkında bir bilgi vermemesidir. Banach sabit nokta teoremini temel alan ve metrik sabit nokta teori olarak adlandırılan üçüncü grupta X in bir metrik uzay olduğu kabul edilerek büzülme veya büzülme tip dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı araştırılmaktadır.

Bilinen ilk sabit nokta teoremi, “Aradeğer Teoremi” nin sonucu olup şu şekilde ifade edilir: “ $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to X$ sürekli dönüşüm ise, f nin X de bir sabit noktası vardır ” şeklindedir. 1912 yılında Hollandalı matematikçi L. E. J. Brouwer bu teoremi $\mathbb{R}^n$ uzayına “ B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar ve $f : B \to B$ sürekli dönüşüm ise, f nin X de bir sabit noktası vardır ” şeklinde genişletmiştir. Ancak bu teorem sonsuz boyutlu uzaylar için geçerli değildir. 1930 yılında J. Schauder bu teoremi sonsuz boyutlu Banach uzaylarına "B, X Banach uzayının boş olmayan kompakt, konveks bir alt kümesi ve $f : B \to B$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde f, X de en az bir sabit noktaya sahiptir" şekinde genellemiştir. Sabit nokta teorinin en ünlü sonucu ve sabit nokta teorisinin başlangıcı olarak kabul edilen teorem 1922 yılında Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından doktora tezinde ifade edilen " Banach Sabit Nokta Teoremi " olarak bilinen ve sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden şu teoremdir: " (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun; yani her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ vardır. Bu takdirde T dönüşümü X de bir tek noktaya sahiptir." Bu teorem bir integral denklemin çözümünün varlığını ispatlamak amacıyla kurulmuştur. Ayrıca Banach sabit nokta teoreminde keyfi $x \in X$ için $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisinin T dönüşümünün sabit noktasına yakınsayacak olacağıda verilmiştir. Burada belirtmek gerekir ki 1837 de Liouville tarafından tanıtılan ve 1890 da İtalyan matematikçi Picard tarafından adi diferensiyel denklemler için Cauchy probleminin tahmini çözümünü araştırmasında kullanılan ve sistematik olarak geliştirilen ardışık yaklaşım yöntemi yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahiptir. Sonuç olarak sabit noktanın varlığını ve tekliğini belirlemesinin yanısıra, eğer varsa sabit noktayı bulmayı sağlayan Banach sabit nokta teorem oldukça kullanışlıdır. İşte bu yüzden bu kullanışlı teorem, ya büzülme şartı zayıflatılarak ya da metrik uzaydan daha genel uzaylar tanımlanarak araştırmacılar tarafından hala üzerinde çalışılmaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı alışılmış metrik uzayların literatürdeki son genellemelerinden biri olan G_n-metrik uzay tanıtılmasının yanı sıra, $G-$metrik uzayda bilinen bazı sabit nokta teoremlerini G_n-metrik uzayda genellemektir. Bu genelleştirilmiş teoremlerin alışılmış metrik uzaya indirgenip-indirgenemeyeceği araştırıldıktan sonra, klasik yöntemle (Picard iterasyonu) ispatlar yapılacak, daha sonra bu ispatların kapalı bağıntılar yardımıyla daha basit ve kısa olacak şekilde verilebileceği gösterilecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Topoloji ve fonksiyonel analizin temelini oluşturan metrik uzay kavramı ilk defa 1906 yılında Fransız Matematikçi Maurice Frechét tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Tanım 2.1 *X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.*

$M1)$ Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$M2)$ Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$M3)$ Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine metrik uzay adı verilir.

Alışılmış (klasik) metrik uzayları genelleştirme fikriyle, 1963 yılında Gähler tarafından ortaya atılan 2-metrik uzay kavramı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.2 *X boştan farklı bir küme olmak üzere, $d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu,*

$\dot{I}1)$ Birbirinden farklı keyfi $x, y \in X$ elemanları için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır,

$\dot{I}2)$ Keyfi $x, y, z \in X$ elemanlarından herhangi ikisi eşit ise $d(x, y, z) = 0$ dır,

$\dot{I}3)$ $d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, x, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y) = d(z, y, x)$ dir,

$\dot{I}4)$ Keyfi $x, y, z, a \in X$ için $d(x, y, z) \leq d(x, y, a) + d(x, a, z) + d(a, y, z)$ dir,

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir $2-$metrik denir ve (X, d) ikilisine $2-$metrik uzay adı verilir.

Her ne kadar Gähler yaptığı çalışmada $2-$metrik uzayın alışılmış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olduğunu iddia etmiş olsa da daha sonra yapılan bir çok çalışmada $2-$metrik uzayın alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olmadığı ortaya konmuştur. Örneğin alışılmış metrik uzayda, metrik sürekli bir fonksiyon iken $2-$metriğin sürekli olması gerekmediği gösterilmiştir. Yani bu uzaklık fonksiyonları arasında bir ilginin olmadığı ortaya konmuştur. Daha sonra 1984 teki doktora çalışmasında Dhage alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olarak $D-$metrik uzay kavramını, $2-$metrik uzaydaki $\dot{I}1)$ ve $\dot{I}2)$ aksiyomlarını değiştirerek aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.3 *X boştan farklı bir küme olmak üzere, $D : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu*

$D1)$ $D(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ dir,

$D2)$ $D(x,y,z) = D(x,z,y) = D(y,x,z) = D(y,z,x) = D(z,x,y) = D(z,y,x)$ dir,

$D3)$ Keyfi $x,y,z,a \in X$ için $D(x,y,z) \leq D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)$ dir, koşullarını sağlıyorsa D ye X üzerinde bir $D-$metrik denir ve $(X,\ D)$ ikilisine $D-$metrik uzay adı verilir.

2003 yılında Mustafa ve Sims, $D-$metrik uzayda yakınsaklık ve dizisel süreklilik gibi kavramların iyi tanımlı olmadığını ortaya koymuşlar, Dhagenin çalışmasında bazı hatalar ve kusurların olduğunu göstermişlerdir. Dolayısıyla alışılmış metrik uzayların bir genelleştirmesi fikriyle ortaya atılan $D-$metrik uzayın da problemli olması sebebiyle, bu problemin üstesinden gelebilmek adına 2006 yılında alışılmış metrik uzayın bir genelleştirmesi olarak $G-$metrik uzay kavramını aşağıdaki gibi tanıtmışlardır.

Tanım 2.4 *X boştan farklı bir küme olmak üzere, $G : X \times X \times X \to [0,\ \infty)$ fonksiyonu*

$G1)$ $x = y = z$ ise $G(x,y,z) = 0$ dır,

$G2)$ $x \neq y$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için $G(x,x,y) > 0$ dır,

$G3)$ $y \neq z$ olacak şekildeki her $x,y,z \in X$ için $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ dır,

$G4)$ $G(x,y,z) = G(x,z,y) = G(y,x,z) = G(y,z,x) = G(z,x,y) = G(z,y,x)$ dir,

$G5)$ Her $x,y,z,w \in X$ için $G(x,y,z) \leq G(x,w,w) + G(w,y,z)$ dir, koşullarını sağlıyorsa G ye X üzerinde bir G-metrik denir ve (X,G) ikilisine $G-$metrik uzay adı verilir.

Literatür incelendiğinde alışılmış metrik uzayların daha birçok genelleştirmesinin mevcut olduğunu görmek mümkündür. Örneğin 2012 yılında Shaban Sedghi vd. $S-$metrik uzay kavramını tanıtmıştır. Daha sonra, 2015 yılında Abbas vd. $S-$metrik uzayı n mertebeye genelleyerek $A-$metrik uzay kavramını ortaya koymuşlardır. Buraya kadar olan kısımda adı geçen genelleştirilmiş metrik uzaylar literatürde üzerine hala çalışılan ve popüler olanlardır. Ayrıca bu genelleştirilmiş metrik uzayların aksiyomatik yapıları farklı olsa da ikiden fazla nokta arasındaki uzaklığı aynı anda ölçme fırsatını vermeleri bu uzaylar için ortak yöndür. Bu anlamda iki nokta arasındaki uzaklık kavramına dayalı alışılmış metrik uzayın son genellemesi 2016 yılında yapılmıştır. Bu uzay Roshan vd. tarafından tanıtılmış olup, b ve dikdörtgensel metrik uzayın bir kombinasyonudur, adına dikdörtgensel $b-$metrik uzay veya Branciari $b-$metrik uzay adı verilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmanın 6. bölümünde yer alan ve G_n- metrik uzayda verilen sabit nokta teoremlerinin ispatlarında kullanılacak, alışılmış metrik uzaylardaki bazı ünlü sabit nokta teoremleri verilecektir. Ayrıca alışılmış metrik uzaylarda bazı bilinen tanımlar hatırlatılacaktır.

Tanım 3.1 *X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için*

$1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$2) d(x, y) = d(y, x)$

$3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde alışılmış (standart) metrik ve (X, d) ikilisine de alışılmış metrik uzay denir.

Tanım 3.2 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir.*

Tanım 3.3 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.*

Tanım 3.4 *(X, d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.*

Tanım 3.5 *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir.*

Tanım 3.6 *(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$ olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir.*

Teorem 3.1 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Yani $T(x) = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır. Özellikle x_0, X te keyfi bir nokta ve $x_n = T^n(x_0)$ şeklinde tanımlanan X de bir dizi olarak alınır ise (x_n) dizisi bu sabit noktaya yakınsar.*

Teorem 3.2 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \left[d(x, T(x)) + d(y, T(y))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır (Kannan, 1969).

Teorem 3.3 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü α, β, γ negatif olmayan sayılar ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x)) + \beta d(y, T(y) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır (Reich, 1971).

Teorem 3.4 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq \lambda \max\left\{d\left(x, T\left(x\right)\right), d\left(y, T\left(y\right)\right)\right\}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır (Bianchini, 1972).

Teorem 3.5 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \left[d(x, T(y)) + d(y, T(x))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır (Chatterjea, 1972).

Teorem 3.6 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \max\left\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x))\right\}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır (Ćirić, 1974).

4. $G-$METRİK UZAYLAR

Soyut bir kümenin iki nesnesi arasındaki mesafe kavramı, kümenin geometrik ve topolojik yönlerini incelemek için hayati bir rol oynar. Bu kavram, iki nesnenin yakınlığına titiz bir matematiksel anlam kazandırır ve bu nedenle geometride olduğu gibi, graf teori, karar verme süreçleri ve eşleştirme problemleri gibi sosyal bilimlerde de önem kazanmıştır. Uzaklık kavramı ile donatılmış bir küme ve bu kümede yer alan iki obje üzerine tanımlı dönüşümler metrik sabit nokta teorisinin en önemli iki temel bileşenidir. Bir dönüşüm altında değişmez kalan bir noktaya, bu dönüşümün sabit noktası denir. Sabit nokta teorisi, integral ve diferansiyel denklemler gibi doğrusal ve doğrusal olmayan operatör denklemlerinin çözümlerinin varlığını ve tekliğini sağlayan koşullarla ilgilenir. Böylece topoloji ve fonksiyonel analizin önemli bir dalı haline gelir. Metrik sabit nokta teorisindeki en önemli sonuçlardan biri Banach büzülme prensibidir. Bu prensip, (X, d) tam bir metrik metrik uzay olmak üzere, $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $0 \leq k < 1$ için $d(fx, fy) \leq kd(x, y)$ (büzülme) şartını sağlıyorsa, f dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu söyler. Banach büzülme prensibi metrik sabit nokta teorisinin başlangıç noktası olarak görülmektedir. Bu prensibi genelleştirmenin ve geliştirmenin iki genel yolu şunlardır:

1 büzülme şartını genelleştirmek,

2 doğanın fiziksel problemlerini modellemek için uygun çerçeveyi oluşturan genelleştirilmiş bir uzaklık yapısının tanıtılmasıdır.

Bu anlamda, Siegfried Gähler 1963 te $2-$metrik uzayları klasik (alışılmış) metrik uzayların bir genellemesi olarak aşağıdaki gibi tanıtmıştır.

X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu keyfi $x, y, z, w \in X$ için aşağıdaki aksiyomları sağlasın;

$Aksiyom\ 1)$ Biribirinden farklı her $x, y \in X$ için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $z \in X$ vardır,

$Aksiyom\ 2)$ $x = y = z$ ise $d(x, y, z) = 0$,

$Aksiyom\ 3)$ $d(x, y, z)$=$d(x, z, y)$=$d(y, x, z)$=$d(y, z, x)$=$d(z, x, y)$=$d(z, y, x)$,

$Aksiyom\ 4)$ $d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z)$.

Bu takdirde d fonksiyonuna X üzerinde $2-$metrik denir ve (X, d) ikilisine $2-$metrik uzay adı verilir (Gahler, 1963). K.S.Ha ve arkadaşları 1988 de klasik (alışılmış) metrik uzaylar ile $2-$metrik uzaylar arasında bir bağlantı olmadığı gösterilmiştir (Ha, 1988). Örneğin alışılmış (klasik) metrik sürekli iken $2-$metrik değişken bileşenlerine göre sürekli olmak zorunda değildir. 1984 te Bapure Dhage doktora tezinde Gähler in $2-$metrik uzay için verdiği aksiyomatik yapıda $D : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için Aksiyom 1 ve

Aksiyom 2 yerine

$$Aksiyom\ 1^{*})\ D\left(x,y,z\right)=0 \text{ ancak ve ancak } x=y=z,$$

aksiyomunu vererek ve $Aksiyom\ 3)$ ve $Aksiyom\ 4)$ ü değiştirmeden klasik (alışılmış) metrik uzayları genelleştirmek adına $D-$metrik kavramını tanıtmıştır (Dhage, 1984). Ancak 2003 yılına gelindiğinde Zead Mustafa ve Brailey Sims $D-$metrik uzaylarda yakınsaklık ve süreklilik kavramının iyi tanımlı olmadığını göstermelerinin yanı sıra $D-$metrik uzayda Dhage tarafından verilen birçok topolojik kavramın hatalı ve eksik olduğunu tespit etmişlerdir (Mustafa ve Sims, 2003). Mustafa ve Sims genelleştirilmiş $D-$metrik uzaylardaki temel kusurların üstesinden gelmek için $G-$metrik adı verilen daha sağlam bir genelleştirilmiş metrik sınıfı Tanım 4.1 deki gibi vermişlerdir. Burada belirtmek gerekir ki bir uzay üzerindeki uzaklık kavramının geleneksel tanımı bu uzaydaki iki noktanın "biribirinden ne kadar ayrı" olduğunun ölçülmesi fikri üzerine geliştirilmiş olmasıdır. Ancak bu tanım uzaydaki ikiden fazla elemanın birbirinden ne kadar ayrıldığını aynı anda ölçme fırsatı vermez. Bu anlamda $G-$metrik uzay gibi genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde yapılan çalışmalar teorik açıdan oldukça önemlidir. Bu bölümünde $G-$metrik uzaylar ile ilgili detaylı bir irdeleme yapılacak olup, bu inceleme için temel olarak iki kaynaktan yararlanılacaktır. Bu kaynaklar (Mustafa vd., 2006; Agarwal vd., 2015) dir.

Tanım 4.1 *X boştan farklı küme olmak üzere, $G : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu, her $x,y,z,w \in X$ için*
$(G1)$ $x=y=z$ iken $G\left(x,y,z\right)=0$,
$(G2)$ $\forall x,y \in X$ ve $x \neq y$ iken $G\left(x,y,y\right)>0$,
$(G3)$ $\forall x,y,z \in X$ ve $y \neq z$ iken $G\left(x,x,y\right) \leq G\left(x,y,z\right)$,
$(G4)$ $G\left(x,y,z\right)=G\left(x,z,y\right)=\ldots$($\{x,y,z\}$ tüm permütasyonlarına göre),
$(G5)$ (genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği) $\forall x,y,z,w \in X$ için

$$G\left(x,y,z\right) \leq G\left(x,w,w\right)+G\left(w,y,z\right),$$

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X üzerinde $G-$metrik denir. Ayrıca (X,G) ikilisine de $G-$metrik uzay adı verilir (Mustafa ve Sims, 2006).

Örnek 4.1 *X boştan farklı küme olmak üzere, $G : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu, her $x,y,z \in X$ için*

$$G\left(x,y,z\right)=\begin{cases} 0 & ,\ x=y=z \\ 1 & ,\ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise X üzerinde $G-$metriktir (özel olarak ayrık $G-$metrik denir).

Örnek 4.2 *X boştan farklı küme olmak üzere, $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0 & , \textit{değişkenlerin hepsi eşit} \\ 1 & , \textit{değişkenlerin herhangi ikisi eşit} \\ 2 & , \textit{değişkenlerin hepsi farklı} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise X üzerinde $G-$metriktir.

Örnek 4.3 *$X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0 & , x = y = z \\ \max\{x, y, z\} & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise X üzerinde $G-$metriktir.

Aşağıdaki örnek bir $G-$metrik uzay verildiğinde, üç farklı şekilde yeni bir $G-$metrik uzayın elde edilmesi ile ilgilidir.

Örnek 4.4 *(X, G) bir $G-$metrik uzay ve $\lambda \in [0, \infty)$ olmak üzere, her $x, y, z \in X$ için*

$$G^1(x, y, z) = \lambda G(x, y, z)$$

$$G^2(x, y, z) = \min\{\lambda, G(x, y, z)\}$$

$$G^3(x, y, z) = \frac{G(x, y, z)}{\lambda + G(x, y, z)}$$

şeklinde tanımlı G^1, G^2 ve G^3 tanımlı fonksiyonlar X üzerinde $G-$metriktirler.

4.1 Alışılmış (Klasik) Metrik Uzaylar ve $G-$Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Aşağıda alışılmış (klasik) metrik uzaylar ile $G-$metrik uzaylar arasındaki geçişi mümkün kılan bazı örneklere yer verilecektir.

Örnek 4.5 *(X, d) bir alışılmış metrik uzay olmak üzere; $\forall\, x, y, z \in X$ için*

$$\begin{aligned} G^M &: X \times X \times X \longrightarrow [0, \infty) \\ &(x, y, z) \longmapsto G^M(x, y, z) := \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} G^S \quad : X \times X \times X & \longrightarrow & [0, \infty) \\ (x, y, z) & \longmapsto & G^S(x, y, z) := d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \end{array}$$

şeklinde tanım fonksiyonlar X üzerinde bir $G-$metriktir. Ayrıca bu $G-$metrikler

$$G^M(x, y, z) \leq G^S(x, y, z) \leq 3G^M(x, y, z)$$

eşitsizliklerini sağlar.

Gerçekten, $G^M(x, y, z)$=max$\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$ *şeklinde tanımlı G^M fonksiyonun $\forall\ x, y, z, w \in X$ için bir $G-$metrik olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;*
$(G1)$ $x = y = z$ *iken* $d(x, y) = d(y, z) = d(z, x) = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} G^M(x, y, z) &= \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $G1$ aksiyomu sağlanır.
$(G2)$ $\forall x, y \in X$ *ve* $x \neq y$ *iken*

$$\begin{aligned} G^M(x, y, y) &= \max\{d(x, y), d(y, y), d(y, x)\} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

dir. Buradan $d(x, y) > 0$ olduğundan $G^M(x, y, y) > 0$ elde edilir. Dolayısıyla $G2$ aksiyomu sağlanır.
$(G3)$ $\forall x, y, z \in X$ *ve* $y \neq z$ *iken*

$$\begin{aligned} G^M(x, y, y) &= \max\{d(x, y), d(y, y), d(y, x)\} \\ &= \max\{d(x, y), d(y, x)\} \\ &\leq \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} \\ &= G^M(x, y, z) \end{aligned}$$

olur. Yani $G^M(x, x, y) \leq G^M(x, y, z)$ elde edilir. Dolayısıyla $G3$ aksiyomu sağlanır.
$(G4)$

$$\begin{aligned} G^M(x, y, z) &= \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} \\ &= \max\{d(x, z), d(z, y), d(y, x)\} \\ &= G^M(x, z, y) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\{x, y, z\}$ kümesinin tüm permütasyonları içinde diğer eşitlikler basitçe gösterilebilir. Sonuç olarak $G4$ aksiyomu sağlanır.
$(G5)$ $\forall x, y, z, w \in X$ *için*

$$\begin{aligned} G^M(x, y, z) &= \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} \\ &\leq \max\{d(x, w) + d(w, y), d(y, z), d(z, w) + d(w, x)\} \\ &\leq d(x, w) + \max\{d(w, y), d(y, z), d(z, w)\} \\ &= G^M(x, w, w) + G^M(w, y, z) \end{aligned}$$

dır. O halde $G^M(x,y,z) \leq G^M(x,w,w) + G^M(w,y,z)$ *elde edilir. Dolayısıyla* $G5$ *aksiyomu sağlanır. Sonuç olarak* G^M *fonksiyonu bir* $G-$*metriktir.*

Benzer şekilde $G^S(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$ *şeklinde tanımlı* G^S *fonksiyonun* $\forall\, x,y,z,w \in X$ *için bir* $G-$*metrik olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;*
$(G1)$ $x = y = z$ *iken* $d(x,y) = d(y,z) = d(z,x) = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} G^S(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $G1$ *aksiyomu sağlanır.*
$(G2)$ $\forall x,y \in X$ *ve* $x \neq y$ *iken*

$$\begin{aligned} G^S(x,y,y) &= d(x,y) + d(y,y) + d(y,x) \\ &= d(x,y) + d(y,x) \end{aligned}$$

dır. Buradan $d(x,y) > 0$ *olduğundan* $G^S(x,y,y) > 0$ *elde edilir. Dolayısıyla* $G2$ *aksiyomu sağlanır.*
$(G3)$ $\forall x,y,z \in X$ *ve* $y \neq z$ *iken*

$$\begin{aligned} G^S(x,x,y) &= d(x,y) + d(y,y) + d(y,x) \\ &= d(x,y) + d(y,x) \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= G^S(x,y,z) \end{aligned}$$

olur. Yani $G^S(x,x,y) \leq G^S(x,y,z)$ *elde edilir. Dolayısıyla* $G3$ *aksiyomu sağlanır.*
$(G4)$

$$\begin{aligned} G^S(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= d(x,z) + d(z,y) + d(y,x) \\ &= G^M(x,z,y) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\{x,y,z\}$ *kümesinin tüm permütasyonları içinde diğer eşitlikler basitçe gösterilebilir. Sonuç olarak* $G4$ *aksiyomu sağlanır.*
$(G5)$ $\forall x,y,z,w \in X$ *için*

$$G^S(x,y,z) = \underbrace{d(x,y)}_{\leq d(x,w)+d(w,y)} + d(y,z) + \underbrace{d(z,x)}_{\leq d(z,w)+d(w,x)}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} G^S(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &\leq d(x,w) + d(w,y) + d(y,z) + d(z,w) + d(w,x) \\ &= d(x,w) + d(w,x) + d(w,y) + d(y,z) + d(z,w) \\ &= \underbrace{d(x,w) + d(w,x)}_{=G^S(x,w,w)} + \underbrace{d(w,y) + d(y,z) + d(z,w)}_{=G^S(w,y,z)} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $G^S(x,y,z) \leq G^S(x,w,w)+G^S(w,y,z)$ *bulunur. Dolayısıyla* $G5$ *aksiyomu sağlanır. Sonuç olarak* G^S *fonksiyonu bir* $G-$*metriktir.*

$\forall\, x,y,z \in X$ *için* G^M *ve* G^S *metriklerinin tanımı gereği*

$$\begin{aligned} G^M(x,y,z) &= \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} \\ &\leq d(x,y)+d(y,z)+d(z,x) \\ &= G^S(x,y,z) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$G^M(x,y,z) \leq G^S(x,y,z) \tag{*}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} \\ d(y,z) &\leq \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} \\ d(z,x) &\leq \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri her zaman geçerlidir. Bu eşitsizlikler alt alta toplanırsa

$$\underbrace{d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)}_{=G^S(x,y,z)} \leq 3\underbrace{\max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}}_{=G^M(x,y,z)}$$

elde edilir. Yani

$$G^S(x,y,z) \leq 3G^M(x,y,z) \tag{**}$$

dir. $(*)$ *ve* $(**)$ *eşitsizliklerinden* $G^M(x,y,z) \leq G^S(x,y,z) \leq 3G^M(x,y,z)$ *eşitsizlikleri elde edilir.*

Örnek 4.6 (X,G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere;* $\forall\, x,y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} d^M \; : X \times X &\longrightarrow [0,\infty) \\ (x,y) &\longmapsto d^M(x,y) := \max\{G(x,x,y), G(x,y,y)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d^S \; : X \times X &\longrightarrow [0,\infty) \\ (x,y) &\longmapsto d^S(x,y) := G(x,x,y)+G(x,y,y) \end{aligned}$$

şeklinde tanım fonksiyonlar X *üzerinde bir alışılmış metriktir. Ayrıca bu alışılmış metrikler için*

$$d^M(x,y) \leq d^S(x,y) \leq 2d^M(x,y)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Gerçekten, $d^M(x,y)=\max\{G(x,x,y), G(x,y,y)\}$ *şeklinde tanımlı* d^M *fonksiyonun* $\forall\, x,y,z \in X$ *için bir alışılmış metrik olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;*

$\forall\, x, y \in X$ için $G(x,x,y) \geq 0$ ve $G(x,y,y) \geq 0$ olduğundan $d^M(x,y) \geq 0$ dır. Eğer $x = y$ ise $G(x,x,y) = 0$ ve $G(x,y,y) = 0$ olup, $d^M(x,y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla alışılmış metrik uzayın pozitif tanımlılık aksiyomu sağlanmış olur. d^M fonksiyonunun tanımı gereği ve $G4$ aksiyomundan

$$\left.\begin{array}{l} d^M(x,y) = \max\{G(x,x,y), G(x,y,y)\} \\ d^M(y,x) = \max\{G(y,y,x), G(y,x,x)\} \end{array}\right\} \Longrightarrow d^M(x,y) = d^M(y,x) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla alışılmış metrik uzayın simetri aksiyomu sağlanmış olur. Ayrıca

$$\left.\begin{array}{l} d^M(x,y) = \max\{G(x,x,y), G(x,y,y)\} \\ d^M(y,z) = \max\{G(y,y,z), G(y,z,z)\} \end{array}\right\} \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} d^M(x,y) + d^M(y,z) &= \max\{G(x,x,y), G(x,y,y)\} + \max\{G(y,y,z), G(y,z,z)\} \\ &\geq \max\{G(x,x,y) + G(y,y,z), G(x,y,y) + G(y,z,z)\} \\ &\geq \max\{G(x,x,z), G(x,z,z)\} \\ &= d^M(x,z) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla alışılmış metrik uzayın üçgen eşitsizliği aksiyomu sağlanmış olur. Sonuç olarak d^M fonksiyonu bir alışılmış metriktir.

Benzer şekilde, $d^S(x,y) = G(x,x,y) + G(x,y,y)$ şeklinde tanımlı d^S fonksiyonun $\forall\, x, y, z \in X$ için bir alışılmış metrik olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;
$\forall\, x, y \in X$ için $G(x,x,y) \geq 0$ ve $G(x,y,y) \geq 0$ olup $G(x,x,y) + G(x,y,y) \geq 0$ olacağından $d^S(x,y) \geq 0$ dır. Eğer $x = y$ ise $G(x,x,y) = 0$ ve $G(x,y,y) = 0$ olup, $d^S(x,y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla alışılmış metrik uzayın pozitif tanımlılık aksiyomu sağlanmış olur. d^S fonksiyonunun tanımı gereği ve $G4$ aksiyomundan

$$\left.\begin{array}{l} d^S(x,y) = G(x,x,y) + G(x,y,y) \\ d^S(y,x) = G(y,y,x) + G(y,x,x) \end{array}\right\} \Longrightarrow d^S(x,y) = d^S(y,x) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla alışılmış metrik uzayın simetri aksiyomu sağlanmış olur. Ayrıca

$$\left.\begin{array}{l} d^S(x,y) = G(x,x,y) + G(x,y,y) \\ d^S(y,z) = G(y,y,z) + G(y,z,z) \end{array}\right\} \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} d^S(x,y) + d^S(y,z) &= G(x,x,y) + G(x,y,y) + G(y,y,z) + G(y,z,z) \\ &= G(x,x,y) + G(y,y,z) + G(x,y,y) + G(y,z,z) \\ &\geq G(x,x,z) + G(x,z,z) \\ &= d^S(x,z) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla alışılmış metrik uzayın üçgen eşitsizliği aksiyomu sağlanmış olur. Sonuç olarak d^S fonksiyonu bir alışılmış metriktir.

$\forall\, x,y,z\in X$ için d^M ve d^S metriklerinin tanımı gereği,

$$\begin{aligned} d^M(x,y) &= \max\{G(x,x,y),G(x,y,y)\} \\ &\le G(x,x,y)+G(x,y,y) \\ &= d^S(x,y) \end{aligned}$$

dir. Yani

$$d^M(x,y)\le d^S(x,y) \qquad (*)$$

elde edilir. Yine tanımlar kullanılarak

$$\begin{aligned} d^S(x,y) &= G(x,x,y)+G(x,y,y) \\ &\le \max\{G(x,x,y),G(x,y,y)\}+\max\{G(x,x,y),G(x,y,y)\} \\ &= \underbrace{\max\{G(x,x,y),G(x,y,y)\}}_{=d^M(x,y)}+\underbrace{\max\{G(x,x,y),G(x,y,y)\}}_{=d^M(x,y)} \\ &= 2d^M(x,y) \end{aligned}$$

dir. Yani

$$d^S(x,y)\le 2d^M(x,y) \qquad (**)$$

elde edilir. Böylece $(*)$ ve $(**)$ dan

$$d^M(x,y)\le d^S(x,y)\le 2d^M(x,y)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Not 4.1 *Örnek 4.6 ışığında d^M ve d^S metrikleri denktirler.*

Örnek 4.7 *$X=\{x,y\}$ olmak üzere $G: X\times X\times X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu;*

$$\begin{aligned} G(x,x,x)=G(y,y,y)&=0 \\ G(x,x,y)&=1 \\ G(x,y,y)&=2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $G-$ fonksiyonu X üzerinde bir $G-$metrik olup, alışılmış bir metrik uzaydan üretilmez.

4.2 $G-$Metrik Uzayda Bazı Önemli Eşitsizlikler

Aşağıdaki yardımcı teoremde keyfi bir $G-$metriğin bazı temel özellikleri verilecektir. Bu özellikler oldukça önemli olup, bundan sonraki kısımlarda sık sık kullanılacaktırlar.

Yardımcı Teorem 4.1 (X, G) *bir* $G-$*metrik uzay olarak verilsin. Bu takdirde, her* $x, y, z, w \in X$ *için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir :*

1) $G(x, y, z) = 0$ *ise* $x = y = z$ *dir.*

İspat : $\forall\, x, y, z \in X$ *için* $G(x, y, z) = 0$ *verilsin.*

Durum 1 : Varsayalım ki x, y, z *değişkenleri farklı olsun. Bu takdirde*

$$\underbrace{G(x, y, z) \geq G(x, x, y)}_{G3)\ \textit{aksiyomu}} \Longrightarrow G(x, x, y) = 0 \Longrightarrow \underbrace{x = y}_{G2)\ \textit{aksiyomu}}$$

elde edilir ki bu $x \neq y$ *olması ile çelişirdi.*

Durum 2 : Varsayalım ki x, y, z *değişkenleri herhangi ikisi eşit diğer değişken farklı olsun. Genelliği bozmaksızın* $x = y \neq z$ *olarak alınsın. Bu takdirde*

$$\underbrace{G(x, y, z) \geq G(y, y, z)}_{G3)\ \textit{aksiyomu}} \Longrightarrow G(y, y, z) = 0 \Longrightarrow \underbrace{y = z}_{G2)\ \textit{aksiyomu}}$$

elde edilir ki bu $y \neq z$ *olması ile çelişirdi.*

Sonuç olarak $G(x, y, z) = 0$ *iken* x, y, z *değişkenleri hepsi eşittir.*

2) $G(x, y, y) \leq 2G(x, x, y)$ *dir.*

İspat :

$$\begin{aligned} G(x, y, y) &\leq G(x, y, x) + G(x, x, y) && \because G5)\ \textit{aksiyomu} \\ &= G(x, x, y) + G(x, x, y) && \because G4)\ \textit{aksiyomu} \\ &= 2G(x, x, y) \end{aligned}$$

dir.

3) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$ *dir.*

İspat :

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= G(y, x, z) \\ &\leq G(y, x, x) + G(x, x, z) && \because G5)\ \textit{aksiyomu} \\ &= G(x, x, y) + G(x, x, z) && \because G4)\ \textit{aksiyomu} \end{aligned}$$

dir.

4) $G(x, y, z) \leq G(x, w, z) + G(w, y, z)$ *dir.*

İspat : $\forall\, x, y, z, w \in X$ *için,*

$$z \neq x \Longrightarrow \begin{cases} G(x, y, z) & \leq G(x, w, w) + G(w, y, z) \quad \because G5)\ \textit{aksiyomu} \\ & = G(w, w, x) + G(w, y, z) \quad \because G4)\ \textit{aksiyomu} \\ & \leq G(w, z, x) + G(w, y, z) \quad \because G3)\ \textit{aksiyomu} \end{cases}$$

dir.

$$z = x \ \wedge\ y \neq w \Longrightarrow \begin{cases} G(x, y, z) & = G(x, y, x) \\ & \leq G(x, y, w) \quad \because G3)\ \textit{aksiyomu} \\ & \leq G(x, y, w) + G(x, w, x) \quad \because G5)\ \textit{aksiyomu} \\ & = G(w, y, x) + G(x, w, x) \\ & = G(w, y, z) + G(x, w, z) \end{cases}$$

dir.

$$z = x \wedge y = w \Longrightarrow \begin{cases} G(x,y,z) & = G(x,y,x) \\ & \leq G(x,y,x) + G(w,w,x) \\ & = G(x,w,z) + G(w,y,z) \end{cases}$$

5) $G(x,y,z) \leq G(x,y,w) + G(x,w,z) + G(w,y,z)$ *dir.*

İspat : $\forall\ x,y,z,w \in X$ *için, 4) de verilen eşitsizlikten*

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &\leq G(x,w,z) + G(w,y,z) \\ G(x,z,y) &\leq G(x,w,y) + G(w,z,y) \\ G(z,y,x) &\leq G(z,w,x) + G(w,y,x) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir, bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$3G(x,y,z) \leq 2\left[G(x,y,w) + G(x,w,z) + G(w,y,z)\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &\leq \frac{2}{3}\left[G(x,y,w) + G(x,w,z) + G(w,y,z)\right] \\ &\leq G(x,y,w) + G(x,w,z) + G(w,y,z) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

6) $G(x,y,z) \leq G(x,w,w) + G(y,w,w) + G(z,w,w)$ *dir.*

İspat : $\forall\ x,y,z,w \in X$ *için,*

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &\leq G(x,w,w) + G(w,y,z) && \because G5) \text{ aksiyomu} \\ &= G(x,w,w) + G(y,w,z) && \because G4) \text{ aksiyomu} \\ &\leq G(x,w,w) + G(y,w,w) + G(w,w,z) && \because G5) \text{ aksiyomu} \end{aligned}$$

dir.

7) $n \geq 2$ *olacak şekildeki her* n *doğal sayısı ve* $\forall\ x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ *için,*

$$G(x_1,x_n,x_n) \leq G(x_1,x_2,x_2) + G(x_2,x_3,x_3) + \cdots + G(x_{n-1},x_n,x_n) \qquad \textbf{(*)}$$

ve

$$G(x_1,x_1,x_n) \leq G(x_1,x_1,x_2) + G(x_2,x_2,x_3) + \cdots + G(x_{n-1},x_{n-1},x_n) \qquad \textbf{(**)}$$

dir.

İspat : $\forall\ x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ *için* $(*)$ *eşitsizliğinin geçerliliğinin ispatı için tümevarım yöntemi kullanılırsa;*

$n = 2$ *için*

$$G(x_1,x_2,x_2) \leq G(x_1,x_2,x_2)$$

dir.

$n=k$ *için eşitsizliğin doğru olduğu kabul edilsin. Yani*

$$G\left(x_1,x_k,x_k\right)\leq\sum_{i=1}^{k-1}G\left(x_i,x_{i+1},x_{i+1}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$n=k+1$ *için*

$$\begin{aligned}G\left(x_1,x_{k+1},x_{k+1}\right)&\leq G\left(x_1,x_k,x_k\right)+G\left(x_k,x_{k+1},x_{k+1}\right) &&\because G5)\text{ aksiyomu}\\&\leq\sum_{i=1}^{k-1}G\left(x_i,x_{i+1},x_{i+1}\right)+G\left(x_k,x_{k+1},x_{k+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}G\left(x_i,x_{i+1},x_{i+1}\right)\end{aligned}$$

elde edillir ki $n=k+1$ *için* $(*)$ *eşitsizliğin sağlandığı gösterilmiş olur. Benzer şekilde* $(**)$ *eşitsizliğinin geçerliliğinin ispatı için tümevarım yöntemi kullanılırsa;*

$n=2$ *için*

$$G\left(x_1,x_1,x_2\right)\leq G\left(x_1,x_1,x_2\right)$$

dir.

$n=k$ *için eşitsizliğin doğru olduğu kabul edilsin. Yani*

$$G\left(x_1,x_1,x_k\right)\leq\sum_{i=1}^{k-1}G\left(x_i,x_i,x_{i+1}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$n=k+1$ *için*

$$\begin{aligned}G\left(x_1,x_1,x_{k+1}\right)&\leq G\left(x_1,x_1,x_k\right)+G\left(x_k,x_k,x_{k+1}\right) &&\because G5)\text{ aksiyomu}\\&\leq\sum_{i=1}^{k-1}G\left(x_i,x_i,x_{i+1}\right)+G\left(x_k,x_k,x_{k+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}G\left(x_i,x_i,x_{i+1}\right)\end{aligned}$$

elde edillir ki $n=k+1$ *için* $(**)$ *eşitsizliğin sağlandığı gösterilmiş olur.*

8) $\forall\ x,y,z,w\in X$ *ve* $x\neq y$ *için,* $\left|G\left(x,y,z\right)-G\left(x,y,w\right)\right|\leq G\left(x,w,z\right)$ *dir.*

İspat : $\forall\ x,y,z,w\in X$ *ve* $x\neq y$ *için,*

$$\underbrace{G\left(x,y,z\right)\leq G\left(x,w,z\right)+G\left(x,y,w\right)}_{\text{4) teki eşitsizlikten}}\Rightarrow G\left(x,y,z\right)-G\left(x,y,w\right)\leq G\left(x,w,z\right)$$

dir. Ayrıca sırasıyla $G5)$ aksiyomu ve $x \neq y$ özelliği kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} G(x,y,w) &\leq G(x,w,z)+G(z,z,y) \\ &\leq G(x,w,z)+G(x,y,z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow -G(x,w,z) \leq G(x,y,z)-G(x,y,w)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$-G(x,w,z) \leq G(x,y,z)-G(x,y,w) \leq G(x,w,z)$$

eşitsizliklerinden $|G(x,y,z)-G(x,y,w)| \leq G(x,w,z)$ dir.
9) $|G(x,y,z)-G(x,y,w)| \leq \max\{G(w,z,z),G(z,w,w)\}$ *dir.*
İspat : $\forall\, x,y,z,w \in X$ *için,*

$$\underbrace{G(x,y,z) \leq G(x,y,w)+G(w,w,z)}_{G5)\ \text{aksiyomu}} \Rightarrow G(x,y,z)-G(x,y,w) \leq G(w,w,z)$$

$$\underbrace{G(x,y,w) \leq G(x,y,z)+G(z,z,w)}_{G5)\ \text{aksiyomu}} \Rightarrow -G(z,z,w) \leq G(x,y,z)-G(x,y,w)$$

dir. Bu eşitsizliklerden

$$-G(z,z,w) \leq G(x,y,z)-G(x,y,w) \leq G(w,w,z)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik

$$-\max\{G(w,w,z),G(z,z,w)\} \leq G(x,y,z)-G(x,y,w) \leq \max\{G(w,w,z),G(z,z,w)\}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak

$$|G(x,y,z)-G(x,y,w)| \leq \max\{G(w,z,z),G(z,w,w)\}$$

eşitsizliği elde edilir.

4.3 Simetrik $G-$Metrik Uzaylar

Tanım 4.2 (X,G) *bir $G-$metrik uzay olmak üzere;* $\forall\, x,y \in X$ *için*

$$G(x,x,y) = G(x,y,y)$$

eşitliği geçerli ise, (X,G) uzayına simetrik $G-$metrik uzay denir.

Not 4.2 *Örnek 4.1, Örnek 4.2 ve Örnek 4.3 te verilen $G-$metrik uzaylar simetriktirler. Örnek 4.4 de verilen*

$$G^1(x,y,z) = \lambda G(x,y,z)$$

$$G^2(x,y,z) = \min\{\lambda, G(x,y,z)\}$$

$$G^3(x,y,z) = \frac{G(x,y,z)}{\lambda + G(x,y,z)}$$

G^1, G^2 ve G^3 metrikleri $G-$metriğinin simetrik olması durumunda simetrik aksi durumlarda simetrik değildirler.
Örnek 4.7 de verilen $G-$metrik $\underbrace{G(x,x,y)}_{=1} \neq \underbrace{G(x,y,y)}_{=2}$ olması nedeniyle simetrik değildir.

Yardımcı Teorem 4.2 *(X,G) bir $G-$metrik uzay olmak üzere; aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*
i) *(X,G), $G-$metrik uzayı simetriktir.*
ii) *$\forall\, x,y,z \in X$ için $G(x,y,y) \leq G(x,y,z)$.*
iii) *$\forall\, x,y,z,a,b \in X$ için $G(x,y,z) \leq G(x,y,a) + G(b,y,z)$.*

İspat $\forall\, x,y,z,a,b \in X$ *için*
i ⇒ ii :
$x \neq z$ için, $G3)$ aksiyomu gereğince $G(x,y,y) \leq G(x,y,z)$ dir.
$x = z$ için $\underbrace{G(x,y,y) = G(x,x,y)}_{(X,G)\ \text{simetrik uzay}} = G(z,x,y)$ dir.
ii ⇒ iii :

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &\leq G(y,y,x) + G(y,y,z) && \because \textit{Yardımcı Teo. 4.1 - 3. özellikten} \\ &\leq G(a,y,x) + G(b,y,z) && \because \textbf{\textit{ii}}\ \textit{den} \\ &= G(x,y,a) + G(b,y,z) && \because G4)\ \textit{aksiyomu} \end{aligned}$$

iii ⇒ i :

$$\begin{aligned} G(x,y,y) &\leq G(x,y,x) + \underbrace{G(y,y,y)}_{=0} && \because \textbf{\textit{iii}}\ \textit{den} \\ &= G(x,x,y) && \because G4)\ \textit{aksiyomu} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} G(x,x,y) &\leq \underbrace{G(x,x,x)}_{=0} + G(y,x,y) && \because \textbf{\textit{iii}}\ \textit{den} \\ &= G(x,y,y) && \because G4)\ \textit{aksiyomu} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sonuç olarak

$$G(x,y,y) \leq G(x,x,y) \ \wedge \ G(x,x,y) \leq G(x,y,y) \Rightarrow G(x,x,y) = G(x,y,y)\ dir.$$

Yardımcı Teorem 4.3 (X, d) *bir alışılmış metrik uzay olmak üzere, Örnek 4.5 te tanımlanan* G^M *ve* G^S *fonksiyonları simetrik* $G-$ *metriklerdir. Ayrıca* $\forall\, x, y \in X$ *için*

$$G^S(x, y, y) = 2G^M(x, y, y) = 2d(x, y)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat *Alışılmış* d *metriği kullanılarak tanımlanan* G^M *ve* G^S *metriklerinin tanımı gereği;* $\forall\, x, y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} G^S(x, x, y) &= d(x, x) + d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \\ G^S(x, y, y) &= d(x, y) + d(y, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \end{aligned}$$

olup buradan $G^S(x, x, y) = G^S(x, y, y)$ *olduğundan* G^S *metriği simetriktir. Benzer şekilde*

$$\begin{aligned} G^M(x, x, y) &= \max\{d(x, x), d(x, y), d(y, x)\} = d(x, y) \\ G^M(x, y, y) &= \max\{d(x, y), d(y, y), d(y, x)\} = d(x, y) \end{aligned}$$

olup, buradan $G^M(x, x, y) = G^M(x, y, y)$ *olduğundan* G^M *metriği simetriktir. Ayrıca* $G^S(x, y, y) = 2d(x, y)$ *ve* $G^M(x, y, y) = d(x, y)$ *olduğundan*

$$G^S(x, y, y) = 2G^M(x, y, y) = 2d(x, y)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.4 (X, G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere;* $\forall\, x, y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} d_G \ : X \times X &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\longmapsto d_G(x, y) := G(x, y, y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı d_G *fonksiyonu verilsin. Bu takdirde;*
i) d_G *fonksiyonu pozitif tanımlıdır ve üçgen eşitsizliğini sağlar.*
ii) *Eğer* (X, G) *simetrik* $G-$*metrik uzay ise* (X, d_G) *alışılmış metrik uzaydır.*

İspat ***i)*** $\forall\, x, y \in X$ *için* $G(x, y, y) \geq 0$ *olduğundan* $d_G(x, y) = G(x, y, y) \geq 0$ *dır. Eğer* $x = y$ *ise* $G(x, y, y) = 0$ *olup* $d_G(x, y) = G(x, y, y) = 0$ *dır. Böylece* d_G *fonksiyonu pozitif tanımlıdır.*
Ayrıca

$$\begin{aligned} d_G(x, y) &= G(x, y, y) \\ &\leq G(x, z, z) + G(z, y, y) \quad \because G5) \text{ aksiyomu} \\ &= d_G(x, z) + d_G(z, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece d_G fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.
ii) *$G4$ aksiyomu gereği $G(x,x,y) = G(y,x,x)$ dir. Ayrıca $G-$metriği simetrik ise $G(x,x,y) = G(x,y,y)$ dir. Bu iki eşitlik birleştirilirse*

$$G(x,x,y) = G(y,x,x) = G(x,y,y)$$

bulunur. Buradan d_G fonksiyonunun tanımı gereği $G(y,x,x)$=$d_G(y,x)$ ve $G(x,y,y)$=$d_G(x,y)$ olduğundan

$$\underbrace{G(y,x,x)}_{=d_G(y,x)} = \underbrace{G(x,y,y)}_{=d_G(x,y)}$$

elde edilir. Yani $G(y,x,x) = d_G(y,x) = d_G(x,y) = G(x,y,y)$ dir. Böylece d_G fonksiyonu simetriktir.
Sonuç olarak d_G fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağlayacağından X üzerinde alışılmış bir metriktir.

4.4 $G-$Metrik Topoloji

Tanım 4.3 *(X,G) bir $G-$metrik uzay olsun. $x \in X$ merkezli, $r > 0$ yarıçaplı $G-$açık yuvarı;*

$$B_G(x,r) = \{y \in X : G(x,y,y) < r\}$$

şeklindeki X in bir alt kümesidir. $x \in X$ merkezli, $r > 0$ yarıçaplı $G-$kapalı yuvarı;

$$B_G[x,r] = \{y \in X : G(x,y,y) \leq r\}$$

şeklindeki X in bir alt kümesidir.

Örnek 4.8 *Örnek 4.1 de verilen ayrık $G-$metrik uzayı için*

$$B_G(x,r) = \begin{cases} X & , \quad r > 1 \\ \{x\} & , \quad r \leq 1 \end{cases}$$

dir. Örnek 4.3 de verilen $G-$metrik uzayı için açık yuvar

$$B_G(x,r) = \begin{cases} [0,r) & , \quad x < r \\ \emptyset & , \quad x > r \end{cases}$$

dir. Örnek 4.4 te verilen $G-$metrik uzaylar için açık yuvarlar, sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} B_{G^1}(x,r) &= B_G\left(x, \frac{r}{\lambda}\right), \\ B_{G^2}(x,r) &= \{y \in X : \min\{\lambda, G(x,x,y)\} < r\}, \\ B_{G^3}(x,r) &= B_G\left(x, \frac{\lambda r}{1-r}\right). \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 4.5 *(X, G) bir $G-$metrik uzay olmak üzere, keyfi $w \in X$ merkezli, $r > 0$ yarıçaplı açık yuvar için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.*
i) *$G(w, x, y) < r$ ise $x, y \in B_G(w, r)$ dir.*
ii) *Her $y \in B_G(w, r)$ için $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(w, r)$ olacak şekilde bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ vardır.*

İspat ***i)*** *$G3)$ aksiyomu gereği; $x \neq y$ için, aşağıdaki eşitsizlikler vardır*

$$r \geq G(w, x, y) \geq G(w, x, x) \Rightarrow x \in B_G(w, r),$$

$$r \geq G(w, x, y) \geq G(w, y, y) \Rightarrow y \in B_G(w, r)$$

dir.
ii) *Her $y \in B_G(w, r)$ için; $y \in B_G(w, r) \Rightarrow G(w, y, y) < r$ dir. Yani, $r - G(w, y, y) > 0$ dır. Bu ifade $\delta := r - G(w, y, y)$ olarak tanımlansın. Keyfi $z \in B_G(y, \delta)$ için, $G(y, z, z) < \delta$ olup*

$$\begin{aligned} G(w, z, z) &\leq \underbrace{G(w, y, y)}_{=r-\delta} + \underbrace{G(y, z, z)}_{<\delta} \quad \because G5) \text{ aksiyomu} \\ &< r - \delta + \delta = r \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $G(w, z, z) < r$ olduğu için $z \in B_G(w, r)$ dir. Sonuç olarak; her $y \in B_G(w, r)$ için, keyfi $z \in B_G(y, \delta)$ iken $z \in B_G(w, r)$ olduğu için $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(w, r)$ dir.

Yardımcı Teorem 4.6 *(X, G) bir $G-$metrik uzay olmak üzere, her $x \in X$ ve her $r \in \mathbb{R}^+$ için*

$$B_G\left(x, \frac{1}{3}r\right) \subseteq B_{d^S}(x, r) \subseteq B_{d^M}(x, r) \subseteq B_G(x, r) \subseteq B_{d^M}(x, 2r) \subseteq B_G(x, 2r)$$

dir.

İspat *Keyfi $y \in X$ için $y \in B_G\left(x, \frac{1}{3}r\right)$ olsun. Bu durumda $G(x, y, y) < \frac{1}{3}r$ dir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.1 - 2 den*

$$G(y, x, x) \leq 2G(x, y, y) \leq \frac{2}{3}r$$

elde edilir. d^S nin tanımından

$$\begin{aligned} d^S(x, y) &= G(x, x, y) + G(x, y, y) \\ &< \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r \\ &= r \end{aligned}$$

dir. Yani $d^S(x,y) < r$ *olup, buradan* $y \in B_{d^S}(x,r)$ *elde edilir. Bu ise*

$$B_G\left(x, \frac{1}{3}r\right) \subseteq B_{d^S}(x,r) \tag{I}$$

demektir. Benzer şekilde, keyfi $y \in X$ *için* $y \in B_{d^S}(x,r)$ *olsun. Bu durumda*

$$d^S(x,y) = G(x,x,y) + G(x,y,y) < r$$

dir. O halde

$$d^M(x,y) = \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} < G(x,x,y) + G(x,y,y) < r$$

olacağından $d^M(x,y) < r$ *dir Bu ise* $y \in B_{d^M}(x,r)$ *demek olup,*

$$B_{d^S}(x,r) \subseteq B_{d^M}(x,r) \tag{II}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, keyfi $y \in X$ *için* $y \in B_{d^M}(x,r)$ *olsun. Bu durumda* $d^M(x,y) = \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} < r$ *dir. Yani;*

• *eğer* $G(x,y,y) \leq G(y,x,x)$ *ise* $G(x,y,y) \leq d^M(x,y) = G(y,x,x) < r$ *elde edilir. O halde* $G(x,y,y) < r$ *olup,* $y \in B_G(x,r)$ *sonucu elde edilir.*

• *eğer* $G(y,x,x) \leq G(x,y,y)$ *ise* $d^M(x,y) = G(x,y,y) < r$ *dir. O halde* $G(x,y,y) < r$ *olup,* $y \in B_G(x,r)$ *sonucu elde edilir. Sonuç olarak*

$$B_{d^M}(x,r) \subseteq B_G(x,r) \tag{III}$$

elde edilir. Benzer şekilde keyfi $y \in X$ *için* $y \in B_G(x,r)$ *olsun.* $y \in B_G(x,r)$ *ise* $G(x,y,y) < r$ *dir. Buradan* $G(x,y,y) < 2r$ *yazılabilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.1 - 2 den* $G(y,x,x) \leq 2G(x,y,y)$ *olacağından* $G(y,x,x) < 2r$ *sonucu da elde edilir. Sonuç olarak* $G(x,y,y) < 2r$ *ve* $G(y,x,x) < 2r$ *elde edilir. Buradan* $\max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} < 2r$ *yazılabilir.* $\max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} = d^M(x,y)$ *olduğundan* $d^M(x,y) < 2r$ *bulunur. Bu ise* $y \in B_{d^M}(x,2r)$ *demektir. Böylece*

$$B_G(x,r) \subseteq B_{d^M}(x,2r) \tag{IV}$$

bulunur. Son olarak, keyfi $y \in X$ *için* $y \in B_{d^M}(x,2r)$ *olsun.* $y \in B_{d^M}(x,2r)$ *ise* $d^M(x,y) = \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} < 2r$ *dir. Yani;*

• *eğer* $G(x,y,y) \leq G(y,x,x)$ *ise* $G(x,y,y) \leq d^M(x,y) = G(y,x,x) < 2r$ *elde edilir. O halde* $G(x,y,y) < 2r$ *olup,* $y \in B_G(x,2r)$ *sonucu elde edilir.*

• *eğer* $G(y,x,x) \leq G(x,y,y)$ *ise* $d^M(x,y) = G(x,y,y) < 2r$ *dir. O halde* $G(x,y,y) < 2r$ *olup,* $y \in B_G(x,2r)$ *sonucu elde edilir. Sonuç olarak*

$$B_{d^M}(x,2r) \subseteq B_G(x,2r) \tag{V}$$

elde edilir. I, II, III, IV ve V den ispat tamamlanmış olur.

Not 4.3 *(X, τ) bir (alışılmış-klasik) bir topolojik uzay olsun. $x \in X$ i içeren tüm $\tau-$açık alt kümelerinin ailesi $\mathcal{B}_x$ olmak üzere, $\mathcal{B}_x$ ailesi x de bir komşuluk sistemi olduğu bilinmektedir. Buna göre aşağıdaki önerme metrik uzaydaki açık yuvarlar tarafından üretilen bir topoloji ortaya koyabilmek adına bir yöntem olarak düşünülebileceği genel topoloji derslerinden bilinmektedir.*

X bir küme ve her $x \in X$ için $\mathcal{B}_x$, X in alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi olmak üzere;

***i)** Her $B \in \mathcal{B}_x$ için $x \in B$ dir,*

***ii)** Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \mathcal{B}_x$ vardır,*

***iii)** Her $B \in \mathcal{B}_x$ için en az bir $B^{'} \in \mathcal{B}_x$ vardır öyleki her $y \in B^{'}$ için en az bir $B^{''} \in \mathcal{B}_y$ vardır ki $B^{''} \subseteq B$ dir,*

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{B}_x$, x noktasının komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek τ topolojisi vardır. Buna göre, (X, G) bir $G-$metrik uzay olmak üzere, keyfi $x \in X$ için x merkezli tüm açık yuvarların ailesi $\mathcal{B}_x$, x de bir komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek τ_G topolojisi vardır. Dahası τ_G, X üzerinde d^S ve d^M denk metrikleri (Bkz. Not 4.1) tarafından üretilen metrik topoloji olduğu için metrikleştirilebilirdir. Ayrıca τ_G Hausdorff ayırma özelliğini sağlar.

Gerçekten, yukarıdaki önerme kullanılacak olursa, ilk iki özelliğin sağlandığı $B(x, r_1) \cap B(x, r_2) = B(x, \min\{r_1, r_2\})$ eşitliğinden açıktır. $B = B(x, r) \in \beta_x$ bir açık yuvar ve $B^{'} = B \in \beta_x$ olsun. $\forall y \in B$ için $B^{''} \subseteq B$ olacak şekilde $\exists B^{''} \in \beta_y$ olduğu gösterilmelidir. $y \in B = B(x, r)$ ise $G(x, y, y) < r$ dir. λ ve δ, $G(x, y, y) < \lambda < \lambda + \delta < r$ olacak şekilde pozitif reel sayılar olsun.

İddia: $B^{''} = B(y, \delta) \subseteq B = B(x, r)$ olduğudur. Bunu ispatlamak için, keyfi bir $z \in B(y, \delta)$ alınsın. Bu takdirde $G(y, z, z) < \delta$ dır. $G5$ aksiyomudan

$$G(x, z, z) \leq G(x, y, y) + G(y, z, z) < \lambda + \delta < r$$

elde edilir. Yani $z \in B(x, r)$ dir. Böylece her $x \in X$ için x merkezli tüm açık yuvarların ailesi $\mathcal{B}_x$, x de bir komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek τ_G topolojisi vardır. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.6 dan $\forall x \in X$ ve $\forall r > 0$ için

$$B_{d^M}(x, r) \subseteq B_G(x, r) \subseteq B_{d^M}(x, 2r) \subseteq B_G(x, 2r)$$

ifadesi geçerli idi. Bu ise $\forall x \in X$ için $\beta_x^{'} = \{B_{d^M}(x, r) : r > 0\}$ x ailesinin β_x denk olan x noktasının bir komşuluk sistemi olması demektir, yani aynı topolojiyi üretirler. Böylece $\tau_G = \tau_{d^M}$ dir, bu ise τ_G nin metrikleştirebilirliğini ve Hausdorff ayırma özelliğini sağladığını gösterir.

Not 4.4 *Yardımcı Teorem 4.3, 4.6 ve Not 4.3 ün ışığında her $G-$metrik uzay alışılmış bir metrik uzaya topolojik olarak denktir. Bu nedenle $G-$metrik uzaylar üzerine çalışmak "topolojik" olarak gereksiz görülebilir. Ancak unutulmamalıdır ki $G-$metrik uzay ve* *alışılmış metrik uzay topolojilerin aynı olması, metrik yapılardaki aynılığı getirmeyeceği gibi özellikle " izometrik denklik " anlamındaki farklılık bu uzaylar üzerinde geometrik yapıların farklı olması anlamına gelir. Ayrıca keyfi bir $G-$metrik uzay her zaman alışılmış bir metrik uzaydan elde edilmeyebilir (Bkz. Örnek 4.7). Sonuç olarak $G-$metrik uzayların geometrisi alışılmış metrik uzayların geometrisini kapsayıcı şekilde daha genel olacaktır. Bu noktada alışılmış metrik uzaylardaki topolojik kavramların $G-$metrik uzaylardaki karşılıklarını yazmak gayet anlamlıdır. Bu anlamda tezin bundan sonraki kısmında alışılagelmiş kavramların önüne " $G-$ " ön etiketi yazılacaktır. Tekrar belirtilmeli ki bu ön etiket sayesinde bilinen kavramların $G-$metrik uzaylardaki karşılıkları yazılmış olacaktır, asla yeni kavramlar değildirler. Benzer şekilde bir sonraki bölüm için " G_n- " ön etiketi kullanılacaktır.*

4.5 $G-$Metrik Uzaylarda Yakınsaklık Kavramı

Tanım 4.4 *(X, G) bir $G-$metrik uzay ve $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ de bir dizi olarak verilsin. Her $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $n_0 \leq p, r$ özelliğindeki her $p, r \in \mathbb{N}$ için $G(x_p, x_r, x) \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi x e $G-$yakınsaktır denir. Kısaca,*

$$\lim_{p,r\to\infty} G(x_p, x_r, x) = 0, \quad (x_p) \xrightarrow{G} x \ \textit{ veya } \ (x_p) \to x$$

gösterimlerinden biri ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.7 *(X, G) bir $G-$metrik uzay olsun. Bu uzayda $G-$yakınsak bir dizinin limiti tektir.*

İspat *(X, G), $G-$metrik uzayında $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi, X de birbirinden farklı x ve y elemanlarına $G-$yakınsak olduğunu varsayılsın. Yani,*
$(x_p) \to x \iff \forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ öyleki $n_1 \leq p, r$ özelliğindeki $\forall\, p, r \in \mathbb{N}$ için $G(x_p, x_r, x) \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ dır. Benzer şekilde,
$(x_p) \to y \iff \forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ öyleki $n_2 \leq p, r$ özelliğindeki $\forall\, p, r \in \mathbb{N}$ için $G(x_p, x_r, y) \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ dır. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olarak alınırsa, $n_0 \leq p$ özelliğindeki $\forall$ $p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} G(x, x, y) &\leq G(x, x_p, x_p) + G(x_p, y, y) \\ &\leq G(x_p, x_p, x) + 2G(x_p, x_p, y) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + 2\frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, ϵ *keyfi olduğundan* $G(x,x,y)=0$ *dır. Bu ise* $x=y$ *demek olup, varsayım ile çelişir.*

Yardımcı Teorem 4.8 (X,G) *bir* $G-$*metrik uzay ve* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\subset X$ *de bir dizi olarak verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler.*

i) (x_p) *dizisi* x *e* $G-$*yakınsaktır.*

ii) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_p,x)=0.$

iii) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x,x)=0.$

iv) $r\geq p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x)=0.$

v) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_p,x)=0$ *ve* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x)=0.$

vi) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x,x)=0$ *ve* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x)=0.$

vii) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x_{p+1})=0$ *ve* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x)=0.$

viii) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x_{p+1})=0$ *ve* $r>p$ *için* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_r,x)=0.$

ix) $r>p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x)=0.$

İspat ***i⇒ii ;*** *yakınsaklık tanımında* $p=r$ *olarak alınırsa ispat açıktır.*

ii⇒iii ; $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_p,x)=0$ *verilsin.* $\underbrace{G(x_p,x,x)\leq 2G(x_p,x_p,x)}_{\text{Yardımcı Teorem 4.1-}\textbf{ii}\text{ den}}$ *eşitsizliğinin her iki tarafının* $p\to\infty$ *için limiti alınırsa*

$$\lim_{p\to\infty} G(x_p,x,x)\leq \lim_{p\to\infty} 2G(x_p,x_p,x)=0$$

dır. Böylece $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x,x)=0$ *olarak bulunur.*

iii⇒iv ; $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x,x)=0$ *verilsin.* $r\geq p$ *için* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_r,x,x)=0$ *dır. Ayrıca* $\underbrace{G(x_p,x_r,x)\leq G(x_p,x,x)+G(x_r,x,x)}_{G5)\text{ aksiyomundan}}$ *eşitsizliğinin her iki tarafının* $p\to\infty$ *için limiti alınırsa*

$$\lim_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x)\leq \lim_{p\to\infty} G(x_p,x,x)+\lim_{r\to\infty} G(x_r,x,x)=0$$

dır. Böylece $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x)=0$ *olarak bulunur.*

iv⇒v ; $r\geq p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x)=0$ *olduğuna göre* $r=p$ *ve* $r=p+1$ *olduğunda da ifade doğru olur.*

v⇒vi ; $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_p,x)=0$ *ve* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x)=0$ *verilsin.* $\underbrace{G(x_p,x,x)\leq 2G(x_p,x_p,x)}_{\text{Yardımcı Teorem 4.1-}\textbf{ii}\text{ den}}$ *eşitsizliğinin her iki tarafının* $p\to\infty$ *için limiti alınırsa*

$$\lim_{p\to\infty} G(x_p,x,x)\leq \lim_{p\to\infty} 2G(x_p,x_p,x)=0$$

dır. Böylece $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x,x)=0$ *olarak bulunur.*

vi⇒vii ; $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x,x)=0$ *ve* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x)=0$ *verilsin. Ayrıca*

$\underbrace{G(x_p, x_p, x_{p+1}) \leq G(x_p, x, x) + G(x, x_p, x_{p+1})}_{G5)\ \textit{aksiyomundan}}$ *eşitsizliğinin her iki tarafının* $p \to \infty$ *için limiti alınırsa*

$$\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_p, x_{p+1}) \leq \lim_{p\to\infty} G(x_p, x, x) + \lim_{p\to\infty} G(x, x_p, x_{p+1}) = 0$$

dır. Böylece $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_p, x_{p+1}) = 0$ *dır.* $\underbrace{G(x_p, x_{p+1}, x_{p+1}) \leq 2G(x_p, x_p, x_{p+1})}_{\textit{Yardımcı Teorem 4.1-}\textbf{\textit{ii}}\textit{ den}}$ *eşitsizliğinin her iki tarafının* $p \to \infty$ *için limiti alınırsa*

$$\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_{p+1}, x_{p+1}) \leq \lim_{p\to\infty} 2G(x_p, x_p, x_{p+1}) = 0$$

dır. Böylece $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_{p+1}, x_{p+1}) = 0$ *dır.*
vii⇒viii ; $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_{p+1}, x_{p+1}) = 0$ *ve* $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_{p+1}, x) = 0$ *verilsin.* $p < p+1 = r$ *olsun. Bu takdirde* $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_r, x) = \lim_{p,r\to\infty} G(x_p, x_r, x) = 0$ *dır.*
viii⇒ix ; *Açıktır.*
ix⇒i ; *Tanımdan direkt elde edilir.*

Yardımcı Teorem 4.9 (X, G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere,* x *e* $G-$*yakınsak olan bir* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *dizisi verilsin. Bu dizi* (X, d^S) *ve* (X, d^M) *metrik uzayınlarında da yakınsaktır. Kısaca aşağıdaki önermeler doğrudur;*

$$(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \overset{(X,G)}{\longrightarrow} x \;\Rightarrow\; (x_p)_{p\in\mathbb{N}} \overset{(X,d^S)}{\longrightarrow} x,$$

$$(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \overset{(X,G)}{\longrightarrow} x \;\Rightarrow\; (x_p)_{p\in\mathbb{N}} \overset{(X,d^M)}{\longrightarrow} x.$$

İspat (X, G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere,* $\lim_{p,r\to\infty} G(x_p, x_r, x) = 0$ *olacak şekilde bir* $(x_p) \overset{(X,G)}{\longrightarrow} x$ *dizi verilsin. Yardımcı Teorem 4.8 - ii ve iii den* $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_p, x) = 0$ *ve* $\lim_{p\to\infty} G(x_p, x, x) = 0$ *dır.* d^S *metriğinin*

$$d^S(x_p, x) = G(x_p, x_p, x) + G(x_p, x, x)$$

şeklindeki tanımında eşitliğinin her iki tarafının $p \to \infty$ *için limiti alınırsa*

$$\lim_{p\to\infty} d^S(x_p, x) = \underbrace{\lim_{p\to\infty} G(x_p, x_p, x)}_{=0} + \underbrace{\lim_{p\to\infty} G(x_p, x, x)}_{=0}$$

bulunur. Bu ise $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \overset{(X,d^S)}{\longrightarrow} x$ *demektir. Benzer şekilde diğer önermede kolaylıkla gösterilebilir.*

Tanım 4.5 *(X,G) bir $G-$metrik uzay ve $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ de bir dizi olarak verilsin. Her $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $n_0 \leq p,r,s$ özelliğindeki her $p,r,s \in \mathbb{N}$ için $G(x_p,x_r,x_s) \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisine $G-$Cauchy dizisi denir.*

Yardımcı Teorem 4.10 *Bir $G-$metrik uzayda her $G-$yakınsak dizi $G-$Cauchy dizisidir.*

İspat *(X,G) bir $G-$metrik uzay olmak üzere, $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. $G-$yakınsaklık tanımı gereği, her $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $n_0 \leq p,r$ özelliğindeki her $p,r \in \mathbb{N}$ için $G(x_p,x_r,x) \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre $p,r,s \geq n_0$ özelliğindeki her doğal sayı için $G5$ aksiyomundan*

$$\begin{aligned} G(x_p,x_r,x_s) &\leq G(x_p,x,x) + G(x,x_r,x_s) \\ &\leq 2G(x_p,x_p,x) + G(x,x_r,x_s) \\ &\leq 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (x_p) nin bir $G-$Cauchy dizisi olması demektir.

Yardımcı Teorem 4.11 *(X,G) bir $G-$metrik uzay ve $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ de bir dizi olarak verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler.*

i) *(x_p) bir $G-$Cauchy dizisidir.*

ii) $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x_r) = 0.$

iii) *$r \geq p$ için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x_r) = 0.$

iv) *$r > p$ için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x_r) = 0.$

v) $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_p,x_r) = 0.$

vi) *$r \geq p$ için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_p,x_r) = 0.$

vii) *$r > p$ için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_p,x_r) = 0.$

viii) $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x_{p+1}) = 0$ *ve $r \geq p$ için* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p,x_{p+1},x_r) = 0.$

İspat ***i⇒ii ;*** *Cauchy tanımında $s = r$ olarak alınırsa ispat açıktır.*
$\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p,x_r,x_r) = 0.$ *verilsin. $G-$yakınsaklık tanımı gereği her $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $n_0 \leq p,r$ özelliğindeki her $p,r \in \mathbb{N}$ için $G(x_p,x_r,x_r) \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.*
Bu tanımda p,r doğal sayıları arasında $p = r$, $p > r$ veya $p < r$ durumlarından sadece biri mevcuttur. Özel olarak

- *$n_0 \leq p = r$ alınırsa $x_p = x_r$ olup $G(x_p,x_r,x_r) = 0 \leq \epsilon$ olacağı açıktır,*
- *$n_0 \leq p < r$ veya $n_0 \leq r < p$ alınması $G-$yakınsaklık tanımında hiçbir şeyi*

değiştirmeyeceğinden, $r \geq p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_r, x_r) = 0$ *ve* $r > p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_r, x_r) = 0$ *olduğu* ***ii*** *durumundan açıktır. Tam tersi mantıkla* ***iii*** *ve* ***iv*** *verildiğinde* ***ii*** *nin yazılabileceği tanımdan açıktır. Benzer mantıkla sadece tanımı kullanarak* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_p, x_r) = 0$ *dır ancak ve ancak* $r \geq p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_p, x_r) = 0$ *ve* $r > p$ *için* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_p, x_r) = 0$ *olduğu elde edilir. Ayrıca* ***ii*** *verildiğinde* $r = p + 1$ *yazarak* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p, x_{p+1}, x_{p+1}) = 0$ *veya* $r \geq p$ *için* $\lim\limits_{p\to\infty} G(x_p, x_{p+1}, x_r) = 0$ *rahatlıkla elde edilebilir.*

Yardımcı Teorem 4.12 (X, G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere, bir* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *dizisi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur.*

i) (X, G) *metrik uzayında* (x_p) *dizisi* $G-$*Cauchy dir ancak ve ancak* (x_p) *dizisi* (X, d^S) *metrik uzayında Cauchy dir.*

ii) (X, G) *metrik uzayında* (x_p) *dizisi* $G-$*Cauchy dir ancak ve ancak* (x_p) *dizisi* (X, d^M) *metrik uzayında Cauchy dir.*

İspat ***i)*** (X, G) *metrik uzayında* (x_p) *dizisi* $G-$*Cauchy olsun. Yani her* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve* $n_0 \leq p, r, s$ *özelliğindeki her* $p, r, s \in \mathbb{N}$ *için* $G(x_p, x_r, x_s) \leq \epsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Bu tanımda özel olarak;*

- $s = r$ *alınırsa* $p, r \to \infty$ *iken* $G(x_p, x_r, x_r) \to 0$ *dır,*
- $s = p$ *alınırsa* $p, r \to \infty$ *iken* $G(x_r, x_p, x_p) \to 0$ *dır.*

Bu durumda $p, r \to \infty$ *iken* $d^S(x_p, x_r) = [G(x_p, x_r, x_r) + G(x_r, x_p, x_p)] \to 0$ *elde edilir. Dolayısıyla* (x_p) *dizisi* (X, d^S) *metrik uzayında Cauchy dir.*

(X, d^S) *metrik uzayında* (x_p) *dizisi Cauchy olsun. Yani her* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve* $n_0 \leq p, r$ *özelliğindeki her* $p, r \in \mathbb{N}$ *için* $d^S(x_p, x_r) = [G(x_p, x_r, x_r) + G(x_r, x_p, x_p)] \leq \epsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. O halde özel olarak* $G(x_p, x_r, x_r) \leq \epsilon$ *ve* $G(x_r, x_p, x_p) \leq \epsilon$ *olacağından,* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_r, x_r) = 0$ *ve* $\lim\limits_{p,r\to\infty} G(x_p, x_p, x_r) = 0$ *elde edilir. Buradan Yardımcı Teorem 4.11 den* (x_p) *dizisi* $G-$*Cauchy dir. Benzer şekilde* (X, d^M) *metrik uzayı içinde ispat verilebilir.*

Tanım 4.6 *Bir* $G-$*metrik uzayda her* $G-$*Cauchy dizisi* $G-$*yakınsak ise bu uzaya tam uzay (veya* $G-$*tam uzay) denir.*

Yardımcı Teorem 4.13 *Bir* $G-$*metrik uzayın* $G-$*tam olması için gerek ve yeter koşul* (X, d^M) *ve* (X, d^S) *metrik uzaylarının tam olmasıdır.*

İspat *τ_G, τ_{d^M} ve τ_{d^S} topolojilerinin denk olduğu dikkate alınarak Yardımcı Teorem 4.12 den ispat açıktır.*

4.6 $G-$Metrik Uzaylarda Süreklilik Kavramı

Tanım 4.7 *(X,G) ve (X^*,G^*) iki $G-$metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \longrightarrow X^*$ fonksiyon olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ verilsin, bu takdirde her $B_{G^*}(f(x_0),\epsilon)$, $G-$açık yuvarı için $f(B_G(x_0,\delta)) \subseteq B_{G^*}(f(x_0),\epsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında $G-$süreklidir denir. Eger f fonksiyonu X kümesinin tüm noktalarında $G-$sürekli ise X kümesi üzerinde $G-$süreklidir denir.*

Bu tanımı şu şekilde de verilebilir:
$f : X \longrightarrow X^*$ fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında $G-$süreklidir $\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ öyleki $G(x_0,x,x) < \delta$ özelliğindeki $\forall\, x \in X$ için $G^*(f(x_0),f(x),f(x)) < \epsilon$ dur.

Yardımcı Teorem 4.14 *(X,G) ve (X^*,G^*) iki $G-$metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X^*$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında $G-$süreklidir ancak ve ancak G metriği $x_0 \in X$ noktasında dizisel süreklidir (yani $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G} x_o$ iken $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G^*} f(x_o)$).*

İspat *(X,G) ve (X^*,G^*) iki $G-$metrik uzay ve $f : X \longrightarrow X^*$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında $G-$sürekli ise $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ öyleki $G(x_0,x,x) < \delta$ özelliğindeki $\forall\, x \in X$ için $G^*(f(x_0),f(x),f(x)) < \epsilon$ dur. Ayrıca $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G} x_o$ olduğundan her $\delta > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall p > n_0$ için $G(x_p,x_p,x_0) < \delta$ dır. Buradan f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olmasından $\forall\, \epsilon > 0$ ve $\delta > 0$ iken $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall p > n_0$ iken $G^*(f(x_p),f(x_p),f(x_0)) < \epsilon$ elde edilir. Bu ise $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G^*} f(x_o)$ demektir. G metriği $x_0 \in X$ noktasında dizisel sürekli iken f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında $G-$sürekli olmadığı varsayılsın. Yani her $\delta > 0$ için $x \neq x_0$ olmak üzere $G(x_0,x,x) < \delta$ iken $G^*(f(x_0),f(x),f(x)) > \epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Burada özel olarak $\delta = \dfrac{1}{p}$ olarak alınırsa $G(x_p,x_p,x_0) < \dfrac{1}{p}$ iken $G^*(f(x_p),f(x_p),f(x_0)) \geq \epsilon$ olur. Bu ise $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G} x_o$ iken $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}} \overset{G^*}{\nrightarrow} f(x_o)$ demek olup, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla varsayım yanlış olup, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında $G-$süreklidir.*

Yardımcı Teorem 4.15 *(X,G) bir $G-$metrik uzay olmak üzere $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonunun X üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun $\left(X,d^S\right)$ ve $\left(X,d^M\right)$ metrik uzayınlarında da sürekli olmasıdır. Kısaca* *aşağıdaki önermeler doğrudur.*

i) *f fonksiyonu* (X,G) *de* $G-$ *süreklidir* $\Longleftrightarrow$ *f fonksiyonu* $\left(X,d^S\right)$ *de süreklidir.*

ii) *f fonksiyonu* (X,G) *de* $G-$ *süreklidir* $\Longleftrightarrow$ *f fonksiyonu* $\left(X,d^M\right)$ *de süreklidir.*

İspat ***i)*** (X,G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere* $f:X\longrightarrow X$ *fonksiyonu* X *üzerinde* $G-$*sürekli olsun.* $G-$*süreklilik tanımı gereği* $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ *öyleki* $G(x,y,y)<\dfrac{\delta}{3}$ *özelliğindeki* $\forall\ x\in X$ *için* $G(f(x),f(y),f(y))<\dfrac{\epsilon}{3}$ *dur. Bu tanımda* d^S *metriğinin tanımı ve* $G(x,y,y)<\dfrac{\delta}{3}$ *olması*

$$\begin{aligned} d^S(x,y) &= G(x,y,y)+G(x,x,y) \\ &< G(x,y,y)+2G(x,y,y) \\ &< 3G(x,y,y) \\ &< \delta \end{aligned}$$

anlamına gelirken, $G(f(x),f(y),f(y))<\dfrac{\epsilon}{3}$ *olması*

$$\begin{aligned} d^S(f(x),f(y)) &= G(f(x),f(y),f(y))+G(f(x),f(x),f(y)) \\ &< G(f(x),f(y),f(y))+2G(f(x),f(y),f(y)) \\ &< 3G(f(x),f(y),f(y)) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

olduğu anlamına gelir. Yani $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ *öyleki* $d^S(x,y)<\delta$ *özelliğindeki* $\forall\ x\in X$ *için* $d^S(f(x),f(y))<\epsilon$ *elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun* $\left(X,d^S\right)$ *metrik uzayında sürekli olması demektir.*
Tersine $\left(X,d^S\right)$ *bir metrik uzay olmak üzere* $f:X\longrightarrow X$ *fonksiyonu* X *üzerinde sürekli olsun. Süreklilik tanımı gereği* $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ *öyleki* $d^S(x,y)<\delta$ *özelliğindeki* $\forall\ x\in X$ *için* $d^S(f(x),f(y))<\epsilon$ *dur. Bu tanımda* $d^S(x,y)=G(x,y,y)+G(x,x,y)<\delta$ *olmasından* $G(x,y,y)<\delta$ *sonucu çıkarken,* $d^S(f(x),f(y))=G(f(x),f(y),f(y))+G(f(x),f(x),f(y))<\epsilon$ *olmasından* $G(f(x),f(y),f(y))<\epsilon$ *sonucu ortaya çıkar. Yani* $\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ *öyleki* $G(x,y,y)<\delta$ *özelliğindeki* $\forall\,x\in X$ *için* $G(f(x),f(y),f(y))<\epsilon$ *elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun* $G-$*sürekli olması demektir.*
Benzer mantıkla ***ii)*** *deki önermede ispatlanabilir.*

Yardımcı Teorem 4.16 (X,G) *bir* $G-$*metrik uzay olmak üzere,* $G(x,y,z)$ *fonksiyonu değişken bileşenlerine göre* $G-$*süreklidir.*

İspat $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(y_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(z_r)_{r\in\mathbb{N}} \subset X$ *dizileri sırasıyla* x, y, $z \in X$ *elemanlarına* $G-$*yakınsak olsunlar.* $G5$ *aksiyomundan*

$$G(x,y,z) \leq G(y,y_q,y_q) + G(y_q,x,z) \tag{I}$$

$$G(z,x,y_q) \leq G(x,x_p,x_p) + G(x_p,y_q,z) \tag{II}$$

ve

$$G(z,x_p,y_q) \leq G(z,z_r,z_r) + G(z_r,x_p,y_q) \tag{III}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler alt alta toplanıp, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} G(x,y,z) - G(x_p,y_q,z_r) &\leq G(y,y_q,y_q) + G(x,x_p,x_p) + G(z,z_r,z_r) \\ &= G(x,x_p,x_p) + G(y,y_q,y_q) + G(z,z_r,z_r) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (III) eşitsizliğinde $G5$ *aksiyomu kullanılırsa,*

$$\begin{aligned} G(x_p,y_q,z_r) &\leq G(x_p,x,x) + G(x,y_q,z_r) \\ &\leq G(x_p,x,x) + G(x,y_q,z) + G(z,z,z_r) \\ &= G(x_p,x,x) + G(z,z,z_r) + G(x,y_q,z) \\ &\leq G(x_p,x,x) + G(z,z,z_r) + G(x,y,z) + G(y,y_q,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik düzenlenirse,

$$G(x_p,y_q,z_r) - G(x,y,z) \leq G(x_p,x,x) + G(y_q,y,y) + G(z_r,z,z,)$$

eşitsizliği bulunur. (III), son eşitsizlik ve Yardımcı Teorem 4.1-2 den

$$|G(x_p,y_q,z_r) - G(x,y,z)| \leq 2\left[G(x,x_p,x_p) + G(y,y_q,y_q) + G(z,z_r,z_r)\right]$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $p,q,r \to \infty$ *için limit alınırsa* $G(x_p,y_q,z_r) \to G(x,y,z)$ *bulunur. Böylece, Yardımcı Teorem 4.14 den G fonksiyonu* $G-$*süreklidir.*

5. G_n- METRİK UZAYLAR

Alışılmış metrik uzaylarda uzaklık kavramının geleneksel tanımının, bu uzaydaki iki noktanın "biribirinden ne kadar ayrı" olduğunun ölçülmesi üzerine verildiğini söylemek yanlış olmayacaktır. Ancak bu tanım uzaydaki ikiden fazla elemanın birbirinden ne kadar ayrıldığını aynı anda ölçme fırsatı vermez. Bu anlamda üç nokta arasındaki uzaklık kavramı üzerine kurulu ve alışılmış metrik uzayların bir genelleştilmişi olan $G-$metrik uzaylar bir önceki bölümde tanıtılmıştı. Bu bölümde üçten fazla eleman arasındaki uzaklık kavramına dayalı, $G-$metrik uzayların genelleştirilmesi olan G_n-metrik uzayları verilecektir. Literatürde G_n-metrik uzaylar ile ilgili ilk çalışmalar; (Khan, 2014) ve (Roldán vd., 2014) referanslarındaki çalışmalardır. Ancak bu bölüm G_n-metrik uzaylar ile ilgili literatürdeki en son çalışma olan ve (Khan, 2014) ve (Roldán vd., 2014) çalışmalarını kapsayan (Choi vd, 2018) çalışması baz alınarak oluşturulacaktır.

Boştan farklı bir X kümesi için $\prod_{i=1}^{n} X = \overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n-\text{tane}} = X^n$ olmak üzere $n.$ mertebeden bir $G-$metrik uzay aşağıdaki gibi tanımlanır;

Tanım 5.1 *X boştan farklı bir küme olmak üzere, $G_n : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlasın;*
(G_n1) *(pozitif tanımlılık): Her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

dir,
(G_n2) *(permütasyon değişmezliği): $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bir permütasyon fonksiyon olmak üzere:*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_n\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)$$

dir,
(G_n3) *(monotonluk): $\{x_i : i = 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 1, \ldots, n\}$ olacak şekildeki her $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ için*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dir,
(G_n4) *(genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği): $s, t \in \mathbb{N}$ için $s + t = n$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t, w \in X$ olmak üzere;*

$$G_n(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) \leq G_n(x_1, \ldots, x_s, w, w, \ldots, w) + G_n(w, w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t)$$

dir. Bu takdirde G_n fonksiyonuna X üzerinde n inci mertebeden bir $G-$metrik adı verilir. Ayrıca (X, G_n) ikilisine n inci mertebeden $G-$metrik uzay adı verilir.

Not 5.1 *Tezin bundan sonraki kısmında kısalığın hatırına;*
n inci mertebeden $G-$metriğe; G_n-metrik,
n inci mertebeden $G-$metrik uzaya; G_n-metrik uzay adı verilecektir.

Not 5.2 *Alışılmış bir (X, d) metrik uzayında üçgen eşitsizliği, $\forall x, y, w \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y)$ şeklindedir. Bu eşitsizlik " x ile y noktaları arasındaki uzaklık x ile w ve w ile y noktaları arasındaki uzaklıklar yardımıyla, yaklaşık olarak ölçülmek isteniyorsa, bir $w \in X$ noktası gereklidir " olarak yorumlanabilir. Burada x ile y arasındaki uzaklığın $w_1 \neq w_2$ olmak üzere $d(x, w_1)$ ve $d(y, w_2)$ uzaklıları yardımıyla ölçülemeyeceğine dikkat edilmelidir. x ile y noktaları arasındaki uzaklık $d(x, y)$; x ile y noktaları arasındaki farklılık olarak düşünülürse, $x = y$ ise x ile y noktaları arasındaki farklılık 0 dır. Tersine; x ile y noktaları arasındaki farklılık 0 ise $x = y$ olarak düşünülebilir. Aynı zamanda x ile y noktaları arasındaki farklılık ile y ile x noktaları arasındaki farklılık aynı olarak ele alınmalıdır. Bu düşünceler neticesinde " x ile w noktası ve y ile w noktası yeterince benzer olması için, üçgen eşitsizliği gereği x ile y noktaları yeterince benzer olmalıdır " sonucu ortaya çıkar. Bu anlamda*

$$G_n(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) \leq G_n(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + G_n(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t)$$

eşitsizliği ile verilen $(G_n 4)$ aksiyomuna genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denilmesi gayet mantıklıdır. Yani $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s, w, w, \ldots, w)$ ve $G_n(w, w, \ldots, w, y_1, y_2, \ldots, y_t)$ yeterince küçük ise $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t)$ yeterince küçük olmak zorundadır. Bu $\{x_1, x_2, \ldots, x_s, w\}$ ve $\{y_1, y_2, \ldots, y_t, w\}$ veri kümeleri yüksek benzerliklere sahipse $\{x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ veri kümeside yüksek benzerliğe sahiptir olarak yorumlanabilir. Sonuç olarak unutulmamalıdır ki veri kümelerinin benzerlik analizinde bir w noktası oldukça önemlidir.

Aşağıda G_n-metrik uzayın daha rahat anlaşılması için G_4-metrik uzayda, G_n-metrik uzay aksiyomlarından kolayca elde edilebilen bazı basit özellikler verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.1 (X, G_4) *bir G_4-metrik uzay olmak üzere; her $x, y, p, q, w \in X$ için aşağıdaki önermeler geçerlidir;*
i) $G_4(x, y, p, q) = 0 \Longleftrightarrow x = y = p = q.$
ii)

$G_4(x,y,p,q)$=$G_4(y,x,p,q)$=$G_4(p,y,x,q)$=$G_4(q,y,p,x)$=$G_4(x,p,y,q)$=$G_4(x,y,q,p)$.
iii) $x,y,p,q,w \in X$ *elemanları birbirinden farklı olmak üzere*

$$\begin{array}{ll} G_4(x,y,y,y) \leq G_4(x,x,y,p) & G_4(x,x,y,y) \leq G_4(x,x,y,p) \\ G_4(x,y,y,y) \leq G_4(x,y,y,p) & G_4(x,x,y,y) \leq G_4(x,y,y,p) \\ G_4(x,y,y,y) \leq G_4(x,y,p,p) & G_4(x,x,y,y) \leq G_4(x,y,p,p) \end{array}$$

$$G_4(x,y,p,p) \leq G_4(x,y,p,q)$$

iv)

$$\begin{aligned} G_4(x,y,p,q) &\leq G_4(x,w,w,w) + G_4(w,y,p,q) \\ G_4(x,y,p,q) &\leq G_4(x,y,w,w) + G_4(w,w,p,q) \end{aligned}$$

İspat ***i)*** *ve* ***ii)*** *de verilen önermeler* (G_n1) *ve* (G_n2) *aksiyomlarından açıktır.*
iii) (G_n3) *aksiyomunda* $X \subsetneq Y$ *olacak şekilde* $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ *ve* $Y = \{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ *kümeleri ele alınırsa, altı durum söz konusudur;*
Durum 1 : $|X| = 1$ *ve* $|Y| = 2$ *olmak üzere* $X = \{x_1\}$ *ve* $Y = \{x_1,x_2\}$ *olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_1,x_1,x_1,x_2) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_1,x_1,x_2,x_2) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_1,x_2,x_2,x_2) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_2,x_2,x_2,x_2) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır.
Durum 2 : $|X| = 1$ *ve* $|Y| = 3$ *olmak üzere* $X = \{x_1\}$ *ve* $Y = \{x_1,x_2,x_3\}$ *olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_1,x_1,x_2,x_3) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_1,x_2,x_2,x_3) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) &\leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_3) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır.
Durum 3 : $|X| = 1$ *ve* $|Y| = 4$ *olmak üzere* $X = \{x_1\}$ *ve* $Y = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ *olsun. Bu takdirde*

$$G_4(x_1,x_1,x_1,x_1) \leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

eşitsizlikleri vardır.
Durum 4 : $|X| = 2$ *ve* $|Y| = 3$ *olmak üzere* $X = \{x_1,x_2\}$ *ve* $Y = \{x_1,x_2,x_3\}$ *olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} G_4(x_1,x_1,x_1,x_2) &\leq G_4(x_1,x_1,x_2,x_3) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_2) &\leq G_4(x_1,x_2,x_2,x_3) \\ G_4(x_1,x_1,x_1,x_2) &\leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_3) \end{aligned} \tag{5.1}$$

ve

$$\begin{aligned} G_4(x_1,x_1,x_2,x_2) &\leq G_4(x_1,x_1,x_2,x_3) \\ G_4(x_1,x_1,x_2,x_2) &\leq G_4(x_1,x_2,x_2,x_3) \\ G_4(x_1,x_1,x_2,x_2) &\leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_3) \end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitsizlikleri vardır. (5.1) eşitsizliğinde $x_1 = y$, $x_2 = x$ *ve* $x_3 = p$ *ifadeleri yerlerine yazılıp,* (G_n2) *aksiyomu kullanılırsa*

$$\begin{aligned} G_4(y,y,y,x) = G_4(x,y,y,y) &\leq G_4(x,x,y,p) \\ G_4(y,y,y,x) = G_4(x,y,y,y) &\leq G_4(x,y,y,p) \\ G_4(y,y,y,x) = G_4(x,y,y,y) &\leq G_4(x,y,p,p) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, (5.2) eşitsizliğinde $x_1 = x$, $x_2 = y$ *ve* $x_3 = p$ *ifadeleri yerlerine yazılıp,* (G_n2) *aksiyomu kullanılırsa*

$$\begin{aligned} G_4(x,x,y,y) &\leq G_4(x,x,y,p) \\ G_4(x,x,y,y) &\leq G_4(x,y,y,p) \\ G_4(x,x,y,y) &\leq G_4(x,y,p,p) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Durum 5 : $|X| = 2$ *ve* $|Y| = 4$ *olmak üzere* $X = \{x_1, x_2\}$ *ve* $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *olsun. Bu takdirde*

$$G_4(x_1,x_1,x_2,x_2) \leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \qquad G_4(x_1,x_1,x_1,x_2) \leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

eşitsizlikleri vardır.

Durum 6 : $|X| = 3$ *ve* $|Y| = 4$ *olmak üzere* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ *ve* $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} G_4(x_1,x_1,x_2,x_3) &\leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ G_4(x_1,x_2,x_2,x_3) &\leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ G_4(x_1,x_2,x_3,x_3) &\leq G_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Bu eşitsizliklerde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = p$ *ve* $x_4 = q$ *ifadeleri yerlerine yazılırsa,*

$$\begin{aligned} G_4(x,x,y,p) &\leq G_4(x,y,p,q) \\ G_4(x,y,y,p) &\leq G_4(x,y,p,q) \\ G_4(x,y,p,p) &\leq G_4(x,y,p,q) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

iv) (G_n4) *akiyomunda* $s + t = 4$ *olmak üzere; beş durum söz konusudur;*

Durum 1 : $s = 0, t = 4$ *için*

$$G_4(y_1,y_2,y_3,y_4) \leq G_4(w,w,w,w) + G_4(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

eşitsizliği vardır.

Durum 2 : $s = 1, t = 3$*,*

$$G_4(x_1,y_1,y_2,y_3) \leq G_4(x_1,w,w,w) + G_4(w,y_1,y_2,y_3)$$

eşitsizliği vardır.
Durum 3 : $s = 2, t = 2$*,*

$$G_4(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq G_4(x_1, x_2, w, w) + G_4(w, w, y_1, y_2)$$

eşitsizliği vardır.
Durum 4 : $s = 3, t = 1$*,*

$$G_4(x_1, x_2, x_3, y_1) \leq G_4(x_1, x_2, x_3, w) + G_4(w, w, w, y_1)$$

eşitsizliği vardır.
Durum 5 : $s = 4, t = 0$ *dır.*

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_4(w, w, w, w)$$

eşitsizliği vardır. Ancak 1 inci ile 5 inci durum ve 2 inci ile 4 üncü durum biribirlerine denktir. Dolayısıyla üç tip eşitsizlik vardır.
Durum 2 de $x_1 = x,\ y_1 = y,\ y_2 = p,\ y_3 = q$ *ifadeleri yerlerine yazılırsa*

$$G_4(x, y, p, q) \leq G_4(x, w, w, w) + G_4(w, y, p, q)$$

eşitsizliği elde edilir.
Durum 3 de $x_1 = x,\ x_2 = y,\ y_1 = p,\ y_2 = q$ *ifadeleri yerlerine yazılırsa*

$$G_4(x, y, p, q) \leq G_4(x, y, w, w) + G_4(w, w, p, q)$$

eşitsizliği elde edilir.

Not 5.3 *Tezin bundan sonraki kısmında, kısalığın hatırına* G_n-*metriğinde tekrar eden noktalar kalın (bold) olarak yazılacaktır. Örneğin;*

$$G_n(x, y, \ldots, y) \ \ \textit{yerine} \ \ G_n(x; \mathbf{y})$$

ya da

$$G_n(x, y, \ldots, y, z) \ \ \textit{yerine} \ \ G_n(x; \mathbf{y}; z) \ \ \textit{veya} \ \ G_n(x, z; \mathbf{y})$$

gibi notasyonlar kullanılacaktır. Eğer tekrar eden elemanların kaç defa tekrar ettiğinin vurgusu yapılmak istenirse

$$G_n\left(\underbrace{x, \ldots, x}_{s-tane}, y, w, \ldots, w\right) = G_n\left([x]^s, y, w, \ldots, w\right)$$

yada

$$G_n\left(\underbrace{x, \ldots, x}_{s-tane}, y, w, \ldots, w\right) = G_n\left([x]^s, y; \mathbf{w}\right)$$

yada

$$G_n\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{s-tane},y,w,\ldots,w\right)=G_n\left([x]^s,y,[w]^{n-s-1}\right)$$

notasyonlardan biri kullanılacaktır.

Örnek 5.1 *$X\neq\emptyset$ bir küme olsun.$\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ için $d:X^n\to[0,\infty)$ fonksiyonu*

$$d(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}0 & ,\ x_1=x_2=\cdots=x_n\\ 1 & ,\ \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde d, X üzerinde bir G_n-metriktir, özel olarak ayrık G_n-metrik denir.

Gerçekten, $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n,w\in X$ için;
(G_n1) $d(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_n$ dir. Dolayısıyla G_n1 aksiyomu sağlanır.
(G_n2) $x_1=x_2=\ldots=x_n$ ise $x_{\sigma(1)}=x_{\sigma(2)}=\ldots=x_{\sigma(n)}$ olup $d(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0=d\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$ dir. Eğer $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ elemanlarından en az ikisi farklı ise, bu elemanlar için $d(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1=d\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$ dir. Dolayısıyla G_n2 aksiyomu sağlanır.
(G_n3) $\{x_i=1,\ldots,n\}\subsetneq\{y_i=1,\ldots,n\}$ olmak üzere,
$|\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}|=1$ ise $x_1=x_2=\ldots=x_n$ olup $y_1,y_2,\ldots,y_n$ elemanlarından da en az ikisi farklı olur. Böylece $d(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0<1=d(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ elde edilir.
Eğer, $|\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}|>1$ ise $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ elemanlarıdan en az ikisi farklı olacağından $y_1,y_2,\ldots,y_n\in X$ elemanlarından da en az ikisi farklı olur. Böylece $d(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1=d(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ elde edilir. Sonuç olarak G_n3 aksiyomu sağlanır.
(G_n4) $s+t=n$ olmak üzere,
Durum 1 : $d(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})=1$ veya $d(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})=1$ ise $x_1,x_2,\ldots,x_s,w$ ve $w,y_1,y_2,\ldots,y_t$ elemanlarından en az ikisi biribirinden farklı olacağından

$$\underbrace{d(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)}_{=1}\leq\underbrace{d(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})}_{=1}+\underbrace{d(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})}_{=1}$$

dır,
Durum 2 : $d(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})=0$ veya $d(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})=1$ ise x_1=x_2=$\cdots$=x_n=w ve $w,y_1,y_2,\ldots,y_t$ elemanlarından en az ikisi biribirinden farklı olacağından

$$\underbrace{d(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)}_{=1}\leq\underbrace{d(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})}_{=0}+\underbrace{d(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})}_{=1}$$

dır,
Durum 3 : $d(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})=0$ veya $d(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})=0$ ise $x_1=x_2\cdots=x_n=w$

ve $y_1 = y_2 = \cdots = y_t = w$ *olup*

$$\underbrace{d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t)}_{=0} \leq \underbrace{d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})}_{=0} + \underbrace{d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})}_{=0}$$

dır. Böylece G_n4 *aksiyomu sağlanır.*

Örnek 5.2 ***(** G_n-**çap metrik** **) :***

$$\begin{array}{llll} d: & \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\limits_{0 \leq i \leq n} x_i - \min\limits_{0 \leq j \leq n} x_j \end{array}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonu $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}^+$ *üzerinde bir* G_n-*metrik olduğu her* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ *için aşağıdaki gibi gösterilir;*

(G_n1)

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) = 0 &\iff \max_{0 \leq i \leq n} x_i - \min_{0 \leq j \leq n} x_j = 0 \\ &\iff \max_{0 \leq i \leq n} x_i = \min_{0 \leq j \leq n} x_j \\ &\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla G_n1 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n2) σ*,* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere,*

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \left\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right\}$$

olduğundan $d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)$ *dır. Dolayısıyla* G_n2 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n3) $\{x_i = 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^+$ *olduğundan*

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq \max\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \;\; ve \;\; \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geq \min\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) &= \max_{0 \leq i \leq n} x_i - \min_{0 \leq j \leq n} x_j \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} y_i - \min_{0 \leq j \leq n} y_j \\ &= d(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla G_n3 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n4) $s, t \in \mathbb{N}$ *için* $s + t = n$ *ve* $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t, w \in \mathbb{R}^+$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} M_x = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}, \; m_x = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \\ M_y = \max\{y_1, y_2, \ldots, y_t\}, \; m_y = \min\{y_1, y_2, \ldots, y_t\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Genelliği bozmaksızın $M_x \leq M_y$ olduğu varsayılarak üç temel durum vardır;

Durum 1) $m_x \leq M_x \leq m_y \leq M_y$,

Durum 2) $m_x \leq m_y \leq M_x \leq M_y$,

Durum 3) $m_y \leq m_x \leq M_x \leq M_y$.

Bu temel durumlarda da kendi içersinde alt durumlara sahiptir:

Durum 1 için aşağıdaki alt durumlar söz konusudur;

Alt durum i : $m_x \leq M_x \leq m_y \leq M_y \leq w$,

$$\begin{aligned} d\left(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\right) &= M_y - m_x \\ &\leq w - m_x \\ &\leq w - m_x + w - m_x \\ &= \underbrace{w - m_x}_{=d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})} + \underbrace{w - m_x}_{=d(x_1, x_2, \ldots, x_t; \mathbf{w})} \end{aligned}$$

Alt durum ii : $m_x \leq M_x \leq m_y \leq w \leq M_y$,

$$\begin{aligned} d\left(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\right) &= M_y - m_x \\ &\leq M_y - m_x + w - m_y \\ &= w - m_x + M_y - m_y \\ &= \underbrace{w - m_x}_{=d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})} + \underbrace{M_y - m_y}_{=d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})} \end{aligned}$$

Alt durum iii : $m_x \leq M_x \leq w \leq m_y \leq M_y$,

$$\begin{aligned} d\left(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\right) &= M_y - m_x \\ &\leq M_y - m_x + w - w \\ &= w - m_x + M_y - w \\ &= \underbrace{w - m_x}_{=d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})} + \underbrace{M_y - w}_{=d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})} \end{aligned}$$

Alt durum iv : $m_x \leq w \leq M_x \leq m_y \leq M_y$,

$$\begin{aligned} d\left(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\right) &= M_y - m_x \\ &\leq M_y - m_x + M_x - w \\ &= M_x - m_x + M_y - w \\ &= \underbrace{M_x - m_x}_{=d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})} + \underbrace{M_y - w}_{=d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})} \end{aligned}$$

Alt durum v : $w \leq m_x \leq M_x \leq m_y \leq M_y$

$$\begin{aligned} d\left(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t\right) &= M_y - m_x \\ &\leq M_y - w \\ &\leq M_x - w + M_y - w \\ &= \underbrace{M_x - w}_{=d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})} + \underbrace{M_y - w}_{=d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})} \end{aligned}$$

Sonuç olarak Durum 1 deki beş alt durum için G_n4 aksiyomu sağlanır. Durum 2 ve Durum 3 içinde G_n4 aksiyomu sağlandığı Durum 1 ın ispatına benzer olarak gösterilebilir.

Not 5.4 $(X, \|.\|)$ *normlu bir uzay olmak üzere,* d *fonksiyonu*

$$\begin{array}{rccl} d: & X^n & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\limits_{0\leq i\leq n} \|x_i\| - \min\limits_{0\leq j\leq n} \|x_j\| \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde d*,* X *üzerinde bir* G_n-*metrik değildir. Gerçekten* G_n2*,* G_n3 *ve* G_n4 *aksiyomları sağlanır, fakat* G_n1 *aksiyomu her zaman sağlanmaz.*

Aşağıdaki verilen Yardımcı Teorem 5.2 ve 5.3 bir G_n-metrik uzay verildiğinde, yeni bir G_n-metrik uzayın elde edilişi ile ilgilidir.

Yardımcı Teorem 5.2 (X, G_n^1) *ve* (X, G_n^2)*,* G_n-*metrik uzaylar ve* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *aşağıdaki özelikleri sağlan bir fonksiyon olsun.*
i) ψ*,* $[0,\infty)$ *üzerinde artandır,*
ii) $\psi(0) = 0$*,*
iii) $\forall x, y \in [0,\infty)$ *için* $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$*.*
Bu takdirde

$$d(x_1, \ldots, x_n) = \psi\left(G_n^1(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

ve

$$d(x_1, \ldots, x_n) = G_n^1(x_1, \ldots, x_n) + G_n^2(x_1, \ldots, x_n)$$

şeklinde tanımlı d *fonksiyonları* X *üzerinde bir* G_n-*metriktir.*

İspat *Öncelikle* $d(x_1, \ldots, x_n) = G_n^1(x_1, \ldots, x_n) + G_n^2(x_1, \ldots, x_n)$ *şeklinde tanımlı* d *fonksiyonu verilsin;*
(G_n1) *Her* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) = 0 &\Longleftrightarrow G_n^1(x_1, \ldots, x_n) + G_n^2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\Longleftrightarrow G_n^1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ ve } G_n^2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n1 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n2) σ*,* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere:*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) &= G_n^1(x_1, \ldots, x_n) + G_n^2(x_1, \ldots, x_n) \\ &= G_n^1\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) + G_n^2\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) \\ &= d\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n2 aksiyomu sağlanır.
(G_n3) $\{x_i : i = 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 1, \ldots, n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ve* $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ *için*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) &= G_n^1(x_1, \ldots, x_n) + G_n^2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\leq G_n^1(y_1, \ldots, y_n) + G_n^2(y_1, \ldots, y_n) \\ &= d(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n3 aksiyomu sağlanır.
(G_n4) $s, t \in \mathbb{N}$ *için* $s + t = n$ *ve* $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t, w \in X$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &= G_n^1(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) + G_n^2(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) \\ &\leq G_n^1(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + G_n^1(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w}) \\ &\quad + G_n^2(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + G_n^2(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w}) \\ &= d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w}) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n4 aksiyomu sağlanır. Sonuç olarak

$$d(x_1, \ldots, x_n) = G_n^1(x_1, \ldots, x_n) + G_n^2(x_1, \ldots, x_n)$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonu X üzerinde bir G_n-metriktir.

Benzer şekilde $d(x_1, \ldots, x_n) = \psi(G_n^1(x_1, \ldots, x_n))$ *şeklinde tanımlı d fonksiyonu verilsin;*
(G_n1) *Her* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) = 0 &\iff \psi(G_n^1(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \\ &\iff G_n^1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n1 aksiyomu sağlanır.
(G_n2) σ, $\{1, 2, \ldots, n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere:*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) &= \psi\left(G_n^1(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ &= \psi\left(G_n^1\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)\right) \\ &= d\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n2 aksiyomu sağlanır.
(G_n3) $\{x_i : i = 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 1, \ldots, n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ve*

$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ *için* $G_n^1(x_1, \ldots, x_n) \leq G_n^1(y_1, \ldots, y_n)$ *dir. Ayrıca,* ψ, $[0, \infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n) &= \psi\left(G_n^1(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ &\leq \psi\left(G_n^1(y_1, \ldots, y_n)\right) \\ &= d(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n3 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n4) $s, t \in \mathbb{N}$ *için* $s + t = n$ *ve* $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t, w \in X$ *olmak üzere;* ψ, $[0, \infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &= \psi\left(G_n^1(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t)\right) \\ &\leq \psi\left(G_n^1(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + G_n^1(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})\right) \\ &= \psi\left(G_n^1(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})\right) + \psi\left(G_n^1(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})\right) \\ &= d(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + d(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w}) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n4 *aksiyomu sağlanır. Sonuç olarak* $d(x_1, \ldots, x_n) = \psi(G_n^1(x_1, \ldots, x_n))$ *şeklinde tanımlı* d *fonksiyonu* X *üzerinde bir* G_n-*metriktir.*

Yardımcı Teorem 5.3 ψ *fonksiyonu Yardımcı Teorem 5.2 de verilen özelliklere sahip olmak üzere, bir* (X, G_n), G_n-*metrik uzayı verilsin. Ayrıca* $k \in \mathbb{R}^+$ *sabit bir reel sayı olsun. Bu takdirde* $\psi \circ G_n$ *bileşke fonksiyonu (aşağıdakiler gibi tanımlı olmak üzere) X üzerinde bir* G_n-*metriktir;*
i) $\psi(x) = kx$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = kG_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
ii) $\psi(x) = \dfrac{x}{1+x}$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1 + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$,

iii) $\psi(x) = \sqrt{x}$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *dır. Üstelik*

$p \geq 1$ *sabit olacak şekilde* $\psi(x) = x^{1/p}$ *içinde doğrudur.*
iv) $\psi(x) = \log(x+1)$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \log(G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1)$,

v) $\psi(x) = \min\{k, x\}$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{k, G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$.

İspat ***i)*** $\psi(x) = kx$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = kG_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *olsun. Her* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için*
(G_n1)

$$\begin{aligned} (\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 &\iff kG_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\iff G_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n1 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n2) σ, $\{1,2,\ldots,n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= kG_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ &= kG_n\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)\\ &= (\psi\circ G_n)\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n2 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n3) $\{x_i : i=1,\ldots,n\} \subsetneq \{y_i : i=1,\ldots,n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in X^n$ *için* $G_n(x_1,\ldots,x_n) \leq G_n(y_1,\ldots,y_n)$ *dir. Ayrıca,* ψ, $[0,\infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= kG_n(x_1,x_2\ldots,x_n)\\ &\leq kG_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ &= (\psi\circ G_n)(y_1,,y_2\ldots,y_n)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n3 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n4) $s,t\in\mathbb{N}$ *için* $s+t=n$ *ve* $x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t,w\in X$ *olmak üzere;* ψ, $[0,\infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) &= k\left(G(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)\right)\\ &\leq k\left(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})\right)\\ &= kG_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+kG_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})\\ &= (\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+(\psi\circ G_n)\left(G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n4 *aksiyomu sağlanır.*

ii) $\psi(x)=\dfrac{x}{1+x}$ *olmak üzere* $(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\dfrac{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{1+G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ *verilsin.*

Her $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ *için*

(G_n1)

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 &\iff \frac{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{1+G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=0\\ &\iff G_n(x_1,\ldots,x_n)=0\\ &\iff x_1=x_2=\cdots=x_n\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n1 *aksiyomu sağlanır.*

(G_n2) σ, $\{1,2,\ldots,n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \frac{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{1+G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\\ &= \frac{G_n\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)}{1+G_n\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)}\\ &= (\psi\circ G_n)\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $G_n 2$ aksiyomu sağlanır.

$(G_n 3)$ $\{x_i : i = 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 1, \ldots, n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ve* $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ *için* $G_n(x_1, \ldots, x_n) \leq G_n(y_1, \ldots, y_n)$ *dir. Ayrıca,* ψ*,* $[0, \infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1 + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &\leq \frac{G_n(y_1, \ldots, y_n)}{1 + G_n(y_1, \ldots, y_n)} \\ &= (\psi \circ G_n)(y_1, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $G_n 3$ aksiyomu sağlanır.

$(G_n 4)$ $s, t \in \mathbb{N}$ *için* $s + t = n$ *ve* $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t, w \in X$ *olmak üzere;* ψ*,* $[0, \infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi \circ G_n)(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &= \frac{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1 + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &\leq \frac{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + G_n(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})}{1 + G_n(x_1, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + G_n(y_1, \ldots, y_t; \mathbf{w})} \\ &\leq \frac{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s; \mathbf{w})}{1 + G_n(x_1, \ldots, x_s; \mathbf{w})} + \frac{G_n(y_1, y_2, \ldots, y_t; \mathbf{w})}{1 + G_n(y_1, \ldots, y_t; \mathbf{w})} \\ &= (\psi \circ G_n)(x_1, \ldots, x_s; \mathbf{w}) + (\psi \circ G_n)(G_n(y_1, \ldots, y_t; \mathbf{w}))\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $G_n 4$ aksiyomu sağlanır.

iii) $\psi(x) = \sqrt{x}$ *olmak üzere* $(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *verilsin. Üstelik* $p \geq 1$ *sabit olacak şekilde* $\psi(x) = x^{1/p}$ *içinde doğrudur. Her* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için*

$(G_n 1)$

$$\begin{aligned}(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 &\iff \sqrt{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0 \\ &\iff G_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $G_n 1$ aksiyomu sağlanır.

$(G_n 2)$ σ*,* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\psi \circ G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sqrt{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &= \sqrt{G_n\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)} \\ &= (\psi \circ G_n)\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $G_n 2$ aksiyomu sağlanır.

$(G_n 3)$ $\{x_i : i = 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 1, \ldots, n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ve* $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ *için* $G_n(x_1, \ldots, x_n) \leq G_n(y_1, y_2 \ldots, y_n)$ *dir. Ayrıca,* ψ*,* $[0, \infty)$

üzerinde artan olduğundan

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sqrt{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\\ &\le \sqrt{G_n(y_1,y_2\ldots,y_n)}\\ &= (\psi\circ G_n)(y_1,\ldots,y_n)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n3 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n4) $s,t\in\mathbb{N}$ ***için*** $s+t=n$ ***ve*** $x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t,w\in X$ ***olmak üzere;*** ψ*,* $[0,\infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) &= \sqrt{G_n(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)}\\ &\le \sqrt{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})}\\ &\le \sqrt{G_n(x_1,\ldots,x_s;\mathbf{w})}+\sqrt{G_n(y_1,\ldots,y_t;\mathbf{w})}\\ &= (\psi\circ G_n)(x_1,\ldots,x_s;\mathbf{w})+(\psi\circ G_n)(G_n(y_1,\ldots,y_t;\mathbf{w}))\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n4 *aksiyomu sağlanır.*
iv) $\psi(x)$=log$(x+1)$ *olmak üzere* $(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n)$=log$(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1)$ *verilsin. Her* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ *için*
(G_n1)

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 &\iff \log(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1)=0\\ &\iff G_n(x_1,\ldots,x_n)=0\\ &\iff x_1=x_2=\cdots=x_n\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n1 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n2) σ*,* $\{1,2,\ldots,n\}$ *kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \log(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1)\\ &= \log\left(G_n\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)+1\right)\\ &= (\psi\circ G_n)\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n2 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n3) $\{x_i:i=1,\ldots,n\}\subsetneq\{y_i:i=1,\ldots,n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *ve* $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in X^n$ *için* $G_n(x_1,\ldots,x_n)\le G_n(y_1,\ldots,y_n)$ *dir. Ayrıca,* ψ*,* $[0,\infty)$ *üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \log(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1)\\ &\le \log(G_n(y_1,\ldots,y_n)+1)\\ &= (\psi\circ G_n)(y_1,\ldots,y_n)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n3 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n4) $s,t\in\mathbb{N}$ ***için*** $s+t=n$ ***ve*** $x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t,w\in X$ ***olmak üzere;*** ψ*,* $[0,\infty)$

üzerinde artan olduğundan

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) &= \log(G_n(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)+1)\\ &\leq \log(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})+1)\\ &\leq \log(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+1)+\log(G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})+1)\\ &= (\psi\circ G_n)(x_1,\ldots,x_s;\mathbf{w})+(\psi\circ G_n)(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n4 aksiyomu sağlanır.
v) $\psi(x)=\min\{k,x\}$ *olmak üzere* $(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\min\{k,G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ *verilsin. Her $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ için*
(G_n1)

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 &\Longleftrightarrow \min\{k,G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}=0\\ &\Longleftrightarrow G_n(x_1,\ldots,x_n)=0\\ &\Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n1 aksiyomu sağlanır.
(G_n2) *σ, $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \min\{k,G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\\ &= \min\left\{k,G_n\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)\right\}\\ &= (\psi\circ G_n)\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n2 aksiyomu sağlanır.
(G_n3) $\{x_i : i=1,\ldots,n\} \subsetneq \{y_i : i=1,\ldots,n\}$ *olacak şekildeki her* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in X^n$ *için* $G_n(x_1,\ldots,x_n)\leq G_n(y_1,\ldots,y_n)$ *dir. Ayrıca, ψ, $[0,\infty)$ üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \min\{k,G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\\ &\leq \min\{k,G_n(y_1,y_2\ldots,y_n)\}\\ &= (\psi\circ G_n)(y_1,\ldots,y_n)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n3 aksiyomu sağlanır.
(G_n4) *$s,t\in\mathbb{N}$ için $s+t=n$ ve $x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t,w\in X$ olmak üzere; ψ, $[0,\infty)$ üzerinde artan olduğundan*

$$\begin{aligned}(\psi\circ G_n)(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) &= \min\{k,G_n(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)\}\\ &\leq \min\{k,(G_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w}))\}\\ &= \min\{k,G_n(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})\}+\min\{k,G_n(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})\}\\ &= (\psi\circ G_n)(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+(\psi\circ G_n)(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w})\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla G_n4 aksiyomu sağlanır.

5.1 Alışılmış (Klasik) Metrik Uzaylar ve G_n-Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Teorem 5.1 *$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, (X, d) bir G_2-metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul (X, d) nin alışılmış bir metrik uzay olmasıdır.*

İspat *(X, d) bir G_2-metrik uzay olmak üzere, $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu sırasıyla (G_n1) ,(G_n2) ,(G_n3) ,(G_n4) aksiyomlarını aşağıdaki şekilde sağlar;*
(G_n1) (pozitif tanımlılık): Her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

dir. Bu alışılmış metrik uzaylardaki pozitif tanımlılık aksiyomuna karşılık gelir.
(G_n2) (permütasyon değişmezliği): $\sigma : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ bir permütasyon fonksiyon olmak üzere:

$$d(x_1, x_2) = d\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\right) = \begin{cases} d(x_1, x_2) \\ \textit{veya} \\ d(x_2, x_1) \end{cases}$$

dir. Bu alışılmış metrik uzaylardaki simetri aksiyomuna karşılık gelir.
(G_n3) (monotonluk): $\{x_i : i = 1, 2\} \subsetneq \{y_i : i = 1, 2\}$ olacak şekildeki her (x_1, x_2) ve $(y_1, y_2) \in X^2$ için

$$0 = d(x_1, x_1) = d(x_2, x_2) \leq d(x_1, x_2)$$

dir. Bu alışılmış bir metrik uzayda iki eleman arasındaki uzaklığın her zaman sıfırdan büyük, sıfır olabilmesi içinde iki elemanın birbirine eşit olmasına karşılık gelir.
(G_n4) (genelleştirilmiş üçgen eşistisizliği): $s, t \in \mathbb{N}$ için $s + t = 2$ ve $x_1, y_1, w \in X$ olmak üzere;

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, w) + d(w, y_1)$$

dir. Bu alışılmış metrik uzaylardaki üçgen eşitsizliğine karşılık gelir
Sonuç olarak (G_n1), (G_n2), (G_n3), (G_n4) aksiyomları $n = 2$ için alışılmış metrik uzay aksiyomları ile denktir.

Ayrıca (X, d) bir G_2-metrik uzay ise (X, d) nin bir $D-$metrik uzay olduğuda benzer şekilde aksiyomların örtüşmesi ile gösterilebilir.

Aşağıdaki örnek bir G_n-metrik uzay yardımıyla alışılmış metrik uzay örnekleri elde etme ile ilgilidir.

Örnek 5.3 (X, G_n) *keyfi bir* G_n-*metrik uzay olmak üzere;.*

i) $d^S(x,y) := G_n(x;\mathbf{y}) + G_n(y;\mathbf{x})$

ii) $d(x,y) := G_n(x,y,\ldots,y) + G_n(x,x,y,\ldots,y) + \cdots + G_n(x,\ldots,x,y)$

iii) $d^M(x,y) := \max\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \{x,y\},\ 1 \le i \le n\}$

şeklinde tanımlı d *fonksiyonları* X *üzerinde alışılmış metriklerdir.*

Gerçekten alışılmış metrik uzay aksiyomlarından pozitif tanımlılık ve simetri aksiyomlarının sağlandığı d^S *ve* d *fonksiyonları için çok açıktır. Bu anlamda* d^S *ve* d *fonksiyonlarının sadece üçgen eşitsizliği aksiyomunu sağladığı aşağıdaki şekilde verilebilir.*

i) d^S *fonksiyonun tanımı ve* (G_n4) *aksiyomu gereği*

$$\begin{aligned} d^S(x,z) + d^S(z,y) &= G_n(x;\mathbf{z}) + G_n(z;\mathbf{x}) + G_n(z;\mathbf{y}) + G_n(y;\mathbf{z}) \\ &= G_n(x;\mathbf{z}) + G_n(z;\mathbf{y}) + G_n(y;\mathbf{z}) + G_n(z;\mathbf{x}) \\ &\ge G_n(x;\mathbf{y}) + G_n(y;\mathbf{x}) \\ &= d^S(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani d^S *fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

ii) d *fonksiyonun tanımı ve* (G_n4) *aksiyomu gereği*

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= G_n\left([x]^1;\mathbf{z}\right) + \cdots + G_n\left([x]^{(n-1)},z\right) \\ &\quad + G_n\left([z]^1;\mathbf{y}\right) + \cdots + G_n\left([z]^{(n-1)},y\right) \\ &= \underbrace{G_n\left([x]^1;\mathbf{z}\right) + G_n\left([z]^1;\mathbf{y}\right)}_{\ge G_n\left([x]^1;\mathbf{y}\right)} + \cdots \\ &\quad \cdots + \underbrace{G_n\left([x]^{(n-1)},z\right) + G_n\left([z]^{(n-1)},y\right)}_{\ge G_n\left([x]^{(n-1)};\mathbf{y}\right)} \\ &\ge G_n\left([x]^1;\mathbf{y}\right) + \cdots + G_n\left([x]^{(n-1)},y\right) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani d *fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

iii) $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n \in X$ *için;* $G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$ *olduğundan*

$d^M(x,y) := \max\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \{x,y\},\ 1 \le i \le n\} \ge 0$ *dır.*

$$\begin{aligned} d^M(x,y) = 0 &\iff \max\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \{x,y\},\ 1 \le i \le n\} = 0 \\ &\iff \forall\, i \in [1,n] \text{ ve } x_i \in \{x,y\} \text{ için } G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \\ &\iff \forall\, i \in [1,n] \text{ ve } x_i \in \{x,y\} \text{ için } x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

Yani d^M fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Genelliği bozmaksızın,

$$\begin{aligned} d^M(x,y) &= \max\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \{x,y\},\ 1 \le i \le n\} \\ &= \max\{G_n(x;\mathbf{y}), G_n(x,x;\mathbf{y}), \ldots, G_n(x,,\ldots,x,y)\} \\ &= \max\{G_n(y;\mathbf{x}), G_n(y,y;\mathbf{x}), \ldots, G_n(y,,\ldots,y,x)\} \quad \because (G_n2) \text{ aksiyomu} \\ &= d^M(y,x) \end{aligned}$$

dır. Yani d^M fonksiyonu simetriktir. Benzer şekilde, genelliği bozmaksızın

$$\begin{aligned} d^M(x,y) &= \max\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \{x,y\},\ 1 \le i \le n\} \\ &= \max\{G_n(x;\mathbf{y}), G_n(x,x;\mathbf{y}), \ldots, G_n(x,,\ldots,x,y)\} \\ &= G_n\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{s-tane}, \underbrace{y,\ldots,y}_{(n-s)-tane}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre (G_n4) aksiyomundan

$$\begin{aligned} d^M(x,z) + d^M(z,y) &= G_n\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{s-tane}, \underbrace{z,\ldots,z}_{(n-s)-tane}\right) + G_n\left(\underbrace{z,\ldots,z}_{s-tane}, \underbrace{y,\ldots,y}_{(n-s)-tane}\right) \\ &\ge G_n\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{s-tane}, \underbrace{y,\ldots,y}_{(n-s)-tane}\right) \\ &= d^M(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani d^M fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak d^M fonksiyonu X üzerinde bir alışılmış metriktir.

Örnek 5.4 *(Ortalama G_n-metrik) : Alışılmış bir (X,d) metrik uzayı için $G_n : X^n \to [0,\infty)$ fonksiyonu $G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} d(x_i,x_j)$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde G_n fonksiyonu X üzerinde bir G_n- metriktir. Gerçekten (G_n1), (G_n2), (G_n3), (G_n4) aksiyomları aşağıdaki gibi sağlanır;*

(G_n1) *d, X üzerinde bir metrik olduğundan* $\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\}$ *için* x_i=x_j *ise* $d\left(x_i,x_j\right)$=0 *olup* $G_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = 0$ *olarak elde edilir. Tersine* $G_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = 0$ *ise* $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} d\left(x_i,x_j\right) = 0$ *olup* $\forall\ i,j \in \{1,\ldots,n\}$ *için* $d\left(x_i,x_j\right) = 0$ *dır. Dolayısıyla* $\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\}$ *için* $x_i = x_j = 0$ *dır. Sonuç olarak* G_n1 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n2)

$$\begin{array}{rcl} \sigma: \ \{1,2,\ldots,n\} & \rightarrow & \{1,2,\ldots,n\} \\ i & \mapsto & \sigma\left(i\right) \\ j & \mapsto & \sigma\left(j\right) \end{array}$$

bir permütasyon fonksiyon olmak üzere: d *alışılmış bir metrik uzay olduğundan* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} d\left(x_i,x_j\right) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} d\left(x_{\sigma(i)},x_{\sigma(j)}\right)$ *dir. O halde*

$$G_n\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} d\left(x_i,x_j\right) = G_n\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$$

dır. Sonuç olarak G_n2 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n3) $\{x_1,\ldots,x_n\} \subsetneqq \{y_1,\ldots,y_n\}$ *olmak üzere* $\{d\left(x_i,x_j\right) : i,j \in \{1,\ldots,n\}\} \subset \{d\left(y_i,y_j\right) : i,j \in \{1,\ldots,n\}\}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_1,\ldots,x_n\right) &= \tfrac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} d\left(x_i,x_j\right) \\ &< \tfrac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} d\left(y_i,y_j\right) \\ &= G_n\left(y_1,\ldots,y_n\right) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak G_n3 *aksiyomu sağlanır.*
(G_n4) *Keyfi* $x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t,w \in X$ *olsun. d, X üzerinde bir alışılmış metrik olduğundan* $\forall\ i = 1,\ldots,s$ *ve* $\forall\ j = 1,\ldots,t$ *için* $d\left(x_i,y_j\right) \leq d\left(x_i,w\right) + d\left(w,y_j\right)$ *üçgen eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikten* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} d\left(x_i,y_j\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{s} d\left(x_i,w\right) + \sum\limits_{j=1}^{t} d\left(w,y_j\right)$ *olduğu açıktır. Buradan*

$$G_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t\right) \leq G_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_s,\mathbf{w}\right) + G_n\left(y_1,y_2,\ldots,y_t,\mathbf{w}\right)$$

elde edilir.

Örnek 5.5 ***(** Maksimum* G_n-*metrik* ***) :*** (X,d) *bir alışılmış metrik uzay olmak üzere;*

$$\begin{array}{rcl} G_n^M \ : X \times \cdots \times X & \longrightarrow & [0,\infty) \\ \left(x_1,\ldots,x_n\right) & \longmapsto & G_n^M\left(x_1,\ldots,x_n\right) := \max\limits_{0\leq i,j\leq n}\{d\left(x_i,x_j\right)\} \end{array}$$

şeklinde tanım G_n^M *fonksiyonu* X *üzerinde bir* G_n-*metriktir. Gerçekten,*

$(G_n 1)$

$G_n^M(x_1,\ldots,x_n)=0 \Longleftrightarrow \max\limits_{0\leq i,j\leq n}\{d(x_i,x_j)\}=0 \Longleftrightarrow \forall\, i,j=1,\ldots,n$ *için* $x_i{=}x_j$ *dır. Dolayısıyla* G_n1 *aksiyomu sağlanır.*

$(G_n 2)$

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \{1,2,\ldots,n\} & \rightarrow & \{1,2,\ldots,n\} \\ & i & \mapsto & \sigma(i) \\ & j & \mapsto & \sigma(j) \end{array}$$

σ*,* $\{1,2,\ldots,n\}$ *kümesi üzerinde yukarıdaki gibi tanımlı bir permütasyon fonksiyon olduğundan* $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}=\left\{x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right\}$ *kümeleri eşit olur. O halde* $\max\limits_{0\leq i,j\leq n}\{d(x_i,x_j)\}=\max\limits_{0\leq i,j\leq n}\left\{d\left(x_{\sigma(i)},x_{\sigma(j)}\right)\right\}$ *dır. Sonuç olarak* $G_n^M(x_1,\ldots,x_n)=G_n^M\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$ *dır. Dolayısıyla* G_n2 *aksiyomu sağlanır.*

$(G_n 3)$ $\{x_i : i=1,\ldots,n\} \subsetneq \{y_i : i=1,\ldots,n\}$ *olmak üzere* $\forall\ i,j=1,\ldots,n$ *için* $\{d(x_i,x_j) : i,j\in\{1,\ldots,n\}\} \subset \{d(y_i,y_j) : i,j\in\{1,\ldots,n\}\}$ *dır. O halde* $\max\limits_{0\leq i,j\leq n}\{d(x_i,x_j)\}\leq \max\limits_{0\leq i,j\leq n}\{d(y_i,y_j)\}$ *olduğu açıktır. Sonuç olarak*

$$G_n^M(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq G_n^M(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

dır. Dolayısıyla G_n3 *aksiyomu sağlanır.*

$(G_n 4)$ $s+t=n$ *için* $x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t,w\in X$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} G_n^M(x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_t) &= \max_{0\leq i\leq s,\ 0\leq j\leq t}\{d(x_i,y_j)\} \\ &\leq \max_{0\leq i\leq s, 0\leq j\leq t}\{d(x_i,w)+d(w,y_j)\} \\ &\leq \max_{0\leq i\leq s}\{d(x_i,w)\}+\max_{0\leq j\leq t}\{d(w,y_j)\} \\ &= G_n^M(x_1,x_2,\ldots,x_s;\mathbf{w})+G_n^M(y_1,y_2,\ldots,y_t;\mathbf{w}) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla G_n4 *aksiyomu sağlanır.*

5.2 G_n-Metrik Uzayda Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu kısımda keyfi bir G_n-metriğin temel özelliklerinin yer aldığı bir yardımcı teorem verilecektir. Bu yardımcı teorem oldukça önemli olup, bundan sonraki kısımlarda çok sık kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 5.4 (X,G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olarak verilsin. Bu takdirde, her* $x,y,w,x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ *için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir :*

1) $G_n\left([x]^s, y, \ldots, y\right) \leq G_n\left([x]^s, w, \ldots, w\right) + G_n\left([w]^s, y, \ldots, y\right)$ *dir.*
İspat : (G_n4) *aksiyomundan açıktır.*

2) $G_n\left([x]^s; \mathbf{w}\right) \leq sG_n\left(x; \mathbf{w}\right)$ *dir.*
İspat : (G_n4) *aksiyomu gereği aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir;*

$$\begin{aligned} G_n\left([x]^s; \mathbf{w}\right) &\leq G_n\left([x]^{(s-1)}; \mathbf{w}\right) + G_n\left(x; \mathbf{w}\right) \\ &\leq G_n\left([x]^{(s-2)}; \mathbf{w}\right) + G_n\left(x; \mathbf{w}\right) + G_n\left(x; \mathbf{w}\right) \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{G_n\left(x; \mathbf{w}\right) + G_n\left(x; \mathbf{w}\right) + \cdots + G_n\left(x; \mathbf{w}\right)}_{s-tane} \\ &= sG_n\left(x; \mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $G_n\left([x]^s; \mathbf{w}\right) \leq sG_n\left(x; \mathbf{w}\right)$ *elde edilir.*

3) $G_n\left([x]^s; \mathbf{w}\right) \leq (n-s)\, G_n\left(w; \mathbf{x}\right)$ *dir.*
İspat : (G_n4) *aksiyomu gereği aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir;*

$$\begin{aligned} G_n\left([x]^s; \mathbf{w}\right) &= G_n\left([w]^{(n-s)}; \mathbf{x}\right) \\ &\leq G_n\left([w]^{(n-s-1)}; \mathbf{x}\right) + G_n\left(w; \mathbf{x}\right) \\ &\leq G_n\left([w]^{(n-s-2)}; \mathbf{x}\right) + G_n\left(w; \mathbf{x}\right) + G_n\left(w; \mathbf{x}\right) \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{G_n\left(w; \mathbf{x}\right) + G_n\left(w; \mathbf{x}\right) + \cdots + G_n\left(w; \mathbf{x}\right)}_{(n-s)-tane} \\ &= (n-s)\, G_n\left(w; \mathbf{x}\right) \end{aligned}$$

Uyarı : *Özel olarak;* $s = 1$ *için* $G_n\left(x, w, \ldots, w\right) \leq (n-1)\, G_n\left(w, x, \ldots, x\right)$ *dir. Bu eşitsizlik bundan sonraki bölümlerde oldukça sık kullanılacaktır.*

4) $G_n\left(x; \mathbf{w}\right) \leq \left[\dfrac{s}{1-(s-1)(n-s-1)}\right] G_n\left([x]^s; \mathbf{w}\right)$ *dir.*

İspat : *(G_n4) aksiyomu gereği aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir;*

$$\begin{aligned} G_n(x;\mathbf{w}) &\leq G_n(x,x;\mathbf{w})+G_n(w;\mathbf{x}) \\ &\leq G_n(x,x,x;\mathbf{w})+G_n(w;\mathbf{x})+G_n(w;\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ &\leq G_n([x]^s;\mathbf{w})+(s-1)G_n(w;\mathbf{x}) \\ &\leq G_n([x]^s;\mathbf{w})+(s-1)[G_n(x,\ldots,x,w,w)+G_n(x;\mathbf{w})] \\ &\vdots \\ &\leq G_n([x]^s;\mathbf{w})+(s-1)[G_n([x]^s;\mathbf{w})+(n-s-1)G_n(x;\mathbf{w})] \end{aligned}$$

dir. Buradan $G_n(x;\mathbf{w}) \leq \dfrac{s}{1-(s-1)(n-s-1)}G_n([x]^s;\mathbf{w})$ dur.

5) $G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} G_n(x_i,w,\ldots,w)$ *dir.*

İspat : *(G_n2) ve (G_n4) aksiyomları gereği aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir;*

$$\begin{aligned} G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &\leq G_n(x_1,w,\ldots,w)+G_n(x_2,\ldots,x_n,w) \\ &\leq G_n(x_1;\mathbf{w})+G_n(x_2,w,\ldots,w)+G_n(x_3,\ldots,x_n,w,w) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} G_n(x_i,w,\ldots,w) \end{aligned}$$

6) $|G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)-G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},w)| \leq \max\{G_n(y;\mathbf{w}),G_n(w;\mathbf{y})\}$ *dir.*

İspat : *(G_n2) ve (G_n4) aksiyomları gereği*

$G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y) \leq G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},w)+G_n(w,\ldots,w,y)$ *dir. Buradan*

$$G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)-G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},w) \leq G_n(w,\ldots,w,y) \tag{5.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde $G_n(x_1,\ldots,x_{n-1},w) \leq G_n(x_1,\ldots,x_{n-1},y)+G_n(y,\ldots,y,w)$ dir. Buradan

$$G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},w)-G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y) \leq G_n(y,\ldots,y,w)$$

elde edilir. Ayrıca bu son eşitsizlik yön değiştirilerek

$$-G_n(y,\ldots,y,w) \leq G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)-G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},w) \tag{5.4}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak (5.3) - (5.4) eşitsizlikleri ve mutlak değerin özelliğinden

$$|G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)-G_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},w)| \leq \max\{G_n(y,\ldots,y,w),G_n(w,\ldots,w,y)\}$$

eşitsizliği verilebilir.

7) $\left|G_n\left([x]^s;\mathbf{w}\right)-G_n\left([x]^k;\mathbf{w}\right)\right|\leq|s-k|\,G_n\left(x,w,\ldots,w\right)$ *dir.*
İspat : $2)$ *özelliğinden*

$$-sG_n\left(x;\mathbf{w}\right)\leq G_n\left([x]^s;\mathbf{w}\right)\leq sG_n\left(x;\mathbf{w}\right)\tag{5.5}$$

ve

$$-kG_n\left(x;\mathbf{w}\right)\leq G_n\left([x]^k;\mathbf{w}\right)\leq kG_n\left(x;\mathbf{w}\right)$$

eşitsizlikeri vardır. Son eşitsizlik

$$-G_n\left([x]^k;\mathbf{w}\right)\leq -kG_n\left(x;\mathbf{w}\right)\tag{5.6}$$

şeklinde yazılabileceğinden, (5.5) - (5.6) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanır ve mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left|G_n\left([x]^s;\mathbf{w}\right)-G_n\left([x]^k;\mathbf{w}\right)\right|\leq|s-k|\,G_n\left(x,w,\ldots,w\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

8) $\forall\ x_1,x_2,\ldots x_n\in X$ *için,*

$$G_n\left(x_1;\mathbf{x_n}\right)\leq G_n\left(x_1;\mathbf{x_2}\right)+G_n\left(x_2;\mathbf{x_3}\right)+\cdots+G_n\left(x_{n-1};\mathbf{x_n}\right)$$

ve

$$G_n\left(x_k;\mathbf{x_1}\right)\leq G_n\left(x_2;\mathbf{x_1}\right)+G_n\left(x_3;\mathbf{x_2}\right)+\cdots+G_n\left(x_n;\mathbf{x}_{n-1}\right)$$

dir.
İspat : *Tümevarımla ispat verelirse;*

$$G_n\left(x_1;\mathbf{x_k}\right)\leq\sum_{i=1}^{k-1}G_n\left(x_i;\mathbf{x_{i+1}}\right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu kabul edilsin. Ayrıca G_n4 *aksiyomundan*

$$\begin{aligned}G_n\left(x_1;\mathbf{x_{k+1}}\right)&\leq G_n\left(x_1;\mathbf{x_k}\right)+G_n\left(x_k;\mathbf{x_{k+1}}\right)\\&\leq\sum_{i=1}^{k-1}G_n\left(x_i;\mathbf{x_{i+1}}\right)+G_n\left(x_k;\mathbf{x_{k+1}}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}G_n\left(x_i;\mathbf{x_{i+1}}\right)\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde diğer eşitsizlik içinde tümevarımla ispat verilirse;

$$G_n\left(x_k;\mathbf{x_1}\right)\leq\sum_{i=1}^{k-1}G_n\left(x_{i+1};\mathbf{x_i}\right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu kabul edilsin. Ayrıca G_n4 aksiyomundan

$$\begin{aligned} G_n\left(x_{k+1};\mathbf{x_1}\right) &\leq G_n\left(x_k;\mathbf{x_1}\right)+G_n\left(x_{k+1};\mathbf{x_k}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} G_n\left(x_{i+1};\mathbf{x_i}\right)+G_n\left(x_{k+1};\mathbf{x_k}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} G_n\left(x_{i+1};\mathbf{x_i}\right) \end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

5.3 Çok Katlı Bağımsız G_n-Metrik Uzaylar

Tanım 5.2 *(X,G_n) bir G_n-metrik uzay olsun. $\{x_i : i=1,\ldots,n\} = \{y_i : i=1,\ldots,n\}$ özelliğindeki X^n uzayının tüm $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ elemanları için $G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = G_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ koşulu sağlanıyorsa G_n-metriğine çok katlı bağımsız denir. Örneğin;*
G_3-metriği çok katlı bağımsız ise

$$G_3\left(x_1,x_2,x_2\right)=G_3\left(x_1,x_1,x_2\right)$$

dir.
G_4-metriği çok katlı bağımsız ise

$$G_4\left(x_1,x_2,x_2,x_2\right)=G_4\left(x_1,x_1,x_2,x_2\right)=G_4\left(x_1,x_1,x_1,x_2\right)$$

ve

$$G_4\left(x_1,x_1,x_2,x_3\right)=G_4\left(x_1,x_2,x_2,x_3\right)=G_4\left(x_1,x_2,x_3,x_3\right)$$

dir.
G_5-metriği çok katlı bağımsız ise

$$G_5\left(x_1,x_2,x_2,x_2,x_2\right)=G_5\left(x_1,x_1,x_2,x_2,x_2\right)=G_5\left(x_1,x_1,x_1,x_2,x_2\right)=G_5\left(x_1,x_1,x_1,x_1,x_2\right)$$

ve

$$\begin{aligned} G_5\left(x_1,x_1,x_1,x_2,x_3\right) &= G_5\left(x_1,x_2,x_2,x_2,x_3\right)=G_5\left(x_1,x_2,x_3,x_3,x_3\right) \\ G_5\left(x_1,x_1,x_2,x_2,x_3\right) &= G_5\left(x_1,x_1,x_2,x_3,x_3\right)=G_5\left(x_1,x_2,x_2,x_3,x_3\right) \end{aligned}$$

ve

$$G_5\left(x_1,x_1,x_2,x_3,x_4\right)=G_5\left(x_1,x_2,x_2,x_3,x_4\right)=G_5\left(x_1,x_2,x_3,x_3,x_4\right)=G_5\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_4\right)$$

dir.

Dikkat edilirse 3 üncü mertebeden $G-$metriği, yani G_3-metriği, bir önceki bölümde verilen $G-$metriğine karşılık gelir. Böylece $G-$metriğindeki simetri kavramı, $n=3$ için G_n-metriğindeki çok katlı bağımsızlık kavramına karşılık gelmektedir. Dolayısıyla çok katlı bağımsızlık kavramı G_n-metrik uzaylarda simetri kavramını içeren daha genel bir kavramdır.

Ayrıca (G_n3) monotonluk aksiyomu:
" $\{x_i : i=1,\ldots,n\} \subseteq \{y_i : i=1,\ldots,n\}$ olacak şekildeki her $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in X^n$ için $G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq G_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dir " şeklinde düzenlenirse G_n-metrik uzay çok katlı bağımsız olur.

Not 5.5 *Örnek 5.3 de tanımlanan d^S alışılmış metriği eğer G_n-çok katlı bağımsız ise*

$$d^S(x,y) = 2G_n(x;\mathbf{y})$$

şekline indirgenebilir. Eğer G_n-çok katlı bağımsız değilse;

$$\begin{aligned} d^S(x,y) &= G_n(x;\mathbf{y}) + G_n(y;\mathbf{x}) \\ &\leq G_n(x;\mathbf{y}) + (n-1)\,G_n(x;\mathbf{y}) \\ &= nG_n(x;\mathbf{y}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d^S(x,y) &= G_n(x;\mathbf{y}) + G_n(y;\mathbf{x}) \\ &\geq G_n(x;\mathbf{y}) + \frac{1}{n-1}G_n(x;\mathbf{y}) \\ &= \frac{n}{n-1}G_n(x;\mathbf{y}) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerli olacağından

$$\frac{n}{n-1}G_n(x;\mathbf{y}) \leq d^S(x,y) \leq nG_n(x;\mathbf{y})$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca genel anlamda G_n çok katlı bağımsız ise

$$G_n(x;\mathbf{y}) \leq G_n(x;\mathbf{w}) + G_n(w;\mathbf{y})$$

ve

$$G_n(x;\mathbf{y}) \leq G_n(x;\mathbf{w}) + G_n(y;\mathbf{w})$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu tanımdan açıktır.

5.4 G_n-Metrik Topoloji

Tanım 5.3 (X, G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olsun.* $x \in X$ *merkezli* $r > 0$ *yarıçaplı* G_n-*açık yuvarı;*

$$B_{G_n}(x, r) = \{y \in X : G_n(x, y, \ldots, y) < r\}$$

şeklindeki X *in bir alt kümesidir.* $x \in X$ *merkezli* $r > 0$ *yarıçaplı* G_n-*kapalı yuvarı;*

$$B_{G_n}[x, r] = \{y \in X : G_n(x, y, \ldots, y) \leq r\}$$

şeklindeki X *in bir alt kümesidir.*

Yardımcı Teorem 5.5 (X, G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olmak üzere, aşağıdaki önermeler geçerlidir.*

i) $|\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}| \geq 3$ *olmak üzere, her* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *için*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < r \Rightarrow x_i \in B_{G_n}(x_1, r)$$

dir.

ii) G_n-*çok katlı bağımsız olmak üzere, her* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *için*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < r \Rightarrow x_i \in B_{G_n}(x_1, r)$$

dir.

iii) *Keyfi bir* $y \in B_{G_n}(x_1, r_1) \cap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *için*

$$B_{G_n}(y, \delta) \subseteq B_{G_n}(x_1, r_1) \cap B_{G_n}(x_2, r_2)$$

olacak şekilde en az bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ *vardır*

İspat $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < r$ *verilsin.*

i) $|X| \geq 3$ *olduğundan, her* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *için* $\{x_1, x_i, \ldots, x_i\} \subsetneq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *dir. Buna göre* (G_n3) *aksiyomu gereği*

$$G_n(x_1, x_i, \ldots, x_i) \leq G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < r$$

dir. O halde her $i \in \{1, \ldots, n\}$ *için* $x_i \in B_{G_n}(x_1, r)$ *dir.*

ii) $|X| \geq 3$ *ispat bir önceki ispattan açıktır. Eğer* $|X| = 2$ *için* $X = \{x_1, x_2\}$ *olup*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2) = G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < r$$

ve

$$G_n(x_2, x_1, \ldots, x_1) = G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < r$$

olacağından $x_1, x_2 \in B_{G_n}(x_1, r)$ *dir.*

iii) $y \in B_{G_n}(x_1, r_1) \cap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *ise* $y \in B_{G_n}(x_1, r_1)$ *ve* $y \in B_{G_n}(x_2, r_2)$ *dir.* G_n-*açık yuvar tanımı gereği* $y \in B_{G_n}(x_1, r_1)$ *ise* $G_n(x_1; \mathbf{y}) < r_1$ *ve* $y \in B_{G_n}(x_2, r_2)$ *ise* $G_n(x_2; \mathbf{y}) < r_2$ *dir. Buradan* $\delta := \min\{r_1 - G_n(x_1; \mathbf{y}), r_2 - G_n(x_2; \mathbf{y})\}$ *olarak tanımlansın. Burada iki durum söz konusudur;*

Durum 1 : $\delta = r_1 - G_n(x_1; \mathbf{y}) < r_2 - G_n(x_2; \mathbf{y})$ *olmak üzere, her* $z \in B_{G_n}(y, \delta)$ *için,*

$$\begin{aligned} G_n(y; \mathbf{z}) < \delta &\Rightarrow G_n(y; \mathbf{z}) + G_n(x_1; \mathbf{y}) < r_1 \\ &\Rightarrow G_n(x_1; \mathbf{z}) \leq G_n(y; \mathbf{z}) + G_n(x_1; \mathbf{y}) < r_1 \\ &\Rightarrow G_n(x_1; \mathbf{z}) < r_1 \end{aligned}$$

elde edilir yani $z \in B_{G_n}(x_1, r_1)$ *bulunur. Ayrıca*

$$\begin{aligned} G_n(y; \mathbf{z}) < \delta &\Rightarrow G_n(y; \mathbf{z}) < r_2 - G_n(x_2; \mathbf{y}) \\ &\Rightarrow G_n(x_2; \mathbf{y}) + G_n(y; \mathbf{z}) < r_2 \\ &\Rightarrow G_n(x_2; \mathbf{z}) \leq G_n(x_2; \mathbf{y}) + G_n(y; \mathbf{z}) < r_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $z \in B_{G_n}(x_2, r_2)$ *demektir. Sonuç olarak* $z \in B_{G_n}(y, \delta)$ *iken* $z \in B_{G_n}(x_1, r_1) \cap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *bulunur. Bu ise* $B_{G_n}(y, \delta) \subseteq B_{G_n}(x_1, r_1) \cap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *demektir.* $\delta = r_2 - G_n(x_2; \mathbf{y}) < r_1 - G_n(x_1; \mathbf{y})$ *durumuda benzer şekilde gösterilebilir.*

Yardımcı Teorem 5.6 (X, G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olmak üzere, her* $x \in X$ *ve her* $r \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$B_{G_n}\left(x, \frac{r}{n}\right) \subseteq B_{d^S}(x, r) \subseteq B_{G_n}(x, r)$$

dir.

İspat *Keyfi* $z \in B_{G_n}\left(x, \frac{r}{n}\right)$ *verilsin.* $z \in B_{G_n}\left(x, \frac{r}{n}\right)$ *ise* $G_n(x; \mathbf{z}) < \frac{r}{n}$ *dir. Ayrıca* d^S *metriğinin tanımından*

$$\begin{aligned} d^S(x, z) &= G_n(x; \mathbf{z}) + G_n(z; \mathbf{x}) \\ &\leq G_n(x; \mathbf{z}) + (n-1)\, G_n(x; \mathbf{z}) \quad \because \textit{Yardımcı Teo. 5.4 - 4 ten} \\ &= nG_n(x; \mathbf{z}) \\ &< r \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $d^S(x, z) < r$ *dir. Bu ise* $z \in B_{d^S}(x, r)$ *demektir. Buradan* $B_{G_n}\left(x, \frac{r}{n}\right) \subseteq B_{d^S}(x, r)$ *elde edilmiş olur. Benzer şekilde keyfi* $z \in B_{d^S}(x, r)$ *verilsin. Bu* *takdirde* $d^S(x,z) = G_n(x;\mathbf{z}) + G_n(z;\mathbf{x}) < r$ *dir. Ayrıca*

$$\begin{aligned} d^S(x,z) &= G_n(x;\mathbf{z}) + G_n(z;\mathbf{x}) \\ &\geq G_n(x;\mathbf{z}) + (n-1)\,G_n(x;\mathbf{z}) \quad \because \text{ Yardımcı Teo. 5.4 - 4 ten} \\ &= nG_n(x;\mathbf{z}) \end{aligned}$$

olup, $r > d^S(x,z) \geq nG_n(x;\mathbf{z})$ *elde edilir. Buradan* $r > G_n(x;\mathbf{z})$ *eşitsizliği bulunur, bu ise* $z \in B_{G_n}(x,r)$ *demektir, böylece* $B_{d^S}(x,r) \subseteq B_{G_n}(x,r)$ *elde edilir.*

Sonuç olarak $B_{G_n}\left(x,\dfrac{r}{n}\right) \subseteq B_{d^S}(x,r) \subseteq B_{G_n}(x,r)$ *dir.*

Tanım 5.4 (X,G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olsun.* $\mathfrak{B} = \{B_{G_n}(x,r) : x \in X,\ r \in \mathbb{R}^+\}$ *ailesi* X *üzerinde bir topoloji üretir. Bu topolojiye* G_n-*metrik topoloji adı verilir.*

Teorem 5.2 G_n-*metrik topoloji tektir ve metrikleştirilebilir. Ayrıca* $\tau(G)$ *Hausdorff ayırma özelliğini sağlar.*

İspat *Not 4.3 de verilen açıklamalara benzer şekilde kolayca ispatlanabilir.*

5.5 G_n-Metrik Uzaylarda Yakınsaklık Kavramı

Tanım 5.5 (X,G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olmak üzere,* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *bir dizi olsun. Her* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve* $i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *özelliğindeki her* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x\right) \leq \epsilon$ *olacak şekilde bir* $i_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi* x *e* G_n-*yakınsaktır denir. Kısaca,*

$$\lim_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}\to\infty} G_n\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-1}},x\right) = 0,\ \ (x_p) \stackrel{G_n}{\to} x \ \text{ veya } \ (x_p) \to x$$

gösterimlerinden biri ile gösterilir.

Tanım 5.6 (X,G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olmak üzere,* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *bir dizi olsun. Her* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve* $i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ *özelliğindeki her* $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ *için* $G_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) \leq \epsilon$ *olacak şekilde bir* $i_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisine* G_n-*Cauhcy dizisi denir.*

Tanım 5.7 *Bir* G_n-*metrik uzayda her* G_n-*Cauchy dizisi* G_n-*yakınsak ise bu uzaya tam uzay (veya* G_n-*tam uzay) denir.*

Yardımcı Teorem 5.7 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay olsun. Bu uzayda G_n-yakınsak bir dizinin limiti tektir.*

İspat *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay olsun. Bu uzayda (x_p) dizisinin birbirinden farklı x ve y elemanlarına G_n-yakınsak olduğu varsayılsın. Yani,*

$(x_p) \to x \iff \forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists\, \alpha \in \mathbb{N}$ öyleki $\alpha \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ özelliğindeki her $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ için $G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x\right) \leq \dfrac{\epsilon}{n}$ dır. Benzer şekilde,

$(x_p) \to y \iff \forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists\, \beta \in \mathbb{N}$ öyleki $\beta \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ özelliğindeki her $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ için $G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, y\right) \leq \dfrac{\epsilon}{n}$. Eğer $i_0 = \max\{\alpha, \beta\}$ olarak alınırsa, $i_0 \leq p$ özelliğindeki $\forall\, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
G_n(x; \mathbf{y}) &\leq G_n\left(x; \mathbf{x}_p\right) + G_n(x_p, y, \ldots, y) \qquad \because (G_n4) \text{ aksiyomu} \\
&\leq G_n\left(x; \mathbf{x}_p\right) + (n-1)\, G_n\left(y; \mathbf{x}_p\right) \quad \because \text{Yardımcı Teo 5.4 - 4 den} \\
&\leq \frac{\epsilon}{n} + \frac{(n-1)\,\epsilon}{n} = \epsilon
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, ϵ keyfi olduğundan $G_n(x; \mathbf{y}) = 0$ dır. Bu ise $x = y$ demek olup, varsayım ile çelişir.

Yardımcı Teorem 5.8 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay olsun. Bu uzayda her G_n-yakınsak dizi bir G_n-Cauhcy dizisidir.*

İspat *G_n-metrik uzayında $(x_p) \overset{G_n}{\to} x$ olacak şekilde keyfi bir $(x_p) \subset X$ dizisi verilsin. Yani, $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ özelliğindeki her $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ için $G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x\right) \leq \dfrac{\epsilon}{n}$ olacak şekilde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall\, i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n$ için (G_n4) aksiyomundan*

$$\begin{aligned}
G_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) &\leq G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x\right) + G_n\left([x]^{(n-1)}, x_{i_n}\right) \\
&\leq G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x\right) + (n-1)\, G_n(x_{i_n}; \mathbf{x}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{n} + \frac{(n-1)\,\epsilon}{n} = \epsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (x_p) dizisinin bir G_n-Cauhcy dizisi olması demektir.

Yardımcı Teorem 5.9 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay ve $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ bir dizi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler birbirine denktirler;*

i) $(x_p) \overset{G_n}{\to} x$,

ii) $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *öyleki* $\forall\, k \geq N$ *için* $x_k \in B_{G_n}(x,\epsilon)$,

iii) *Sabit bir* $s \in [1,n]$ *için* $\lim\limits_{i_1,i_2,\ldots,i_s\to\infty} G_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x,\ldots,x) = 0$ *dir. Yani,* $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ *öyleki* $i_0 \leq i_1,i_2,\ldots,i_s$ *özelliğindeki her* $i_1,i_2,\ldots,i_s \in \mathbb{N}$ *için* $G_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x,\ldots,x) < \epsilon$ *dır.*

İspat ***i)⇒ii) :*** $(x_p) \overset{G_n}{\to} x$ *verilsin. Yani,* $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ *öyleki* $i_0 \leq i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}$ *özelliğindeki her* $i_1,i_2,\ldots,i_{n-1} \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-1}},x\right) \leq \epsilon$ *dır.* $k \in \mathbb{N}$ *için* $i_1 = i_2 = \cdots = i_{n-1} = k \geq i_0$ *olarak alınırsa* $G_n(x_k,\ldots,x_k,x) \leq \epsilon$ *olur. Tanım gereği bu ise* $x_k \in B_{G_n}(x,\epsilon)$ *demektir.*

ii)⇒i) : $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *öyleki* $\forall\, k \geq N$ *için* $x_k \in B_{G_n}(x,\epsilon) \Rightarrow G_n(x,x_k,\ldots,x_k) < \epsilon$ *dur. O halde her* $j \in \{1,\ldots,n-1\} \subset \mathbb{N}$ *ve her* $N \leq k \leq i_j$ *için* $G_n\left(x;\mathbf{x}_{i_j}\right) < \dfrac{\epsilon}{(n-1)^2}$ *yazılabilir. Yardımcı Teorem 5.4 - 3 ve Yardımcı Teorem 5.4 - 4 den*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-1}},x\right) &\leq \sum_{j=1}^{n-1} G_n\left(x_{i_j};\mathbf{x}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (n-1)\, G_n\left(x;\mathbf{x}_{i_j}\right) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

dur. Sonuç olarak $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *öyleki* $N \leq k \leq i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}$ *özelliğindeki her* $i_1,i_2,\ldots,i_{n-1} \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-1}},x\right) \leq \epsilon$ *olduğundan* $(x_p) \overset{G_n}{\to} x$ *dir.*

ii)⇒iii) : $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *öyleki* $\forall\, k \geq N$ *için* $x_k \in B_{G_n}(x,\epsilon)$ *ise* $x_k \in B_{G_n}\left(x,\dfrac{\epsilon}{s}\right)$ *yazılabilir. O halde* $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $j \in \{1,\ldots,s\} \subset \mathbb{N}$ *olmak üzere her* $N \leq k \leq i_s$ *için* $G_n\left(x;\mathbf{x}_{i_s}\right) < \dfrac{\epsilon}{s\,(n-1)}$ *yazılabilir. Yardımcı Teorem 5.4 - 3 ten*

$$\begin{aligned} G_n(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_s},x,\ldots,x) &\leq \sum_{j=1}^{s} G_n\left(x_{i_j};\mathbf{x}\right) \\ &< \sum_{j=1}^{s} (n-1)\, G_n\left(x;\mathbf{x}_{i_j}\right) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *öyleki* $k \leq i_1,i_2,\ldots,i_s$ *özelliğindeki her* $i_1,i_2,\ldots,i_s \in \mathbb{N}$ *için* $G_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x,\ldots,x) < \epsilon$ *dır.*

iii)⇒ii) : $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *öyleki* $k \leq i_1,i_2,\ldots,i_s$ *özelliğindeki her* $i_1,i_2,\ldots,i_s \in \mathbb{N}$ *için* $G_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x,\ldots,x) < \epsilon$ *verilsin. Buradan özel olarak* $k = i_1 = i_2 = \cdots = i_s$ *için*

$G_n([x_k]^s;\mathbf{x}) < \dfrac{1-(n-s-1)(s-1)}{(n-s)}\epsilon$ *yazılabilir. O halde*

$$
\begin{aligned}
G_n(x;\mathbf{x}_k) &\leq \left[\frac{n-s}{1-(n-s-1)(s-1)}\right] G_n\left([x]^{n-s};\mathbf{x}_k\right) \quad \because \textit{Yardımcı Teo. 5.4 - 5 ten} \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak $G_n(x;\mathbf{x}_k) < \epsilon$ *eşitsizliği bulunur. Bu ise* $x_k \in B_{G_n}(x,\epsilon)$ *demektir.*

Yardımcı Teorem 5.10 (X,G_n) *bir* G_n-*metrik uzay ve* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *bir dizi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler birbirine denktirler;*

i) (x_p) *bir* G_n-*Cauchy dizisidir,*

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} G_n\left(x_k;\mathbf{x}_{k+1}\right) = 0$*,*

iii) $s \in [1,n-1]$ *için* $\lim\limits_{k,l\to\infty} G_n([x_k]^s;\mathbf{x}_l) = 0$ *dır.*

İspat ***i)⇒ii) :*** (x_p) *bir* G_n-*Cauchy dizisidir. O halde* $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+$*,* $\exists\ i_0 \in \mathbb{N}$ *öyleki* $i_0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n$ *özelliğindeki her* $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ *için* $G_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_n) \leq \epsilon$ *dır. Bu tanımda özel olarak* $i_1 = k$ *ve* $i_2, \ldots, i_n = k+1$ *olarak alınırsa,* $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+$*,* $\exists\ i_0 \in \mathbb{N}$ *öyleki* $i_0 \leq k, k+1$ *özelliğindeki her* $k, k+1 \in \mathbb{N}$ *için* $G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \leq \epsilon$ *dur. Bu ise* $\lim\limits_{k\to\infty} G_n\left(x_k;\mathbf{x}_{k+1}\right) = 0$ *demektir.*

ii)⇒iii) : $\lim\limits_{k\to\infty} G_n\left(x_k;\mathbf{x}_{k+1}\right) = 0$ *verilsin. Yani* $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+$*,* $\exists\ i_0 \in \mathbb{N}$ *öyleki* $i_0 \leq k, k+1$ *özelliğindeki her* $k, k+1 \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left(x_k;\mathbf{x}_{k+1}\right) \leq \dfrac{\epsilon}{s}$ *dir. Bu tanım* $k+1 = l$ *alınırsa, Yardımcı Teorem 5.4 - 3 ten* $G_n([x_k]^s;\mathbf{x}_l) \leq sG_n(x_k;\mathbf{x}_l)$ *olduğundan,* $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+$*,* $\exists\ i_0 \in \mathbb{N}$ *öyleki* $i_0 \leq k, l$ *özelliğindeki her* $k, l \in \mathbb{N}$ *için* $G_n([x_k]^s;\mathbf{x}_l) \leq \epsilon$ *şekline dönüşür. Bu ise* $\lim\limits_{k,l\to\infty} G_n([x_k]^s;\mathbf{x}_l) = 0$ *demektir.*

iii)⇒i) : $s \in [1,n-1]$ *için* $\lim\limits_{k,l\to\infty} G_n([x_k]^s;\mathbf{x}_l) = 0$ *verilsin. Burada özel olarak* $k = i_k$ *ve* $l = i_l$ *indislemesi seçilsin.* G_n-*yakınsaklık tanımı gereği* $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+$*,* $\exists\ p \in \mathbb{N}$ *öyleki* $p \leq i_k, i_l$ *özelliğindeki her* $i_k, i_l \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left([x_{i_k}]^s;\mathbf{x}_{i_l}\right) \leq \dfrac{1-(s-1)(n-s-1)}{s}\epsilon$ *dur. Her* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve* $i_1, i_2, \ldots, i_n \geq p$ *için, Yardımcı Teo. 5.4 - 5 ve 6 dan*

$$
\begin{aligned}
G_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_n) &\leq \sum_{i=1}^{n} G_n\left(x_{i_k};\mathbf{x}_{i_1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{s}{1-(s-1)(n-s-1)}\right] G_n\left([x_{i_k}]^s;\mathbf{x}_{i_1}\right) \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ise $\lim\limits_{i_1,i_2,\ldots,i_n\to\infty} G_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_n) = 0$ *demek olup,* (x_p) *bir* G_n-*Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir.*

5.6 G_n-Metrik Uzaylarda Süreklilik Kavramı

Tanım 5.8 (X, G_n) *ve* (X^*, G_n^*) *iki* G_n-*metrik uzay,* $x_0 \in X$ *ve* $f : X \longrightarrow X^*$ *fonksiyon olsun.* $\forall \quad \epsilon \quad > \quad 0$ *ve her* $B_{G_n^*}(f(x_0), \epsilon)$, G_n-*açık yuvarı için* $f(B_{G_n}(x_0, \delta)) \subseteq B_{G_n^*}(f(x_0), \epsilon)$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *varsa* f *fonksiyonuna* $x_0 \in X$ *noktasında* G_n-*süreklidir denir. Eger* f *fonksiyonu* X *kümesinin tüm noktalarında* G_n-*sürekli ise* X *kümesi üzerinde* G_n-*süreklidir denir.*

Bu tanımı şu şekilde de verilebilir: f *fonksiyonuna* $x_0 \in X$ *noktasında* G_n-*süreklidir* $\Leftrightarrow$ $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *öyleki* $G_n(x_0; \mathbf{x}) < \delta$ *özelliğindeki* $\forall\ x \in X$ *için* $G_n^*(f(x_0); \mathbf{f}(\mathbf{x})) < \epsilon$ *dur.*

Yardımcı Teorem 5.11 (X, G_n) *ve* (X^*, G_n^*) *iki* G_n-*metrik uzay ve* $f : X \longrightarrow X^*$ *fonksiyonu verilsin.* f *fonksiyonu* $x_0 \in X$ *noktasında* G_n-*süreklidir ancak ve ancak* f *fonksiyonu* $x_0 \in X$ *noktasında dizisel süreklidir. (yani* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G_n} x_o$ *iken* $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G_n^*} f(x_o)$*).*

İspat $f : (X, G_n) \longrightarrow (X^*, G_n^*)$ *fonksiyonu* G_n-*sürekli olmak üzere,* $(x_p) \xrightarrow{G_n} x_o$ *olacak şekilde* (x_p) *dizisi verilsin.* $(x_p) \xrightarrow{G_n} x_o$ *ise her* $\delta \in \mathbb{R}^+$ *ve* $k \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *özelliğindeki her* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x\right) \leq \delta$ *olacak şekilde bir* $k \in \mathbb{N}$ *vardır. Özel olarak* $k=i_1=i_2=\cdots=i_{n-1}$ *için* $G_n(x_k, \ldots, x_k, x) \leq \delta$ *dır. Ayrıca* f *fonksiyonu* G_n-*sürekli olduğundan her* $k \in \mathbb{N}$ *ve her* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *için* $G_n(f(x_k), \ldots, f(x_k), f(x)) \leq \dfrac{\epsilon}{(n-1)^2}$ *yazılabilir. Yardımcı Teorem 5.4 - 4 ve 6 dan*

$$
\begin{aligned}
G_n\left(f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \ldots, f\left(x_{i_{n-1}}\right), f(x)\right) &\leq \sum_{j=1}^{n-1} G_n\left(f\left(x_{i_j}\right); \mathbf{f}(\mathbf{x})\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} (n-1)\, G_n\left(f\left(x_{i_j}\right); \mathbf{f}(\mathbf{x})\right) \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak her $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve* $k \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *özelliğindeki her* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ *için* $G_n\left(f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \ldots, f\left(x_{i_{n-1}}\right), f(x)\right) \leq \epsilon$ *elde edilir. Bu ise* $(f(x_p)) \xrightarrow{G_n^*} f(x_o)$ *demektir.*

Varsayılsın ki f *fonksiyonu* G_n-*sürekli olmasın. Bu durumda* f *fonksiyonu en az bir* $x \in X$ *noktasında* G_n-*sürekli değildir. Yani* $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *öyleki en az bir* $y \in X$ *için* $G_n(x; \mathbf{y}) < \delta$ *iken* $G_n^*(f(y); \mathbf{f}(\mathbf{x})) \geq \epsilon$ *dur. Fakat böyle bir durum da* $(x_p) \to x_o$ *iken* $(f(x_p)) \nrightarrow f(x_o)$ *elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.*

Teorem 5.3 (X, G_n) *bir* G_n-*metrik uzay olmak üzere,* $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *fonksiyonu tüm değişken bileşenlerine göre* G_n-*süreklidir.*

İspat *Her* $i = 1, \ldots, n$ *için* $\left(x_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi (dizileri)* $x_i \in X$ *elemanına* G_n-*yakınsak olsun(lar). Yardımcı Teorem 5.9-iii den* $\left(x_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G_n} x_i$ *olduğundan* $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ *için* $\exists\, N_i \in \mathbb{N}$ *öyleki* $k \geq N_i$ *için* $G_n\left(x_i^{(k)}, x_i, \ldots, x_i\right) \leq \frac{\epsilon}{n}$ *dir.* $N = \max\{N_1, N_2, \ldots, \mathbf{N}_n\}$ *olmak üzere* $k \geq N$ *için,* G_n4 *aksiyomundan*

$$\begin{aligned}
G_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) &\leq G_n\left(x_1^{(k)}, x_1, \ldots, x_1\right) + G_n\left(x_1, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)\\
&\leq G_n\left(x_1^{(k)}, x_1, \ldots, x_1\right) + G_n\left(x_2^{(k)}, x_2, \ldots, x_2\right)\\
&\qquad + G_n\left(x_1, x_2, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)\\
&\;\vdots\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} G_n\left(x_i^{(k)}, x_i, \ldots, x_i\right) + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&< \epsilon + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $G_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) < \epsilon + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dir. Benzer şekilde* $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \epsilon + G_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$ *elde edilir. Sonuç olarak* $\left|G_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) - G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| < \epsilon$ *elde edilir. Yani* $G_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \to G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *bulunur. Bu ise Yardımcı Teorem 5.11 den* G_n-*fonksiyonunun* G_n-*sürekli olduğu anlamına gelir*

Not 5.6 (X, G_n) *bir* G_n-*metrik uzayı olsun. Eğer bu uzayda her* G_n-*sürekli dönüşümün sabit bir noktası varsa,* G_n-*metrik uzayına sabit nokta özelliğine sahiptir denir.*

Tanım 5.9 (X, G_n) *ve* (X^*, G_n^*) *iki* G_n-*metrik uzay olmak üzere* $f : X \longrightarrow X^*$ *fonksiyonu verilsin.* f *fonksiyonu birebir ve örten olmak üzere,* f *ve* f^{-1} *fonksiyonları sırasıyla* X *ve* X^* *üzerinde* G_n-*süreklidir ise* f *fonksiyonuna* G_n-*homeomorfizm denir. Ayrıca* (X, G_n) *ve* (X^*, G_n^*)*, homeomorfik* G_n-*metrik uzaylar olarak adlandırılır.*

Tanım 5.10 (X, G_n) *ve* (X^*, G_n^*) *homeomorfik* G_n-*metrik uzaylar olmak üzere,* (X, G_n) *bir* t *özelliğine sahip iken* (X^*, G_n^*) *da* t *özelliğine sahip ise bu* t *özelliğine* G_n-*topolojik invaryant (değişmez) adı verilir.*

Teorem 5.4 *Sabit nokta özelliği bir G_n-topolojik invaryanttır.*

İspat (X, G_n) *sabit nokta özelliğine sahip bir G_n-metrik uzayı olmak üzere,* (Y, G_n^*), *G_n-metrik uzayı üzerine tanımlı bir $h : X \to Y$, G_n-homeomorfizm verilsin. Ayrıca $\widetilde{f} : Y \to Y$ şeklinde tanımlı bir G_n-sürekli fonksiyon olmak üzere;*

$$\begin{aligned} f \ : \ X \ &\to \ X \\ x \ &\mapsto \ \left(h^{-1} \circ \widetilde{f} \circ h\right)(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir $f : X \to X$ fonksiyonu alınsın. Bu taktirde tanım gereği f fonksiyonuda G_n-sürekli olur. (X, G_n) sabit nokta özelliğine sahip bir G_n-metrik uzayı olduğu için en az bir $x \in X$ için $f(x) = x$ dir. $y = h(x)$ ise

$$\widetilde{f}(y) = \widetilde{f}(h(x)) = \left(h \circ h^{-1} \circ \widetilde{f} \circ h\right)(x) = (h \circ f)(x) = h(x) = y$$

elde edilir. Bu ise $\widetilde{f}$ fonksiyonunun sabit noktası var demek olup (Y, G_n^*), G_n-metrik uzayı sabit nokta özelliğine sahip olduğu anlamına gelir.

6. G_n-METRİK UZAYINDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Modern fonksiyonel analizin öncüsü olan Polonyalı matematikçi Stefan Banach (30 Mart 1892 - 31 Ağustos 1945) 20. yüzyılın en önemli matematikçilerinden biri olarak kabul edilmektedir. Genel fonksiyonel analiz teorisi üzerine ilk monografi olan 1932 tarihli Théorie des opérations linéaires (Doğrusal İşlemler Teorisi) kitabı en önemli eserlerinden biridir. Banach 1920 de tamamlanan ve 1922 de yayınlanan tezinde, tam normlu vektör uzayı kavramının aksiyomatik yapısını ortaya koyarak, fonksiyonel analiz alanının temellerini atmasının yanı sıra, Banach' ın adını taşıyan birçok matematiksel kavram vardır. Bunlar arasında Banach uzayı, Banach cebiri, Banach-Tarski paradoksu, Hahn-Banach teoremi, Banach-Steinhaus teoremi, Banach-Mazur oyunu, Banach-Alaoğlu teoremi ve belki de en ünlü olanı Banach sabit nokta teoremi sayılabilir.

Banach sabit nokta prensibi oldukça sade, şık ve basit oluşu nedeniyle integral ve diferansiyel denklemler teorisine özel uygulmaları ile birlikte tüm analizde belki de en yaygın olarak uygulanan ve kullanılan sabit nokta teoremidir. Bu teorem bir metrik uzay üzerinde inşa edildiğinden, Banach sabit nokta prensibini içeren çalışma yayınlandıktan sonra geliştirilen ve gelişen teoriye, metrik sabit nokta teorisi denir. Metrik sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, bu çalışmalarda genel olarak iki yöntem üzerine durulmaktadır. Birincisi Banach sabit nokta teoreminde ifade edilen büzülme koşulu yerine bu koşulu içeren, daha genel bir büzülme koşulunun verilmesi, ikincisi Banach büzülme koşulunun verildiği alışılmış metrik uzayı içeren daha genel bir metrik uzay verilmesidir. Literatürün yaklaşık son altmış yılı incelendiğinde, araştırmacıların çoğunun alışılmış metrik uzayın genelleştirmeleri üzerine çalıştıkları görülmektedir. Bu genelleştirmelerden en popüler olanlarından biri de $G-$metrik uzaydır. Ancak unutulmamalıdır ki literatürde bu tür genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerine çalışmanın önemini gösteren motive edici çok fazla çalışma yoktur. Teoride genellemeler derin bir anlayışa yaklaştırırlarsa harika araçlardır. Örneğin, Banach daraltma ilkesi 1922 de Banach tarafından keşfedilmedi. Yineleme ve sabit bir noktaya yakınsaması 1922 den çok önce biliniyordu. Banach' ın özgünlüğü, metrik uzayların soyut ortamında sabit noktanın varlığını belirtmekti.

Bu anlamda genelleştirilmiş metrik uzaylarda yapılan bu çalışmanın temel motivasyonunu ve özgünlüğünü içeren bu bölümde sırasıyla şunlar verilecektir;

1) G_3-metrik uzaydaki bilinen bazı sabit nokta teremlerinin, G_n-metrik uzaylardaki genellemeleri verilecektir,

2) G_n-metrik uzaylardaki bu genelleştirilmiş sabit nokta teoremlerinin ispatlarında, bu teoremlerin gerçekten alışılmış metrik uzayda bilinen sabit nokta teoremlerinin genellemesi olup-olmadığı sorusu cevaplanacaktır. Bunun için önceki bölümlerde verilen $\left(X, d^S\right)$ alışılmış metrik uzaydan yararlanılacaktır,

3) G_n-metrik uzaylardaki bu genelleştirilmiş sabit nokta teoremlerinin ispatları klasik yöntemlerin dışında kapalı bir bağıntı yardımıyla çok kısa bir şekilde de verilebileceği gösterilecektir,

4) Son olarakta 6.1 bölümünde verilen T dönüşümlerinin P özelliğine sahip oldukları gösterilecektir.

6.1 G_n-Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin $\left(X, d^S\right)$ Alışılmış Metrik Uzayındaki Karşılıkları

Bu alt bölümde G_3-metrik uzaydaki bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin, G_n-metrik uzaylardaki genellemeleri verilecek ve bu genellemelerin alışılmış bir metrik uzaya indirgenip-indergenemeyeceği sorgulanacaktır. Daha sonra klasik Picard iterasyon yöntemi kullanılarak ispatlar yapılacaktır.

Teorem 6.1 ***(Banach Büzülme Teoremi) :*** *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in [0, 1)$ olmak üzere*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq aG_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \tag{6.1}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat *Keyfi bir $x_0 \in X$ için $x_p = T^p x_o$ olacak şekilde bir $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. En az bir $p \in \mathbb{N}$ için $x_{p+1} = x_p$ ise $x_p \in X$ elemanı T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her $p \in \mathbb{N}$ için $x_{p+1} \neq x_p$ olarak alınsın. Bu takdirde (6.1) şartından*

$$G_n\left(x_{p+1}; \mathbf{x_{p+2}}\right) = G_n\left(Tx_p; \mathbf{Tx_{p+1}}\right) \leq aG_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq a^{p-1}G_n\left(x_1; \mathbf{x_2}\right)$$

dir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $a \in [0, 1)$ olduğundan $G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \to 0$ elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi bir G_n-Cauchy dizisidir. (X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay olduğundan $(x_p) \to u$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. Buna göre (6.1) şartından

$$G_n\left(x_{p+1}; \mathbf{Tu}\right) \leq aG_n\left(x_p; \mathbf{u}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $p \to \infty$ iken limiti durumunda, G_n-fonksiyonu tüm bileşen elemanlarına göre sürekli olduğundan (bkz. Teorem 5.3)

$$G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right) \leq aG_n\left(u;\mathbf{u}\right) = 0$$

şekline indirgenir. Buradan $u = Tu$ olarak bulunur. Yani T dönüşümü en az bir sabit noktası vardır.

Bu sabit noktanın tekliğini göstermek için; T dönüşümünün birbirinden farklı u ve v gibi en az iki sabit noktasının olduğu varsayılsın. Bu durumda;

$$\begin{aligned} G_n\left(u;\mathbf{v}\right) &= G_n\left(Tu;\mathbf{Tv}\right) \\ &\leq aG_n\left(u;\mathbf{v}\right) \\ &< G_n\left(u;\mathbf{v}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişki olup, varsayım yanlıştır. Yani T dönüşümü bir tek sabit noktası vardır.

Not 6.1 *Teorem 6.2, (Mustafa vd., 2010) refaransında verilen Teorem 2.1 in genellemesidir.*

Teorem 6.2 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a\left[\sum_{i=1}^{n} G_n\left(x_i;\mathbf{Tx_i}\right)\right] \tag{6.2}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.2) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n\left(Tx;\mathbf{Ty}\right) \leq a\left[G_n\left(x;\mathbf{Tx}\right) + (n-1)\,G_n\left(y;\mathbf{Ty}\right)\right]$$

ve

$$G_n\left(Ty;\mathbf{Tx}\right) \leq a\left[G_n\left(y;\mathbf{Ty}\right) + (n-1)\,G_n\left(x;\mathbf{Tx}\right)\right]$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$G_n\left(Tx;\mathbf{Ty}\right) + G_n\left(Ty;\mathbf{Tx}\right) \leq an\left[G_n\left(x;\mathbf{Tx}\right) + G_n\left(y;\mathbf{Ty}\right)\right] \tag{6.3}$$

elde edilir.

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (6.3) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S\left(Tx, Ty\right) \leq \frac{an}{2}\left[d^S\left(x, Tx\right) + d^S\left(y, Ty\right)\right]$$

şeklinde olur. $0 \leq \frac{an}{2} < \frac{1}{2}$ *olduğundan, Kannan sabit nokta teoreminden (Kannan, 1969),* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Fakat G_n-*çok katlı bağımsız değilse; (6.3) eşitsizliğinin* $\left(X, d^S\right)$ *metrik uzayındaki karşılığı*

$$d^S\left(Tx, Ty\right) \leq a\left(n-1\right)\left[d^S\left(x, Tx\right) + d^S\left(y, Ty\right)\right]$$

şeklindedir. Ancak $0 \leq a\left(n-1\right) < \frac{1}{2}$ *her zaman mümkün değildir. Bu durumda Kannan sabit nokta teoremi* $\left(X, d^S\right)$ *metrik uzayında,* T *dönüşümünün sabit noktası hakkında bilgi vermez.*

Sonuç olarak $\left(X, d^S\right)$ *alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılarak bu teorem ispatlanamaz. Bu anlamda teoremi ispatlamak adına* G_n-*metriğine has özellikler ve teknikler kullanılacaktır.*

Keyfi bir $x_0 \in X$ *için* $x_p = Tx_{p-1} = T^p x_o$ *olacak şekilde bir* $\left(x_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *dizisi verilsin. En az bir* $p \in \mathbb{N}$ *için* $x_p = x_{p-1}$ *ise* $x_{p-1} \in X$ *elemanı* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her* $p \in \mathbb{N}$ *için* $x_p \neq x_{p-1}$ *olarak alınsın. Bu takdirde (6.2) şartından*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) &= G_n\left(Tx_{p-1}; \mathbf{Tx_p}\right) \\ &\leq a\left[G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) + (n-1)\, G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right)\right] \\ &= a\left[G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) + (n-1)\, G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)\right] \end{aligned}$$

olup, buradan

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq \frac{a}{1-a\left(n-1\right)} G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \frac{a}{1-a\left(n-1\right)}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq \lambda^p G_n\left(x_0; \mathbf{x_1}\right)$$

dir. Benzer yineleme ile $r > p$ *özelliğindeki keyfi* $r, p \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p; \mathbf{x_r}\right) &\leq G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right) + \cdots + G_n\left(x_{r-1}; \mathbf{x_r}\right) \quad \because \textit{Yardımcı Teorem 5.4 - 9 dan} \\ &\leq \left[\lambda^p + \cdots + \lambda^{r-1}\right] G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \\ &\leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* $\lambda \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n\left(T^p x_o; \mathbf{T^r x_o}\right) \to 0$ *elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği* $\left(x_p = T^p x_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi bir* G_n-*Cauchy dizisidir.* $\left(X, G_n\right)$ *bir tam* G_n-*metrik uzay olduğundan* $\left(x_p\right) \to u$ *olacak şekilde bir* $u \in X$ *vardır. Yani* $\lim_{p\to\infty} G_n\left(T^p x_o; \mathbf{u}\right) = 0$ *dır.*

İddia : $Tu = u$ *dur. Yani* u*,* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır.*

$Tu \neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.2) eşitsizliğinden*

$$G_n\left(x_{p+1}; \mathbf{Tu}\right) \leq a\left[G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) + (n-1)\, G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, G_n metriği değişken bileşenlerine göre sürekli olduğundan

$$G_n(u; \mathbf{Tu}) \leq a(n-1) G_n(u; \mathbf{Tu})$$

sonucu elde edilir. Bu eşitsizlikte $a(n-1) < 1$ olduğundan $G_n(u; \mathbf{Tu}) = 0$ bulunur. Yani $Tu = u$ dur. Ancak bu durumda varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak, u, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi T dönüşümünün sabit noktasının tekliği gösterilecektir; T dönüşümünün birbirinden farklı u ve v gibi en az iki sabit noktasının olduğu varsayılsın, bu takdirde

$$\begin{aligned} G_n(u; \mathbf{v}) &= G_n(Tu; \mathbf{Tv}) \\ &\leq a\left[G_n(u; \mathbf{Tu}) + (n-1) G_n(v; \mathbf{Tv})\right] \end{aligned}$$

dir. Ancak bu durumda $G_n(u; \mathbf{v}) = 0$ sonucu elde edilir ki bu $u = v$ demek olup, varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bundan sonraki kısımda T dönüşümünün u sabit noktasında G_n-sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için $u \in X$ noktasına yakınsak olacak şekilde X de bir $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. Bu takdirde (6.2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right) &= G_n\left(Tu; \mathbf{Ty_p}\right) \\ &\leq a\left[G_n(u; \mathbf{Tu}) + (n-1) G_n\left(y_p; \mathbf{Ty_p}\right)\right] \\ &\leq a\left[G_n(u; \mathbf{Tu}) + (n-1)\left(G_n(y_p; \mathbf{u}) + G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right) \leq \frac{a(n-1)}{1 - a(n-1)} G_n(y_p; \mathbf{u})$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right) \to 0$ olarak bulunur. Yani $\mathbf{Ty_p} \to u = Tu$ elde edilir ki bu T dönüşümünün u noktasında G_n-sürekli olması demektir.

Not 6.2 *Teorem 6.3, (Mustafa vd., 2008) refaransında verilen Teorem 2.1 ve (Mustafa vd., 2010) refaransında verilen Teorem 2.2 nin genellemesidir.*

Teorem 6.3 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $\left(a + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right) \in [0, 1)$ olmak üzere;*

$$G_n(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) \leq aG_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} b_i G_n(x_i; \mathbf{Tx_i}) \tag{6.4}$$

yada

$$G_n(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) \leq aG_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} b_i G_n(Tx_i; \mathbf{x_i}) \tag{6.5}$$

eşitsizliklerinden (şartlarından) birini sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.4) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n(Tx; \mathbf{Ty}) \leq aG_n(x; \mathbf{y}) + b_1 G_n(x; \mathbf{Tx}) + (b_2 + \cdots + b_n) G_n(y; \mathbf{Ty})$$

ve

$$G_n(Ty; \mathbf{Tx}) \leq aG_n(y; \mathbf{x}) + b_1 G_n(y; \mathbf{Ty}) + (b_2 + \cdots + b_n) G_n(x; \mathbf{Tx})$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$G_n(Tx; \mathbf{Ty}) + G_n(Ty; \mathbf{Tx}) \leq a[G_n(x; \mathbf{y}) + G_n(y; \mathbf{x})] + \sum_{i=1}^{n} b_i [G_n(x; \mathbf{Tx}) + G_n(y; \mathbf{Ty})] \tag{6.6}$$

elde edilir.

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (6.6) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S(Tx, Ty) \leq ad^S(x, y) + \frac{(b_1 + \cdots + b_n)}{2}\left[d^S(x, Tx) + d^S(y, Ty)\right]$$

şeklindedir. $0 \leq \left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i\right) < 1$ olduğundan, Reich sabit nokta teoreminden (Reich, 1971) T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Fakat G_n-çok katlı bağımsız değilse; (6.6) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S(Tx, Ty) \leq ad^S(x, y) + \frac{(b_1 + \cdots + b_n)(n-1)}{n}\left[d^S(x, Tx) + d^S(y, Ty)\right]$$

şeklindedir. Ancak $a + 2\frac{(b_1 + \cdots + b_n)(n-1)}{n} < 1$ her zaman mümkün değildir. Bu durumda Reich sabit nokta teoremi $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayında, T dönüşümünün sabit noktası hakkında bilgi vermez.

Sonuç olarak $\left(X, d^S\right)$ alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılarak bu teorem ispatlanamaz. Bu anlamda teoremi ispatlamak adına G_n-metriğine has özellikler ve teknikler kullanılacaktır.

Keyfi bir $x_0 \in X$ için $x_p = Tx_{p-1} = T^p x_o$ olacak şekilde bir $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. En az bir $p \in \mathbb{N}$ için $x_p = x_{p-1}$ ise $x_{p-1} \in X$ elemanı T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her $p \in \mathbb{N}$ için $x_p \neq x_{p-1}$ olarak alınsın. Bu takdirde (6.4) şartından

$$\begin{aligned}
G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) &= G_n\left(Tx_{p-1}; \mathbf{Tx_p}\right) \\
&\leq aG_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) + b_1 G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) + \sum_{i=2}^{n} b_i G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right) \\
&= [a + b_1] G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) + \sum_{i=2}^{n} b_i G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\leq\frac{a+b_1}{1-b_2-\cdots-b_n}G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $\lambda=\dfrac{a+b_1}{1-b_2-\cdots-b_n}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\leq\lambda^pG_n\left(x_0;\mathbf{x_1}\right)$$

eşitsizliği bulunur. Benzer yineleme ile $r>p$ *özelliğindeki keyfi* $r,p\in\mathbb{N}$ *için*

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_r}\right)\leq\left[\lambda^p+\cdots+\lambda^{r-1}\right]G_n\left(x_0;\mathbf{Tx_o}\right)\leq\frac{\lambda^p}{1-\lambda}G_n\left(x_0;\mathbf{Tx_o}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p\to\infty$ *için limiti alınırsa,* $\lambda\in[0,1)$ *olduğundan* $G_n\left(T^px_o;\mathbf{T^rx_o}\right)\to 0$ *elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 6.10 gereği* $\left(x_p=T^px_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi bir* G_n-*Cauchy dizisidir.* (X,G_n) *bir tam* G_n-*metrik uzay olduğundan* $(x_p)\to u$ *olacak şekilde bir* $u\in X$ *vardır. Yani* $\lim\limits_{p\to\infty}G_n\left(T^px_o;\mathbf{u}\right)=0$ *dır.*

İddia : $Tu=u$ *dur. Yani* u*,* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır.*
$Tu\neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.4) eşitsizliğinden*

$$G_n\left(x_{p+1};\mathbf{Tu}\right)\leq aG_n\left(x_p;\mathbf{u}\right)+b_1G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)+\left(b_2+\cdots+b_n\right)G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p\to\infty$ *için limiti alınırsa,* G_n *metriği değişken bileşenlerine göre sürekli olduğundan*

$$G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)\leq\left(b_2+\cdots+b_n\right)G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)$$

sonucu elde edilir. Bu eşitsizlikte $b_2+\cdots+b_n<1$ *olduğundan* $G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)=0$ *bulunur. Yani* $Tu=u$ *dur. Ancak bu durumda varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak,* u*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.*

Şimdi T *dönüşümünün sabit noktasının tekliği gösterilecektir;* T *dönüşümünün birbirinden farklı* u *ve* v *gibi en az iki sabit noktasının olduğu varsayılsın, bu takdirde*

$$\begin{aligned}G_n\left(u;\mathbf{v}\right)&=G_n\left(Tu;\mathbf{Tv}\right)\\&\leq aG_n\left(u;\mathbf{v}\right)+b_1G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)+\left(b_2+\cdots+b_n\right)G_n\left(v;\mathbf{Tv}\right)\end{aligned}$$

dir. Ancak bu durumda $G_n\left(u;\mathbf{v}\right)=0$ *sonucu elde edilir ki bu* $u=v$ *demek olup, varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bundan sonraki kısımda* T *dönüşümünün* u *sabit noktasında* G_n-*sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için* $u\in X$ *noktasına yakınsak olacak şekilde* X *de bir* $\left(y_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi ele alınsın. Bu takdirde (6.4) eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned}G_n\left(u;\mathbf{Ty_p}\right)&=G_n\left(Tu;\mathbf{Ty_p}\right)\\&\leq aG_n\left(u;\mathbf{y_p}\right)+b_1G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)+\left(b_2+\cdots+b_n\right)G_n\left(y_p;\mathbf{Ty_p}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right) \to 0$ bulunur. Yani $\mathbf{Ty_p} \to u = Tu$ elde edilir ki bu T dönüşümünün u noktasında G_n-sürekli olması demektir.

Not 6.3 *Teorem 6.4, (Mustafa vd., 2008) refaransında verilen Teorem 2.3 ün genellemesidir.*

Teorem 6.4 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in [0, 1)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \le a \max_{1 \le i \le n} \left\{G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_i}\right)\right\} \tag{6.7}$$

yada

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \le a \max_{1 \le i \le n} \left\{G_n\left(Tx_i; \mathbf{x_i}\right)\right\} \tag{6.8}$$

eşitsizliklerinden (şartlarından) birini sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.7) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \le a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

ve

$$G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \le a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right)\right\}$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \le 2a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \tag{6.9}$$

elde edilir.

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (3.9) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S\left(Tx, Ty\right) \le a \max\left\{d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right)\right\}$$

olur. $0 \le a < 1$ olduğundan, Bianchini sabit nokta teoreminden (Bianchini, 1972) T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Fakat G_n-çok katlı bağımsız değilse; (6.9) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzaydaki karşılığı

$$d^S\left(Tx, Ty\right) \le \frac{2a\left(n-1\right)}{n} \max\left\{d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right)\right\}$$

şeklindedir. Ancak $0 \le \dfrac{2a\left(n-1\right)}{n} < 1$ her zaman mümkün değildir. Bu durumda Bianchini sabit nokta teoremi $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayında, T dönüşümünün sabit noktası hakkında bilgi *vermez.*

Sonuç olarak $\left(X, d^S\right)$ *alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılarak bu teorem ispatlanamaz. Bu anlamda teoremi ispatlamak adına* G_n-*metriğine has özellikler ve teknikler kullanılacaktır.*

Keyfi bir $x_0 \in X$ *için* $x_p = Tx_{p-1} = T^p x_o$ *olacak şekilde bir* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ *dizisi verilsin. En az bir* $p \in \mathbb{N}$ *için* $x_p = x_{p-1}$ *ise* $x_{p-1} \in X$ *elemanı* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her* $p \in \mathbb{N}$ *için* $x_p \neq x_{p-1}$ *olarak alınsın. Bu takdirde (6.7) şartından*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) &= G_n\left(Tx_{p-1}; \mathbf{Tx_p}\right) \\ &\leq a \max\left\{G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)\right\} \\ &= aG_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) \qquad\qquad \because 0 \leq a < 1 \end{aligned}$$

dir. Yani

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq aG_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right)$$

elde edilir, bu son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq a^p G_n\left(x_0; \mathbf{x_1}\right)$$

şekline indirgenir. Benzer yineleme ile $r > p$ *özelliğindeki keyfi* $r, p \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p; \mathbf{x_r}\right) &\leq G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right) + \cdots + G_n\left(x_{r-1}; \mathbf{x_r}\right) \quad \because \textit{Yardımcı Teorem 5.4 - 9 dan} \\ &\leq \left[a^p + \cdots + a^{r-1}\right] G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \\ &\leq \frac{a^p}{1-a} G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* $a \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n\left(T^p x_o; \mathbf{T^r x_o}\right) \to 0$ *elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği* $\left(x_p = T^p x_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi bir* G_n-*Cauchy dizisidir.* (X, G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olduğundan* $(x_p) \to u$ *olacak şekilde bir* $u \in X$ *vardır. Yani* $\lim_{p\to\infty} G_n\left(T^p x_o; \mathbf{u}\right) = 0$ *dır.*

İddia : $Tu = u$ *dur. Yani* u*,* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır.*

$Tu \neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.7) eşitsizliğinden*

$$G_n\left(x_{p+1}; \mathbf{Tu}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* G_n *metriği değişken bileşenlerine göre sürekli olduğundan*

$$G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right) \leq aG_n\left(u; \mathbf{Tu}\right)$$

sonucu elde edilir. Yani $G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right) = 0$ *olup* $Tu = u$ *elde edilir. Ancak bu durumda varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak,* u*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.*

Şimdi T dönüşümünün sabit noktasının tekliği gösterilecektir; T dönüşümünün birbirinden farklı u ve v gibi en az iki sabit noktasının olduğu varsayılsın, bu takdirde

$$\begin{aligned} G_n(u;\mathbf{v}) &= G_n(Tu;\mathbf{Tv}) \\ &\leq a\max\{G_n(u;\mathbf{Tu}), G_n(v;\mathbf{Tv})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Yani $u = v$ demek olup, varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bundan sonraki kısımda T dönüşümünün u sabit noktasında G_n-sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için bir $u \in X$ noktasına yakınsak olacak şekilde X de bir $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. Bu takdirde (6.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G_n(u;\mathbf{Ty_p}) &= G_n(Tu;\mathbf{Ty_p}) \\ &\leq a\max\{G_n(u;\mathbf{Tu}), G_n(y_p;\mathbf{Ty_p})\} \\ &= aG_n(y_p;\mathbf{Ty_p}) \\ &\leq a\left[G_n(y_p;\mathbf{u}) + G_n(u;\mathbf{Ty_p})\right] \end{aligned}$$

dir. Buradan $G_n(u;\mathbf{Ty_p}) \leq \dfrac{a}{1-a}G_n(y_\mathbf{p};\mathbf{u})$ olup, bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $G_n(u;\mathbf{Ty_p}) \to 0$ bulunur. Yani $\mathbf{Ty_p} \to u = Tu$ elde edilir ki bu T dönüşümünün u noktasında G_n-sürekli olması demektir.

Not 6.4 *Teorem 6.5, (Mustafa vd., 2010) refaransında verilen Teorem 2.3 ün genellemesidir.*

Teorem 6.5 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $(a+b) \in [0,1)$ olmak üzere;*

$$G_n(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) \leq aG_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b\max_{1\leq i\leq n}\{G_n(x_i;\mathbf{Tx_i})\} \tag{6.10}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.10) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n(Tx;\mathbf{Ty}) \leq aG_n(x;\mathbf{y}) + b\max\{G_n(x;\mathbf{Tx}), G_n(y;\mathbf{Ty})\}$$

ve

$$G_n(Ty;\mathbf{Tx}) \leq aG_n(y;\mathbf{x}) + b\max\{G_n(y;\mathbf{Ty}), G_n(x;\mathbf{Tx})\}$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$G_n(Tx;\mathbf{Ty})+G_n(Ty;\mathbf{Tx})\leq a\left[G_n(x;\mathbf{y})+G_n(y;\mathbf{x})\right]+2b\max\left\{G_n(x;\mathbf{Tx}),G_n(y;\mathbf{Ty})\right\} \tag{6.11}$$

elde edilir.

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (6.11) eşitsizliğinin $\left(X,d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S(Tx,Ty)\leq ad^S(x,y)+b\max\left\{d^S(x,Tx),d^S(y,Ty)\right\}$$

şeklinde olur. $0\leq a+b<1$ olduğundan, Reich sabit nokta teoreminden, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Fakat G_n-çok katlı bağımsız değilse; (6.11) eşitsizliğinin $\left(X,d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S(Tx,Ty)\leq ad^S(x,y)+\frac{2b(n-1)}{n}\max\left\{d^S(x,Tx),d^S(y,Ty)\right\}$$

şeklindedir. Ancak $a+\dfrac{2b(n-1)}{n}<1$ her zaman mümkün değildir. Bu durumda Reich sabit nokta teoremi $\left(X,d^S\right)$ metrik uzayında, T dönüşümünün sabit noktası hakkında bilgi vermez.

Sonuç olarak $\left(X,d^S\right)$ alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılarak bu teorem ispatlanamaz. Bu anlamda teoremi ispatlamak adına G_n-metriğine has özellikler ve teknikler kullanılacaktır.

Keyfi bir $x_0\in X$ için $x_p=Tx_{p-1}=T^px_o$ olacak şekilde bir $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\subset X$ dizisi verilsin. En az bir $p\in\mathbb{N}$ için $x_p=x_{p-1}$ ise $x_{p-1}\in X$ elemanı T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her $p\in\mathbb{N}$ için $x_p\neq x_{p-1}$ olarak alınsın. Bu takdirde (6.10) şartından

$$\begin{aligned}G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right) &= G_n\left(Tx_{p-1};\mathbf{Tx_p}\right)\\ &\leq aG_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)+b\max\left\{G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right),G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{6.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada iki durum söz konusudur;

Durum 1 : $G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)\geq G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)$ ise (6.12) eşitsizliği

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\leq(a+b)\,G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)$$

şekline indirgenir.

Durum 2 : $G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)\leq G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)$ ise (6.12) eşitsizliği

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\leq aG_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)+bG_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)$$

şekline indirgenir. Buradan $G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\leq\dfrac{a}{1-b}G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)$ bulunur. Bu son eşitsizlik, $G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)\leq G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)$ kabulü ile birleştirilirse

$$G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)\leq G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)\leq\frac{a}{1-b}G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)$$

elde edilir, ancak bu eşitsizlik $0 \leq a+b<1$ olduğundan mümkün değildir.

Sonuç olarak (6.12) eşitsizliğinden

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right) \leq (a+b)\, G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = a+b$ olmak üzere, bu son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right) \leq \lambda^p G_n\left(x_0;\mathbf{x_1}\right)$$

bulunur. Benzer yineleme ile $r>p$ özelliğindeki keyfi $r,p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p;\mathbf{x_r}\right) &\leq G_n\left(x_p;\mathbf{Tx_p}\right)+\cdots+G_n\left(x_{r-1};\mathbf{x_r}\right) \quad \because \textit{Yardımcı Teorem 5.4 - 9 dan} \\ &\leq \left[\lambda^p+\cdots+\lambda^{r-1}\right] G_n\left(x_0;\mathbf{Tx_o}\right) \\ &\leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} G_n\left(x_0;\mathbf{Tx_o}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $G_n\left(T^p x_o;\mathbf{T^r x_o}\right) \to 0$ elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği $\left(x_p = T^p x_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi bir G_n-Cauchy dizisidir. (X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay olduğundan $(x_p) \to u$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. Yani $\lim\limits_{p\to\infty} G_n\left(T^p x_o;\mathbf{u}\right) = 0$ dır.

İddia : $Tu = u$ dur. Yani u, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.
$Tu \neq u$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.10) eşitsizliğinden

$$G_n\left(x_{p+1};\mathbf{Tu}\right) \leq aG_n\left(x_p;\mathbf{u}\right) + b\max\left\{G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, G_n metriği değişken bileşenlerine göre sürekli olduğundan

$$G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right) \leq bG_n\left(u;\mathbf{Tu}\right)$$

sonucu elde edilir. Yani $G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right) = 0$ olup $Tu = u$ elde edilir. Ancak bu durumda varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak, u, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi T dönüşümünün sabit noktasının tekliği gösterilecektir; T dönüşümünün birbirinden farklı u ve v gibi en az iki sabit noktasının olduğu varsayılsın, bu takdirde

$$\begin{aligned} G_n\left(u;\mathbf{v}\right) &= G_n\left(Tu;\mathbf{Tv}\right) \\ &\leq aG_n\left(u;\mathbf{v}\right) + b\max\left\{G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(v;\mathbf{Tv}\right)\right\} \\ &= aG_n\left(u;\mathbf{v}\right) \end{aligned}$$

dir. Yani $u = v$ demek olup, varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bundan sonraki kısımda T dönüşümünün u sabit noktasında G_n-sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için bir $u \in X$ noktasına yakınsak olacak şekilde X de bir $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. Bu takdirde (6.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G_n\left(u;\mathbf{Ty_p}\right) &= G_n\left(Tu;\mathbf{Ty_p}\right) \\ &\leq aG_n\left(u;\mathbf{y_p}\right) + b\max\left\{G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(y_p;\mathbf{Ty_p}\right)\right\} \end{aligned}$$

dir.Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right) \leq bG_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right)$ bulunur ki $b < 1$ olduğundan $G_n\left(u; \mathbf{Ty_p}\right) = 0$ bulunur. Yani $\mathbf{Ty_p} \to u = Tu$ elde edilir ki bu T dönüşümünün u noktasında G_n-sürekli olması demektir.

Not 6.5 *Teorem 6.6, (Vats vd., 2011) refaransında verilen Teorem 1 in genellemesidir.*

Teorem 6.6 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max \left\{ \begin{array}{c} G_n\left(x_1; \mathbf{Tx_1}\right), G_n\left(x_1; \mathbf{Tx_2}\right), \ldots, G_n\left(x_1; \mathbf{Tx_n}\right), \\ G_n\left(x_2; \mathbf{Tx_1}\right), G_n\left(x_2; \mathbf{Tx_2}\right), \ldots, G_n\left(x_2; \mathbf{Tx_n}\right), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_1}\right), G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_2}\right), \ldots, G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_n}\right) \end{array} \right\} \tag{6.13}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.13) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

ve

$$G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \leq 2a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \tag{6.14}$$

elde edilir.

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (6.14) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$\begin{aligned} d^S\left(Tx, Ty\right) &\leq 2a \max\left\{\frac{1}{2}d^S\left(x, Tx\right), \frac{1}{2}d^S\left(x, Ty\right), \frac{1}{2}d^S\left(y, Tx\right), \frac{1}{2}d^S\left(y, Ty\right)\right\} \\ &= a \max\left\{d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(x, Ty\right), d^S\left(y, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right)\right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. $0 \leq a < 1$ olduğundan, (Rhoades, 1977) referansında verilen 24 üncü büzülme koşullu sabit nokta teoreminden, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Fakat G_n-çok katlı bağımsız değilse; (6.14) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayındaki karşılığı

$$d^S\left(Tx, Ty\right) \leq \frac{2a\left(n-1\right)}{n} \max\left\{d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(x, Ty\right), d^S\left(y, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right)\right\}$$

şeklindedir. Ancak $\dfrac{2a\left(n-1\right)}{n} < 1$ her zaman mümkün değildir. Bu durumda (Rhoades, 1977) de verilen 24 üncü büzülme koşulu ile verilen sabit nokta teoremi $\left(X, d^S\right)$ metrik uzayında, T dönüşümünün sabit noktası hakkında bilgi vermez. Sonuç olarak $\left(X, d^S\right)$ alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılarak bu teorem ispatlanamaz. Bu anlamda teoremi ispatlamak adına G_n-metriğine has özellikler ve teknikler kullanılacaktır.

Keyfi bir $x_0 \in X$ için $x_p = Tx_{p-1} = T^p x_o$ olacak şekilde bir $\left(x_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. En az bir $p \in \mathbb{N}$ için $x_p = x_{p-1}$ ise $x_{p-1} \in X$ elemanı T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her $p \in \mathbb{N}$ için $x_p \neq x_{p-1}$ olarak alınsın. Bu takdirde (6.13) şartından

$$\begin{aligned}
G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) &= G_n\left(Tx_{p-1}; \mathbf{Tx_p}\right) \\
&\leq a \max\left\{G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{Tx_{p-1}}\right), G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_{p-1}}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right)\right\} \\
&= a \max\left\{G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right), G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{x_p}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)\right\} \\
&= a \max\left\{G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right), G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada üç durum söz konusudur;

Durum 1: $G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq aG_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right)$ olsun.

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq a^p G_n\left(x_0; \mathbf{x_1}\right)$$

dir. Benzer yineleme ile $r > p$ özelliğindeki keyfi $r, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
G_n\left(x_p; \mathbf{x_r}\right) &\leq G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right) + \cdots + G_n\left(x_{r-1}; \mathbf{x_r}\right) \quad \because \textit{Yardımcı Teorem 5.4 - 9 dan} \\
&\leq \left[a^p + \cdots + a^{r-1}\right] G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \\
&\leq \frac{a^p}{1-a} G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alınırsa, $a \in [0,1)$ olduğundan $G_n\left(T^p x_o; \mathbf{T^r x_o}\right) \to 0$ elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği $\left(x_p = T^p x_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi bir G_n-Cauchy dizisidir.

Durum 2: $G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq aG_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_{p+1}}\right)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) &\leq aG_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_{p+1}}\right) \\
&\leq a\left[G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right) + G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

olup,

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq \frac{a}{1-a} G_n\left(x_{p-1}; \mathbf{x_p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \dfrac{a}{1-a}$ *olmak üzere, bu son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq \lambda^p G_n\left(x_0; \mathbf{x_1}\right)$$

bulunur. Benzer yineleme ile $r > p$ *özelliğindeki keyfi* $r, p \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p; \mathbf{x_r}\right) &\leq G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right) + \cdots + G_n\left(x_{r-1}; \mathbf{x_r}\right) \quad \because \textit{ Yardımcı Teorem 5.4 - 9 dan} \\ &\leq \left[\lambda^p + \cdots + \lambda^{r-1}\right] G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \\ &\leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} G_n\left(x_0; \mathbf{Tx_o}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* $\lambda \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n\left(T^p x_o; \mathbf{T^r x_o}\right) \to 0$ *elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği* $\left(x_p = T^p x_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi bir* G_n-*Cauchy dizisidir.*

Durum 3: $G_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right) \leq aG_n\left(x_p; \mathbf{x_{p+1}}\right)$ *olsun. Ancak* $a \in [0, 1/2)$ *olduğundan bu durum mümkün değildir. Sonuç olarak,* (X, G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olduğundan* $(x_p) \to u$ *olacak şekilde bir* $u \in X$ *vardır. Yani* $\lim\limits_{p\to\infty} G_n\left(T^p x_o; \mathbf{u}\right) = 0$ *dır.*

İddia : $Tu = u$ *dur. Yani* u*,* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır.*
$Tu \neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.13) eşitsizliğinden*

$$G_n\left(x_{p+1}; \mathbf{Tu}\right) = G_n\left(Tx_p; \mathbf{Tu}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x_p; \mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(x_p; \mathbf{Tu}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* G_n *metriği değişken bileşenlerine göre sürekli olduğundan*

$$\begin{aligned} G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right) &\leq a \max\left\{G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right)\right\} \\ &= aG_n\left(u; \mathbf{Tu}\right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. $a \in [0, 1/2)$ *olduğundan,* $G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right) = 0$ *olup* $Tu = u$ *elde edilir. Ancak bu durumda varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak,* u*,* T *dönüşümünün sabit noktasıdır.*

Şimdi T *dönüşümünün sabit noktasının tekliği gösterilecektir;* T *dönüşümünün birbirinden farklı* u *ve* v *gibi en az iki sabit noktasının olduğu varsayılsın, bu takdirde (6.13) eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} G_n\left(u; \mathbf{v}\right) &= G_n\left(Tu; \mathbf{Tv}\right) \\ &\leq a \max\left\{G_n\left(u; \mathbf{Tu}\right), G_n\left(u; \mathbf{Tv}\right), G_n\left(v; \mathbf{Tu}\right), G_n\left(v; \mathbf{Tv}\right)\right\} \\ &= a \max\left\{G_n\left(u; \mathbf{u}\right), G_n\left(u; \mathbf{v}\right), G_n\left(v; \mathbf{u}\right), G_n\left(v; \mathbf{v}\right)\right\} \\ &= a \max\left\{G_n\left(u; \mathbf{v}\right), G_n\left(v; \mathbf{u}\right)\right\} \end{aligned}$$

dir. Buradan $a \in [0, 1/2)$ *olduğundan*

$$G_n\left(u; \mathbf{v}\right) \leq aG_n\left(v; \mathbf{u}\right) \tag{6.15}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} G_n(v;\mathbf{u}) &= G_n(Tv;\mathbf{Tu}) \\ &\leq a\max\{G_n(v;\mathbf{Tv}),G_n(v;\mathbf{Tu}),G_n(u;\mathbf{Tv}),G_n(u;\mathbf{Tu})\} \\ &= a\max\{G_n(v;\mathbf{v}),G_n(v;\mathbf{u}),G_n(u;\mathbf{v}),G_n(u;\mathbf{u})\} \\ &= a\max\{G_n(v;\mathbf{u}),G_n(u;\mathbf{v})\} \end{aligned}$$

olup, $G_n(v;\mathbf{u}) \leq aG_n(u;\mathbf{v})$ *elde edilir. Bu son eşitsizlik (6.15) de yerine yazılırsa*

$$G_n(u;\mathbf{v}) \leq aG_n(v;\mathbf{u}) \leq a^2G_n(u;\mathbf{v})$$

elde edilir. $a \in [0,1/2)$ *olduğundan,* $G_n(u;\mathbf{v}) = 0$ *bulunur. Yani* $u = v$ *demek olup, varsayım ile çelişilir. Sonuç olarak* T *dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır. Bundan sonraki kısımda* T *dönüşümünün* u *sabit noktasında* G_n-*sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için bir* $u \in X$ *noktasına yakınsak olacak şekilde* X *de bir* $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi ele alınsın. Bu takdirde (6.13) eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} G_n(Ty_p;\mathbf{u}) &= G_n(Ty_p;\mathbf{Tu}) \\ &\leq a\max\left\{G_n\left(y_p;\mathbf{Ty_p}\right),G_n(Ty_p;\mathbf{Tu}),G_n\left(u;\mathbf{Ty_p}\right),G_n(u;\mathbf{Tu})\right\} \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* $G_n(Ty_p;\mathbf{u}) \to 0$ *bulunur. Yani* $Ty_p \to u{=}Tu$ *elde edilir ki bu* T *dönüşümünün* u *noktasında* G_n-*sürekli olması demektir.*

Not 6.6 *Teorem 6.7, (Mustafa vd., 2008) refaransında verilen Sonuç 2.6 nın genellemesidir.*

Teorem 6.7 (X,G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olsun.* $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n \in X$ *için* $T: X \to X$ *dönüşümü* $a \in [0,1)$ *olmak üzere;*

$$G_n(Tx_1,Tx_2,\ldots,Tx_n) \leq a\max\left\{\begin{array}{c} G_n(x_1;\mathbf{Tx_2}),G_n(x_1;\mathbf{Tx_3}),\ldots,G_n(x_1;\mathbf{Tx_n}), \\ G_n(x_2;\mathbf{Tx_1}),G_n(x_2;\mathbf{Tx_3}),\ldots,G_n(x_2;\mathbf{Tx_n}), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ G_n(x_n;\mathbf{Tx_1}),G_n(x_n;\mathbf{Tx_2}),\ldots,G_n\left(x_n;\mathbf{Tx_{n-1}}\right) \end{array}\right\} \tag{6.16}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada* G_n-*süreklidir.*

İspat *Teorem 6.6 nın ispatına benzer olarak verilebilir.*

Not 6.7 *Teorem 6.8, (Mustafa vd., 2009) refaransında verilen Teorem 2.1 in genellemesidir.*

Teorem 6.8 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max_{1\leq i\leq n} \left\{G_n\left(x_1, \ldots, x_n\right), G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_i}\right), G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_{i+1}}\right)\right\} \tag{6.17}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın (burada $i = n$ için $x_{n+1} = x_1$). Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.17) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$\begin{aligned} G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) &\leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{y}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right)\right\} \\ &\leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{y}\right) + G_n\left(y; \mathbf{x}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right)\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) &\leq a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{x}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right)\right\} \\ &\leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{y}\right) + G_n\left(y; \mathbf{x}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right)\right\} \end{aligned}$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \leq 2a \max\left\{\begin{array}{c} G_n\left(x; \mathbf{y}\right) + G_n\left(y; \mathbf{x}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), \\ , G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right) \end{array}\right\} \tag{6.18}$$

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (6.18) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzaydaki karşılığı

$$\begin{aligned} d^S\left(Tx, Ty\right) &\leq 2a \max\left\{d^S\left(x, y\right), \frac{1}{2}d^S\left(x, Tx\right), \frac{1}{2}d^S\left(y, Ty\right), \frac{1}{2}d^S\left(x, Ty\right), \frac{1}{2}d^S\left(y, Tx\right)\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{d^S\left(x, y\right), d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right), d^S\left(x, Ty\right), d^S\left(y, Tx\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. $0 \leq 2a < 1$ olduğundan, Ćirić sabit nokta teoreminden (Ćirić, 1974), T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Fakat G_n-çok katlı bağımsız değilse; (6.18) eşitsizliği alışılmış metrik uzaydaki karşılığı

$$\begin{aligned} d^S\left(Tx, Ty\right) &\leq 2a \max\left\{\begin{array}{l} d^S\left(x, y\right), \frac{(n-1)}{n}d^S\left(x, Tx\right), \frac{(n-1)}{n}d^S\left(y, Ty\right) \\ , \frac{(n-1)}{n}d^S\left(x, Ty\right), \frac{(n-1)}{n}d^S\left(y, Tx\right) \end{array}\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{d^S\left(x, y\right), d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right), d^S\left(x, Ty\right), d^S\left(y, Tx\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $0 \leq 2a < 1$ olduğundan, Ćirić sabit nokta teoreminden, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Sonuç olarak G_n-metrik uzayda verilen bu teoremin $\left(X, d^S\right)$

alışılmış metrik uzaydaki karşılığı yazılarak, G_n-metriğin hiçbir özelliğini kullanılmadan ispat verilmiştir. Yani bu sabit nokta teoremi aslında Ćirić sabit nokta teoreminin G_n-metrik uzaydaki yansıması olup, yeni bir sabit nokta teoremi değildir.

Not 6.8 *Teorem 6.9, (Mustafa vd., 2009) refaransında verilen Teorem 2.8 in genellemesidir.*

Teorem 6.9 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i \in \{\{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}\}}^{n} G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_j}\right) \right\} \tag{6.19}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.19) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

ve

$$G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right)\right\}$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \leq 2a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right)\right\} \tag{6.20}$$

Eğer G_n-çok katlı bağımsız ise; (6.20) eşitsizliğinin $\left(X, d^S\right)$ metrik uzaydaki karşılığı

$$\begin{aligned} d^S\left(Tx, Ty\right) &\leq 2a \max\left\{\frac{1}{2} d^S\left(y, Tx\right), \frac{1}{2} d^S\left(x, Ty\right)\right\} \\ &= a \max\left\{d^S\left(y, Tx\right), d^S\left(x, Ty\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. $0 \leq a < 1/n$ olduğundan, Chatterjea sabit nokta teoreminden (Chatterjea, 1972), T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Fakat G_n-çok katlı bağımsız değilse; (6.20) eşitsizliği alışılmış metrik uzaydaki karşılığı

$$\begin{aligned} d^S\left(Tx, Ty\right) &\leq 2a \max\left\{\frac{(n-1)}{n} d^S\left(y, Tx\right), \frac{(n-1)}{n} d^S\left(x, Ty\right)\right\} \\ &\leq \frac{2a(n-1)}{n} \max\left\{d^S\left(y, Tx\right), d^S\left(x, Ty\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $0 \leq \dfrac{2a\left(n-1\right)}{n} < 1$ *olduğundan, Chatterjea sabit nokta teoreminden,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Sonuç olarak G_n-*metrik uzayda verilen bu teoremin* $\left(X, d^S\right)$ *alışılmış metrik uzaydaki karşılığı yazılarak,*G_n-*metriğin hiçbir özelliğini kullanılmadan ispat verilmiştir. Yani bu sabit nokta teoremi aslında Chatterjea sabit nokta teoreminin* G_n-*metrik uzaydaki yansıması olup, yeni bir sabit nokta teoremi değildir.*

Not 6.9 *Teorem 6.10, (Mustafa vd., 2009) refaransında verilen Teorem 2.4 in genellemesidir.*

Teorem 6.10 $\left(X, G_n\right)$ *bir* G_n-*tam metrik uzay olsun.* $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için* $T : X \to X$ *dönüşümü* $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ *olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max_{1 \leq i \leq n} \left\{G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_{i+1}}\right) + G_n\left(x_{i+1}; \mathbf{Tx_i}\right)\right\} \tag{6.21}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın (burada $i = n$ *için* $x_{n+1} = x_1$ *). Bu takdirde* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada* G_n-*süreklidir.*

İspat *(6.21) eşitsizliğinden,* $x \neq y$ *olmak üzere* $\forall x, y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) &\leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), 2G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) &\leq a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right) + G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), 2G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right)\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right) + G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right)\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \end{aligned}$$

eşizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(Ty; \mathbf{Tx}\right) \leq 4a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\} \tag{6.22}$$

elde edilir.

Eğer G_n-*çok katlı bağımsız ise; (6.22) eşitsizliğinin* $\left(X, d^S\right)$ *metrik uzayındaki karşılığı*

$$\begin{aligned} d^S\left(Tx, Ty\right) &\leq 4a \max\left\{\frac{1}{2}\left[d^S\left(x, Ty\right) + d^S\left(y, Tx\right)\right], \frac{1}{2}d^S\left(x, Tx\right), \frac{1}{2}d^S\left(y, Ty\right)\right\} \\ &\leq 2a \max\left\{\left[d^S\left(x, Ty\right) + d^S\left(y, Tx\right)\right], d^S\left(x, Tx\right), d^S\left(y, Ty\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. $0 \leq 2a < 1$ *olduğundan, (Rhoades, 1977) de 22 inci büzülme koşulu ile verilen sabit nokta teoreminden,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Fakat G_n-*çok katlı bağımsız değilse; (6.22) eşitsizliği alışılmış metrik uzaydaki karşılığı*

$$\begin{aligned} d^S(Tx,Ty) &\leq 2a \max\left\{\frac{n-1}{n}\left[d^S(x,Ty)+d^S(y,Tx)\right], \frac{n-1}{n}d^S(x,Tx), \frac{n-1}{n}d^S(y,Ty)\right\} \\ &\leq \frac{2a(n-1)}{n}\max\left\{\left[d^S(x,Ty)+d^S(y,Tx)\right], d^S(x,Tx), d^S(y,Ty)\right\} \end{aligned}$$

olur. Ancak $\frac{2a(n-1)}{n} < 1$ *olduğundan,* **(***Rhoades, 1977) de 21 inci büzülme koşulu ile verilen sabit nokta teoreminden,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Sonuç olarak G_n-*metrik uzayda verilen bu teoremin* (X, d^S) *alışılmış metrik uzaydaki karşılığı yazılarak,*G_n-*metriğin hiçbir özelliğini kullanılmadan ispat verilmiştir. Yani bu sabit nokta teoremi aslında* **(***Rhoades, 1977) de 21 inci büzülme koşulu ile verilen sabit nokta teoreminin* G_n-*metrik uzaydaki yansıması olup, yeni bir sabit nokta teoremi değildir.*

6.2 G_n-Metrik Uzayda Kapalı Bir Bağıntı Sağlayan Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda 6.1 bölümünde verilen sabit nokta teoremlerinin ispatları bir kapalı bağıntı (implicit relation) yardımıyla oldukça kısa bir şekilde verilecektir. Bunun için aşağıda kullanılacak kapalı bağıntı (implicit relation) tanımlanacak ve bu bağıntıya ilişkin örnekler verilecektir. Burada sabit nokta teoremlerinin ispatlarının kısalığını vurgulamak adına, 6.1 bölümünde verilen sabit nokta teoremlerinin numaraları değiştirilmeden 6.1 bölümünde verildiği gibi numaralandırılacaktır. Ayrıca kapalı bağıntılar ile ilgili detaylı okuma yapmak isteyen okuyucular için, bu kavramı literatüre kazadıran ve $G-$metrik uzayda da bu kavramı uygulayan Valeriu Popa nın (Popa vd., 2013) çalışması gibi makaleler okunabilir.

Tanım 6.1 ***[Kapalı Bağıntı (Implicit Relation)] :*** $\mathbb{R}_+$ *negatif olmayan reel sayılar kümesi ve* n*,* 3 *ten büyük bir doğal sayı olsun.* $\mathfrak{F} = \left\{F : \mathbb{R}_+^6 \longrightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ sürekli}\right\}$ *bütün sürekli* F *dönüşümlerinin kümesini göstersin. Buna göre aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa, bu aksiyom sistemine* $\mathfrak{F}$ *üzerinde kapalı bağıntı denir.*

$f1)$ $F(t_1, \ldots, t_5, t_6)$ *fonksiyonu* t_5 *ve* t_6 *girdilerine göre artmayandır, yani* $t_5 < t_5^{'}$ *ve* $t_6 < t_6^{'}$ *iken*

$$F(t_1, \ldots, t_5, t_6) \geq F(t_1, \ldots, t_5^{'}, t_6^{'})$$

dır,

$f2)$ *Her* $u, v \geq 0$ *ve* $F(u, v, v, u, u+v, 0) \leq 0$ *iken* $u \leq hv$ *olacak şekilde bir* $h \in [0, 1)$ *vardır,*

$f3)$ *Her* $t > 0$ *için* $F(t, t, 0, 0, t, (n-1)t) > 0$ *dır.*

Aşağıdaki örneklerde bu kapalı bağıntının koşullarını sağlayan bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir;

Örnek 6.1 *F fonksiyonu $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $\alpha + \beta n + 2\gamma < 1$ ve $\alpha + \gamma n < 1$ olmak üzere $F(t_1, \ldots, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta[t_3 + (n-1)t_4] - \gamma(t_5 + t_6)$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $F \in \mathfrak{F}$ dur. Gerçekten,*

$F(t_1, \ldots, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta[t_3 + (n-1)t_4] - \gamma(t_5 + t_6)$ *için* $t_5 < t_5^{'}$ *ve* $t_6 < t_6^{'}$ *olmak üzere;*

$$F(t_1, \ldots, t_5, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta[t_3 + (n-1)t_4] - \gamma(t_5 + t_6)$$
$$F(t_1, \ldots, t_5^{'}, t_6^{'}) = t_1 - \alpha t_2 - \beta[t_3 + (n-1)t_4] - \gamma(t_5^{'} + t_6^{'})$$

dir. Buradan $F(t_1, \ldots, t_5, t_6) \geq F(t_1, \ldots, t_5^{'}, t_6^{'})$ *olup* $f1$ *şartı sağlanır.*

$\forall u, v \geq 0$ *ve* $F(u, v, v, u, u+v, 0) \leq 0$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} F(u, v, v, u, u+v, 0) &= u - \alpha v - \beta[v + (n-1)u] - \gamma(u + v + 0) \leq 0 \\ &= u(1 - \beta(n-1) - \gamma) - v(\alpha + \beta + \gamma) \leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $h = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta(n-1) - \gamma} \in [0, 1)$ *için* $u \leq hv$ *elde edilmiş olur. Böylece* $f2$ *şartı sağlanmış olur.*

$\forall\, t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F(t, t, 0, 0, t, (n-1)t) &= t - \alpha t - \beta[0 + (n-1)0] - \gamma(t + (n-1)t) \\ &= t - \alpha t - \gamma n t \\ &= t(1 - \alpha - \gamma n) \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f3$ *şartı sağlanmış olur.*

Örnek 6.2 *F fonksiyonu $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma + 2\lambda < 1$ ve $\alpha + n\lambda < 1$ olmak üzere $F(t_1, \ldots, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma t_4 - \lambda(t_5 + t_6)$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $F \in \mathfrak{F}$ dur. Gerçekten;*

$F(t_1, \ldots, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma t_4 - \lambda(t_5 + t_6)$ *için* $t_5 < t_5^{'}$ *ve* $t_6 < t_6^{'}$ *olmak üzere;*

$$F(t_1, \ldots, t_5, t_6) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma t_4 - \lambda(t_5 + t_6)$$
$$F(t_1, \ldots, t_5^{'}, t_6^{'}) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma t_4 - \lambda(t_5^{'} + t_6^{'})$$

dir. Buradan $F(t_1,\ldots,t_5,t_6) \geq F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'})$ *olup* $f1$ *şartı sağlanır.*

$\forall u,v \geq 0$ *ve* $F(u,v,v,u,u+v,0) \leq 0$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} F(u,v,v,u,u+v,0) &= u-\alpha v-\beta v-\gamma u-\lambda(u+v) \leq 0 \\ &= u(1-\gamma-\lambda)-v(\alpha+\beta+\lambda) \leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $h = \dfrac{\alpha+\beta+\lambda}{1-\gamma-\lambda} \in [0,1)$ *için* $u \leq hv$ *elde edilmiş olur. Böylece* $f2$ *şartı sağlanmış olur.*

$\forall\, t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F(t,t,0,0,t,(n-1)t) &= t-\alpha t-\beta 0-\gamma 0-\lambda(t+(n-1)t) \\ &= t-\alpha t-\lambda nt \\ &= t(1-\alpha-n\lambda) \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f3$ *şartı sağlanmış olur.*

Örnek 6.3 *F fonksiyonu* $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ *ve* $\alpha+\beta+n\gamma \in [0,1)$ *olmak üzere* $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4\}-\gamma\max\{t_5,t_6\}$ *şeklinde tanımlansın. Bu taktirde* $F \in \mathfrak{F}$ *dur.Gerçekten;*

$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4\}-\gamma\max\{t_5,t_6\}$ *şeklinde olduğundan,*

Durum 1 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4\}-\gamma t_5$*,*

Durum 2 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4\}-\gamma t_6$*,*

bu iki alt durum için $f1$ *şartının sağlandığı ayrı ayrı gösterilebilir.*

$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_3-\gamma t_5$ *için* $t_5 < t_5^{'}$ *ve* $t_6 < t_6^{'}$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} F(t_1,\ldots,t_5,t_6) &= t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4\}-\gamma t_5 \\ F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'}) &= t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4\}-\gamma t_5^{'} \end{aligned}$$

dir. Buradan $F(t_1,\ldots,t_5,t_6) \geq F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'})$ *olup* $f1$ *şartı sağlanır. Benzer şekilde Durum 2 içinde* $f1$ *şartı sağlandığı kolaylıkla görülmektedir.*

$\forall u,v \geq 0$ *ve* $F(u,v,v,u,u+v,0) \leq 0$ *olmak üzere*

$$F(u,v,v,u,u+v,0) = u-\alpha v-\beta\max\{v,u\}-\gamma\max\{u+v,0\} \leq 0$$

dir. Eğer $u > v$ *olsaydı,*

$$\begin{aligned} 0 \geq \quad F(u,v,v,u,u+v,0) &= u-\alpha v-\beta u-\gamma(u+v) \\ &\geq u-\alpha u-\beta u-\gamma(u+u) \\ &= u[1-(\alpha+\beta+2\gamma)] \end{aligned}$$

bulunurdu. Burada $u \geq 0$ *olup* $0 \geq u\left[1-(\alpha+\beta+2\gamma)\right]$ *olması için* $1 < (\alpha+\beta+2\gamma)$ *olması gerekirdi ki bu da* $\alpha+\beta+2\gamma \in [0,1)$ *ifadesi ile çelişirdi. Böylece* $u \leq v$ *dir. Sonuç olarak,*

$$\begin{aligned} F(u,v,v,u,u+v,0) &= u-\alpha v-\beta\max\{v,u\}-\gamma\max\{u+v,0\} \\ &= u-\alpha v-\beta v-\gamma u-\gamma v \\ &= u(1-\gamma)-v(\alpha+\beta+\gamma) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $h = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\gamma} \in [0,1)$ *için* $u \leq hv$ *elde edilmiş olur. Böylece* $f2$ *şartı sağlanmış olur.*

$\forall\, t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F(t,t,0,0,t,(n-1)t) &= t-\alpha t-\beta\max\{0,0\}-\gamma\max\{t,(n-1)t\} \\ &= t-\alpha t-\gamma(n-1)t \\ &= t\left[1-(\alpha+\gamma(n-1))\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f3$ *şartı sağlanmış olur.*

Örnek 6.4 *F fonksiyonu* $\alpha,\beta \geq 0$ *ve* $\alpha+(n-1)\beta < 1$ *olmak üzere* $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4,t_5,t_6\}$ *şeklinde tanımlansın. Bu taktirde* $F \in \mathfrak{F}$ *dur. Gerçekten;*

$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta\max\{t_3,t_4,t_5,t_6\}$ *şeklinde olduğundan,*

Durum 1 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_3$*,*

Durum 2 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_4$*,*

Durum 3 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_5$*,*

Durum 4 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_6$*,*

durumları sözkonusudur. Burada Durum 1 ve Durum 2 için $f1$ *şartının sağlandığı çok basit bir şekilde görülmektedir. Durum 3 için;*

$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_5$ *için* $t_5 < t_5^{\shortmid}$ *ve* $t_6 < t_6^{\shortmid}$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} F(t_1,\ldots,t_5,t_6) = F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_5 \\ F(t_1,\ldots,t_5^{\shortmid},t_6^{\shortmid}) = F(t_1,\ldots,t_6) = t_1-\alpha t_2-\beta t_5^{\shortmid} \end{aligned}$$

dir. Buradan $F(t_1,\ldots,t_5,t_6) \geq F(t_1,\ldots,t_5^{\shortmid},t_6^{\shortmid})$ *olup* $f1$ *şartı sağlanır. Benzer şekilde Durum 4 içinde* $f1$ *şartı sağlandığı kolaylıkla görülmektdir.*

$\forall u,v \geq 0$ *ve* $F(u,v,v,u,u+v,0) \leq 0$ *olmak üzere*

$$F(u,v,v,u,u+v,0) = u-\alpha v-\beta(u+v) \leq 0$$

dir. Buradan $h = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta} \in [0,1)$ *için* $u \le hv$ *elde edilmiş olur. Böylece* $f2$ *şartı sağlanmış olur.*
$\forall\, t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F\left(t,t,0,0,t,(n-1)\,t\right) &= t-\alpha t-\beta \max\left\{0,0,t,(n-1)\,t\right\} \\ &= t-\alpha t-\beta\,(n-1)\,t \\ &= t\left[1-\alpha-\beta\,(n-1)\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f3$ *şartı sağlanmış olur.*

Örnek 6.5 *F fonksiyonu* $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ *için* $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - a\max\{t_2,t_3,t_4,t_5,t_6\}$ *şeklinde tanımlansın. Bu taktirde* $F \in \mathfrak{F}$ *dur. Gerçekten;*

$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - a\max\{t_2,t_3,t_4,t_5,t_6\}$ *şeklinde olduğundan,*
Durum 1 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_2$*,*
Durum 2 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_3$*,*
Durum 3 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_4$*,*
Durum 4 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_5$*,*
Durum 5 : $F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_6$*,*
bu beş alt durum için $f1$ *şartının sağlandığı ayrı ayrı gösterilebilir.*
$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_2$ *için* $t_5 < t_5^{'}$ *ve* $t_6 < t_6^{'}$ *olmak üzere;*

$$\left.\begin{array}{l} F(t_1,\ldots,t_5,t_6) = t_1 - at_2 \\ F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'}) = t_1 - at_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow F(t_1,\ldots,t_5,t_6) = F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'})$$

olup $f1$ *şartı sağlanır. Benzer şekilde Durum 2, Durum 3 ve Durum 4 içinde* $f1$ *şartı sağlandığı kolaylıkla görülmektdir.*
$F(t_1,\ldots,t_6) = t_1 - at_5$ *için* $t_5 < t_5^{'}$ *ve* $t_6 < t_6^{'}$ *olmak üzere;*

$$\left.\begin{array}{l} F(t_1,\ldots,t_5,t_6) = t_1 - at_5 \\ F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'}) = t_1 - at_5^{'} \end{array}\right\} \Longrightarrow F(t_1,\ldots,t_5,t_6) \ge F(t_1,\ldots,t_5^{'},t_6^{'})$$

olup $f1$ *şartı sağlanır. Benzer şekilde Durum 5 içinde gösterilebilir.*

$\forall u,v \ge 0$ *ve* $F(u,v,v,u,u+v,0) \le 0$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} F(u,v,v,u,u+v,0) &= u - a\max\{v,v,u,u+v,0\} \le 0 \\ &= u - a\,(u+v) \le 0 \end{aligned}$$

olup, buradan $u \le \dfrac{a}{1-a}v$ *elde edilir.* $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ *olduğundan* $h = \dfrac{a}{1-a} < 1$ *elde edilir. Böylece* $f2$ *şartı sağlanmış olur.*

$\forall\, t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F\left(t,t,0,0,t,(n-1)\,t\right) &= t - a\max\left\{t,0,0,t,(n-1)\,t\right\} \\ &= t - a\,(n-1)\,t \\ &= t\left[1 - a\,(n-1)\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f3$ şartı sağlanmış olur.

Örnek 6.6 *F fonksiyonu $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$, $\alpha+\beta+2\gamma < 1$ ve $\alpha+\gamma n < 1$ olmak üzere $F\left(t_1,\ldots,t_6\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma\max\left\{2t_4, t_5+t_6\right\}$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $F \in \mathfrak{F}$ dur. Gerçekten;*

$F\left(t_1,\ldots,t_6\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma\max\left\{2t_4, t_5+t_6\right\}$ şeklinde olduğundan,
Durum 1 : $F\left(t_1,\ldots,t_6\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - 2\gamma t_4$,
Durum 2 : $F\left(t_1,\ldots,t_6\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma\left(t_5+t_6\right)$,
durumları söz konusu olup, Durum 1 için $f1$ şartının sağlandığı çok açıktır. Durum 2 için;.
$F\left(t_1,\ldots,t_6\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma t_5$ için $t_5 < t_5^{\shortmid}$ ve $t_6 < t_6^{\shortmid}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} F\left(t_1,\ldots,t_5,t_6\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma\left(t_5+t_6\right) \\ F\left(t_1,\ldots,t_5^{\shortmid},t_6^{\shortmid}\right) = t_1 - \alpha t_2 - \beta t_3 - \gamma\left(t_5^{\shortmid}+t_6^{\shortmid}\right) \end{aligned}$$

dir. Buradan $F\left(t_1,\ldots,t_5,t_6\right) \geq F\left(t_1,\ldots,t_5^{\shortmid},t_6^{\shortmid}\right)$ olup $f1$ şartı sağlanır.

$\forall u,v \geq 0$ ve $F\left(u,v,v,u,u+v,0\right) \leq 0$ olmak üzere

$$F\left(u,v,v,u,u+v,0\right) = u - \alpha v - \beta v - \gamma\max\left\{2u, u+v+0\right\}$$

dir. Buradan $F\left(u,v,v,u,u+v,0\right) = u - \alpha v - \beta v - \gamma 2u \leq 0$ ise, $h = \dfrac{\alpha+\beta}{1-2\gamma} \in [0,1)$ olmak üzere $u \leq hv$ elde edilmiş olur. Böylece $f2$ şartı sağlanmış olur. Benzer şekilde, eğer $F\left(u,v,v,u,u+v,0\right) = u - \alpha v - \beta v - \gamma\left(u+v\right) \leq 0$ ise, $h = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\gamma} \in [0,1)$ olmak üzere $u \leq hv$ elde edilmiş olur. Böylece $f2$ şartı sağlanmış olur.

$\forall\, t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} F\left(t,t,0,0,t,(n-1)\,t\right) &= t - \alpha t - \beta 0 - \gamma\max\left\{2.0, t+(n-1)\,t\right\} \\ &= t - \alpha t - n\gamma t \\ &= t\left[1 - \alpha - \gamma n\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f3$ şartı sağlanmış olur.

Teorem 6.11 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay ve F fonksiyonuda $f1-f3$ özelliklerini sağlamak üzere, $\forall x, y \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü*

$$F\left(G_n\left(Tx;\mathbf{Ty}\right), G_n\left(x;\mathbf{y}\right), G_n\left(x;\mathbf{Tx}\right), G_n\left(y;\mathbf{Ty}\right), G_n\left(x;\mathbf{Ty}\right), G_n\left(y;\mathbf{Tx}\right)\right) \leq 0 \quad (6.23)$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün en çok bir sabit noktası vardır.

İspat *T dönüşümünün birbirinden farklı u ve v gibi en az iki sabit noktası olsun. (6.23) eşitsizliğinden*

$$F\left(G_n\left(Tu;\mathbf{Tv}\right), G_n\left(u;\mathbf{v}\right), G_n\left(u;\mathbf{T}u\right), G_n\left(v;\mathbf{Tv}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tv}\right), G_n\left(v;\mathbf{T}u\right)\right) \leq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik u ve v sabit noktalar olduğu için

$$F\left(G_n\left(u;\mathbf{v}\right), G_n\left(u;\mathbf{v}\right), 0, 0, G_n\left(u;\mathbf{v}\right), G_n\left(v;u\right)\right) \leq 0$$

şekline indirgenir. Ayrıca $G_n\left(v;u\right) \leq (n-1)\,G_n\left(u;\mathbf{v}\right)$ olup, F fonksiyonu $f1$ şartını sağladığından

$$F\left(G_n\left(u;\mathbf{v}\right), G_n\left(u;\mathbf{v}\right), 0, 0, G_n\left(u;\mathbf{v}\right), (n-1)\,G_n\left(u;\mathbf{v}\right)\right) \leq 0$$

elde edilir. $G_n\left(u;\mathbf{v}\right) = t$ denirse, $F\left(t, t, 0, 0, t, (n-1)\,t\right) \leq 0$ bulunur ki bu F fonksiyonunun $f3$ şartını sağlaması ile çelişir. Sonuç olarak varsayım yanlış olup, T dönüşümünün en çok bir sabit noktası vardır.

Teorem 6.12 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay ve $F \in \mathfrak{F}$ üzere, $\forall x, y \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü*

$$F\left(G_n\left(Tx;\mathbf{Ty}\right), G_n\left(x;\mathbf{y}\right), G_n\left(x;\mathbf{Tx}\right), G_n\left(y;\mathbf{Ty}\right), G_n\left(x;\mathbf{Ty}\right), G_n\left(y;\mathbf{Tx}\right)\right) \leq 0 \quad (6.23)$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat *Keyfi bir $x_0 \in X$ için $x_p = Tx_{p-1} = T^p x_o$ olacak şekilde bir $\left(x_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. En az bir $p \in \mathbb{N}$ için $x_p = x_{p-1}$ ise $x_{p-1} \in X$ elemanı T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Her $p \in \mathbb{N}$ için $x_p \neq x_{p-1}$ olarak alınsın. Bu takdirde (6.23) şartından*

$$\begin{aligned} 0 \geq\ & F\left\{G_n\left(Tx_{p-1};\mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(x_{p-1};x_p\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{Tx_{p-1}}\right),\right. \\ & \left., G_n\left(x_p;\mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{Tx_{p-1}}\right)\right\} \\ & = F\left(G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_{p-1};x_p\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_{p+1}}\right), 0\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $G_n 4$ *aksiyomundan* $G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_{p+1}}\right) \leq G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)+G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)$ *olduğundan ve* F *fonksiyonu* $f1$ *şartını sağladığından bir üsteki eşitsizlik*

$$\begin{aligned} 0 &\geq F\left(G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_{p-1};x_p\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_{p+1}}\right), 0\right) \\ &\geq F\left(\begin{array}{c} G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_{p-1};x_p\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right), \\ , G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)+G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

şekline indirgenir. Buradan $f2$ *şartı gereği* $G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right) \leq hG_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right)$ *olacak şekilde bir* $h \in [0,1)$ *vardır. Bu son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right) \leq hG_n\left(x_{p-1};\mathbf{x_p}\right) \leq \cdots \leq h^p G_n\left(x_0;\mathbf{x_1}\right)$$

bulunur. Benzer yineleme ile $r > p$ *özelliğindeki keyfi* $r, p \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned} G_n\left(x_p;\mathbf{x_r}\right) &\leq G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right)+\cdots+G_n\left(x_{r-1};\mathbf{x_r}\right) \quad \because \textit{Yardımcı Teorem 5.4 - 9 dan} \\ &\leq \left[h^p+\cdots+h^{r-1}\right] G_n\left(x_0;\mathbf{Tx_o}\right) \\ &\leq \frac{h^p}{1-h} G_n\left(x_0;\mathbf{Tx_o}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $p \to \infty$ *için limiti alınırsa,* $h \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n\left(x_p;\mathbf{x_r}\right) \to 0$ *elde edilir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 5.10 gereği* $\left(x_p = T^p x_o\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *dizisi bir* G_n-*Cauchy dizisidir.* (X, G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olduğundan* $(x_p) \to u$ *olacak şekilde bir* $u \in X$ *vardır. Yani* $\lim\limits_{p\to\infty} G_n\left(x_p;\mathbf{u}\right) = 0$ *dır.*

İddia : $Tu = u$ *dur. Yani* u*,* T *dönüşümünün bir sabit noktasıdır.*
$Tu \neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.23) eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} 0 &\geq F\left(G_n\left(Tx_p;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{u}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{Tx_p}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tx_p}\right)\right) \\ &= F\left(G_n\left(x_{p+1};\mathbf{Tu}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{u}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{x_{p+1}}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(x_p;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(u;\mathbf{x_{p+1}}\right)\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. F *ve* G_n *sürekli fonksiyonlar oldukları dikkate alınarak, bu son eşitsizlikte* $p \to \infty$ *için limiti alınırsa*

$$\begin{aligned} 0 &\geq F\left(G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(u;\mathbf{u}\right), G_n\left(u;\mathbf{u}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(u;\mathbf{u}\right)\right) \\ &= F\left(G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), 0, 0, G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right), 0\right) \end{aligned}$$

sonucu.elde edilir. Buradan F *fonksiyonu* $f2$ *şartını sağladığından* $h \in [0,1)$ *için* $G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right) \leq h0 = 0$ *bulunur ki bu da* $G_n\left(u;\mathbf{Tu}\right) = 0$ *yani* $u = Tu$ *demektir. Böylece varsayım ile çelişir, sonuç olarak* u*,* T *dönüşümünün tek sabit noktasıdır.*

Bundan sonraki kısımda Teorem 6.12 nin ışığında yukarıdaki örnekler kullanılarak 6.1 bölümünde verilen sabit nokta teoremlerinin ispatları oldukça kısa bir şekilde verilecektir.

Teorem 6.13 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a\left[\sum_{i=1}^{n} G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_i}\right)\right] \tag{6.2}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.2) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a\left[G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right) + (n-1)\, G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right]$$

elde edilir. Örnek 6.1 de $\alpha = 0$, $\beta = a$, $\gamma = 0$ için ve Teorem 6.12 nin ışığında, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.14 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $\left(a + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right) \in [0, 1)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq aG_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_i}\right) \tag{6.4}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat *(6.4) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq aG_n\left(x; \mathbf{y}\right) + b_1 G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right) + \left(b_2 + \cdots + b_n\right) G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)$$

elde edilir. Örnek 6.2 te $\alpha = a$, $\beta = b_1$, $\gamma = b_2 + \cdots + b_n$, $\lambda = 0$ için ve Teorem 6.12 nin ışığında, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.15 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in [0, 1)$ olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max_{1 \leq i \leq n} \left\{G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_i}\right)\right\} \tag{6.7}$$

eşitsizlikğini (şartlarını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.7) eşitsizliğinden,* $\forall x, y \in X$ *için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

elde edilir. Örnek 6.3 te $\alpha = 0,\ \beta = a$, $\gamma = 0$ *ve Teorem 6.12 nin ışığında,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 6.16 (X, G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olsun.* $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için* $T : X \to X$ *dönüşümü* $(a + b) \in [0, 1)$ *olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq aG_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + b \max_{1 \leq i \leq n}\left\{G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_i}\right)\right\} \tag{6.10}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

İspat *(6.10) eşitsizliğinden,* $\forall x, y \in X$ *için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq aG_n\left(x; \mathbf{y}\right) + b \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

elde edilir. Örnek 6.3 te $\alpha = a,\ \beta = b$, $\gamma = 0$ *ve Teorem 6.12 nin ışığında,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 6.17 (X, G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olsun.* $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için* $T : X \to X$ *dönüşümü* $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ *olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max\left\{\begin{array}{c} G_n\left(x_1; \mathbf{Tx_1}\right), G_n\left(x_1; \mathbf{Tx_2}\right), \ldots, G_n\left(x_1; \mathbf{Tx_n}\right), \\ G_n\left(x_2; \mathbf{Tx_1}\right), G_n\left(x_2; \mathbf{Tx_2}\right), \ldots, G_n\left(x_2; \mathbf{Tx_n}\right), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_1}\right), G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_2}\right), \ldots, G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_n}\right) \end{array}\right\} \tag{6.13}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada* G_n-*süreklidir.*

İspat *(6.13) eşitsizliğinden,* $\forall x, y \in X$ *için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right), G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

elde edilir. Örnek 6.4 te $\alpha = 0,\ \beta = a$ *için ve Teorem 6.12 nin ışığında,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 6.18 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in [0, 1)$ olmak üzere;*

$$G_n(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) \leq a \max \left\{ \begin{array}{c} G_n(x_1; \mathbf{Tx_2}), G_n(x_1; \mathbf{Tx_3}), \ldots, G_n(x_1; \mathbf{Tx_n}), \\ G_n(x_2; \mathbf{Tx_1}), G_n(x_2; \mathbf{Tx_3}), \ldots, G_n(x_2; \mathbf{Tx_n}), \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ G_n(x_n; \mathbf{Tx_1}), G_n(x_n; \mathbf{Tx_2}), \ldots, G_n\left(x_n; \mathbf{Tx_{n-1}}\right) \end{array} \right\} \tag{6.16}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.16) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n(Tx; \mathbf{Ty}) \leq a \max \{G_n(x; \mathbf{Ty}), G_n(y; \mathbf{Tx})\}$$

elde edilir. Örnek 6.3 te $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = a$ için ve Teorem 6.12 nin ışığında, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.19 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) \leq a \max_{1 \leq i \leq n} \left\{G_n(x_1, \ldots, x_n), G_n(x_i; \mathbf{Tx_i}), G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_{i+1}}\right)\right\} \tag{6.17}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın (burada $i = n$ için $x_{n+1} = x_1$). Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat *(6.17) eşitsizliğinden, $\forall x, y \in X$ için*

$$G_n(Tx; \mathbf{Ty}) \leq a \max \{G_n(x; \mathbf{y}), G_n(x; \mathbf{Tx}), G_n(y; \mathbf{Ty}), G_n(x; \mathbf{Ty}), G_n(y; \mathbf{Tx})\}$$

elde edilir. Örnek 6.5 ve Teorem 6.12 ışığında, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.20 *(X, G_n) bir G_n-tam metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere;*

$$G_n(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n) \leq a \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i \in \{\{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}\}}^{n} G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_j}\right) \right\} \tag{6.19}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın. Bu takdirde T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada G_n-süreklidir.

İspat *(6.19) eşitsizliğinden,* $\forall x, y \in X$ *için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

elde edilir. Örnek 6.3 te $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = a$ *için ve Teorem 6.12 nin ışığında,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

Teorem 6.21 (X, G_n) *bir* G_n-*tam metrik uzay olsun.* $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *için* $T : X \to X$ *dönüşümü* $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere;*

$$G_n\left(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n\right) \leq a \max_{1 \leq i \leq n}\left\{G_n\left(x_i; \mathbf{Tx_{i+1}}\right) + G_n\left(x_{i+1}; \mathbf{Tx_i}\right)\right\} \tag{6.21}$$

eşitsizliğini (şartını) sağlasın (burada $i = n$ *için* $x_{n+1} = x_1$ *). Bu takdirde* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit noktada* G_n-*süreklidir.*

İspat *(6.21) eşitsizliğinden,* $x \neq y$ *olmak üzere* $\forall x, y \in X$ *için*

$$G_n\left(Tx; \mathbf{Ty}\right) \leq a \max\left\{G_n\left(x; \mathbf{Ty}\right) + G_n\left(y; \mathbf{Tx}\right), 2G_n\left(y; \mathbf{Ty}\right)\right\}$$

elde edilir. Örnek 6.6 da $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = a$ *için ve Teorem 6.12 nin ışığında,* T *dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.*

6.3 G_n-Metrik Uzaylarda P Özelliği

Tanım 6.2 *Bir* (X, d) *metrik uzayda* $T : X \to X$ *dönüşümünün boştan farklı sabit noktalarının kümesi*

$$Fix\left(T\right) := \left\{p \in X : T\left(p\right) = p\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Her $k \in \mathbb{N}$ *için,* $Fix\left(T\right) = Fix\left(T^k\right)$ *olması durumuna* T *dönüşümün* P *özelliği denir (Chugh vd., 2010).*

Bu bölümde 6.1 bölümünde verilen T dönüşümlerinin P özelliğine sahip oldukları gösterilecektir.

Teorem 6.22 *Teorem 6.2 deki (6.2) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.2 den* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix\left(T^k\right) \neq \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix\left(T^k\right)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix\left(T\right)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T\left(p\right)$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.2) şartından*

$$\begin{aligned} G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right) &= G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\left[G_n\left(T^{k-1}p; \mathbf{T^k p}\right) + (n-1)\, G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right)\right] \end{aligned}$$

olup, buradan

$$G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \frac{a}{1 - a\,(n-1)} G_n\left(T^{k-1}p; \mathbf{T^k p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \dfrac{a}{1 - a\,(n-1)}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right) = G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \lambda^p G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right)$$

dir. $\lambda \in [0, 1)$ *olduğundan* $G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix\left(T\right)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Teorem 6.23 *Teorem 6.3 deki (6.4) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.3 den* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix\left(T^k\right) \neq \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix\left(T^k\right)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix\left(T\right)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T\left(p\right)$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.4) şartından*

$$\begin{aligned} G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right) &= G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq aG_n\left(T^{k-1}p; \mathbf{T^k p}\right) + b_1 G_n\left(T^{k-1}p; \mathbf{T^k p}\right) + \sum_{i=2}^{n} b_i G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \frac{a + b_1}{1 - \sum\limits_{i=2}^{n} b_i} G_n\left(T^{k-1}p; \mathbf{T^k p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \dfrac{a + b_1}{1 - \sum\limits_{i=2}^{n} b_i}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right) = G_n\left(T^k p; \mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \lambda^p G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right)$$

dir. $\lambda \in [0, 1)$ *olduğundan* $G_n\left(p; \mathbf{Tp}\right) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix\left(T\right)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Teorem 6.24 *Teorem 6.4 deki (6.7) koşulu altında, T dönüşümü P özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.4 den T dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $Fix\left(T^k\right) \neq \emptyset$ dır. $k > 1$ ve keyfi $p \in Fix\left(T^k\right)$ olsun. Bu takdirde $p \in Fix\left(T\right)$ olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T\left(p\right)$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.7) şartından

$$\begin{aligned} G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right) &= G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \quad \because a \in [0,1) \\ &= aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa

$$G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq a^pG_n\left(p;\mathbf{Tp}\right)$$

dir. $a \in [0,1)$ olduğundan $G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right) = 0$ bulunur. Bu ise $p = Tp$ demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece $p \in Fix\left(T\right)$ dir. Sonuç olarak T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Teorem 6.25 *Teorem 6.5 deki (6.10) koşulu altında, T dönüşümü P özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.5 den T dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $Fix\left(T^k\right) \neq \emptyset$ dır. $k > 1$ ve keyfi $p \in Fix\left(T^k\right)$ olsun. Bu takdirde $p \in Fix\left(T\right)$ olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T\left(p\right)$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.10) şartından

$$\begin{aligned} G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right) &= G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) + b\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \end{aligned}$$

dir. Burada iki durum söz konusudur;

Durum 1 : $G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) < G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ ise

$$G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) + bG_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \frac{a}{1-b}G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

bulunur. Bu eşitsizlik Durum 1 deki kabul ile birleştirilirse

$$G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) < G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \le \frac{a}{1-b}G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

elde edilir. Ancak $\dfrac{a}{1-b} \in [0,1)$ *olması nedeniyle bu eşitsizlik tutarsız olup Durum 1 deki kabul doğru değildir.*

Durum 2 : $G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) \ge G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ *ise*

$$G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \le (a+b)\,G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

elde edilir. $\lambda = a+b$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \le \lambda^p G_n(p;\mathbf{Tp})$$

dir. $\lambda \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n(p;\mathbf{Tp}) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix(T)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Teorem 6.26 *Teorem 6.6 deki (6.13) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.4 den* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix\left(T^k\right) \ne \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix\left(T^k\right)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix(T)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \ne T(p)$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.13) şartından*

$$\begin{aligned} G_n(p;\mathbf{Tp}) &= G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\le a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^kp}\right)\right\} \\ &= a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada üç durum söz konusudur;

Durum 1 :

$$\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

ise $G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \le aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$ *eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \le a^p G_n(p;\mathbf{Tp})$$

dir. $a \in [0,1/2)$ *olduğundan* $G_n(p;\mathbf{Tp}) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix(T)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Durum 2 :

$$\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$$

ise $G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ *eşitsizliği elde edilir.* G_n4 *aksiyomundan*

$$\begin{aligned} G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) &\leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\left[G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)+G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \frac{a}{1-a}G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \dfrac{a}{1-a}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \lambda^p G_n(p;\mathbf{Tp})$$

dir. $\lambda \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n(p;\mathbf{Tp}) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix(T)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Durum 3 :

$$\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right), G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$$

ise $G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ *eşitsizliği elde edilir. Ancak* $a \in [0,1/2)$ *olduğundan böyle bir durum söz konusu değildir.*

Sonuç olarak tüm durumlardan T *dönüşümünün* P *özelliğine sahip olduğu gösterilmiş oldu.*

Teorem 6.27 *Teorem 6.7 deki (6.16) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.7 den* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix\left(T^k\right) \neq \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix\left(T^k\right)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix(T)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T(p)$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.16) şartından*

$$\begin{aligned} G_n(p;\mathbf{Tp}) &= G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), G_n\left(T^kp;\mathbf{T^kp}\right)\right\} \\ &= aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^kp}\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa

$$G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^kp;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq a^p G_n(p;\mathbf{Tp})$$

dir. $a \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n(p;\mathbf{Tp}) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix(T)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Teorem 6.28 *Teorem 6.8 deki (6.17) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.8 den* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix(T^k) \neq \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix(T^k)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix(T)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T(p)$ *olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.17) şartından*

$$\begin{aligned} G_n(p;\mathbf{Tp}) &= G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right), G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \end{aligned}$$

dir. Burada iki durum söz konusudur;

Durum 1 : $\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right), G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right)$ *ise*

$$G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa

$$G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq a^p G_n(p;\mathbf{Tp})$$

dir. $a \in [0,1/2)$ *olduğundan* $G_n(p;\mathbf{Tp}) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix(T)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Durum 2 : $\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right), G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ *ise*

$$G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq aG_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$$

elde edilir. Ancak $a \in [0,1/2)$ *olduğundan Durum 2 mümkün değildir.*

Teorem 6.29 *Teorem 6.9 daki (6.19) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.9 dan* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix(T^k) \neq \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix(T^k)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix(T)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T(p)$ olduğu varsayılsın.Bu takdirde (6.19) şartından

$$\begin{aligned} G_n(p;\mathbf{Tp}) &= G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\max\left\{G_n\left(T^k p;\mathbf{T^k p}\right), G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \\ &= aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \qquad \because G_n 4 \textit{ aksiyomundan} \\ &\leq a\left[G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right) + G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \frac{a}{1-a} G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \dfrac{a}{1-a}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n(p;\mathbf{Tp}) = G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \lambda^p G_n(p;\mathbf{Tp})$$

dir. $\lambda \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n(p;\mathbf{Tp}) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix(T)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Teorem 6.30 *Teorem 6.10 daki (6.21) koşulu altında,* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

İspat *Teorem 6.10 dan* T *dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Böylece her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $Fix\left(T^k\right) \neq \emptyset$ *dır.* $k > 1$ *ve keyfi* $p \in Fix\left(T^k\right)$ *olsun. Bu takdirde* $p \in Fix(T)$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \neq T(p)$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde (6.21) şartından

$$\begin{aligned} G_n(p;\mathbf{Tp}) &= G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) + G_n\left(T^k p;\mathbf{T^k p}\right), 2G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \\ &= a\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), 2G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} \end{aligned}$$

dir. Burada iki durum söz konusudur;

Durum 1 : $\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), 2G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ *ise*

$$\begin{aligned} G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) &\leq aG_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \\ &\leq a\left[G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right) + G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right] \quad \because G_n 4 \textit{ aksiyomundan} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \frac{a}{1-a} G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^k p}\right)$$

elde edilir. $\lambda = \dfrac{a}{1-a}$ *olmak üzere, son eşitsizlik yinelenerek tekrarlanırsa*

$$G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right) = G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq \lambda^p G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right)$$

dir. $\lambda \in [0,1)$ *olduğundan* $G_n\left(p;\mathbf{Tp}\right) = 0$ *bulunur. Bu ise* $p = Tp$ *demek olup, varsayım ile çelişkidir. Böylece* $p \in Fix\left(T\right)$ *dir. Sonuç olarak* T *dönüşümü* P *özelliğine sahiptir.*

Durum 2 : $\max\left\{G_n\left(T^{k-1}p;\mathbf{T^{k+1}p}\right), 2G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)\right\} = 2G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$ *ise*

$$G_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right) \leq 2aG_n\left(T^k p;\mathbf{T^{k+1}p}\right)$$

bulunur. Ancak $a \in [0,1/2)$ *olduğundan Durum 2 mümkün değildir.*

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada alışılmış metrik uzayların literatürdeki son genellemelerinden biri olan G_n-metrik uzay tanıtılmış ve $G-$metrik uzayda bilinen bazı sabit nokta teoremleri G_n-metrik uzayda genellenmiştir. Bu genelleştirilmiş teoremlerin alışılmış metrik uzaydan elde edilip-edilemeyeceği ayrımına gidilmiş, eğer alışılmış metrik uzaydan elde edilemiyorsa G_n-metriğinin teknik özellikleri kullanılarak klasik yöntemle (Picard iterasyonu) ispatlar yapılmıştır. Bu ispatların aşırı uzun ve sıkıcı olmasından dolayı kapalı bağıntı (implicit relation) kavramından yararlanarakta ispatlar oldukça basit ve şık halde de verilebileceği gösterilmiştir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerine çalışmanın önemini gösteren motive edici çok fazla çalışma yoktur. Teoride genellemeler derin bir anlayışa yaklaştırırlarsa harika araçlardır. Bu anlamda, genelleştirilmiş metrik uzaylarda verilen sabit nokta teorileri eğer alışılmış metrik uzaydan elde edilebiliyorsa, başka bir deyişle genelleştirilmiş metrik uzaydan alışılmış metrik uzaya indirgeme yapılarak bu teoremler ispatlanabiliyorsa bu teoremler orjinal, yeni ve özgün olmayacaktır. Bu çalışmada alışılmış metrik uzayların son genellemelerinden biri olan $G-$metrik uzayda bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin G_n-metrik uzayda genellemeleri yapılırken, bu genellediğimiz teoremlerin orjinalliği ve özgünlüğü $\left(X, d^S\right)$ alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılarak test edilmiştir. İndirgeme yapılamadığı durumlarda G_n-metriğinin teknik özelliklerinin kullanılması teoremlerin özgünlüğü hakkında bilgi vermiştir. Ancak burada unutulmamalıdır ki $\left(X, d^S\right)$ alışılmış metrik uzayına indirgeme yapılamaması başka alışılmış metrik uzaylara indirgeme yapılamayacağı anlamı taşımaz. Bu durumda farklı alışılmış metrik uzayların kullanılarak yeni çalışmalar yapılması önerilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbas M., Ali B. and Suleiman Y. I., 2015, Generalized coupled common fixed point results in partially ordered A-metric spaces. Fixed Point Theory and Applications., 2015:64, DOI: 10.1186/s13663-015-0309-2.

Agarwal R.P., Karapınar E., O'Regan D., Francisco A., 2015, Fixed Point Theory In Metric Type Space, Springer.

An, T.V., Dung, N.V., Hang, V.T.L, 2013, A new approach to xed point theorems on $G-$metric spaces, Topology and its Applications 160(2013), 1486-1493.

Banach, S., 1922, Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3: 133-181.

Bianchini, R.M.T., 1972, Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, vol. 5, no. 4, pp. 103-108.

Chatterjea, S. K., 1972, Fixed point theorem, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25, 727 –730.

Choi, H., Kim, S., Yang, S.,Y., 2018, Structure for $g-$Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems, arXiv:1804.03651.

Chugh, R., Kadian, T., Rani, A., Rhoades, B.E., 2010, Property P in $G-$Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. 2010, 12pp.

Ciric, L.B., 1974, A generalization of Banach' s contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 267-273.MR 50, 8484.

Dhage, B.C., 1984, A study of some fixed point theorem, Ph.D. Thesis. Marathwada Univ. Aurangabad.

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22, 1–74.

Fréchet, M., 1926, Les espaces abstrait topologiquement affine, Acta Math., 47: 25-52.

Gähler, S., 1963, 2-Metriche raume und ihre topologische strukture. Math. Nachr. 26, 115–148.

George, R., Radenovic, S., Reshma, K. P., Shukla, S., 2015, Rectangular b-metric spaces and contraction principle, J. Nonlinear Sci. Appl., Vol. 8, 1005-1013.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ha, K. S., Cho, Y. J., 1988, White, A., Strictly convex and 2-convex 2-normed spaces, Math.Japonica, 33, No.3, 375-384.

Kannan, R., 1969, Some results on fixed points II, Am. Math. Mon., 76, 405 –408.

Khan, K. A., 2014, Generalized $n-$metric spaces and fixed point theorems, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 15, 6 Pages,1221-1229.

Mustafa, Z., Sims, B., 2003, Some remarks concerning D-metric spaces, Proc. Int. Conf. on Fixed Point Theory and Appl., Valencia (Spain), July, 189-198.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 7(2), 289–297.

Mustafa, Z., Obiedat, H., Awawdeh, F., 2008, Some Fixed Point Theorem for Mapping on Complete G-Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. 2008(2008),12pp.

Mustafa, Z., Sims, B., 2009, Fixed Point Theorems for Contractive Mappings in Complete G-Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009(2009),10pp.

Mustafa, Z., Obiedat, H., 2010, A Fixed Point Theorem of Reich in $G-$Metric Spaces, Cubo 12(1), 83-93.

Mustafa, Z., Khandagji, M., Shatanawi, W., 2011, Fixed point result on complete G-metric spaces, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, Volume 48, Issue 3, 304-319.

Popa, V., Patriciu, A.M., 2013, Fixed-Point Results on Complete $G-$Metric Spaces for Mappings Satisfying an Implicit relation of New Type, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 65, No. 6.

Reich, S., 1971, Some remarks concerning contraction mappings, Oanad. Math. Bull., 14, 121-124.

Rhoades, B. E., 1977, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257 – 290.

Roldán, A., Karapınar, E., and Kumam, P., 2014, $G-$Metric spaces in any number of arguments and related fixed-point theorems, Fixed Point Theory and Applications, 2014:13.

Sakarya, C., 2016, On Generalized Metric Spaces, Master Thesis, Yaşar Üniversitesi.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sedghi, S., Shobe, N. and Aliouche, A., 2012, A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces, Mat. Vesnik, 64 (3), 258 – 266.

Vats, R.K., Kumar, S., and Sihag, V., 2011, Fixed point theorems in complete $G-$metric space, Fasciculi Math. 47, 127-139.