Bazı Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Painlevé Analizi, Korunum Kanunları ve Tam Çözümleri

Rabia Altunay

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Şubat 2020

Painlevé Analysis, Conservative Laws and Exact Solutions of Some Nonlinear Differential Equations

Rabia Altunay

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

February 2020

Bazı Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Painlevé Analizi, Korunum Kanunları ve Tam Çözümleri

Rabia Altunay

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. M. Naci Özer

Şubat 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. M. Naci Özer danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Bazı Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Painlevé Analizi, Korunum Kanunları ve Tam Çözümleri**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 12/02/2020

Rabia Altunay

ÖZET

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin matematiksel özellikleri uygulamalı matematik alanının önemli araştırma konularındandır. Bu tezde öncelikle, bazı kısmi diferensiyel denklemlerin (KDD) integrallenebilirlik özelliği Painlevé metodu (WTC algoritması) ile araştırılmıştır. Ele alınan denklemler; (2+1)-boyutlu Korteweg-de Vries tipi (KdV4) denklemi, (1+1)-boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq denklem sistemi (GBQS) ve (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklemidir. Denklemlerin Painlevé özelliğine sahip olup olmadığı araştırılırken cebirsel işlemler Maple programı kullanarak yapılmıştır ve sonuç olarak KdV4 denklemi ve BLMP denklemi Painlevé özelliğine sahip olduğundan integrallenebilirdir fakat GBQS nin bağdaşabilirlik şartını sağlamadığından Painlevé özelliğine sahip olmadığı gösterilmiştir. Ancak bu sonuç denklemin integrallenemez olduğunu garantilemez. İntegrallenebilirliği farklı yöntemler de kontrol edilmelidir.

Kısmi diferensiyel denklemlerin karmaşık fiziksel yapısının anlaşılmasını kolaylaştırmak için tam çözümlerini bulmak gerekir. İncelenen KdV4 denklemi ve BLMP denkleminin genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile tam çözümleri bulunmuştur. GBQS nin tam çözümlerinin elde edilmesi için de Jacobi eliptik fonksiyon metodu kullanılmıştır. Denklemlerin tam çözümleri bulunurken Maple programı yardımıyla denklemler çözülmüştür ve elde edilen çözümler hiperbolik (soliton) ve trigonometrik (periyodik) fonksiyon içermektedir.

İntegrallenebilirlik ve soliton çözüm araştırmalarında korunum kanunları da önemli bir rol oynar. Son olarak bu tezde varyasyonel metot olarak da bilinen çarpan metodu ile denklemlerin korunum kanunları bulunmuştur ve bu çalışma yapılırken Maple paket programının alt programı olan Cheviakov' ın yazmış olduğu GeM paket programı kullanılmıştır. Bunun sonucunda KdV4 ve BLMP denklemlerinin keyfi fonksiyonların varlığı mevcut olduğundan sonsuz çoklukta korunum kanunları bulunabildiği sonucuna varılmıştır. GBQS aşikar korunum vektörüne sahiptir. Eğer bir KDD de çok sayıda korunum kanunu çıkıyor ise bu onun yüksek ihtimalle integrallenebilir ve çözülebilir olduğunu gösterir.

Anahtar Kelimeler: Painlevé Metodu, Korunum Kanunları, Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu, Jacobi Eliptik Fonksiyon Metodu, Tam Çözümler

SUMMARY

Investigation of mathematical properties of nonlinear differential equations is one of the major research topics in applied mathematics. In this thesis, the integrability of some partial differential equations (PDEs) is primarily investigated through the use of Painlevé method (also known as the WTC algorithm). The following are the PDEs discussed; (2+1)-dimensional Korteweg-de Vries Type (KdV4) equation, (1+1)-dimensional generalized Boussinesq equation system (GBQS) and (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) equation. In order to determine whether or not the equations have Painlevé properties, Maple is employed for the algebraic operations pertaining to it. As a result, it is found that KdV4 and BLMP have the Painlevé properties and therefore they are integrable; however it is observed that GBQS does not have the Painlevé property since it could not satisfy the compatibility conditions. Nonetheless, this result does not guarantee that the equation is not integrable. Integrability should still be investigated by other methods.

In order to facilitate the understanding of the complex physical structure of the PDEs, it is necessary to find their exact solutions. The exact solutions to the KdV4 and BLMP are obtained by generalized Kudryashov method. The Jacobi elliptic function method is used to obtain the exact solutions of the Boussinesq equation system. To find the exact solutions of the equations, the corresponding methods have been implemented on Maple and the equations are solved. The results subsequently obtained are solutions containing hyperbolic (soliton) and trigonometric (periodic) functions.

Conservation laws also play a significant role in integrability and soliton solution research. Finally, in this thesis, an effort is made to determine the conservation laws of equations by the multiplier method, which is also originally known as the 'variational method' . For this purpose, GeM software package for Maple, written by Cheviakov, is used. As a result, owing to the existence of arbitrary functions of the KDV4 and BLMP equations, it is concluded that an infinite multitude of conservation laws are found. GBQS has an explicit conservation vector. If there are many conservation laws in a PDE, it indicates that it's most likely integrable and solvable.

Keywords: Painlevé Method, Conservation Laws, Generalized Kudryashov Method,Jacobi Elliptic Function Method, Exact Solutions

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince bana danışmanlık ederek beni yönlendiren, engin görüşlerinden faydalandığım başta değerli danışman hocam sayın,

Prof. Dr. Mehmet Naci Özer'e

bu süreçte sabırla çalışmalarımın her adımını titizlikle takip eden, akademik bilgisi ve tecrübesi ile bana yeni bir ufuk açan, hoşgörüsünü her daim hissettiren saygıdeğer hocam sayın,

Doç. Dr. Sait San'a

tez yazım ve düzenleme aşamasında sıkılmadan bana vakit ayıran, beni bu süreçte yalnız bırakmayarak destek olan doktora öğrencisi sevgili arkadaşım,

Gizem Kahrıman'a

minnet ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu çalışma sürecinde güler yüzlü ve anlayışlı yaklaşımıyla yaşadığım her olumsuzlukta tekrar başlamam için beni pozitive eden, gerektiğinde beni ev işlerinden azat eden çok değerli anneciğim,

Ayşe Altunay'a

eğitim hayatımın en başından beri bir kız evladı olarak her anlamda iyi yetişmem için her zaman yaptığım çalışmalarda desteğini gördüğüm çok değerli babacığım,

Hayri Altunay'a

bunaldığım zamanlarda kapısını tıkladığımda, yumuşak tavrı ve sıcaklığı ile ”Sıkma canını, yarın da var.” diyerek beni rahatlatan bana hem bir arkadaş hem bir kardeş olarak her daim yanımda olacağından emin olduğum biricik kardeşim,

Faruk Altunay'a

son olarak dünyanın ve bilimin gelişmesi için araştırmalar yaparak yarın için inovatif hedefler çizdiğimiz yol arkadaşlarım diyebileceğim araştırmacı dostlarıma ve akademide ilerlemem için beni teşvik eden, bana güvenen tüm yakın dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımı sürdürürken benimle birlikte o anları yaşayarak hayatımı kolaylaştırdığınız için size minnettarım.

Siz olduğunuz için daha anlamlıydı her şey, iyi ki varsınız.

Eskişehir, 2020
Rabia Altunay

Aileme...

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Lineer olmayan denklemler uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarının birçoğunda karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple lineer olmayan diferensiyel denklemlerin matematiksel özellikleri önemli araştırma konularındandır. Bu tezde ele alınan denklemler; (2+1)-boyutlu Korteweg-de Vries tipi (KdV4) denklemi, (1+1)-boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq denklem sistemi (GBQS) ve (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklemidir. Öncelikle, KDD lerin integrallenebilirliğini test etme amacıyla geliştirilen tekillik manifoldu komşuluğunda açılım kavramını ilk defa 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından ortaya koyulan WTC algoritması olarak da bilinen Painlevé metoduyla incelenen denklemlerin integrallenebilirliği test edilmiştir. Denklemlerin Painlevé özelliğine sahip olup olmadığı araştırılırken cebirsel işlemler Maple programı kullanarak yapılmıştır ve bunun sonucunda KdV4 ve BLMP denklemleri Painlevé özelliğine sahip olduğundan integrallenebilirdir fakat GBQS nin bağdaşabilirlik şartını sağlamadığından Painlevé özelliğine sahip olmadığı görülmüştür. Ancak bu denklem için integrallenemez denilemez. İntegrallenebilir olup olmadığını anlayabilmek için farklı metotlar uygulanmalıdır.

KDD lerin karmaşık fiziksel yapısının anlaşılmasını kolaylaştırmak için tam çözümlerini bulmak gerekir. İncelenen KdV4 denklemi ve BLMP denkleminin genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile tam çözümleri bulunmuştur. GBQS nin tam çözümlerinin elde edilmesi için de Jacobi eliptik fonksiyon metodu kullanılmıştır. Denklemlerin tam çözümleri bulunurken Maple programı yardımıyla denklemler çözülmüştür ve elde edilen tam çözümler soliton ve periyodik çözümlerdir.

Korunum kanunları, denklemlerin integrallenebilirlik ve soliton çözüm araştırmalarında önemli rol oynamaktadır. Son olarak, ilk defa Alman bilim insanı Steudel tarafından ortaya atılan çarpan metodu ile denklemlerin korunum kanunları bulunmuştur ve bu çalışma yapılırken GeM paket programı kullanılmıştır. Bunun sonucunda KdV4 ve BLMP denklemlerinin keyfi fonksiyonların varlığı mevcut olduğundan sonsuz çoklukta korunum kanunları bulunabildiği sonucuna varılmıştır. GBQS aşikar korunum vektörüne sahiptir. Eğer bir KDD de çok sayıda korunum kanunu çıkıyor ise bu onun yüksek ihtimalle integrallenebilir ve çözülebilir olduğunu gösterir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Lineer olmayan denklemler uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarının birçoğunda önemli rol oynamaktadır. Doğada birçok olay matematiksel olarak modellendiğinde lineer olmayan diferensiyel denklemlerle tanımlanır. Örneğin belli bir ortamda kararlı ısı denilen zamandan bağımsız ısı dağılımı, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar kısmi türevli denklemler yardımıyla kolayca incelenebilmektedir. Dolayısıyla lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çevremizdeki fiziksel olayları açıklamada payı oldukça yüksektir. Bu nedenle bilim insanları için lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek önemli bir araştırma konusu olmuştur. Araştırmacılar son zamanlarda lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak ve sınıflandırmak için çeşitli metotlar geliştirme yolunda çalışmalar yapmıştır. Yardımcı denklem metodu (Sirendaoreji, 2006), genelleştirilmiş Kudryashov metodu (Koparan vd. 2017), Jacobi eliptik fonksiyon metodu (Liu vd. 2001b), tanh fonksiyon metodu (Wazwaz, 2004), üstel fonksiyon metodu (Bekir ve Boz, 2009), $(\frac{G'}{G})$- açılım metodu (Wang vd. 2008) vb. gibi metotlar lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan yöntemlerden bazılarıdır. Bu yüksek lisans tez çalışmasının amaçlarının bir tanesi, ele alınan KDD lere dalga dönüşümü uygulayarak denklemleri ADD lere indirgeyip genelleştirilmiş Kudryashov metodu veya Jacobi eliptik fonksiyon metodu ile denklemlerin hareketli dalga çözümlerini bulmaktır. Kullanılan metotlardaki cebirsel işlemler elle yapılması bir hayli zor işlemler olduğu için Maple programı yardımıyla çözümler elde edilmiştir.

Ayrıca denklemlerin integrallenebilirliği ve soliton çözümleri üzerinde de yoğunlaşılmıştır. Soliton çözümlerin elde edilebilmesi için lineer olmayan denklemlere uygulanan metotlardan bazılarına örnek olarak ters saçılım metodu (Ablowitz ve Sugar, 1981), Bäcklund-Darboux dönüşümleri (Weiss, 1984), Hirota bilineer form metodu (Hirota, 1971), yardımcı eşitlik metodu (Sirendaoreji, 2004), Painlevé kesme metodu (Hassan, 2004) vb. gibi örnekler verilebilir. Lineer olmayan denklemlerin özellikleri araştırılırken en başta incelenen özelliklerden bir tanesi o denklemin integrallenebilirliğidir. Lineer olmayan denklemlerin integrallenebilirliğini kontrol etmek için birçok metot kullanılabilir. Bu metotlara örnek olarak Lax çiftlerinin, simetrilerinin, Bäcklund ve Darboux dönüşümlerinin bulunması, Painlevé metodu vb. verilebilir (Ablowitz ve Sugar, 1981). Ayrıca eğer bir kısmi diferensiyel denklemin çok sayıda korunum kanunları bileşenleri bulunabiliyorsa bu onun kuvvetli ihtimalle integrallenebilir ve çözümlerinin bulunabilir olduğunu gösterir (Ablowitz ve Clarkson, 1992). Bu tez çalışmasında denklemlerin integrallenebilirlik özelliği araştırırken Painlevé metodundan yararlanıldı ve cebirsel işlemler Maple programı yardımıyla yapıldı. Bir denklemin Painlevé özelliğine sahip olması, denklemin çözümünün keyfi seçilen bir tekil manifold civarında tek değerli olması ve Laurent serisi şeklinde gösterilebilir olması anlamına gelmektedir. 20. yüzyılın başlarında Paul Painlevé ve onunla birlikte çalışan arkadaşları E. Picard, L. Fuchs, R. Fuchs, J. Charzy, B. Gambier, S. Kowalaevski, L. R. Garnier lineer olmayan diferensiyel denklemlerin singüler (tekil) noktalarını derinden araştırdılar. Yaptıkları çalışmalar sonucunda hareketli tekillikleri sadece kutuplar olan bir denklem sınıfı olduğu kanısına vardılar (Ince, 1956). 1980 yılında Ablowitz, Ramani, Segur (ARS) diferensiyel denklemler için ARS algoritması olarak bilinen Painlevé metodunu geliştirdiler (Ablowitz vd. 1980). 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale ARS algoritmasını genelleyerek WTC algoritması diye adlandırılan kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğini test etmeye yarayan metodu geliştirmiştir (Weiss vd. 1983).

Son on yılda, aktif araştırma çalışmaları kısmi diferensiyel denklemler için korunum kanunlarının elde edilmesine odaklanmıştır ve korunum kanunlarının bulunması için birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bunlara örnek olarak varyasyonel problemler için Noether'ın teoremi (Noether, 1918), çarpan metodu (Anco ve Bluman, 2002), kısmi Noether yaklaşımı (Kara ve Mahomed, 2006) verilebilir. Kısmi diferensiyel denklemlerin tüm korunum kanunlarında fiziksel yorum olmayabilir fakat korunum kanunları kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirlik çalışmasında gereklidir. Eğer bir kısmi diferensiyel denklemde çok sayıda korunum kanunu çıkıyor ise bu onun yüksek ihtimalle integrallenebilir olduğunu ve çözülebilir olduğunu gösterir (Ablowitz ve Clarkson, 1992). Öte yandan korunum kanunları kısmi diferensiyel denklemlerin analizinde özellikle nümerik integrasyonunda, soliton çözümlerin elde edilmesinde, kısmi diferensiyel denklemlerin indirgenmesinde Hamilton yapılar ve diferensiyel operatörleri, gibi bazı özellik çalışmalarında da çok kullanışlıdır (Leveque, 1992). Ayrıca bir diğer örnek olarak nümerik hataların kontrolü verilebilir. Korunum kanunları klasik olmayan dönüşümler teorisinde de önemli bir rol oynar (Adem ve Khalique, 2012). Klasik olmayan dönüşümlere örnek olarak normal formlar ve asimptotik integrallenebilirlik verilebilir (Kodama ve Mikhailov, 1996). Bu tezde ele alınan çarpan metodu Lie simetri teorisi ile bağlantısız ve doğrudan diverjans koşulunun sıfır olması durumundan yola çıkarak oluşturulmuştur. Korunum kanunlarının bulunmasında en eski metotlardan biri olan çarpan metodu tamamen hesaplama teknikleriyle elde edilir. Çarpan metodu, varyasyonel metot ve karakteristikler metot olarak da bilinir. İlk olarak çarpan metodunu Alman bilim insanı Steudel ortaya atmıştır (Steudel, 1962). Daha sonra S.C Anco ve G.W Bluman kapsamlı teorik alt yapısıyla vermiştir (Bluman ve Anco, 2002).

Çarpan metodunda işlem hacmi epey fazladır. Düşük mertebeden az terim bulunduran denklemler için problem olarak görülmese de yüksek mertebeden denklemlerin çarpan metodu ile korunum kanunlarını saptamak bir hayli zordur. Bu problemi gidermek için Cheviakov, Maple paket programını kullanarak GeM alt programını yazmıştır. Bu program yardımıyla yüksek mertebeden denklemlerinde korunum kanunları kolaylıkla bulunabilir (Cheviakov, 2007).

2.1 Kısmi Diferensiyel Denklemler

Bu bölümde kısmi diferensiyel denklemler ile ilgili tezde bahsi geçen tanımlar verilmiştir.

Tanım 1. *Içinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımsız değişkenlere göre çesitli basamaktan (mertebeden) kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) kısmi diferensiyel (türevli) denklem denir. Bir kısmi diferensiyel denklem,* u *bağımlı ve* x, y *bağımsız değişkenler olmak üzere*

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x^2}\ ,\ u_{xy}=\frac{\partial u}{\partial x \partial y}\ ,\ u_{yy}=\frac{\partial u}{\partial y^2}$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, ...) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir (Koca, 2008).

Tanım 2. *Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına denklemin mertebesi denir (Koca, 2008).*

Tanım 3. *Bir kısmi diferensiyel denklem, bağımlı değişkene ve bağımlı değişkenin türevlerine göre bir polinom şekline getirilebiliyorsa, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (derecesine) kısmi diferensiyel denklemin derecesi adı verilir (Topoğlu, 2007).*

Tanım 4. *Bir kısmi türevli denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi sabit içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir (Koca, 2008).*

Tanım 5. *Bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içeren ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir. Keyfi fonksiyonları içeren bir yüzey ailesinin bir denklemin genel çözümü olabilmesi için bu fonksiyon veya fonksiyonların en az denklemin mertebesi kadar sürekli türevlenebilir olmaları gerekir (Koca, 2008).*

Not 1. x, y *bağımsız ve* u *bağımlı değişken olmak üzere, iki bağımsız değişken içeren kısmi diferensiyel denklemler için çoğu zaman*

$$p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial y},\ r = \frac{\partial u}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial u}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial u}{\partial y^2}$$

gösterimleri kullanılır (Koca, 2008).

Tanım 6. $p = u_x$, $q = u_y$ *olmak üzere*

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{2.2}$$

birinci mertebeden genel kısmi diferensiyel denklemi ele alalım. Burada F nin p ve q ya göre lineer olması gerekmemektedir.

$$G(x, y, u, a, b) = 0 \tag{2.3}$$

iki parametreli bir yüzey ailesi, birinci mertebeden (2.2) denklemini sağlıyorsa bu yüzey ailesine (2.2) denkleminin tam integrali (tam çözümü) denir (Koca, 2008).

Tanım 7. *Bir kısmi diferensiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya bağımlı değişkenler) ve denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemin bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem denir. x, y bağımsız ve u bağımlı değişken olmak üzere, iki bağımsız ve bir bağımlı değişken içeren birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemlerin genel şekilleri sırasıyla*

$$P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y + R(x, y)u = S(x, y),$$
$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y)$$

formundadır (Koca, 2008).

Tanım 8. *Bir kısmi diferensiyel denklem, denklemin içerdiği en yüksek mertebeden kısmi türeve göre (denklemdeki düşük mertebeli türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denkleme yarı - lineer (kuasi - lineer) denir. x, y bağımsız ve u bağımlı değişken olmak üzere, iki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı - lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla*

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y = R(x, y, u),$$
$$A(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + B(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + C(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

formunda gösterilebilir (Koca, 2008).

Not 2. *Her lineer denklem aynı zamanda yarı - lineerdir, fakat yarı - lineer denklem lineer bir denklem olmayabilir. Bu tersi duruma örnek olarak,*

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

yukarıdaki denklem verilebilir.

Tanım 9. *Bir kısmi diferensiyel denklem yarı - lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir.* x, y *bağımsız ve* u *bağımlı değişken olmak üzere, iki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci mertebeden hemen - hemen lineer bir denklemin genel formu*

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

şeklindedir (Koca, 2008).

2.2 Oluşum Denklemleri

Zamana bağlı kısmi diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denir. Yani bağımsız değişkenlerinden biri t zaman olan kısmi diferensiyel denklemlere denilmektedir. Oluşum denklemleri $K[u]$; u ve u nun x e göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere

$$u_t = K[u]$$

formu şeklindedir. Eğer $K[u]$, u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve $K[u]$, u terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilir. Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine verilebilecek ilk akla gelen örneklerdir (Keskin, 2010). Aşağıda bazı iyi bilinen oluşum denklemi örnekleri verilmiştir.

- u bağımlı değişken x, y, z, t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ &u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ &u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılan denklemlere sırasıyla bir boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu lineer dalga denklemi denir (Gümüş, 2018).

- u bağımlı değişken x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

denklemine bir boyutlu lineer ısı denklemi denir (Gümüş, 2018).

Lineer olmayan oluşum denklemleri ise mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok daldaki problemlerde gözlenmektedir (Keskin, 2010). Şimdi lineer olmayan oluşum denklemleri için birkaç örnek verelim.

- u bağımlı değişken x, t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.4}$$

denklemine birinci mertebeden lineer olmayan bir dalga oluşum denklemi denir (Gümüş, 2018). (2.4) denklemi $u(x, t)$, t zamanında x konumundaki araçların yoğunluğunu gösteren bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için de (2.4) denklemi bir model denklem olarak kullanılmaktadır (Gümüş, 2018). Doğada ikinci basamaktan lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Bu tip denklemlere örnek olarak da aşağıdaki denklemler verilebilir.

- Birim zamanda anlık sıcaklığa bağlı olarak ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferi incelendiğinde u bağımlı değişken t bağımsız değişken f fonksiyon ve k bir sabit olmak üzere

$$u_t = div(k\nabla u) + f(u)$$

lineer olmayan ısı denklemine rastlanır (Tatar, 2009).

- Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önünde bulundurulduğunda u bağımlı değişken x, t bağımsız değişkenler f fonksiyon ve a bir sabit olmak üzere

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(u)$$

şeklindeki lineer olmayan bir dalga denklemi bulunur (Tatar, 2009).

- Kuantum mekaniğinde karşılaşılan, sırasıyla aşağıdaki formlarda verilen Sine-Gordan, Klein-Gordan, Kübik Schrödinger lineer olmayan oluşum denklemleri u bağımlı değişken t bağımsız değişken ve m, γ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \triangle u + \sin u = 0, \\ &u_{tt} - \triangle u + mu + \gamma u^3 = 0, \\ &iu_t - \triangle u + \gamma \mid u^2 \mid u = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir (Tatar, 2009).

- Polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, yüksek basamaktan lineer olmayan oluşum denklemi olan Cahn-Hilliard denklemi $\in$ belirli bir küçük sabit, genellikle $\Phi(u) = u^3 - u$ olarak alınmak üzere

$$u_t + \in \triangle^2 u = \triangle\Phi(u)$$

dördüncü basamaktan bir oluşum denklemidir (Tatar, 2009).

- Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine verilebilecek diğer bir örnek ise; u bağımlı değişken x, t bağımsız değişkenler ve a, b sabitler olmak üzere

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$$

KdV (Korteveg-de Vries) denklemi olarak bilinen bir yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemidir. KdV denklemini ilk olarak 1834 yılında Edinburg ile Glasgow arasındaki kanalda soliter dalgaları inceleyen J. Scott Russel'in keşfetmesi ve sığ sulardaki dalga dinamiği olarak tanımlanması sonucunda bu denklem tanınmaya başlandı (Yeşil, 2009).

2.3 İntegrallenebilirlik

Lineer olmayan adi veya kısmi diferensiyel denklemler dinamik sistemler olarak da bilinir. Dinamik sistemler bağımlı değişkenlerin sayısına, dış kuvvetlerin doğa ve etki alanlarına, sistemin enerjisine bağlı olarak faz uzayında düzenli yörüngelerin yanı sıra kaotik yörüngeler de meydana getirirler. Dinamik sistemlerin düzgün ve kaotik rejimlerinin belirlenmesi, karakterizasyonu ve sınıflandırılması genellikle iyi tanımlı analitik metotların olmayışı sebebi ile başarılı olamamaktadır. Aslında lineer olmayan dinamik sistemlerde verilen sistemin hareketinin ne zaman düzgün olduğunu bulmak önemli bir problemdir. Başka bir deyişle Hamilton olabilen ya da olamayan bir dinamik sistem hangi şartlar altında ne zaman tamamen integrallenebilirdir ve ne zaman düzensiz ya da kaotik hareket alanına geçerek integrallenemezdir.

Bu araştırmalar yapılırken, integrallenebilirliğin ne olduğu ve onun ne zaman bulunabileceği soruları doğal olarak ortaya çıkacaktır. İntegrallenebilirliğin ne olduğuna dair yanıt pek açık değildir. Bunun sebebi ise integrallenebilirliğin bazı kavramları iyi tanımlı değildir ve şimdiye denk anlaşılabilir bir tanımı bulunmamaktadır. İntegrallenebilirlik hallerini anlamayı kolaylaştıran iyi tanımlı bir ölçüt bulunmayışından ötürü, integrallenebilirliğin ne zaman bulunabileceğine de cevap vermek kolay değildir (Bekir, 2005).

İntegrallenebilirlik, dinamik sistemi global olarak anlamak ve nicel bilgi elde etme işinde başarıyla kullanılabilen matematiksel bir özellik olarak düşünülebilir. Bu tezin amaçlarından biri de tekil nokta analizinin tarihsel gelişmesini anlatmak ve bunun en gelişmiş formu olan Painlevé metodunu bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaktır.

2.4 Painlevé İntegrallenebilirliği

Tekil nokta analizi olarak da bilinen Painlevé metodu serbest değişkeni içeren kompleks düzlemde, kutuplar, cebirsel ve logaritmik dallanma noktalar ve esas tekillikler gibi genel çözümlere sahip olan tekillikleri bulmak, cinslerini belirlemek ve çözümün hangi şartlar altında meromorfik olduğunu araştırmaktır. Varsayalım ki dinamik bir sistem olsun. Bu dinamik sistem Painlevé özelliğine sahip bir diferensiyel denklem sistemi ile ilişkilendiriliyorsa bu dinamik sistem de integrallenebilir ve çözüm de hareketli bir tekil nokta civarında bir Laurent serisine açılmalıdır (Bekir, 2005).

Adi bir diferensiyel denklemin P-tipinde olup olmadığını incelemek için M.J.Ablowitz, A.Ramani, H.Segur tarafından geliştirilen ARS metodundan yararlanılır. Kısmi diferensiyel denklemler için de ARS metodundan yola çıkarak bir algoritma yazılmıştır. Fakat bu algoritmanın kesinliğe sahip olması için bazı değişikliklere ihtiyacı olmaktadır. Bu algoritmaya göre kısmi diferensiyel denklemin tüm indirgemelerinin yapılması gerekir. Ancak bu epeyce zordur. Bu sebeple ARS metodu Weiss, Tabor ve Carnevale tarafından bir tekillik manifoldu civarında açılım kavramı getiren adi diferensiyel denklemi indirgemeye ihtiyaç duymadan kısmi diferensiyel denklemin doğrudan incelenmesine imkan verecek şekilde genişletilmiştir (Weiss vd. 1983).

Painlevé özelliğini olası integrallenebilir bir denklemi tanımlamak için bir metot olarak kullanan ilk insan bir sabit nokta hakkında katı bir cismin rotasyonunu çalışan Sophie Kowalevski'dir (Kruskal ve Clarkson, 1992). Doğal olayların modelleri olarak integrallebilir dinamik sistemler evrensel bir rol oynamaktadır. Bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem veya adi diferensiyel denklemin Painlevé özelliğine sahip olması denklemin integrallebilir olduğunu gösterir. Öte yandan eğer bir denkleme Painlevé metodu uygulandığında denklem Painlevé özelliğine sahip değilse bu denklem için integrallenemez denilmez. Ayrıca o denklem özel durumda integrallebilir de olabilir. Eğer Painlevé metodu ile denklem integrallenebilir değilse daha farklı metotlar ile integrallenebilirliğini kontrol edilebilir. Bu metotlardan biri ters saçılım metodu olarak örnek verilebilir. Eğer bir denklem ters saçılım metodunun herhangi bir formu ile çözülebiliyorsa bu denklem tam integrallenebilirdir diye adlandırılır (Kruskal ve Clarkson, 1992). Bu terminoloji tam integrallenebilir Hamilton sistemleri olarak KdV denkleminin yorumundan kaynaklanmaktadır. Yani temelinde Hamilton sistemlerine dayanır. Örnekleri çoğaltacak olursak bir kısmi diferensiyel denklemin n-soliton çözümünün bulunması, sonsuz tane simetri üreticine sahip olması, Hamilton yapıda olması o denklemin integrallenebildiğini gösterir (Kruskal ve Clarkson, 1992). Bu bahsedilen metotlar sayesinde integrallenebilirlik test edilebilir. Şimdi, kısmi diferensiyel denklemlere Painlevé metodu uygulanırken bilinmesi gereken bazı kavram, tanım ve teoremlerden bahsedilecektir.

Tanım 10. *Bir $w = f(z)$ kompleks fonksiyonu bir z_0 noktası ve bu noktanın komşuluğundaki her noktada türevli ise $f(z)$ ye z_0 noktasında analitik fonksiyon denir (Zill ve Shanahan, 2013).*

Tanım 11. *Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonunun analitik olmadığı noktaları $f(z)$ nin singüler (tekil) noktalarıdır (Zill ve Shanahan, 2013).*

Tanım 12. *$z = z_0$ noktası $w = f(z)$ kompleks fonksiyonun bir singüler (tekil) noktası olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasının bir delinmiş komşuluğunda analitiktir ve Laurent seri açılımı elde edilebilir. Singüler noktalar ayrık ve ayrık olmayan olmak üzere ikiye ayrılır. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değil fakat $R > 0$ için $0 <| z - z_0 |< R$ de analitik ise bu durumda z_0 noktasına f fonksiyonun ayrık singüler noktası denir. Başka bir deyişle $z_0,$ f fonksiyonun singüler noktası olmak üzere, bu komşulukta fonksiyonun başka singüler noktası bulunmuyorsa z_0 noktasına f fonksiyonun ayrık singüler noktası denir. Bir $f(z)$ fonksiyonun $z = z_0$ tekil noktasının her komşuluğu z_0 dışında f nin en az bir tekil noktasını içeriyorsa z_0 a f nin ayrık olmayan tekil noktası denir. Örneğin; $f(z) = \dfrac{1}{z}$ fonksiyonu için $z = 0$ ayrık singüler noktadır. Ancak $g(z) = Logz$ fonksiyonu orijin ve negatif reel eksen üzerindeki tüm noktalarda ayrık olmayan singülerliğe sahiptir (Zill ve Shanahan, 2013).*

Laurent Serileri: Bir z_0 noktası civarındaki dairenin tümünde analitik olan f fonksiyonunun, z_0 noktası komşuluğunda yakınsak bir seriye açılabileceğini göstermek için Taylor teoremini kullanılır. Fakat; $f(z) = \dfrac{1}{z},\ f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ şeklindeki fonksiyonlar $z = 0$ noktasında analitik olmadıklarından, bu tür durumlardaki fonksiyonlara Taylor açılımı uygulanamaz. Bu tür fonksiyonları ifade etmede kullanılan ve 1840 yılları civarında Laurent tarafından formülleştirilen açılımlara Laurent açılımı veya Laurent serisi adı verilmektedir. Bu seriler kompleks sayılar teorisinde büyük rol oynamaktadır. Örneğin; bir fonksiyonun singüler noktası bulunup, ne tür bir singülariteye sahip olduğunun tespit edilmesinde, fonksiyona ait Laurent açılımını kullanılır. Genel olarak bir f fonksiyonunun Laurent serisi

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{b_{-1}}{z-z_0}}_{\text{Esas kısım}} \underbrace{+ b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots + b_n(z-z_0)^n + \cdots}_{\text{Regüler kısım}}$$

şeklindedir (Zill ve Shanahan, 2013).

Teorem 1. *(Laurent Teoremi): f fonksiyonu $D = \{z \in \mathbb{C} : r <| z - z_0 |< R\}$ halka bölgesinde analitik olsun. O halde $\forall\ z \in D$ için f fonksiyonu*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

seri açılıma sahiptir. Bu seriye f fonksiyonunun z_0 etrafındaki Laurent serisi denir. b_n kaysayıları

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}ds; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

şeklinde ifade edilir. Burada z_0, $\mathbb{C}$ nin bir iç noktası ve $\mathbb{C}$ tamamen D bölgesinde yer alan basit kapalı pozitif yönlü bir eğridir (Sloughter, 2004).

Tanım 13. *f fonksiyonu $z = z_0$ noktasında ayrık singülerliğe sahip olsun.*

a) Kaldırılabilir singülerlik: *Eğer f fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğundaki Laurent seri açılımında $(z - z_0)$ ın negatif kuvvetleri bulunmuyorsa, z_0 noktasına f fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktasıdır denir (Zill ve Shanahan, 2013).*

b) Kutup noktası: *Eğer f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent seri açılımında esas kısım sıfırdan farklı sonlu sayıda terimler içeriyorsa, z_0 noktasına f fonksiyonunun bir kutup noktasıdır denir. Eğer esas kısımda sıfırdan farklı son katsayı $n \geq 1$ olmak üzere, z_0, f fonksiyonunun n inci mertebeden kutup noktasıdır. Özel olarak $n = 1$ ise, z_0, f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır denir (Zill ve Shanahan, 2013).*

c) Esas singüler nokta: *f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent seri açılımının esas kısmı sonsuz çoklukta terim içeriyorsa, z_0 noktası f fonksiyonun esas singüler noktasıdır denir (Zill ve Shanahan, 2013).*

Tanım 14. *Bir f fonksiyonunun belli bir bölgede tekillikleri sadece kutup noktaları ise yani kutuplar dışında her noktada analitik ise f, bu bölgede bir meromorf fonksiyondur denir (Bekir, 2005).*

Sabit ve Hareketli Tekillikler: Bir diferensiyel denklemin tekil noktaları sabit ve hareketli olmak üzere iki şekilde karşımıza çıkar. Diferensiyel denklemde çözümler, integral sabitlerini içerdiğinden, bu tekil noktalar integral sabitlerine ve dolayısıyla problemin başlangıç ve sınır şartlarına bağlı olabilirler. Böyle tekil noktalara hareketli tekil noktalar denir. Öte yandan, tekil noktalar integral sabitlerine bağlı değilse, bu türdeki tekil noktalara sabit tekil noktalar denir (Kangalgil, 2008).

Cebirsel Dallanma Tekilliği: $n > 1$ pozitif tamsayı olmak üzere $w = f(z) = (z - z_0)^{\frac{1}{n}}$ şeklindeki çözüm $z = z_0$ noktasında cebirsel dallanma tekilliğine sahiptir denir. $w = f(z) = (\ z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $z = \pm i$ noktalarında cebirsel dallanma tekillik noktalarına sahiptir (Kangalgil, 2008).

Cebirsel dallanma tekilliği çok değerli fonksiyonlarla ilgilidir. $w = f(z)$ fonksiyonunda z nin her bir değerine w nin tek bir değeri karşılık geliyorsa w ye z nin tek değerli fonksiyonu denir ya da $f(z)$ tek değerlidir denir. Örneğin, $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu tek değerli fonksiyondur. z nin her bir değerine karşılık w nin birden çok değeri karşılık geliyorsa w ye z nin bir çok değerli fonksiyonu denir. Örneğin, $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$fonksiyonu çok değerli bir fonksiyondur. $z = -1$ noktası için w nin $\pm i$ şeklinde iki değeri karşılık gelir. $w = f(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\} = \{\pm i\}$.

2.5 Tam Çözümler

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümleri periyodik, kompleks, kink, soliton ve kompakton çözümler şeklinde elde edilir. Periyodik çözümler, sin, cos, tan, cot fonksiyonlarını içeren çözümlerdir. Kompleks çözümler, karmaşık sonuçlar içeren çözümlerdir. Kink çözümler, $(a + tanh)$ ve $(a + coth)$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir. Soliton çözümler, $sinh, cosh, tanh, coth, sech, cosech$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir. Kompakton çözümler, $sin^2, cos^2, sec^2, cosec^2$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir (Topoğlu, 2007).

2.6 Dalgalar

Bir boşlukta yayılan veya bir ortamda bir kaynak tarafından meydana gelen, enerjinin taşınmasını sağlayan, titreşimin bir noktadan diğer noktalara iletilmesine dalga denir. Her dalga hareketinin kendine özgü bir enerjisi vardır. Güneş ışığından alınan enerji ile oluşan okyanus dalgaları ve depremlerin yıkıcı etkileri buna örnek verilebilir. Dalgalar mekanik ve elektromanyetik dalga olmak üzere ikiye ayrılır (Gümüş, 2018).

2.6.1 Mekanik Dalga

Yayılması için katı-sıvı-gaz gibi maddesel ortamlara ihtiyaç duyan dalgalara mekanik dalga denir. Örnek olarak yay, su, ses ve deprem dalgaları verilebilir. Mekanik dalgalar ortamın esnekliği nedeniyle denge konumuna varmaya çalışırken salınımlar yapar. Böylece salınım etkisi esneklik kuvvetinden kaynaklı maddenin yerini değiştirmeden hareketin yerini değiştirmiş olur. Mesela bir sarmal yay üzerinde dalga oluşturabilmek için yayın herhangi bir noktasına kuvvet uygulamak gerekir. Yaya kuvvet uygulandığında kuvvetin uygulandığı parçacık hareket eder ve yay üzerindeki parçacık uygulanan kuvvet etkisiyle hareket esnasında iş yapmış olur. Dalga yayıldıkça yayın her parçası yanındakine kuvvet uygular ve böylece yayın tamamı iş yapmış ve enerji bir parçacıktan diğer parçacığa hareket enerjisi olarak aktarılmış olur (Gümüş, 2018).

2.6.2 Elektromanyetik Dalga

Yayılması için ortamlara gerek duymayan boşlukta da yayılabilen dalgalara elektromanyetik dalga denir. Bu tür dalgalara örnek olarak radyo dalgaları, mikro dalgalar, ışık, X ışınları verilebilir (Gümüş, 2018).

Dalgaların Ortak Özellikleri :

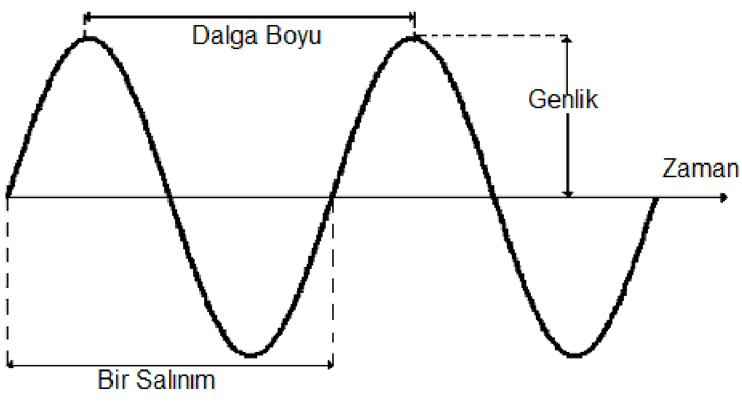
Dalga Boyu : Ardışık iki dalga çukuru ya da iki dalga tepesi arasındaki yatay uzaklığa dalga boyu denir. λ ile gösterilir.

Periyot : Bir tam dalganın oluşması için geçen süreye veya ardışık iki dalga çukuru ya da iki dalga tepesinin geçmesi için geçen süreye periyot denir. T ile gösterilir.

Frekans : Birim zamanda oluşan dalga sayısına frekans denir. Periyot ve frekans dalga kaynağına bağlıdır. Ortamın değişmesi periyot ile frekansı değiştirmez. f ile ifade edilir.

Genlik : Tam bir dalganın tepesinin ya da çukurunun denge konumuna olan uzaklığına genlik denir. Genlik dalganın taşıdığı enerji ile doğru orantılıdır.

Hız : Dalganın birim zamandaki yer değiştirmesine hız denir. Ortam aynı olduğu sürece bir periyotluk zaman diliminde her dalga bir periyotluk sürede bir dalga boyu kadar yol alır. Hızın frekansla değişimi dağılma (dispersiyon) olarak adlandırılır (Gümüş, 2018).



Şekil 2.1 Birim Zamandaki Salınım Sayısı

2.7 Soliter Dalga ve Soliton Dalgaların Keşfi

Sonlu bir genliğe sahip, sabit hız ve sabit bir şekil ile ilerleyen hareketli dalgalara soliter dalga denir. Soliton dalga ise benzer türdeki başka bir dalga ile çarpıştığında şeklini ve hızını değiştirmeyen soliter dalga çeşitidir. İki tane soliter dalga birbirlerine gittikçe yakınlaştıkça zamanla deforme olur ve sonuçta tek bir dalga paketinde birleşirler. Bu dalga paketi, bir süre sonra çarpışmadan önce ki aynı şekil ve hıza sahip iki soliter dalgaya ayrılır. Çarpışma, hiçbir dalganın dalga formuna zarar vermez. Çarpışma anında dalga genliği iki dalganın toplamından daha küçük olur. Bu lineer olmayan bir davranıştır. Lineer olmama durumu hayati bir önem taşır. Birçok oluşum denklemleri için, soliter dalgalar elastik olmadan dağılır ve radyasyona bağlı olarak enerji kaybeder. Solitonlar için bu durum benzer şekilde değildir. Tamamen lineer olmayan bir etkileşimden sonra soliter dalgalar aynı hız ve şekille kimliklerini koruyarak dağılırlar. Kararlılık soliton fiziğinde önemli bir rol oynar. Model denklemlerindeki solitonların kararlılığı, lineer olmama ve dağılma arasındaki hassas dengeden kaynaklanır. Lineer olmama bir soliter dalganın daha uzakta toplanmasına neden olur. Dağılma, bir yerde toplanmış dalganın yayılma efektidir. Eğer bu iki zıt efektten biri kaybedilirse, solitonlar kararsız hale gelir ve sonuçta yok olurlar. Dağılmayan dalgalar olarak bilinen solitonlar, ilk olarak John Scott Russell tarafından 1834 yılında Edinburg ile Glasgow arasındaki kanalda sığ sularında geniş bir soliter dalga olarak gözlemlendi. Bu keşif soliton fiziğinin başlangıcı olarak söylenebilir. John Scot Russell kanalda atların çekiyor olduğu bir botu izlerken sürekli bir formda ve kanal boyunca uzun mesafeler kat eden dalgaların bozulma ve türbülansa karşı dağılmadan durabilmesini sağlayan en iyi ortamın nasıl olması gerektiğini anlamaya çalışıyordu. Bot durmaya çalıştığında suyun çalkantısı ile şeklini kaybetmeyen sabit bir hızda olduğu fark edilen bir dalga botun ön taraflarında ortaya çıktı. J.S. Russell o zamanlar ”S.Russell tekil dalgası” veya ”soliton” olarak adlandırılan bu dalgaları ”çevrimli dalga” olarak tanımladı. Bu dalgaları at sırtında kanalda gözden kaybolana kadar en fazla 2 mil kadar takip etti ve dalga hızının saatte en fazla 8 mil olduğunu hesapladı. J.S. Russell kendi laboratuarında deneysel olarak bu tip dalgaları üretmeye çalıştı. Bütün bu çalışmalardan sonra bu tür dalgaların özelliklerinin aşağıdaki gibi olduğuna kanaat getirdi. (Topoğlu, 2007)

-Dalgalar istikrarlı, değişmez ve uzun mesafeler boyunca ilerleyebilirler. (Normal dalgalar ya düzleşme ya da dikleşme ve bozulma eğilimindedir.)

- Hızı dalganın boyutuna, genişliği de suyun derinliğine bağlıdır.

-Bu tip dalgalar, birleşmek yerine büyük bir dalga küçük bir dalgaya yetişir ve üzerinden geçer. (Normal dalgalar birleşirler.)

-Eğer dalga su derinliği için çok büyükse bir küçük bir de büyük iki dalgaya ayrılır.

Scott Russell'in gözlemleri Newton ve Bernouli'nin geçerli dalga teorilerini kullanarak tekrar üretilemediği için tüm bilim insanları tarafından hoş karşılanmadı. Lord Rayleigh 1870 yılında Russell'in gözlemlerini matematik modelleriyle bağdaştırmak için bir yazı yazdı. Dalgaların sığ bir kanalın yüzeyindeki yayılımını açıklayan denklem Korteweg de Vries tarafından 1895'de bulundu. Galilean uyguladıktan ve çeşitli dönüşümler yaptıktan sonra KdV denklemini basitleştirilmiş şekliyle yazdı.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Bir diğer deyişle KdV diye adlandırdıkları bu denklem aslında Russell'in kanalda gözlemlediği ve üzerine çalışmalar yaptığı solitonlar gibi sığ bir kanalın yüzeyindeki dalganın dağılımını tanımlamak için yazılmıştı. Buna rağmen 1895'te çalışmalarını yayımladıklarında Russell'in gözlem ve çalışmasını kabul etmediler. Oysa KdV denklemi soliton ile çözülen en iyi bilinen lineer olmayan diferensiyel denklemlerden biridir. Bu lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin soliton çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2}c \sec h^2 \frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct + \delta)$$

şeklindedir. Burada c solitonun hızıdır ve δ fazdır. Bu John Scott Russell tarafından gözlemlenen soliter dalgayı temsil eder ve tepe genliğinin hızın yarısı olduğunu gösterir. Bu yüzden daha büyük soliter dalgalar daha fazla hıza sahiptir. Matematiksel sistemi fiziksel sisteme bağlayan sezginin eksikliğine bağlı olarak lineer olmayan denklemlerle kontrol edilebilen olgu ileriki araştırmaların akıllarda hala anlaşılması zor olgular olarak kalmasına neden olmuştur. Solitonlar birçok lineer olmayan sistemin teorik ve bilimsel araştırmalarda kullanılmasını sağlayan yaygın bir çözüm yeteneğine sahiptir. Solitonların başka bir soliton ile etkileştikten sonra şeklini koruması ve dağılmaması özelliği teorik fizikçilerin parçacıkları soliton gibi modellemesi için ikna edici olmuştur. Özellikle kuantum fiziğinde parçacıkların hareketi tam olarak bu şekilde algılanıyor. Lineer olmayan Schrödinger denklemi kuantum mekaniğinde parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını belirleyip modellemede kullanılır. Bu denklem için soliton çözümler bulunabilir (Topoğlu, 2007).

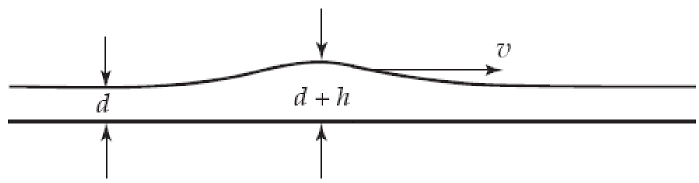
2.8 Soliton Teorisine Fiziksel Yorum

Fizik terimi olan dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime denir. Yaygın olarak bilinenleri, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Buna ek olarak ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterir. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar. Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama ihtiyaç duymazlar ve boşlukta da yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, 1983). Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilirler. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşıması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır. Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001).

$i)$ Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.

$ii)$ Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

Dolayısıyla büyük genlikli bir soliter dalgası, küçük genlikli bir soliter dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir soliter dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir soliter dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında soliter dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalarla yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağı ele alındığında sıcaklık kademeli olarak hissedilirken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırına el yaklaştırıldığında, sıcaklık hemen hissedilir ve el geriye çekilir. Dolayısıyla sinirler bir nevi soliter dalgası oluşturarak beyine bilgiyi en kısa sekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen soliter dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, lazer fiziği, süper iletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chaohao, 1995).



Şekil 2.2 Soliter Dalganın Hareketi

3. METOTLAR

Bu bölümde öncelikle, kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğini test eden Weiss, Tabor, Carnevale (WTC) algoritması olarak da bilinen Painlevé metodu verilmiştir. Daha sonra lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere dalga dönüşümü uygulanarak lineer olmayan adi diferensiyel denkleme dönüştürüp, bu tip denklemlerin tam çözümlerini bulmayı amaçlayan yöntemlerden olan genelleştirilmiş Kudryashov metodu ve Jacobi eliptik fonksiyon metodu verilmiştir. Son olarak da kısmi diferensiyel denklemlerin korunum kanunlarının bulunmasını amaçlayan ve ilk olarak Alman bilim adamı Steudel tarafından ortaya atılan çarpan metodu verilmiştir.

3.1 Kısmi Türevli Denklemler için Painlevé Metodu (WTC)

Diferensiyel denklemlerin singüler noktaları, sabit singüler noktalar ve hareketli singüler noktalar olmak üzere ikiye ayrılır. Denklemdeki sabit aykırı noktalar, denklemin çözümü yapılmadan da bulunabilen tekilliklerdir. Hareketli aykırı noktalar ise başlangıç koşullarına bağlı olan lineer olmayan denklemlerde karşımıza çıkan tekilliklerdir. Bir diferensiyel denklemin Painlevé özelliğini taşıması için çözümün tüm hareketli tekil nokta civarında Laurent serisine açılması gerekir (Bekir, 2005). 1980 yılında Ablowitz, Ramani, Segur (ARS) bir adi diferensiyel denklemin P-tipinde olup olmadığını belirlemeye yarayan ARS algoritmasını ortaya atmışlardır (Ablowitz vd. 1980). Algoritma derken özel türde bir problemi çözmek için standardize edilmiş herhangi bir yöntem (metot) demek istenmiştir. Ayrıca bu yöntem aykırı (tekil) nokta analizi, Painlevé testi olarak da bilinmektedir (Ablowitz vd. 1980). Adi diferensiyel denklemlerin Painlevé özelliği araştırılırken uygulanan ARS algoritması, kısmi diferensiyel denklemler için WTC algoritması olarak geliştirilmiştir (Özemir, 2012). ARS algoritması ile incelenen adi diferensiyel denklemde indirgeme yapılmadan kısmi diferensiyel denklemlerin doğrudan incelenmesini sağlamak amacı ile geliştirilen tekillilik manifoldu komşuluğunda açılım kavramı ilk defa 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından ortaya konmuştur (Weiss vd. 1983).

Tanım 15. *(Tekillik Manifoldu): Tanım 1 de kısmi diferensiyel denklemin genel formu verilmiştir. Bu denklem için bağımlı değişken u nun Laurent seri açılımı*

$$u = \phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. $i = 1, ..., n$ *ve* $z_i = z_i(x, y)$ *olmak üzere, burada geçen*

$$\phi(z_1, z_2, ...z_n) = 0 \tag{3.2}$$

ifadesine tekillik manifoldu denir (Bekir, 2005).

Şimdi kısmi diferensiyel denklemler için WTC yöntemini dört adımda inceleyelim (Bekir, 2005).

I.Adım: Etkin davranışın bulunması

ϕ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$u = u_0\phi^{\alpha} \tag{3.3}$$

ifadesinin (2.1) kısmi diferensiyel denkleminin etkin terimlerinde (en yüksek mertebeden lineer terim ve lineer olmayan en yüksek dereceli terim) yerine yazılarak dengelenen her bir terim için bulunabilecek tüm α_i değerleri elde edilir ve fonksiyonun en alt sınırını gösteren α değeri (dengelenme sayısı) algoritmada kullanılmak üzere buradan belirlenir. Yöntemin uygulanabilmesi için α değerinin negatif tam sayı olması gerekir (Kaur ve Wazwaz, 2018). Belirlenen α değerinden sonra n denklemin mertebesi olmak üzere $\phi^{\alpha-n}$ terimlerinden oluşan denklemden $u_0 \neq 0$ olmak üzere ϕ nin kısmi türevlerinden oluşan u_0 baş terimi elde edilir. Bulunan değerler bu koşulları sağlamaz ise yöntem uygulanmaya devam edilemez.

II. Adım: Dallanmaların belirlenmesi

Yalnızca ϕ ve ϕ nin kısmi türevlerine bağlı olan denkleme E_j denilsin. $E_0 = 0$ denklemi çözüldüğünde, birkaç çözüm bulunabilir. Bu çözümlere dallanma adı verilir.

III. Adım: Rezonansların bulunması

$E_0 = 0$ denkleminde belirlenemeyen u_j fonksiyonlarının j değerlerinin bulunmasıdır. Bu adımda önceden elde edilen α ve u_0 değerleri

$$u = u_0\phi^{\alpha} + u_j\phi^{\alpha+j} \tag{3.4}$$

fonksiyonunda yerine yazıldıktan sonra Tanım 1 deki kısmi diferensiyel denklemde yerine koyulup, lineer olan $\phi^{\alpha+j-n}$ teriminin katsayılarından oluşan polinom sıfıra eşitlenir $(P(j) = 0)$ ve denklemin köklerinden oluşan değerler rezonans değerleri olarak bulunur. (3.4) fonksiyonu Tanım 1 de yerine yazıldıktan sonra oluşan $E_j = 0$ denkleminde her zaman $(j + 1)$ çarpanı bulunması gerekir. Yani $j = -1$, $E_j = 0$ denkleminin her zaman bir kökü olarak karşımıza çıkar. Bu sebeple $j = -1$ iken ϕ manifoldu da daima keyfidir. (Kangalgil, 2008) (Öğün, 2008).

Not 3. *i) Laurent seri açılımının kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü olması için, E_j denkleminin $n-1$ tane negatif olmayan farklı tam sayı ve gerçel rasyonel kökü olmalıdır. Eğer bu şart sağlanmıyorsa çözümlerden hiçbiri genel çözüm değildir. (Bekir, 2005)*

ii) Rezonansların negatif olduğu durumu bu test yapılırken ihmal etmeliyiz çünkü genel çözüm bulurken Laurent seri açılımı negatif olmayan rezonans değerleri alınarak tanımlanır. (Bekir, 2005)

iii) Rezonansların pozitif olduğu durumda gerçel tam sayı olmayan herhangi bir kök varsa bu denklemde hareketli dallanma noktası olduğunu gösterir. Buna karşılık gelen çözümler genellikle Painlevé özelliğini taşımaz. (Bekir, 2005)

IV. Adım: Keyfi fonksiyonların bulunması ve rezonanslardaki bağdaşabilirlik şartlarının sağlanması

Bir önceki adımda bulunan rezonansların en büyüğü j_s olsun. O halde

$$u = \sum_{j=0}^{j_s} u_j \phi^{j+\alpha} \tag{3.5}$$

sonlu toplamı Tanım 1 deki kısmi diferensiyel denklemde yerine yazılıp, $\phi^{\alpha+j-n}$ teriminin katsayılarının bulunması ile

$$P(j)u_j + R_j = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada R_j, $k = 0, 1, 2, ...j-1$ olmak üzere ϕ ve u_k nın kısmi türevlerini içinde bulunduran bir polinomdur. Buradan u_j, $(j = 0, 1, 2, ..., j_s)$ fonksiyonları için indirgeme bağıntısı belirlenir. j rezonansı için $P(j) = 0$ olduğundan R_j fonksiyonu özdeş olarak sıfır ise (3.6) den elde edilen u_j fonksiyonlarının keyfi olduğu ve rezonansın bağdaşabilir olduğu söylenir (Hao vd. 2008). Sıfırdan farklı ise ϕ keyfiliği için (3.1) Laurent seri açılımı yoktur. Ayrıca bir rezonans değeri daima -1 dir ve bu da ϕ fonksiyonunun serbest tekillik manifolduna karşılık geldiğinden bu rezonans her zaman bağdaşabilirdir (Verma ve Kaur, 2018). Son olarak j nin bütün pozitif değerlerindeki rezonansların hepsi bağdaşabilir olmalıdır (Kaur ve Wazwaz, 2018). Eğer bütün bu koşullar sağlanıyorsa bu kısmi diferensiyel denklem Painlevé özelliğini sağlar yani integrallenebilirdir denir (Hao vd. 2008).

Not 4. *Eğer dallanma birden fazla ise KDD nin integrallenebilir olması için oluşan dallanmaların rezonanslarına karşılık gelen u_j fonksiyonlarının hepsinin keyfi olması ve rezonanslarının hepsinin bağdaşabilir olması gerekir.*

Not 5. *Bir kısmi diferensiyel denklem Painlevé özelliğine sahipse (P-tipinde ise), integrallenebilirdir denir. Fakat integrallebilirse Painlevé özelliğini sağlamak zorunda değildir. Öte yandan Painlevé özelliğini sağlamayan bir kısmi diferensiyel denklem için bu KDD integrallenemez denilemez. İntegrallenebilirliğini kontrol etmek için daha başka metotlar uygulanmalıdır.*

Not 6. *Tekillik manifoldu belli bir kısmi diferensiyel denklemi sağladığında sonsuz serinin kesilebileceğini ve eldeki lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin sonlu seri şeklinde bir özel çözümünün bulunabileceğini göstermişlerdir. (Bekir, 2005)*

Not 7. *Painlevé özelliği olan bir denklemin bağımsız değişkenlerine göre türevi alınırsa oluşan yeni denkleminde Painlevé özelliğine sahip olduğu söylenebilir. (Bekir, 2005)*

Not 8. *WTC algoritması bir kısmi diferensiyel denkleme uygulandıktan sonra denklemin Painlevé özelliğine sahip olmadığı ile karşılaşılıyorsa, denklemin özel çözümünün Painlevé özelliğini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilebilir.*

3.2 Tam Çözüm Metotları

Matematiksel fizik alanında metotlar kullanarak lineer olmayan denklemleri çözmek ve tam çözümlerini aramak önemli bir rol oynar. Son on yılda tam çözüm, matematikçiler ve fizikçiler için son derece aktif araştırma alanlarından biri haline gelmiştir. Modelleme yapmak, çözümlerin kararlılığını analiz etmeyi ve kısmi diferensiyel denkleme nümerik analiz yapmayı sağlar. Fizik, mekanik, kimya ve biyoloji gibi birçok önemli alan ve dinamik süreçlerde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere rastlayabiliriz. Lineer olmayan dalga; dağılım, dağılma, yayılma, reaksiyon ve taşınım olayları lineer olmayan oluşum denklemlerinde son derece büyük bir öneme sahiptir. Son zamanlarda lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerinin araştırma alanında önemli ilerlemeler vardır. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere tam çözümler bulmada, soliton teorisinin gelişmesiyle de araştırmacılar uygun teknikler kullanarak sonuçlara ulaşmaktadır. Özellikle, lineer olmayan denklemler için soliton çözümlerin varlığı kaos, matematiksel biyoloji, difüzyon süreci, plazma fiziği, optik lifler, katı hal fiziği vb. gibi birçok fizik alanındaki olası uygulamalar nedeniyle çok önemli bir değere sahiptir. Kısmi diferensiyel denklemlerin alt bir kategorisi haline gelen lineer olmayan oluşum denklemlerinin yeni dalga çözümlerini elde etmek için birçok metotlar önerilmiş ve geliştirilmiştir. Bu metotlara örnek olarak yardımcı denklem metodu (Sirendaoreji, 2003), genelleştirilmiş Kudryashov metodu (Koparan, 2017), Jacobi eliptik fonksiyon metodu (Parkes vd. 2002), tanh - fonksiyon metodu (Zhang, 2010), üstel - fonksiyon metodu (Wu ve He, 2007) vb. gibi yöntemler verilebilir. Bu tez çalışmasında üzerinde çalışılan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere hareketli dalga dönüşümü yapılarak, denklemleri lineer olmayan adi diferensiyel denklemlere indirgeyip genelleştirilmiş Kudryashov metodu veya Jacobi eliptik fonksiyon metodu ile denklemlerin hareketli dalga çözümleri bulunmuştur. Kullanılan yöntemler ile elde edilen tam çözümler lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon içeren çözümlerini vermektedir. Bir diğer deyişle periyodik ve soliton çözümler elde edilmiştir. Şimdi bu çalışmada kullanılacak olan metotları tanımlayalım. Öncelikle tam çözüm metotlarında sıkça karşılaşılan dengelenme sayısı kavramının tanımını verelim.

Dengelenme Sayısı: Toplam şeklinde verilen tam çözümün fonksiyonunun üst sınırını gösteren sayıya dengelenme sayısı denir. Dengelenme sayısı lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden lineer olan terim arasında yazılan bir bağıntı sonucu yapılan işlemde elde edilen sabit bir sayıdır. Bu tanımı daha iyi anlamak için genel bir örnek verilirse, herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek dereceden lineer olmayan terim $v^q(\dfrac{d^s v}{d\xi^s})^t$ ve en yüksek mertebeden lineer terim $\dfrac{d^p v}{d\xi^p}$ olarak verilsin. Bu adi diferensiyel denklemin terimlerine $v = \tau^m$ dönüşümü yapılırsa, p, q, s, t pozitif tamsayı ve m dengeleme sayısı olmak üzere dengelenme bağıntısı, $m + p = mq + t(m + s)$ olarak yazılır ve bu adi diferensiyel denklemin sonucundan elde edilen m pozitif dengelenme sayısıdır (Kaplan, 2013).

3.2.1 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu

Genelleştirilmiş Kudryashov metodu lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümünü elde etmek için kullanılır. Bu metot genellikle dengelenme sayısı bir olan adi diferensiyel denklemler için kullanışlıdır. x, y, z bağımsız değişkenler, $u(x, y, z)$ bağımlı değişken ve N bir polinom olmak üzere

$$N(u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, ...) = 0 \tag{3.7}$$

lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemin genel bir formu olarak verilsin. Genelleştirilmiş Kudryashov metodunun uygulama aşamaları şunlardır:

$i)$ k, l, m keyfi sabitler ve ξ bağımsız değişken olsun.

$$u(x, y, z) = u(\xi),\ \xi = kx + ly - mz \tag{3.8}$$

dalga dönüşümü, (3.7) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki gibi lineer olmayan bir adi diferensiyel denklem elde edilir.

$$N(u, u', u'', ...,) = 0 \tag{3.9}$$

$ii)$ $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ ve $a_i(i=0,1,...,n), b_j(j=0,1,...,r)$ sabitler olmak üzere (3.9) denkleminin çözümü aşağıdaki rasyonel formda aranabilir:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i Q^i(\xi)}{\sum_{j=0}^{r} b_j Q^j(\xi)} \tag{3.10}$$

A integral sabiti olmak üzere

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + Ae^{\xi}} \tag{3.11}$$

(3.12) denkleminin bir çözümüdür ve yardımcı denklem aşağıdaki gibidir (Koparan vd. 2017):

$$\frac{dQ}{d\xi} = Q^2(\xi) - Q(\xi) \tag{3.12}$$

$iii)$ (3.9) denkleminde en yüksek dereceden lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden lineer olan terim arasında dengelenme yapıldıktan sonra m dengeleme sayısı olmak üzere, $n - r = m$ olacak şekilde (3.10) denklemindeki n ve r pozitif tamsayıları bulunur.

$iv)$ (3.10) denklemi ile (3.12) denklemini (3.9) denkleminde yerine yazarsak, $Q = Q(\xi)$ olmak üzere $R(Q)$ polinomu elde edilir. Sonrasında $R(Q)$ nun tüm katsayıları sıfıra eşitlenir ve bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel sistemi Maple (*Maple User Manual*) ile çözerek, $a_i(i=0,1,...,n), b_j(j=0,1,...,r)$ ve k, l, m bilinmeyenleri bulunur. Sonuç olarak, bulunan bu değerler ve (3.12) denklemi (3.10) denkleminde yerine yazılıp, (3.8) dönüşümü yapılırsa (3.7) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

3.2.2 Jacobi Eliptik Fonksiyon Metodu

Jacobi eliptik fonksiyon metodu, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini toplu şekilde bulmak için kullanılmaktadır. Bu yöntem, yeni bir genel ansatz aracılığıyla sunulur ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin Jacobi eliptik fonksiyonları periyodik çözümlerini bulmayı sağlamaktadır. Bu yöntem ilk olarak Liu (Liu vd. 2001a) ve Fu (Fu vd. 2001) tarafından tanıtılmıştır ve lineer olmayan dalga denklemlerinin periyodik çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra yöntem birçok formda geliştirilmiştir ve uygulanmıştır. Jacobi eliptik fonksiyon metodu literatürde yaygın olarak kullanılan tanh metodu, cosh metodu, sinüs-cosinüs metodu, genişletilmiş tanh metodu gibi yöntemlerden daha geneldir. Bu yöntemin diğer yöntemlere göre üstünlüğü, periyodik ve hiperbolik fonksiyonlar dahil olmak üzere her tipteki tam çözümü içermesidir. x, y bağımsız değişkenler, u bağımlı değişken ve N bir polinom olmak üzere

$$N(u, u_x, u_y, u_{xx}, ...) = 0 \tag{3.13}$$

lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem olsun. k, l keyfi sabitler olmak üzere (3.13) denklemi

$$u(x, y) = u(\xi),\ \xi = kx - ly \tag{3.14}$$

dalga dönüşümü yapılarak aşağıdaki lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgenir.

$$N(u, u', u'', u''', ...) = 0 \tag{3.15}$$

(3.13) denklemindeki en yüksek dereceden lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden lineer olan terim arasında dengeleme yapılarak n pozitif tamsayısı hesaplanır. $F(\xi)$, (3.17) denklemini sağlasın ve a_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ birer keyfi sabit olmak üzere 3.13 denkleminin çözümleri

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i F^i(\xi) \tag{3.16}$$

formunda aranır. P, Q, ve R sabitler olmak üzere yardımcı denklem aşağıdaki gibidir:

$$F'(\xi) = \sqrt{PF^4(\xi) + QF^2(\xi) + R} \tag{3.17}$$

denkleminin türevleri

$$\begin{aligned} F'' &= 2PF^3 + QF, \\ F''' &= (6PF^2 + Q)F', \\ F''' &= 24P^2F^5 + 20PQF^3 + (12PR + Q^2)F, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde alınabilir (Ebaid ve Aly, 2012). Maple yardımıyla, (3.16) ve (3.17) denklemi (3.15) denkleminde yerine yazılarak, aynı kuvvetli $F^i(F')^j$ $(j = 0, 1,\ i = 0, 1, 2, ...)$ lerin katsayıları her biri sıfıra eşitlenerek, bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Maple (*Maple User Manual*) kullanarak çözüldüğünde, $a_0, a_1, ..., a_n$ ve k, l bilinmeyenlerine ulaşılır. Elde edilen sonuçlar (3.16) denkleminde yerine yazıldığında, periyodik ve soliton çözümler bulunur. (3.16) denklemi (Ebaid ve Aly, 2012) dan iyi bilindiği üzere aşağıda belirtildiği gibi Jacobi eliptik fonksiyonun ailelerine sahiptir.

$Durum$	P	Q	R	$F(\xi)$
1	m^2	$-(1+m^2)$	1	$sn\xi$
2	$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$cn\xi$
3	1	$-(1+m^2)$	m^2	$ns\xi$
4	1	$-(1+m^2)$	m^2	$ns\xi$
5	1	$-(1+m^2)$	m^2	$dc\xi$
6	$1-m^2$	$2-m^2$	1	$sc\xi$
7	1	$(2-m^2)$	$(1-m^2)$	$cs\xi$
8	1	$(2-m^2)$	$(1-m^2)$	$cs\xi$
9	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns\xi \pm cs\xi$
10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns\xi \pm cs\xi$
11	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$nc\xi \pm sc\xi$
12	$P>0$	$Q<0$	$\frac{m^2Q^2}{(1+m^2)^2P}$	$\sqrt{\frac{-m^2Q}{(1+m^2)P}}sn\left(\sqrt{\frac{-Q}{1+m^2}}\xi\right)$
13	$P<0$	$Q>0$	$\frac{(1-m^2)Q^2}{(m^2-2)^2P}$	$\sqrt{\frac{-Q}{(2-m^2)P}}dn\left(\sqrt{\frac{Q}{2-m^2}}\xi\right)$
14	1	m^2+2	$1-2m^2-m^4$	$\frac{dn\xi cn\xi}{sn\xi}$
15	$-\frac{4}{m}$	$6m-m^2-1$	$-2m^3+m^4+m^2$	$\frac{mdn\xi cn\xi}{msn^2\xi+1}$

(3.19)

16	$\dfrac{4}{m}$	$-6m-m^2-1$	$2m^3+m^4+m^2$	$\dfrac{mdn\xi cn\xi}{msn^2\xi-1}$
17	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1-2m^2}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{sn\xi}{1\pm cn\xi}$
18	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1-2m^2}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{sn\xi}{1\pm cn\xi}$
19	$\dfrac{1-m^2}{4}$	$\dfrac{1+m^2}{2}$	$\dfrac{1-m^2}{4}$	$\dfrac{cn\xi}{1\pm sn\xi}$
20	$\dfrac{C^2m^4-(B^2+C^2)m^2+B^2}{4}$	$\dfrac{m^2+1}{2}$	$\dfrac{m^2-1}{4(C^2m^2-B^2)}$	$\dfrac{\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2m^2)}}+sn\xi}{Bcn\xi+Cdn\xi}$
21	$\dfrac{B^2+C^2}{4}$	$\dfrac{m^2}{2}-1$	$\dfrac{m^4}{4(C^2+B^2)}$	$\dfrac{\sqrt{\dfrac{(B^2+C^2-C^2m^2)}{(B^2+C^2)}}+dn\xi}{Bsn\xi+Ccn\xi}$
22	$-(m^2+2m+1)B^2$	$2m^2+2$	$\dfrac{2m^2-m^2-1}{B^2}$	$\dfrac{msn^2\xi-1}{B(msn^2\xi+1)}$

$sn\xi,\ cn\xi,\ dn\xi$ fonksiyonları kullanılarak diğer Jacobi fonksiyonları aşağıdaki gibi verilir:

$$ns\xi=\frac{1}{sn\xi},\ \ nc\xi=\frac{1}{cn\xi},\ \ nd\xi=\frac{1}{dn\xi},\ \ sc\xi=\frac{cn\xi}{sn\xi},$$

$$cs\xi=\frac{sn\xi}{cn\xi},\ \ ds\xi=\frac{dn\xi}{sn\xi},\ \ sd\xi=\frac{sn\xi}{dn\xi}$$

Aynı zamanda bu fonksiyonlar aşağıda verilen formülleri de sağlar:

$$sn^2\xi+cn^2\xi=1,\ dn^2\xi+m^2sn^2\xi=1,\ ns^2\xi=1+cs^2\xi,$$

$$ns^2\xi=m^2+m^2ds^2\xi,\ sc^2\xi+1=nc^2\xi,\ m^2sd^2\xi+1=nd^2\xi.$$

Buna ek olarak bu fonksiyonların türev özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$sn'\xi=cn\xi dn\xi,\ cn'\xi=-sn\xi dn\xi,\ dn'\xi=-m^2sn\xi cn\xi.$$

$m\to 1$ için Jacobi eliptik fonksiyonlar aşağıda belirtildiği gibi hiperbolik fonksiyonlara dönüşür: (Ebaid ve Aly, 2012)

$$\begin{gathered} sn\xi\to tanh\xi,\ \{cn\xi,dn\xi\}\to sech\xi,\ \{sc\xi,sd\xi\}\to sinh\xi,\\ \{ds\xi,cs\xi\}\to csch\xi,\ \{nc\xi,nd\xi\}\to cosh\xi,\ ns\xi\to coth\xi,\ \{cd\xi,dc\xi\}\to 1. \end{gathered} \tag{3.20}$$

$m \to 0$ için Jacobi eliptik fonksiyonlar aşağıda belirtildiği gibi trigonometrik fonksiyonlara dönüşür: (Ebaid ve Aly, 2012)

$$\begin{gathered}\{sn\xi, sd\xi\} \to sin\xi,\ \{cn\xi, cd\xi\} \to cos\xi,\ sc\xi \to tan\xi, \\ \{ns\xi, ds\xi\} \to csc\xi,\ \{nc\xi, dc\xi\} \to sec\xi,\ cs\xi \to cot\xi,\ \{dn\xi, nd\xi\} \to 1.\end{gathered} \tag{3.21}$$

3.3 Çarpan Metodu

Son on yılda, aktif araştırma çalışmaları kısmi diferensiyel denklemler için korunum kanunlarının elde edilmesine odaklanmıştır ve korunum kanunlarının bulunması için birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bunlara örnek olarak varyasyonel problemler için Noether'ın teoremi (Noether, 1918), çarpan metodu (Anco ve Bluman, 2002), kısmi Noether yaklaşımı (Kara ve Mahomed, 2006) verilebilir. Kısmi diferensiyel denklemlerin tüm korunum kanunlarında fiziksel yorum olmayabilir fakat korunum kanunları kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirlik çalışmasında gereklidir. Eğer bir kısmi diferensiyel denklemde çok sayıda korunum kanunu çıkıyor ise bu onun yüksek ihtimalle integrallenebilir olduğunu ve çözülebilir olduğunu gösterir (Ablowitz ve Clarkson, 1992). Öte yandan korunum kanunları kısmi diferensiyel denklemlerin analizinde özellikle nümerik integrasyonunda, soliton çözümlerin elde edilmesinde, kısmi diferensiyel denklemlerin indirgenmesinde Hamilton yapılar ve diferensiyel operatörleri, gibi bazı özellik çalışmalarında da çok kullanışlıdır (Leveque, 1992). Ayrıca bir diğer örnek olarak nümerik hataların kontrolü verilebilir. Korunum kanunları klasik olmayan dönüşümler teorisinde de önemli bir rol oynar (Adem ve Khalique, 2012). Klasik olmayan dönüşümlere örnek olarak normal formlar ve asimptotik integrallenebilirlik verilebilir (Kodama ve Mikhailov, 1996). Bu tezde ele alınan çarpan metodu Lie simetri teorisi ile bağlantısız ve doğrudan diverjans koşulunun sıfır olması durumundan yola çıkarak oluşturulmuştur. Korunum kanunlarının bulunmasında en eski metotlardan biri olan çarpan metodu tamamen hesaplama teknikleriyle elde edilir. Çarpan metodu, varyasyonel metot ve karakteristikler metot olarak da bilinir. İlk olarak çarpan metodunu Alman bilim insanı Steudel ortaya atmıştır (Steudel, 1962). Daha sonra S.C Anco ve G.W Bluman kapsamlı teorik alt yapısıyla vermiştir (Bluman ve Anco, 2002). Çarpan metodunda sıkça karşılaşılan bazı kavramların tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 16. *n bağımsız ve m bağımlı değişken olmak üzere $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$, k. mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem $u_{(1)}, u_{(2)}, ..., u_{(k)}$ kısmi türevler olmak üzere*

$$E_\alpha = (x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}) = 0, \quad \alpha = 1, ..., m \tag{3.22}$$

olsun. Yani x^i total türev operatörüne ilişkin olmak üzere sırasıyla $u_i^\alpha = D_i(u^\alpha)$, $u_{ij}^\alpha = D_j D_i(u^\alpha), ...$ verilsin. Böylece total türev operatörü aşağıdaki gibidir (Adem ve Khalique, *2012):*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \cdots \quad i = 1, ..., n \tag{3.23}$$

Tanım 17. $\forall\ \alpha$ *için Euler-Lagrange operatörü*

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geq 1} (-1)^s D_{i_1} ... D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 i_2 ... i_s}}, \quad \alpha = 1, ..., m \tag{3.24}$$

olarak verilir (Adem ve Khalique, 2012)

Tanım 18. $T = (T^1, T^2, ..., T^n)$, $T^j \in A$, $j = 1, ..., n$ $n-$ *bileşenli vektör olsun.* $D_i T^i|_{(3.22)} = 0$ *ise* T *korunum vektörüdür (Adem ve Khalique, 2012).*

$\wedge^\alpha(x, u, u_{(1)}, ...)$ çarpanlar olmak üzere çarpan yaklaşımıyla korunum vektörleri

$$\wedge^\alpha E_\alpha = D_i T^i \tag{3.25}$$

karakteristik formunda yazılır (San, 2014). Çarpanlar (karakteristikler) için belirleyici denklemler (3.25) nin varyasyonel türevini alınarak

$$\frac{\delta(\wedge^\alpha E_\alpha)}{\delta u^\alpha} = 0 \tag{3.26}$$

olarak elde edilir (San, 2014). Belirleyici denklemde bağımlı değişkenin türev çeşitlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bulunan sistemin çözülmesiyle çarpanlar bulunur. Her bir çarpana karşılık yerel korunum vektörü asosiye olur. Bu metotta işlem hacmi gerçekten fazladır. Düşük mertebeden az terim bulunduran denklemler için problem olarak görülmese de yüksek mertebeden denklemlerin çarpan yöntemi ile korunum kanunlarını bulmak epeyce zordur. Bu problemi gidermek için Cheviakov, Maple paket programını kullanarak GeM (CardioCemm Solutions, 2016) alt programını yazmıştır. Bu program yardımıyla yüksek mertebeden denklemlerinde korunum kanunları kolaylıkla elde edilebilir (Cheviakov, 2007).

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde, üç farklı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin bazı matematiksel özellikleri incelenmiştir. Yapılan cebirsel işlemler Maple (*Maple User Manual*) veya Maple paket programının alt programı Cheviakov' ın yazmış olduğu GeM paket programı (CardioCemm Solutions, 2016) kullanılarak yapılmıştır. İncelenen ilk denklem, (2+1)-boyutlu KdV tipi (KdV4) denklemdir. KdV4 denklemine ilk defa Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından geliştirilen WTC algoritması uygulanarak integrallenebilirliği araştırılıp sonrasında denkleme dalga dönüşümü yapılarak lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgeyip tam çözüm metotlarından biri olan genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir ve bu denklem için Studel'in geliştirmiş olduğu çarpan metodu ile korunum kanunları bulunmuştur. Ele alınan diğer bir denklem ise (1+1)-boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq denklem sistemi (GBQS) dir. Bu denklem ailesine Painlevé testi yapılıp Painlevé özelliğine sahip olup olmadığı araştırılıp, denklem sistemine dalga dönüşümü uygulanarak lineer olmayan adi diferensiyel denklem sistemine indirgeyip Jacobi eliptik fonksiyon metodu ile periyodik ve hiperbolik fonksiyon içeren çözümleri bulunmuştur. Son olarak genelleştirilmiş Boussinesq denklem ailesinin çarpan metodu ile korunum vektörü bileşenleri elde edilmiştir. İncelenen son denklem (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklemine Painlevé metodu uygulanarak Painlevé anlamında integrallenebilirliği araştırılıp, denklemin genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile tam çözümleri elde edilmiştir ve çarpan metodu ile korunum kanunları bulunmuştur.

4.1 (2+1)-Boyutlu Korteweg-de Vries Tipi (KdV4) Denklemi

(2+1)-boyutlu KdV tipi denklem,

$$u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_x u_{xt} + 2u_{xx}u_t = 0 \tag{4.1}$$

olarak verilir (Wazwaz, 2013). (2+1)-boyutlu bir Korteweg-de Vries tipi denklemi sığ su dalgalar, yüzey ve iç dalgaları gibi doğrusal olmayan dalgaların yayılımını modelleyen bir denklemdir (Adem ve Khalique, 2012). Abdullahi Rashid Adem, Lie simetri yöntemini ve çoklu üstel-fonksiyon yöntemini kullanarak (4.1) denkleminin simetrilerini ve üstel çözümlerini bulmuştur (Adem, 2016). (4.1) denkleminin Bell polinomları, bilineer formları, Bäcklund dönüşümleri, soliton ve periyodik çözümleri elde edilmiştir (Ayhan vd. 2017),(Ayhan vd. 2016). Bu kısımda (4.1) denkleminin WTC algoritması ile Painlevé anlamında integrallenebilirliğini test edilip genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile tam çözümleri elde edilmiştir ve çarpan metodu kullanılarak korunum kanunları bulunmuştur. Jacobi eliptik fonksiyon metodu bu denklem için denenmiş olup bir sonuç elde edilememiştir.

4.1.1 Painlevé Metodu

(4.1) denklemine Painlevé metodunu uygulandığında ilk olarak etkin davranışın bulunması gerekir. ϕ keyfi bir fonksiyon olmak üzere etkin davranış

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t)\phi^{\alpha} \tag{4.2}$$

ifadesindeki α ve $u_0(x,y,t)$ ın belirlenmesi ile bulunur. Bunu elde etmek için (4.2) ifadesi (4.1) lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemde etkin terimlerde yerine yazıldığında tüm terimler dengelendiğinde ve α_i ler bulunduğunda $2\alpha - 3$ ve $\alpha - 4$ kuvvetlerine sahip olan ϕ li terimlerin dengelenmesinden elde edilen $\alpha = -1$ değeri algoritmada kullanılmak üzere seçilir. Bulunan $\alpha = -1$ değeri (4.2) ifadesinde daha sonra da (4.1) lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemde yerine yazıldığında ϕ^{-5} li terimlerden oluşan denklem çözülüp $u_0(x,y,t) = 2\phi_x, u_0(x,y,t) \neq 0$ fonksiyonu elde edilir. Bulunan α ve $u_0(x,y,t)$ değerleri (3.4) fonksiyonunda yerine yazıldıktan sonra

$$u(x,y,t) = 2\phi_x\phi^{-1} + u_j\phi^{j-1} \tag{4.3}$$

ifadesi (4.1) denkleminde yerine yazılarak n mertebe olmak üzere $u_j\phi^{\alpha+j-n}$ terimini ifade eden $u_j\phi^{-5+j}$ li lineer olan tüm terimlerin katsayılarından oluşan polinom

$$j^4 - 10j^3 + 23j^2 + 10j - 24 = 0$$

şeklinde bulunur ve polinomun kökleri rezonans değerleri olarak adlandırılır. Buradan rezonanslar

$$j = -1, 1, 4, 6$$

olarak elde edilir. İlk rezonans olan $j = -1$, $\phi(x,y,t) = 0$ ın tekillik manifoldunun keyfiliğinden her zaman bulunmak zorundadır. Diğer rezonansların keyfi fonksiyonlarının kontrol edilmesi için Laurent serisini

$$u(x,y,t) = \sum_{j=0}^{6} u_j\phi^{j-1}$$

şeklinde oluşturarak (4.1) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade ϕ nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve kuvvetlerin katsayıları birer denklem olarak yazıldıktan sonra bir cebirsel denklem sistemi oluşturulup bilinmeyen u_j fonksiyonları elde edilir. $u_{2,}u_{3,}u_5$ ifadelerini elde etmek ve $u_{1,}u_{4,}u_6$ ifadelerinin keyfi fonksiyon olup olmadığı kontrol ederek, rezonansların bağdaşabilirlik şartını sağlayıp sağlamadığını saptamak gerekir. Detaylı anlatılırsa $u_j\phi^{-5+j}$ li terimlere j rezonans değerleri yazıldığında rezonanslara karşılık gelen u_j ler ϕ li terimlerin katsayısıdır. (4.1) denklemi için $u_j\phi^{-5+j}$ li terimine j rezonans değerleri yerleştirildiğinde $j = 0,1,2,...,6$ değerleri için sırasıyla $\phi^{-5},\phi^{-4},\phi^{-3},\phi^{-2},\phi^{-1},\phi^{0},\phi^{1}$ li terimlerin katsayıları denklem olarak tanımlanır ve bu cebirsel denklem sistemi çözülerek sırasıyla $u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6$ fonksiyonları elde edilir. Varsayalım ki $j = 4$ olsun. $u_j\phi^{-5+j} = u_4\phi^{-1}$ olur ve ϕ^{-1} li terimin katsayısı bu terimden incelenir ve elde edilir. $j = 4$ rezonans değeri için ϕ^{-1} li terimden gelen u_4 değeri keyfi gelirse $j = 4$ rezonans değeri bağdaşabilir olur. Tüm terimlere detaylı şekilde cebirsel işlemler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
j = 0 : \phi^{-5} :&\quad u_0 = 2\phi_x,\\
j = 1 : \phi^{-4} :&\quad u_1 = u_1,\\
j = 2 : \phi^{-3} :&\quad u_2 = \frac{1}{6\phi_x^4 + 6\phi_x^3\phi_t}(-2\phi_x^2\phi_{xxt} + 3\phi_{xx}^2\phi_x - 4\phi_x^2\phi_{xxx} - \cdots),\\
j = 3 : \phi^{-2} :&\quad u_3 = \frac{1}{12\phi_x^5(\phi_t + \phi_x)^2}(\phi_x^2(\phi_t + 5\phi_x)(\phi_t + \phi_x)\phi_{xxxx} + \cdots),\\
j = 4 : \phi^{-1} :&\quad u_4 = u_4,\\
j = 5 : \phi^{0} :&\quad u_5 = -720u_{4,t}\phi_x^{12}\phi_t - 1080u_{4,t}\phi_x^{11}\phi_t^2 - \cdots,\\
j = 6 : \phi^{1} :&\quad u_6 = u_6
\end{aligned}
$$

değerlerine ulaşılır. Sonuç olarak $u_{1,}u_{4,}u_6$ ifadeleri keyfi fonksiyonlar olup rezonans değerleri bağdaşabilirlik koşulunu sağladığından ve aynı zamanda $u_{2,}u_{3,}u_5$ fonksiyonları bulunabildiğinden (4.1) denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahiptir yani integrallenebilirdir denir. Literatürde, (4.1) denkleminin Painlevé integrallenebilir olduğu ile ilgili çalışma yapılmamıştır.

4.1.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu İle Tam Çözüm

x,y,t bağımsız değişkenler, c keyfi sabit ve ξ bağımsız değişken olmak üzere aşağıdaki formun aracılığı ile (4.1) denklemine hareketli dalga dönüşümü uygulandığında

$$u(x,y,t) = u(\xi),\ \ \xi = x + y - ct \tag{4.4}$$

denklem lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgenir. İndirgeme sonucunda

$$(1-c)u^{(iv)} + u'' + 6u'u'' - 6cu'u'' = 0 \tag{4.5}$$

oluşan (4.5) denkleminin en yüksek mertebeli lineer terim $u^{(iv)}$ ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim $u'u''$ arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı $m + 4 = m + 1 + m + 2$ olarak yazılır. Bu bağıntı çözüldüğünde dengelenme sayısı $m = 1$ olarak bulunur. Genelleştirilmiş Kudryashov metoduna göre m elde edildikten sonra $n - r = m$ şartına bağlı olarak n ve r sayıları seçilmelidir. $m = 1$ olduğundan $n = 2$ ve $r = 1$ olarak seçilirse,

a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 belirsiz sabitler olmak üzere (4.5) denkleminin rasyonel formda olan çözümü

$$u(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q} \tag{4.6}$$

olarak bulunur. A integral sabiti ve $Q = Q(\xi)$ olmak üzere

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + Ae^{\xi}} \tag{4.7}$$

(4.8) denkleminin bir çözümüdür ve yardımcı denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dQ}{d\xi} = Q^2(\xi) - Q\left(\xi\right) \tag{4.8}$$

(4.6) denklemi (4.5) denkleminde yerine yazılır ve (4.8) denklemi çıkan ifadelerde Q nun türevleri cinsinden türevli ifadeler bitene kadar yerine yazılır. Son olarak Q^k fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Elde edilen cebirsel denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$Q^{10} : 12ca_2^2b_1^3 - 24a_2b_1^4 + 24ca_2b_1^4 - 12a_2^2b_1^3 = 0,$$

$$\begin{aligned} Q^9 &: 60a_2b_1^4 - 120a_2b_0b_1^3 - 60ca_2b_1^4 + 30a_2^2b_1^3 + 60ca_2^2b_1^2b_0 \\ &-30ca_2^2b_1^3 + 120ca_2b_0b_1^3 - 60a_2^2b_1^2b_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^8 &: -12a_2b_1^2a_1b_0 - 12ca_0b_1^3a_2 + 108ca_2^2b_0^2b_1 - 150ca_2^2b_1^2b_0 \\ &+12a_2b_1^3a_0 - 108a_2^2b_0^2b_1 + 24ca_2^2b_1^3 + 50ca_2b_1^4 - 24a_2^2b_1^3 \\ &+12ca_2b_1^2a_1b_0 + 240ca_2b_0^2b_1^2 + 150a_2^2b_1^2b_0 - 52a_2b_1^4 \\ &-300ca_2b_0b_1^3 - 240a_2b_0^2b_1^2 + 300a_2b_0b_1^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^7 &: 48a_0b_1^2a_2b_0 - 48a_1b_0^2a_2b_1 + 24a_2b_1^2a_1b_0 + 24ca_0b_1^3a_2 \\ &-276ca_2^2b_0^2b_1 + 120ca_2^2b_1^2b_0 + 276ca_2^2b_0^2b_1 - 1206a_2^2b_1^2b_0 \\ &+72ca_2^2b_0^3 - 6ca_2^2b_1^3 - 15ca_2b_1^4 - 72a_2^2b_0^3 + 6a_2^2b_1^3 + 18a_2b_1^4 \\ &-24cb_1^2a_2a_1b_0 + 48ca_1b_0^2b_1a_2 - 48ca_0b_1^2a_2b_0 + 240ca_2b_0^3b_1 \\ &-600ca_2b_0^2b_1^2 + 250ca_2b_0b_1^3 - 240a_2b_0^3b_1 - 24a_2b_1^3a_0 \\ &+600a_2b_0^2b_1^2 - 260a_2b_0b_1^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^6 &: -108a_0b_1^2a_2b_0 + 108a_1b_0^2a_2b_1 - 12a_2b_1^2a_1b_0 + 60a_2b_0^2b_1a_0 \\ &-12ca_0b_1^3a_2 + 60ca_2b_0^3a_1 - 30ca_2^2b_1^2b_0 - 60a_1b_0^3a_2 + 12a_2b_1^3a_0 \\ &-228a_2^2b_0^2b_1 + 30a_2^2b_1^2b_0 - 192ca_2^2b_0^3 + ca_2b_1^4 + 228ca_2^2b_0^2b_1 \\ &+192a_2^2b_0^3 - 2a_2b_1^4 - 120a_2b_0^4 + 12ca_2b_0b_1^2a_1 - 60ca_2b_0^2b_1a_0 \\ &-108ca_1b_0^2b_1a_2 + 108ca_2b_0b_1^2a_0 - 600ca_2b_0^3b_1 + 500ca_2b_0^2b_1^2 \\ &-75ca_2b_0b_1^3 + 120ca_2b_0^4 + 600a_2b_0^3b_1 - 520a_2b_0^2b_1^2 + 90a_2b_0b_1^3 = 0, \end{aligned}$$

$$Q^5 : -12b_0^3a_1^2 - 24a_1b_0^4 - 12b_1^2a_0^2b_0 + 24a_1b_0^2b_1a_0 + 24a_0b_0^3b_1$$
$$-24ca_0b_1b_0^3 + 12a_0b_1^2b_0a_1 - 156a_2b_0^2b_1a_0 + 12cb_1^2a_0^2b_0 - 156ca_2b_0^3a_1$$
$$+72a_0a_2b_0b_1^2 - 72a_1a_2b_0^2b_1 - 60ca_2^2b_0^2b_1 - 504a_2b_0^3b_1 + 60a_2^2b_0^2b_1$$
$$+6ca_1^2b_0^2b_1 + ca_1b_0b_1^3 + 36ca_1b_0^3b_1 + 156a_1b_0^3a_2 - 6a_1^2b_0^2b_1 + 12ca_1^2b_0^3$$
$$+168ca_2^2b_0^3 + 6cb_1^3a_0^2 - 6a_0^2b_1^3 - 168a_2^2b_0^3 + 2b_1^4a_0 + 336a_2b_0^4$$
$$+72ca_1b_0^2b_1a_2 - 12ca_1b_0b_1^2a_0 + 182a_2b_0^2b_1^2 + 16b_1^3a_0b_0 + 36b_1^2a_0b_0^2$$
$$-72ca_2b_0b_1^2a_0 - 24ca_1b_0^2b_1a_0 + 486ca_2b_0^3b_1 - 151ca_2b_0^2b_1^2 + 14ca_1b_0^2b_1^2$$
$$+5ca_2b_0b_1^3 - 14cb_1^3a_0b_0 - 36cb_1^2a_0b_0^2 - 336ca_2b_0^4 - cb_1^4a_0 - 36a_1b_0^3b_1$$
$$+156ca_2b_0^2b_1a_0 + 24ca_1b_0^4 - 16a_1b_0^2b_1^2 - 2a_1b_0b_1^3 - 10a_2b_0b_1^3 = 0,$$

$$Q^4 : 30a_1^2b_0^3 + 60a_1b_0^4 + 30a_0^2b_1^2b_0 - 60a_1b_0^2b_1a_0 - 60a_0b_0^3b_1 - 60ca_1b_0^4$$
$$+60ca_0b_0^3b_1 - 24b_1^2a_0a_1b_0 + 132a_2b_0^2b_1a_0 - 30cb_1^2a_0^2b_0 + 12a_0^2b_1^3$$
$$-12b_1^2a_0b_0a_2 + 12a_1b_0^2a_2b_1 + 132ca_2a_1b_0^3 - 12ca_1^2b_0^2b_1 - 48ca_2^2b_0^3$$
$$-cb_0a_1b_1^3 - 80ca_1b_0^3b_1 - 132a_1b_0^3a_2 + 12a_1^2b_0^2b_1 - 30ca_1^2b_0^3 - 12cb_1^3a_0^2$$
$$-336a_2b_0^4 - 132ca_2b_0^2b_1a_0 - 12ca_1b_0^2b_1a_2 + 24ca_1b_0b_1^2a_0 + 12ca_2b_1^2a_0b_0$$
$$+60ca_1b_0^2b_1a_0 - 26b_1^3a_0b_0 - 76b_1^2a_0b_0^2 - 25ca_1b_0^2b_1^2 - 125ca_2b_0^3b_1$$
$$+25cb_1^3b_0a_0 + 80cb_1^2a_0b_0^2 + 330ca_2b_0^4 + 48a_2^2b_0^3 - 2a_0b_1^4 + cb_1^4a_0 + 76a_1b_0^3b_1$$
$$+11ca_2b_0^2b_1^2 + 26a_1b_0^2b_1^2 + 2a_1b_0b_1^3 + 154a_2b_0^3b_1 - 22a_2b_1^2b_0^2 = 0,$$

$$Q^3 : -24a_1^2b_0^3 - 52a_1b_0^4 - 24b_1^2a_0^2b_0 + 48a_1b_0^2b_1a_0 + 52a_0b_1b_0^3 + 50ca_1b_0^4$$
$$-50ca_0b_1b_0^3 - 36a_2b_0^2b_1a_0 + 24cb_1^2a_0^2b_0 - 36ca_2b_0^3a_1 + 6ca_1^2b_0^2b_1$$
$$+55ca_1b_0^3b_1 + 36a_1b_0^3a_2 - 6a_0^2b_1^3 + 140a_2b_0^4 + 36ca_2b_0^2b_1a_0 - 130ca_2b_0^4$$
$$-6a_1^2b_0^2b_1 + 24ca_1^2b_0^3 + 6ca_0^2b_1^3 - 12ca_1b_0b_1^2a_0 + 11ca_1b_1^2b_0^2 - ca_2b_1b_0^3$$
$$+10b_1^3a_0b_0 + 50a_0b_1^2b_0^2 - 11cb_1^3a_0b_0 - 55cb_1^2a_0b_0^2 - 50a_1b_0^3b_1$$
$$-48ca_1b_0^2b_1a_0 + 12a_0b_1^2a_1b_0 - 10a_1b_0^2b_1^2 - 10a_2b_0^3b_1 = 0,$$

$$Q^2 : 6a_1^2b_0^3 + 18a_1b_0^4 + 6b_1^2a_0^2b_0 - 12a_1b_0^2b_1a_0 - 18b_1a_0b_0^3 - 15ca_1b_0^4$$
$$+15cb_1a_0b_0^3 - 6cb_1^2b_0a_0^2 - 11ca_1b_0^3b_1 - 6ca_1^2b_0^3 - 20a_2b_0^4$$
$$+12ca_1b_0^2b_1a_0 - 10b_1^2a_0b_0^2 + 11cb_1^2a_0b_0^2 + 16ca_2b_0^4 + 10a_1b_0^3b_1 = 0,$$

$$Q^1 : 2b_1a_0b_0^3 + ca_1b_0^4 - cb_1a_0b_0^3 - 2a_1b_0^4 = 0.$$

Cebirsel denklem sisteminin Maple yardımıyla çözülmesiyle, elde edilen durumlar aşağıda verilmiştir:

Durum 1:

$$a_0 = \frac{5}{4}b_0,\ \ a_1 = b_0,\ \ a_2 = 0,\ \ b_0 = b_0,\ \ b_1 = -4b_0,\ \ c = 2$$

Bulunan değerler ve (4.8) denklemi (4.6) denkleminde yerine yazılıp (4.4) dönüşümü yapılırsa (4.1) denkleminin dalga çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u(x+y-2t) = \frac{1}{4}\frac{-27-24A\sinh(x+y-2t)-6A\cosh(x+y-2t)+5A^2}{A^2+9-6A\cosh(x+y-2t)}.$$

Durum 2:

$$a_0 = b_1,\;\; a_1 = -3b_1,\;\; a_2 = 0,\;\; b_0 = b_1,\;\; b_1 = b_1,\;\; c = 2$$

Elde edilen sonuçlar (4.8) denkleminde ve (4.6) denkleminde yerine yazılıp (4.4) dönüşümü yapılırsa (4.1) denkleminin tam çözümü

$$u(x+y-2t) = \frac{4A\sinh(x+y-2t)-4+A^2}{A^2+4+4A\cosh(x+y-2t)}$$

şeklinde bulunur.

Durum 3:

$$a_0 = -\frac{1}{2}a_1,\;\; a_1 = b_1,\;\; a_2 = -2b_1,\;\; b_0 = -\frac{1}{2}b_1,\;\; b_1 = b_1,\;\; c = \frac{5}{4}$$

Önceki durumlar ile benzer yol izlendiğinde, denklemin aşağıdaki gibi

$$u(x+y-\tfrac{5}{4}t) = -\frac{1}{2}\frac{-8A^2\sinh(x+y-\frac{5}{4}t)\cosh(x+y-\frac{5}{4}t)+4A^2\cosh(x+y-\frac{5}{4}t)^2-2A^2-3+A^4}{A^4-4A^2\cosh(x+y-\frac{5}{4}t)^2+2A^2+1}$$

hareketli dalga çözümü elde edilir. Bu durumlar incelendiğinde elde edilen tam çözümlerin hiperbolik fonksiyon içeren soliton çözümler olduğu anlaşılır. Öte yandan bulunan dalga dönüşümlerine literatürde rastlanmamıştır. Dolayısıyla elde edilen soliton çözümler orijinaldir. (Ayhan vd. 2016),(Ayhan vd. 2017) makalelerinde (4.1) denkleminin bu tezde elde edilen soliton çözümlerinden farklı soliton çözümleri ve bunun yanısıra trigonometrik fonksiyon içeren periyodik çözümleri elde edilmiştir.

4.1.3 Çarpan Metodu İle Korunum Kanunu

(4.1) denklemi için Studel'in geliştirmiş olduğu çarpan metodu kullanılarak korunum kanunları bulunacaktır. (4.1) denklemini $\Lambda(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t)$ fonksiyonu ile çarpalım.

$$\Lambda(u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_xu_{xt} + 2u_{xx}u_t) = 0 \tag{4.9}$$

Buradan belirleyici denklem (4.9) denklemi varyasyonel türevi alınarak

$$\frac{\delta}{\delta u}[\Lambda(u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_xu_{xt} + 2u_{xx}u_t)] = 0 \tag{4.10}$$

şeklinde bulunur. (4.10) denklemini tam türevlere göre açıldığında

$$\Lambda_x(u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_xu_{xt} + 2u_{xx}u_t)$$

$$-D_x[\Lambda_{u_x}(u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_xu_{xt} + 2u_{xx}u_t) + \Lambda(6u_{xx} + 4u_{tx})]$$

$$-D_t[\Lambda_{u_t}(u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_xu_{xt} + 2u_{xx}u_t) + \Lambda(2u_{xx})]$$

$$+D_x^2[\Lambda(6u_x + 2u_t)] + D_xD_y[\Lambda] + D_tD_x[\Lambda(4u_x)] + D_tD_x^3[\Lambda] + D_x^4[\Lambda]$$

elde edilir. Burada u nun türevlerinin katsayılarından oluşan belirleyici denklem sistemi

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{u,y,y} = 0,\ \ \Lambda_{t,t} = \Lambda_{u,y},\ \ \Lambda_{t,x} = -\frac{1}{2}\Lambda_{u,y},\ \ \Lambda_{u,t} = 0,\ \ \Lambda_{u_x,t} = \Lambda_u,\\
&\Lambda_{u_t,t} = 2\Lambda_u,\ \ \Lambda_{x,x} = 0,\ \ \Lambda_{u_y,y} = 4\Lambda_u,\ \ \Lambda_{u_y,u_y} = 0,\ \ \Lambda_{u_t,u_y} = 0,\\
&\Lambda_{x,y} = \Lambda_{u,y}u_x,\ \ \Lambda_{u,x} = 0,\ \ \Lambda_{u_x,y} = -2\Lambda_t - 6\Lambda_x + 8\Lambda_u u_x + 4\Lambda_u u_t,\\
&\Lambda_{u_t,y} = -4\Lambda_x + 4\Lambda_u u_x, \Lambda_{u,u} = 0,\ \ \Lambda_{u,u_x} = 0,\ \ \Lambda_{u,u_y} = 0,\\
&\Lambda_{u_t,u_t} = 0,\ \ \Lambda_{u_t,u_x} = 0,\ \ \Lambda_{u_t,x} = 0,\ \ \Lambda_{u_y,x} = 0,\ \ \Lambda_{u_x,u_y} = 0,\\
&\Lambda_{u_x,u_x} = 0,\ \Lambda_{u_y,t} = 0,\ \ \Lambda_{u,u_t} = 0,\ \ \Lambda_{u_x,x} = \Lambda_u,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak bulunur ve bu denklem sisteminin çözümünün bulunması karmaşık ve büyük hesaplamalar içerdiğinden Maple paket programının alt programı olan Cheviakov' un geliştirmiş olduğu GeM paket programından faydalanılmıştır. Bu sistemin çözümünden C_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve F_i, $i = 1, 2$ keyfi sabitler olmak üzere çarpan fonksiyonu Λ

$$\Lambda(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t) = -\frac{1}{2}tF_{1y} + u_xF_1(y) + F_2(y) + \frac{C_1t^2}{2}$$

$$+\tfrac{(((4u_t+2u_x)y-x)C_1+(4u_t+2u_x)C_2-6C_3)t}{2} + \tfrac{(4u_yy^2+(2u+2xu_x)y)C_1}{2}$$

$$+\frac{(-8C_3u_t + 8u_yC_2)y}{2} + \frac{(2u + 2xu_x)C_2}{2} + u_tC_4 + C_5u_y + xC_3$$

şeklinde elde edilir. Bir diğer deyişle (4.1) denklemi için yedi tane lineer bağımsız çarpan aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \frac{t^2}{2} + 2ytu_t + ytu_x - \frac{xt}{2} + 2u_y y^2 + yu + yxu_x, \\
\Lambda_2 &= 2tu_t + tu_x + u + xu_x + 4u_y y, \\
\Lambda_3 &= -3t - 4yu_t + x, \\
\Lambda_4 &= u_t, \\
\Lambda_5 &= u_y, \\
\Lambda_6 &= -\frac{1}{2}tF_{1y} + u_x F_1(y), \\
\Lambda_7 &= F_2(y).
\end{aligned}
$$

$\Lambda_i, i = 1, 2, ..., 7$ değerlerinin her biri (4.1) denklemi ile çarpıldığında, denklemin x, y, t ye göre tüm terimlerinin tam türevi altında D_x, D_y, D_t nin katsayıları korunum vektörleri olur yani korunum kanunları elde edilmiş olur. Böylece yukarıdaki çarpanlara karşılık gelen (4.1) denkleminin korunum kanunları aşağıdaki gibidir:

$\Lambda_5 = u_y$ ile denklem çarpılırsa

$$u_y u_{xy} + u_y u_{xxxt} + u_y u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x u_y + 4u_x u_{xt} u_y + 2u_{xx} u_t u_y = 0$$

denkleminin x, y, t ye göre tüm terimleri tam türev altında

$$(u_y)(u_{xy} + u_{xxxt} + u_{xxxx} + 3(u_x^2)_x + 4u_x u_{xt} + 2u_{xx} u_t) = D_x(T_1^x) + D_y(T_1^y) + D_t(T_1^t)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla korunum kanunu

$$T_1^t = \frac{1}{24}\left[-16u_x u_{xy} u - 3u_{xxxxy} u + 16u_x^2 u_y + 3u_x u_{xxy} - 3u_{xx} u_{xy} + 3u_{xxx} u_y\right],$$

$$T_1^x = \frac{1}{24}[-6u_{yy} u - 48u_x u_{xy} u - 12u_{xxxy} u - 16u_t u_{xy} u - 16u_x u_{ty} u$$

$$+32u_t u_x u_y + 9u_y u_{txx} + 3u_t u_{xxy} - 3u_{xx} u_{ty} - 6u_{tx} u_{xy} + 6u_x u_{txy}$$

$$+48u_x^2 u_y - 9uu_{txxy} + 12u_{xxx} u_y - 12u_{xx} u_{xy} + 12u_x u_{xxy} + 6u_y^2],$$

$$T_1^y = \frac{1}{12}24u_{xx} u_x u + 16u_x u_{tx} u + 3u_{xy} u + 6u_{xxxx} u + 8u_t u_{xx} u$$

$$+6u_{txxx} u + 3u_x u_y];$$

şeklinde elde edilir. Diğer altı çarpan için de benzer yol izlendiğinde, korunum vektörleri aşağıdaki gibi bulunmuş olur:

$\Lambda_4 = u_t$ çarpanı için korunum vektörü

$$T_2^t = \frac{1}{24}[32u_{xx}u_xu + 16u_xu_{tx}u + 12u_{xy}u + 3u_xu_{txx} + 9u_{xxxx}u$$

$$+16u_tu_{xx}u + 9u_{txxx}u + 16u_tu_x^2 + 3u_tu_{xxx} - 3u_{xx}u_{tx} + 16u_x^3$$

$$+6u_{xxx}u_x - 3u_{xx}^2],$$

$$T_2^x = \frac{1}{24}[-32u_xu_{tx}u - 16u_{tt}u_xu + 6u_{xy}u - 6u_{ty}u - 16u_tu_{tx}u$$

$$-9u_{txxx}u - 9u_{ttxx}u + 80u_tu_x^2 + 32u_t^2u_x + 27u_xu_{txx} - 3u_{tt}u_{xx}$$

$$+6u_xu_{ttx} - 6u_{tx}^2 + 15u_tu_{xxx} - 21u_{xx}u_{tx} + 12u_tu_{txx}$$

$$+6u_tu_y + 6u_xu_y + 48u_x^3 + 24u_{xxx}u_x - 12u_{xx}^2],$$

$$T_2^y = \frac{1}{4}[-u_{xx}u - u_{tx}u + u_tu_x + u_x^2];$$

gibi elde edilir. $\Lambda_2 = 2tu_t + tu_x + u + xu_x + 4u_yy$ çarpanı için korunum kanunu

$$T_3^t = \frac{1}{12}[32yu_x^3 + 12tu_x^2 - 12xu_x^2 + 32yu_tu_x^2 + 12uu_x + 64yuu_{xx}u_x$$

$$+32yuu_{tx}u_x + 6yu_{txx}u_x - 6yu_{xx}^2 + 24yuu_{xy} + 3u_{xx} + 3tu_{xxx} - 3xu_{xxx}$$

$$+18yuu_{xxxx} + 12yu_{xxx}u_x + 32yuu_{xx}u_t + 6yu_{xxx}u_t - 6yu_{xx}u_{tx} + 18yuu_{txxx}],$$

$$T_3^x = \frac{1}{12}[96yu_x^3 + 36tu_x^2 - 36xu_x^2 + 160yu_tu_x^2 + 64yu_t^2u_x + 12uu_x$$

$$+12yu_yu_x + 48yu_{xxx}u_x - 24xu_tu_x - 64yuu_{tx}u_x + 54yu_{txx}u_x - 32yuu_{tt}u_x$$

$$-24yu_{xx}^2 - 12yu_{tx}^2 + 6tu_y - 6xu_y + 12yuu_{xy} + 9u_{xx} + 12tu_{xxx} - 12xu_{xxx}$$

$$+30yu_{xxx}u_t - 12yuu_{ty} - 42yu_{xx}u_{tx} - 32yuu_tu_{tx} - 9xu_{txx} + 24yu_tu_{txx}$$

$$+24tu_tu_x + 12yu_yu_t + 12yu_{ttx}u_x + 6u_{tx} + 9tu_{txx} - 18yuu_{txxx}$$

$$-6yu_{xx}u_{tt} - 18yuu_{ttxx}],$$

$$T_3^y = \frac{1}{2}[2yu_x^2 + tu_x - xu_x + 2yu_tu_x + u - 2yuu_{xx} - 2yuu_{tx}];$$

olarak bulunur. $\Lambda_1 = \dfrac{t^2}{2} + 2ytu_t + ytu_x - \dfrac{xt}{2} + 2u_y y^2 + yu + yxu_x$ için korunum vektörü

$$T_4^t = \frac{1}{24}[16tu_x^3 + 16xu_x^3 - 16uu_x^2 + 64yu_yu_x^2 + 32tu_tu_x^2 + 6tu_{xxx}u_t$$

$$+18tuu_{txxx} - 12yu_{xy}u_{xx} + 24tuu_{xy} - 64yuu_{xy}u_x - 6tu_{xx}u_{tx}$$

$$+80tuu_{xx}u_x - 16xuu_{xx}u_x + 3u_{xx}u_x + 12yu_{xxy}u_x - 9uu_{xxx}$$

$$+6tu_{xxx}u_x + 6xu_{xxx}u_x + 32tuu_{tx}u_x + 6tu_{txx}u_x - 3tu_{xx}^2 - 3xu_{xx}^2$$

$$-3xuu_{xxxx} + 12yu_yu_{xxx} - 12yuu_{xxxy} + 21tuu_{xxxx} + 32tuu_{xx}u_t],$$

$$T_4^x = \frac{1}{24}[48tu_x^3 + 48xu_x^3 - 64uu_x^2 + 192yu_yu_x^2 + 128tu_tu_x^2$$

$$+32xu_tu_x^2 - 18tuu_{ttxx} + 24tu_{xxx}u_x + 24xu_{xxx}u_x + 48yu_{xxy}u_x$$

$$+6tu_yu_x + 6xu_yu_x + 15u_{xx}u_x + 15xu_{txx}u_x + 24yu_y^2 + 12tu_{ttx}u_x$$

$$-48uu_tu_x + 128yu_yu_tu_x - 64yuu_{ty}u_x + 39tu_{txx}u_x + 6xuu_{xy}$$

$$+16xuu_{tx}u_x + 12u_{tx}u_x + 24yu_{txy}u_x - 32tuu_{tt}u_x + 12tu_yu_t$$

$$-12xu_{xx}^2 - 12tu_{tx}^2 - 24uu_y - 24yuu_{yy} + 6tuu_{xy} - 48yu_{xy}u_{xx}$$

$$-192yuu_{xy}u_x - 45uu_{xxx} - 12tu_{xx}^2 - 80tuu_{tx}u_x + 64tu_t^2u_x + 3xu_{xxx}u_t$$

$$-48yuu_{xxxy} - 64yuu_{xy}u_t + 12yu_{xxy}u_t + 27tu_{xxx}u_t - 12tuu_{ty} + 36yu_yu_{txx}$$

$$-24yu_{xy}u_{tx} - 33tu_{xx}u_{tx} - 9xu_{xx}u_{tx} - 32tuu_tu_x - 36uu_{txx} + 24tu_tu_{txx}$$

$$+48yu_yu_{xxx} - 12yu_{xx}u_{ty} - 36yuu_{txxy} - 21tuu_{txxx} + 3xuu_{txxx} - 6tu_{xx}u_{tt}],$$

$$T_4^y = \frac{1}{12}[3tu_x^3 + 3xu_x^2 - 3uu_x + 12yu_yu_x + 96yuu_{xx}u_x + 6tu_tu_x$$

$$+64yuu_{tx}u_x - 3tuu_{xx} + 24yuu_{xxxx} + 32yuu_{xx}u_t + 12yuu_{xy}$$

$$-6tuu_{tx} + 24yuu_{txxx}];$$

gibidir. $\Lambda_3 = -3t - 4yu_t + x$ çarpanı için korunum kanunu

$$T_5^t = \frac{1}{12}[16tyu_x^3 + 16xyu_x^3 + 12t^2u_x^2 - 12txu_x^2 - 16yuu_x^2 + 32y^2u_yu_x^2$$

$$+32tyu_tu_x^2 + 18tyuu_{txxx} + 6xyu_{xxx}u_x + 3t^2u_{xxx} - 3txu_{xxx} + 6tyu_{xxx}u_t$$

$$+12tuu_x - 32y^2uu_{xy}u_x + 32tyuu_{tx}u_x - 9yuu_{xxx} - 6tyu_{xx}u_{tx}$$

$$+3yu_{xx}u_x + 80tyuu_{xx}u_x - 16xyuu_{xx}u_x + 6y^2u_{xxy}u_x + 6tyu_{xxx}u_x$$

$$+6tyu_{txx}u_x - 3tyu_{xx}^2 - 3xyu_{xx}^2 + 24tyuu_{xy} + 3tu_{xx} - 6y^2u_{xy}u_{xx}$$

$$+6y^2u_yu_{xxx} - 6y^2uu_{xxxy} + 21tyuu_{xxxx} - 3xyuu_{xxxx} + 32tyuu_{xx}u_t],$$

$$T_5^x = \frac{1}{12}[48tyu_x^3 + 48xyu_x^3 + 36t^2u_x^2 - 36txu_x^2 - 64yuu_x^2 + 96y^2u_yu_x^2$$

$$+128tyu_tu_x^2 - 6u^2 + 12y^2u_y^2 + 24y^2u_{xxy}u_x - 32y^2uu_{ty}u_x + 12tyu_{ttx}u_x$$

$$+32xyu_tu_x^2 + 64tyu_t^2u_x + 24tyu_{xxx}u_x + 12yu_{tx}u_x - 80tyuu_{tx}u_x - 6u_x$$

$$+6tuu_x + 6xuu_x + 6tyu_yu_x + 6xyu_yu_x - 96y^2uu_{xy}u_x + 15yu_{xx}u_x + 6tu_{tx}$$

$$+24xyu_{xxx}u_x + 24t^2u_tu_x - 24txu_tu_x - 48yuu_tu_x + 64y^2u_yu_tu_x + 6tyuu_{xy}$$

$$+16xyuu_{tx}u_x + 12y^2u_{txy}u_x + 39tyu_{txx}u_x + 15xyu_{txx}u_x - 32tyuu_{tt}u_x$$

$$-12tyu_{xx}^2 - 12xyu_{xx}^2 - 12tyu_{tx}^2 + 6t^2u_y - 6txu_y - 24yuu_y - 12y^2uu_{yy}$$

$$+6xyuu_{xy} + 6tu_{xx} + 12t^2u_{xxx} - 12txu_{xxx} - 45yuu_{xxx} + 12tyu_yu_t$$

$$+3xu_{xx} - 24y^2u_{xy}u_{xx} + 24y^2u_yu_{xxx} - 24y^2uu_{xxxy} - 12y^2u_{xy}u_{tx}$$

$$-33tyu_{xx}u_{tx} - 32y^2uu_{xy}u_t + 6y^2u_{xxy}u_t + 27tyu_{xxx}u_t + 3xyu_{xxx}u_t - 12tyuu_{ty}$$

$$-6y^2u_{xx}u_{ty} + 18y^2u_yu_{txx} - 6tyu_{xx}u_{tt} - 18tyuu_{ttxx}$$

$$-9xyu_{xx}u_{tx} - 32tyuu_tu_{tx} + 9t^2u_{txx} - 9txu_{txx} - 36yuu_{txx}$$

$$+24tyu_tu_{txx} - 18y^2uu_{txxy} - 21tyuu_{txxx} + 3xyuu_{txxx}],$$

$$T_5^y = \frac{1}{6}[3u_xt^2 + 3yu_x^2t + 3ut - 3xu_xt - 3yuu_{xx}t + 6yu_xu_tt + 48y^2uu_xu_{xx}$$

$$-6yuu_{tx}t + 3xyu_x^2 - 3yuu_x + 6y^2u_yu_x + 6y^2uu_{xy} - 3xyuu_{xx} + 12y^2uu_{xxxx}$$

$$+16y^2uu_{xx}u_t + 32y^2uu_xu_{tx} + 12y^2uu_{txxx}];$$

olarak bulunur. $\Lambda_6 = -\frac{1}{2}tF_{1y} + u_xF_1(y)$ çarpanı için korunum kanunu

$$T_6^t = \frac{1}{12}[16F_1(y)u_{xx}u_xu + 3F_1(y)u_{xxxx}u + 12F_1'u_x^2 + 3tF_1'u_{xxx}$$

$$-16F_1(y)u_x^3 - 6F_1(y)u_{xxx}u_x + 3F_1(y)u_{xx}^2],$$

$$T_6^x = \frac{1}{12}[-6F_1'u_xu - 16F_1(y)u_xu_{tx}u - 6F_1(y)u_{xy}u - 3F_1(y)u_{txxx}u$$

$$-32F_1(y)u_tu_x^2 - 15F_1(y)u_xu_{txx} + 36tF_1'u_x^2 + 24tF_1'u_tu_x + 12tF_1'u_{xxx}$$

$$-3F_1(y)u_tu_{xxx} + 9F_1(y)u_{xx}u_{tx} + 9tF_1'u_{txx} + 6tF_1'u_y - 48F_1(y)u_x^3$$

$$-6tF_1''u - 6F_1(y)u_xu_y - 24F_1(y)u_{xxx}u_x + 12F_1(y)u_{xx}^2 - 3F_1'u_{xx}],$$

$$T_6^y = \frac{1}{2}[F_1(y)u_{xx}u + tF_1'u_x - F_1(y)u_x^2];$$

olarak elde edilir. $\Lambda_7 = F_2(y)$ çarpanı için korunum vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_7^t = \frac{1}{4}[4F_2(y)u_x^2 + F_2(y)u_{xxx}],$$

$$T_7^x = \frac{1}{4}[-2F_2'u + 8F_2(y)u_tu_x + 3F_2(y)u_{txx} + 12F_2(y)u_x^2$$

$$+4F_2(y)u_{xxx} + 2F_2(y)u_y],$$

$$T_7^y = \frac{1}{2}[F_2(y)u_x].$$

Keyfi fonksiyonların varlığı mevcut olduğundan dolayı, (4.1) denklemi için sonsuz çoklukta korunum kanunları bulunabilir. Eğer bir kısmi diferensiyel denklemde çok sayıda korunum kanunu çıkıyor ise bu onun yüksek ihtimalle integrallenebilir olduğunu ve çözülebilir olduğunu gösterir (Ablowitz ve Clarkson, 1992). Elde edilen korunum kanunları, ilk olarak Abdullahi Rashid Adem tarafından bulunmuştur (Adem, 2016).

4.2 (1+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Boussinesq Sistemi (GBQS)

(1+1)-boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq denklem sistemi

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= c_1 u_{xxt}, \\ v_t + \left[(1+v)\,u\right]_x &= c_2 u_{xxx} \end{aligned} \tag{4.12}$$

olarak verilir (Chun-Li vd. 2004). (4.12) denklem sistemi Nwogu'nun Boussinesq modeli olarak da bilinen inşaat mühendisleri için kıyı ve liman düzenlenmesinde lineer olmayan su dalga modeli oluşturan bir modeldir. Chun-Li, GBQS nin fiziksel olarak önemli sınır koşulları altında tam soliter dalga çözümlerini incelemeye odaklanmıştır (Chun-Li vd. 2004). (4.12) Boussinesq sistem ailesi v su dalgasının yüksekliği ve u x yönü boyunca suyun yüzey hızı olmak üzere, $c_1 - c_2 = 1/3$ olacak şekilde bir ilişki olmak koşuluyla c_1, c_2 keyfi sabitler olarak tanımlanarak Zhang tarafından (Zhanga vd. 2004) ve Chen tarafından (Chen vd. 2008) modellenmiştir. Li Jibin, GBQS nin hareketli dalga çözümlerinin çatallanması ile ilgili çalışmalar yapmıştır (Li, 2008). Bu bölümde (4.12) sisteminin Painlevé özelliğini incelenip Jacobi eliptik fonksiyon metodu ile tam çözümleri ve çarpan metodu kullanılarak korunum kanunları bulunmuştur. Genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile tam çözümler elde edilmeye çalışılmıştır fakat sonuç elde edilememiştir.

4.2.1 Painlevé Metodu

(4.12) denklem sistemine Painlevé metodunu uygulandığında. Metoda göre ilk olarak etkin davranışın bulunması gerekir. Yani, ϕ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_0(x,y)\phi^{\alpha_1}, \\ v(x,y) &= v_0(x,y)\phi^{\alpha_2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

ifadelerindeki $\alpha_1, \alpha_2, u_0(x,y)$ ve $v_0(x,y)$ belirlenmesi gerekir. Bunu elde etmek için (4.13) ifadesi (4.12) sisteminde etkin terimlerde yerine yazıldığında tüm terimler dengelendiğinde $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2$ olarak bulunur. Elde edilen $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2$ değerleri (4.13) ifadesinde daha sonra da (4.12) sisteminde yerine yazıldığında ϕ^{-5} li terimlerden oluşan denklemlerdeki bilinmeyen $u_0(x,y)$ ve $v_0(x,y)$ fonksiyonları

$u_0(x,t) = 12c_1\phi_x\phi_t, v_0(x,y) = 6c_2\phi_x^2,\ u_0(x,t) \neq 0, v_0(x,t) \neq 0$ olarak bulunur. Bulunan bu değerler (3.4) fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\phi_x\phi^{-2} + u_j\phi^{j-2}, \\ v(x,t) &= -2\phi_x\phi^{-2} + v_j\phi^{j-2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

ifadeleri (4.12) denklem sisteminde yerine yazılarak sırasıyla $u_j\phi^{-5+j}$ ve $v_j\phi^{-5+j}$ li lineer olan tüm terimlerin katsayılarından oluşan polinomlar

$$\begin{aligned} &-c_1j^3 + 9c_1j^2 - 14c_1j - 24c_1 = 0, \\ &12c_1j - 48c_1 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve polinomların kökleri rezonans değerleri olarak adlandırılır. Elde edilen rezonanslar aşağıdaki gibidir:

$$j = -1, 4, 4, 6$$

İlk rezonans olan $j = -1$, $\phi(x,t) = 0$ ın tekillik manifoldunun keyfiliğinden her zaman bulunmak zorundadır. Diğer rezonansların keyfi fonksiyonlarının kontrol edilmesi için Laurent serileri

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{j=0}^{6} u_j\phi^{j-2}, \\ v(x,t) &= \sum_{j=0}^{4} v_j\phi^{j-2} \end{aligned}$$

olarak oluşturularak (4.12) sisteminde yerine yazılır. Elde edilen ifadeler ϕ nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve kuvvetlerin katsayıları birer denklem olarak yazıldıktan sonra cebirsel denklem sistemi oluşturulup bilinmeyen u_j ve v_j fonksiyonları elde edilir. (1+1)-boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq denklem sisteminde Painlevé metodu kuralları doğrultusunda $u_{1,}u_{2,}u_3, u_5, v_{1,}v_{2,}v_3, v_5$ ifadelerini elde etmek ve $u_{4,}u_6, v_4, v_6$ ifadelerinin keyfi fonksiyon olup olmadığı kontrol ederek, rezonansların bağdaşabilirlik şartını sağlayıp sağlamadığını saptamak gerekir. ϕ li terimlerden oluşan cebirsel denklem sisteminin çözümü sonucunda $u_{1,}u_{2,}u_3, v_{1,}v_{2,}v_3$ ifadeleri elde edilebilirken, $j = 4$ deki rezonans değeri bağdaşabilirlik şartını sağlamadığından (4.12) denklem sistemi Painlevé özelliğine sahip değildir. Öte yandan integrallenemez olduğu söylenilemez. İntegrallenebilirliği daha başka yöntemler yolu ile kontrol edilebilir. Ayrıca (4.12) denklem sisteminin Painlevé özelliğine sahip olmadığı ilk olarak (Chun-Li vd. 2004) makalesinde gösterilmiştir. Li tarafından dinamik sistemler yöntemiyle (4.12) denklem sisteminin tüm olası soliter dalga çözümlerinin ve sayılamaz sonsuz çoklukta periyodik dalga çözümlerinin varlığını gösteren bir çalışma yapılarak denklem sisteminin integrallenebilir olduğu gösterilmiştir (Li, 2008).

4.2.2 Jacobi Eliptik Fonksiyon Metodu İle Tam Çözüm

c keyfi bir sabit ve ξ bağımsız değişken olmak üzere (4.12) denklem sisteminin hareketli dalga dönüşümü aşağıdaki gibi olsun.

$$u(x,t) = u(\xi),\ \ v(x,t) = v(\xi),\ \ \xi = x - ct \tag{4.15}$$

dalga dönüşümü (4.12) denklemine uygulandığında indirgeme sonucunda

$$\begin{aligned} -cu' + uu' + v' + cc_1u''' = 0, \\ -cv' + u' + uv' + vu' - c_2u''' = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

lineer olmayan adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. İlk denklemdeki en yüksek mertebeye sahip lineer terim (u''') ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim $(u'u)$ dengelendiğinde $m + 3 = m + 1 + m$ dengelenme bağıntısı elde edilir. Buradan dengelenme sayısı $m = 2$ olarak hesaplanır. İkinci denklemdeki en yüksek mertebeye sahip lineer terim (u''') ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim (uv') dengelendiğinde $m + 3 = m + n + 1$ dengelenme bağıntısı elde edilir. Buradan $n = 2$ dengeleme sayısına ulaşılır. $F(\xi)$ (4.18) denklem sistemini sağlayan bir denklem, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve b_2 birer keyfi sabit olmak üzere (3.16) formundan aranan çözümler

$$\begin{aligned} u(\xi) = a_0 + a_1F(\xi) + a_2F(\xi)^2 \\ v(\xi) = b_0 + b_1F(\xi) + b_2F(\xi)^2 \end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde elde edilir. P, Q, R sabitler olmak üzere aşağıda verilen denklem yardımcı denklem olsun.

$$F'(\xi) = \sqrt{PF^4(\xi) + QF^2(\xi) + R} \tag{4.18}$$

Böylece (4.18) yardımcı denkleminin türevleri aşağıdaki gibi alınabilir.

$$\begin{aligned} &F'' = 2PF^3 + QF, \\ &F''' = (6PF^2 + Q)F', \\ &F''' = 24P^2F^5 + 20PQF^3 + (12PR + Q^2)F, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.19}$$

Maple programı yardımıyla, (4.17) ifadeleri (4.16) denklem sisteminde yerine yazılır. Sonrasında (4.18) denklemi ve (4.19) denklemleri elde edilen son işlemde yerine yazılıp, aynı kuvvetli $F^i(F')^j$ $(j = 0, 1,\ i = 0, 1, 2, ...)$ lerin katsayıları düzenlendiğinde ve elde edilen katsayıların her biri sıfıra eşitlendiğinde, aşağıdaki gibi bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&2a_2^2+24cc_1a_2P=0,\\
&3a_1a_2+6cc_1a_1P=0,\\
&-2ca_2+a_1^2+2a_0a_2+2b_2+8cc_1a_2Q=0,\\
&-ca_1+a_0a_1+b_1+cc_1a_1Q=0,\\
&4b_2a_2-24c_2a_2P=0,\\
&3b_2a_1+3b_1a_2-6c_2a_1P=0,\\
&2a_2-2cb_2+2b_2a_0+2b_1a_1+2b_0a_2-8c_2a_2Q=0,\\
&-cb_1-c_2a_1Q+a_1+b_1a_0+b_0a_1=0.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde

$$
\begin{aligned}
a_0&=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1},\quad a_1=0,\quad a_2=-12cc_1P,\\
b_0&=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2},\quad b_1=0,\quad b_2=6c_2P,\quad c=c
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

elde edilir. Bulunan sonuçlar (4.17) denkleminde yerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
u(\xi)&=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1PF(\xi)^2,\\
v(\xi)&=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2PF(\xi)^2
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

çözümleri bulunur. Elde edilen çözümlerin (3.19) daki tabloda bulunan durumlar uygulandığında (4.12) denklem sistemi Jacobi eliptik fonksiyon ailelerine sahip olur (Ebaid ve Aly, 2012). Elde edilen tam çözümler periyodik ve hiperbolik sonuçlar şeklindedir. Şimdi bu sonuçları detaylı şekilde aşağıda verelim.

$m\to 1$, (4.12) denklem sisteminin hiperbolik fonksiyon içeren soliton çözümleri elde edilir. $m\to 0$, (4.12) denklem sisteminin trigonometrik fonksiyon içeren hareketli dalga çözümleri elde edilir.

Durum 1 : Eğer $P:m^2,\ Q:-(1+m^2)$ ve $F(\xi)=sn\xi$ olursa, tam çözüm

$$
u_1=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1Psn^2\xi,
$$

$$v_1 = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2Psn^2\xi$$

olarak bulunur. Özel olarak $m \to 1$ seçilirse, (3.20) den bilindiği üzere $F(\xi) = \tanh\xi$ olacağından ve (4.12) denklem sisteminin özel tam çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 - 16c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} - 12cc_1\tanh(x-ct)^2,$$

$$v_1(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 - 16c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2\tanh(x-ct)^2.$$

Durum 2 : (3.19) deki tablodan $P\ :\ -m^2,\ \ Q\ :\ (2m^2-1),\ \ F(\xi) = cn\xi$ olarak seçildiğinde, tam çözüm

$$u_2 = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1Pcn^2\xi,$$

$$v_2 = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2Pcn^2\xi$$

şeklinde elde edilir. Özel olarak $m \to 1$ alınırsa (3.20) den bilindiği üzere $F(\xi) = \sec h\xi$ olacağından (4.12) denklem sisteminin özel çözümlerinden biri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} + 12cc_1\sec h(x-ct)^2,$$

$$v_2(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} - 6c_2\sec h(x-ct)^2.$$

Durum 3 : $P : 1,\ \ Q : -(1+m^2),\ \ F(\xi) = ns\xi$ olduğunda tam çözüm

$$u_3 = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1Pns^2\xi,$$

$$v_3 = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2Pns^2\xi$$

şeklinde bulunur. $m \to 1$ seçildiğinde $F(\xi) = \cot h\xi$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel çözümü aşağıda verilen fonksiyonlar olarak bulunur:

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 - 16c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} - 12cc_1\cot h(x-ct)^2,$$

$$v_3(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-16c_2c^2c_1^2 - 4c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2\cot h(x-ct)^2.$$

Durum 4 : Eğer $P:1,\ Q:-(1+m^2),\ F(\xi)=ns\xi$ olarak alınırsa tam çözüm

$$u_3=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1Pns^2\xi,$$

$$v_3=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2Pns^2\xi$$

şeklinde elde edilir. $m\to 0$ olarak seçilirse (3.21) den bilindiği gibi $F(\xi)=\csc\xi$ dönüşür ve (4.12) denklem sisteminin özel periyodik çözümlerinden biri aşağıda verilen fonksiyonlar gibidir:

$$u_4(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1-8c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-12cc_1\csc(x-ct)^2,$$

$$v_4(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2-8c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\csc(x-ct)^2.$$

Durum 5 : $P:1,\ Q:-(1+m^2),\ F(\xi)=dc\xi$ alındığında

$$u_5=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1Pdc^2\xi,$$

$$v_5=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2Pdc^2\xi$$

$m\to 0$, $F(\xi)=\sec\xi$, olur ve (4.12) denkleminin trigonometrik fonksiyon içeren özel tam çözümlerden biri elde edilir.

$$u_5(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1-8c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-12cc_1\sec(x-ct)^2,$$

$$v_5(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-8c_2c^2c_1^2-4c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\sec(x-ct)^2.$$

Durum 6 : (3.19) deki tablodan $P:1-m^2,\ Q:2-m^2,\ F(\xi)=sc\xi$ olarak seçilirse

$$u_6=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1Psc^2\xi,$$

$$v_6=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2Psc^2\xi$$

$m\to 0$ (3.21) den bilindiği üzere $F(\xi)=\tan\xi$ olur ve (4.12) denkleminin özel periyodik çözümlerden biri bulunmuş olur.

$$u_6(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+16c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-12cc_1\tan(x-ct)^2,$$

$$v_6(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+16c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\tan(x-ct)^2.$$

Durum 7 : $P:1,\ Q:(2-m^2),\ F(\xi)=cs\xi$ olarak seçilsin, o halde

$$u_7=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1Pcs^2\xi,$$

$$v_7=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2Pcs^2\xi$$

$m\to 1$ (3.20) den bilindiği gibi, $F(\xi)=\operatorname{csc}h\xi$ olarak elde edilir ve (4.12) denkleminin özel hiperbolik fonksiyon içeren tam çözümlerden biri elde edilir.

$$u_7(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-12cc_1\operatorname{csc}h(x-ct)^2,$$

$$v_7(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\operatorname{csc}h(x-ct)^2.$$

Durum 8 : Eğer $P:1,\ Q:(2-m^2),\ F(\xi)=cs\xi$ olarak alınırsa

$$u_8=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1Pcs^2\xi,$$

$$v_8=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2Pcs^2\xi$$

$m\to 0$, $F(\xi)=\cot\xi$ dönüşür ve (4.12) denkleminin özel trigonometrik fonksiyon içeren çözümlerden biri elde edilir.

$$u_8(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+16c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-12cc_1\cot(x-ct)^2,$$

$$v_8(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+16c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\cot(x-ct)^2.$$

Durum 9 : (3.19) deki tablodan $P:\ \frac{1}{4},\ Q:\ \frac{1-2m^2}{2},\quad F(\xi)=ns\xi\pm cs\xi$ olarak seçilirse

$$u_9=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\left(ns\xi\pm cs\xi\right)^2,$$

$$v_9=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\left(ns\xi\pm cs\xi\right)^2$$

Bu durumda $m\to 1$, $F(\xi)=\coth\xi\pm\operatorname{csc}h\xi$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel soliton çözümlerinden biri bulunur.

$$u_9(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1-4c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-3cc_1\coth((x-ct)\pm\operatorname{csc}h(x-ct))^2,$$

$$v_9(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2-4c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+\frac{3}{2}c_2\coth((x-ct)\pm\operatorname{csc}h(x-ct))^2.$$

Durum 10 : Eğer $P:\dfrac{1}{4},\ Q:\dfrac{1-2m^2}{2},\quad F(\xi)=ns\xi\pm cs\xi$ olarak alınırsa

$$u_{10}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\left(ns\xi\pm cs\xi\right)^2,$$

$$v_{10}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\left(ns\xi\pm cs\xi\right)^2.$$

$m\to 0$, $F(\xi)=\csc\xi\pm\cot\xi$ dönüşür ve (4.12) denklem sisteminin özel hareketli dalga çözümlerinden biri bulunur.

$$u_{10}(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+4c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-3cc_1\,\text{csc}((x-ct)\pm\text{cot}(x-ct))^2,$$

$$v_{10}(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+4c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+\frac{3}{2}c_2\,\text{csc}((x-ct)\pm\text{cot}(x-ct))^2.$$

Durum 11 : Varsayalım ki $P:\dfrac{(1-m^2)}{4},Q:\dfrac{(1+m^2)}{2},\ F(\xi)=nc\xi\pm sc\xi$ olsun

$$u_{11}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\left(ns\xi\pm cs\xi\right)^2,$$

$$v_{11}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\left(ns\xi\pm cs\xi\right)^2$$

$m\to 0$, $F(\xi)=\sec\xi\pm\tan\xi$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel dalga çözümlerinden birine ulaşılır.

$$u_{11}(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+4c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-3cc_1\,\text{sec}((x-ct)\pm\text{tan}(x-ct))^2,$$

$$v_{11}(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+4c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+\frac{3}{2}c_2\,\text{sec}((x-ct)\pm\text{tan}(x-ct))^2.$$

Durum 12 : Eğer (3.19) deki tablodan $P>0,\quad Q<0,$

$$F(\xi)=\sqrt{\frac{-m^2Q}{(1+m^2)P}}sn\left(\sqrt{\frac{-Q}{1+m^2}}\xi\right)$$

olarak seçilirse

$$u_{12}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1\frac{-m^2Q}{(1+m^2)}sn^2\left(\sqrt{\frac{-Q}{1+m^2}}\xi\right),$$

$$v_{12}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\frac{-m^2Q}{(1+m^2)}sn^2\left(\sqrt{\frac{-Q}{1+m^2}}\xi\right).$$

$m \to 1$, $F(\xi) = \sqrt{\dfrac{-m^2 Q}{(1+m^2)P}} \tanh\left(\sqrt{\dfrac{-Q}{1+m^2}}\xi\right)$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel hiperbolik fonksiyon içeren soliton çözümlerinden biri saptanır.

$$u_{12}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} + 6cc_1Q\tanh(\frac{1}{2}\sqrt{-2Q}(x-ct))^2,$$

$$v_{12}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2c^2Qc_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} - 3c_2Q\tanh(\frac{1}{2}\sqrt{-2Q}(x-ct))^2.$$

Durum 13 : Eğer (3.19) deki tablodan $P < 0, \quad Q > 0,$

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{-Q}{(2-m^2)P}} dn\left(\sqrt{\frac{Q}{2-m^2}}\xi\right)$$

durumu incelenirse

$$u_{13} = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1\frac{-Q}{(2-m^2)}dn^2\left(\sqrt{\frac{Q}{2-m^2}}\xi\right),$$

$$v_{13} = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2\frac{-Q}{(2-m^2)}dn^2\left(\sqrt{\frac{Q}{2-m^2}}\xi\right)$$

$m \to 1$, $F(\xi) = \sqrt{\dfrac{-Q}{(2-m^2)P}} \sec h\left(\sqrt{\dfrac{Q}{2-m^2}}\xi\right)$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel soliton çözümlerinden biri elde edilir.

$$u_{13}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} + 12cc_1Q\sec h(\sqrt{Q}(x-ct))^2,$$

$$v_{13}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2c^2Qc_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} - 6c_2Q\sec h(\sqrt{Q}(x-ct))^2.$$

Durum 14 : Eğer (3.19) deki tablodan $P : 1,\ Q : m^2 + 2,\ F(\xi) = \dfrac{dn\xi cn\xi}{sn\xi}$ durumu ele alınırsa

$$u_{14} = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1P\frac{dn^2\xi cn^2\xi}{sn^2\xi},$$

$$v_{14} = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2P\frac{dn^2\xi cn^2\xi}{sn^2\xi}$$

$m \to 0$, $F(\xi) = \dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}$ a dönüşür ve (4.12) denklem sisteminin özel tam çözümlerinden biri saptanır.

$$u_{14}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 16c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} + 12cc_1\frac{\cos^2(x-ct)}{\sin^2(x-ct)},$$

$$v_{14}(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+16c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2\frac{\cos^2(x-ct)}{\sin^2(x-ct)}.$$

Durum 15 : $P:-\dfrac{4}{m},\ Q:6m-m^2-1,\ F(\xi)=\dfrac{mdn\xi cn\xi}{msn^2\xi+1}$ durumu ele alındığında

$$u_{15}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\frac{m^2dn^2\xi cn^2\xi}{m^2(sn^2\xi+1)^2},$$

$$v_{15}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\frac{m^2dn^2\xi cn^2\xi}{m^2(sn^2\xi+1)^2}$$

$m\to 1,\ F(\xi)=\dfrac{m\sec h\xi\sec h\xi}{m\tanh\xi\tanh\xi+1}$ ve (4.12) denklem sisteminin özel hareketli dalga çözümlerinden biri elde edilir.

$$u_{15}(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+32c^2c_1^2-c_2}{cc_1}+\frac{48cc_1\sec h^4(x-ct)}{(\tanh^2(x-ct)+1)^2},$$

$$v_{15}(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+32c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}-\frac{24c_2\sec h^4(x-ct)}{(\tanh^2(x-ct)+1)^2}.$$

Durum 16 : Eğer $P:\dfrac{4}{m},\ Q:-6m-m^2-1,\ F(\xi)=\dfrac{mdn\xi cn\xi}{msn^2\xi-1}$ durumu incelenirse

$$u_{16}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\frac{m^2dn^2\xi cn^2\xi}{m^2(sn^2\xi-1)^2},$$

$$v_{16}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\frac{m^2dn^2\xi cn^2\xi}{m^2(sn^2\xi-1)^2}$$

Ayrıca (3.20) e göre $m\to 1$ seçilirse $F(\xi)=\dfrac{m\sec h\xi\sec h\xi}{m\tanh\xi\tanh\xi-1}$ olduğu görülür ve (4.12) denklem sisteminin özel tam çözümlerinden biri elde edilir.

$$u_{16}(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1-64c^2c_1^2-c_2}{cc_1}-\frac{48cc_1\sec h^4(x-ct)}{(\tanh^2(x-ct)-1)^2},$$

$$v_{16}(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2-64c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+\frac{24c_2\sec h^4(x-ct)}{(\tanh^2(x-ct)-1)^2}.$$

Durum 17 : Eğer (3.19) deki tablodan $P:\dfrac{1}{4},\ Q:\dfrac{1-2m^2}{2},\ F(\xi)=\dfrac{sn\xi}{1\pm cn\xi}$ alınır ve incelenirse

$$u_{17}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\frac{sn^2\xi}{(1\pm cn\xi)^2},$$

$$v_{17} = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2P\frac{sn^2\xi}{(1 \pm cn\xi)^2}$$

Aynı zamanda (3.20) e göre $m \to 1$ seçilirse $F(\xi) = \dfrac{\tanh\xi}{1 \pm \sec h\xi}$ olduğu görülür ve (4.12) denklem sisteminin özel hiperbolik fonksiyon içeren soliton çözümlerinden biri elde edilir.

$$u_{17}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 - 4c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} - \frac{3cc_1\tanh^2(x-ct)}{(1 \pm \sec h(x-ct))^2},$$

$$v_{17}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 - 4c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + \frac{3c_2\tanh^2(x-ct)}{2(1 \pm \sec h(x-ct))^2}.$$

Durum 18 : Varsayalım ki $P : \dfrac{1}{4},\ Q : \dfrac{1-2m^2}{2},\ F(\xi) = \dfrac{sn\xi}{1 \pm cn\xi}$ olsun

$$u_{18} = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1P\frac{sn^2\xi}{(1 \pm cn\xi)^2},$$

$$v_{18} = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2P\frac{sn^2\xi}{(1 \pm cn\xi)^2}$$

$m \to 0,\ F(\xi) = \dfrac{\sin\xi}{1 \pm \cos\xi}$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel trigonometrik fonksiyon içeren periyodik çözümlerinden biri elde edilmiş olur.

$$u_{18}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 4c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} - \frac{3cc_1\sin^2(x-ct)}{(1 \pm \cos(x-ct))^2},$$

$$v_{18}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 4c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + \frac{3c_2\sin^2(x-ct)}{2(1 \pm \cos(x-ct))^2}.$$

Durum 19 : Eğer $P : \dfrac{1-m^2}{4},\ Q : \dfrac{1+m^2}{2},\ F(\xi) = \dfrac{cn\xi}{1 \pm sn\xi}$ olursa

$$u_{19} = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1P\frac{cn^2\xi}{(1 \pm sn\xi)^2},$$

$$v_{19} = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2P\frac{cn^2\xi}{(1 \pm sn\xi)^2}$$

$m \to 0,\ F(\xi) = \dfrac{\cos\xi}{1 \pm \sin\xi}$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel tam çözümlerinden biri bulunmuş olur.

$$u_{19}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 4c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} - \frac{3cc_1\cos^2(x-ct)}{(1 \pm \sin(x-ct))^2},$$

$$v_{19}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 4c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + \frac{3c_2\cos^2(x-ct)}{2(1 \pm \sin(x-ct))^2}.$$

Durum 20 : (3.19) deki tablodan $P : \dfrac{C^2m^4-(B^2+C^2)m^2+B^2}{4}$, $Q : \dfrac{m^2+1}{2},\ F(\xi)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2m^2)}}+sn\xi}{Bcn\xi+Cdn\xi}$ alınıp incelenirse

$$u_{20}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\left(\frac{\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2m^2)}}+sn\xi}{Bcn\xi+Cdn\xi}\right)^2,$$

$$v_{20}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\left(\frac{\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2m^2)}}+sn\xi}{Bcn\xi+Cdn\xi}\right)^2$$

$m\to 0,\ F(\xi)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2m^2)}}+\sin\xi}{B\cos\xi+C}$ olur ve (4.12) denkleminin özel periyodik çözümlerinden biri elde edilir.

$$u_{20}(x,t)=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+4c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-\frac{3cc_1B^2(\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2)}}+sn(x-ct))^2}{(B\cos(x-ct)+C)^2},$$

$$v_{20}(x,t)=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+4c_2c^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+\frac{3}{2}\frac{c_2B(\sqrt{\dfrac{(B^2-C^2)}{(B^2-C^2)}}+sn(x-ct))^2}{(B\cos(x-ct)+C)^2}.$$

Durum 21 : Eğer $P : \dfrac{B^2+C^2}{4},\ Q : \dfrac{m^2}{2}-1,\ F(\xi)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(B^2+C^2-C^2m^2)}{(B^2+C^2)}}+dn\xi}{Bsn\xi+Ccn\xi}$ olarak alınırsa

$$u_{21}=-\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1+8c^2c_1^2Q-c_2}{cc_1}-12cc_1P\left(\frac{\sqrt{\dfrac{(B^2+C^2-C^2m^2)}{(B^2+C^2)}}+dn\xi}{Bsn\xi+Ccn\xi}\right)^2,$$

$$v_{21}=\frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2+8c_2Qc^2c_1^2+c_2^2}{c^2c_1^2}+6c_2P\left(\frac{\sqrt{\dfrac{(B^2+C^2-C^2m^2)}{(B^2+C^2)}}+dn\xi}{Bsn\xi+Ccn\xi}\right)^2$$

$m \to 0,\ F(\xi) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{(-C^2m^2+B^2+C^2)}{(B^2+C^2)}}+1}{B\sin\xi + C\cos\xi}$ olur ve (4.12) denkleminin özel tam çözümlerinden biri bulunmuş olur.

$$u_{21}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 - 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - \frac{48cc_1\left(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2\right)}{(B\sin(x-ct) + C\cos(x-ct))^2},$$

$$v_{21}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 - 8c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + \frac{24c_2\left(\frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2\right)}{(B\sin(x-ct) + C\cos(x-ct))^2}.$$

Durum 22 : Eğer $P : -(m^2+2m+1)B^2,\ Q : 2m^2+2,\ F(\xi) = \dfrac{msn^2\xi - 1}{B(msn^2\xi + 1)}$ durumu incelenirse

$$u_{22} = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 8c^2c_1^2Q - c_2}{cc_1} - 12cc_1P\frac{m^2(sn^2\xi - 1)^2}{B^2(msn^2\xi + 1)^2},$$

$$v_{22} = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 8c_2Qc^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} + 6c_2P\frac{m^2(sn^2\xi - 1)^2}{B^2(msn^2\xi + 1)^2}$$

$m \to 1,\ F(\xi) = \dfrac{m\tanh\xi\tanh\xi - 1}{B(m\tanh\xi\tanh\xi + 1)}$ olur ve (4.12) denklem sisteminin özel soliton çözümlerinden biri bulunur.

$$u_{22}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2c^2c_1 + 32c^2c_1^2 - c_2}{cc_1} + \frac{48cc_1\left(\tanh^2(x-ct) - 1\right)^2}{(\tanh^2(x-ct) + 1)^2},$$

$$v_{22}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{-4c^2c_1^2 + 32c_2c^2c_1^2 + c_2^2}{c^2c_1^2} - \frac{24c_2\left(\tanh^2(x-ct) - 1\right)^2}{(\tanh^2(x-ct) + 1)^2}.$$

(4.12) denklem sisteminin Jacobi eliptik fonksiyon metodu ile tam çözümleri bulunduğunda elde edilen hareketli dalga çözümler trigonometrik fonksiyon içeren periyodik çözümler ve hiperbolik fonksiyon içeren soliton çözümlerdir. (4.12) denklem ailesi ile yapılan çalışmalar için literatür araştırması yapıldığında, Huang ve Chen çatallanma metodunu kullanarak GBQS nin soliter dalga ve periyodik dalga çözümlerini bulmuştur (Huang ve Chun-Li, 2007). Aynı zamanda Li, GBQS için dinamik sistemler yöntemini kullanarak tüm olası soliter dalga çözümlerinin ve sayılamaz sonsuz çoklukta periyodik dalga çözümlerinin varlığını gösteren bir çalışma yapmıştır (Li, 2008). Bu tezde kullanılan tam çözüm metodu ile elde edilen hareketli dalga çözümlerine literatürde rastlanmamıştır.

4.2.3 Çarpan Metodu İle Korunum Kanunu

Bu kısımda (4.12) denklem sisteminin çarpan metodu ile korunum kanunları bulunacaktır. Denklem sistemini $\Lambda_1(x,t,u,v)$ ve $\Lambda_2(x,t,u,v)$ fonksiyonları ile çarpalım.

$$\begin{aligned}\Lambda_1(x,t,u,v)(u_t+uu_x+v_x-c_1u_{xxt})=0,\\ \Lambda_2(x,t,u,v)(v_t+[(1+v)\,u]_x-c_2u_{xxx})=0\end{aligned}\tag{4.23}$$

Belirleyici denklem üstteki denklem sisteminin varyasyonel türevini alarak bulunur. Yani

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta u}[\Lambda_1(x,t,u,v)(u_t+uu_x+v_x-c_1u_{xxt})]=0,\\ \frac{\delta}{\delta v}[\Lambda_2(x,t,u,v)(v_t+[(1+v)\,u]_x-c_2u_{xxx})]=0\end{aligned}\tag{4.24}$$

şeklinde elde edilir. Burada (4.24) ifadesi açıldığında u ve v nin türevlerinin katsayılarından oluşan belirleyici denklem sistemi

$$\Lambda_{1x}=0,\;\; \Lambda_{2_x}=0,\;\; \Lambda_{1_t}=0,\;\; \Lambda_{2_t}=0,\;\; \Lambda_{1_u}=0,\;\; \Lambda_{2_u}=0,\;\; \Lambda_{1_v}=0,\;\; \Lambda_{2_v}=0 \tag{4.25}$$

olarak elde edilir. Bu belirleyici denklem sisteminin çözümünden g_1,g_2 sabit olmak üzere, çarpan fonksiyonları Λ_1,Λ_2

$$\begin{aligned}\Lambda_1(x,t,u,v)=g_1,\\ \Lambda_2(x,t,u,v)=g_2\end{aligned}\tag{4.26}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (4.12) denklem sistemi için çarpanlar bulunmuş olur. Buradan korunum vektörü $\Lambda_1=1$ ve $\Lambda_2=0$ için

$$T_1^t=-c_1u_{xx}+u,\;\; T_1^x=\frac{u^2}{2}+v \tag{4.27}$$

olarak elde edilir ve $\Lambda_1=0$ ve $\Lambda_2=1$ e bağlı korunum vektörü bileşenleri

$$T_2^t=v,\;\; T_2^x=-c_2u_{xx}+uv+u \tag{4.28}$$

olarak bulunur. Bulunan korunum kanunları aşikardır.

4.3 (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) Denklemi

(2+1)-boyutlu BLMP denklem

$$u_{yt}+u_{xxxy}-3u_{xx}u_y-3u_xu_{xy}=0 \tag{4.29}$$

şeklindedir (Alofi ve Abdelkawy, 2012). Gilson, (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklemini sığ su dalga denklemlerinin (2+1)-boyutlu genellemesi yapılırken bilineer yaklaşım yoluyla araştırmalar sayesinde türetti (Gilson vd. 1993). L.Luo, BLMP denkleminin bilineer formlar yardımıyla yeni soliton çözümlerini ve Lax çiftlerini bulmuş, Bäcklund dönüşümünü yapmıştır (Luo, 2011a). (Luo, 2011a) makalesinde BLMP denklemine Hirota bilineer metodu ve Riemann teta fonksiyonunu kullanılarak çoklu periyodik dalga çözümleri bulunmuştur. Ayrıca L.Luo, BLMP denklemi için bilineer formu elde etmek ve elde edilen lineerleşebilir bilineer denklemi Lax çiftini kullanmak için ikili Bell polinomlarını incelemiştir (Luo, 2011b). Ying Li ve Desheng Li, modifiye edilmiş Clarkson-Kruskal metodu yardımı ile BLMP denkleminin Bäcklund dönüşümü yapmıştır ve bu dönüşümlerden yararlanarak trigonometrik fonksiyon içeren yeni tam çözümler bulmuştur (Zhang, 2008). Bu bölümde (4.29) denkleminin Painlevé özelliği incelenip, genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile tam çözümleri elde edilmiştir ve çarpan metodu kullanılarak korunum kanunları bulunmuştur. Jacobi eliptik fonksiyon metodu bu denklem için denenmiştir ve sonuç elde edilememiştir.

4.3.1 Painlevé Metodu

(4.29) denklemine Painlevé metodunu uygulandığında ilk olarak etkin davranışın bulunması gerekir.O halde ϕ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t)\phi^{\alpha} \tag{4.30}$$

ifadesindeki α ve $u_0(x,y,t)$ ın belirlenmesi gerekir. Bunu elde etmek için (4.30) ifadesini (4.29) kısmi diferensiyel denklemde etkin terimlerde yerine yazıldığında tüm terimler dengelendiğinde ve α_i ler bulunduğunda $2\alpha - 3$ ve $\alpha - 4$ kuvvetlerine sahip olan ϕ li terimlerin dengelenmesinden elde edilen $\alpha = -1$ değerleri algoritmada kullanılmak üzere seçilir. Bulunan $\alpha = -1$ değeri (4.30) ifadesinde daha sonra da (4.29) kısmi diferensiyel denklemde yerine yazıldığında ϕ^{-5} li terimlerden oluşan denklem çözülüp $u_0(x,y,t) = -2\phi_x, u_0(x,y,t) \neq 0$ fonksiyonu elde edilir. Bulunan α ve $u_0(x,y,t)$ değerleri (3.4) fonksiyonunda yerine yazıldıktan sonra

$$u(x,y,t) = -2\phi_x\phi^{-1} + u_j\phi^{j-1} \tag{4.31}$$

ifadesi (4.29) denkleminde yerine yazılarak $u_j\phi^{-5+j}$ li lineer olan tüm terimlerin katsayılarından oluşan polinom

$$j^4 - 10j^3 + 23j^2 + 10j - 24 = 0$$

şeklinde bulunur ve polinomun kökleri rezonans değerleri olarak adlandırılır. Buradan rezonanslar

$$j = -1, 1, 4, 6$$

olarak elde edilir. İlk rezonans olan $j = -1$, $\phi(x,y,t) = 0$ ın tekillik manifoldunun keyfiliğinden her zaman bulunmak zorundadır. Diğer rezonansların keyfi fonksiyonlarının kontrol edilmesi için Laurent serisini

$$u(x,y,t)=\sum_{j=0}^{6}u_j\phi^{j-1}$$

şeklinde oluşturarak (4.29) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade ϕ nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve kuvvetlerin katsayıları birer denklem olarak yazıldıktan sonra cebirsel denklem sistemi oluşturulup bilinmeyen u_j fonksiyonları elde edilir. $u_{2,}u_{3,}u_5$ ifadelerini elde etmek ve $u_{1,}u_{4,}u_6$ ifadelerinin keyfi fonksiyon olup olmadığı kontrol ederek, rezonansların bağdaşabilirlik şartını sağlayıp sağlamadığını saptamak gerekir. Detaylı anlatılırsa $u_j\phi^{-5+j}$ li terimlere j rezonans değerleri yazıldığında rezonanslara karşılık gelen u_j ler ϕ li terimlerin katsayısıdır. (4.29) denklemi için $u_j\phi^{-5+j}$ li terimine j rezonans değerleri yerleştirildiğinde $j = 0,1,2,...,6$ değerleri için sırasıyla $\phi^{-5},\phi^{-4},\phi^{-3},\phi^{-2},\phi^{-1},\phi^{0},\phi^{1}$ li terimlerin katsayıları denklem olarak tanımlanır ve bu cebirsel denklem sistemi çözülerek sırasıyla $u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6$ fonksiyonları elde edilir. Tüm terimlere detaylı şekilde cebirsel işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
j=0:\phi^{-5}: &\quad u_0=-2\phi_x,\\
j=1:\phi^{-4}: &\quad u_1=u_1,\\
j=2:\phi^{-3}: &\quad u_2=\frac{1}{6\phi_x^2+6\phi_y}(-3\phi_{xx}\phi_{xy}+\phi_{xxx}\phi_y+3\phi_x\phi_{yxx}+\cdots),\\
j=3:\phi^{-2}: &\quad u_3=\frac{1}{24\phi_x^4{\phi_y}^3}(-\phi_x{\phi_y}^3\phi_{xxxx}-6\phi_x^2\phi_y^2\phi_{xxxy}-\cdots),\\
j=4:\phi^{-1}: &\quad u_4=u_4,\\
j=5:\phi^{0}\ : &\quad u_5=-\frac{1}{288\phi_x^8{\phi_y}^5}(288u_{4,x}\phi_x^7{\phi_y}^5+102\phi_x\phi_{xx}^2\phi_{xy}{\phi_y}^4\phi_t-\cdots),\\
j=6:\phi^{1}\ : &\quad u_6=u_6
\end{aligned}$$

değerlerine ulaşılır. Sonuç olarak $u_{1,}u_{4,}u_6$ ifadeleri keyfi fonksiyonlar olup rezonans değerleri bağdaşabilirlik koşulunu sağladığından ve aynı zamanda $u_{2,}u_{3,}u_5$ fonksiyonları bulunabildiğinden (4.29) denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahiptir yani integrallenebilirdir denir. Literatüre bakıldığında, Wazwaz ilk olarak (Wazwaz, 2020) makalesinde aynı sonuca varmıştır.

4.3.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu İle Tam Çözüm

x,y,t bağımsız değişkenler, c keyfi sabit ve ξ bağımsız değişken olmak üzere aşağıdaki formun aracılığı ile (4.29) denklemine hareketli dalga dönüşümü yapıldığında

$$u(x,y,t)=u(\xi),\ \ \xi=x+y-ct \tag{4.32}$$

bu denklem lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgenir. İndirgeme sonucunda

$$u^{(iv)}-cu''-6u'u''=0 \tag{4.33}$$

oluşan (4.33) denkleminin en yüksek mertebeli lineer terim $u^{(iv)}$ ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim $u'u''$ arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı $m+4 = m+1+m+2$ olarak yazılır. Bu bağıntı çözüldüğünde dengelenme sayısı $m = 1$ olarak bulunur. Genelleştirilmiş Kudryashov metoduna göre m elde edildikten sonra $n - r = m$ şartına bağlı olarak n ve r sayıları seçilmelidir. $m = 1$ olduğundan $n = 2$ ve $r = 1$ olarak seçilirse, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 belirsiz sabitler olmak üzere (4.33) denkleminin rasyonel formda olan çözümü

$$u(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q} \tag{4.34}$$

olarak bulunur. A integral sabiti ve $Q = Q(\xi)$ olmak üzere

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + Ae^{\xi}} \tag{4.35}$$

(4.36) denkleminin bir çözümüdür ve yardımcı denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dQ}{d\xi} = Q^2(\xi) - Q(\xi) \tag{4.36}$$

(4.34) denklemi (4.33) denkleminde yerine yazılır ve (4.36) denklemi, çıkan sonuçlarda Q nun türevleri cinsinden türevli ifadeler bitene kadar yerine yazılır. Son olarak Q^k fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple yardımıyla çözülmesiyle bulunan üç farklı durum aşağıda verilmiştir:

Durum 1:

$$a_0 = -b_0 - \frac{1}{2}a_1, \;\; a_1 = a_1, \;\; a_2 = 0, \;\; b_0 = a_1, \; b_1 = -2b_0, \;\; c = 1,$$

Eğer elde edilen değerler ve (4.36) denklemi (4.34) denkleminde yerine yazılıp (4.32) dönüşümü yapılırsa (4.29) denkleminin dalga çözümü

$$u(x+y-t) = -\frac{1}{2}\frac{-1 - 4A\sinh(x+y-t) - 2A\cosh(x+y-t) + 3A^2}{A^2 + 1 - 2A\cosh(x+y-t)}$$

olarak bulunur.

Durum 2:

$$a_0 = \frac{b_0(a_1 - 2b_0)}{b_1}, \;\; a_1 = a_1, \;\; a_2 = 2b_1, \;\; b_0 = b_1, \;\; b_1 = a_1, \;\; c = 1,$$

Bulunan sonuçlar ve (4.36) denklemi (4.34) denkleminde yerine yazılıp (4.32) dönüşümü yapılırsa (4.29) denkleminin tam çözümü

$$u(x+y-t) = -\frac{2A\sinh(x+y-t) - 1 + A^2}{A^2 + 1 + 2A\cosh(x+y-t)}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 3:

$$a_0 = -\frac{1}{2}a_1,\ \ a_1 = a_1,\ \ a_2 = -4b_0,\ \ b_0 = a_1,\ \ b_1 = -2b_0,\ \ c = 4,$$

Yukarıdakiler ile benzer yol izlendiğinde, denklemin aşağıdaki gibi hareketli dalga çözümü bulunur:

$$u(x+y-4t) = -\frac{1}{2}\frac{-16A^2\sinh(x+y-4t)\cosh(x+y-4t)+12A^2\cosh(x+y-4t)^2-6A^2-7+A^4}{A^4-4A^2\cosh(x+y-4t)^2+2A^2+1}$$

Elde edilen hareketli dalga çözümleri hiperbolik fonksiyon içeren soliton çözümlerdir. Literatür araştırması sonucu edinilen bilgilere göre, (Luo, 2011a), (Zhang, 2008) makalelerinde denklemin periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca Wazwaz (4.29) denkleminin çoklu soliton ve çoklu kompleks soliton çözümlerini elde etmiştir (Wazwaz, 2020). Bu çalışmada bulunan soliton çözümler literatüre kazandırılan yeni dalga çözümlerdir.

4.3.3 Çarpan Metodu İle Korunum Kanunu

Bu bölümde (4.29) denklemi için çarpan metodu kullanılarak korunum kanunları bulunacaktır. BLMP denklemini $\Lambda(x, y, t, u)$ fonksiyonu ile çarpalım.

$$\Lambda(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy}) = 0 \tag{4.37}$$

Buradan belirleyici denklemleri (4.37) denkleminin varyasyonel türevini alarak bulunduğunda.

$$\frac{\delta}{\delta u}[\Lambda(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy})] = 0 \tag{4.38}$$

(4.38) denklemini tam türevlere göre açtığımızda

$$\Lambda_x(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy}) - D_x[\Lambda_{u_x}(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy})]$$

$$-D_y[\Lambda_{u_y}(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy}) + \Lambda(-3u_{xx})] + D_x^2[\Lambda(-3u_y)]$$

$$+D_yD_t[\Lambda] + D_yD_x^3[\Lambda] + \Lambda[(-3u_{xy})] + D_xD_y[\Lambda(-3u_x)]$$

elde edilir. Burada u nun türevlerinin katsayılarından oluşan belirleyici denklem sistemi

$$\Lambda_{t,y} = 0,\ \ \Lambda_x = 0,\ \ \Lambda_u = 0 \tag{4.39}$$

olarak bulunur ve bu denklem sisteminin çözümünün bulunması karmaşık ve büyük hesaplamalar içerdiğinden Maple paket programının alt programı olan Cheviakov' un geliştirmiş olduğu GeM paket programından faydalanılmıştır. Bu sistemin çözümünden $F_2(y), F_1(t)$ keyfi sabitler olmak üzere, çarpan fonksiyonu Λ

$$\Lambda(x,y,t,u) = F_2(y) + F_1(t) \tag{4.40}$$

şeklinde elde edilir. Bir diğer deyişle (4.29) denklemi için iki tane lineer bağımsız çarpan aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\Lambda_1 = F_1(t),$$
$$\Lambda_2 = F_2(y).$$

$\Lambda_i, i = 1,2$ değerlerinin her biri (4.29) denklemi ile çarpıldığında, denklemin x, y, t ye göre tüm terimlerinin tam türevi altında D_x, D_y, D_t nin katsayıları korunum vektörleri olur yani korunum kanunları elde edilmiş olur. Şimdi yukarıdaki çarpanlara karşılık gelen (4.29) denkleminin korunum kanunlarını aşağıda verelim.

$\Lambda_1 = F_1(t)$ çarpanı ile denklem çarpılırsa

$$u_{yt}F_1(t) + u_{xxxy}F_1(t) - 3u_{xx}u_yF_1(t) - 3u_xu_{xy}F_1(t) = 0 \tag{4.41}$$

denkleminin x, y, t ye göre tüm terimleri tam türev altında

$$\begin{aligned}(F_1(t))(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy}) = {} & D_x(-3u_xF_1(t)u_y + u_{xxy}F_1(t)) \\ & +D_y(-uF_{1_t}) + D_t(u_yF_1(t))\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. O halde $F_1(t)$ ye bağlı korunum vektörü

$$T_1^t = u_yF_1(t),\ \ T_1^x = -3u_xF_1(t)u_y + u_{xxy}F_1(t),\ \ T_1^y = -uF_{1_t} \tag{4.42}$$

olarak elde edilir ve $\Lambda_2 = F_2(y)$ keyfi fonksiyonu ile denklem çarpılırsa

$$u_{yt}F_2(y) + u_{xxxy}F_2(y) - 3u_{xx}u_yF_2(y) - 3u_xu_{xy}F_2(y) = 0$$

oluşan bu denklemin ise x, y, t ye göre tüm terimlerinin tam türevi

$$(F_2(y))(u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy}) = D_x(\ T_2^x) + D_y(T_2^y) + D_t(T_2^t)$$

şeklinde yazılabilir ve $F_2(y)$ ye bağlı korunum kanunu

$$T_2^t = u_yF_2(y),\ \ T_2^x = -3u_xF_2(y)u_y + u_{xxy}F_2(y),\ \ T_2^y = 0 \tag{4.43}$$

şeklinde bulunur. Bulunan sonuçlardan da anlaşıldığı üzere (4.29) denkleminin keyfi fonksiyonlarının varlığı mevcut olduğundan (4.29) denklemi için sonsuz çoklukta korunum kanunları elde edilebileceği yorumu yapılabilir. Literatürde, (4.29) denkleminin korunum kanunları bulunmaktadır (Asadi ve Nadjafikhah, 2015).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin matematiksel özellikleri araştırılmıştır . Öncelikle kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğini test eden WTC algoritması olarak da bilinen Painlevé metodu ile üç farklı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin integrallenebilirliği incelenmiştir. Denklemlerin WTC algoritması ile integrallenebilirliği araştırılırken yapılan cebirsel işlemler elle yapılması bir hayli zor olduğu için işlemler Maple paket programı yardımıyla yapılmıştır. İncelenen kısmi diferensiyel denklemlerden (2+1)-boyutlu KdV (KdV4) denklem ve (2+1)-boyutlu BLMP denklemin Painlevé özelliğine sahip olduğu yani integrallenebilir olduğu anlaşılmıştır. Öte yandan (1+1)-boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq denklem sistemi bağdaşabilirlik koşulunu sağlamadığından Painlevé özelliğine sahip değildir. Ancak bu denklem için integrallenemez denilemez. İntegrallenebilir olup olmadığını anlayabilmek için farklı metotlar uygulanmalıdır.

Kısmi diferensiyel denklemlerin fiziksel yapısını anlayabilmek için en iyi yollardan biri tam çözümlerini bulmaktır. Tam çözümlerin bulunması için birçok metot mevcuttur ve bilim insanları hala çeşitli yöntemler geliştirmek için araştırmalar yapmaktadır. Bu tezde incelenen lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere dalga dönüşümü uygulanıp lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgedikten sonra tam çözüm metodu uygulanmıştır. Ele alınan KdV4 ve BLMP denklemlerine genelleştirilmiş Kudryashov metodu uygulanarak Maple programı yardımıyla tam çözümleri elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Boussinesq denklem sisteminin tam çözümlerinin elde edilmesi için de Jacobi eliptik fonksiyon metodu kullanılmıştır ve tam çözümleri bulunurken Maple programı kullanılarak cebirsel işlemler yapılmıştır. Bulunan sonuçlar hiperbolik (soliton) ve trigonometrik (periyodik) fonksiyon içeren çözümler olup hareketli dalga ve soliter dalga çözümlerdir.

İntegrallenebilirlik ve soliton çözüm araştırmalarında korunum kanunları önemli bir rol oynar. Son olarak bu yüksek lisans tez çalışmasında ilk defa Alman bilim insanı Steudel tarafından ortaya atılan varyasyonel metot ve karakteristikler metot olarak da bilinen çarpan metoduyla denklemlerin korunum kanunları saptanmaya çalışılmıştır ve bu çalışma yapılırken Maple paket programının alt programı olan Cheviakov' ın yazmış olduğu GeM paket programı kullanılmıştır. Bu metot sonucunda KdV4 ve BLMP denklemlerinin keyfi fonksiyonların varlığı mevcut olduğundan sonsuz sayıda korunum kanunları bulunabildiği sonucuna varılmıştır. Genelleştirilmiş Boussinesq denklem sistemi aşikar korunum vektörüne sahiptir. Eğer bir kısmi diferensiyel denklemin çok sayıda korunum kanunu çıkıyor ise bu onun yüksek ihtimalle integrallenebilir ve çözülebilir olduğunu gösterir.

Bundan sonra yapılabilecek çalışmalarda genelleştirilmiş Boussinesq denklem sisteminin integrallenebilirliği farklı metotlarla kontrol edilebilir. Buna örnek olarak ters saçılım metodu verilebilir. Öte yandan ele alınan denklem sisteminin sonsuz tane lie simetri üreticine sahip olması veya n-soliton çözümünün elde edilmesi denklem sisteminin integrallenebilir olduğunu işaret eder. Ayrıca bu denklem sisteminin Hamilton yapıda yazılabilir olması denklem sisteminin integrallenebilirliğini gösterir. Kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması için birçok yöntem mevcuttur. İleriki çalışmalarda bu tezde çalışılan denklemlerin literatürde olmayan yeni hareketli dalga çözümleri farklı tam çözüm metotları ile elde edilip, literatüre yeni tam çözümler kazandırılabilir. Son olarak, elde edilen çözümlerin fiziksel yapısını daha iyi anlamak için grafikleri çizilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ablowitz, M. ve H. Sugar (1981). “Solitions and Invers Scattering Transform”. İn: *PASIAM Phladelphia*, pp. 1–40.

Ablowitz, M.J. ve P.A. Clarkson (1992). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. 149. London Mathematical Society Lecture Note Series.

Ablowitz, M.J., A. Ramani ve H. Segur (1980). “A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of Painlevé Type 1”. İn: *J.Math Phys* volume.21, pp. 715–721.

Adem, A. (2016). “A (2+1)-dimensional Korteweg-de Vries type equation in water waves: Lie symmetry analysis; multiple exp-function method; conservation laws”. İn: *International Journal of Modern Physics B*.

Adem, A.R. ve C.M. Khalique (2012). “Symmetry reductions, exact solutions and conservation laws of a new coupled KdV system”. İn: *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17, pp. 3465–3475.

Alofi, A.S. ve M.A. Abdelkawy (2012). “New exact solutions of Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation using extended F-expansion method”. İn: *Life Sci.J*, pp. 3995–4002.

Anco, S.C. ve G. Bluman (2002). “Direct construction method for conservation laws of partial differential equations Part I: Examples of conservation law classifications”. İn: *Euro. Jnl of Applied Mathematics* 13.number, pp. 545–566.

Asadi, N. ve M. Nadjafikhah (2015). “Geometry of BLMP Equation”. İn: *Indian Journal of Science and Technology* 8.33.

Ayhan, B., M.N. Özer ve A. Bekir (2016). “Method of Multiple Scales and Travelling Wave Solutions for $(2+1)$-Dimensional KdV Type Nonlinear Evolution Equations”. İn: *Zeitschrift für Naturforschung*, pp. 703–713.

— (2017). “A family of exact travelling wave solutions of (2+ 1)-dimensional KdV4 equation”. İn: *AIP Conference Proceedings*.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Bekir, A. (2005). "Lineer Olmayan Denklemlerin Painlevé Analizi, Tam Çözümleri ve Simetrileri". DR. Osmangazi Üni. Fen Bil. Ens.

Bekir, A. ve A. Boz (2009). "Applications of He's Exp-Function Method for Nonlinear Evolution Equations". İn: *Computers and Mathaematics with Applications* 58, pp. 2286–2293.

Bluman, G.W. ve S.C. Anco (2002). "Symmetry and Integration Methods for Differential Equations with 18 Illustrations". İn: *Springer-lag*.

CardioCemm Solutions, Inc. (2016). *GEMS HOme User Manual*.

Chaohao, G. (1995). *Soliton Theory and Its Applications*.

Chen, C., S. Huang ve J.E. Zhang (2008). "On Head-on Collisions between Two Solitary Waves of Nwogu's Boussinesq Model". İn: *Communi Nonlinear Sci Number Simul* 1.

Cheviakov, A.F. (2007). "GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations". İn: *Comput Phys Comm.* 176, pp. 48–61.

Chun-Li, C., L. Sen-Yue ve L. Yi-Shen (2004). "Solitary wave solutions for a general Boussinesq type fluid model". İn: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 583–601.

Crawford, F. (1983). "A Non-Iterative Method for Fitting Circular Arcs to Measured Points". İn: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research* 211, pp. 223–225.

Ebaid, A. ve H.E. Aly (2012). "Exact solutions for the transformed reduced Ostrovsky equation via the F-expansion method in terms of Weierstrass-elliptic and Jacobian-elliptic functions". İn: *Wave Motion* 49, pp. 296–308.

Fu, Z.T., S.K. Liu, S.D. Liu ve Q. Zhao (2001). "New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations". İn: *Phys. Lett. A*, pp. 72–76.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gilson, C.R., J.J.C. Nimmo ve R. Willox (1993). “A (2+1)-dimensional generalization of the AKNS shallow water wave equation”. İn: *Phys. Lett*, pp. 337–345.

Gümüş, H. (2018). “Nonlineer Schrödinger Denkleminin Tam Çözümleri”. YL. Dicle Üni. Fen Bil. Ens.

Hao, X., Y. Liu, Z. Li ve X. Ma (2008). “Painlevé Analysis, Soliton Solutions and Lump-type Solutions of the (3+1)-Dimensional Generalized KP Equation”. İn: *Computers and Mathematics with Applications*. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.007`.

Hassan, M. (2004). “Exact Solitary Wave Solutions for a Generalized KdV-Burger Equation”. İn: *Chaos, Solitons & Fractals* 19, pp. 1201–1206.

Hirota, R. (1971). “Exact Solutions of the KdV Equation for Multiple Collisions of Solitons”. İn: *Phys. Rev. Lett.* 27, pp. 1192–1194.

Huang, S. ve C. Chun-Li (2007). “Study on solitary waves of a general Boussinesq model”. İn: *Communications in Theoretical Physics* 773.

Ince, E.L. (1956). “Ordinary Diferential Equation”. İn: *Dover Publication*, pp. 345–351.

Kangalgil, F. (2008). “Painlevé Analizi İle Bazı Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin İntegrallenebilirliği ve Soliton Çözümleri Üzerine”. DR. Gazi Üni. Fen Bil. Enst.

Kaplan, M. (2013). “Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Tam Çözümleri”. YL. ESOGU Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kara, A.H ve F.M. Mahomed (2006). “Noether-type symmetries and conservation laws via partial Lagrangians”. İn: *Nonlinear Dynamics* 45, pp. 367–383.

Kaur, L. ve A. Wazwaz (2018). “Painlevé analysis and invariant solutions of generalized fifth-order nonlinear integrable equation”. İn: *Nonlinear Dyn*, 2469–2477.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Keskin, P. (2010). “Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD’lere Sonlu Farklar Yöntemlerinin Uygulanması”. YL. Esk. Osmangazi. Üni. Fen. Bil. Ens.

Koca, K. (2008). *Kısmi Türevli Denklemler*.

Kodama, Y. ve A.V. Mikhailov (1996). “Obstacles to asymptotic integrability”. İn: *Algebraic aspects of integrability*, pp. 173–204.

Koparan, M. (2017). “A Novel Generalized Kudryashov Method for Exact Solitions of Nonlinear Evolution Equations”. İn: *AIP Conference Proceeding* 1798.1.

Koparan, M., M. Kaplan, A. Bekir ve Ö. Güner (2017). “A Novel Generalized Kudryashov Method for Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations”. İn: *American Institute of Physics*. DOI: 10.063/1.4972674.

Kruskal, M. ve P. Clarkson (1992). “The Painlevé-Kowalevski and Poly-Painlevé Tests for Integrability”. İn: *Studies in Applied Mathematics* 86, pp. 87–165.

Leveque, R.J. (1992). *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser-Basel.

Li, J. (2008). “Bifurcations of travelling wave solutions for two generalized Boussinesq systems”. İn: *Science in China Series A: Mathematics*, pp. 1577–1592.

Liu, S.K., Z.T. Fu, S.D. Liu ve Q. Zhao (2001a). “Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Periodic Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations”. İn: *Phys. Lett. A* 289, pp. 69–74.

Liu, S.K., Z.T. Fu ve S.D. Liu (2001b). “Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Periodic Wave Solutions of Nonlineer Wave Equations”. İn: *Phys. Lett. A.* 289, pp. 69–74.

Luo, L. (2011a). “New exact solutions and B acklund transformation for Boiti–Leon–Manna–Pempinelli equation”. İn: *Physics Letters A*, pp. 1059–1063.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Luo, L (2011b). “New exact solutions and Bäcklund transformation for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation”. İn: *Physics Letters A*, pp. 1059–1063.

Maplesoft. *Maple User Manual*. ISBN: 978-1-926902-45-6.

Noether, E. (1918). “Invariant variational problems”. İn: *Math.-phys. Klasse*, pp. 235–257.

Parkes, E.J., B.R. Duffy ve P.C. Abbott (2002). “The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wavesolutions to nonlinear evolution equations”. İn: *Physics Letters A* 295.

San, S. (2014). “Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Korunum Kanunları ve İndirgemeleri”. DR. ESOGU Fen Bil. Ens.

Sirendaoreji, S. (2003). “Auxiliary Equation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations”. İn: *Physics Lett. A.* 309.

— (2004). “New Exact Travelling Wave Solutions to Three Nonlineer Evolution Equations”. İn: *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B.* 19, pp. 178–186.

— (2006). “A New Auxiliary Equation and Exact Travelling Wave Solutions of Nonlinear Equations”. İn: *Phys. Lett. A.* 356, pp. 124–130.

Sloughter, D. (2004). *Laurent Series*. Lecture 37. Furman University.

Steudel, H. (1962). “Uber die zuordnung zwischen invarianzeigenschaften und erhaltungssatzen”. İn: *Z. Naturforsch*, pp. 129–132.

Tatar, F. (2009). “Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri”. YL. Dumlupınar Üni. Fen Bil. Enst.

Topoğlu, İ (2007). “Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri”. YL. Dumlupınar Üni. Fen Bil. Ens.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Verma, P. ve L. Kaur (2018). “Analytic study of (3+1) - dimensional Kadomstev-Petviashvili-Boussinesq equation: Painlevé analysis and exact solutions”. İn: *American Institute of Physics*.

Wadati, M. (2001). “Introduction to Solitons”. İn: *Pramana: Journal of Physics* 57, p. 841.

Wang, M.L., X.Z. Li ve J.L. Zhang (2008). “The $(\frac{G'}{G})$-Expansion Method Travelling Wave Solutions of Nonlinear Equations in Mathematical Physics”. İn: *Phys. Lett. A.* 372, pp. 417–423.

Wazwaz, A. (2020). “Painlevé Analysis for BLMP Equation of Higher Dimensions with Time-Dependent Coefficients: Multiple Soliton Solutions”. İn: *Physics Letters A* 1.261.

Wazwaz, A.M. (2004). “The tanh Method for Travelling Wave Solutions of Nonlinear Equations”. İn: *Applied Maths. and Computation* 154, pp. 713–723.

— (2013). “A study on the (2+1)-dimensional KdV4 equation derived by using the KdV recursion operator”. İn: *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pp. 1760–1767.

Weiss, J. (1984). “Backlund Transformations and Linearizations of the Henon-Heiles System”. İn: *Phys.Lett.* 8, pp. 329–331.

Weiss, J., M. Tabor ve G. Carnevale (1983). “The Painlevé Property for Partial Differential Equations”. İn: *J. Math. Phys.* 24, pp. 526–552.

Wu, X.H. ve J.H. He (2007). “Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method”. İn: *Science Direct*.

Yeşil, A. (2009). “Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin F-Açılım Metodu ile Çözülmesi”. YL. Dumlupınar Üni. Fen Bil. Ens.

Zhang, L.L. (2008). “Exact Solutions of Breaking Soliton Equations and BLMP Equation”. İn: *Journal of Liaocheng Univercity (Nat.Sci)*, pp. 35–38.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zhang, W. (2010). “The Extended Tanh Method and the Exp-Function Method to Solve a Kind of Nonlinear Heat Equation”. İn: *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, p. 12. DOI: 10.1155/2010/935873.

Zhanga, J.E., C. Chen ve Y. Li (2004). “On Boussinesq models of constant depth”. İn: *Phys Fluids*.

Zill, D. G. ve P. D. Shanahan (2013). *Complex Analysis with Applications*, p. 458.

Öğün, A. (2008). “Painleve Analizi ve Backlund Dönüşümü Yardımıyla Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin İncelenmesi”. DR. Ankara Üni. Fen Bil. Ens.

Özemir, C. (2012). “Bazı Özel (1+1)- ve (2+1)-Boyutlu Evrim Tipi Denklemlerde İntegre Edilebilme ve Simetriler”. DR. İTÜ Fen Bil. Ens.