Değişmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri ve Kategoriksel Denk Yapılar

Abdullah Çelik

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık 2020

Crossed Modules of Commutative Algebras and Categorical Equivalent Structures

Abdullah Çelik

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

December 2020

Değişmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri ve Kategoriksel Denk Yapılar

Abdullah Çelik

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İ. İlker Akça

Aralık 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İ. İlker Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Değişmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri ve Kategoriksel Denk Yapılar**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 23/11/2020

Abdullah Çelik

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde tezin amacı açıklanmıştır,ikinci bölümünde tez içerisinde sıklıkla kullanılan kavramlar yer almaktadır. Bu kavramlar bilinen kavramlar olup değişmeli cebirler üzerinde tanımlanmış olan çaprazlanmış modülleri, çaprazlanmış modül örneklerini, simplisel cebirleri ve temel kategori bilgilerini içermektedir. Üçüncü bölümde, değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel cebirlerin kategorisi arasındaki denklik incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde ele alınan denkliği veren funktorlar kullanılarak, çaprazlanmış modül homotopisi ile simplisel homotopi arasındaki ilişki verilmiştir. Son iki bölümde ise bulgular ve tartışma, sonuç ve öneriler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Simplisel Cebir, Çaprazlanmış Modül, Kategoriksel Denklik

SUMMARY

This thesis consists of six chapters. The aim of the thesis is given in the first part of the thesis. Frequently used in the thesis in the second part of the thesis concepts are included. These concepts are known concepts and include crossed modules defined on commutative algebras, crossed module examples, simplical algebras and basic category information. In the third part, on commutative algebras The equivalence between the category of crossed modules and the category of simplical algebras of length 1 of the Moore complex is examined. In the fourth chapter, the relationship between the crossed module homotopy and the simplical homotopy is given by using the functors giving the equivalence discussed in the third chapter. In the two last sections, findings and discussion, result and recommendations are discussed.

Keywords: Simplical Algebra, Crossed Module, Categorical Equivalence

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Cebirsel topolojide bir takım topoloji problemlerine cebirsel yollarla çözümler aranır. Bunun için en kullanışlı araç topolojik uzaylar için bulunan temel grup kavramıdır. Uzayların temel gruplarını hesaplayabilmek için birçok yol mevcuttur. Bunlardan bazıları, Van-Kampen Teoremi ve örtü uzayları teorisidir. Whitehead, temel gruplar üzerine yaptığı bir araştırma esnasında, bir uzayın 2.mertebeden relatif homotopi grubundan uzayın temel grubuna sınır dönüşümü için bir çok özelliğin sağlandığını elde etmiştir. Daha sonraki süreçte bu önemli olduğu anlaşılan sınır dönüşümü özel olarak çaprazlanmış modül olarak isimlendirilmiştir. Çaprazlanmış modüller, grup temsil teorisi, Kombinatöryel grup teori, cebirsel K-teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji teorisi, devirli homoloji ve diferensiyel geometri gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Simplisel Grup ise ilk kez Dold Kan çalışmıştır ve bir çok önemli özellik elde etmiştir. Bunlardan bazıları şunlardır: Simplisel objeler iyi bir biçimde yapılandırılmış olan bir homotopi teoriye sahiptir, simplisel objeler bağlantılı uzayların tüm homotopi tiplerini modellerler, düşük boyutlarda bazı hesaplamaların yapılması mümkündür. Sonraki çalışmalarda T.Porter, Z.Arvasi vb. değişmeli cebirler üzerinde simplisel cebir yapısını tanımlamış ve bir çok özeliğini incelemişlerdir.

Bu çalışmanın amacı literatürde yer alan yani iyi bilinen bir özelliği açık olarak incelemektir. “Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel cebirlerin kategorisi ile değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi, kategoriksel olarak denktir”. Ayrıca bu denklik kullanılarak literatürde yer almayan özelliklerin araştırlıması da amaçlanmaktadır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

2.1 Temel Kavramlar

Bu tezde genel olarak M.Andre (Andre, 1974), Z.Arvasi (Arvasi, 1994), Z.Arvasi ve T. Porter (Arvasi ve Porter, 1998), Z. Arvasi ve T. Porter (Arvasi ve Porter, 1996), Z. Arvasi (Arvasi, 1997), R. Brown ve N.D. Gilbert (Brown ve Gilbert, 1989), R. Brown ve P.J. Higgins (Brown ve Higgins, 1981), P. Carrasco (Carrasco, 1987) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 1. *R bir halka ve M bir toplamsal abelyen grup olsun. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için*

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r, m) & \longmapsto & rm \end{array}$$

çarpımı

$$\begin{array}{rcl} r(m_1 + m_2) & = & rm_1 + rm_2 \\ (r_1 + r_2)m & = & r_1 m + r_2 m \\ (r_1 r_2)m & = & r_1(r_2 m) \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa M ye bir sol R-modül denir. Çarpım

$$\begin{array}{ccc} M \times R & \longrightarrow & M \\ (m, r) & \mapsto & mr \end{array}$$

şeklinde sağdan tanımlı ise M bir sağ $R-$modül yapısı oluşturur.

Örnek 1. *R bir halka olmak üzere herhangi bir A abelyen grubu $r \in R$ ve $a \in A$ için*

$$\begin{array}{ccc} R \times A & \longrightarrow & A \\ (r, a) & \longmapsto & ra = 0 \end{array}$$

tanımlaması ile bir $R - \text{modül}$ yapısı oluşturur.

Tanım 2. *R ve S iki halka olsun. Bir M abelyen grubu hem sol $R-$modül hem de sağ $S-$modül ve her $r \in R, m \in M, s \in S$ için*

$$r(ms) = (rm)s$$

özelliğini sağlıyor ise M ye $(R - S)$ - bimodül denir ve ${}_R M_S$ olarak gösterilir.

Tanım 3. *M ve N , iki $R-$ modül olsun.$f : M \longrightarrow N$ fonksiyonu, her $x, y \in M$ ve $r \in R$ için,*

$$\begin{array}{rcl} f(x + y) & = & f(x) + f(y) \\ f(rx) & = & rf(x) \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise $f : M \longrightarrow N$ ye bir $R-$ modül homomorfizmi denir.

Tanım 4. *M bir $R-$modül ve M', M nin bir altgrubu olsun. Eğer her $m' \in M'$ ve her $r \in R$ için $rm' \in M^{'}$ ise $M^{'}$ ye M nin bir altmodülü denir.*

Örnek 2. *$f : M \longrightarrow N$ bir $R-$ modül homomorfizmi olsun. Bu durumda*

$$Çekf = \{m \in M : f(m) = 0\}$$

M nin alt modülüdür. Çünkü , $Çekf$, M nin alt grubu ve $m \in M, r \in R$ için

$$f(rm) = rf(m) = r0 = 0$$

olduğundan $rm \in Çekf$ dir. Ayrıca,

$$f(M) = \{n \in N : n = f(m),\ m \in M\}$$

de N nin alt modülüdür. Çünkü $f(M)$, N nin alt grubu ve $n \in f(M)$, $r \in R$ için

$$nr = f(m)r = f(mr)$$

dir ve M bir $R-$modül olduğundan $mr \in M'$ dir. Dolayısıyla

$$nr \in f(M)$$

elde edilir. Buna göre $f(M)$ bir R-modüldür.

Tanım 5. *R bir değişmeli halka , A, B ve G birer $R-$ modül olmak üzere*

$$f : A \times B \longrightarrow G$$

fonksiyonu,

$$\begin{array}{rcl} f(a + a^{'}, b) & = & f(a, b) + f(a^{'}, b) \\ f(a, b + b^{'}) & = & f(a, b) + f(a, b^{'}) \\ rf(a, b) & = & f(ra, b) = f(a, rb) \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise f ye $R-$ bilineer fonksiyonu denir.

Tanım 6. **k** *bir değişmeli halka olsun. Bir M* **k**$-$ *cebiri (***k** *üzerinde bir M cebiri)*

$$\begin{array}{rcl} M \times M & \longrightarrow & M \\ (m_1, m_2) & \longmapsto & m_1 m_2 \end{array}$$

ve

$$(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir **k**$-$*modüldür. Eğer her $m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 = m_2 m_1$ ise M ' ye değişmeli cebir denir.*

Tanım 7. *R bir* **k**$-$ *cebir ise R üzerinde A cebiri*

$$\begin{array}{ccc} A\times A & \longrightarrow & A \\ (a,a_1) & \longmapsto & aa_1 \end{array}$$

ve

$$(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir $R-$ bimodüldür.

Tanım 8. *M ve R iki değişmeli* **k** *- cebir olmak üzere,*

$$\partial : M \longrightarrow R$$

dönüşümü için her $m, m^{'} \in M$ ve $k \in$ **k** *için*

$$\begin{array}{llcl} 1) & \partial(m+m^{'}) & = & \partial(m)+\partial(m^{'}) \\ 2) & \partial(km) & = & k\partial(m) \\ 3) & \partial(mm^{'}) & = & \partial(m)\partial(m^{'}) \end{array}$$

özellikleri sağlıyorsa ∂ dönüşümüne **k** *- cebir morfizmi denir.*

Tanım 9. *M ve R ,* **k** *- cebir olmak üzere*

$$\begin{array}{ccc} R\times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r.m \end{array}$$

dönüşümü her $k \in$ **k**, *$m, m^{'} \in M$, $r, r^{'} \in R$ için*

$$\begin{array}{llclcl} i) & k(r.m) & = & (kr).m & = & r.(km) \\ ii) & r.(m+m^{'}) & = & r.m+r.m^{'} & & \\ iii) & (r+r^{'}).m & = & r.m+r^{'}.m & & \\ iv) & r.(mm^{'}) & = & (r.m)m^{'} & = & m(r.m^{'}) \\ v) & (rr^{'}).m & = & r.(r^{'}.m) & & \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise bu dönüşüme bir sol etki (action) denir. $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r.m$ ile gösterilir. Benzer şekilde sağ etki de tanımlanır ve $m.r$ ile gösterilir.

Tanım 10. *M ve P iki cebir olsun ve P nin M üzerine etkisi tanımlı olsun.*

$$M\times P = \{(m,p)/m\in M, p\in P\}$$

üzerinde

$$\begin{array}{llcl} 1) & (m,p)+(m^{'},p^{'}) & = & (m+m^{'},p+p^{'}) \\ 2) & k.(m,p) & = & (km,kp) \\ 3) & (m,p).(m^{'},p^{'}) & = & (mm^{'},pp^{'}) \end{array}$$

işlemleri tanımlı ise $M \times P$ ye M ile P nin direkt çarpım cebiri denir.

$$P \ltimes M = \{(p,m)/p \in P, m \in M\}$$

üzerinde

$$\begin{array}{lll} 1)\ (p,m)+(p^{'},m^{'}) & = & (p+p^{'},m+m^{'}) \\ 2)\ k.(p,m) & = & (kp,km) \\ 3)\ (p,m).(p^{'},m^{'}) & = & (pp^{'},p.m^{'}+p^{'}.m+mm^{'}) \end{array}$$

işlemleri tanımlanmışsa $P \ltimes M$ ye P ile M nin yarı - direkt çarpım cebiri denir ve M ve P değişmeli ise $P \ltimes M$ de bir değişmeli cebirdir.

Tanım 11. *R birimli bir* **k** *- cebir olsun. $\partial : C \longrightarrow R$ bir $R-$ cebir morfizmi ve*

$$\begin{array}{ccccccc} R \times C & \longrightarrow & C & \text{ve} & C \times R & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & r.c & & (c,r) & \longmapsto & c.r \end{array}$$

R'nin C üzerine etkisi ile birlikte her $c, c^{'} \in C$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ç}M1) & \partial(r.c) & = & r\partial(c) \\ & \partial(c.r) & = & \partial(c)r \end{array}$$

sağlanıyorsa C cebirine R üzerinde bir önçaprazlanmış (pre - crossed) modül denir. Ayrıca

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ç}M2) & \partial c.c^{'} & = & cc^{'} \\ & c.\partial c^{'} & = & cc^{'} \end{array}$$

şartı sağlanıyorsa R üzerinde C cebrine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir. Burada Ç$M2$ şartına Peiffer koşulu adı verilir ve $c, c^{'} \in C$ için

$$< c, c^{'} >= cc^{'} - \partial c.c^{'}$$

eşitliğine de Peiffer komütatörü adı verilir.

Tanım 12. *Bir (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünden $(C^{'}, R^{'}, \partial^{'})$ çaprazlanmış modülüne tanımlı bir morfizm ; $\alpha : C \longrightarrow C^{'}$ ve $\beta : R \longrightarrow R^{'}$, şeklinde tanımlı iki cebir homomorfizmden oluşur ve*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[d, "\beta"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Ayrıca $\alpha(r.c) = \beta(r).\alpha(c)$ dir. Bu durumda $\Phi = (\alpha, \beta)$ ye bir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Önerme 1. $\partial : C \longrightarrow R$ *bir çaprazlanmış modül ise Çek*∂*, C' nin merkezindedir.*

İspat. $c \in C$ *ve* $a \in$ *Çek*∂ *için* $ac = ca$ *olduğunu göstermeliyiz.*

$$ac = \partial(a).c = 0.c = 0 = c.0 = c.\partial(a) = ca$$

olduğundan

$$a \in Mer(C) = \{c \in C : \forall a \in C \quad \text{için} \quad c.a = a.c\}$$

olur.

Önerme 2. $\partial : C \longrightarrow R$ *bir çaprazlanmış modül ise* $\partial(C)$*, R'nin bir idealidir.*

İspat. $\partial(C) = \{\partial(c) : c \in C\}$ *iken, her* $r \in R$ *için* $r\partial(c) = \partial(r.c)$ *ve* $r.c \in C$ *olup,* $\partial(r.c) = r(\partial c)$ *olur. Yani* $\partial(c)$*, R'nin bir idealidir.*

Örnek 3. *R bir* **k***-cebiri ve I, R'nin ideali olsun.*

$$\begin{array}{rccc} iç: & I & \longrightarrow & R \\ & i & \longrightarrow & i \end{array}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R' nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccll} R \times I & \longrightarrow & I & \\ (r,i) & \longmapsto & r.i & = ri \end{array}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\begin{array}{lccccccc} ÇM1) & iç(r.i) & = & iç(ri) & = & ri & = & riç(i) \\ ÇM2) & içi.i' & = & i.i' & = & ii' & & \end{array}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla $(I, R, iç)$ *bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Tersine, herhangi bir* $\partial : C \longrightarrow R$ *çaprazlanmış R-modül verildiğinde* $\partial C = I$ *'nın R' de ideal olduğu kolayca gösterilebilir.*

Örnek 4. *M herhangi bir R-bimodül oslun.*

$$\begin{array}{ccll} M \times M & \longrightarrow & M & \\ (m_1, m_2) & \longmapsto & m_1 m_2 & = 0 \end{array}$$

çarpımı tanımlanırsa M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{array}{rccll} 0: & M & \longrightarrow & R & \\ & x & \longmapsto & 0(x) & = 0 \end{array}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi

$$\begin{array}{ccll} R \times M & \longrightarrow & M & \\ (r,m) & \longmapsto & r.m & = rm \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

$$\begin{array}{lccccccccc} ÇM1) & 0(r.m) & = & 0(rm) & = & 0 & = & r0 & = & r0(m) \\ ÇM2) & 0m.m' & = & 0.m' & = & 0m' & = & 0 & = & mm' \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır. Tersine, $\partial : C \longrightarrow R$ *herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde Çek*∂ *bir* $R/\partial C$ *- modül yapısı oluşturur.*

Örnek 5. K *bir cebir ve her* $k, k' \in K$ *için*

$$R = \left\{ f_k;\ f_k : K \longrightarrow K,\ f_k(k') = kk' \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \partial : & K & \longrightarrow & R \\ & k & \longmapsto & f_k \end{array}$$

k *cebir homomorfizmi,*

$$\begin{array}{ccc} R \times K & \longrightarrow & K \\ (f_k, k') & \longmapsto & f_k \cdot k' \ = kk' \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten

$$\begin{array}{llcl} \textbf{\textit{ÇM1)}} & \partial(f_k \cdot k') & = & \partial(kk') \\ & & = & \partial(k)\partial(k') \\ & & = & f_k\partial(k') \\ \textbf{\textit{ÇM2)}} & \partial k.k' & = & f_k \cdot k' \\ & & = & kk' \end{array}$$

eşitlikleri elde edilir.

2.2 Temel Kategoriksel Kavramlar

Tanım 13. *Bir* $\mathbf{A} = (A_1, A_0, s, t, i, m)$ *kategorisi, objelerinin sınıfı* A_0 *, morfizmler sınıfı* A_1 *, source ve target fonksiyonları* $s, t : A_1 \longrightarrow A_0$*, birim fonksiyonu* $i : A_0 \longrightarrow A_1, x \longmapsto i(x) = 1_x$ *ve bileşke* $m : A_1 * A_1 \longrightarrow A_1, (a, b) \longrightarrow a \circ b$ *fonksiyonlarından meydana gelir. Burada* $A_1 * A_1 = \{(a, b) : t(a) = s(b)\}$ *olmak üzere bileşke*

$i)$ $(birlesme)$ her $a, b, c \in A_1$ için $t(a) = s(b)$ ve $t(b) = s(c)$ olmak üzere,

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$ii)$ $(birim \quad morfizm)$ her $a \in A_1$ için

$$i(s(a)) \circ a = 1_{s(a)} \circ a = a \ \text{ ve } \ a \circ i(t(a)) = a \circ 1_{t(a)} = a$$

şartlarını sağlar. Eğer $x, y \in A_0$ ise source u x target ı y olan tüm morfizmler kümesi $A(x, y)$ ile gösterilir. O halde,

$$A(x, y) = \{a \in A_1 : s(a) = x \text{ ve } t(a) = y\}$$

dır.

Örnek 6. *Kümeler ve bunlar arasındaki fonksiyonlar kategori meydana getirir ve Set ile gösterilir.*

Örnek 7. *Topolojik uzaylar ve aralarındaki sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur ve Top ile gösterilir.*

Örnek 8. *Gruplar ve bunlar arasındaki homomorfizmler bir kategori oluşturur. Grp ile gösterilir.*

Örnek 9. *Değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve aralarındaki morfizmler bir kategori oluşturur ve $XMod$ ile gösterilir.*

Örnek 10. *Değişmeli cebirler üzerindeki simplisel cebirler ve aralarındaki morfizmler bir kategori oluşturur ve SimpAlg ile gösterilir.*

Tanım 14. **A** *bir kategori ve $a \in A(x, y)$,* **A** *içinde bir morfizm olsun. Eğer $a \circ b = 1_x$ ve $b \circ a = 1_y$ olacak şekilde bir $b \in A(y, x)$ morfizmi varsa a ya* **A** *içinde bir izomorfizm, x,y objelerine de izomorftur denir ve $x \cong y$ ile gösterilir.*

Yukarıdaki tanımda verilen $b \in A(y, x)$ morfizmine $a \in A(x, y)$ morfizminin tersi denir ve a^{-1} şeklinde gösterilir. Aynı zamanda $b \in A(y, x)$ de bir izomorfizmdir.

Örnek 11. *Kümeler kategorisi Set de izomorfizmler bijektif (birebir ve örten) tir. Topolojik uzaylar kategorisi Top da izomorfizmler homeomorfizmlerdir. Gruplar kategorisi Gp de izomorfizmler bijektif grup homomorfizmleridir.*

Tanım 15. **A** *ve* **B** *iki kategori, $F_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ ve $F_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ fonksiyonlar olsun. Eğer*

(i) her $a \in A_1$ için $sF_1(a) = F_0 s(a), tF_1(a) = F_0 t(a)$

(ii) her $x \in A_0$ için $F_1(1_x) = 1_{F_0(x)}$

(iii) $t(a) = s(b)$ olacak şekildeki her $a, b \in A_1$ için $F_1(a \circ b) = F_1(a) \circ F_1(b)$ şartları sağlanıyorsa $F = (F_1, F_0)$ ikilisine A kategorisinden B kategorisine bir funktor denir.

Örnek 12. U : **Top** $\longrightarrow$ **Set** *fonksiyonu her topolojik uzayı temel kümesine taşıyan bir funktordur. Bu funktor unutkan (forgetful) funktor olarak adlandırılır. İki funktorun bileşkesi de bir funktordur.*

Tanım 16. $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *iki funktor ve* $\eta : A_0 \longrightarrow B_1$ *her* $x \in A_0$ *için* $s(\eta(x)) = F_0(x)$ *ve* $t(\eta(x)) = G_0(x)$ *şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer her* $a \in A(x, y)$ *için* $G_1(a)\eta(x) = \eta(y)F_1(a)$ *ise* η *doğal dönüşüm olarak adlandırılır ve* $\eta : F \Longrightarrow G$ *ile gösterilir.*

$$\begin{tikzcd}
F_0(x) \arrow[r, "\eta(x)"] \arrow[d, "F_1(a)"'] & G_0(x) \arrow[d, "G_1(a)"] \\
F_0(y) \arrow[r, "\eta(y)"'] & G_0(y)
\end{tikzcd}$$

$F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ funktorları için $\eta : F \Longrightarrow G$ bir doğal dönüşüm olsun. Eğer her $x \in A_0$ için $\eta(x)$, $\mathbf{B}$ de bir izomorfizm ise $\eta : F \Longrightarrow G$ ye bir doğal izomorfizm denir. Bu duruma, F ve G doğal denktir denir ve $F \simeq G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 17. $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bir funktor olsun. Eğer* $G \circ F \simeq 1_A$ *ve* $F \circ G \simeq 1_B$ *olacak şekilde bir* $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *funktoru varsa* **A** *ve* **B** *kategorilerine denktir denir ve* $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ *ile gösterilir.*

Tanım 18. *Bir* E *simplisel cebiri; değişmeli* **k**- *cebirlerin* (E_n) $n \in \mathcal{N}$ *objelerinden oluşur. Öyleki ;* $d_i^n : E_n \longrightarrow E_{n-1}$ $(0 \leq i \leq n \neq 0)$ *ve* $s_j^n : E_n \longrightarrow E_{n+1}$ $(0 \leq j \leq n)$ *değişmeli* **k**-*cebir homomorfizmleri olmak üzere bu operatörler için simplisel özdeşlikler diye bilinen,*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{1)} & 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise } d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n \\
\mathbf{2)} & 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise } s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \\
\mathbf{3)} & 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise } d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n \\
\mathbf{4)} & i = j \text{ veya } i = j+1 \text{ ise } d_i^{n+1} s_j^n = id \\
\mathbf{5)} & 0 \leq j \leq i-1 \leq n \text{ ise } d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n
\end{array}$$

özdeşlikleri sağlanır. Aslında bir simplisel cebir, $\Delta^{op}[n]$ *kategorisinden* **Ceb** *(değişmeli* **k** *- cebirlerin kategorisi) kategorisine tanımlı bir funktor dur. Şöyleki bu* $\Delta^{op}[n]$ *kategorisini kısaca hatırlayalım:*

$$[n] = \{0 < 1 < 2 ... < n\}$$

$\Delta^{op}[n]$ *kategorisinin herhangi bir objesidir.* $[n]$ *ve* $[m]$ *objeleri için* $f : [n] \longrightarrow [m]$ *morfizmleri ise monoton fonksiyon olup,* $i \leq j$ *için* $f(i) \leq f(j)$ *olan bir operatördür.* $\delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n]; 0 \leq i \leq n$ *için*

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x & ; x < i \\ x+1 & ; x \geq i \end{cases}$$

ve $\alpha_j^n : [n+1] \longrightarrow [n]\,; 0 \leq j \leq n$ ***için***

$$\alpha_j^n(x) = \begin{cases} x & ; x \leq j \\ x-1 & ; x > j \end{cases}$$

ile tanımlı iki özel operatör yardımıyla $f\ :\ [n]\ \longrightarrow\ [m]$ *operatörünün bu operatörlerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Dolayısıyla* $\Delta^{op}[n]$ *kategorisi ;*

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{op}[n] : \cdots [2] \arrow[r, shift left=4, "\delta_0^2"] \arrow[r, shift left=2, "\delta_1^2"] \arrow[r, "\delta_2^2"] & {[1]} \arrow[l, bend left=20, "\alpha_0^1"] \arrow[l, bend left=50, "\alpha_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "\delta_0^1"] \arrow[r, "\delta_1^1"] & {[0]} \arrow[l, bend left=20, "\alpha_0^0"]
\end{tikzcd}$$

şeklinde diyagramatik olarak tanımlanabilir.

E, $\Delta^{op}\,[n]$ den Ceb'e $E\left([n]\right) = E_n$ ve $E\left(\delta_i^n\right) = d_i^n$ ve $E(\alpha_j^n) = s_j^n$ şeklinde tanımlı olduğundan bir simplisel cebiri şematik olarak,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} : \cdots E_2 \arrow[r, shift left=4, "d_0^2"] \arrow[r, shift left=2, "d_1^2"] \arrow[r, "d_2^2"] & E_1 \arrow[l, bend left=20, "s_0^1"] \arrow[l, bend left=50, "s_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "d_0^1"] \arrow[r, "d_1^1"] & E_0 \arrow[l, bend left=20, "s_0^0"]
\end{tikzcd}$$

şeklinde gösterilebilir. $\Delta^{op}\,[n]$ de δ_i ve α_j operatörleri simplisel özdeşlikleri sağlayan operatörler ve E yapı koruyan bir morfizm olduğundan d_i^n ve δ_j^n operatörleri de simplisel özdeşlikleri sağlar.

Tanım 19. *E ve F iki simplisel cebir olsun. Bir $t : E \longrightarrow F$' ye simplisel cebir morfizmi E : $\Delta^{op}\,[n] \longrightarrow$ **Ceb** ve $F\ :\ \Delta^{op}\,[n] \longrightarrow$ **Ceb** funktorları arasındaki doğal transformasyondur. Yani herhangi bir $[n]\,, [m] \in \Delta^{op}\,[n]$ ve $f : [n] \longrightarrow [m]$ operatörü için*

$$\begin{tikzcd}
E([n]) \arrow[r, "E(f)"] \arrow[d, "t_{[n]}"'] & E([m]) \arrow[d, "t_{[m]}"] \\
F([n]) \arrow[r, "F(f)"'] & F([m])
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde ***Ceb*** kategorisinde $t_{[n]} : E_n \longrightarrow F_n$ ve $t_{[m]} : E_m \longrightarrow F_m$ cebir homomorfizmleri vardır.

Bu durum diyagram olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir. Buna göre

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}:\cdots \arrow[d] & \cdots E_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "t_2"'] & E_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[l, bend left=20] \arrow[l, bend left=40] \arrow[d, "t_1"'] & E_0 \arrow[l, bend left=20] \arrow[d, "t_0"'] \\
\mathbf{F}:\cdots & \cdots F_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[l, bend left=20] \arrow[l, bend left=40] & F_0 \arrow[l, bend left=20]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. E ve F iki simplisel cebir olduğunda, $t_n : E_n \longrightarrow F_n$ **k** - cebir homomorfizmleri olmak üzere, $d_i^n\ t_n = t_{n-1}\ d_i$ ve $t_n s_i = s_i t_{n-1}$ özelliklerini sağlayan bir $f : E \longrightarrow F,\ f_n$ homomorfizmlerin bir sınıfı tanımlanabilir. Yani t, E simplisel cebirinden, F simplisel cebirine tanımlı bir morfizmdir.

Tanım 20. *E bir simplisel cebir olsun. E'nin Moore kompleksi (NE, ∂) ,*

$$NE = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n$$

ile tanımlı bir zincir kompleksidir. Burada $\partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1}$ diferansiyelleri her bir adımda d_n^n kısıtlaması ile tanımlıdır. Yani;

$$(NE, \partial) : ...NE_2 \xrightarrow{d_2^2} NE_1 \xrightarrow{d_1^1} NE_0 = E_0$$

şeklinde tanımlıdır. Simplisel özdeşliklere göre $\partial_n\ \partial_{n+1} = 0$ olduğu gösterilebilir. Burada ;

$$\begin{array}{rcl}
NE_0 & = & E_0 \\
NE_1 & = & Çekd_0^1 \\
NE_2 & = & Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2 \\
NE_3 & = & Çekd_0^3 \cap Çekd_1^3 \cap Çekd_2^3 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

şeklindedir.

Önerme 3. *E simplisel cebirinin n. homotopi modülü $\pi_n(E)$, E'nin moore kompleksinin n. homolojisi modülüne izomorftur. Yani*

$$\begin{aligned}
\pi_n(E) &\cong H_n(NE, \partial) \\
&= \frac{NE_n \cap Çekd_n^n}{d_{n+1}^{n+1}(NE_{n+1})}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Aslında ; $\partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1}$, d_n^n ile tanımlı ve $\partial_{n+1} : NE_{n+1} \longrightarrow NE_n$, d_{n+1}^{n+1} ile tanımlı olduğundan ;

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{Çek\partial_n}{Im\partial_{n+1}} & = & \dfrac{Çekd_n^n \cap NE_n}{d_{n+1}^{n+1}(NE_{n+1})} \\
& = & \dfrac{Çekd_n^n \cap Çekd_{n-1}^n \cap ...Çekd_0^n}{d_{n+1}^{n+1}\ (NE_{n+1})} \\
& = & \dfrac{\bigcap_{i=0}^{n} Çekd_i^n}{d_{n+1}^{n+1}(NE_{n+1})}
\end{array}$$

dir.

Tanım 21. *E ve E' iki simplisel cebir ve $f\ ,\ g = E \longrightarrow E'$ iki simplisel dönüşüm olsun. Eğer $n \geq 0$ olmak üzere $0 \leq i \leq n$ için,*

$$h_i^n = E_n \longrightarrow E'_{n+1}$$

homomorfizmleri için

$$\begin{aligned} d_0^{n+1} h_0^n &= f_n \\ d_{n+1}^{n+1} h_n^n &= g_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^{n+1} h_j^n &= h_{j-1}^{n-1} d_i^n && , \ i < j \\ d_{j+1}^{n+1} h_{j+1}^n &= d_{j+1}^{n+1} h_j^n && \\ d_i^{n+1} h_j^n &= h_j^{n-1} d_{i-1}^n && , \ i > j+1 \\ s_i^{n+1} h_j^n &= h_{j+1}^{n+1} s_i^n && , \ i \leq j \\ s_i^{n+1} h_j^n &= h_j^{n+1} s_{i-1}^n && , \ i > j \end{aligned}$$

özdeşlikleri sağlanıyorsa h_i ların h ailesine f den g ye bir simplisel homotopi denir.

Önerme 4.

$$\mathbf{B} : \ \cdots B_n \underset{\underset{s_{n-1}^{n-1}}{\overset{\vdots}{\longleftarrow}}}{\overset{\overset{d_n^n}{\longrightarrow}}{\overset{\vdots}{\underset{s_0^{n-1}}{\overset{d_0^n}{\rightleftarrows}}}}} B_{n-1} \cdots$$

simplisel cebir olsun. Her $n > 0$ için $a \in B_n$ olmak üzere

$$a - s_0^{n-1} d_0^n(a) \in \text{Çek} d_0^n$$

dır.

İspat. *$a \in B_n$ için*

$$\begin{aligned} d_0^n(a - s_0^{n-1} d_0^n(a)) &= d_0^n(a) - d_0^n s_0^{n-1} d_0^n(a)) \\ &= d_0^n(a) - d_0^n(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a - s_0^{n-1} d_0^n(a) \in \text{Çek} d_0^n$ elde edilir.

Teorem 1. *B bir simplisel cebir olsun. Her $n > 0$ için*

$$B_n \cong \text{Çek} d_0^n \rtimes s_0^{n-1}(B_{n-1})$$

dır.

İspat.

$$\begin{array}{rlll} \theta: & B_n & \longrightarrow & Çekd_0^n \rtimes s_0^{n-1}(B_{n-1}) \\ & a & \mapsto & \theta(a) = (a - s_0^{n-1}d_0^n(a), s_0^{n-1}d_0^n(a)) \end{array}$$

dönüşümünü ele alınsın. $a, a' \in B_n$ *için*

$$\begin{array}{rcl} \theta(a)\theta(a') & = & (a - s_0^{n-1}d_0^n(a), s_0^{n-1}d_0^n(a))((a^{'} - s_0^{n-1}d_0^n(a^{'}), s_0^{n-1}d_0^n(a^{'}))) \\ & = & (s_0^{n-1}d_0^n(a)_{(a'-s_0^{n-1}d_0^n(a'))} + s_0^{n-1}d_0^n(a^{'})_{(a-s_0^{n-1}d_0^n(a))} \\ & + & (a - s_0^{n-1}d_0^n(a))(a^{'} - s_0^{n-1}d_0^n(a^{'})), s_0^{n-1}d_0^n(a)s_0^{n-1}d_0^n(a^{'})) \\ & = & ((s_0^{n-1}d_0^n(a))(a^{'} - s_0^{n-1}d_0^n(a^{'})) + (s_0^{n-1}d_0^n(a^{'}))(a - s_0^{n-1}d_0^n(a)) \\ & + & aa' - as_0^{n-1}d_0^n(a^{'}) - a^{'}s_0^{n-1}d_0^n(a) \\ & + & s_0^{n-1}d_0^n(a)s_0^{n-1}d_0^n(a^{'}), s_0^{n-1}d_0^n(a)s_0^{n-1}d_0^n(a^{'})) \\ & = & (a^{'}s_0^{n-1}d_0^n(a) - s_0^{n-1}d_0^n(aa^{'}) + as_0^{n-1}d_0^n(a^{'}) - s_0^{n-1}d_0^n(aa^{'}) \\ & + & aa^{'} - as_0^{n-1}d_0^n(a^{'}) - a^{'}s_0^{n-1}d_0^n(a) + s_0^{n-1}d_0^n(aa^{'}), s_0^{n-1}d_0^n(aa^{'})) \\ & = & (aa^{'} - s_0^{n-1}d_0^n(aa^{'}), s_0^{n-1}d_0^n(aa^{'})) \\ & = & \theta(aa^{'}) \end{array}$$

olup θ *bir cebir morfizmidir. Benzer şekilde,*

$$\begin{array}{rlll} \theta^{-1}: & Çekd_0^n \rtimes s_0^{n-1}(B_{n-1}) & \longrightarrow & B_n \\ & (x, s_0^{n-1}(y)) & \longmapsto & \theta^{-1}(x, s_0^{n-1}(y)) \quad = x + s_0^{n-1}(y) \end{array}$$

dönüşümünü ele alınsın.

$$(x, s_0^{n-1}(y)), (x^{'}, s_0^{n-1}(y^{'})) \in Çekd_0^n \rtimes s_0^{n-1}(B_{n-1})$$

için,

$$\begin{array}{rcl} \theta^{-1}((x, s_0^{n-1}(y))(x^{'}, s_0^{n-1}(y^{'}))) & = & \theta^{-1}(s_0^{n-1}(y)_{x'} + s_0^{n-1}(y^{'})_x + xx^{'}, s_0^{n-1}(yy^{'})) \\ & = & \theta^{-1}(s_0^{n-1}(y)x^{'} + s_0^{n-1}(y^{'})x + xx^{'}, s_0^{n-1}(yy^{'})) \\ & = & s_0^{n-1}(y)x^{'} + s_0^{n-1}(y^{'})x + xx^{'} + s_0^{n-1}(yy^{'}) \\ & = & (x + s_0^{n-1}(y))(x^{'} + s_0^{n-1}(y^{'})) \\ & = & \theta^{-1}(x, s_0^{n-1}(y))\theta^{-1}(x^{'}, s_0^{n-1}(y^{'})) \end{array}$$

olur. Yani θ^{-1} *cebir morfizmidir. Ayrıca,*

$$\begin{array}{rcl} (\theta\theta^{-1})((x, s_0^{n-1}(y)) & = & \theta(\theta^{-1}(x, s_0^{n-1}(y)) \\ & = & \theta(x + s_0^{n-1}(y)) \\ & = & (x + s_0^{n-1}(y) - s_0^{n-1}d_0^n(x + s_0^{n-1}(y)), s_0^{n-1}d_0^n(x + s_0^{n-1}(y)) \\ & = & (x + s_0^{n-1}(y) - s_0^{n-1}d_0^n(x) - s_0^{n-1}(y), s_0^{n-1}d_0^n(x) \\ & + & s_0^{n-1}d_0^n s_0^{n-1}(y)) \\ & = & (x, s_0^{n-1}(y)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} (\theta^{-1}\theta)(a) & = & \theta^{-1}(\theta(a)) \\ & = & \theta^{-1}(a - s_0^{n-1}d_0^n(a), s_0^{n-1}d_0^n(a)) \\ & = & a - s_0^{n-1}d_0^n(a) + s_0^{n-1}d_0^n(a) \\ & = & a \end{array}$$

elde edilir. O halde θ bir izomorfizmdir.

$$B_n \cong \text{Çek} d_0^n \rtimes s_0^{n-1}(B_{n-1})$$

izomorfizmi mevcut olduğundan, herbir B_n yi, B_n nin Moore kompleksindeki terimlerin dejenere olanlarının çokkatlı yarı direkt çarpımı olarak elde edebilmek için, gerektiğinde bu izomorfizm işlemi tekrarlanmalıdır. Şöyle ki

$$\begin{aligned} \mathbf{K}, \quad K_n = \text{Çek} d_0^{n+1}, \quad & \delta_i^n = d_i^{n+1}/\text{Çek} d_0^{n+1} \\ & \sigma_i^n = s_i^{n+1}/\text{Çek} d_0^{n+1} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan bir simplisel cebir olsun. $i \leq n-1$ için $d_0^{n-1}d_i^n = d_i^{n-1}d_0^n$ olduğundan $i \leq n-1$ iken Çekd_0^n ler, δ_i^n morfizmleri vasıtasıyla Çekd_0^{n-1} lere dönüşür. Benzer şekilde $i \leq n-2$ için $d_0^{n-1}s_i^n = s_i^{n-1}d_0^n$ olduğundan $i \leq n-2$ iken, σ_i^{n+1} morfizmleri de Çekd_0^n leri Çekd_0^{n+1} lere dönüştürür. Buna göre Teorem 1 B_{n-1} ve K_{n-1} e uygulanırsa

$$\begin{aligned} B_n &\cong \text{Çek} d_0^n \rtimes s_0^{n-1}(B_{n-1}) \\ &\cong \text{Çek} d_0^n \rtimes s_0^{n-1}(\text{Çek} d_0^{n-1} \rtimes s_0^{n-2}(B_{n-2}) \\ &= K_{n-1} \rtimes (s_0^{n-1}\text{Çek} d_0^{n-1} \rtimes s_0^{n-1}s_0^{n-2}(B_{n-2})) \end{aligned}$$

elde edilir. **K** *da bir simplisel cebir olduğundan*

$$\begin{aligned} \text{Çek} d_0^n = K_{n-1} &\cong \text{Çek}\delta_0^{n-1} \rtimes \sigma_0^{n-2}K_{n-2} \\ &\cong (\text{Çek} d_0^n \cap \text{Çek} d_1^n) \rtimes s_1^{n-1}\text{Çek} d_0^{n-1} \end{aligned}$$

olur ve buna göre

$$B_n = ((\text{Çek} d_0^n \cap \text{Çek} d_1^n) \rtimes s_1^{n-1}\text{Çek} d_0^{n-1}) \rtimes (s_0^{n-1}\text{Çek} d_0^{n-1} \rtimes s_0^{n-1}s_0^{n-2}(B_{n-2}))$$

elde edilir. Böylece B_n aşağıdaki biçimde ayrıştırılabilir.

Önerme 5. *G bir simplisel cebir ise, herhangi bir $n \geq 0$ için, $0 \leq i \leq n-2$ ve $i \leq j \leq n-3$*

olmak üzere

$$\begin{aligned} G_n \; &\cong (NG_n \rtimes s_0^{n-1}NG_{n-1}) \rtimes \ldots \rtimes s_i^{n-1}\left\{(NG_{n-1} \rtimes s_0^{n-2}NG_{n-2})\right\} \ldots \\ &\rtimes s_j^{n-2}\left\{(NG_{n-2} \rtimes s_0^{n-3}NG_{n-3}) \rtimes \ldots \rtimes s_j^{j+1}(NG_{j+1} \rtimes s_j^{j}NG_j)\right\} \end{aligned}$$

dir. Bunu $n = 1, 2, 3$ için açarsak

$$\begin{aligned} G_1 &\cong NG_1 \rtimes s_0^0 NG_0 \\ G_2 &\cong (NG_2 \rtimes s_0^1 NG_1) \rtimes (s_1^1 NG_1 \rtimes s_0^1 s_0^0 NG_0) \\ G_3 &\cong (NG_3 \rtimes s_0^2 NG_2) \rtimes (s_1^2 NG_2 \rtimes s_0^2 s_0^1 NG_1) \rtimes (s_2^2 NG_2 \\ &\rtimes s_0^2 s_1^1 NG_1) \rtimes (s_1^2 s_1^1 NG_1 \rtimes s_0^2 s_0^1 s_0^0 NG_0) \end{aligned}$$

bulunur.

3. SİMPLİSEL CEBİRLER VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

3.1 Simplisel Cebirlerden Çaprazlanmış Modüllere

E, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan bir Simplisel cebir olsun. Yani

$$\mathbf{E}: \cdots E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^2} \\ \xrightarrow{d_1^2} \\ \xrightarrow{d_2^2} \\ \xleftarrow{s_0^1} \\ \xleftarrow{s_1^1} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^1} \\ \xrightarrow{d_1^1} \\ \xleftarrow{s_0^0} \end{array} E_0$$

simplisel cebiri için

$$\mathbf{NE}: \cdots 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_2^2} NE_1 \xrightarrow{d_1^1} NE_0$$

olsun, burada

$$P = NE_0 = E_0$$

$$M = NE_1 = Kerd_0^1$$

$$\begin{array}{ccc} \partial : M & \longrightarrow & P \\ \partial(m) & = & d_1^1(m) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} P \times M & \longrightarrow & M \\ (p, m) & \longmapsto & p.m = s_0^0(p)m \end{array}$$

olarak tanımlansın. Bu tanımlamalar ile bir (M, P, ∂) çaprazlanmış modülü bulunabilir. Bunun için

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{CM1)} & \partial(p.m) & = & p\partial(m) \\ \textbf{CM2)} & \partial(m).m' & = & mm' \end{array}$$

şartlarını kontrol edilmelidir. $p \in P$ ve $m \in M$ için

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{CM1)} & \partial(p.m) & = & \partial(s_0^0(p)m) \\ & & = & d_1^1(s_0^0(p)m) \\ & & = & d_1^1(s_0^0(p)d_1^1(m) \\ & & = & pd_1^1(m) \\ & & = & p\partial(m) \end{array}$$

dir.

$$\textbf{CM2)} \quad m, m' \in NE_1 \quad = \quad Kerd_0^1$$

olacak şekilde m ve $m^{'}$ elemanları için

$$\begin{aligned}
\partial(m).m^{'} &= d_1^1(m)m^{'} \\
&= s_0^0(d_1^1(m))m^{'} \\
&= s_0^0d_1^1(m)m^{'} \\
&= d_2^2s_0^1(m)m^{'} \\
&= d_2^2s_0^1(m)m^{'} - mm^{'} + mm^{'} \\
&= (d_2^2s_0^1(m)m^{'} - mm^{'}) + mm^{'} \\
&= d_2^2s_0^1(m)d_2^2s_1^1(m^{'}) - d_2^2s_1^1(mm^{'}) + mm^{'} \\
&= d_2^2(s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'})) + mm^{'}
\end{aligned}$$

olur. Burada $s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'}) \in NE_2$ olduğu gösterilmelidir.

$$NE_2 = Kerd_0^2 \cap Kerd_1^2$$

olduğundan, yukarıdaki ifadenin $Kerd_0^2$ ve $Kerd_1^2$ nin elemanı olduğunun ayrı ayrı gösterilmesi gerekir.

$$\begin{aligned}
d_0^2(s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'})) &= d_0^2(s_0^1(m)d_0^2s_1^1(m^{'}) - d_0^2s_1^1(m)d_0^2s_1^1(m^{'})) \\
&= ms_0^0d_0^1(m^{'}) - s_0^0d_0^1(m)s_0^0d_0^1(m^{'}) \\
&= m.0 - 0.0 = 0
\end{aligned}$$

olup, böylelikle

$$s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'}) \in Kerd_0^2$$

olur.

$$\begin{aligned}
d_1^2(s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'})) &= d_1^2(s_0^1(m)d_1^2s_1^1(m^{'}) - d_1^2s_1^1(m)d_1^2s_1^1(m^{'})) \\
&= mm^{'} - mm^{'} = 0
\end{aligned}$$

olup

$$s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'}) \in Kerd_1^2$$

olur. Böylelikle yukarıdaki eşitliklerden

$$s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'}) \in NE_2$$

olup $NE_2 = \{0\}$ olduğundan $s_0^1(m)s_1^1(m^{'}) - s_1^1(m)s_1^1(m^{'}) = 0$ dır. Böylece $d_2^2(0) = 0$ olur. Yani $\partial(m).m^{'} = mm^{'}$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
P \times M &\longrightarrow M \\
(p, m) &\longmapsto p.m = s_0^0(p)m
\end{aligned}$$

etkisi ile birlikte

$$\partial : M \longrightarrow P$$

morfizmi bir çaprazlanmış modül olur. Bu çaprazlanmış modülü $(M,P,\partial) = \mathbf{M}$ şeklinde gösterilsin. Böylece

$$\begin{array}{lcl} G : Simp_{\leq 1} & \longrightarrow & XMod \\ E & \longmapsto & G(E) = \mathbf{M} \end{array}$$

dönüşümü elde edilir. Şimdi de Simlisel cebirlerin morfizmlerinden çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin elde edildiğini gösterelim; **E** ve **E'** simplisel cebir ve f : **E** $\longrightarrow$ **E'** bir simplisel morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} : \cdots \arrow[d, "f"] & \cdots E_2 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "f_2"] & E_1 \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=40] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1"] & E_0 \arrow[l, bend left] \arrow[d, "f_0"] \\
\mathbf{E}' : \cdots & \cdots E'_2 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & E'_1 \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=40] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E'_0 \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

olup

$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[r, shift left, "d_i^n"] \arrow[d, "f_n"'] & E_{n-1} \arrow[l, shift left, "s_j^{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
E'_n \arrow[r, shift left, "\delta_i^n"] & E'_{n-1} \arrow[l, shift left, "\sigma_j^{n-1}"]
\end{tikzcd}$$

den

$$\begin{array}{rcll} f_{n-1}d_i^n & = & \delta_i^n f_n & 0 \leq i \leq n \\ \sigma_j^{n-1} f_{n-1} & = & f_n s_j^{n-1} & 0 \leq j \leq n-1 \end{array}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$G(E) = \mathbf{M} = (M,P,\partial) \text{ ve } G(E') = \mathbf{M}' = (M', P', \partial')$$

için

$$\begin{tikzcd}
G(E) : \arrow[d, "G(f)"'] & M = Kerd_0^1 \arrow[r, "d_1^1=\partial"] \arrow[d, "f_1/Çekd_0^1"'] & P = E_0 \arrow[d, "f_0"] \\
G(E') : & M' = Ker\delta_0^1 \arrow[r, "\delta_1^1=\partial'"'] & P' = E'_0
\end{tikzcd}$$

olup

$$(f_1/\text{Çek}d_0^1, f_0) = G(E) \to G(E')$$

dönüşümü ele alınsın.

i) $a \in$ Çekd_0^1 için

$$\begin{array}{rcl} f_0\partial(a) = f_0 d_1^1(a) & = & \delta_1^1 f_1(a) \\ & = & \partial' f_1(a) \end{array}$$

olup $f_0\partial = \partial' f_1$ bulunur.

ii) $p \in P$ ve $m \in M$ için

$$\begin{aligned} f_1(p.m) = f_1(S_0^0(p)m) &= f_1(S_0^0(p)f_1(m) \\ &= \sigma_0^0(f_0(p))f_1(m) = f_0(p)\cdot f_1(m) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$G(f) = (f_1/Kerd_0^1, f_0)$$

dönüşümü $G(E)$ çaprazlanmış modülünden $G(E')$ çaprazlanmış modülüne bir çaprazlanmış modül morfizmidir. E, E' ve E'' simplisel cebirleri ve $f : E \longrightarrow E'$ ve $g : E' \longrightarrow E''$ simplisel morfizmleri için

$$G(gof) = G(g)oG(f)$$

olduğunu göstermek zor değildir. Böylece G dönüşümü bir funktordur.

3.2 Çaprazlanmış Modüllerden Simplisel Cebirlere

Tersine; $\mathbf{M} = (\partial : M \longrightarrow P)$ değişmeli $\mathbf{k}-$cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. Burada $E_0 = P$, $E_1 = P \rtimes M$ ve $E_2 = (P \rtimes M) \rtimes M$ alınsın. Burada

$$\begin{array}{llll} d_0^1 : & E_1 & \longrightarrow & E_0 \\ & (p,m) & \longmapsto & d_0^1(p,m) = p \\ d_1^1 : & E_1 & \longrightarrow & E_0 \\ & (p,m) & \longmapsto & d_1^1(p,m) = p + \partial(m) \\ s_0^0 : & E_0 & \longrightarrow & E_1 \\ & p & \longmapsto & s_0^0(p) = (p,0) \end{array}$$

tanımlansın. Bu dönüşümler birer $\mathbf{k}-$cebir morfizmidir. Çünkü;

$$\begin{array}{rlll} d_0^1 : E_1 = & P \rtimes M & \longrightarrow & E_0 = p \\ & (p,m) & \longmapsto & d_0^1(p,m) = p \end{array}$$

için; $(p,m), (q,n) \in P \rtimes M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_0^1((p,m)\cdot(q,n)) &= d_0^1(pq, p_n + q_m + mn) \\ &= pq \\ &= d_0^1(p,m)d_0^1(q,n) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{array}{rlll} d_1^1 : E_1 = & P \rtimes M & \longrightarrow & E_0 = p \\ & (p,m) & \longmapsto & d_1^1(p,m) = p + \partial(m) \end{array}$$

için $(p,m),(q,n)\in P\rtimes M$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl}
d_1^1((p,m)\cdot(q,n)) & = & d_1^1(pq, p_n+q_n+mn)\\
& = & pq+\partial(p_n+q_n+mn)\\
& = & pq+\partial(p_n)+\partial(q_n)+\partial(mn)\\
& = & pq+p\partial(n)+q\partial(m)+\partial(m)\partial(n)\\
& = & p(q+\partial(n))+\partial(m)(q+\partial(n))\\
& = & (q+\partial(n))(p+\partial(m))\\
& = & d_1^1(p,m)d_1^1(q,n)
\end{array}$$

dır, ve

$$\begin{array}{rcl}
s_0^0: E_0 = \; p & \longrightarrow & E_1 = P\rtimes M\\
p & \longmapsto & s_0^0(p)=(p,0)
\end{array}$$

$p,q\in P$ için

$$\begin{array}{rcl}
s_0^0(p,q) & = & s_0^0(pq,0)\\
& = & (p,0)(q,0)\\
& = & s_0^0(p)s_0^0(q)
\end{array}$$

bulunur. Dönüşümlerin toplam ve etkiyi koruduğu açıktır. Burada

$$\begin{array}{rcl}
(P\rtimes M)\times M & \longrightarrow & M\\
((p,m),m') & \longmapsto & (p,m),m' = p_{m'}+mm'
\end{array}$$

etkisi yardımıyla $(P\rtimes M)\rtimes M$ cebiri oluşturulabilir. Bu cebiri E_2 ile gösterilsin ve

$$\begin{array}{llcl}
d_0^2 = & E_2 & \longrightarrow & E_1\\
& (p,m,m') & \longmapsto & d_0^2(p,m,m')=(p,m)\\
d_1^2 & E_2 & \longrightarrow & E_1\\
& (p,m,m') & \longmapsto & d_1^2(p,m,m')=(p,m+m')\\
d_2^2 & E_2 & \longrightarrow & E_1\\
& (p,m,m') & \longmapsto & d_2^2(p,m,m')=(p+\partial(m),m')\\
s_0^1 & E_1 & \longrightarrow & E_2\\
& (p,m) & \longmapsto & s_0^1(p,m)=(p,m,0)\\
s_1^1 & E_1 & \longrightarrow & E_2\\
& (p,m) & \longmapsto & s_1^1(p,m)=(p,0,m)
\end{array}$$

dönüşümleri tanımlansın. Burada d_i ve s_j dönüşümlerinin birer cebir morfizmi oldukları gösterilmelidir.

$$\begin{array}{rcl}
d_0^2 = E_2: \; (P\rtimes M)\rtimes M & \longrightarrow & E_1 = P\rtimes M\\
(p,m,m') & \longmapsto & d_0^2(p,m,m')=(p,m)
\end{array}$$

için $(p,m,m'),(q,n,n')\in(P\rtimes M)\rtimes M$ olmak üzere

$$d_0^2(((p,m),m').((q,n),n')) = d_0^2((p,m),m').d_0^2((q,n),n')$$

olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
d_0^2((p,m,m^{'}).(q,n,n^{'})) &= d_0^2((p,m)(q,n),(p,m)_{n'}+(q,n)_{m'}+m^{'}n^{'}) \\
&= d_0^2(pq,p_n+q_n+mn,(p,m)_{n'}+(q,n)_{m'}+m^{'}n^{'}) \\
&= (pq,p_n+q_m+mn) \\
d_0^2((pm).m^{'}).d_0^2((qn).n^{'}) &= (p,m).(q,n) \\
&= (pq,p_n+q_m+mn)
\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

$$\begin{array}{rlcl}
d_1^2=E_2: & (P\rtimes M)\rtimes M & \longrightarrow & E_1=P\rtimes M \\
& (p,m,m^{'}) & \longmapsto & d_1^2(p,m,m^{'})=(p,m+m^{'})
\end{array}$$

$(p,m,m^{'}),(q,n,n^{'})\in(P\rtimes M)\rtimes M$ için ;

$$d_1^2(((p,m),m^{'}).((q,n),n^{'}))=d_1^2((p,m),m^{'}).d_1^2((q,n),n^{'})$$

olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
d_1^2(((p,m),m^{'}).((q,n),n^{'})) &= d_1^2((p,m)(q,n),(p,m)_{n'} \\
&+ (q,n)_{m'}+m^{'}n^{'}) \\
&= d_1^2(pq,p_n+q_n+mn,(p,m)_{n'} \\
&+ (q,n)_{m'}+m^{'}n^{'}) \\
&= (pq,p_n+q_m+mn+(p,m)_{n'} \\
&+ (q,n)_{m'}+m^{'}n^{'}) \\
&= (pq,p_n+q_m+mn+p_{n'}+mn^{'} \\
&+ q_{m'}+nm^{'}+m^{'}n^{'}) \\
d_1^2((p,m),m^{'}).d_1^2((q,n),n^{'}) &= (p,m+m^{'}).(q,n+n^{'}) \\
&= (pq,p_{n+n'}+q_{m+m'} \\
&+ (m+m^{'}).(n+n^{'})) \\
&= (pq,p_n+p_{n'}+q_m+q_{m'} \\
&+ mn+mn^{'}+m^{'}n+m^{'}n^{'})
\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

$$\begin{array}{rlcl}
d_2^2=E_2: & (P\rtimes M)\rtimes M & \longrightarrow & E_1=P\rtimes M \\
& (p,m,m^{'}) & \longmapsto & d_2^2(p,m,m^{'})=(p+\partial(m),m^{'})
\end{array}$$

$(p,m,m^{'}),(q,n,n^{'})\in(P\rtimes M)\rtimes M$ olmak üzere

$$d_2^2(((p,m),m^{'}).((q,n),n^{'}))=d_2^2((p,m),m^{'}).d_2^2((q,n),n^{'})$$

olduğu gösterilsin.

$$\begin{array}{rcl}
d_2^2(((p,m),m^{'}).((q,n),n^{'})) & = & d_2^2(pq, p_n+q_m+mn+p_{n'}+mn^{'} \\
& + & q_{m'}+m^{'}n+m^{'}n^{'}) \\
& = & (pq+\partial(p_n+q_m+mn), p_{n'} \\
& + & mn^{'}+q_{m'}+m^{'}n+m^{'}n^{'}) \\
& = & (pq+\partial(p_n)+\partial(q_m)+\partial(mn), p_{n'} \\
& + & mn^{'}+q_{m'}+m^{'}n+m^{'}n^{'}) \\
& = & (pq+\partial(p_n)+\partial(q_m)+\partial(m)\partial(n), p_{n'} \\
& + & mn^{'}+q_{m'}+m^{'}n+m^{'}n^{'}) \\
d_2^2((p,m),m^{'}).d_2^2((q,n),n^{'}) & = & (p+\partial(m),m^{'}).(q+\partial(n),n^{'}) \\
& = & (p+\partial(m)).(q+\partial(n)),(p+\partial(m))_{n'} \\
& + & (q+\partial(n))_{m'}+m^{'}n^{'}) \\
& = & pq+p.\partial(n)+q.\partial(m)+\partial(m)\partial(n), p_{n'} \\
& + & \partial(m)_{n'}+q_{m'}+\partial(n)_{m'}+m^{'}n^{'}
\end{array}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

$$\begin{array}{rclcl}
s_0^1 : E_1 = & P \rtimes M & \longrightarrow & E_2 = (P \rtimes M) \rtimes M \\
& (p,m) & \longmapsto & s_0^1(p,m) = (p,m,0)
\end{array}$$

$(p,m),(q,n) \in P \rtimes M$ olmak üzere

$$s_0^1((p,m).(q,n)) = s_0^1(p,m)s_0^1(q,n)$$

eşitliği gösterilsin.

$$\begin{array}{rcl}
s_0^1((p,m).(q,n)) & = & s_0^1(pq, p_n+q_m+mn) \\
& = & (pq, p_n+q_m+mn, 0) \\
s_0^1(p,m)s_0^1(q,n) & = & (p,m,0)(q,n,0) \\
& = & (pq, p_n+q_m+mn, 0)
\end{array}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

$$\begin{array}{rclcl}
s_1^1 : E_1 = & P \rtimes M & \longrightarrow & E_2 = (P \rtimes M) \rtimes M \\
& (p,m) & \longmapsto & s_1^1(p,m) = (p,0,m)
\end{array}$$

$(p,m),(q,n) \in P \rtimes M$ olmak üzere

$$s_1^1((p,m).(q,n)) = s_1^1(p,m)s_1^1(q,n)$$

eşitliği gösterilsin.

$$\begin{array}{rcl}
s_1^1((p,m).(q,n)) & = & s_1^1(pq, p_n+q_m+mn) \\
& = & (pq, 0, p_n+q_m+mn) \\
s_1^1(p,m)s_1^1(q,n) & = & (p,0,m).(q,n,0) \\
& = & (pq, 0, p_n+q_m+mn)
\end{array}$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Böylece çarpım şartlarını sağlayarak dönüşümlerin birer cebibr morfizmi olduğu görülür. Şimdi de dönüşümlerin simplisel özdeşliklerin sağlandığı gösterilsin.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots E_2 \arrow[r, shift left=4, "d_0^2"] \arrow[r, shift left=2, "d_1^2"] \arrow[r, "d_2^2"] & E_1 \arrow[l, bend left, "s_0^1"] \arrow[l, bend left=50, "s_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "d_0^1"] \arrow[r, "d_1^1"] & E_0 \arrow[l, bend left, "s_0^0"]
\end{tikzcd}
$$

için 1) $n=2$ için $i=0,1,2$ olur

$$
\begin{aligned}
d_0^1 d_1^2 &= d_0^1 d_0^2 \\
d_0^1 d_2^2 &= d_1^1 d_0^2 \\
d_1^1 d_2^2 &= d_1^1 d_1^2
\end{aligned}
$$

2) $n=0$ için

$$s_0^1 s_0^0 = s_1^1 s_0^0$$

3) $n=1$ için

$$d_0^2 s_1^1 = s_0^0 d_0^1$$

4) $n=1$ için

$$
\begin{aligned}
d_0^2 s_0^1 &= Id \\
d_1^2 s_0^1 &= Id \\
d_1^2 s_1^1 &= Id
\end{aligned}
$$

$n=0$ için

$$d_0^1 s_0^0 = Id$$

5) $n=1$ için

$$d_2^2 s_0^1 = s_0^0 d_1^1$$

1) $(d_0^1 d_1^2)((p,m),m^{'}) = (d_0^1 d_0^2)((p,m),m^{'})$ eşitliğini gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(d_0^1 d_1^2)((p,m),m^{'}) &= d_0^1(d_1^2((p,m),m^{'})) \\
&= d_0^1(p, m+m^{'}) \\
&= p \\
(d_0^1 d_0^2)((p,m),m^{'}) &= d_0^1(d_0^2((p,m),m^{'})) \\
&= d_0^1(p,m) \\
&= p
\end{aligned}
$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

$(d_0^1d_2^2)((p,m),m^{'}) = (d_1^1d_0^2)((p,m),m^{'})$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}(d_0^1d_2^2)((p,m),m^{'}) &= d_0^1(d_2^2((p,m),m^{'})) \\ &= d_0^1(p+\partial(m),m^{'}) \\ &= p+\partial(m) \\ (d_1^1d_0^2)((p,m),m^{'}) &= d_1^1(d_1^2((p,m),m^{'})) \\ &= d_1^1(p,m) \\ &= p+\partial(m)\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

$(d_1^1d_2^2)((p,m),m^{'}) = (d_1^1d_1^2)((p,m),m^{'})$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}(d_1^1d_2^2)((p,m),m^{'}) &= d_1^1(d_2^2((p,m),m^{'})) \\ &= d_1^1(p+\partial(m),m^{'}) \\ &= p+\partial(m)+\partial(m^{'}) \\ (d_1^1d_1^2)((p,m),m^{'}) &= d_1^1(d_1^2((p,m),m^{'})) \\ &= d_1^1(p,m+m^{'}) \\ &= p+\partial(m+m^{'}) \\ &= p+\partial(m)+\partial(m^{'})\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

2) $s_0^1s_0^0(p) = s_1^1s_0^0(p)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}s_0^1s_0^0(p) &= s_0^1(s_0^0(p)) \\ &= s_0^1(p,0) \\ &= (p,0,0) \\ s_1^1s_0^0(p) &= s_1^1(s_0^0(p)) \\ &= s_1^1(p,0) \\ &= (p,0,0)\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

3) $d_0^2s_1^1(p,m) = s_0^0d_0^1(p,m)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}d_0^2s_1^1(p,m) &= d_0^2(s_1^1(p,m)) \\ &= d_0^2(p,0,m) \\ &= (p,0) \\ s_0^0d_0^1(p,m) &= s_0^0(d_0^1(p,m)) \\ &= s_0^0(p) \\ &= (p,0)\end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

4)

$$\begin{aligned} d_0^2 s_0^1(p,m) &= d_0^2(s_0^1(p,m)) \\ &= d_0^2(p,m,0) \\ &= (p,m) \end{aligned}$$

$$d_0^2 s_0^1(p,m) = (p,m)$$

eşitliğini elde ettiğimizden $d_0^2 s_0^1 = Id$ olur.

$$\begin{aligned} d_1^2 s_0^1(p,m) &= d_1^2(s_0^1(p,m)) \\ &= d_1^2(p,m,0) \\ &= (p,m+0) \\ &= (p,m) \end{aligned}$$

$$d_1^2 s_0^1(p,m) = (p,m)$$

eşitliğini elde ettiğimizden $d_1^2 s_0^1 = Id$ olur.

$$\begin{aligned} d_1^2 s_1^1(p,m) &= d_1^2(s_1^1(p,m)) \\ &= d_1^2(p,0,m) \\ &= (p,0+m) \\ &= (p,m) \end{aligned}$$

$$d_1^2 s_1^1(p,m) = (p,m)$$

eşitliğini elde ettiğimizden $d_1^2 s_1^1 = Id$ olur.

$$\begin{aligned} d_0^1 s_0^0(p) &= d_0^1(s_0^0(p)) \\ &= d_0^1(p,0) \\ &= p \end{aligned}$$

$$d_0^1 s_0^0(p) = p$$

eşitliğinden $d_0^1 s_0^0 = Id$ olur.

5) $d_2^2 s_0^1(p,m) = s_0^0 d_1^1(p,m)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} d_2^2 s_0^1(p,m) &= d_2^2(s_0^1(p,m)) \\ &= d_2^2(p,m,0) \\ &= (p+\partial(m),0) \\ s_0^0 d_1^1(p,m) &= s_0^0(d_1^1(p,m)) \\ &= s_0^0(p+\partial(m)) \\ &= (p+\partial(m),0) \end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Böylelikle d_i ve s_j dönüşümlerinin simplisel özdeşliklerini sağladığı görülmüş olur. Şimdi Moore Kompleksinin uzunluğunun 1 olmasını kontrol edilsin. Bunun için $NE_2 = \text{Çek}d_0^2 \cap \text{Çek}d_1^2 = 0$ olduğunun kontrol edilmesi gerekir.

$$\begin{aligned}
\text{Çek}d_0^2 &= \big\{((p,m),m') \in E_2 | d_0^2((p,m),m') = (0,0)\big\} \\
&= \big\{((p,m),m') | (p,m) = (0,0)\big\} \\
&= \big\{((0,0),m') | m' \in M\big\} \\
\text{Çek}d_1^2 &= \big\{((p,m),m') | d_1^2((p,m),m') = (0,0)\big\} \\
&= \big\{((p,m),m') | (p,m+m') = (0,0)\big\} \\
&= \big\{((p,m),m') | (p = 0, m = -m', m' \in M\big\} \\
&= \big\{((0,-m'),m') | m' \in M\big\}
\end{aligned}$$

olur ve böylelikle

$$\begin{aligned}
\text{Çek}d_0^2 \cap \text{Çek}d_1^2 &= \big\{((0,0),m') \text{ ve } ((0,-m'),m') | m' \in M\big\} \\
&= \{(0,0,0)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $NE_2 = 0$ olup Moore Kompleksinin boyu 1 olur. Böylece (M,P,∂) çaprazlanmış modülünden

$$\cdots (P \rtimes M) \rtimes M \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longleftarrow\\\longleftarrow}\; P \rtimes M \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longleftarrow}\; P$$

şeklinde Moore Kompleksinin uzunluğu 1 olan bir simplisel cebir elde edildi. Bunu

$$\begin{aligned}
F:\ XMod &\longrightarrow Simp_{\leq 1} \\
M &\longmapsto F(M)
\end{aligned}$$

biçiminde kategoriler arasında bir dönüşüm ile ifade edelim. Şimdi, $XMod$ kategorisindeki morfizmlerin F dönüşümü altındaki görüntülerini inceleyelim. $M = (\partial : M \longrightarrow P)$ ve $N = (\partial' : N \longrightarrow R)$ çaprazlanmış modülleri için

$$f = (f_1, f_0) : M \longrightarrow N$$

çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Buna göre,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"'] & P \arrow[d, "f_0"] \\
N \arrow[r, "\partial'"'] & R
\end{tikzcd}$$

için $\partial' f_1 = f_0 \partial$ dır ve $p \in P, m \in M$ için $f_1(p_m) = f_0(p)_{f_1(m)}$ sağlanır. Bu çaprazlanmış modül morfizminin F dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\mathbf{M}) = \cdots \arrow[d, "F(f)"'] & \cdots (P \rtimes M) \rtimes M \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_2}"'] & P \rtimes M \arrow[l, shift left=1] \arrow[l, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_1}"'] & P \arrow[l, shift left=1] \arrow[d, "\overline{f_0}"'] \\
\mathbf{F}'(\mathbf{N}) = \cdots & \cdots (R \rtimes N) \rtimes N \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r] & R \rtimes N \arrow[l, shift left=1] \arrow[l, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r] & R \arrow[l, shift left=1]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{lll}
\overline{f_0} = P \longrightarrow R & , & \overline{f_0}(p) = f_0(p) \\
\overline{f_1} = P \rtimes M \longrightarrow R \rtimes N & , & \overline{f_1}(p,m) = (f_0(p), f_1(m)) \\
\overline{f_2} = (P \rtimes M) \rtimes M \longrightarrow (R \rtimes N) \rtimes N & , & \overline{f_2}((p,m),m') = ((f_0(p), f_1(m)), f_1(m')) \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

olmak üzere,

$$F(f) = (\ldots, \overline{f_2}, \overline{f_1}, \overline{f_0})$$

şeklinde tanımlansın. $F(f)$ in bir simplisel morfizm olduğunu gösterelim.

olup $\overline{f_i}$ dönüşümeri birer cebir morfizmidir. Ayrıca $(p,m) \in P \rtimes M$ için,

$$\overline{f_0} d_0^1(p,m) = \overline{f_0}(p) = f_0(p)$$

ve

$$\delta_0^1 \overline{f_1}(p,m) = \delta_0^1(f_0(p), f_1(p)) = f_0(p)$$

olup

$$\overline{f_0} d_0^1 = \delta_0^1 \overline{f_1}$$

olur.

$$\begin{array}{rcl}
\overline{f_0} d_1^1(p,m) & = & \overline{f_0}(p + \partial(m)) \\
 & = & f_0(p) + f_0\partial(m)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\delta_1^1 \overline{f_1}(p,m) & = & \delta_1^1(f_0(p), f_1(m)) \\
 & = & f_0(p) + \partial' f_1(m) \\
 & = & f_0(p) + f_0\partial(m)
\end{array}$$

olup

$$\overline{f_0} d_1^1 = \delta_1^1 \overline{f_1}$$

olur ve $p \in P$ için

$$\begin{array}{rcl}
\overline{f_1} s_0^0(p) & = & \overline{f_1}(p,0) \\
 & = & (f_0(p,0))
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_0^0 \overline{f_0}(p) & = & \sigma_0^0(f_0(p)) \\
 & = & (f_0(p), 0)
\end{array}$$

olup

$$\overline{f_1} s_0^0 = \sigma_0^0 \overline{f_0}$$

elde edilir. Benzer şekilde $((p,m),m') \in (P \rtimes M) \rtimes M$ için,

$$\begin{array}{rcl}
\overline{f_1} d_0^2((p,m),m') & = & \overline{f_1}(p,m) \\
 & = & (f_0(p), f_1(m))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\delta_0^2\overline{f_2}((p,m),m^{'}) &= \delta_0^2((f_0(p),f_1(m)),f_1(m^{'}))\\ &= (f_0(p),f_1(m))\end{aligned}$$

olup

$$\overline{f_1}d_0^2 = \delta_0^2\overline{f_2}$$

olur.

$$\begin{aligned}\overline{f_1}d_1^2((p,m),m^{'}) &= \overline{f_1}(p,m+m^{'})\\ &= (f_0(p),f_1(m)+f_1(m^{'}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_1^2\overline{f_2}((p,m),m^{'}) &= \delta_1^2((f_0(p),f_1(m)),f_1(m^{'}))\\ &= (f_0(p),f_1(m)+f_1(m^{'}))\end{aligned}$$

olup

$$\overline{f_1}d_1^2 = \delta_1^2\overline{f_2}$$

olur.

$$\begin{aligned}\overline{f_1}d_2^2((p,m),m^{'}) &= \overline{f_1}(p+\partial(m),m^{'})\\ &= (f_0(p)+f_0\partial(m),f_1(m^{'}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_2^2\overline{f_2}((p,m),m^{'}) &= \delta_2^2((f_0(p),f_1(m)),f_1(m^{'}))\\ &= (f_0(p)+\partial^{'}f_1(m),f_1(m^{'}))\\ &= (f_0(p)+f_0\partial(m),f_1(m^{'}))\end{aligned}$$

olup

$$\overline{f_1}d_2^2 = \delta_2^2\overline{f_2}$$

elde edilir. $(p,m)\in P\rtimes M$ için,

$$\begin{aligned}\overline{f_2}s_0^1(p,m) &= \overline{f_2}((p,m),0)\\ &= ((f_0(p),f_1(m)),0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_0^1\overline{f_1}(p,m) &= \sigma_0^1((f_0(p),f_1(m))\\ &= ((f_0(p),f_1(m)),0)\end{aligned}$$

olup

$$\overline{f_2}s_0^1 = \sigma_0^1\overline{f_1}$$

olur.

$$\begin{aligned}\overline{f_2}s_1^1(p,m) &= \overline{f_2}((p,0),m)\\ &= ((f_0(p),0),f_1(m))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^1\overline{f_1}(p,m) &= \sigma_1^1((f_0(p),f_1(m))\\ &= ((f_0(p),0),f_1(m))\end{aligned}$$

olup

$$\overline{f_2}s_1^1 = \sigma_1^1\overline{f_1}$$

elde edilir. O halde $F(f) = (...\overline{f_2},\overline{f_1},\overline{f_0})$ bir simplisel morfizmdir.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}= & \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"'] & P \arrow[d, "f_0"] \\ N \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "g_1"'] & R \arrow[d, "g_0"] \\ L \arrow[r, "\partial''"] & T \end{tikzcd} \\ \mathcal{N}= & \\ \mathcal{L}= & \end{array} \Rightarrow \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_1 f_1"'] & P \arrow[d, "g_0 f_0"] \\ L \arrow[r, "\partial''"'] & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f_0\partial &= \partial' f_1 \\ f_1(p_m) &= f_0(p)_{f_1(m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_0\partial' &= \partial'' g_1 \\ g_1(r_n) &= g_0(r)_{g_1(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1)\quad g_0f_0\partial &= g_0(f_0\partial) \\ &= g_0(\partial' f_1) \\ &= (g_0\partial')f_1 \\ &= (\partial'' g_1)f_1 \\ &= \partial''(g_1f_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\quad (g_1f_1)(p_m) &= g_1(f_1(p_m)) \\ &= g_1(f_0(p)_{f_1(m)}) \\ &= g_0(f_0(p))_{g_1(f_1(m))} \\ &= (g_0f_0)(p)_{(g_1f_1)(m)} \end{aligned}$$

dir.

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L)$$

için

$$F(gf) = F(g)F(f)$$

olduğu kolayca görülür.

Böylece $F : XMod \longrightarrow Simp \leq 1$ dönüşümü bir Funktor olur.

Teorem 2. $F : \mathbf{C} = XMod \longrightarrow \mathbf{D} = Simp \leq 1$ *ve* $G : \mathbf{D} = Simp \leq 1 \longrightarrow \mathbf{C} = XMod$ *funktorları için* $G \circ F \cong 1_{\mathbf{C}}$ *ve* $F \circ G \cong 1_{\mathbf{D}}$ *dir.*

İspat. $A = (M, P, \partial) \in Ob(\mathbf{C})$ *alınsın.*

$$F(A) = \overline{A} = \cdots (P \rtimes M) \rtimes M \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} P \rtimes M \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} P$$

olur ve $F(A) = \overline{A} \in Ob(\mathbf{D})$ *dir. Ayrıca* $G(F(A)) = G(\overline{A}) = Kerd_0^1 \xrightarrow{d_1^1} P$ *bulunur ve*

$G(F(A)) \in Ob(\mathbf{C})$ olur. Burada

$$\begin{array}{rcl} Kerd_0^1 & = & \{(p,m)|d_0^1(p,m)=0\} \\ & = & \{(p,m)|d_0^1(p,m)=p=0\} \\ & = & \{(0,m)|m \in M\} \\ & \cong & M \end{array}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{array}{rcl} G(F(A)) & \cong & (M \xrightarrow{\partial} P) \\ & \cong & A \end{array}$$

bulunur.

$F : C = XMod \longrightarrow D = Simp \leq 1$ ve $G : D = Simp \leq 1 \longrightarrow C = XMod$ olmak üzere $A = (M, P, \partial)$, $A^{'} = (M^{'}, P^{'}, \partial^{'}) \in Ob(C)$ olmak üzere $f = (f_1, f_0) : A \longrightarrow A^{'}$ morfizm olsun. Buna göre

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"'] & P \arrow[d, "f_0"] \\ M' \arrow[r, "\partial'"'] & P' \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{1)} & f_0\partial & = & \partial^{'} f_1 \\ \text{2)} & f_1(p_m) & = & f_0(p)_{f_1(m)} \end{array}$$

sağlanır. $f' = (f_1, f_0)$ çaprazlanmış modül morfizminin F funktoru altındaki görüntüsü

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F(A)} = \overline{A} = \cdots \arrow[d, "F(f)"'] & \cdots (P \rtimes M) \rtimes M \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "\overline{f_2}"'] & P \rtimes M \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left=5] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "\overline{f_1}"'] & P \arrow[l, shift left=3] \arrow[d, "\overline{f_0}"'] \\ \mathbf{F(A')} = \overline{A'} = \cdots & \cdots (P' \rtimes M') \rtimes M' \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & P' \rtimes M' \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left=5] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & P' \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

şeklinde olur. Burada $\overline{f_0} = f_0$ $\overline{f_1}(p,m) = (f_0(p), f_1(m)) \in P^{'} \rtimes M^{'}$ şeklindedir. Bunun cebir morfizmi olduğu gösterilmelidir. $(p,m)(p^{'},m^{'}) = (pp^{'}, p_{m^{'}} + p^{'}_m + mm^{'})$ olup,

$$\begin{array}{rcl} \overline{f_1}((p,m)(p^{'},m^{'})) & = & \overline{f_1}(pp^{'}, p_{m^{'}} + p^{'}_m + mm^{'}) \\ & = & (f_0(pp^{'}), f_1(p_{m^{'}} + p^{'}_m + mm^{'})) \\ & = & (f_0(p)f_0(p^{'}), f_0(p)_{f_1(m^{'})} + f_0(p^{'})_{f_1(m)} + f_1(m)f_1(m^{'})) \\ & = & (f_0(p), f_1(m))(f_0(p^{'}), f_1(m^{'})) \\ & = & \overline{f_1}(p,m)\overline{f_1}(p^{'},m^{'}) \end{array}$$

olup $\overline{f_1}$ cebir morfizmidir. Benzer şekilde $\overline{f_2}$ ve $n \in \mathcal{N}$ için $\overline{f_n}$ dönüşümleri de cebir morfizmi olur. d_i ve s_j morfizmleri için

$$\begin{array}{rrcl} d_0^1 : & P \rtimes M & \longrightarrow & P \\ & (p,m) & \longmapsto & p \end{array}$$

$$\begin{aligned} d_1^1: \quad P \rtimes M &\longrightarrow P \\ (p,m) &\longmapsto p+\partial(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0: \quad P &\longrightarrow P \rtimes M \\ p &\longmapsto (p,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0^2: \quad (P \rtimes M) \rtimes M &\longrightarrow P \rtimes M \\ ((p,m),m^{'}) &\longmapsto (p,m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1^2: \quad (P \rtimes M) \rtimes M &\longrightarrow P \rtimes M \\ ((p,m),m^{'}) &\longmapsto (p,m+m^{'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2^2: \quad (P \rtimes M) \rtimes M &\longrightarrow P \rtimes M \\ ((p,m),m^{'}) &\longmapsto (p+\partial(m),m^{'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0^1: \quad P \rtimes M &\longrightarrow (P \rtimes M) \rtimes M \\ (p,m) &\longmapsto ((p,m),0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1^1: \quad P \rtimes M &\longrightarrow (P \rtimes M) \rtimes M \\ (p,m) &\longmapsto ((p,0),m) \end{aligned}$$

morfizmleri için

$$\begin{aligned} \textit{i)} \quad \overline{f_0}d_0^1(p,m) &= f_0(p) \\ \delta_0^1\overline{f_1}(p,m) &= \delta_0^1(f_0(p),f_1(m)) \\ &= f_0(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{ii)} \quad \overline{f_0}d_1^1(p,m) &= \overline{f_0}(p+\partial(m)) \\ &= \overline{f_0}(p)+\overline{f_0}\partial(m) \\ &= f_0(p)+f_0\partial(m) \\ \delta_1^1\overline{f_1}(p,m) &= \delta_1^1(f_0(p),f_1(m)) \\ &= f_0(p)+\delta_1^1 f_1(m) \\ &= f_0(p)+\partial^{'} f_1(m) \\ &= f_0(p)+f_0\partial(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{iii)} \quad \overline{f_1}s_0^0(p) &= \overline{f_1}(p,0) \\ &= (f_0(p),0) \\ \delta_0^0\overline{f_0}(p) &= \delta_0^0(f_0(p)) \\ &= (f_0(p),0) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde diğerleri için de değişmelilik sağlanır. Buna göre $\overline{f}=F(f):F(A)\longrightarrow F(A^{'})$ *dönüşümü bir simplisel morfizmdir.*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{GF(A)} = & M \cong Ker d_0^1 \xrightarrow{d_1^1} P \\ & \quad \Big\downarrow f_1 \qquad\qquad \Big\downarrow f_0 \\ \mathbf{GF(A')} = & M' \cong Ker \delta_0^1 \xrightarrow{\delta_1^1} P' \end{array}$$

olup $GF(f) \cong f$ *olur. Dolayısıyla* $G \circ F \cong 1_{\mathbf{C}}$ *elde edilir.*

$$G : \mathbf{D} = Simp \leq 1 \longrightarrow \mathbf{C} = XMod$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} = \cdots E_3 \arrow[r, shift left=4.5] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[r, shift right=4.5] & E_2 \arrow[l, bend left=20] \arrow[l, bend left=40] \arrow[l, bend left=60] \arrow[r, shift left=3, "d_0^2"] \arrow[r, "d_1^2"] \arrow[r, shift right=3, "d_2^2"] & E_1 \arrow[l, bend left=30, "s_0^1"] \arrow[l, bend left=50, "s_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "d_0^1"] \arrow[r, shift right=2, "d_1^1"] & E_0 \arrow[l, bend left=30, "s_0^0"]
\end{tikzcd}$$

$E \in Obj(\mathbf{D})$ *olsun.* $G(E) = \overline{E}_1 = Kerd_0^1 \xrightarrow{d_1^1} E_0$ *olup* $G(E) \in Obj(\mathbf{C})$ *dir. Buradan*

$$\begin{tikzcd}
F(G(E)) : \cdots (E_0 \rtimes \overline{E_1}) \rtimes \overline{E_1} \arrow[r, shift left=6] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] & E_0 \rtimes \overline{E_1} \arrow[l, shift left=1] \arrow[l, shift left=3] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] & E_0 \arrow[l, shift left=1]
\end{tikzcd}$$

olup $FG(E) \in Obj(\mathbf{D})$ *dir. Önerme 5 gereği*

$$\begin{array}{rcl}
E_0 & = & E_0 \\
E_1 & \cong & E_0 \rtimes NE_1 \\
E_2 & \cong & (E_0 \rtimes NE_1) \rtimes NE_1 \\
E_3 & \cong & ((E_0 \rtimes NE_1) \rtimes NE_1) \rtimes NE_1 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

olduğundan

$$FG(E) \cong E$$

elde edilir. Buradan $F \circ G \cong 1_{\mathbf{D}}$ *olduğu söylenir. O halde* **C** *ve* **D** *kategorileri denktir.*

4. SİMPLİSEL CEBİRLERİN VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN HOMOTOPİSİ

4.1 Simplisel Cebir Homotopisinden Çaprazlanmış Modül Homotopisine

E ve E', Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan iki simplisel cebir olsun. f, g ise E ve E' arasında simplisel morfizmler ve h, f ve g yi birleştiren bir simplisel homotopi olsun.

$$\begin{tikzcd}
E = \cdots E_2 \arrow[r, shift left=3, "d_0^2"] \arrow[r, shift left=1, "d_1^2"] \arrow[r, shift right=1, "d_2^2"] \arrow[d, bend right, "g_2"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] & E_1 \arrow[l, bend left, "s_0^1"] \arrow[l, bend left=50, "s_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "d_0^1"] \arrow[r, "d_1^1"] \arrow[dl, shift right, "h_1^1"'] \arrow[dl, shift left, "h_0^1"] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] & E_0 \arrow[l, bend left, "s_0^0"] \arrow[dl, "h_0^0"] \arrow[d, bend right, "g_0"'] \arrow[d, bend left, "f_0"] \\
E' = \cdots E'_2 \arrow[r, shift left=3, "d_0^2"] \arrow[r, shift left=1, "d_1^2"] \arrow[r, shift right=1, "d_2^2"] & E'_1 \arrow[l, bend left, "s_0^1"] \arrow[l, bend left=50, "s_1^1"] \arrow[r, shift left=2, "\delta_0^1"] \arrow[r, "\delta_1^1"] & E'_0 \arrow[l, bend left, "\partial_0^0"]
\end{tikzcd}$$

$SimpA\lg \leq 1$ kategorisinden $XMod$ kategorisine geçiş funktoru olan G funktoru kullanılırsa,

$$\begin{aligned} G(E) &= (\partial : M \longrightarrow P) \\ G(E') &= (\partial' : M' \longrightarrow P') \end{aligned}$$

çaprazlanmış modülleri ve $G(f) = (f_1/_M, f_0)$ çaprazlanmış modül morfizmi elde edilir, burada $P = E_0$, $M = Kerd_0^1$, $\partial = d_1^1/_M$ ve P nin M üzerine etkisi $p.m = s_0^0(p)m$ dir ve $P' = E_0'$, $M' = Ker\delta_0^1$, $\partial' = \delta_1^1/_{M'}$ ve P' nin M' üzerine etkisi $p'.m' = \partial_0^0(p')m'$ olur. Burada $a \in E_0$ için $k(a) = h_0^0(a) - \partial_0^0 f_0(a)$ tanımlamasını yapılsın.

Yardımcı Teorem 1. *$\forall a \in E_0$ için $k(a) \in Ker\delta_0^1 = NE_1'$ dir.*

İspat.

$$\begin{aligned} \delta_0^1(k(a)) &= \delta_0^1(h_0^0(a) - \partial_0^0 f_0(a)) \\ &= \delta_0^1 h_0^0(a) - \delta_0^1\partial_0^0 f_0(a) \\ &= f_0(a) - f_0(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $k(a) \in Ker\delta_0^1$ bulunur. O halde her $a \in E_0$ için $k(a) \in Ker\delta_0^1 = NE_1'$ olup

$$\begin{aligned} k : \quad P &\longrightarrow M' \\ a &\longmapsto k(a) = h_0^0(a) - \partial_0^0 f_0(a) \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2. $k : P \longrightarrow M'$, $k(a) = h_0^0(a) - \partial_0^0 f_0(a)$ *dönüşümü için*

$$\begin{aligned} \delta_1^1 k &= g_0 - f_0 \\ k d_1^1 &= g_1 - f_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} \delta_1^1 k &= \delta_1^1 (h_0^0 - \partial_0^0 f_0) \\ &= \delta_1^1 h_0^0 - \delta_1^1 \partial_0^0 f_0 \\ &= g_0 - f_0 \end{aligned}$$

yani $\delta_1^1 k = g_0 - f_0$ *elde edilir.*

$$\begin{aligned} k d_1^1 &= (h_0^0 - \partial_0^0 f_0) d_1^1 \\ &= h_0^0 d_1^1 - \partial_0^0 f_0 d_1^1 \\ &= h_0^0 d_1^1 - \partial_0^0 \delta_0^1 h_0^0 d_1^1 \\ &= \delta_2^2 h_0^1 - \partial_0^0 \delta_0^1 \delta_2^2 h_0^1 \\ &= \delta_2^2 h_0^1 - \partial_0^0 \delta_1^1 \delta_0^2 h_0^1 \\ &= \delta_2^2 h_0^1 - \delta_2^2 \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 \\ &= \delta_2^2 h_0^1 - \delta_2^2 \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 + \delta_2^2 h_1^1 - \delta_2^2 h_1^1 + \delta_0^2 h_0^1 - \delta_0^2 h_0^1 \\ &= (\delta_2^2 h_0^1 - \delta_2^2 \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 - \delta_2^2 h_1^1 + \delta_0^2 h_0^1) + \delta_2^2 h_1^1 - \delta_0^2 h_0^1 \\ &= \delta_2^2 [h_0^1 - \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 - h_1^1 + \partial_1^1 \delta_0^2 h_0^1] + \delta_2^2 h_1^1 - \delta_0^2 h_0^1 \end{aligned}$$

olur. Burada $e \in Ker d_0^1$ *için*

$$\begin{aligned} \delta_0^2[(h_0^1 - \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 - h_1^1 + \partial_1^1 \delta_0^2 h_0^1)(e)] &= \delta_0^2 h_0^1(e) - \delta_0^2 \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &- \delta_0^2 h_1^1(e) + \delta_0^2 \partial_1^1 \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &= \delta_0^2 h_0^1(e) - \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &- h_0^0 d_0^1(e) + \partial_0^0 \delta_0^1 \delta_1^2 h_0^1(e) \\ &= -h_0^0 d_0^1(e) + \partial_0^0 \delta_0^1 \delta_1^2 h_1^1(e) \\ &= -h_0^0 d_0^1(e) + \delta_0^2 \partial_1^1 \delta_0^2 h_1^1(e) \\ &= h_0^0 d_0^1(e) + \delta_0^2 \partial_1^1 h_0^0 d_0^1(e) \end{aligned}$$

olur. $e \in Ker d_0^1$ *olduğundan* $d_0^1(e) = 0$ *olup,* $\delta_0^2[(h_0^1 - \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 - h_1^1 + \partial_1^1 \delta_0^2 h_0^1)(e)] = 0$ *bulunur. Benzer şekilde* $e \in Ker d_0^1$ *için,*

$$\begin{aligned} \delta_1^2[(h_0^1 - \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1 - h_1^1 + \partial_1^1 \delta_0^2 h_0^1)(e)] &= \delta_1^2 h_0^1(e) - \delta_1^2 \partial_0^1 \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &- \delta_1^2 h_1^1(e) + \delta_1^2 \partial_1^1 \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &= \delta_1^2 h_0^1(e) - \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &- \delta_1^2 h_1^1(e) + \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &= \delta_1^2 h_1^1(e) - \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &- \delta_1^2 h_1^1(e) + \delta_0^2 h_0^1(e) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre $e \in Kerd_0^1$ *için* $(h_0^1 - \partial_0^1\delta_0^2h_0^1 - h_1^1 + \partial_1^1\delta_0^2h_0^1)(e) \in Ker\delta_0^2 \cap Ker\delta_1^2 = NG_2^{'} = 0$ *elde edilir. Öyleyse* $\delta_2^2[h_0^1 - \partial_0^1\delta_0^2h_0^1 - h_1^1 + \partial_1^1\delta_0^2h_0^1] = 0$ *dır. Buna göre,*

$$\begin{aligned} kd_1^1 &= \delta_2^2h_1^1 - \delta_0^2h_0^1 \\ &= g_1 - f_1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$k = h_0^0 - \partial_0^0 f_0 : P \longrightarrow M^{'}$$

dönüşümü için,

$$\begin{aligned} g_0 &= f_0 + \delta_1^1 k \\ g_1 &= f_1 + kd_1^1 \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} g_0 &= f_0 + \partial^{'} k \\ g_1 &= f_1 + k\partial \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3. $a, a^{'} \in P$ *için* $k(aa^{'}) = f_0(a).k(a^{'}) + f_0(a^{'}).k(a) + k(a)k(a^{'})$ *eşitliği sağlanır yani* k *bir* f_0 *derivasyondur.*

İspat.

$$\begin{aligned} k(aa^{'}) &= (h_0^0 - \partial_0^0 f_0)(aa^{'}) \\ &= h_0^0(a)h_0^0(a^{'}) - \partial_0^0 f_0(a)\partial_0^0 f_0(a^{'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(a)k(a^{'}) + f_0(a^{'})k(a) + k(a)k(a^{'}) &= \partial_0^0 f_0(a)k(a^{'}) + \partial_0^0 f_0(a^{'})k(a) \\ &+ k(a)k(a^{'}) \\ &= \partial_0^0 f_0(a)(h_0^0(a^{'}) - \partial_0^0 f_0(a^{'})) \\ &+ \partial_0^0 f_0(a^{'})(h_0^0(a) - \partial_0^0 f_0(a)) \\ &= \partial_0^0 f_0(a)h_0^0(a^{'}) - \partial_0^0 f_0(a)\partial_0^0 f_0(a^{'}) \\ &+ \partial_0^0 f_0(a^{'}) - \partial_0^0 f_0(a^{'})\partial_0^0 f_0(a) \\ &+ h_0^0(a)h_0^0(a^{'}) - h_0^0(a)\partial_0^0 f_0(a^{'}) \\ &- \partial_0^0 f_0(a)h_0^0(a^{'}) + \partial_0^0 f_0(a)\partial_0^0 f_0(a^{'}) \\ &= h_0^0(a)h_0^0(a^{'}) - \partial_0^0 f_0(a)\partial_0^0 f_0(a^{'}) \end{aligned}$$

olup $k(aa^{'}) = f_0(a).k(a^{'}) + f_0(a^{'}).k(a) + k(a)k(a^{'})$ *eşitliği elde edilir.*

Sonuç 1. $G(h) = k : P \longrightarrow M^{'}$, $G(h)(a) = k(a) = h_0^0(a) - \partial_0^0(\delta_0^1 h_0^0)(a)$ *dönüşümü* $G(f), G(g) : G(E) \longrightarrow G(E^{'})$ *çaprazlanmış modül morfizmleri arasında bir homotopidir.*

4.2 Çaprazlanmış Modül Homotopisinden Simplisel Cebir Homotopisine

$C = (M \xrightarrow{\partial} P)$ ve $C^{'} = (M^{'} \xrightarrow{\partial^{'}} P^{'})$ iki çaprazlanmış modül (değişmeli cebirlerin), $f = (f_1, f_0)$ ve $g = (g_1, g_0)$ C ile $C^{'}$ arasında iki çaprazlanmış modül morfizmi ve s, f ile g arasında bir çaprazlanmış modül homotopisi olsun.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] & P \arrow[dl, "s"] \arrow[d, bend right, "g_0"'] \arrow[d, bend left, "f_0"] \\
M' \arrow[r, "\partial'"'] & P'
\end{tikzcd}$$

$XMod$ kategorisinden $SimpA\lg \leq 1$ kategorisine geçiş funktoru olan **F** funktoru kullanılırsa,

$$F(C) = (\cdots M \rtimes (M \rtimes P) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; M \rtimes P \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; P)$$

$$F(C') = (\cdots M' \rtimes (M' \rtimes P') \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; M' \rtimes P' \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; P')$$

şeklinde Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel cebirler elde edilir. Burada,

$$\begin{array}{llll}
h_0^0: & P & \longrightarrow & M' \rtimes P' \\
 & p & \longmapsto & h_0^0(p) = (s(p), f_0(p)) \\
h_0^1: & M \rtimes P & \longrightarrow & M' \rtimes (M' \rtimes P') \\
 & (m,p) & \longmapsto & h_0^1(m,p) = (s(\partial(m)+p), f_1(m), f_0(p)) \\
h_1^1: & M \rtimes P & \longrightarrow & M' \rtimes (M' \rtimes P') \\
 & (m,p) & \longmapsto & h_1^1(m,p) = (f_1(m) + s\partial(m), s(p), f_0(p))
\end{array}$$

dönüşümleri tanımlanabilir.

Yardımcı Teorem 4. *Yukarıda tanımlanan h_0^0, h_0^1 ve h_1^1 cebir morfizmidir.*

İspat. *Bu dönüşümlerin $k-$lineerliği açıktır. $p, r \in P$ için*

$$\begin{array}{lll}
h_0^0(pr) & = & (s(pr), f_0(pr)) \\
 & = & (f_0(p).s(r) + f_0(r).s(p) + s(p)s(r), f_0(p)f_0(r)) \\
h_0^0(p)h_0^0(r) & = & (s(p), f_0(p))(s(r), f_0(r)) \\
 & = & (f_0(p).s(r) + f_0(r).s(p) + s(p)s(r), f_0(p)f_0(r))
\end{array}$$

olup $h_0^0(pr) = h_0^0(p)h_0^0(r)$ *elde edilir.* $(m,p),(n,r) \in M \rtimes P$ *için*

$$\begin{aligned}
h_0^1((m,p)(n,r)) &= h_0^1(p.n + r.m + mn, pr) \\
&= (s(\partial(p.n + r.m + mn) \\
&+ pr), f_1(p.n + r.m + mn), f_0(pr)) \\
&= (s((p\partial(n) + r\partial(m) + \partial(mn) \\
&+ pr), f_1(p.n) + f_1(r.m) \\
&+ f_1(mn), f_0(pr))) \\
&= f_0(p).s\partial(n) + f_0\partial(n).s(p) \\
&+ s(p)s\partial(n) + f_0(r).s\partial(n) \\
&+ f_0\partial(m).s(r) + s(r)s\partial(m) \\
&+ f_0\partial(m).s\partial(n) + f_0\partial(n).s\partial(m) \\
&+ s\partial(m)s\partial(n) + f_0(p).s(r) \\
&+ f_0(r).s(p) + s(p)s(r), f_0(p).f_1(n) \\
&+ f_0(r).f_1(m) + f_1(m)f_1(n), f_0(p)f_0(r))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h_0^1(m,p)h_0^1(n,r) &= (s\partial(m) + s(p), f_1(m), f_0(p)).(s\partial(n) \\
&+ s(r), f_1(n), f_0(r)) \\
&= (f_1(m)s(\partial(n) + r) + f_0(p).s(\partial(n) + r) \\
&+ f_1(n)s(\partial(m) + p) + f_0(r).s(\partial(m) + p) \\
&+ s(\partial(m) + p)s(\partial(n) + r), f_0(p).f_1(n) \\
&+ f_0(r).f_1(m) + f_1(m)f_1(n), f_0(p)f_0(r)) \\
&= (f_1(m)s(\partial(n) + f_1(m)s(r) + f_0(p).s\partial(n) \\
&+ f_0(p).s(r) + f_1(n)s\partial(m) + f_1(n)s(p) \\
&+ f_0(r).s\partial(m) + f_0(r).s(p) + s\partial(m)s\partial(n) \\
&+ s\partial(m)s(r) + s(p)s\partial(n) + s(p)s(r), f_0(p).f_1(n) \\
&+ f_0(r).f_1(m) + f_1(m)f_1(n), f_0(p)f_0(r))
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitliklerden $h_0^1((m,p)(n,r)) = h_0^1(m,p)h_0^1(n,r)$ *olduğu görülür.* $(m,p),(n,r) \in M \rtimes P$ *için*

$$\begin{aligned}
h_1^1((m,p)(n,r)) &= h_1^1(p.n + r.m + mn, pr) \\
&= (f_1(p.n + r.m + mn) \\
&+ s\partial(p.n + r.m + mn), s(pr), f_0(pr)) \\
&= (f_0(p).f_1(n) + f_0(r).f_1(m) + f_1(m)f_1(n) \\
&+ f_0(p).s\partial(n) + f_0\partial(n).s(p) + s(p)s\partial(n) \\
&+ f_0(r)s\partial(m) + f_0\partial(m)s(r) + s(r)s\partial(m) \\
&+ f_0\partial(m).s\partial(n) + f_0\partial(n).s\partial(m) \\
&+ s\partial(m)s\partial(n), f_0(p).s(r) + f_0(r).s(p) \\
&+ s(p)s(r), f_0(p)f_0(r)) \\
&= h_1^1(m,p)h_1^1(n,r)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde h_0^0, h_0^1 ve h_1^1 dönüşümlerinin birer cebir morfizmi olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 5. *h_0^0, h_0^1 ve h_1^1 dönüşümleri için simplisel homotopi özdeşlikleri sağlanır.*

Sonuç 2.

$$\begin{array}{rcl} h_0^0: \quad P & \longrightarrow & M^{'} \rtimes P^{'} \\ h_0^0(p) & = & (s(p), f_0(p)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h_0^1: \quad M \rtimes P & \longrightarrow & M^{'} \rtimes (M^{'} \rtimes P^{'}) \\ h_0^1(m,p) & = & (s(\partial(m+p)), f_1(m), f_0(p)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h_1^1: \quad M \rtimes P & \longrightarrow & M^{'} \rtimes (M^{'} \rtimes P^{'}) \\ h_1^1(m,p) & = & (f_1(m) + s(\partial(m), s(p), f_0(p)) \end{array}$$

olmak üzere $F(s) = h = (h_i^n)$, $f = (...,(f_1,f_0),f_0) : F(C) \longrightarrow F(C')$ ve $g = (...,(g_1,g_0),g_0) : F(C) \longrightarrow F(C')$ simplisel morfizmleri arasında bir simplisel homotopi belirler.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan değişmeli cebirler üzerindeki simplisel cebirlerin kategorisi ile değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi arasındaki denklik açık olarak ele alındı. Bu denklik literatürde mevcut olup iyi bilinmektedir. Daha sonra bu denklik yardımıyla, simplisel dönüşümler arasında tanımlanan homotopiden, çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotopinin elde edilebildiği gösterildi ve sonra tersine çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisinden simplisel cebir morfizmleri arasındaki homotopi elde edildiği ispatlandı. Bu çalışmanın ana bulgusu budur.

Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan değişmeli cebirler üzerindeki simplisel cebirler kategorisi ile değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modülleri kategorisi arasındaki bilinen denklik kullanılarak, yukarıda ifade edilen bulgu simpisel homotopi ile 2-çaprazlanmış modül homotopisi için de ele alınabilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kategoriksel denkliğin önemi vurgulandı ve literatürde yer alan, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel değişmeli cebirlerin kategorisi arasındaki denklik ile değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi arasındaki denklik, açık bir şekilde ele alındı. Daha sonra bu denklik kullanılarak, simplisel homotopiden çaprazlanmış modül homotopisini elde edilebildiği gösterildi ve sonra tersine çaprazlanmış modül homotopisinden simplisel cebir homotopisi elde edildiği ispatlandı. Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel değişmeli cebirler kategorisi ile değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modülleri kategorisi arasındaki bilinen denklik kullanılarak, yukarıda ifade edilen sonuç simpisel homotopi ile 2-çaprazlanmış modül homotopisi için incelenebileceği önerilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Andre, M. (1974). “Homologie des algebres commutatives”. İn: *Die Grundlehren der mathematischen Wisssenschaften in Einzeldarstellungen* 206. Ed. by Springer-Verlag.

Arvasi, Z. (1994). “Applications in Commutative Algebra of the Moore complex of a Simplicial Algebra”. Ph. D. University of Wales, Bangor.

— (1997). “Crossed Squars and 2- Crossed Modules of Commutative Algebras”. İn: *Theory and Applications of Categories* 3.7.

Arvasi, Z. ve T. Porter (1996). “Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras”. İn: *Journal of Algebra* 181, pp. 426–448.

— (1998). “Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras”. İn: *Applied Categorical Structures* 6, pp. 455–471.

Brown, R. ve N.D. Gilbert (1989). “Algebraic Models of 3-types and automorfizm structures for crossed modules”. İn: *Proc. London Math. Soc.* 59, pp. 51–73.

Brown, R. ve P.J. Higgins (1981). “Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups”. İn: *J.P.A.A.* 22, pp. 11–44.

Carrasco, P. (1987). “Complejos Hipercruzados Chomologia Exten siones”. Ph. D. Thesis. Universidad de Granada.