MAKSİMUM METRİĞİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Südabe SALİHOVA

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2006

ON THE GEOMETRY OF MAXIMUM METRIC

Südabe SALİHOVA

Department of Mathematics

Ph. D. Thesis

2006

MAKSİMUM METRİĞİNİN GEMETRİSİ ÜZERİNE

Südabe SALİHOVA

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Nisan 2006

Südabe SALİHOVA'nın Doktora tezi olarak hazırladığı

"MAKSİMUM METRİĞİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE "

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Rüstem KAYA (Danışman)

Üye: Prof. Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye: Prof. Dr. Mehmet ÜREYEN

Üye: Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye: Doç. Dr. Münevver ÖZCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Analitik düzlemde verilen $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ noktaları için

$$d_M(X, Y) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

uzaklık fonksiyonu kullanılarak maksimum metriği tanımlanır. Bu metrik kullanılarak geliştirilecek düzlem geometrinin incelenmesi bu çalışmanın esas amacıdır. Çalışmada Taksi Düzlemi için yapılan çalışmalar esas alınmıştır. Birinci bölümde temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde $M-$uzaklığı ve $M-$düzlemi tanımlanmış, Öklid düzlemi ile $M-$düzleminin aksiyomatik yapıları karşılaştırılmıştır. Bu iki uzaklık arasındaki fonksiyonel ilişki bulunmuş ve bu ilşki kullanılarak üçgenlerle ilgili bazı Teoremlerin bu düzlemdeki karşılıkları verilmiştir. Üçüncü bölümde Kaya.R., Gelişgen Ö., Ekmekçi S., Bayar A. [10] çalışması esas alınarak $\mathbb{R}^2_M$ nin izometriler grubu incelenmiştir. Dördüncü bölümde $M-$çemberleri, bir noktanın bir doğruya d_M-uzaklığı formülü verilmiştir. Ayrıca Kaya R., Akça Z., Günaltılı I.ve Özcan M. [8] çalışması esas alınarak $M-$konikleri incelenmiş ve bunların sınıflandırılması yapıImıştır.

SUMMARY

The maximum metric is defined by using the distance function

$$d_M(X,Y) = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

for two given points $X = (x_1, y_1)$ and $Y = (x_2, y_2)$ in the analytic plane. The main aim of this study is to develope plane geometry using the above metric. This work is based on the studies of Taxicab geometry. In the first chapter, basic concepts are given. $M-$distance and $M-$plane are defined in the second chapter. Axiomatic structure of this plane geometry is compared with the Euclidean geometry. A functional relation is found between these two distances then using these relations. Analogouses of some Euclidean theorems to triangles are given . In the third chapter, group of isometries of $\mathbb{R}^2_M$ is examined in the same of way in the paper [10]. The fourth chapter, $M-$circles and d_M-distance formula from a point to a line are given. In addition $M-$conics are examined and classified using the processes [8].

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarımın her aşamasında bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Sayın

Prof. Dr. Rüstem Kaya 'ya

teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde en büyük emeği ve katkısı olan; uzakta olsalar da, hep yanımda hissettiğim çok değerli anneme, babama ve kardeşlerime, sevgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eşim Galib REHİMOV' a ve biricik kızım FİRUZE' ye en içten teşekkürlerimle...

Eskişehir, 2006 Südabe Salihova

İçindekiler

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Giriş

Tanım 1.1.1. Elemanları noktalar olarak adlandırılan bir $\mathcal{P}$ kümesi, $\mathcal{P}$ nin doğru olarak adlandırılan bazı alt kümelerinin topluluğu $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$ da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (*incidence*) bağıntısı olmak üzere $(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa bu sistem bir *soyut geometri* olarak adlandırılır:

i) $\forall A,\, B \in \mathcal{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde birtek $l \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

ii) Her doğru enaz iki noktayı kapsar.

$(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ soyut geometrisi $\mathcal{S} =(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.1. $\mathcal{P} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ olsun. Doğrular kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın: a sabit gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin

$$L_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\right\}$$

şeklindeki her alt kümesine bir *dikey doğru* denir. m ve b sabit gerçel sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin

$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$$

şeklindeki her alt kümesine *dikey olmayan doğru* denir. $\mathcal{L}_E$ tüm dikey ve dikey olmayan doğruların kümesi olsun. Burada, $(x, y)\ \mathcal{I}\ L_a \Leftrightarrow x = a$ ve $(x, y)\ \mathcal{I}\ L_{m,b} \Leftrightarrow y = mx + b$ olmak üzere $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I})$ bir soyut geometridir. $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I})$ düzlem modeli *Kartezyen düzlem* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.2. $\mathcal{S} =(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ soyut geometrisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *incidence geometridir* denir:

i) $\mathcal{L}$ de farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.

ii) Doğrudaş olmayan üç $A, B, C \in \mathcal{P}$ noktaları vardır.

Örnek 1.1.2. Kartezyen düzlem bir incidence geometridir.

Tanım 1.1.3. Bir d: $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, aşağıdaki özelikleri sağlarsa, bir *metriktir* denir:

$M1 : Her\ \ A,\ B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) \geq 0$,

$M2 : Her\ A,\ B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$,

$M3 : Her\ A,\ B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) = d(B, A)$,

$M4 : Her\ A,\ B,\ C \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Tanım 1.1.4. $l, \mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ incidence geometrisinin bir doğrusu olsun. $d, \mathcal{G}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l için bir *cetveldir* denir:

i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

ii) l üzerindeki her P, Q nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. Bu denkleme *cetvel denklemi* denir.

Tanım 1.1.5. ($\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}$) incidence geometrisi d uzaklık fonksiyonuyla birlikte $\forall l \in \mathcal{L}$ doğrusu için bir *cetvele* sahip ise, *cetvel postulatını* sağlıyor denir. Bu durumda $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d)$ ye bir *metrik geometri* denir.

Neden metrik geometride çalışıyoruz? $\mathcal{L}$ deki l doğrusuna ilişkin soruları f cetvelini kullanarak, $\mathbb{R}$ ye dönüşüm yaparak cevaplandırabiliriz. Bu düzlemin elemanları $\mathbb{R}$ de "*arada olm*a" gibi kavramlar kullanılarak l ye transfer edilebilir. Bu da metrik yaklaşımın bize sağladığı kolaylıktır.

$\mathcal{M}$=$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d)$ nin metrik geometri olduğunu göstermek için her bir $l \in \mathcal{L}$ için bir $f : l \to \mathbb{R}$, f bire-bir ve örten fonksiyonunu bulmalıyız.

Tanım 1.1.6. (Noktanın doğruya uzaklığı) Verilen bir P noktası ile verilen bir l doğrusunun bu noktaya en yakın noktası arasındaki uzaklığa *bu noktanın bu doğruya uzaklığı* denir ve

$$d(P, l) = \min_{X \in l} d(P, X)$$

şeklinde yazılır.

1.2 Koniklerle İlgili Hatırlatmalar

Bu kısımda Öklid düzleminde konik adıyla bilinen çember, elips, hiperbol ve parabol eğrileri hatırlatılmaktadır.

Tanım 1.2.1. Düzlemde verilen bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine *çember* denir.

Düzlemde verilen $M = (m, n)$ noktasından (çemberin merkezi) r birim ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ çemberin yarıçapı) uzakta bulunan değişken nokta $X = (x, y)$ olsun. $\{X : |MX| = r\}$ noktalar kümesi bir çember belirtir ve bu çemberin denklemi

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.2. Düzlemde verilen iki noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu noktaların *orta kümesi* veya *bisektörü* denir. Yani, $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, düzlemde verilen iki nokta olmak üzere,

$$\left\{X : d(F_1, X) = d(F_2, X), \quad X \in \mathbb{R}^2\right\}$$

kümesine F_1 ve F_2 noktalarının *orta kümesi* denir.

Tanım 1.2.3. Düzlemde verilen iki noktaya uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesine *elips* denir. Başka bir ifadeyle, düzlemde verilen iki noktaya uzaklıklarının ortalaması verilen bir sayı kadar olan noktaların kümesine elips denilmektedir.

F_1 ve F_2 verilen noktalar ve $a \in \mathbb{R}^+$ verilen sayı olmak üzere bunların belirttiği elips

$$\left\{X : \frac{1}{2}\left(|XF_1| + |XF_2|\right) = a, \ X \in \mathbb{R}^2\right\}$$

kümesidir. F_1 ve F_2 elipsin odak noktaları olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.4. Düzlemde verilen iki noktaya uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların kümesine *hiperbol* denir.

Verilen sabit noktalara hiperbolün *odak noktaları* denir ve F_1 ve F_2 ile gösterilir. $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $2a$ verilen sabit olarak alınırsa, hiperbolü oluşturan X noktalarının kümesi

$$\left\{X : ||XF_1| - |XF_2|| = 2a, \ X \in \mathbb{R}^2\right\}$$

biçimindedir.

Tanım 1.2.5. Düzlemde verilen bir nokta ve verilen bir doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine *parabol* denir.

Verilen (sabit) noktaya parabolün odak noktası, verilen doğruya parabolün doğrultmanı, odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğruya parabolün ekseni, eksenin parabolü kestiği noktaya parabolün köşe (tepe) noktası ve odağın doğrultmana uzaklığına da parabolün parametresi denir. *Odak* F, *doğrultman* d ve *parametre* p ile gösterilir.

Tanım 1.2.6. Verilen bir F (odak) noktasına uzaklığının verilen bir d (doğrultman) doğrusuna olan uzaklığına olan oranı, verilen bir e (dış merkezlik) sayısı olan noktaların kümesine (geometrik yerine) bir *konik* denir. Başka bir ifadeyle,

$$\left\{X : \frac{|XF|}{|Xd|} = e\right\}$$

kümesine *konik* denir. Bu konik,

$$\begin{array}{lcc} e < 1 & \text{ise} & \text{elips} \\ e = 1 & \text{ise} & \text{parabol} \\ e > 1 & \text{ise} & \text{hiperbol} \end{array}$$

gösterir.

Bölüm 2

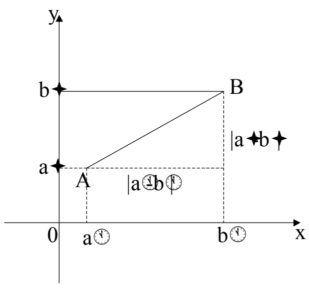
MAKSİMUM DÜZLEM GEOMETRİSİ

2.1 Maksimum Uzaklığı ve Maksimum Düzlemi

Öklid düzleminde alınan $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığının

$$d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

şeklinde tanımlı olduğu biliniyor



Sekil 2.1.1

$d_M : \mathbb{R}^2_M \times \mathbb{R}^2_M \to [0, \infty)$ olmak üzere bu noktalar arasındaki uzaklık

$$d_M((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = max \{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

biçiminde tanımlanırsa, bu fonksiyona $\mathbb{R}^2_M$ de *Maksimum Uzaklık Fonksiyonu* ve bu uzaklıkla donatılmış düzleme de *Maksimum Düzlemi* denir.

Maksimum düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Dolayısıyla, üçgenler de aynıdır ve açılar da aynı yolla ölçülür.

Bu çalışmada *Maksimum Düzlemi* yerine $M-$*düzlemi* veya $\mathbb{R}^2_M$ gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 2.1.1. d_M fonksiyonu bir metriktir.

İspat: A, B, $C \in \mathbb{R}^2_M$ ve $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ olsun.

1. $d_M(A, B) = max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$ olduğundan $d_M(A, B) \geq 0$ olur.

2. $d_M(A, B) = 0$ olsun. $max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} = 0$ dır. Bu durumda $|a_1 - b_1| = 0$ ve $|a_2 - b_2| = 0$, dolayısıyla, $a_1 = b_1$ ve $a_2 = b_2$ olur. Buradan $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ ve sonuç olarak $A = B$ olur.

$A = B$ olsun. Bu durumda $d_M(A, A) = max\{|a_1 - a_1|, |a_2 - a_2|\} = 0$ olur. Yani, $d_M(A, B) = 0$ dır.

3. $d_M(A, B) = max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$
$$= max \{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|\} = d_M(B, A)$$
dir.

4. $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \\ d_M(A, C) &= max\{|a_1 - c_1|, |a_2 - c_2|\} \\ d_M(C, B) &= max\{|c_1 - b_1|, |c_2 - b_2|\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} d_M(A,B) &= max\{|a_1-b_1|\,, |a_2-b_2|\} \\ &= max\{|a_1-c_1+c_1-b_1|\,, |a_2-c_2+c_2-b_2|\} \\ &\le max\,\{|a_1-c_1|+|c_1-b_1|\,, |a_2-c_2|+|c_2-b_2|\} \end{aligned}$$

olur.

$d_{M'}(A,B) = max\{|a_1-c_1|+|c_1-b_1|\,, |a_2-c_2|+|c_2-b_2|$ alalım. $d_{M'}(A,B) \le d_M(A,C)+d_M(C,B)$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterirsek

$$d_M(A,B) \le d_M(A,C)+d_M(C,B)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlamış oluruz. İspat için aşağıdaki durumları inceleyelim.

(i) $|a_1-c_1| \ge |a_2-c_2|$ ve $|c_1-b_1| \ge |c_2-b_2|$ ise

$d_{M'}(A,B) = |a_1-c_1|+|c_1-b_1| = d_M(A,C)+d_M(C,B)$

olur.

(ii) $|a_1-c_1| \le |a_2-c_2|$ ve $|c_1-b_1| \le |c_2-b_2|$ ise

$d_{M'}(A,B) = |a_2-c_2|+|c_2-b_2| = d_M(A,C)+d_M(C,B)$

olur.

(iii) $|a_1-c_1| \ge |a_2-c_2|$ ve $|c_1-b_1| \le |c_2-b_2|$ ise iki durum söz konusudur:

I Durum: Eger $|a_1-c_1|+|c_1-b_1| \ge |a_2-c_2|+|c_2-b_2|$ ise $d_{M'}(A,B) = |a_1-c_1|+|c_1-b_1|$ dir. Bu ifadede $|c_1-b_1|$ yerine $|c_2-b_2|$ yazarsak $|c_1-b_1| \le |c_2-b_2|$ olduğundan

$$d_{M'}(A,B) \le |a_1-c_1|+|c_2-b_2| = d_M(A,C)+d_M(C,B)$$

elde edilir.

II Durum: Eğer $|a_1-c_1|+|c_1-b_1| \le |a_2-c_2|+|c_2-b_2|$ ise

$$d_{M'}(A,B) = |a_2-c_2|+|c_2-b_2|$$

dir. $|a_2 - c_2|$ yerine $|a_1 - c_1|$ yazarsak, $|a_1 - c_1| \geq |a_2 - c_2|$ olduğundan

$d_{M^{'}}(A, B) \leq |a_1 - c_1| + |c_2 - b_2| = d_M(A, C) + d_M(C, B)$

olur. Her iki durumda da verilen eşitsizlik sağlanıyor.

(iv) $|a_1 - c_1| \leq |a_2 - c_2|$ ve $|c_1 - b_1| \geq |c_2 - b_2|$ ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

I Durum: $|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| \geq |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|$.

II Durum: $|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1| \leq |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|$.

Bu iki durum için (iii) dekine benzer olarak

$$d_{M^{'}}(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. Sonuç olarak tüm durumlarda

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$$

olduğu gösterilmiş oldu.

Teorem 2.1.1. Kartezyen düzlem d_M uzaklık fonksiyonuyla birlikte bir metrik geometridir.

İspat: l, $\mathbb{R}^2_M$de bir doğru olsun. l için bir cetvel bulmalıyız. $\mathbb{R}^2_M$ nin doğrularını hatırlayalım. $L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_M | \ x = a\}$ ve $L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_M | \ y = mx + b\}$ idi (Örnek 1.1.1.). İki durum sözkonusudur:

I Durum: $l = L_a$ dikey doğru olsun. $P \in L_a$ için $f_M(P) = f_M(a, y) = y$ şeklinde tanımlayalım. f_m nin 1:1 ve örten olduğunu göstermeliyiz. $P, Q \in l$, $f_M(P) = f_M(Q)$ iken $P = Q$ olduğunu gösterelim. $x_1 = x_2 = a$ dır.
$P = (a, y_1)$, $Q = (a, y_2)$ olsun. $f_M(P) = y_1$, $f_M(Q) = y_2$ ve $f_M(P) = f_M(Q)$ olduğundan $y_1 = y_2$ olur. Bu ise $P = Q$ olması anlamına gelir. Şimdi de örten olduğunu gösterelim. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f_M(a, t) = t$ ve $(a, t) \in l$ olduğundan f_M fonksiyonu örtendir.

Cetvel aksiyomunu sağladığını görelim. $|f_M(P) - f_M(Q)| = d_M(P, Q)$ olmalı. $f_M(P) = y_1$, $f_M(Q) = y_2$ olduğundan $|f_m(P) - f_m(Q)| = |y_1 - y_2|$

ve

$$d_M(P,Q) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = max\{|a - a|, |y_1 - y_2|\} = |y_1 - y_2|$$

olur. Cetvel aksiyomu sağlanıyor.

II Durum: $l = L_{m,b}$ olsun.

$$f_M(x,y) = \begin{cases} x \quad , & |m| < 1 \, , \\ |m|x \, , & |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. f_M nin 1:1 olduğunu gösterelim. $y = mx + b$ ve $|m| \geq 1$ olsun. $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ için $f_M(P) = |m| x_1$, $f_M(Q) = |m| x_2$ olur. $f_M(P) = f_M(Q)$ olduğundan $|m| x_1 = |m| x_2$ ve $x_1 = x_2$ olur. Ayrıca $y_1 = mx_1 + b$, $y_2 = mx_2 + b$ olduğundan $y_1 = y_2$ ve $P = Q$ dir. $f_M\left(\frac{t}{|m|}, y\right)$ iken her $t \in \mathbb{R}$ için $x = |m| \frac{t}{|m|} = t$ olacak şekilde bir $x \in R$ sayısı vardır. Bu ise f_M fonksiyonunun örten olması anlamına gelir.

$$|f_M(P) - f_M(Q)| = |mx_1 - mx_2| = |m||x_1 - x_2|$$

ve

$$\begin{aligned} d_M(P,Q) &= max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = max\{|x_1 - x_2|, |mx_1 - mx_2|\} \\ &= max\{|x_1 - x_2|, |m||x_1 - x_2|\} = |x_1 - x_2| max\{1, |m|\} = |m||x_1 - x_2| \end{aligned}$$

olduğundan, $|f_M(P) - f_M(Q)| = d_M(P,Q)$ dir. Yani cetvel aksiyomu sağlanıyor. $|m| < 1$ için sağlandığı da açıktır. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

2.2 Öklid Düzlem Geometri ile M−Düzlem Geometrisinin Aksiyomatik Yapılarının Karşılaştırılması

$\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_E, m\}$ sistemine *Öklid geometri*, $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemine d_M*−metrik geometri* diyeceğiz. Bu iki geometride de $\mathcal{P}$, $\mathbb{R}^2$ de noktalar kümesi, $\mathcal{L}$,

$\mathbb{R}^2$ de doğrular kümesidir. Her iki geometride de m açı ölçme fonksiyonu aynıdır. Öklid geometride d_E-metriği, $M-$geometride ise d_M- metriği kullanılmıştır. Şimdi d_M-metrik geometrinin, Öklid geometrinin sağladığı 13 aksiyomu Krause [12] sağlayıp sağlamadığına bakacağız.

İlk iki aksiyom üzeride bulunma aksiyomu olarak bilinir.

(1) Verilen iki noktayı içeren birtek doğru vardır.

(2) Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathcal{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

Bu özelikler nokta ve doğrularla ilgilidir. Her iki geometrinin nokta ve doğruları aynı olduğundan bu iki aksiyom $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi için de sağlanır.

Bunları izleyen dört aksiyom uzaklık fonksiyonunun *pozitif tanımlı*, *simetrik* olduğunu ve *üçgen eşitsizliğini* sağladığını gösterir. d_E için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir:

(3) Her sıralı A, B nokta ikilisi için d_E, negatif olmayan $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca, $d_E(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

(4) $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dır.

(5) $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir.

(6) Verilen bir l doğrusu için l den $\mathbb{R}$ ye, l üzerindeki her A, B noktası için $|f(A) - f(B)| = d_E(A, B)$ özelliğinde bire-bir ve örten bir f fonksiyonu vardır (Bu aksiyom cetvel aksiyomu olarak adlandırılır.).

Bu dört aksiyom $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi için de sağlanır:

(3) Her sıralı A, B nokta ikilisi için $d_M(A, B) \geq 0$ dır. Ayrıca, $d_M(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

(4) $d_M(A, B) = d_M(B, A)$ dir.

(5) $d_M(A, B) + d_M(B, C) \geq d_M(A, C)$ dir.

(6) Verilen bir l doğrusu için l den $\mathbb{R}$ ye, l üzerindeki her A, B noktası için

$|f(A) - f(B)| = d_E(A, B)$ özelliğinde bire-bir ve örten bir

$$f_M(x, y) = \begin{cases} y \ , & x = a \quad \text{ise} \\ x \ , & |m| < 1 \quad \text{ise} \\ |m|x \ , & |m| \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu vardır.Her A, B noktası için $|f_M(A) - f_M(B)| = d_M(A, B)$ dır.

Arada Olma

Herhangi bir geometride d uzaklık fonksiyonu olmak üzere arada olmanın tanımı aşağıdaki gibidir:

P, A ile B nin arasındadır $\Leftrightarrow$ A, P, B belli noktalar olmak üzere,

$i)$ $d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)$ dir.

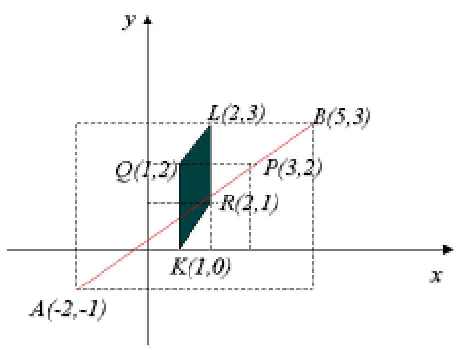
$ii)$ A, P, B doğrudaştır.

Bu durum kısaca $A - P - B$ şeklinde gösterilir.

Öklidyen geometride iki noktanın arasındaki noktalar bu iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindedir. Bu ise P, A, B noktalarının doğrusal olduğu anlamına gelir. Yani, Öklidyen geometride bu iki koşuldan birinin sağlanması yeterlidir.

d_M metrik geometri için arada olmayı tanımlamadan önce aşağıdaki örneğe göz atalım:

Örnek 2.2.1. Aşağıdaki şekili inceleyelim:



Şekil 2.2.1

$d_M(A,B) = 7$ dir. K, L, Q, P noktaları için
$d_M(A,K) + d_M(K,B) = 7 = d_M(A,B)$
$d_M(A,Q) + d_M(Q,B) = 7 = d_M(A,B)$
$d_M(A,R) + d_M(R,B) = 7 = d_M(A,B)$
$d_M(A,P) + d_M(P,B) = 7 = d_M(A,B)$ elde edilir. Bu noktalardan sadece P noktası A ve B noktaları ile doğrudaştır. Bu örnekten de görüldüğü gibi, $d_M(A,P) + d_M(P,B) = d_M(A,B)$ iken P, A, B doğrudaş olmayabilir. O halde d_M metrik geometride

$A - P - B \Leftrightarrow P$, A, B belirli noktalar olmak üzere,

$i)$ $d_M(A,P) + d_M(P,B) = d_M(A,B)$

$ii)$ A, P, B doğrudaş olmalıdır.

Şimdi de arada olmanın yardımıyla $\overline{AB}$ *doğru parçasını* tanımlayalım.

$\overline{AB}$ *doğru parçası,* A ile B noktalarını birleştiren doğrunun A ve B noktaları ile bu noktaların arasında kalan kısımdır. Yani,

$$\overline{AB} = \{P \in \mathcal{P} \mid A - P - B \text{ veya } P = A \text{ veya } P = B\}$$

dir. Doğru parçasının yardımıyla *konveksliği* tanımlayalım. K bir küme olsun. Her $A, B \in K$ için $\overline{AB} \in K$ oluyorsa, K kümesi *konvekstir* denir.

İzleyen aksiyom "*düzlem ayırma*" aksiyomu olarak bilinir.

(7) l, verilen bir doğru, H_1 ve H_2 de $\mathcal{P}$ nin alt kümeleri olmak üzere,

(i) H_1 ve H_2 konvekstir

(ii) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - l$ ($\mathcal{P}$ den l nin atılması demektir.)

(iii) $A \in H_1$, $B \in H_2$ ise $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ olur.

Öklidyen geometrideki doğru parçası ile d_M-metrik geometrideki doğru parçası *aynıdır.* Çünki d_M metrik geometride arada olmanın gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart P, A ile B nin Öklid arasındadır. Yani, her iki anlamda da P nin A ile B arasında olması doğru parçasını ifade eder. Doğru parçası her iki geometride aynı olduğundan konvekslik de her iki geometride aynıdır. Bu nedenle de $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi düzlem ayırma aksiyomunu sağlıyor. Yani,

(7) l, verilen bir doğru, H_1 ve H_2 de $\mathcal{P}$ nin yarı-düzlem şeklinde iki alt kümesi olmak üzere,

(i) H_1 ve H_2 konvekstir

(ii) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - l$ ($\mathcal{P}$ den l nin atılması demektir.)

(iii) $A \in H_1$, $B \in H_2$ ise $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ olur.

Diğer aksiyomlara geçmeden önce $\overrightarrow{AB}$ *ışınını* ve $\angle ABC$ *açısını* tanımlayalım. Arada olmanın terimlerini kullanarak $\overrightarrow{AB}$ ışınını tanımlayalım: $\overrightarrow{AB}$ ışınını, A başlngıç noktası olmak üzere B noktası yönündeki tüm noktaların birleşimidir. Daha açık bir şekilde ifade edersek,

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P \in \mathcal{P} \mid A - B - P\} \quad \text{dir.}$$

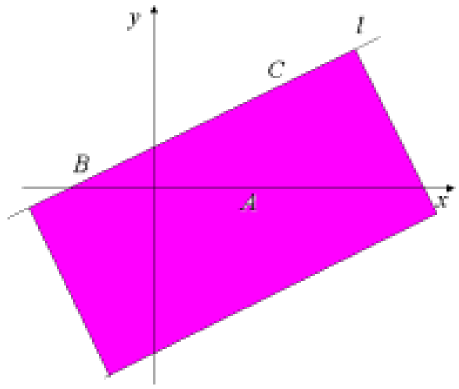
Işını nokta ve arada olmanın tanımlarını kullanarak tanımladık. Bu kavramlar hem Öklid geometri hem de d_M-metrk geometri için aynı anlam ifade ettiğinden, ışın kavramı da aynı anlama gelir.

Işın tanımını kullanarak $\angle ABC$ açısını tanımlayalım. B ve A noktalarını birleştiren $\overrightarrow{BA}$ ışını ile B ve C noktalarını birleştiren $\overrightarrow{BC}$ ışınını düşünelim. Her iki ışın B başlangıç noktasına sahiptir. Bu iki ışının birleşim kümesine açı, ışınlar arasında kalan bölgenin derece, grad veya radyan cinsinden değerine *açının* ölçüsü denir. Yani, $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ dir.

Işın tanımını kullanarak açıları tanımladık. Her iki geometride ışınlar aynı anlam ifade ettiğinden, iki ışın arasındaki bölge de aynı olmalıdır. O halde her Öklid açısı ile d_M-metrik geometrideki açı aynıdır.

Her iki geometri için,

$A \notin \overleftrightarrow{BC}$ ise "$\overleftrightarrow{BC}$ doğrusu ve A noktası bir *yarı-düzlem* belirtir" ifadesinin ne anlama geldiğini inceleyelim. Öklid geometrisi için $A \notin \overleftrightarrow{BC}$, yani A noktası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusu üzerinde olmasın. Doğrunun düzlemi ikiye ayırdığını biliyoruz. Ayrıca Öklid düzleminde bir doğru ve bu doğru üzerinde olmayan bir nokta düzlem belirtiyordu (Sekil 2.2.2). $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusu ve A noktası bu tanımı sağladığından bir yarı-düzlem belirtir. d_M-metrik geometrinin nokta ve doğrusu, Öklid geometrinin nokta ve doğrusu ile aynı olduğundan bu nokta ve doğrunun belirttiği yarı-düzlem de aynıdır.



Şekil 2.2.2

Yarı- düzlemin tanımını kullanarak $\angle ABC$ açısınının *iç bölgesini* tanımlayalım. Bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta yarı-düzlem belirtiyor. Buna göre birbirine paralel olmayan iki doğru ve bu doğrular üzerinde olmayan iki nokta aldığımızda, her bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta bir yarı-düzlem belirtecektir. Bu yarı- düzlemlerin doğruları paralel olmadığından mutlaka bir noktada kesişirler. Bu doğrular kesiştiğinde dört tane açı oluşuyor. Bu açılarnın birinde düzlemsel bölge bulunmaz. Bu bölgeye *açının iç bölgesi* denir. Ayrıca, yarı-düzlem her iki geometride aynı olduğundan açının iç bölgesi de aynı olur.

Şimdi vereceğimiz "dört açı-ölçme aksiyomu " bir bütün oluşturur.

(8) m, her açı için 0 ile 180 arasında değişen bir gerçel sayı belirtir.

(9) H yarı-düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile180 arasında herhangi bir r gerçel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\left(\angle PAB\right) = r$ olacak şekilde birtek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

(10) Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise

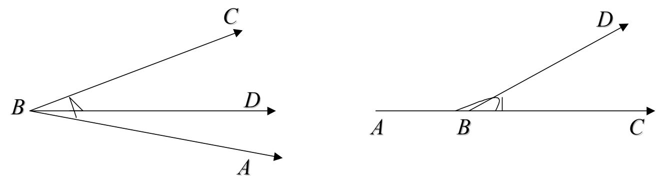
$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC)$$

olur.

(11) Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overline{AC}$ ise

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = 180^{\circ}$$

olur (Şekil 2.2.3).



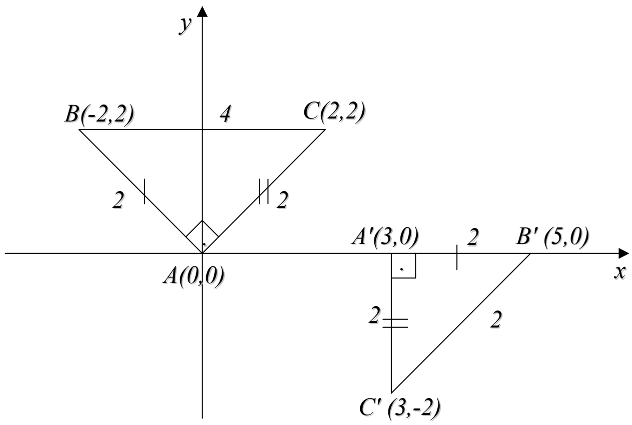
Şekil 2.2.3

Bu aksiyomlar $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_E, m\}$ sistemi için sağlandığından $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi için de sağlanır. Çünki, kullandığımız bütün kavramlar her iki geometri için de aynıdır.

Şimdi $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi için "*kenar-açı-kenar*" aksiyomuna bakalım:

(12) ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri ve $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ bu üçgenlerin köşe noktaları arasında birebir bir eşleme olsun. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve bu kenarlar arasında kalan açı, ikinci üçgenin uygun kenarlarına ve bu kenarlar aralarındaki açıya eş ise bu eşleme bir *eşliktir* denir. Bu aksiyom d_M-metrik geometrisi için sağlanmaz. Bunu görebilmek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 2.2.2. Şekilde verilen üçgenleri ele alalım (Şekil 2.2.4):



Şekil 2.2.4

$d_M(A,B) = 2$, $d_M(A^{\text{ı}},B^{\text{ı}}) = 2 \Longrightarrow d_M(A,B) = d_M(A^{\text{ı}},B^{\text{ı}})$

$d_M(A,C) = 2$, $d_M(A^{\text{ı}},C^{\text{ı}}) = 2 \Longrightarrow d_M(A,C) = d_M(A^{\text{ı}},C^{\text{ı}})$

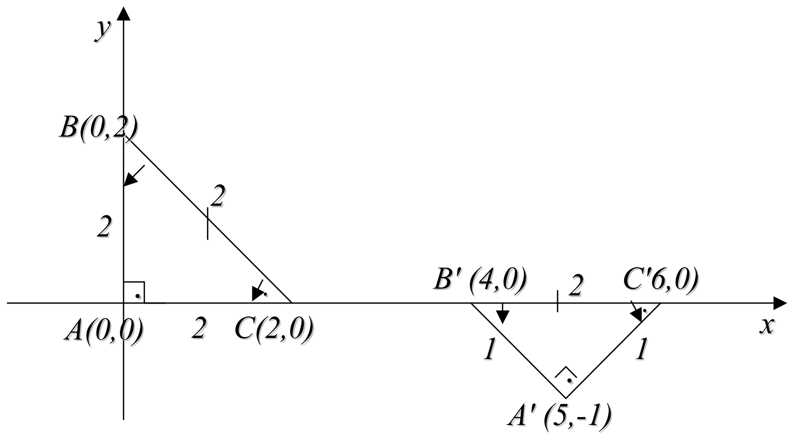
Açıların ölçüsünü belitmek için bu noktalardan geçen doğru denklemlerini kullanalım. $A = (0,0)$, $B = (-2,2)$ noktalarından geçen doğru $y = -x$, $A = (0,0)$, $C = (2,2)$ noktalarından geçen doğru $y = x$ dir. A açısı bu iki doğru arasındaki açıdır ve $m(A) = 90^\circ$ olduğu açıktır. $A \leftrightarrow A^{\text{ı}}$, $B \leftrightarrow B^{\text{ı}}$ ve $C \leftrightarrow C^{\text{ı}}$, $\blacktriangle ABC$ ile $\blacktriangle A^{\text{ı}}B^{\text{ı}}C^{\text{ı}}$ üçgenleri arasında birebir eşleme olsun. Şekildeki iki üçgen arasında kenar-açı-kenar aksiyomunun sağlanıp sağlanmadığına bakacağız.

$\blacktriangle ABC \cong \blacktriangle ABC$ midir?

$d_M(A,B) = d_M(A^{\text{ı}},B^{\text{ı}})$, $d_M(A,C) = d_M(A^{\text{ı}},C^{\text{ı}})$ ve $m(A) = m(A^{\text{ı}})$ dır, fakat $\blacktriangle ABC \cong \blacktriangle A^{\text{ı}}B^{\text{ı}}C^{\text{ı}}$ değildir. Çünki bu eşlemenin bir eşlik olabilmesi için üçgenlerin tüm uygun kenarları ve açıları kendi aralarında eşit olmak zorundadır. $d_M(B,C) = 4$, $d_M(B^{\text{ı}},C^{\text{ı}}) = 2$ olduğundan $d_M(B,C) \neq d_M(B^{\text{ı}},C^{\text{ı}})$ dir. Dolayısıyla kenar-açı-kenar aksiyomu sağlanmaz.

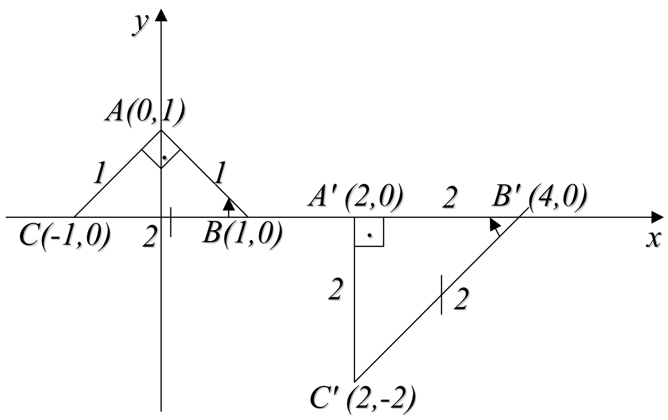
Aşağıdaki örneklerde *açı-kenar-açı, kenar-açı-açı* ve *kenar-kenar-kenar* özeliklerinin sağlanmadığı kolaylıkla görülebilir.

Örnek 2.2.3. Şekilde verilen üçgenler için *açı-kenar-açı* özeliğinin sağlanmadığını gösterir (Şekil 2.2.5):



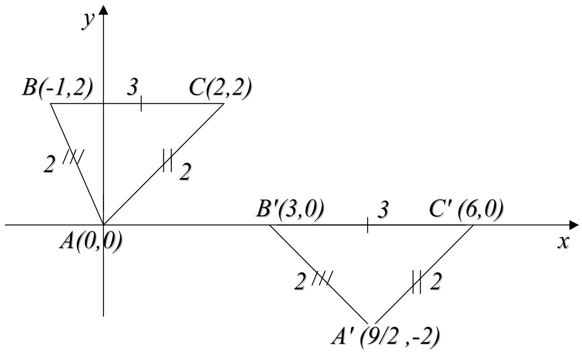
Şekil 2.2.5

Örnek 2.2.4. Şekilde verilen üçgenler için *kenar-açı-açı* özeliğini sağlamaz (Şekil 2.2.6):



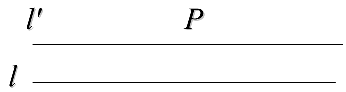
Şekil 2.2.6

Örnek 2.2.5. Şekilde verilen üçgenler *kenar-kenar-kenar* özeliğini sağlamaz (Şekil 2.2.7):



Şekil 2.2.7

(13) l doğrusu üzerinde olmayan bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan birtek doğru vardır (Şekil 2.2.8).



Şekil 2.2.8

Bu aksiyom $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi için sağlanır. Çünkü, nokta ve doğru kavramı her iki geometri için de aynıdır.

Böylece, $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d_M, m\}$ sistemi *eşlik* aksiyomu *hariç* tüm öklid aksiyomlarını sağlıyor.

2.3 Öklidyen Uzaklık ile Maksimum Uzaklık Arasındaki Fonksiyonel İlişki

Teorem 2.3.1. l, analitik düzlemde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen bir doğru olsun. l nin eğimi m ise

$$d_M(A, B) = \rho(m)\ d_E(A, B), \quad \rho(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| < 1 \ \text{ ise}, \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| \geq 1 \ \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: Eğer l, x-eksenine paralel ise $m = 0$ ve $\rho(m) = 1$, y-eksenine paralel ise $|m| \to \infty$ ve $\lim_{m\to\infty} \rho(m) = 1$ olur. Bu durumda $d_M(A,B) = d_E(A,B)$ dir. l doğrusu x ve y-eksenine paralel olmasın. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ olmak üzere A ve B den geçen doğru $ax + by + c = 0$ olsun. O halde $A = \left(x_1, -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}\right)$ ve $B = \left(x_2, -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b}\right)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d_M(A,B) &= max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\
&= max\left\{|x_1 - x_2|, |\left(-\tfrac{a}{b}x_1 - \tfrac{c}{b}\right) - \left(-\tfrac{a}{b}x_2 - \tfrac{c}{b}\right)|\right\} \\
&= max\left\{|x_1 - x_2|, |-\tfrac{a}{b}x_1 - \tfrac{c}{b} + \tfrac{a}{b}x_2 + \tfrac{c}{b}|\right\} \\
&= max\left\{|x_1 - x_2|, \left|-\tfrac{a}{b}(x_1 - x_2)\right|\right\} \\
&= max\left\{|x_1 - x_2|, |-\tfrac{a}{b}||x_1 - x_2|\right\} = |x_1 - x_2|\, max\left\{1, |\tfrac{a}{b}|\right\}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$d_E(A,B) = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

bulunur. O halde,

$$\frac{d_M(A,B)}{d_E(A,B)} = \frac{|x_1 - x_2| \ max\left\{1, |\dfrac{a}{b}|\right\}}{|x_1 - x_2|\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^2}} = \frac{max\left\{1, |\dfrac{a}{b}|\right\}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^2}}$$

elde edilir. Buradan da,

$$d_M(A,B) = \frac{max\left\{1, |\dfrac{a}{b}|\right\}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^2}} d_E(A,B)$$

bağıntısı bulunur.

$-\dfrac{a}{b} = m$ olduğunu biliyoruz.O halde yukarıdaki bağıntı şöyle ifade edilebilir:

$$d_M(A,B) = \frac{max\{1, |m|\}}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(A,B)$$

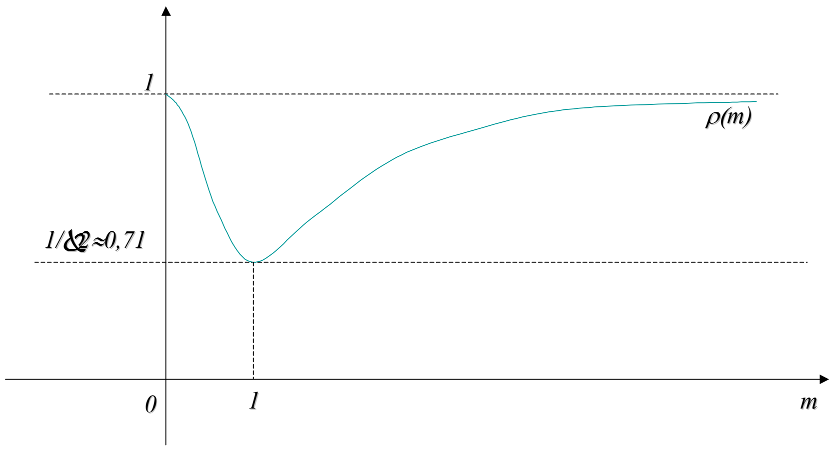
Bu bağıntıdan görüldüğü gibi, d_M-uzaklığı aynı doğru boyunca öklidyen uzaklılta pozitif bir sabitin çarpımına eşittir. Bu sabiti $\rho(m)$ ile gösterelim.

$$\rho(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| < 1 \ \text{ ise,} \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| \geq 1 \ \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_M(A,B) = \rho(m) \ d_E(A,B)$$

elde edilir. Ayrıca $\rho(m)$ çift fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığındaki grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3.1

2.4 Bazı Öklidyen Teoremlerin Maksimum Düzlemdeki Karşılıkları

Şimdiye kadar, Kartezyen düzlemde d_E metriği yerine d_M-metriği kullanılarak d_M-metrik geometri kısmen geliştirildi. Bunun için d_E-uzaklığı yerine d_M-uzaklığı kullanıldı. Bu nedenle *Öklid geometrisindeki uzaklık kavramının kapsadığı konular bu geometride ne ölçüde geçerli kalır ?* sorusu önem kazanmaktadır. Bunlardan bölme noktası, yönlü doğrular, yönlü doğruların oranları, Menelaus Teoremi, Ceva Teoremi ve yönlü doğrularla ilgili teoremlerin

Taksi düzlem geometride geçerliliği Özcan -Kaya [14] de gösterilmektedir. Burada aynı konu M-düzlemi için cevaplanacaktır.

d_E ve d_M arasındaki fonksiyonel ilişkiyi kullanarak bu sorulara cevap arayalım.

Yönlü Maksimum Uzunluklar ve Bölme Noktası

X ve Y noktaları l yönlü doğrusu üzerinde herhangi iki nokta olmak üzere Öklidyen düzlemde yönlü uzunluklar

$$d_E[X,Y] = \begin{cases} d_E(X,Y)\ , & \overline{XY} \text{ ve } l \text{ aynı yönde ise,} \\ -d_E(X,Y)\ , & \overline{XY} \text{ ve } l \text{ ters yönde ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştı [14]. Buna benzer yolla $\overline{XY}$ doğru parçası için yönlü d_M uzunluklarını

$$d_M[XY] = \begin{cases} d_M(X,Y)\ , & \overline{XY} \text{ ve } l \text{ aynı yönde ise,} \\ -d_M(X,Y)\ , & \overline{XY} \text{ ve } l \text{ ters yönde ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım . $d_M[XY] = -d_M[YX]$ dir.

Eğer A, B ve C noktaları aynı yönlü doğru üzerinde ve C noktası A ve B nin arasında ise bu $A - C - B$ şeklinde gösterilir. Bu durumda C, $\overline{AB}$ doğru parçasını böler ve oluşan yönlü maksimum uzunlukların oranı pozitif sayıdır. Yani,

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \lambda\ , \quad \lambda > 0$$

dır. Eğer C noktası $\overline{AB}$ doğru parçasını *dıştan* bölüyorsa,

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \lambda\ , \quad \lambda < 0$$

olur. $\overline{AC}$ ve $\overline{CA}$ doğru parçaları ters yönlüdür. Her iki durumda da C ye *bölme noktası* denir. Yani C noktası $\overline{AB}$ doğru parçasını λ oranında böler.

$C \neq B$, $C = A \Longleftrightarrow \lambda = 0$

C ve $C^{\shortmid}$ noktaları $\overline{AB}$ doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan aynı oranda ve ters yönde bölen iki nokta olsun. Bu durumda yönlü doğruların oranı aynı pozitif λ sayısına eşittir. Yani, aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\frac{d_M\,[AC]}{d_M\,[CB]} = -\frac{d_M\,[AC^{\shortmid}]}{d_M\,[C^{\shortmid}B]}$$

Teorem 2.4.1. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde iki nokta olsun. $Q = (x, y)$ noktası P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru üzerinde bir nokta ise

$$\frac{d_M\,[P_1Q]}{d_M\,[QP_2]} = \frac{d_E\,[P_1Q]}{d_E\,[QP_2]}$$

dir.

İspat: P_1, P_2 noktalarından geçen doğru x veya y-eksenine paralel ise $d_M\,(P_1, P_2) = d_E\,(P_1, P_2)$, dolayısıyla oranlar eşittir. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ve P_1, P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. Teorem 2.3.1 e göre

$$\begin{aligned}
d_E\,[P_1Q] &= d_E\,(P_1,Q) = |x_1 - x|\,\sqrt{1+m^2}, \\
d_E\,[QP_2] &= d_E\,(Q, P_2) = |x - x_2|\,\sqrt{1+m^2}, \\
d_M\,[P_1Q] &= d_M\,(P_1,Q) = |x_1 - x|\,max\,\{1, |m|\}\,, \\
d_M\,[QP_2] &= d_M\,(Q, P_2) = |x - x_2|\,max\,\{1, |m|\}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\frac{d_E\,[P_1Q]}{d_E\,[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|\,\sqrt{1+m^2}}{|x - x_2|\,\sqrt{1+m^2}} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

olduğu açıktır. $|m| < 1$ ise $max\,\{1, |m|\} = 1$ olduğundan $d_M\,[P_1Q] = |x_1 - x|$ ve $d_M\,[QP_2] = |x - x_2|$ olur. Bu durumda

$$\frac{d_M\,[P_1Q]}{d_M\,[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

elde edilir. Benzer şekilde $|m| \geq 1$ ise $max\,\{1, |m|\} = |m|$ olduğundan

$$\frac{d_M\,[P_1Q]}{d_M\,[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

olur. Böylece her iki durumda da oranlar eşittir.

Yardımcı teorem 2.4.1. $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$, $M-$düzleminde farklı iki nokta olsun. $Q = (x, y)$ noktası P_1P_2 doğru parçasını λ oranında bölüyorsa, aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ \lambda \in R,\ \lambda \neq -1$$

Ispat: $\lambda \neq 0, -1$ ise $Q = (x, y)$ noktası P_1P_2 doğru parçasını λ oranında böler, yani,

$$\frac{d_M\left[P_1Q\right]}{d_M\left[QP_2\right]} = |\lambda|$$

dir. O halde

$$\frac{max\left\{|x_1 - x|, |y_1 - y|\right\}}{max\left\{|x - x_2|, |y - y_2|\right\}} = |\lambda|$$

olur. $P_1 \neq P_2$ olduğundan

$$|\lambda| = |\lambda|\ \frac{max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\}}{max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\}} = \frac{max\left\{|\lambda x_1 - \lambda x_2|, |\lambda y_1 - \lambda y_2|\right\}}{max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\}}$$

$$= \frac{max\left\{|\lambda x_1 + x_1 - x_1 - \lambda x_2|, |\lambda y_1 + y_1 - y_1 - \lambda y_2|\right\}}{max\left\{|x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_2 - x_2|, |y_1 + \lambda y_2 - \lambda y_2 - y_2|\right\}}$$

$$= \frac{max\left\{\left|\frac{x_1(1+\lambda) - (x_1 + \lambda x_2)}{1+\lambda}\right|, \left|\frac{y_1(1+\lambda) - (y_1 + \lambda y_2)}{1+\lambda}\right|\right\}}{max\left\{\left|\frac{x_1 + \lambda x_2 - x_2(1+\lambda)}{1+\lambda}\right|, \left|\frac{y_1 + \lambda y_2 - y_2(1+\lambda)}{1+\lambda}\right|\right\}}$$

$$= \frac{max\left\{\left|x_1 - \frac{(x_1 + \lambda x_2)}{1+\lambda}\right|, \left|y_1 - \frac{(y_1 + \lambda y_2)}{1+\lambda}\right|\right\}}{max\left\{\left|\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} - x_2\right|, \left|\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} - y_2\right|\right\}}$$

elde edilir. $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ ve $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ olarak alınır ve yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa,

$$|\lambda| = \frac{max\left\{|x_1 - x|, |y_1 - y|\right\}}{max\left\{|x - x_2|, |y - y_2|\right\}}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

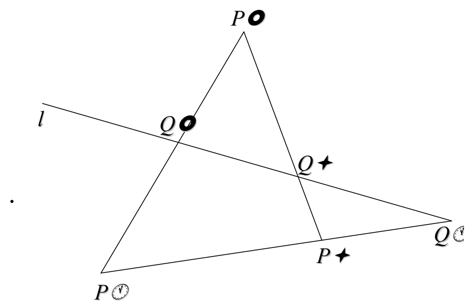
Öklid Düzlemindeki Bazı Teoremlerin M-Düzlemindeki Benzerleri

Bölme oranı kavramının Teorem 2.4.1. deki özelliği gereğince, Öklidyen Düzlemde önemli olarak bilinen aşağıdaki dört teoremin $M-$düzleminde de geçerli olduklarını hemen söyleyebiliriz:

Teorem 2.4.2. (Menelaus Teoremi) $M-$düzleminde $\{P_1, P_2, P_3\}$ bir üçgen ve Q_1, Q_2, Q_3 de sırasıyla P_1P_2, P_2P_3 ve P_3P_1 kenarları üzerinde bulunan noktalar olsun. Q_1, Q_2, Q_3 doğrudaş ise,

$$\frac{d_M[P_1Q_1]}{d_M[Q_1P_2]}.\frac{d_M[P_2Q_2]}{d_M[Q_2P_3]}.\frac{d_M[P_3Q_3]}{d_M[Q_3P_1]} = -1$$

dir (Burada Q_1, Q_2, Q_3 noktaları P_1, P_2, P_3 noktalarından farklıdır. (Şekil 2.4.1)).



Şekil 2.4.1

Teorem 2.4.3. (Menelaus Teoreminin Tersi) $M-$düzleminde $\{P_1, P_2, P_3\}$ bir üçgen ve Q_1, Q_2, Q_3 de sırasıyla P_1P_2, P_2P_3 ve P_3P_1 kenarları üzerinde bulunan noktalar olsun. Eğer

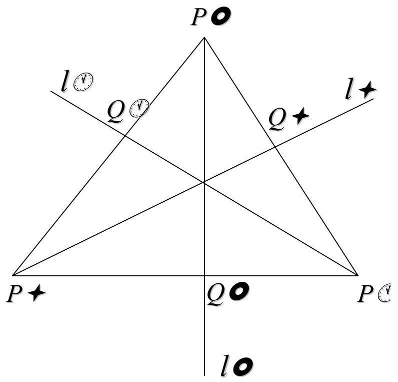
$$\frac{d_M[P_1Q_1]}{d_M[Q_1P_2]}.\frac{d_M[P_2Q_2]}{d_M[Q_2P_3]}.\frac{d_M[P_3Q_3]}{d_M[Q_3P_1]} = -1$$

ise Q_1, Q_2, Q_3 doğrudaştır (Burada Q_1, Q_2, Q_3 noktaları P_1, P_2, P_3 noktalarından farklıdır).

Teorem 2.4.4. (Ceva Teoremi) $M-$düzleminde $\{P_1, P_2, P_3\}$ bir üçgen ve P_1, P_2, P_3 köşelerinden geçen ve karşılarındakı kenarları sırasıyla Q_1, Q_2, Q_3 noktalarında kesen l_1, l_2, l_3 doğruları verilsin. l_1, l_2, l_3 doğrularının aynı noktada kesişmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{d_M\left[P_1Q_3\right]}{d_M\left[Q_3P_2\right]}.\frac{d_M\left[P_2Q_1\right]}{d_M\left[Q_1P_3\right]}.\frac{d_M\left[P_3Q_2\right]}{d_M\left[Q_2P_1\right]}=1$$

olmasıdır (Burada Q_1, Q_2, Q_3 noktalarının herbiri P_1, P_2, P_3 noktalarından farklıdır Şekil 2.4.2).



Şekil 2.4.2

Yönlü Doğru Teoremleri: (Strahlensatze)

Eşlik aksiyomunun ve bunun sonucunda üçgenlerde benzerlik özeliklerinin $M-$düzleminde geçerli olmadığını biliyoruz. Fakat aşağıdaki teoremler bu düzlemde sağlanıyor.

Teorem 2.4.5. $M-$ düzleminde paralel doğrular ailesi ile kesişen bir doğru demeti verilsin.

i) Doğru demetine ait yöndeş doğru parçalarının uzunlukları oranı aynıdır (Şekil 2.4.3).

$$\begin{aligned} d_M\left[SA\right]:d_M\left[SB\right]:d_M\left[SC\right] &= d_M\left[SA_1\right]:d_M\left[SB_1\right]:d_M\left[SC_1\right] \\ &= d_M\left[SA_2\right]:d_M\left[SB_2\right]:d_M\left[SC_2\right] \quad , \end{aligned}$$

$$d_M\left[SA_1\right]:d_M\left[SB_1\right]=d_M\left[A_1A_2\right]:d_M\left[B_1B_2\right]$$

dir.

ii) Paralel doğrular üzerindeki yönlü doğru parçaları ve doğru demetine ait yöndeş doğru parçalarının köşelerden olan uzaklık oranları aynıdır (Şekil 2.4.3).

$$\begin{aligned} d_M[CB] : d_M[C_1B_1] : d_M[C_2B_2] &= d_M[SC] : d_M[SC_1] : d_M[SC_2] \\ &= d_M[SB] : d_M[SB_1] : d_M[SB_2] \end{aligned}$$

veya

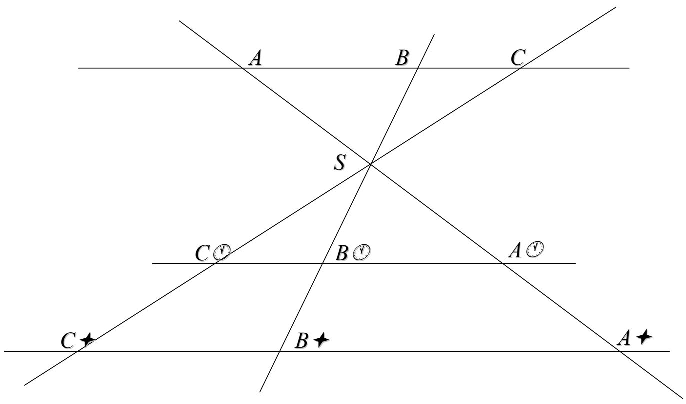
$$\begin{aligned} d_M[AB] : d_M[A_1B_1] : d_M[A_2B_2] &= d_M[SA] : d_M[SA_1] : d_M[SA_2] \\ &= d_M[SB] : d_M[SB_1] : d_M[SB_2] \end{aligned}$$

dir.

iii) Paralel doğrular üzerindeki yöndeş doğru parçalarının uzunlukları oranı aynıdır (Şekil 2.4.3).

$$d_M[AB] : d_M[BC] = d_M[A_1B_1] : d_M[B_1C_1] = d_M[A_2B_2] : d_M[B_2C_2]$$

dir. Burada, $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$ dir.



Şekil 2.4.3

M-Düzleminde Pisagor Teoremi

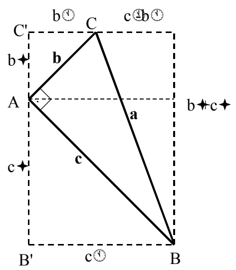
Öklidyen düzlemde ABC dik üçgeninde, $a = d(B,C)$, $b = d(A,C)$, $c = d(A,B)$ ve BC hipotenüs olmak üzere $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı *Pisagor* *teoremi* olarak bilinir. $M-$düzleminde verilen herhangi bir dik üçgenin hipotenüsü ile dik kenarları arasında buna benzer bir bağıntı vardır.

Teorem 2.4.6. M-düzleminde **a** hipotenüs uzunluğu, **b** ve **c** dik kenarların uzunlukları; m_a, m_b, m_c de sırasıyla hipotenüsün ve uzunluğu **b** ile **c** olan dik kenarların eğimleri ise, **a** uzunluğu aşağıdaki gibidir:

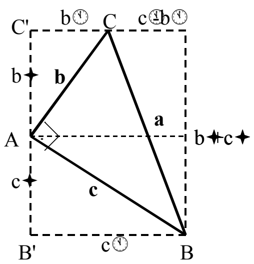
$$\mathbf{a}=\begin{cases}\mathbf{b}+\mathbf{c} & , \quad |m_c|=1 \ , \quad |m_a|\neq 1, \\ \mathbf{b}+|m_c|\,\mathbf{c} & , \quad |m_c|<1 \ , \quad |m_a|\geq 1 \ , \\ \mathbf{b}-|m_c|^{-1}\mathbf{c} & , \quad |m_c|>1 \ , \quad |m_a|\leq 1 \ , \\ \mathbf{c}+|m_c|^{-1}\mathbf{b} & , \quad |m_c|>1 \ , \quad |m_a|\geq 1 \ , \\ \mathbf{c}-|m_c|\,\mathbf{b} & , \quad |m_c|<1 \ , \quad |m_a|\leq 1 \ , \end{cases}$$

İspat:

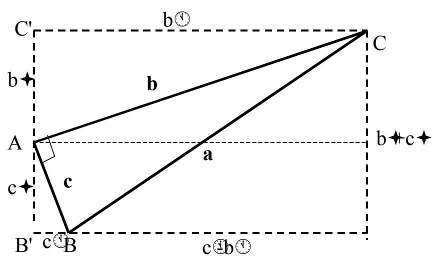
$B^{'}$: B noktasının A dan geçen y-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,
$C^{'}$: C noktasının A dan geçen y-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,
$d_E(C,C^{'})=b_1$, $d_E(A,C^{'})=b_2$, $d_E(B,B^{'})=c_1$, $d_E(A,B^{'})=c_2$, olsun. Bu durumda, $\mathbf{b}=max\{d_M(A,C^{'}),d_M(C,C^{'})\}$, $\mathbf{c}=max\{d_M(A,B^{'}),d_M(B,B^{'})\}$ dir. Aşağıdaki durumları inceleyelim:



Şekil 2.4.4 (i)



Şekil 2.4.4 (ii)



Şekil 2.4.4 (iii)

I durum: $|m_c|=1$ olsun. O halde $|m_b|=1$ dir. Doğal olarak $|m_a|\neq 1$ dir. Şekil 2.4.4 (i) incelenirse,
$\mathbf{b}=max\{b_1,b_2\}$ olduğu görülür. $|m_b|=1$ olduğundan $\mathbf{b}=b_1=b_2$ dir. Benzer şekilde $\mathbf{c}=c_1=c_2$ olur.

$$\mathbf{a}=max\{|c_1-b_1|,|c_2+b_2|\}$$

olduğu açıktır. $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ olduğundan $|m_a| \neq 1$ olduğu tüm durumlarda $|c_1 - b_1| < c_2 + b_2$ ve $\mathbf{a} = |c_2 + b_2| = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ dir. Sonuç olarak , $|m_c| = 1$ iken $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ olur.

II durum: $|m_c| < 1$ olsun. O halde $|m_b| > 1$ dir. Şekil 2.4.4 (ii) yi inceleyelim: $|m_b| > 1$ olduğundan $\mathbf{b} = b_2$ ve $|m_c| < 1$ olduğundan $\mathbf{c} = c_1$ dir.

$$\mathbf{a} = max\{|c_1 - b_1|, |c_2 + b_2|\}$$

olduğu açıktır. O halde,

$|m_a| \geq 1$ iken $\mathbf{a} = c_2 + b_2 = |m_c| c_1 + b_2 = \mathbf{b} + |m_c| \mathbf{c}$ ve

$|m_a| \leq 1$ iken $\mathbf{a} = |c_1 - b_1| = c_1 - |m_c| b_2 = \mathbf{c} - |m_c| \mathbf{b}$ elde edilir.

III durum: $|m_c| > 1$ olsun. O halde $|m_b| < 1$ dir (Şekil 2.4.4 (iii))
II duruma benzer ispat yapılarak, $|m_a| \geq 1$ iken $\mathbf{a} = |m_c| \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ve $|m_a| \leq 1$ iken $\mathbf{a} = \mathbf{b} - |m_c| \mathbf{c}$ elde edilir.

M- Düzleminde Stewart Teoremi

Öklid düzleminde ABC herhangi bir üçgen ve $X \in [BC]$ verildiğinde,
$a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$, $p = d(B, X)$, $q = d(C, X)$,
$x = d(A, X)$ olmak üzere

$$x^2 = \frac{b^2 p + c^2 q}{p + q} - pq$$

bağıntısı *Stewart Teoremi* olarak bilinmektedir. Aşağıdaki teorem , bu teoremin $M-$düzlemindeki karşılığını ifade etmektedir.

Teorem 2.4.7. $M-$düzleminde herhangi bir ABC üçgeni verilsin. $\mathbf{a} = d_M(B, C)$, $\mathbf{b} = d_M(A, C)$, $\mathbf{c} = d_M(A, B)$, m_b ve m_c de sırasıyla AC ve AB kenarının eğimi olsun. $X \in [BC]$ ve $\mathbf{p} = d_M(B, X)$, $\mathbf{q} = d_M(C, X)$, olmak üzere $\mathbf{x} = d_M(A, X)$ uzunluğu aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{x}=\begin{cases} max\left\{\dfrac{\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\dfrac{\left|\alpha\mathbf{bp}-\beta\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}, & \alpha=\left|m_b\right|<1\ ,\ m_b>0 \\ & \text{ve }\ \beta=\left|m_c\right|<1\ \text{ ise,} \\ max\left\{\dfrac{\alpha\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\dfrac{\left|\mathbf{bp}-\beta\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}, & \alpha=\left|m_b\right|^{-1}\leq 1\ ,\ m_b>0 \\ & \text{ve }\ \beta=\left|m_c\right|<1\text{ ise,} \\ max\left\{\dfrac{\alpha\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\dfrac{\left|\mathbf{bp}-\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}, & \alpha=\left|m_b\right|^{-1}\leq 1\ ,\ m_b>0 \\ & \text{ve }\beta=\left|m_c\right|^{-1}\leq 1\text{ ise,} \\ max\left\{\dfrac{\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\dfrac{\alpha\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}, & \alpha=\left|m_b\right|<1\ \ ,\ m_b>0 \\ & \text{ve }\ \beta=\left|m_c\right|^{-1}\leq 1\text{ ise,} \\ max\left\{\dfrac{\left|\alpha\mathbf{bp}-\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\dfrac{\left|\mathbf{bp}-\beta\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}, & \alpha=\left|m_b\right|^{-1}\leq 1\ ,\ m_b<0 \\ & \text{ve }\beta=\left|m_c\right|<1\text{ ise,} \\ max\left\{\dfrac{\left|\alpha\mathbf{bp}-\beta\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\dfrac{\left|\mathbf{bp}-\mathbf{cq}\right|}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}, & \alpha=\left|m_b\right|^{-1}\leq 1\ ,\ m_b<0 \\ & \text{ve }\beta=\left|m_c\right|^{-1}\leq 1\text{ ise} \end{cases}$$

İspat:

$B^{'}$: B noktasının A dan geçen y-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$C^{'}$: C noktasının A dan geçen x-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

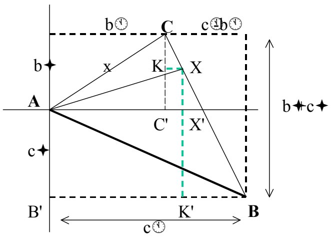
$X^{'}$: X noktasının A dan geçen x-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

K: X noktasının $CC^{'}$doğrusuna dik izdüşümü,

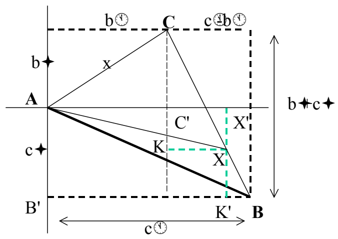
$K^{'}$: X noktasının $BB^{'}$doğrusuna dik izdüşümü

ve $d_E\left(A,C^{'}\right)=b_1$, $d_E\left(C,C^{'}\right)=b_2$, $d_E\left(A,B^{'}\right)=c_2$, $d_E\left(B,B^{'}\right)=c_1$ olsun. Bu durumda $\mathbf{b}=max\left\{d_M\left(A,C^{'}\right),d_M\left(C,C^{'}\right)\right\}$, $\mathbf{c}=max\left\{d_M\left(A,B^{'}\right),d_M\left(B,B^{'}\right)\right\}$, $\mathbf{x}=max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right),d_M\left(X,X^{'}\right)\right\}$ dir. Aşağıdaki durumlar sözkonusudur:

I Durum:



Şekil 2.4.5 (i)



Şekil 2.4.5 (ii)

i) ABC üçgeninde $|m_b| < 1$, $|m_c| < 1$ ve AX doğrusu pozitif eğimli olsun

(Şekil 2.4.5 (i)). Bu durumda $\mathbf{b} = b_1$ ve $\mathbf{c} = c_1$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M\left(A,C^{'}\right) + d_M(X,K),\ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(X,K^{'}\right) - d_M\left(A,B^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = b_1 + \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + b_1\mathbf{q} + c_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X,X^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\alpha\mathbf{bp} - \beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

ii) ABC üçgeninde $|m_b| < 1$, $|m_c| < 1$ ve AX doğrusu negatif eğimli olsun (Şekil 2.4.5 (ii)). Bu durumda $\mathbf{b} = b_1$ ve $\mathbf{c} = c_1$ olur.Yönlü doğru

Teoreminden (Teorem 2.4.5) $\mathbf{p} = d_M(X,B)$ ve $\mathbf{q} = d_M(C,X)$ olmak üzere

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M\left(A,C^{'}\right) + d_M(X,K),\ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(A,B^{'}\right) - d_M\left(X,K^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = b_1 + \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + b_1\mathbf{q} + c_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

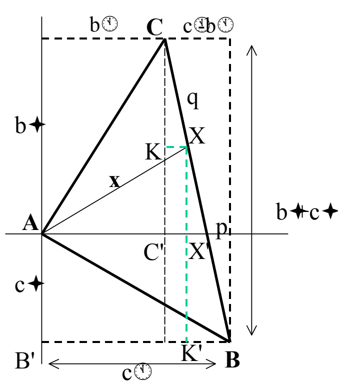
$$d_M\left(X,X^{'}\right) = c_2 - \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{c_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{q} - b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alırsak, buradan

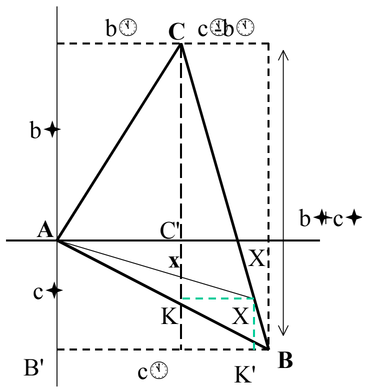
$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{-\alpha\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

II Durum:



Şekil 2.4.6 (i)



Şekil 2.4.6 (ii)

i) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| < 1$ ve AX doğrusu pozitif eğimli olsun (Şekil 2.4.6 (i)). Bu durumda $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_1$ olur.

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right),\ d_M\left(X,X^{'}\right)\right\},$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M\left(A,C^{'}\right) + d_M(X,K),\ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(X,K^{'}\right) - d_M\left(A,B^{'}\right)$$

olduğu açıktır. Yönlü doğru Teoreminden (Teorem 2.4.5) $\mathbf{p} = d_M(X, B)$ ve $\mathbf{q} = d_M(C, X)$ olmak üzere

$$d_M(X, K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}, \; d_M\left(X, K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

dir. O halde

$$d_M(A, X^{'}) = b_1 + \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + b_1\mathbf{q} + c_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}},$$

$$d_M(X, X^{'}) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olur. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak,

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A, X^{'}\right), d_M\left(X, X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\alpha\mathbf{bp} + \mathbf{cq}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}, \frac{\mathbf{bp} - \beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}\right\}$$

dir.

ii) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| < 1$ ve AX doğrusu negatif eğimli olsun (Şekil 2.4.5 (ii)). Bu durumda $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_1$ olur.

$$d_M(X, K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}, \quad d_M(X, K^{'}) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}},$$

$$d_M(A, X^{'}) = d_M(A, C^{'}) + d_M(X, K), \; d_M(X, X^{'}) = d_M\left(A, B^{'}\right) - d_M(X, K^{'})$$

olduğundan

$$d_M(A, X^{'}) = b_1 + \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + b_1\mathbf{q} + c_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}},$$

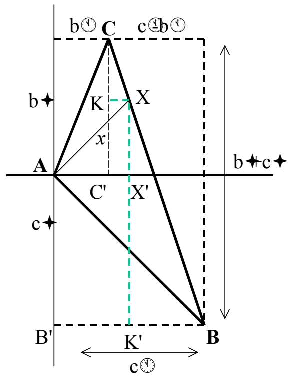
$$d_M(X, X^{'}) = c_2 - \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{c_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{q} - b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{-b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak

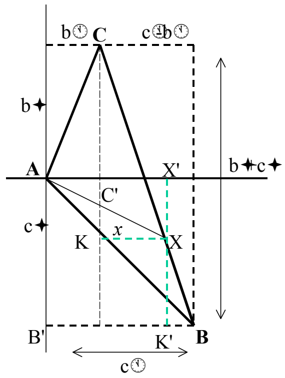
$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A, X^{'}\right), d_M\left(X, X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\alpha\mathbf{bp} + \mathbf{cq}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}, \frac{-\mathbf{bp} + \beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}\right\}$$

elde edilir.

III durum:



Şekil 2.4.7 (i)



Şekil 2.4.7 (ii)

i) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| \geq 1$ ve AX doğrusu pozitif eğimli olsun (Şekil 2.4.7 (i)). Bu durumda $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_2$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\; d_M(X,K') = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} ,$$

$$d_M(A,X') = d_M(A,C') + d_M(X,K),\; d_M(X,X') = d_M(X,K')$$

olduğundan

$$d_M(A,X') = b_1 + \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + b_1\mathbf{q} + c_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M(X,X') = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|^{-1}$ olarak alalım. Buradan

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X'\right), d_M\left(X,X'\right)\right\} = max\left\{\frac{\alpha\mathbf{b}\mathbf{p} + \beta\mathbf{c}\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} - \mathbf{c}\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

elde edilir.

ii) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| \geq 1$ ve AX doğrusu negatif eğimli olsun (Şekil 2.4.7 (ii)). Bu durumda $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_2$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M(X,K^{'}) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M(A,X^{'}) = d_M(A,C^{'}) + d_M(X,K),\ d_M(X,X^{'}) = d_M\left(A,B^{'}\right) - d_M(X,K^{'})$$

olduğundan

$$d_M(A,X^{'}) = b_1 + \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + b_1\mathbf{q} + c_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} + c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

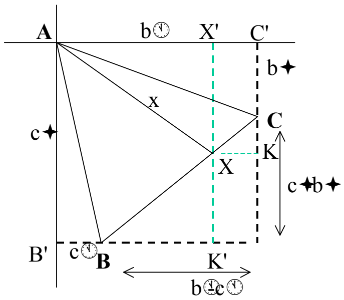
$$d_M(X,X^{'}) = c_2 - \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{c_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{q} - b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|^{-1}$ olarak alalım. Sonuç olarak,

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\alpha\mathbf{bp} + \beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{-\mathbf{bp} + \mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

VI durum: ABC üçgeninde $|m_b| < 1$, $|m_c| \geq 1$ ve AX doğrusu negatif eğimli olsun(Şekil 2.4.8).



Şekil 2.4.8

Bu durumda $\mathbf{b} = b_1$ ve $\mathbf{c} = c_2$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(c_1 - b_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2 + c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M\left(A,C^{'}\right) - d_M(X,K), d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(A,B^{'}\right) - d_M\left(X,K^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = b_1 - \frac{\mathbf{q}\left(b_1-c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p}+b_1\mathbf{q}-b_1\mathbf{q}+c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p}+c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

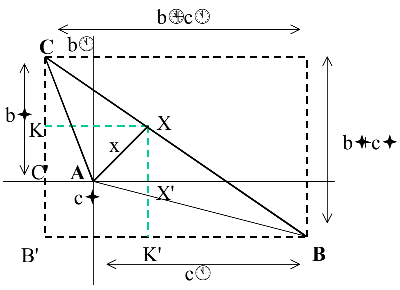
$$d_M\left(X,X^{'}\right) = c_2 - \frac{\mathbf{p}\left(c_2-b_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{c_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}-c_2\mathbf{p}+b_2\mathbf{p}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|^{-1}$ olarak alalım. Sonuç olarak

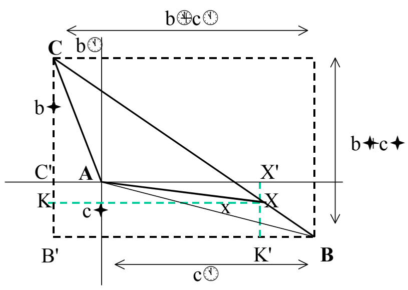
$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\alpha\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

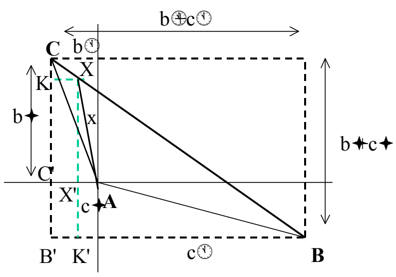
V durum:



Şekil 2.4.9 (i)



Şekil 2.4.9 (ii)



Şekil 2.4.9 (iii)

i) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| < 1$, A geniş açı ve AX doğrusu pozitif eğimli olsun (Şekil 2.4.9 (i)). $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_1$ olur.

$$d_M\left(X,K\right) = \frac{\mathbf{q}\left(b_1+c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}\left(b_2+c_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M\left(X,K\right) - d_M\left(A,C^{'}\right),\ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(X,K^{'}\right) - d_M\left(A,B^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A, X^{'}\right) = \frac{\mathbf{q}\left(b_1+c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - b_1 = \frac{b_1\mathbf{q}+c_1\mathbf{q}-b_1\mathbf{p}-b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_1\mathbf{p}+c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X, X^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}\left(b_2+c_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A, X^{'}\right), d_M\left(X, X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{-\alpha\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\mathbf{bp}-\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

ii) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| < 1$, $m_b < 0$, AX negatif eğimli ve yataysal doğru olsun (Şekil 2.4.9 (ii)). $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_1$ dir.

$$d_M\left(X, K\right) = \frac{\mathbf{q}\left(b_1+c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X, K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}\left(b_2+c_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A, X^{'}\right) = d_M\left(X, K\right) - d_M\left(A, C^{'}\right),\ d_M\left(X, X^{'}\right) = d_M\left(A, B^{'}\right) - d_M\left(X, K^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A, X^{'}\right) = \frac{\mathbf{q}\left(b_1+c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - b_1 = \frac{c_1\mathbf{q}+b_1\mathbf{q}-b_1\mathbf{p}-b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_1\mathbf{p}+c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X, X^{'}\right) = c_2 - \frac{\mathbf{p}\left(b_2+c_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{c_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}-b_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{p}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

olur. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A, X^{'}\right), d_M\left(X, X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{-\alpha\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{-\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

iii) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| < 1$, $m_b < 0$, AX negatif eğimli ve dikeysel doğru olsun (Şekil 2.4.9 (iii)). $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_1$ dir.

$$d_M\left(X, K\right) = \frac{\mathbf{q}\left(b_1+c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X, K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}\left(b_2+c_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A, X^{'}\right) = d_M\left(A, C^{'}\right) - d_M\left(X, K\right),\ d_M\left(X, X^{'}\right) = d_M\left(X, K^{'}\right) - d_M\left(A, B^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A, X^{'}\right) = b_1 - \frac{\mathbf{q}\left(b_1 + c_1\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{q} + b_1\mathbf{q} - b_1\mathbf{q} - c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p} - c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X, X^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}\left(b_2 + c_2\right)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p} + c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p} - c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

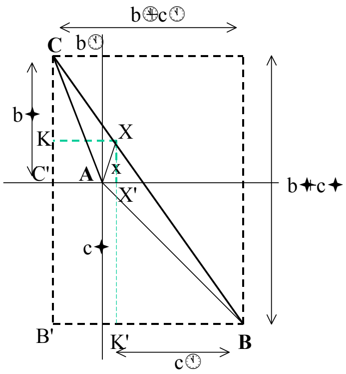
dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Buradan

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A, X^{'}\right), d_M\left(X, X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\alpha\mathbf{bp} - \mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\mathbf{bp} - \beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

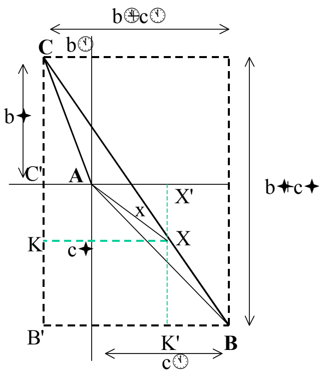
olur.

VI durum:

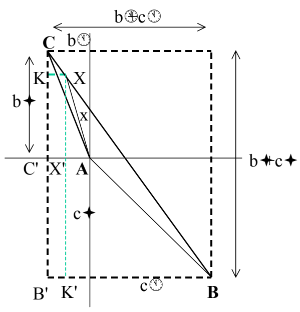
:



Şekil 2.4.10 (i)



Şekil 2.4.10 (ii)



Şekil 2.4.10 (iii)

i) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| \geq 1$,$m_b < 0$, AX pozitif eğimli doğru olsun (Şekil 2.4.10 (i)). $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_2$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(b_1+c_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2+c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M(X,K) - d_M\left(A,C^{'}\right),\ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(X,K^{'}\right) - d_M\left(A,B^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = \frac{\mathbf{q}(b_1+c_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - b_1 = \frac{b_1\mathbf{q}+c_1\mathbf{q}-b_1\mathbf{p}-b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_1\mathbf{p}+c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X,X^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2+c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{-\alpha\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\mathbf{bp}-\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur.

ii) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| \geq 1$,$m_b < 0$, AX negatif eğimli ve yataysal doğru olsun (Şekil 2.4.10 (ii)). $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_2$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(b_1+c_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},\ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2+c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M(X,K) - d_M\left(A,C^{'}\right),\ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(A,B^{'}\right) - d_M\left(X,K^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = \frac{\mathbf{q}(b_1+c_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - b_1 = \frac{c_1\mathbf{q}+b_1\mathbf{q}-b_1\mathbf{p}-b_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_1\mathbf{p}+c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X,X^{'}\right) = c_2 - \frac{\mathbf{p}(b_2+c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{c_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}-b_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{p}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{-b_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Bu durumda

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{-\alpha\mathbf{bp}+\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{-\mathbf{bp}+\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

elde edilir.

iii) ABC üçgeninde $|m_b| \geq 1$, $|m_c| \geq 1$, $m_b < 0$, AX negatif eğimli ve dikeysel doğru olsun (Şekil 2.4.10 (iii)). $\mathbf{b} = b_2$ ve $\mathbf{c} = c_2$ olur.

$$d_M(X,K) = \frac{\mathbf{q}(b_1+c_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \ d_M\left(X,K^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2+c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = d_M\left(A,C^{'}\right) - d_M(X,K), \ d_M\left(X,X^{'}\right) = d_M\left(X,K^{'}\right) - d_M\left(A,B^{'}\right)$$

olduğundan

$$d_M\left(A,X^{'}\right) = b_1 - \frac{\mathbf{q}(b_1+c_1)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{q}+b_1\mathbf{q}-b_1\mathbf{q}-c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_1\mathbf{p}-c_1\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

$$d_M\left(X,X^{'}\right) = \frac{\mathbf{p}(b_2+c_2)}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - c_2 = \frac{b_2\mathbf{p}+c_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{b_2\mathbf{p}-c_2\mathbf{q}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

dir. $\alpha = |m_b|^{-1}$ ve $\beta = |m_c|$ olarak alalım. Sonuç olarak

$$\mathbf{x} = max\left\{d_M\left(A,X^{'}\right), d_M\left(X,X^{'}\right)\right\} = max\left\{\frac{\alpha\mathbf{bp}-\beta\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \frac{\mathbf{bp}-\mathbf{cq}}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\right\}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

M- Düzleminde Kenarortay Teoremi

Öklid düzleminde ABC herhangi bir üçgen ve $K \in [BC]$, BC kenarının orta noktası olmak üzere ; $a = d(B,C)$, $b = d(A,C)$, $c = d(A,B)$, $V_a = d(A,K)$ ise, aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \ .$$

Bu bağıntı *Kenarortay Teoremi* olarak biliniyor.

$M-$düzleminde verilen herhangi bir üçgen için bu teoremin karşılığı yazılabilir. Aşağıdaki teorem Kenarortay Teoreminin $M-$düzlemindeki ifadesini verir.

Teorem 2.4.8. $M-$düzleminde herhangi bir ABC üçgeni verilsin. $\mathbf{a} = d_M(B,C)$, $\mathbf{b} = d_M(A,C)$, $\mathbf{c} = d_M(A,B)$, m_b ve m_c de sırasıyla AC ve AB kenarlarının eğimleri olsun. BC kenarına ait kenarortay uzunluğu V_a ve BC kenarının orta noktası K olmak üzere $\mathbf{V}_a = d_M(A,K)$ uzunluğu şöyledir:

$$2\mathbf{V}_a = \begin{cases} max\{\mathbf{b}+\mathbf{c}, |\alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{c}|\} \ , & \alpha = |m_b| < 1 \ , \quad m_b > 0 \\ & \text{ve} \ \ \beta = |m_c| < 1 \ \ \text{ise,} \\ max\{\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c} \ , |\mathbf{b} - \beta\mathbf{c}|\} \ , & \alpha = |m_b|^{-1} \leq 1 \ , \ m_b > 0 \\ & \text{ve} \ \ \beta = |m_c| < 1 \ \text{ise,} \\ max\{\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c} \ , |\mathbf{b} - \mathbf{c}|\} \ , & \alpha = |m_b|^{-1} \leq 1 \ , \ m_b > 0 \\ & \text{ve} \ \beta = |m_c|^{-1} \leq 1 \ \text{ise,} \\ max\{\mathbf{b}+\beta\mathbf{c} \ , \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}\} \ , & \alpha = |m_b| < 1 \ , \quad m_b > 0 \\ & \text{ve} \ \ \beta = |m_c|^{-1} \leq 1 \ \text{ise} \\ max\{|\alpha\mathbf{b} - \mathbf{c}| \ , |\mathbf{b} - \beta\mathbf{c}|\} \ , & \alpha = |m_b|^{-1} \leq 1 \ , \ m_b < 0 \\ & \text{ve} \ \ \beta = |m_c| < 1 \ \text{ise,} \\ max\{|\alpha\mathbf{b} - \beta\mathbf{c}| \ , |\mathbf{b} - \mathbf{c}|\} \ , & \alpha = |m_b|^{-1} \leq 1 \ , \ m_b < 0 \\ & \text{ve} \ \beta = |m_c|^{-1} \leq 1 \ \text{ise} \end{cases}$$

İspat: Stewart Teoreminde $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ alınması yeterli olacaktır.

Bir Üçgenin Alanının d_M Cinsinden Hesaplanması

Öklid düzleminde bir üçgenin taban kenarının uzunluğu b ve bu kenara ait yüksekliğin uzunluğu da h olmak üzere üçgenin alanının

$$\mathbf{A} = \frac{bh}{2}$$

formülü ile hesaplandığı iyi biliniyor. Aşağıdaki teoremde $M-$düzleminde bir üçgenin alanını d_M-uzaklığı cinsinden veriyoruz. Burada Kaya [7] de izlenen yöntemle d_E ve d_M arasındaki ilişki kullanılmaktadır.

Teorem 2.4.9. $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{h}$, $\mathbb{R}^2_M$ de sırasıyla verilen üçgenin taban kenarının uzunluğu ve bu kenara ait yüksekliğin uzunluğu olsun. Tabanın eğimi m ise, bu durumda üçgenin alanı

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{bh/2}\ , & m = 0 \text{ veya } m \to \infty \text{ ise },\\ \dfrac{1+m^2}{2m^2}\,\mathbf{bh}\ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

formülü ile hesaplanır.

İspat: b, h ve $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}$ sırasıyla üçgenin tabanının ve yüksekliğinin Öklidyen ve maksimum uzaklıkları olsun. Eğer üçgenin tabanı x-eksenine paralel ise $m = 0$ olduğundan ve $\rho(m) = 1$ dir. Benzer şekilde, üçgenin tabanı y-eksenine paralel ise $\rho(m) = 1$ olur (Teorem 2.3.1). Dolayısıyla, bu iki özel durumda $\mathbf{A} = bh/2$ olur. Üçgenin tabanı koordinat eksenlerinden herhangi birine paralel olmasın. Bu durumda tabanın eğimi m ise yüksekliğin eğimi $-\frac{1}{m}$ olur. $b = \dfrac{1}{\rho(m)}\mathbf{b}$, $h = \dfrac{1}{\rho(-\frac{1}{m})}\mathbf{h}$ olur. Bu değerleri alan formülünde kullanırsak

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2\rho(m)\rho(-\frac{1}{m})}\ \mathbf{bh} = \frac{1+m^2}{2m^2}\ \mathbf{bh}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

M-Düzleminde Bir Üçgenin Alanı ve Heron Formülünün Karşılığı

Öklid düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin alanını hesaplamak için farklı yöntemler olduğunu biliyoruz. Bu yöntemlerden biri de üçgenin kenar uzunlukları ve çevresinin uzunluğunun yarısı yardımıyla alanın hesaplanmasıdır. Yani, $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$ ve $p = (a + b + c)/2$ olmak üzere

$$\mathbf{A}^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

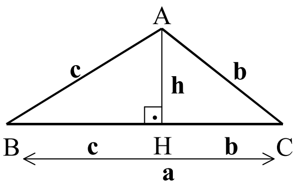
dir. Bu formül Heron Formülü olarak bilinmektedir. Bu kısımda $M-$düzlemindeki herhangi bir ABC üçgeninin alanının kenar uzunlukları ve kenarları oluşturan doğruların eğimleri yardımıyla hesaplaması için formül verilecektir.Ayrıca M. Özcan ve R. Kaya [15] de izlenen yöntemle Heron Formülünün $M-$düzlemindeki karşılığı incelenecektir. Bu iki formül birbiriyle bağlantılı olduğundan dolayı beraber ele alınacaktır.

$M-$düzleminde herhangi bir ABC üçgeni verilsin. $\mathbf{a} = d_M(B, C)$, $\mathbf{b} = d_M(A, C)$, $\mathbf{c} = d_M(A, B)$, m_a, m_b ve m_c de sırasıyla BC, AC ve AB kenarlarınının eğimleri olsun. $\mathbf{p} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/2$ üçgenin çevresinin $M-$uzunluğunun yarısı olmak üzere ABC üçgeninin alanını bulalım. Aşağıdaki önermeler $M-$ düzleminde Heron Formülünün bazı özel durumlarını ifade etmektedir.

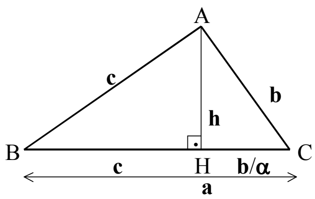
Önerme 2.4.1. ABC üçgeninin BC kenarı x-eksenine paralel , B ve C açıları da dar açı olsun. $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı aşağıdaki gibidir:

$$
\mathbf{A}=\begin{cases}
\frac{1}{2}\mathbf{ab}\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{ac}\beta=\frac{1}{2}\mathbf{pb}\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{pc}\beta & , \quad |m_b|<1\ ,\ |m_c|<1 \text{ ise,}\\[2ex]
\frac{1}{2}\mathbf{ab}=\dfrac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\,\mathbf{a}\alpha}{\alpha+1} & , \quad |m_b|\geq 1\ ,\ |m_c|<1 \text{ ise,}\\[2ex]
\frac{1}{2}\mathbf{ac}=\dfrac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})\,\mathbf{a}\beta}{\beta+1} & , \quad |m_b|<1\ ,\ |m_c|\geq 1 \text{ ise,}\\[2ex]
\frac{1}{2}\mathbf{ab}=\frac{1}{2}\mathbf{ac}=\dfrac{\mathbf{a}\alpha\left(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}\left(\beta+1\right)\right)}{2\beta\left(\alpha+1\right)} & , \quad |m_b|\geq 1\ ,\ |m_c|\geq 1 \text{ ise}
\end{cases}
$$

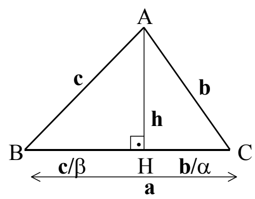
İspat:



Şekil 2.4.11 (i)



Şekil 2.4.11 (ii)



Şekil 2.4.11 (iii)

i) $|m_b|<1$ ve $|m_c|<1$ olsun (Şekil 2.4.11 (i)). **A=ah/**2 olduğu biliniyor. **h** nın değerini bulalım. Şekilden görüldüğü gibi $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$ ve $\mathbf{h}=\mathbf{b}\,|m_b|=\mathbf{c}\,|m_c|$ dir. O halde $\alpha=|m_b|$ *ve* $\boldsymbol{\beta}=|m_c|$ olduğundan $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{ab}\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{ac}\beta$ olur. $\mathbf{p}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}=\dfrac{2\mathbf{a}}{2}=\mathbf{a}$ olduğundan yukarıdaki formülde **a** nin yerine **p** yazarsak,

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{pb}\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{pc}\beta$$

elde edilir.

ii) $|m_b|\geq 1$ ve $|m_c|<1$ olsun (Şekil 2.4.11 (ii)). $\mathbf{a}=\mathbf{b}/\,|m_b|+\mathbf{c}$ ve $\mathbf{h}=\mathbf{b}$ dir. O halde $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{ab}$ olur.

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}=\frac{\mathbf{b}/\,|m_b|+\mathbf{c}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}=\frac{2\mathbf{c}+\mathbf{b}\left(1+1/\,|m_b|\right)}{2}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \dfrac{2(\mathbf{p}-\mathbf{c})|m_b|}{|m_b|+1}$ olarak bulunur. Yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\,\mathbf{a}\,|m_b|}{|m_b|+1} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\,\mathbf{a}\alpha}{\alpha+1}$$

olur.

iii) $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun. **ii**) ye benzer şekilde yapılır.

iv) $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun (Şekil 2.4.11 (iii)). Şekilden görüldüğü gibi $\mathbf{a} = \mathbf{b}/|m_b| + \mathbf{c}/|m_c|$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ dir. O halde $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{ac}$ olur.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}/|m_b| + \mathbf{c}/|m_c| + \mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}(1+1/|m_c|) + \mathbf{b}(1+1/|m_b|)}{2}$$

olduğundan,

$$\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}(|m_c|+1))\,|m_b|}{(|m_b|+1)\,|m_c|}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\,|m_b|\,(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}(|m_c|+1))}{2\,|m_c|\,(|m_b|+1)} = \frac{\mathbf{a}\alpha\,(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta+1))}{2\beta(\alpha+1)}$$

olur. Benzer şekilde $\mathbf{c} = \dfrac{(2\mathbf{p}\,|m_b| - \mathbf{b}(|m_b|+1))\,|m_c|}{(|m_c|+1)\,|m_b|}$ ve dolayısıyla

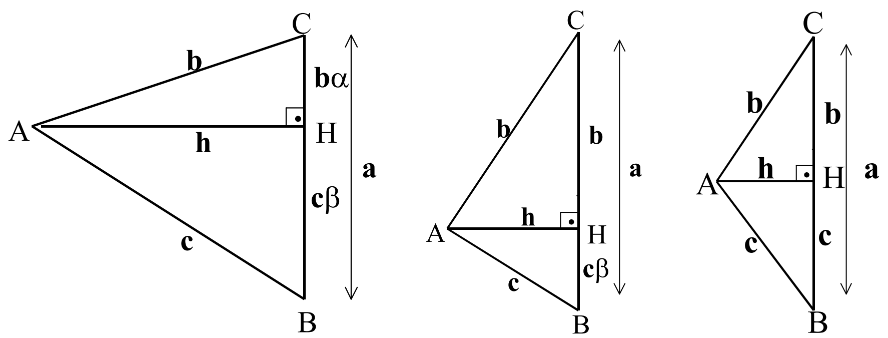
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\,|m_c|\,(2\mathbf{p}\,|m_b| - \mathbf{b}(|m_b|+1))}{2\,|m_b|\,(|m_c|+1)} = \frac{\mathbf{a}\beta\,(2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}(\alpha+1))}{2\alpha(\beta+1)}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Önerme 2.4.2. ABC üçgeninin BC kenarı y-eksenine paralel , B ve C açıları da dar açı olsun. $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı şöyledir:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{ac} = \dfrac{\mathbf{a}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{b}\left(\alpha + 1\right)\right)}{2\left(\beta + 1\right)} & , \quad |m_b| < 1\ ,\ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \\ \frac{1}{2}\mathbf{ac} = \dfrac{\mathbf{a}\left(\mathbf{p} - \mathbf{b}\right)}{\beta + 1} & , \quad |m_b| \geq 1\ ,\ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \\ \frac{1}{2}\mathbf{ab} = \dfrac{\mathbf{a}\left(\mathbf{p} - \mathbf{c}\right)}{\alpha + 1} & , \quad |m_b| < 1\ ,\ |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \\ \\ \frac{1}{2}\mathbf{ab}\alpha = \frac{1}{2}\mathbf{ac}\beta = \frac{1}{2}\mathbf{pb}\alpha = \frac{1}{2}\mathbf{pc}\beta & , \quad |m_b| \geq 1\ ,\ |m_c| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

İspat:



Şekil 2.4.12 (i)　　Şekil 2.4.12 (ii)　　Şekil 2.4.12 (iii)

i) $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ olsun (Şekil 2.4.12 (i)). $\mathbf{a} = \mathbf{b}\,|m_b| + \mathbf{c}\,|m_c|$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ dir. O halde $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{ac}$ olur.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}\,|m_b| + \mathbf{c}\,|m_c| + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}\left(1 + |m_c|\right) + \mathbf{b}\left(1 + |m_b|\right)}{2}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \dfrac{2\mathbf{p} - \mathbf{c}\left(|m_c| + 1\right)}{\left(|m_b| + 1\right)}$ olarak bulunur. Yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c}\left(|m_c| + 1\right)\right)}{2\left(|m_b| + 1\right)} = \frac{\mathbf{a}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c}\left(\beta + 1\right)\right)}{2\left(\alpha + 1\right)}$$

olur. Benzer şekilde $\mathbf{c} = \dfrac{2\mathbf{p} - \mathbf{b}\left(|m_b| + 1\right)}{\left(|m_c| + 1\right)}$ ve dolayısıyla

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{b}\left(|m_b| + 1\right)\right)}{2\left(|m_c| + 1\right)} = \frac{\mathbf{a}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{b}\left(\alpha + 1\right)\right)}{2\left(\beta + 1\right)}$$

elde edilir.

ii) $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ olsun (Şekil 2.4.12 (ii)). Şekilden görüldüğü gibi $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}\,|m_c|$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{c}$ dir. O halde $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{ac}$ olur.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}\,|m_c| + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{b} + \mathbf{c}\left(|m_c| + 1\right)}{2}$$

olduğundan $\mathbf{c} = \dfrac{2\left(\mathbf{p} - \mathbf{b}\right)}{|m_c| + 1}$ olarak bulunur. Yukarıdaki formülde $\mathbf{c}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\left(\mathbf{p} - \mathbf{c}\right)}{|m_b| + 1} = \frac{\mathbf{a}\left(\mathbf{p} - \mathbf{c}\right)}{\beta + 1}$$

olur.

iii) $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun. Bu durumde **ii**) ye benzer şekilde ispat yapılır.

iv) $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun (Şekil 2.4.12 (iii)). $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{b}\,|m_b| = \mathbf{c}\,|m_c|$ dir. O halde $\alpha = |m_b|$ *ve* $\boldsymbol{\beta} = |m_c|$ olarak alırsak, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{ab}\alpha = \frac{1}{2}\mathbf{ac}\beta$ olur.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{a}}{2} = \mathbf{a}$$

olduğundan yukarıdaki formülde **a** nin yerine **p** yazarsak

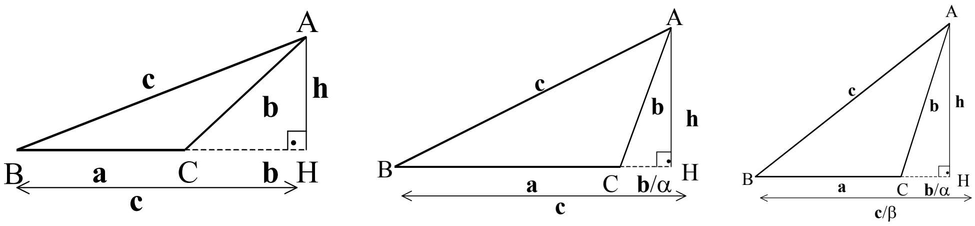
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{pb}\alpha = \frac{1}{2}\mathbf{pc}\beta$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Önerme 2.4.3. ABC üçgeninin BC kenarı x-eksenine paralel, B ve C açılarından biri geniş açı olsun. $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathbf{ab}\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{ac}\beta=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}-\mathbf{b}\right)\mathbf{b}\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}-\mathbf{b}\right)\mathbf{c}\beta & , \quad |m_b|<1\ ,\ |m_c|<1 \text{ ise,}\\ \frac{1}{2}\mathbf{ab}=\dfrac{\mathbf{a}\alpha\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}\right)}{\alpha+1} & , \quad |m_b|\geq 1\ ,\ |m_c|<1 \text{ ise,}\\ \frac{1}{2}\mathbf{ac}=\dfrac{\mathbf{a}\beta\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}\right)}{\beta+1} & , \quad |m_b|<1\ ,\ |m_c|\geq 1 \text{ ise,}\\ \frac{1}{2}\mathbf{ab}=\frac{1}{2}\mathbf{ac}=\dfrac{\mathbf{a}\beta\left(2\mathbf{p}\alpha+\mathbf{b}\left(1-\alpha\right)\right)}{2\alpha\left(\beta+1\right)} & , \quad |m_b|\geq 1\ ,\ |m_c|\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

İspat:



Şekil 2.4.13 (i) Şekil 2.4.13 (ii) Şekil 2.4.13 (iii)

i) $|m_b|<1$ ve $|m_c|<1$ olsun (Şekil 2.4.13 (i)). $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ve $\mathbf{h}=\mathbf{b}\,|m_b|=\mathbf{c}\,|m_c|$ dir. O halde $\alpha=|m_b|$ *ve* $\boldsymbol{\beta}=|m_c|$ olduğundan , $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{ab}\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{ac}\beta$ olur.

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}=\frac{2\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)}{2}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}=\mathbf{p}-\mathbf{b}\text{ dir.}$$

Yukarıdaki formülde **a** nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}-\mathbf{b}\right)\mathbf{b}\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}-\mathbf{b}\right)\mathbf{c}\beta$$

elde edilir.

ii) $|m_b|\geq 1$ ve $|m_c|<1$ olsun (Şekil 2.4.13 (ii)). $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}/\,|m_b|$ ve $\mathbf{h}=\mathbf{b}$ dir. O halde $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{ab}$ olur.

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b}/\,|m_b|}{2}=\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}\left(1+1/\,|m_b|\right)}{2}$$

olduğundan yapılan işlemler sonucunda $\mathbf{b} = \dfrac{2\,|m_b|\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{|m_b|+1}$ olarak bulunur. Bu değeri yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\,|m_b|\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{|m_b|+1} = \frac{\mathbf{a}\alpha\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{\alpha+1}$$

elde edilir.

iii) $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun. **ii**) ye benzer şekilde yapılır.

iv) $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun (Şekil 2.4.13 (iii)). $\mathbf{a} = \mathbf{c}/\,|m_c| - \mathbf{b}/\,|m_b|$ ve $\mathbf{h} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ olduğundan $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{ac}$ olur. Ayrıca

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}/\,|m_c| - \mathbf{b}/\,|m_b| + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}\,(1+1/\,|m_c|) + \mathbf{b}\,(1-1/\,|m_b|)}{2}$$

olduğundan bazı işlemler sonucunda $\mathbf{c} = \dfrac{(2\mathbf{p}\,|m_b| + \mathbf{b}\,(1-|m_b|))\,|m_c|}{(|m_c|+1)\,|m_b|}$ olarak bulunur. Yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\,|m_c|\,(2\mathbf{p}\,|m_b| + \mathbf{b}\,(1-|m_b|))}{2\,|m_b|\,(|m_c|+1)} = \frac{\mathbf{a}\beta\,(2\mathbf{p}\alpha + \mathbf{b}\,(1-\alpha))}{2\alpha\,(\beta+1)}$$

olur. Benzer şekilde $\mathbf{b} = \dfrac{(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}\,(1+|m_c|))\,|m_b|}{(|m_b|-1)\,|m_c|}$ ve dolayısıyla

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\,|m_b|\,(2\mathbf{p}\,|mc| - \mathbf{c}\,(1+|m_c|))}{2\,|m_c|\,(|m_b|-1)} = \frac{\mathbf{a}\alpha\,(2\mathbf{p}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}\,(\beta+1))}{2\beta\,(\alpha-1)}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Bir üçgenin herhangi bir köşesinde x ve y-eksenlerine paralel çizilen doğru karşı kenarı kesiyorsa temel doğru adlandırılır [15]. B köşesinin bir tane temel doğrusu olsun.

D: Temel doğrunun karşı kenarı kestiği nokta,

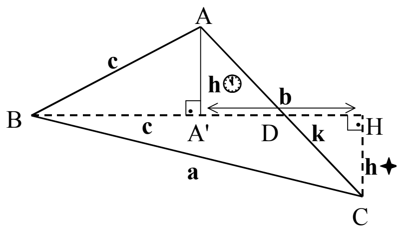
H: C noktasının temel doğruya dik izdüşümü olsun,

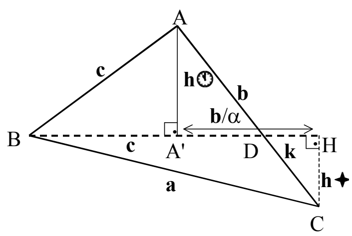
A': A noktasının temel doğruya dik izdüşümü olsun.

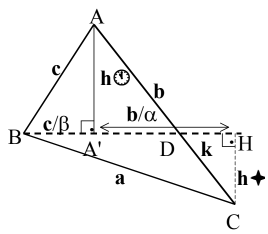
Önerme 2.4.4. ABC üçgeninin BC kenarı eksenlere paralel olmasın. $m_a < 0$ ise $\mathbf{k} = d_M(D,H)$, $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{b}\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}-\mathbf{c}\right)\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\alpha & , \quad |m_b|<1\ ,\ |m_c|<1 \text{ ise,}\\[2ex] \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{b}=\dfrac{\left(\mathbf{p}-\mathbf{c}\right)\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\alpha}{\alpha+1} & , \quad |m_b|\geq 1\ ,\ |m_c|<1 \text{ ise,}\\[2ex] \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{b}\alpha=\dfrac{\left(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}\left(\beta+1\right)\right)\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\alpha}{2\beta} & , \quad |m_b|<1\ ,\ |m_c|\geq 1 \text{ ise,}\\[2ex] \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{b}=\dfrac{\left(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}\left(\beta+1\right)\right)\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\alpha}{2\beta\left(\alpha+1\right)} & , \quad |m_b|\geq 1\ ,\ |m_c|\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

İspat:







Şekil 2.4.14 (i) Şekil 2.4.14 (ii) Şekil 2.4.14 (iii)

Yukarıda verilen şekilleri inceleyelim. $\mathbf{A}(ABC)=\mathbf{A}(ABD)+\mathbf{A}(BDC)$ olduğu açıktır. $\mathbf{A}=\mathbf{A}(ABC)$, $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}(ABD)$, $\mathbf{A}_2=\mathbf{A}(BDC)$ olsun.

$$\mathbf{A}_1=\frac{|BD|\,.\,|AA'|}{2}=\frac{\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{h}_1}{2} \quad \text{ve} \quad \mathbf{A}_2=\frac{|BD|\,.\,|HC|}{2}=\frac{\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\frac{\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{h}_1}{2}+\frac{\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{h}_2}{2}=\frac{\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2\right)}{2}$$

olarak elde edilir. Aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i) $|m_b|<1$ ve $|m_c|<1$ olsun (Şekil 2.4.14 (i)). $\mathbf{b}\,|m_b|>\mathbf{c}\,|m_c|$ olduğundan

$$\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2=\mathbf{b}\,|m_b| \quad \text{ve} \quad \mathbf{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{b}\,|m_b|=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{a}-\mathbf{k}\right)\mathbf{b}\alpha$$

dir.

$$\mathbf{a}=\mathbf{c}+\mathbf{b} \quad \text{ve} \quad \mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}=\frac{2\left(\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)}{2}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{c}$ dir. Yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{k})\,\alpha$$

elde edilir.

ii) $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ olsun (Şekil 2.4.14 (ii)). $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{b}$ olduğundan $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a} - \mathbf{k})\,\mathbf{b}$ olur. $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{b}/\,|m_b|$ ve

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}/\,|m_b| + \mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{c} + \mathbf{b}\,(1 + 1/\,|m_b|)}{2} = \frac{2\mathbf{c}\,|m_b| + \mathbf{b}\,(|m_b| + 1)}{2\,|m_b|}$$

olduğundan yapılan işlemler sonucunda

$$\mathbf{b} = \frac{2\,|m_b|\,(\mathbf{p} - \mathbf{c})}{|m_b| + 1}$$

olarak bulunur. Bu değeri yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{k})}{|m_b| + 1} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{k})\,\alpha}{\alpha + 1}$$

elde edilir.

iii) $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun. **ii**) ye benzer şekilde gösterilebilir.

iv) $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ olsun (Şekil 2.4.14 (iii)). $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{b}$ olduğundan

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a} - \mathbf{k})\,\mathbf{b}\,|m_b|$$

dir. $\mathbf{a} = \mathbf{c}/\,|m_c| + \mathbf{b}/\,|m_b|$ ve

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}/\,|m_c| + \mathbf{b}/\,|m_b| + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}\,(1 + 1/\,|m_c|) + \mathbf{b}\,(1 + 1/\,|m_b|)}{2}$$

olur. Bazı işlemler sonucunda

$$\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}\,(1 + |m_c|))\,|m_b|}{(|m_b| + 1)\,|m_c|}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki formülde $\mathbf{b}$ nin yerine bu değeri yazarsak

$$\mathbf{A} = \frac{(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}\,(|m_c| + 1))\,(\mathbf{a} - \mathbf{k})\,|m_b|}{2\,|m_c|\,(|m_b| + 1)} = \frac{(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}\,(\beta + 1))\,(\mathbf{a} - \mathbf{k})\alpha}{2\beta\,(\alpha + 1)}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Önerme 2.4.5. ABC üçgeninin BC kenarı eksenlere paralel olmasın. $m_a > 0$ ise $\mathbf{k} = d_M(D,H)$, $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{c}\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\beta \quad , & |m_b| < 1 \ , \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\[2ex] \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{c}\beta = \dfrac{(2\mathbf{p}\alpha - \mathbf{b}(\alpha+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\beta}{4\beta} \ , & |m_b| \geq 1 \ , \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\[2ex] \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{c} = \dfrac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\beta}{\beta+1} \quad , & |m_b| < 1 \ , \ |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \\[2ex] \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{c} == \dfrac{(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\alpha}{2\beta(\alpha+1)} \ , & |m_b| \geq 1 \ , \ |m_c| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

İspat: Önerme 2.4.4. e benzer şekilde ispatlanabilir.

B köşesinin iki tane temel doğrusu olsun.

Önerme 2.4.6. ABC üçgeninin BC kenarı eksenlere paralel olmasın. $m_a < 0$ ise $\mathbf{k} = d_M(D,H)$, $\alpha = |m_b|$ ve $\beta = |m_c|$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{b}\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{p}\alpha \quad , & |m_b| < 1 \ , \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{p}\alpha(\mathbf{a}-\mathbf{k})}{\alpha+1} \quad , & |m_b| \geq 1 \ , \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{b}\alpha = \dfrac{(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta-1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\alpha}{4\beta} \ , & |m_b| < 1 \ , \ |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\mathbf{b} = \dfrac{(2\mathbf{p}\beta + \mathbf{c}(1-\beta))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,\alpha}{2\beta(\alpha-1)} \ , & |m_b| \geq 1 \ , \ |m_c| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

İspat: Önerme 2.4.4. e benzer şekilde ispatlanabilir.

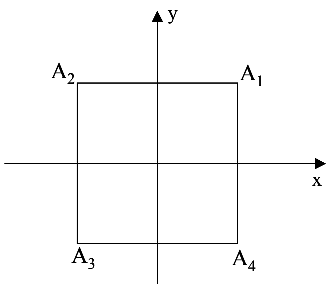
Sonuç 2.4.1. Heron Formülünün $M-$ düzlemindeki karşılığı verilen üçgenin konumuna göre 2.4.1., 2.4.2., 2.4.3., 2.4.4., 2.4.5. ve 2.4.6 nolu önermelerinden biriyle ifade edilir.

Bölüm 3

MAKSİMUM DÜZLEMİNİN İZOMETRİLER GRUBU

Bir düzlemde uzaklığı koruyan her dönüşüme bu düzlemde bir *izometri* denir.

$\mathbb{R}^2_M$ de $max\{|x|,|y|\}=1$ denklemini sağlayan (x,y) noktalarının kümesine $M-$*birim çember* denir. $\mathbb{R}^2_M$ nin birim çemberi, köşeleri $A_1=(1,1)$, $A_2=(-1,1)$, $A_3=(-1,-1)$, $A_4=(1,-1)$ noktaları olan karedir (Şekil 3.1.1).



Şekil 3.1.1

Bu kısımda $\mathbb{R}^2_M$ nin izometrileri Kaya R., Gelişgen Ö., Ekmekçi S. ve Bayar A.[10] çalışması esas alınarak incelenmekte ve izometriler grubu belirlenmekte ve $\mathbb{R}^2_M$ nin bazı özelikleri verilmektedir.

Teorem 3.1.1. Her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^2_M$ nin bir izometrisidir.

İspat: $\mathbf{T}_A$: $\mathbb{R}^2_M \to \mathbb{R}^2_M$, $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2_M$ olmak üzere $T_A(X) = A + X$, $\mathbb{R}^2_M$ de bir öteleme olsun. $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2_M$ için

$$T_A(X) = A + X = (a_1 + x_1, a_2 + y_1)$$
$$T_A(Y) = A + Y = (a_1 + x_2, a_2 + y_2)$$

olur.

$$\begin{aligned} d_M(T_A(x), T_A(y)) &= max\{|(a_1 + x_1) - (a_1 + x_2)|, |(a_2 + y_1) - (a_2 + y_2)|\} \\ &= max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = d_M(X, Y) \end{aligned}$$

Böylece, T_A izometridir. Şimdi de $\mathbb{R}^2_M$ de yansımaları bulalım.

Tanım 3.1.1. P ve l, $\mathbb{R}^2_M$ de bir nokta ve bir doğru olsun. Q, $\overline{PQ} \perp l$ olacak şekilde l nin bir noktası olsun. P' , l nin karşı tarafında ve $\overline{PQ}$ doğrusu üzerinde olmak üzere $d_M(P, Q) = d_M(P'Q)$ ise P', P nin l ye göre *yansıması* olarak adlandırılır.

Orijinden geçen bir doğruya göre yansımayı bulmamız yeterlidir. Çünki $\mathbb{R}^2_M$ de her öteleme bir izometri olduğundan öteleme yaparak tüm doğrulara göre yansımayı bulabiliriz.

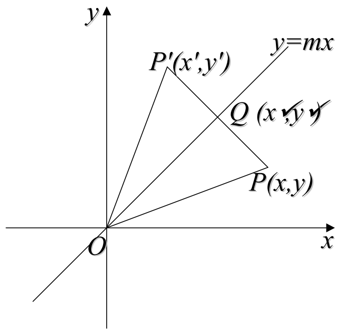
Teorem 3.1.2. $y = mx$ doğrusuna göre yansımanın $\mathbb{R}^2_M$ de izometri olması için gerek ve yeter şart

$$m \in \{0, \pm 1\} \quad \text{veya} \quad m \to \infty$$

dir.

İspat:

$$d_M(A, B) = \rho(m)\, d_E(A, B), \; \rho(m) = \begin{cases} 1 / \sqrt{1 + m^2} & , \quad |m| < 1 \text{ ise}, \\ \\ |m| / \sqrt{1 + m^2} & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$



Şekik 3.1.2

olduğunu biliyoruz. Bu bağıntıyı kullanarak teoremi ispatlayalım. $P=(x,y)$ olmak üzere φ,

$l=\{(x,y):\ y=mx\}$ doğrusuna göre Öklidyen yansıma $\varphi(P)=P^{\prime}$ olsun (Şekik 3.1.2). $P^{\prime}=(x^{\prime},y^{\prime})$ noktasının koordinatlarını bulalım. φ, Öklidyen yansıma olduğundan $\overline{PP^{\prime}}\perp l$ dir. $\overline{PP^{\prime}}\cap l=Q=(x_0,y_0)$ olsun. l nin eğimi m ve $\overline{PP^{\prime}}\perp l$ olduğundan $\overline{PQ}$ doğrusunun eğimi $-\frac{1}{m}$ olur. O halde, $\overline{PQ}$ doğrusunun denklemi $y-y_0=-\dfrac{1}{m}(x-x_0)$ olur. Buradan, $y-mx_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$ ve. $x=\dfrac{x+x^{\prime}}{2}$ olduğundan

$$y-m\left(\frac{x+x^{\prime}}{2}\right)=-\frac{1}{m}\left(x-\frac{x+x^{\prime}}{2}\right)$$

dir. Bazı işlemler sonucunda

$$x^{\prime}=\frac{(1-m^2)\,x+2my}{(1+m^2)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\overline{P^{\prime}Q}\perp l$ olduğundan $y-y^{\prime}=-\dfrac{1}{m}(x-x^{\prime})$ olur ve buradan

$$y^{\prime}=\frac{2mx+(-1+m^2)\,y}{(1+m^2)}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\varphi(P)=P^{\prime}=\left(x^{\prime},y^{\prime}\right)=\left(\frac{(1-m^2)\,x+2my}{(1+m^2)},\frac{2mx+(-1+m^2)\,y}{(1+m^2)}\right)$$

dir. φ, Öklidyen yansıma olduğundan $Q = \overline{PP^{\shortmid}} \cap l$ ve $d_E(P,Q) = d_E(P^{\shortmid},Q)$ olur. Teorem 2.4.1 den $d_M(P,Q) = d_M(P^{\shortmid},Q)$ dir. Böylece, $P^{\shortmid}$, P noktasının d_M -yansımasıdır. φ nin $\mathbb{R}^2_M$ izometri olması için gerek ve yeter koşul uzaklığın korunmasıdır. Yani, $d_M(O,P) = d_M(O,P^{\shortmid})$ olmasıdır.

$$d_M(O,P) = d_M(O,P^{\shortmid}) \Longleftrightarrow m \in \{0, \pm 1\} \text{ veya } m \to \infty$$

olduğunu iddia ediyoruz. $d_M(O,P) = d_M(O,P^{\shortmid})$ ise k bir sabit ve m_1 , m_2 de sırasıyla $\overline{OP}$ ve $\overline{OP^{\shortmid}}$ doğrularının eğimi olmak üzere $\rho(m_1) = \rho(m_2) = k$ dır. Ayrıca, P noktası $y = mx$ doğrusu üzerinde ise $P = P^{\shortmid}$ ve $m_1 = m_2 = m$ ve $\rho(m) = k$ olur. Bu durumda $\rho^{\shortmid}(m) = 0$ olacaktır. Böylece,

$$\rho^{\shortmid}(m) = \begin{cases} -\left(1+m^2\right)^{-\frac{3}{2}} , & -\infty < m < -1, \\ -m\ \left(1+m^2\right)^{-\frac{3}{2}} , & -1 < m < 0 \ , \\ -m\ \left(1+m^2\right)^{-\frac{3}{2}} , & 0 < m < 1 \ , \\ \left(1+m^2\right)^{-\frac{3}{2}} , & 1 < m < \infty \ , \\ 0 \ , & m \in \{0, \pm 1\} \text{ veya } m \to \infty \end{cases}$$

m_1 , m_2 sırasıyla, $\overline{OP}$ ve $\overline{OP^{\shortmid}}$ doğrularının eğimleri ve $P^{\shortmid} = \varphi(P)$ ise,

$$d_E(O,P) = d_E(O,P^{\shortmid})$$
$$d_M(O,P) = \rho\left(m_1\right)\, d_E(O,P)$$
$$d_M(O,P^{\shortmid}) = \rho\left(m_2\right)\, d_E(O,P^{\shortmid}) = \rho\left(m_2\right)\, d_E(O,P)$$

dir.Aşağıdaki tabloda (Tablo 3.1) $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ nin $d_M(O,P) = d_M(O,P^{\shortmid})$ anlamına geldiği tüm durumları görebiliriz.

m	-1	0	1	∞
m✦	1/m🕚	-m🕚	1/m🕚	-m🕚

Tablo 3.1

Sonuç olarak, yukarıdaki teorem tüm yansımaların d_M uzaklığını korumadığını gösterir. Böylece *izometrik yansımalarının kümesi* S_M,

$$\{x = 0,\ y = 0,\ y = \pm x\ \}$$

doğrularına göre dört Öklidyen yansımadan oluşur.

Teorem 3.1.3. d_M-uzaklığını koruyan sadece dört tane Öklidyen dönme vardır. Başka bir ifadeyle, $\mathbb{R}^2_M$ de *izometrik dönmelerin kümesi* şöyledir:

$$R_\theta = \{r(\theta) \mid \theta = k\frac{\pi}{2},\ k = 0,1,2,3\ \}$$

İspat: $\mathbb{R}^2_M$ de izometrik dönmeleri bulmak için d_M- birim çemberinin kenar uzunluğunun korunduğu dönmeleri belirlememiz yeterlidir. $A_1 = (1,1)$ ve $A_2 = (-1,1)$, $\mathbb{R}^2_M$ de birim çember üzerinde iki nokta olsun. A_1 ve A_2 noktalarını θ kadar döndürürsek,

$$\begin{aligned} r(A_1) &= (cos\ \theta, sin\ \theta) \\ r(A_2) &= (-sin\ \theta, cos\ \theta) \end{aligned}$$

olur. $d_M(A_1, A_2) = 2$ iken $d_M(r(A_1), r(A_2)) = 2$ olduğunu göstermeliyiz.

$$d_M\left((r(A_1), r(A_2)\right) = max\{|cos\ \theta + sin\ \theta|\,, |sin\ \theta - cos\ \theta|\} = 2$$

olmalıdır.

i) $|cos\ \theta + sin\ \theta| \geq |sin\ \theta - cos\ \theta|$ olsun.

$$|cos\ \theta + sin\ \theta| = 2$$

$cos\ \theta + sin\ \theta = 2$ veya $cos\ \theta + sin\ \theta = -2$

$cos\ \theta = 1$ ve $sin\ \theta = 1$ $\qquad$ $cos\ \theta = -1$ ve $sin\ \theta = -1$

$\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

ii) $|cos\ \theta + sin\ \theta| \leq |sin\ \theta - cos\ \theta|$ olsun.

$$|sin\ \theta - cos\ \theta| = 2$$

Benzer şekilde çözülerek $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ çözümleri elde edilir.

m , m' sırasıyla $\overline{OX}$ ve $\overline{OX'}$ doğrularının eğimleri olsun. Burada $X' = r_\theta(X)$ dir. Teorem 3.1.2. den $\rho(m)$ ve $\rho(m')$ nin

$d_M(O,X) = d_M(O,X^{'})$ anlamına geldiği tüm durumları aşağıdaki tabloda (Tablo 3.2) görebiliriz:

θ	0	π/2	π	3π/2
m'	m	-1/m	m	-1/m

Tablo 3.2

Teorem 3.1.1. e göre her $r_\theta \in R_\theta$ tüm d_M-uzaklıklarını korur. Böylece dört yansıma ve dört dönmeden oluşan

$$O_M(2) = R_\theta \cup S_M$$

ortogonel grubu bize D_4 *Dihedral grubunu* verir. Öyleki, bu da *karenin Öklidyen simetri grubudur.* Şimdi de $\mathbb{R}^2_M$ nin tüm izometrilerinin

$$T\,(2)\,.O_M\,(2)$$

de olduğunu görelim

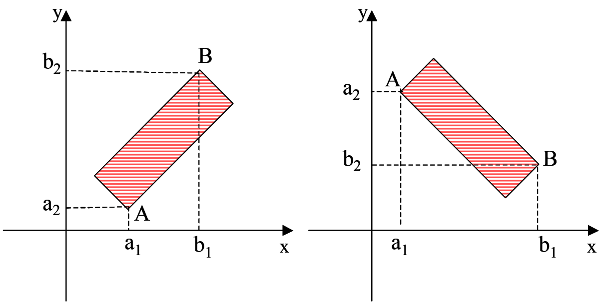
Tanım 3.1.2. $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $\mathbb{R}^2_M$ de iki nokta olsun. A dan B ye *minimum uzaklıktaki noktaların kümesi*

$$\{X \mid d_M(A,X) + d_M(X,B) = d_M(A,B)\}$$

olarak tanımlanır ve $\overset{\square}{AB}$ şeklinde gösterilir.
A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. $m = 1$ iken $\overset{\square}{AB}$, $\overline{AB}$ doğru parçasına eşittir. Yani,

$$\overset{\square}{AB} = \overline{AB}$$

dir. $m = 0$ ve $m \to \infty$ iken $\overset{\square}{AB}$, köşegeni $\overline{AB}$, kenarları ± 1 eğimli doğrular olan dikdörtkendir. $\overset{\square}{AB}$ ye, $\overline{AB}$ *köşegenli standart dikdörtgen* denir (Şekil 3.1.3).



Şekil 3.1.3

Teorem 3.1.4. $\phi : \mathbb{R}^2_M \to \mathbb{R}^2_M$ bir izometri ve $\overset{\square}{AB}$ de standart dikdörtgen olsun. Bu durumda,

$$\phi(\overset{\square}{AB}) = \overset{\square}{\phi(A)\,\phi(B)}$$

dir.

İspat: $Y \in \phi\left(\overset{\square}{AB}\right)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
Y \in \phi\left(\overset{\square}{AB}\right) &\Longleftrightarrow \exists X \in \overset{\square}{AB} \ni Y = \phi(X) \\
&\Longleftrightarrow d_M(A, X) + d_M(X, B) = d_M(A, B) \\
&\Longleftrightarrow d_M(\phi(A), \phi(X)) + d_M(\phi(X), \phi(B)) = d_M(\phi(A), \phi(B)) \\
&\Longleftrightarrow Y = \phi(X) \in \overset{\square}{\phi(A)\,\phi(B)}
\end{aligned}$$

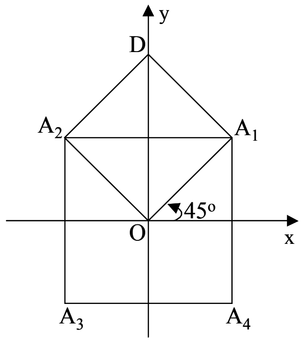
dir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Yardımcı Teorem 3.1.1. $\phi : \mathbb{R}^2_m \to \mathbb{R}^2_M$ bir izometri ve $\overset{\square}{AB}$ standart dikdörtgen olsun. Bu durumda ϕ köşe noktalarını ve $\overset{\square}{AB}$ nin çevresinin uzunluğunu korur.

Teorem 3.1.5. $f : \mathbb{R}^2_M \to \mathbb{R}^2_M$ bir izometri ve $f(O) = O$ olsun. Bu durumda, $f \in R_\theta$ veya $f \in S_m$ dir.

İspat: $A_1(1,1)$, $A_2(-1,1)$, $D(0,2)$ ve $\overset{\square}{OD}$ standart dikdörtgen olsun.

$A_3(-1,-1)$, $A_4(1,-1)$ dir.



Şekil 3.1.4

Şekil 3.1.4 den, $f(A_1) \in \overline{A_i A_{i+1}}$ olduğu açıktır. Teorem 3.1.3. den $f(A_1)$ ve $f(A_2)$ kenarları ikişer ikişer $+1$ ve -1 eğimli doğrular olan $O\overset{\square}{f}(D)$ standart dikdörtgeninin köşeleri olmalıdır. Bu nedenle, $f(A_1) \in \overline{A_i A_{\ i+1}}$ ise $f(A_1) = A_1$ veya $f(A_1) = A_{i+1}$, benzer şekilde, $f(A_2) = A_i$ veya $f(A_2) = A_{i+3}$ dir. i nin alacağı değerlere göre aşağıdaki dört durum söz konusu olur.

I durum: $i = 1$ için $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_2$ veya $f(A_2) = A_4$

1) $f(A_2) = A_2$ ise f, $\theta = 0$ açılı dönmedir.

2) $f(A_2) = A_4$ ise f, $y = x$ doğrusuna göre yansımadır.

II durum: $i = 2$ için $f(A_1) = A_2$, $f(A_2) = A_3$ veya $f(A_2) = A_1$

1) $f(A_2) = A_3$ ise f, $\theta = \pi/2$ açılı dönmedir.

2) $f(A_2) = A_1$ ise f, $x = 0$ doğrusuna göre yansımadır.

III durum: $i = 3$ için $f(A_1) = A_3$, $f(A_2) = A_4$ veya $f(A_2) = A_2$

1) $f(A_2) = A_4$ ise f, $\theta = \pi$ açılı dönmedir.

2) $f(A_2) = A_2$ ise f, $y = -x$ doğrusuna göre yansımadır.

VI durum: $i = 4$ için $f(A_1) = A_4$, $f(A_2) = A_1$ veya $f(A_2) = A_3$

1) $f(A_2) = A_1$ ise f, $\theta = 3\pi/2$ açılı dönmedir.

2) $f(A_2) = A_3$ ise f, $y = 0$ doğrusuna göre yansımadır.

Dolayısıyla teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 3.1.6. $f : \mathbb{R}^2_M \rightarrow \mathbb{R}^2_M$ bir izometri olsun. Bu durumda, $f = T_A \circ g$ olacak şekilde birtek $T_A \in T(2)$ ve $g \in O_M(2)$ vardır (Burada $T(2)$, $\mathbb{R}^2_M$ nin ötelemeler grubu ve $O_M(2) = R_\theta \cup S_M$ dir.).

İspat: $A = (a_1, a_2)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. $g = T_{-A} \circ f$ alalım. g nin bir izometri olduğu açıktır.

$$g(O) = (T_{-A} \circ f)(O) = -A + f(O) = -A + A = (0,0) = O$$

olur. $g(O) = O$ olduğundan Teorem 3.1.5 e göre $g \in O_M(2)$ ve $f = T_A \circ g$ dir. Şimdi de $T_A \in T(2)$ ve $g \in O_M(2)$ nin tekliğini gösterelim. $B = (b_1, b_2)$ olmak üzere $g^{'} = T_{-B} \circ f$ şeklinde başka bir $g^{'} \in O_M(2)$ izometrisinin var olduğunu kabul edelim. $g^{'} \in O_M(2)$ olduğundan

$$g^{'}(O) = (T_{-B} \circ f)(O) = T_{-B}(f(O)) = -B + f(O) = 0$$

olur. O halde $f(O) = B$ olmak zorundadır. Bu ise $f(O) = A$ olması ile çelişir. O halde $g = T_{-A} \circ f$ tektir. Böylece $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(2)$ ve $g \in O_M(2)$ vardır.

Bölüm 4

MAKSİMUM DÜZLEMİNDE KONİKLER

Bu bölümde önce $M-$düzleminde *çember, noktanın doğruya uzaklığı* ve *orta küme* kavramları incelenmiştir. Daha sonra da Kaya R., Akça Z.,Günaltılı İ. ve Özcan M. [8] esas alınarak $\mathbb{R}^2_M$ nin Konikleri; İki Odaklı $M-$Konikleri ve Odak-Doğrultman $M-$Konikleri olarak incelenmiştir.

4.1 Maksimum Düzleminde Çemberler

Bu kısımda $M-$çemberleri ve bunlar ile ilgili "varlık özellikleri " [20] nolu çalışma esas alınarak incelenmiştir.

Tanım 4.1.1. $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2_M$, $r > 0$ olsun.

$$C = \{(x,y) : max\{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$$

kümesine $M-$*çemberi*, (x_0, y_0) noktasına $M-$çemberinin *merkezi*, $r > 0$ sayısına da çemberin *yarıçapı* denir.

Teorem 4.1.1. (x_0, y_0) merkezli, r yarıçaplı $M-$çemberi olsun.

$$A_1 = \{(x,y) : r = |x - x_0|\,,\ \ |x - x_0| \geq |y - y_0| \quad \text{için}\}$$
$$A_2 = \{(x,y) : r = |y - y_0|\,,\ \ |y - y_0| \geq |x - x_0\ | \quad \text{için}\}$$

ise bu durumda $A_1 \cup A_2 = C$ çemberidir.

Yardımcı Teorem 4.1.1. $a > b$, $c > d$ olmak üzere,

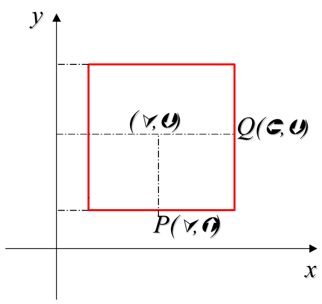
$A_1 = \{(x,y) : x = a \ \text{ veya } \ x = b\}\,, A_2 = \{(x,y) : y = c \ \text{ veya } \ y = d\}$

ise $A_1 \cap A_2 = \{(a,c)\,,(a,d)\,,(b,c)\,,(b,d)\}$ dir.

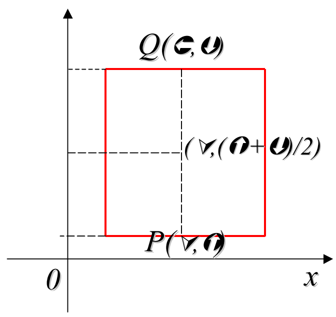
Teorem 4.1.2. $a > b$, $A_1 = \{(x,y) : x = a$ veya $x = b\}$ ve $b \leq x \leq a$; $c > d$, $A_2 = \{(x,y) : y = c$ veya $y = d\}$ ve $d \leq y \leq c$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A_1 \cup A_2$, $(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{c+d}{2})$ merkezli, $(a-b)/2$ (veya $(c-d)/2$) yarıçaplı $M-$ çemberidir.

Yardımcı Teorem 4.1.2. $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ve $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$ veya $x_1 = x_2$ veya $y_1 = y_2$ olmak üzere iki farklı nokta olsun. Bu durumda, P ve Q noktalarından geçen bir $M-$ çemberi vardır.

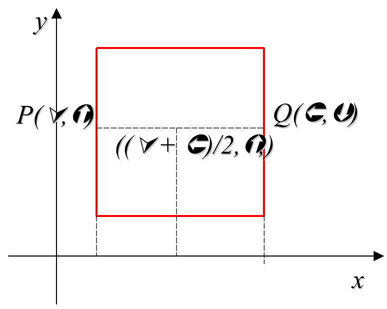
İspat: Aşağıdaki durumlar sözkonusudur:



Şekil 4.1.1 (i)



Şekil 4.1.1 (ii)



Şekil 4.1.1 (iii)

i) $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ve $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|\,,\ y_1 < y_2$ olsun (Şekil 4.1.1 (i)).

$$C = \{(x,y) : max\{|x - x_1|\,, |y - y_2|\} = r,\ \ r = |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|\}$$

olduğunu kabul edelim. P ve Q noktalarının bu çemberin üzerinde olup olmadığına bakalım. $P = (x_1, y_1)$ için $max\{|x_1 - x_1|, |y_1 - y_2|\} = max\{0, |y_1 - y_2|\}$

ve $|y_1 - y_2| \geq 0$ olduğundan

$$max\{0, |y_1 - y_2|\} = |y_1 - y_2| = r$$

elde edilir. Dolayısıyla, $P = (x_1, y_1) \in C$ dir. Benzer şekilde $Q = (x_2, y_2)$ için $max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_2|\} = max\{|x_2 - x_1|, 0\} = |x_2 - x_1| = r$ olur ki bu da $Q = (x_2, y_2) \in C$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla, P ve Q noktalarından geçen bir $M-$çemberi vardır.

ii) $x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$ olduğunu varsayalım (Şekil 4.1.1 (ii)).
$C = \{(x, y) : max\{|x - x_1|, |y - (y_1 + y_2)/2|\} = r,\ r = |y_1 - y_2|/2\}$ olsun. $P = (x_1, y_1)$ için

$$max\{|x_1 - x_1|, |y_1 - (y_1 + y_2)/2|\} = max\{0, |y_1 - y_2|\ /2\} = |y_1 - y_2|/2 = r$$

elde edilir. $P = (x_1, y_1) \in C$ dir . Benzer şekilde , $Q = (x_2, y_2)$ için

$$max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - (y_1 + y_2)/2|\} = max\{0, |y_1 - y_2|\ /2\} = |y_1 - y_2|/2 = r$$

dir. Yani, $Q = (x_2, y_2) \in C$. Dolayısıyla, P ve Q noktalarından geçen bir $M-$çemberi vardır.

iii) $x_1 \neq x_2,\ x_1 < x_2$ ve $y_1 = y_2$ olduğunu varsayalım (Şekil 4.1.1(iii)).
$C = \{(x, y) : max\{|x - (x_1 + x_2)/2|, |y - y_1|\} = r,\ r = |x_1 - x_2|/2\}$ olsun. $P = (x_1, y_1)$ için

$$max\{|x_1 - (x_1 + x_2)/2|, |y_1 - y_1|\} = max\{|x_1 - x_2|\ /2, 0\} = |x_1 - x_2|/2 = r$$

olur. $P = (x_1, y_1) \in C$ dir. $Q = (x_2, y_2)$ için

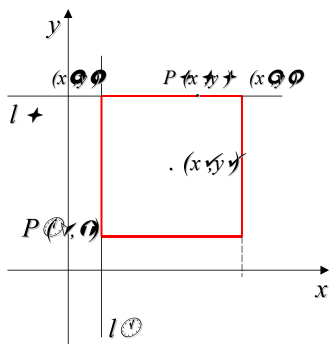
$$max\{|x_2 - (x_1 + x_2)/2|, |y_2 - y_1|\} = max\{|x_1 - x_2|\ /2, 0\} = |x_1 - x_2|/2 = r$$

ve dolayısıyla, $Q = (x_2, y_2) \in C$ dir. Bu nedenle P ve Q noktalarından geçen bir $M-$çemberi vardır.

Teorem 4.1.3. $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}^2_M$ de farklı iki nokta olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen *enaz* bir $M-$çemberi vardır.

İspat: Eğer $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ve $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$ ise Yardımcı Teorem 4.1.2. den bu noktalardan geçen bir $M-$çemberinin varlığını biliyoruz. Bunların hiçbirinin doğru olmadığını varsayalım. $l_1 = \{(x, y) : x = x_1\}$ ve $l_2 = \{(x, y) : y = y_2\}$ doğrularını alalım. $l_1 \cap l_2 = (x_3, y_3)$ olsun.
$(x_3, y_3) = (x_1, y_2)$ olduğundan $(x_3, y_3) \neq (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ dir.

Eğer $d_M((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \geq d_M((x_3, y_3), (x_2, y_2))$ ise , $x_4 = x_1 + y_2 - y_1$, $y_4 = y_2$ olmak üzere, l_2 doğrusu üzerinde $d_M((x_3, y_3), (x_4, y_4)) = d_M((x_3, y_3), (x_1, y_1))$ olacak şekilde bir $P = (x_4, y_4)$ noktası vardır.
$x_1 = x_3 < x_2$, $y_1 < y_2 = y_3$ olsun. Şekil 4.1.2 de görüldüğü gibi,
$x_0 = x_3 + r$, $y_0 = y_3 - r$, $r = |x_4 - x_1|/2$ dir.



Şekil 4.1.2

$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\}$ olduğunu biliyoruz. P_1 ve P_2 noktalarının bu çemberin üzerinde olup olmadığına bakalım. $P_1 = (x_1, y_1)$ için

$$max\{|x_1 - (x_3 + r)|, |y_1 - (y_3 - r)|\} = max\{|x_1 - x_3 - r|, |y_1 - y_3 + r|\}$$

dir. $x_1 = x_3$ olduğundan $x_1 - x_3 = 0$ ve $y_1 < y_3$ olduğundan $y_1 - y_3 < 0$, dolayısıyla, $|y_1 - y_3 + r| < |r|$ dir. $max\{|x_1 - x_3 - r)|, |y_1 - y_3 + r)|\} = r$,

$P_1 \in C$ dir. $P_2 = (x_2, y_2)$ için

$$max\{|x_2 - (x_3 + r)|, |y_2 - (y_3 - r)|\} = max\{|x_2 - x_3 - r|, |y_2 - y_3 + r|\}$$

dir. Şekil 4.1.2 deki noktaların konumları gereği $x_2 > x_3$ olduğundan $|x_2 - x_3 - r| < |r|$ ve $y_2 = y_3$ olduğundan $y_2 - y_3 = 0$, dolayısıyla, $max\{|x_2 - x_3 - r|, |y_2 - y_3 + r|\} = r$, $P_2 \in C$ dir. Diğer durumlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$x_1 < x_2 = x_3,\ y_2 < y_1 = y_3$ için $x_0 = x_3 - r,\ y_0 = y_3 - r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

$x_1 < x_2 = x_3,\ y_1 = y_3 < y_2$ için $x_0 = x_3 - r,\ y_0 = y_3 + r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

$x_2 = x_3 < x_1,\ y_2 < y_3 = y_1$ için $x_0 = x_3 + r,\ y_0 = y_3 - r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

$x_2 = x_3 < x_1,\ y_3 = y_1 < y_2$ için $x_0 = x_3 + r,\ y_0 = y_3 + r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

$x_3 = x_1 < x_2,\ y_3 = y_2 < y_1$ için $x_0 = x_3 + r,\ y_0 = y_3 + r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

$x_2 < x_1 = x_3,\ y_1 < y_2 = y_3$ için $x_0 = x_3 - r,\ y_0 = y_3 - r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

$x_2 < x_1 = x_3,\ y_3 = y_2 < y_1$ için $x_0 = x_3 - r,\ y_0 = y_3 + r,\ r = |x_4 - x_1|/2$

Teorem 4.1.4. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3)$, $\mathbb{R}^2_M$ de farklı üç nokta olsun.

1) $x_1 = x_2,\ y_1 > y_2$,

$$C_1 = \{(x, y) : max\{|x - (x_1 + r)|, |y - (y_1 + y_2)/2|\} < |y_1 - y_2|/2, r = |y_1 - y_2|/2\}$$

$$C_2 = \{(x, y) : max\{|x - (x_1 - r)|, |y - (y_1 + y_2)/2|\} < |y_1 - y_2|/2, r = |y_1 - y_2|/2\}$$

olsun.

i) $P_3 \in C_1 \cup C_2$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek $M-$çemberi vardır.

ii) $P_3 \in \mathbb{R}^2_M - C_1 \cup C_2$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen enaz bir $M-$çemberi vardır.

2) $x_1 > x_2,\ y_1 = y_2$,

$$C_1 = \{(x, y) : max\{|x - (x_1 - x_2)/2|, |y - (y_1 + r)|\} < |x_1 - x_2|/2,\ r = |x_1 - x_2|/2\}$$

$$C_2 = \{(x, y) : max\{|x - (x_1 - x_2)/2|, |y - (y_1 - r)|\} < |x_1 - x_2|/2,\ r = |x_1 - x_2|/2\}$$

olsun.

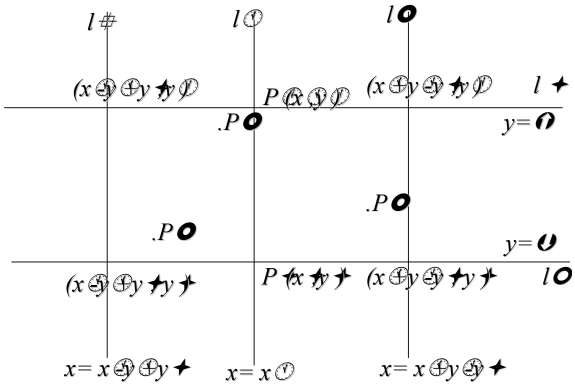
i) $P_3 \in C_1 \cup C_2$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek $M-$çemberi vardır.

ii) $P_3 \in \mathbb{R}^2_M - C_1 \cup C_2$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen enaz bir $M-$çemberi vardır.

İspat: $x_1 = x_2$, $y_1 > y_2$ olsun. $l_1 = \{(x, y) : x = x_1\}$,

$l_2 = \{(x, y) : y = y_1\}$, $l_3 = \{(x, y) : x = x_1 + y_1 - y_2\}$,

$l_4 = \{(x, y) : y = y_2\}$, $l_5 = \{(x, y) : x = x_1 - (y_1 - y_2)\}$ doğrularını alalım.



Şekil 4.1.3

i) $x_1 = x_2 < x_3$ olmak üzere $P_3 \in C_1 \cup C_2$ olsun. Yardımcı Teorem 4.1.2. ye göre P_1 ve P_2 noktalarından geçen $x_0 = x_3 - (y_1 - y_2)/2$, $y_0 = (y_1 + y_2)/2$, $r = |y_1 - y_2|/2$ olmak üzere

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\}$$

çemberi vardır. $P_3 \in C$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & max\{|x_3 - x_3 + (y_1 - y_2)/2|, |y_3 - (y_1 + y_2)/2|\} \\ &\quad = max\{|(y_1 - y_2)/2|, |y_3 - (y_1 + y_2)/2|\} \end{aligned}$$

dir. Şekil 4.1.2 deki noktaların konumları gereği, $y_2 < y_3 < y_1$ olduğundan $|y_3 - (y_1 + y_2)/2| < |y_1 - y_2|/2$ olur. O halde,

$$max\{|(y_1 - y_2)/2|, |y_3 - (y_1 - y_2)/2|\} = |y_1 - y_2|/2$$

dir. Yani, $P_3 \in C$ dir. Bu C çemberinin tek olduğunu gösterelim. P_1 ve P_2 ve P_3 noktalarından geçen ve C den farklı bir

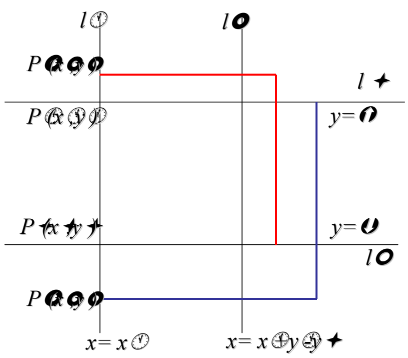
$$C' = \left\{(x, y) : max\{\left|x - x_0'\right|, \left|y - y_0'\right|\} = r'\right\}$$

şeklinde bir $M-$çemberinin olduğunu varsayalım.

$d_M(P_1, P_2) > max\{d_M(P_1, P_3),\ d_M(P_2, P_3)\}$ olduğundan $r' = |y_1 - y_2|/2$, $y_0' = (y_1 + y_2)/2$ ve $x_0' = x_3 - |y_1 - y_2|/2$ olmak zorundadır. $r = r'$, $x_0 = x_0'$ ve $y_0 = y_0'$ olduğundan $C' = C$ dir. Dolayısıyla, P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek C çemberi vardır.

$P_3 \in \mathbb{R}^2_M - C_1 \cup C_2$ olsun.

ii) $P_3 \in \ell_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ olduğunu varsayalım. $P_3 \in \ell_1$ olsun.



Şekil 4.1.4

$a = max\{y_i : i = 1, 2, 3\}$, $c = min\{y_i : i = 1, 2, 3\}$ olarak alırsak, $x_0 = x_1 + r$, $y_0 = (a + c)/2$, $r = |a - c|/2$ olmak üzere P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|,\ |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır.

$P_3 \in \ell_2$ olsun. $d_M(P_1, P_2) > d_M(P_1, P_3)$ iken l doğrusu üzerinde $d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, P_4)$ olacak şekilde bir $P_4 = (x_4, y_4)$ noktası vardır. Teorem 4.1.3. e göre $x_0 = x_1 - r$ (P_3, ℓ_1 in solunda iken $x_0 = x_1 - r$, P_3, ℓ_1 in sağında iken $x_0 = x_1 + r$ alırız), $y_0 = (y_1 + y_2)/2$, $r = |y_1 - y_2|/2$ olmak üzere

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır.

$d_M(P_1, P_2) < d_M(P_1, P_3)$ ise ℓ_1 doğrusu üzerinde $d_M(P_1, P_5) = d_M(P_1, P_3)$ olacak şekilde bir $P_5 = (x_5, y_5)$ noktası vardır. $x_0 = (x_1 + x_3)/2$, $y_0 = y_1 - r$, $r = |x_3 - x_1|/2$ olmak üzere P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır.

$P_3 \in \ell_3$ olsun. $P_3 \in d = \{(x, y) : y = y_3\}$ dir. $Q = \ell_1 \cap d$ olsun. d doğrusu üzerinde $d_M(P_2, Q) = d_M(Q, P_4)$ olacak şekilde bir $P_4 = (x_4, y_4)$ noktası vardır. Teorem 4.1.3 e göre $x_0 = x_1 + r$, $y_0 = (y_2 + y_3)/2$, $r = |y_3 - y_2|/2$ olmak üzere

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,, |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$ çemberi vardır.

$P_3 \in \ell_4$ olsun. $d_M(P_1, P_2) \leq d_M(P_2, P_3)$ ise $x_0 = (x_1 + x_3)/2$, $y_0 = y_1 - r$, $r = |x_3 - x_1|/2$, $d_M(P_1, P_2) > d_M(P_2, P_3)$ ise $x_0 = x_3 - r$, $y_0 = (y_1 + y_2)/2$, $r = |y_1 - y_2|/2$ olmak üzere

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,, |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$ çemberi vardır.

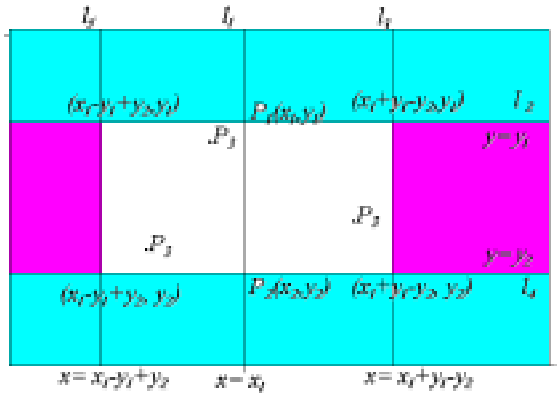
$P_3 \in \ell_5$ olsun. P_3 noktasından geçen $d = \{(x, y) : y = y_3\}$ doğrusunu çizelim. $Q = \ell_1 \cap d$ olsun. Teorem 4.1.3 e göre $x_0 = x_1 - r$, $y_0 = (y_2 + y_3)/2$, $r = |y_3 - y_2|/2$ olmak üzere

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,, |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$ çemberi vardır ve bu çember P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçer. Dolayısıyla, $P_3 \in \ell_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ iken P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır. Şimdi de , $P_3 \notin \ell_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ iken P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen bir $M-$çemberinin olup olmadığını inceleyelim.



Şekil 4.1.5

$S_1 = \{(x, y) : y > y_1 \text{ veya } y < y_2\}$ ve
$S_2 = \{(x, y) : x < x_1 - (y_1 - y_2) \text{ veya } x > x_1 + y_1 - y_2,\ y_2 < y < y_1\}$ olsun (Şekil 4.1.5).

$P_3 \in S_1$ alalım. $P_3 \in d = \{(x, y) : y = y_3\}$ olsun. $Q\,(a, b) = d \cap \ell_1$ diyelim. d doğrusu üzerinde $d_M(P_2, Q) = d_M(Q, P)$ olacak şekilde bir P noktası vardır. $x_0 = a + r$, $y_0 = (y_2 + b)\,/2$, $r = |b - y_2|/2$ olmak üzere P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\ \{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır.

$P_3 \in S_2$ alalım. $P_3 \in d' = \{(x, y) : x = x_3\}$ doğrusunu çizelim. $R\,(c, d) = d' \cap \ell_2$ olsun. $x_0 = (x_1 + c)\,/2$, $y_0 = y_1 - r$, $r = |c - x_1|/2$ olmak üzere P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır. Benzer şekilde 2) nin ispatı yapılabilir.

Sonuç 4.1.1. $x_1 = x_2$ veya $y_1 = y_2$ olmak üzere $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P = (x_3, y_3)$, $\mathbb{R}^2_M$ de farklı üç nokta olsun. Eğer,

i) $max\,\{d_M(P_1, P_3), d_M(P_2, P_3)\} < d_M(P_1, P_2)$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek $M-$çemberi vardır.

ii) $d_M(P_1, P_3) = d_M(P_2, P_3) = d_M(P_1, P_2)$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek $M-$çemberi vardır.

iii) $d_M(P_1, P_3) = d_M(P_2, P_3) > d_M(P_1, P_2)$ ise P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen iki tane $M-$çemberi vardır.

Yardımcı Teorem 4.1.3. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P = (x_3, y_3)$, $\mathbb{R}^2_M$ de
$x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ ve $|x_i - x_j| \neq |y_i - y_j|$, $i = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ şeklinde üç nokta olsun. P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen bir $M-$çemberi varsa bu çember tektir.

İspat: $x_1 = min\,\{x_i|\ i = 1, 2, 3\}\,, x_2 = max\,\{x_i|i = 1, 2, 3\}$ olmak üzere $l_1 = \{(x, y) : x = x_1\}\,, l_2 = \{(x, y) : y = y_2\}\,, l_3 = \{(x, y) : y = y_3\}$ olduğunu varsayalım. $C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|\,,\ |y - y_0|\} = r\}$, P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen ve kenarları ℓ_1, ℓ_2, ve ℓ_3 doğruları olan $M-$çemberi olsun. $l_1 \cap \ell_2 = (a, b)$, $\ell_1 \cap \ell_3 = (a, c)$ alalım. $C^{'}$, P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen ve C den farklı bir $M-$çemberi olsun. Bu $M-$çemberinin merkezi $\left(x_0^{'}, y_0^{'}\right)$, yarıçapı $r^{'}$ olsun. $x_0^{'} = (2a + c - b)\,/2$, $y_0^{'} = (b + c)\,/2$, $r^{'} = |c - b|/2$ olmak üzere

$$C^{'} = \left\{(x, y) : max\{\left|x - x_0^{'}\right|,\ \left|y - y_0^{'}\right|\} = r^{'}\right\}$$

çemberi elde edilir.

C ve $C^{'}$ çemberlerini karşılaştıralım. C çemberinin merkezi (x_0, y_0), yarıçapı r olmak üzere

$$r = max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}/2 = max\{|x_2 - x_3|, |c - b|\}/2$$

olur. $a < x_2 < a + c - b$ ve $a < x_3 < a + c - b$ olduğundan $-c + b < x_2 - x_3 < c - b$ ve dolayısıyla, $|x_2 - x_3| < c - b$ dir. O halde $r = |c - b|/2$ olur. $x_0 = x_1 + (y_3 - y_2)/2 = a + (c - b)/2 = (2a + c - b)/2$, $y_0 = (y_2 + y_3)/2 = (b + c)/2$ dir. $x_0 = x_0^{'}$, $y_0 = y_0^{'}$, $r = r^{'}$ olduğundan $C = C^{'}$ dir.

Sonuç 4.1.2. Koordinat eksenlerine paralel doğrular üzerinde bulunan herhangi doğrudaş üç noktadan geçen sonsuz sayıda $M-$çemberi vardır.

Sonuç 4.1.3. Herhangi ikisi bir koordinat eksenine paralel bir doğru üzerinde bulunmayan üç noktadan geçen bir $M-$çemberi varsa, bu çember bir tektir.

Sonuç 4.1.4. Koordinat eksenlerine paralel olmayan doğrular üzerinde bulunan, herhangi doğrudaş üç noktadan geçen bir $M-$çemberi yoktur.

Teorem 4.1.5. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3)$, $\mathbb{R}^2_M$ de üç nokta olsun. $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ ve $|x_i - x_j| \neq |y_i - y_j|$, $i = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ olmak üzere $\ell_1 = \{(x, y) : x = x_1\}$, $\ell_2 = \{(x, y) : y = y_2\}$, $Q(a, b) = \ell_1 \cap \ell_2$ ve $r = max\{d_M(P_1, Q), d_M(P_2, Q)\}/2$ olduğunu varsayalım. Eğer,

i) $a = x_1$, $a < x_2$ ve $b = y_2 < y_1$ ve $P_3 \in \{(x, y) : x > a,\ y > b + 2r\} \cup \{(x, y) : x > a + 2r,\ y > b\}$

ii) $a = x_1, a < x_2$ ve $y_1 < y_2 = b$ ve $P_3 \in \{(x, y) : x > a,\ y > b - 2r\} \cup \{(x, y) : x > a + 2r,\ y < b\}$

iii) $a = x_1, a > x_2$ ve $y_1 < y_2 = b_2$ ve $P_3 \in \{(x, y) : x < a,\ y > b - 2r\} \cup \{(x, y) : x < a - 2r,\ y < b\}$

iv) $a = x_1, a > x_2$ ve $y_2 = b_2 < y_1$ ve $P_3 \in \{(x, y) : x < a,\ y > b + 2r\} \cup \{(x, y) : x < a - 2r,\ y > b\}$ ise bu durumda P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek $M-$çemberi vardır.

İspat: i) $A_1 = \{(x, y) : a < x < a + 2r,\ y > b + 2r\}$,
$A_2 = \{(x, y) : x > a + 2r,\ y > b + 2r\}$, $A_3 = \{(x, y) : x > a + 2r,\ b \leq y < b + 2r\}$
olsun.

$P_3 \in A_1$ olduğunu varsayalım. $P_3 \in \ell_3 = \{(x, y) : y = y_3\}$ doğrusunu çizelim. $(a, c) = \ell_3 \cap \ell_1$ olsun. $x_0 = a + r_1$, $y_0 = (c + b)/2$, $r_1 = |c - b|/2$ olmak üzere

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r_1\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır. Bu çemberin tek olduğunu gösterelim.

P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen ve C den farklı bir $C^{\shortmid}$ çemberinin olduğunu varsayalım. $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ ve $|x_i - x_j| \neq |y_i - y_j|$, $i = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ olmak üzere $P_3 \in \ell_3$ olduğundan $P_3 \in A_1$ ve P_3 noktası ℓ_3 doğrusu üzerindedir. $C^{\shortmid}$ çemberinin kenarları ℓ_1, ℓ_2 ve ℓ_3 doğruları olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.3 e göre $C = C^{\shortmid}$ dir. Dolayısıyla P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen birtek $M-$çemberi vardır.

$P_3 \in A_2$ olduğunu varsayalım. $P_3 \in \ell_3 = \{(x, y) : y = y_3\}$ ve $(a, c) = \ell_3 \cap \ell_1$ olsun. $x_0 = a + r_1$, $y_0 = (c + b)/2$, $r_1 = |c - b|/2$ olmak üzere P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|,\ |y - y_0|\} = r_1\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi var ve tektir.

$P_3 \in A_3$ olduğunu varsayalım. $P_3 \in \ell_3 = \{(x, y) : x = x_3\}$ ve
$(d, b) = \ell_3 \cap \ell_2$ olsun. $x_0 = (d + a)/2$, $y_0 = b + r_1$, $r_1 = |d - a|/2$ olmak üzere P_1, P_2 ve P_3 noktalarından geçen

$$C = \{(x, y) : max\{|x - x_0|,\ |y - y_0|\} = r_1\}$$

şeklinde bir $M-$çemberi vardır ve tektir.

Böylece $i)$ için her üç durumda da birtek $M-$çemberinin varlığını göstermiş olduk. ii), iii) ve iv) ün ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

4.2 Maksimum Düzleminde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Tanım 4.2.1. (M- Düzlemininin doğruları) $M-$düzleminde $l...\ ax+by+c=0$ doğrusu verilsin. l doğrusu

$$\left|-\tfrac{a}{b}\right|>1,\ \text{ise}\ \text{dikeysel doğru,}$$
$$\left|-\tfrac{a}{b}\right|<1,\ \text{ise}\ \text{yataysal doğru,}$$
$$\left|-\tfrac{a}{b}\right|=1,\ \text{ise}\ \text{ayıraç doğru}$$

olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.1. m-düzlemindeki herhangi bir $P=(x_0,y_0)$ noktasının bir $\ell...\ ax+by+c=0$ doğrusuna olan d_M uzaklığı $d_M(P,l)$; $X\,(x,y)\in\ell$ olmak üzere, $d_M(P,X)$ değerlerinin en küçük olanı yani,

$$d_M(P,l)=\min_{X\in\ell} d_M\ (P,X)$$

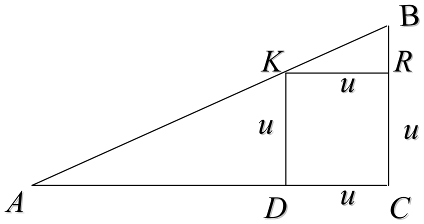
olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.1. Bir dik üçgenin hipotenüsü üzerinde bulunan ve her iki dik kenara eşit uzaklıkta olan bir tek nokta vardır. Üstelik, bu uzaklık u, dik kenarların uzunlukları a ve b ise

$$u=ab/(a+b)$$

dir.

İspat: Önce böyle bir karenin varlığını gösterelim. C noktası karenin köşesi, $\overline{DC}$ ve $\overline{CR}$ de karenin bu köşeyi oluşturan iki kenarı olsun (Şekil 4.2.1). $\overset{\blacktriangle}{ABC}$ üçgeninin C açısının açıortayını çizelim. Açıortayın hipotenüsü kestiği nokta K olsun. O halde $\overline{CK}$ açıortayı aynı zamanda aradığımız karenin köşegeni olmak zorundadır. Öyleyse, bu karenin hipotenüs üzerindeki köşesi K dır. Ayrıca, $\overline{AB} \cap \overline{CK} = K$ tek olduğundan (iki doğru birtek noktada kesişir), aranan özellikteki $DCRK$ karesi var ve tektir.



Şekil 4.2.1

Şimdi de bu karenin kenar uzunluğunu bulalım. $A\overset{\blacktriangle}{B}C$ ve $K\overset{\blacktriangle}{B}R$ üçgenlerini göz önüne alalım. A ve K açıları yöndeş, B açısı da ortak olduğundan oranlarla ilgili özelliğe göre bu üçgenler benzerdir. Karenin kenar uzunluğunu u olarak alırsak,

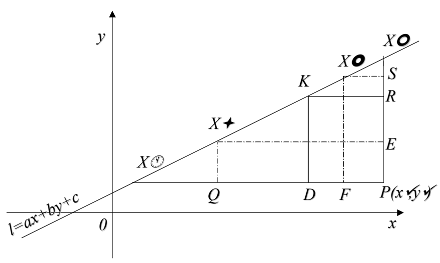
$$\frac{b}{u} = \frac{a}{a-u} \quad \Rightarrow \quad u = ab/(a+b)$$

elde edilir. Dolayısıyla, karenin kenar uzunluğu $u = ab/(a+b)$ dir.

$\mathbb{R}^2_M$ de bir noktanın doğruya olan uzaklığını bulmaya çalışalım.
$A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ olmak üzere A ve B noktaları arasındaki uzaklık

$$d_M(P,Q)) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

formülü ile hesaplanır.



Şekil 4.2.2

Bir noktanın doğruya uzaklığı demek, doğrunun bu noktaya en yakın noktası arasındaki uzaklık demektir. O halde önce böyle bir noktanın var olduğunu göstermeliyiz. $\ell ...\ ax + by + c = 0$ doğrusunu ve $P = (x_0, y_0)$ noktasını ele alalım. ℓ doğrusunun P noktasına en yakın olan noktasını bulmaya çalışalım. ℓ doğrusu üzerinde X_1, X_2, X_3 ve X_4 noktalarını alalım. Bu noktaların P noktasına olan uzaklıkları $d_M(P, X_1) = u_1$, $d_M(P, X_2) = u_2$, $d_M(P, X_3) = u_3$, $d_M(P, X_4) = u_4$ dir. Fakat bu sonuçtan $P = (x_0, y_0)$ a en yakın olan noktanın hangisi olduğunu söyleyemeyiz. Aranın noktanın koordinatı (x, y) ise $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|$ olması gerekir. Bu ise aradığımız noktanın açıortay doğrusu üzerinde olması anlamına gelir. P açısının açıortayını çizelim. Açıortayın ℓ doğrusunu kestiği nokta K olsun. $d_M(P, K) = |KD| = |KR| = u$, $u_1 > u$, $u_2 > u$, $u_3 > u$, $u_4 > u$ olduğundan K noktası aradığımız noktadır. Çünki, K nın sağında ve solunda aldığımız her noktanın P ye olan uzaklığı u dan büyüktür. Yardımcı Teorem 4.2.1 e göre böyle bir K noktası var ve tektir.

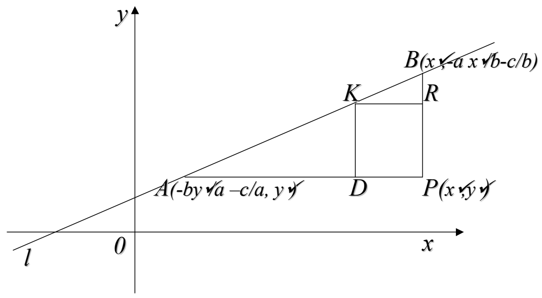
Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}^2_M$ de $P = (x_0, y_0)$ noktasının $\ell ...\ ax + by + c = 0$ doğrusuna olan d_{M-}uzaklığı şöyledir:

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

İspat: Bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı demek, bu nokta ile doğrunun bu noktaya en yakın noktası arasındaki uzaklık demektir. O halde önce böyle bir noktanın varlığını göstermeliyiz. Yardımcı teorem 4.2.1.e göre böyle bir nokta vardır. Bu durumda ispata geçebiliriz. $\ell ....\ ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir. Verilen nokta ve doğrunun konumuna göre 4 durum söz konusu olabilir:

i) durum: Doğrunun eğimi $m = -a/b$, $a > 0$ ve $b < 0$ (a ile b farklı işaretli) ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun alt bölgesinde olsun
(Şekil 4.2.3). $A(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0)$ ve $B(x_{0,} - \frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ olmak üzere doğru

üzerinde iki nokta alalım.



Şekil 4.2.3

$|AP| = \left(x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a}\right)$, $|PB| = \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0\right)$ dir.

$d_M(P,K) = |DP| = |PR| = |KD| = u$ olsun. $d_M(P,l) = u$ olduğundan u nun değeri

$$u = |AP|\,|BP| \;\; / \; (|AP| + |BP|)$$

ve $|AP| = \left(x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a}\right)$, $|PB| = \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} u &= \left(x_0 + \tfrac{b}{a}y_0 + \tfrac{c}{a}\right) . \left(-\tfrac{a}{b}x_0 - \tfrac{c}{b} - y_0\right) / \left(\left(x_0 + \tfrac{b}{a}y_0 + \tfrac{c}{a}\right) + \left(-\tfrac{a}{b}x_0 - \tfrac{c}{b} - y_0\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{ab}\left(ax_0 + by_0 + c\right) . \left(-ax_0 - by_0 - c\right) / \left(\tfrac{1}{a}\left(ax_0 + by_0 + c\right) - \tfrac{1}{b}\left(ax_0 + by_0 + c\right)\right) \\ &= -\tfrac{1}{ab}\left(ax_0 + by_0 + c\right)^2 / (\tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{b})\left(ax_0 + by_0 + c\right) = (ax_0 + by_0 + c)/(a - b) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a - b}$$

elde edilir.

(ii) durum: $\ell ...\; ax+by+c = 0,\; m = -a/b\,, a > 0, b < 0$ ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun üst bölgesinde olsun. A ve B noktaları (i) durumunda olduğu gibi doğru üzerindeki $A(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0)$ ve $B(x_{0,} -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ koordinatlı noktalardır. $|AP| = -\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a} - x_0$ ve $|PB| = y_0 + \frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b}$ olduğundan benzer şekilde

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{-a + b}$$

elde edilir.

(iii) durum: $\ell ...\ ax + by + c = 0,\ m = -a/b,\ a > 0,\ b > 0$ (a ile b aynı işaretli) ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun alt bölgesinde olsun. $|AP| = -\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a} - x_0$ ve $|BP| = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y$ dir. Benzer şekilde

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{-a - b}$$

elde edilir.

(iv) durum: $\ell ...\ ax + by + c = 0,\ m = -a/b,\ a > 0,\ b > 0$ (a ile b aynı işaretli) ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun üst bölgesinde olsun. $|AP| = x_0 + \frac{a}{b}y_0 + \frac{c}{b}$ ve $|PB| = y_0 + \frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a}$ olduğundan benzer şekilde

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen $(i), (ii)\,, (iii)\,, (iv)$ durumlarını birleştirirsek,

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

eşitliğini elde ederiz. $d_M(P, l) = u$ olarak alınmıştı. O halde, $P(x_0, y_0)$ noktasının $\ell ...\ ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{array}{lll} a = b & \text{iken} & d_M(P, l) = |ax_0 + ay_0 + c| / (2\,|a|) \\ a = 0 & \text{iken} & d_M(P, l) = |by_0 + c| / |b| \\ b = 0 & \text{iken} & d_M(P, l) = |ax_0 + c| / |a| \end{array}$$

4.3 Orta Kümeler

İki Noktanın Orta Kümesi

Tanım 4.3.1. $M-$düzleminde verilen iki noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu noktaların *orta kümesi* veya *bisektörü* denir. Yani, $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$, $M-$ düzleminde verilen iki nokta olmak üzere

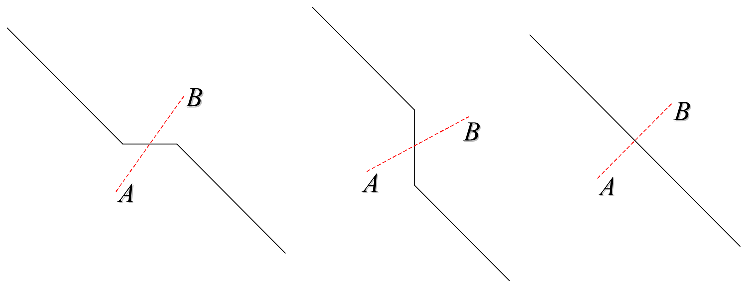
$$\left\{X : d_M\left(P_1, X\right) = d_M\left(P_2, X\right),\ X \in \mathbb{R}^2_M\right\}$$

kümesine P_1 ve P_2 noktalarının *orta kümesi* denir. Dolayısıyla, $X = (x, y)$ olmak üzere

$$max\left\{|x - x_1|, |y - y_1|\right\} = max\left\{|x - x_2|, |y - y_2|\right\}$$

denkleminin çözüm kümesi P_1 ve P_2 noktalarının orta kümesidir.

İki noktanın orta kümesi, $M-$koniklerinden $M-$hiperbolünün özel halidir ve bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir. Bazı orta küme örnekleri Şekil 4.3.1 de verilmiştir:



Şekil 4.3.1

Bir Noktanın ve Bir Doğrunun Orta Kümesi

Tanım 4.3.2 $M-$düzleminde verilen bir noktadan verilen bir doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu nokta ve bu doğrunun *orta kümesi* denir. Yani $P_1(x_1, y_1)$ ve $\ell ...\ ax + by + c = 0$ doğrusu $M-$ düzleminde verilen nokta ve doğru olmak üzere

$$\left\{X : d_M\left(P, X\right) = d_M\left(l, X\right),\ X \in \mathbb{R}^2_M\right\}$$

kümesine P_1 *noktasının ve* l *doğrusunun orta kümesi* denir. Dolayısıyla, $X = (x, y)$ olmak üzere

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{|a| + |b|}$$

denkleminin çözümü bize P_1 noktasının ve l doğrusunun orta kümesini verecektir. Bilindiği gibi bu da $M-$parabol denklemidir. Bir sonraki kısımda $M-$konik olarak incelenecektir.

İki Doğrunun Orta Kümesi

Tanım 4.3.3. $M-$düzleminde verilen iki doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu doğruları *orta kümesi* denir. Yani, $\ell_1 ...\ a_1x+b_1y+c_1 = 0$ ve $\ell_2 ...\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları $M-$düzleminde verilen iki doğru olmak üzere

$$\left\{X : d_M(l_1, X) = d_M(l_2, X),\ X \in \mathbb{R}^2_M\right\}$$

kümesine l_1 *ve* l_2 *doğrularının orta kümesi* denir. Dolayısıyla $X = (x, y)$ olmak üzere

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{|a_1| + |b_1|} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{|a_2| + |b_2|}$$

denkleminin çözümü iki doğrunun orta kümesini verecektir. Bu denklemi

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{|a_1| + |b_1|} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{|a_2| + |b_2|}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. $|a_1| + |b_1| = p$, $|a_2| + |b_2| = q$ olarak alırsak

$$(a_1x + b_1y + c_1)/p = \pm(a_2x + b_2y + c_2)/q$$

olur.

I Durum: $(a_1x + b_1y + c_1)/p = -(a_2x + b_2y + c_2)/q$ olsun.

Çözüm:

$$y = -\frac{a_2p + a_1q}{b_1q + b_2p}x - \frac{c_1q + c_2p}{b_1q + b_2p}$$

doğrusudur.

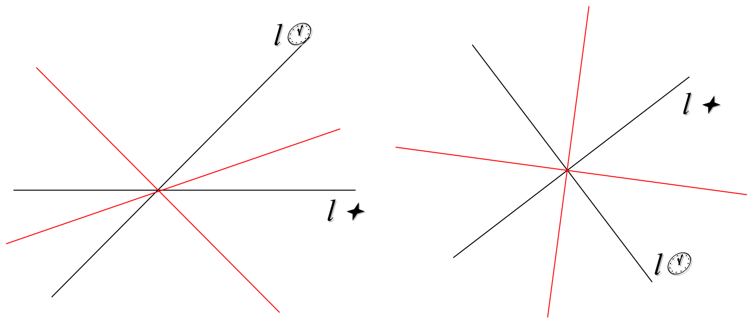
II Durum: $(a_1x + b_1y + c_1)/p = (a_2x + b_2y + c_2)/q$ olsun.

Çözüm:

$$y = \frac{a_2p - a_1q}{b_1q - b_2p}x + \frac{c_2p - c_1q}{b_1q - b_2p}$$

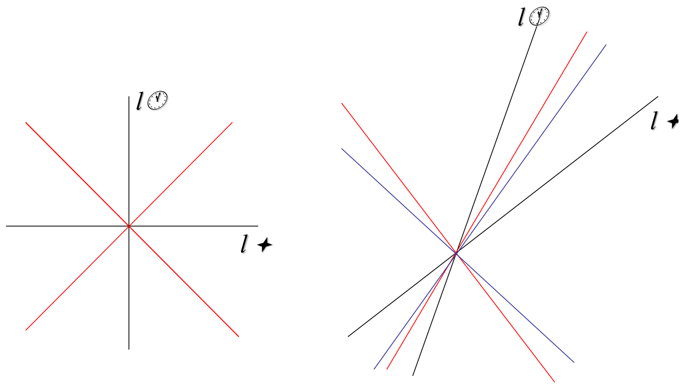
doğrusudur.

Sonuç olarak iki doğrunun orta kümesi yukarıdaki doğrulardan oluşuyor. Bazı orta küme örnekleri Şekil 4.3.2 de verilmiştir:



Şekil 4.3.2

Şimdi de iki doğrunun $M-$orta küme ile öklidyen orta kümesini karşılaştıralım. $l_1 \parallel l_2$ ve $l_1 \perp l_2$ iken $M-$orta kümeler öklidyen orta kümeyle aynıdır: $l_1 \parallel l_2$ iken orta kümesi birtek doğru, diğer durumlarda kesişen iki doğrudur. Ayrıca, $l_1 \perp l_2$ iken orta küme öklid anlamda açıortay doğrularıdır. Şekil 4.3.3 de mavi renkle verilen l_1 ve l_2 doğrularının Öklid anlamda orta kümesi, kırmızı renkle verilen de $M-$orta kümesi olarak verilmiştir. $l_1 \perp l_2$ iken bu orta kümelerin aynı, diğer durumlarda da farklı olduğu açıktır.



Şekil 4.3.3

4.4 İki Odaklı M-Konikler

İki Odaklı m-Elipsleri

Tanım 4.4.1. $M-$düzleminde verilen iki noktaya d_M-uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesine $M-$*elipsi* denir.

$F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ verilen iki nokta ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere onların belirttiği $M-$elipsi

$$\left\{P : d_M(P, F_1) + d_M(P, F_2) = 2a,\ P \in \mathbb{R}^2_M\right\}$$

kümesidir. Yani,

$$max\left\{|x - x_1|, |y - y_1|\right\} + max\left\{|x - x_2|, |y - y_2|\right\} = 2a \qquad (4.1)$$

dir. $d_M(F_1, F_2) = c$ olsun.

Teorem 4.4.1. $M-$düzleminde $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklarının konumu ve F_1F_2 doğrusunun eğimi olan $m_{F_1F_2} > 0$, $2a$ ve $2c$ katsayılarının alacağı değere göre *iki odaklı* $M-$ *elipsi* aşağıdaki Tablo 4.1. de verilen geometrik yerlerden biridir:

F_1F_2 ve m nin durumu	2a	Geometrik yer
$F_1=F_2$ $F_1\neq F_2$	2a=0	$F_1=(x_1,y_1)$ odak noktası Boş küme
$F_1=F_2$	2a>0	$F_1=(x_1,y_1)$ merkezli, a yarıçaplı bir m-çemberi
0	2a=2c	$[F_1F_2]$ köşegenli kenarları ±1 eğimli doğrular olan karesel bölgedir.
	2a>2c	Karşılıklı kenarları ikişer-ikişer paralel olup, ±1 ve 0 eğimli doğrulardan oluşan altıgendir.
(0,1)	2a=2c	$[F_1F_2]$ köşegenli, kenarları ±1 eğimli doğrular olan dikdörtgensel bölgedir.
	2a>2c	Karşılıklı kenarları ikişer-ikişer paralel olup, ±1, 0 ve ∞ eğimli doğrulardan oluşan sekizgendir.
1	2a=2c	$[F_1F_2]$ doğru parçası
	2a>2c	Karşılıklı kenarları ikişer-ikişer paralel olup, +1, 0 ve ∞ eğimli doğrulardan oluşan altıgendir.
(1, ∞)	2a=2c	$[F_1F_2]$ köşegenli dikdörtgensel bölgedir.
	2a>2c	Karşılıklı kenarları ikişer-ikişer paralel olup, ±1, 0 ve ∞ eğimli doğrulardan oluşan sekizgendir.
∞	2a=2c	$[F_1F_2]$ köşegenli karesel bölgedir.
	2a>2c	Karşılıklı kenarları ikişer-ikişer paralel olup,±1 ve ∞ eğimli doğrulardan oluşan altıgendir.
Bütün durumlar için	2a<2c	Boş küme

Tablo 4.1 İki Odaklı M-elipsi $(m_{F_1F_2} > 0)$

İspat: Elipsler için aşağıdaki farklı durumlar sözkonusudur.

I) $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklarının bazı özel durumlarını inceleyelim.

I1) $F_1 = F_2$ ve $2a = 0$ olsun. Bu durumda $M-$ elipsi $F_1 = (x_1, y_1)$ noktasından oluşur.

I2) $F_1 \neq F_2$ ve $2a = 0$ olsun. Çözüm boş kümedir.

II) $F_1 = F_2$ ve $2a > 0$ olsun. Çözüm, $F_1 = (x_1, y_1)$ merkezli ve a yarıçaplı $M-$çemberidir.

Bundan sonraki bölümde $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ olarak alınmaktadır. Yani, $m_{F_1F_2} > 0$ dır. $m_{F_1F_2} < 0$ olması halinde de benzer ispat yapılarak $m_{F_1F_2} > 0$ halindeki $M-$elipslerinin $x = 0$ doğrusuna göre simetrikleri elde edilir.

III) F_1F_2 doğrusunun (*asal eksenin*) eğimi m iken $2a$ ve

$2c = d_M(F_1, F_2)$ nin değerlerine göre aşağıdaki durumlar incelenir.

$$d_M(P, F_1) + d_M(P, F_2) = 2a$$

yani,

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} + \ max\{|x - x_2|, |y - y_2|\} = 2a$$

dir.

a) $|x - x_1| = |y - y_1|$ ve $|x - x_2| = |y - y_2|$ olsun.

$$|x - x_1| + |x - x_2| = 2a$$

a$_1$) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: Boş küme.

a$_2$) $x \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$A_2 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, (x_1 - x_2 + y_1 + y_2)/2)$$

noktasıdır.

a$_3$) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: Boş küme.

a$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: Boş kümedir.

a$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$A_8 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ (-x_1 + x_2 + y_1 + y_2)/2)$$

noktasıdır.

a$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: Boş kümedir.

b) $|x - x_1| = |y - y_1|$ ve $|x - x_2| > |y - y_2|$ olsun.

$$|x - x_1| + |x - x_2| = 2a$$

b_1) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$B_1 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, \ (-x_1 + x_2 + 2y_1 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

b_2) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1 \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$B_2 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, \ (x_1 - x_2 + 2y_1 + 2a))$$

noktasıdır.

b_3) $x \ \leq x_1$ ve $y \ \ \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : y = -x + x_1 + y_1$ ve $y \ < -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$B_3 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, \ \ (x_1 - x_2 + 2y_1 + 2a))$$

noktasıdır.

b$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : \ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{x,y)| \ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : \ y = -x + x_1 + y_1$ ve $y > -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$B_7 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ \ (x_1 - x_2 + 2y_1 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

b$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$doğrusunun kesişme noktası olan

$$B_8 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ (x_1 - x_2 + 2y_1 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

b$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$B_9 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ (x_1 - x_2 + 2y_1 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

c) $|x - x_1| = |y - y_1|$ ve $|x - x_2| < |y - y_2|$ olsun.

$$|y - y_1| + |y - y_2| = 2a$$

c_1) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$C_1 = ((2x_1 - y_1 + y_2 - 2a)/2, \ (y_1 + y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

c_2) $x \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : \ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c_3) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y): \ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } \ y \quad > -x+x_2+y_2\}$ kümesi ile $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$C_3=((2x_1+y_1-y_2-2a)/2, \ \ (y_1+y_2+2a)/2)$$

noktasıdır.

c$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y): \ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } \ y>x-x_2+y_2\}$ kümesi ile $y=(y_1+y_2-2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$C_4=((2x_1+y_1-y_2-2a)/2, \ \ (y_1+y_2-2a)/2)$$

noktasıdır.

c$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1+y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): y=x-x_1+y_1 \text{ ve } \ y<x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $-\,y_1+y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y): \ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } \ y>-x+x_2+y_2\}$ kümesi ile $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$C_6=((2x_1-y_1+y_2+2a)/2, \ \ (y_1+y_2+2a)/2)$$

noktasıdır.

c$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y): \ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } \ y<-x+x_2+y_2\}$ kümesi ile $y=(y_1+y_2-2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$C_7=((2x_1+y_1-y_2+2a)/2, \ \ (y_1+y_2-2a))$$

noktasıdır.

c$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$C_9 = ((2x_1 - y_1 + y_2 + 2a)/2, \ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

d) $|x - x_1| > |y - y_1|$ ve $|x - x_2| = |y - y_2|$ olsun.

$$|x - x_1| + |x - x_2| = 2a$$

d_1) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$D_1 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, \ (x_1 - x_2 + 2y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

d_2) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1 \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$D_2 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, (x_1 - x_2 + 2y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

d_3) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y \ = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$D_3 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, \ \ (-x_1 + x_2 + 2y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

d$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun. $-x_1 + x_2 = 2a$

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : \ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$D_7 = ((x_1 + x_2 - 2a)/2, \ \ (-x_1 + x_2 + 2y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

d$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$D_8 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ \ (-x_1 + x_2 - 2y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

d$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : \ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$D_9 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ \ (x_1 - x_2 + 2y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

e) $|x - x_1| < \ |y - y_1|$ ve $|x - x_2| \ = |y - y_2|$ olsun.

$$|y - y_1| + |y - y_2| = 2a$$

e_1) $x \ \leq x_1$ ve $y \ \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : \ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$E_1 = ((2x_2 + y_1 - y_2 - 2a)/2, \ \ (y_1 + y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

e_2) $x \ \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

e_3) $x \ \leq x_1$ ve $y \ \ \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y) : \ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y \ \ = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$E_3 = ((2x_2 - y_1 + y_2 - 2a)/2, \ \ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

e$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$E_4 = ((2x_2 + y_1 - y_2 - 2a)/2, (y_1 + y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

e$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

e$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$E_6 = ((2x_2 - y_1 + y_2 - 2a)/2,\ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

e$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $\{(x,y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 - 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$E_7 = ((2x_2 - y_1 + y_2 + 2a)/2,\ (y_1 + y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

e$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): y > x - x_1 + y_1 \; ve \; y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

e$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $\{(x, y) : \ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \quad y = x - x_2 + y_2\}$ kümesi ile $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun kesişme noktası olan

$$E_9 = ((2x_2 + y_1 - y_2 + 2a)/2, \ \ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

f) $|x - x_1| > |y - y_1|$ ve $|x - x_2| > |y - y_2|$ olsun.

$$|x - x_1| + |x - x_2| = 2a$$

f_1) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

f_2) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1 \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

f_3) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

f_4) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

$f_5)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-x_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

$f_6)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-x_1 + x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $- {}_1 + x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

$f_7)$ $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

$f_8)$ $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

$f_9)$ $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 - 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g) $|x - x_1| < |y - y_1|$ ve $|x - x_2| > |y - y_2|$ olsun.

$$|y - y_1| + |x - x_2| = 2a$$

$g_1)$ $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 - y_1 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

$g_2)$ $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1 \leq y_2$ olsun

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \ ve \ y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_3)$ $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm:$y = x - x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \ ve \ y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_4)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 - y_1 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_5)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_6)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > x - x_1 + y_1 \ ve \ y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \; y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \; y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h) $|x - x_1| < |y - y_1|$ ve $|x - x_2| < |y - y_2|$ olsun.

$$|y - y_1| + |y - y_2| = 2a$$

h$_1$) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 - 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > x - x_2 + y_2\}$$

bolgesinde kalan kısmıdır.

h$_2$) $x \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : \; y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesidir. $-y_1+y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_3$) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y>-x+x_1+y_1 \text{ ve } y>-x+x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h$_4$) $x_1\leq x\leq x_2$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2-2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y<x-x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h$_5$) $x_1\leq x\leq x_2$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1+y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y<x-x_2+y_2\}$$

bölgesidir. $-y_1+y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_6$) $x_1\leq x\leq x_2$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } y>-x+x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h$_7$) $x\geq x_2$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2-2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y<-x+x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h$_8$) $x\geq x_2$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1+y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y<-x+x_2+y_2\}$$

bölgesidir. $-y_1+y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_9$) $x\geq x_2$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y>x-x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k) $|x-x_1|>|y-y_1|$ ve $|x-x_2|<|y-y_2|$ olsun.

$$|x-x_1|+|y-y_2|=2a$$

k$_1$) $x\leq x_1$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y=-x+x_1+y_2-2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y<x-x_1+y_1 \text{ ve } y>x-x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_2$) $x\leq x_1$ ve $y\leq y_1\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y=-x+x_1+y_2-2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y<x-x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_3$) $x\leq x_1$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y=x-x_1+y_2+2a$ doğrusunun

$$\{(x,y): y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y>-x+x_2+y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_1 + y_2 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y): y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır

k$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y): y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 - y_2 - 2a$ doğrusunun

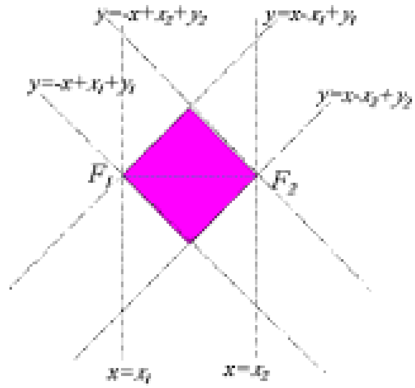
$$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

Böylece, (4.1)denkleminin çözümleri bütün mümkün haller için incelenmiştir. F_1F_2 nin eğimi m iken, m, $2a$ ve $2c$ nın alabileceği değerlere karşılık çözümler gözönüne alındığında aşağıdaki $M-$ *elipslerini* oluşturmak mümkündür. Burada dejenere olan ve olmayan bütün durumlar verilmiştir. $i = 1, 2, ..., 9$ olmak üzere $a_i, b_i, c_i, d_i, ..., k_i$ simgeleri ispat esnasında incelenen hallerin başındaki harflerle aynı olup ilgili haldeki çözüm olan doğru parçalarını veya bölgeleri göstermektedir. F_1F_2 nin eğimi m olmak üzere iki odaklı $M-$*elipsi* aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

I durum: $m = 0$ olsun.

(1) $2a = 2c$ ise $M-$ elipsi $b_4, b_6, c_6, d_6, d_4, e_4$ çözümlerinden oluşan F_1F_2 köşegenli karesel bölgedir (Şekil 4.4.1):

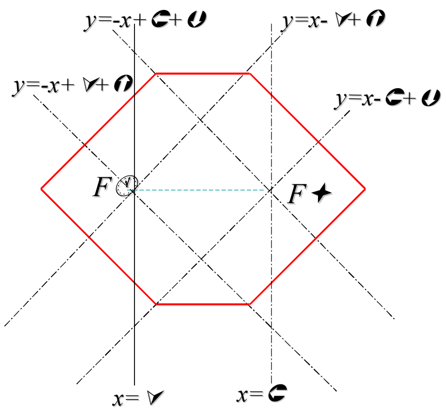


Şekil 4.4.1

(2) $2a > 2c$ ise $M-$ elipsi

$$g_1, g_3, g_6, h_6, k_6, k_9, k_7, k_4, h_4, g_4$$

çözümlerinden oluşan altıgendir (Şekil 4.4.2):



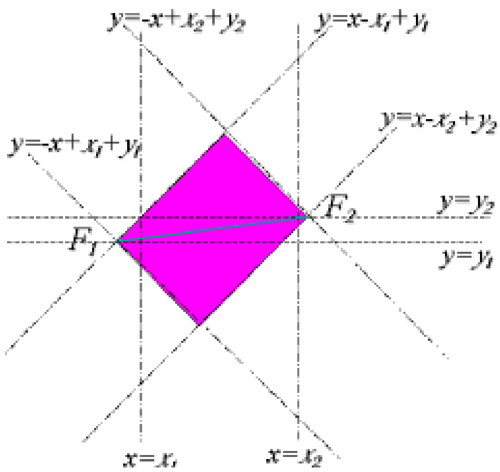
Şekil 4.4.2

II durum: $0 < m < 1$ olsun.

(1) $2a = 2c$ iken $M-$elipsi

$$b_4, b_5, b_6, c_6, d_6, d_5, d_4, e_4$$

çözümlerinden oluşan F_1F_2 köşegenli dikdörtgensel bölgedir (Şekil 4.4.3):

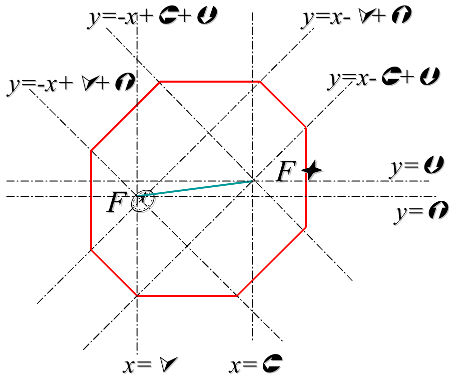


Şekil 4.4.3

(2) $2a > 2c$ ise $M-$ elipsi

$$f_1, f_2, f_3, g_3, g_6, h_6, h_9, k_9, f_9, f_8, f_7, k_7, k_4, h_4, h_1, g_1$$

çözümlerinden oluşan sekizgendir (Şekil 4.4.4):



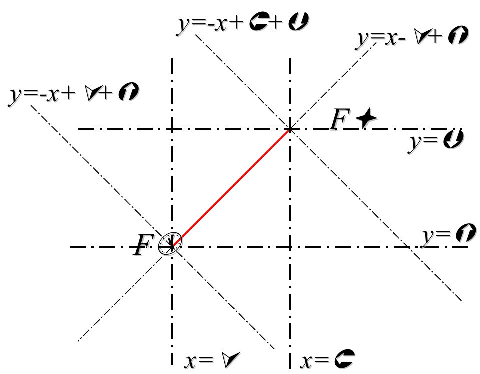
Şekil 4.4.4

III durum: $m = 1$ olsun.

(1) $2a = 2c$ iken $M-$elipsi

$$a_5$$

çözümünden oluşan $[F_1F_2]$ doğru parçasıdır (Şekil 4.4.5):



Şekil 4.4.5

(2) $2a > 2c$ ise $M-$ elipsi

$$f_1, f_2, g_3, h_6, h_9, f_9, f_8, k_7, h_4, h_1$$

çözümlerinden oluşan altıgendir.

IV durum: $1 < m < \infty$ olsun.

(1) $2a = 2c$ iken $M-$elipsi

$$c_2, b_2, d_5, b_5, e_8, d_8, c_5, e_5$$

çözümlerinden oluşan F_1F_2 köşegenli dikdörtgensel bölgedir.

(2) $2a > 2c$ ise $M-$ elipsi

$$f_1, f_2, f_3, g_2, g_3, h_6, h_9, g_9, f_9, f_8, f_7, k_8, k_7, h_4, h_1, k_4$$

çözümlerinden oluşan sekizgendir

V durum: $m \to \infty$ olsun.

(1) $2a = 2c$ iken $M-$elipsi

$$c_2, b_2, d_2, e_8, d_8, c_8$$

çözümlerinden oluşan F_1F_2 köşegenli karesel bölgedir.

(2) $2a > 2c$ ise $M-$ elipsi

$$f_2, g_2, g_3, k_9, g_8, f_8, k_8, k_5, g_1, k_2$$

çözümlerinden oluşan altıgendir.

İki Odaklı Hiperboller

Tanım 4.4.2. $M-$düzleminde verilen iki noktaya d_M-uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların kümesine $M-$*hiperbolü* denir.

Verilen sabit noktalara hiperbolün *odak noktaları* denir ve F_1 ve F_2 ile gösterilir. $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $2a$ verilen sabit olarak alınırsa, $M-$ hiperbolünü oluşturan $P = (x, y)$ noktalarının kümesi

$$H = \left\{ P : |d_M (P, F_1) - d_M (P, F_2)| = 2a,\ P \in \mathbb{R}^2_M \right\}$$

şeklindedir. Yani

$$|max \{|x - x_1|, |y - y_1|\} - max \{|x - x_2|, |y - y_2|\}| = 2a \qquad (4.2)$$

dir.

Teorem 4.4.2. $M-$düzleminde $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odak noktalarının üzerinde bulunduğu $F_1\ F_2$ doğrusunun eğimi m , $2a$ sabitinin ve $2c = d_M(F_1, F_2)$ alacağı değere göre iki odaklı $M-$*hiperbolü* aşağıdaki Tablo 4.2. de verilen geometrik yerlerden biridir:

F⊕✦nin eğimi m	**2a**	**Geometrik yer**
0	2a=0	Hiperbol,[F⊕┫doğru parçasının orta dikme doğrusunun bir parçasına bitişik {(x,y):y¤ -x+⩔+⓿ve y ¤ x-⩔+⓿} ve {(x,y):y✧ x-Ͼ+⓿ve y✧ -x+Ͼ+⓿}düzlemsel bölgelerden oluşur.
	0<2a<2c	Hiperbolün kolları [F⊕┫doğru parçasının orta noktasından a uzaklıkta [F⊕┫ye dik birer doğru parçasının uçlarına bitişik ±1 eğimli iki ışından oluşur.Hiperbolün kolları [F⊕┫nin orta dikmesine göre simetriktir.
	2a=2c	Hiperbol,köşeleri F①e F✦olan {(x,y):y✧ -x+⩔+⓿ve y¤ x-⩔+⓿} ve {(x,y):y¤ -x+Ͼ+⓿ ve y ✧ x-Ͼ+⓿} düzlemsel bölgelerden oluşur.
(0,1)	2a=0	Hiperbol,[F⊕┫doğru parçasının orta dikme doğrusunun bir parçasına bitişik –1 ve +1 eğimli iki ışından oluşur.
	0<2a<|⓿ - ⓿|	Hiperbol,köşeleri F①e F✦olan {(x,y):y✧ -x+⩔+⓿ve y¤ x-⩔+⓿} ve {(x,y):y¤ -x+Ͼ+⓿ ve y ✧ x-Ͼ+⓿} düzlemsel bölgelerden oluşur.
	2a=| ⓿ - ⓿|	Hiperbol, [F⊕┫doğru parçasının orta noktasından eşit uzaklıkta olan iki dikey doğru parçasının uçlarına bitişik ±1 eğimli iki ışından oluşur.
	|⓿ - ⓿|<2a	Hiperbol iki koldan oluşuyor her bir kol bir dikey doğru parçası, –1 eğimli ışın ve bir düzlemsel bölgeden oluşur.
	2a=2c	Hiperbolün kolları [F⊕┿ orta noktasına göre simetriktir.Her bir kol bir dikey doğru parçasından ve –1 ve +1 eğimli iki ışından oluşur.
1	2a=0	Hiperbol bir doğrudan oluşur.Bu doğru –1 eğimli olup, F①e F✦noktalarının orta kümesidir.
	0<2a<2c	Hiperbol,[F⊕┿nin orta noktasından eşit uzaklıkta olan ve –1eğimli iki doğrudan oluşur.

1	2a=2c	Hiperbol, {(x,y):y✧ -x+✓+❶} ve {(x,y):y⌑ -x+❷+❸} düzlemsel bölgelerden oluşur.
(1 , ∞)	2a=0	Hiperbol F①ve F❷den eşit uzaklıkta olan yatay doğru parçasından ve –1 eğimli iki ışından oluşur.
	0<2a<|❷- ✓|	Hiperbol iki kolludur.Her bir kol, bir yatay doğru parçasından ve –1eğimli iki ışından oluşur.
	|❷- ✓|= 2a	Hiperbolün kolları [F①F❷] orta noktasına göre simetriktir.Her bir kol bir yatay doğru parçasından ve –1 ve +1 eğimli iki ışından oluşur.
	|❷- ✓|<2a	Hiperbolün kolları bir doğru parçası,bir ışın ve düzlemsel bölgeden oluşuyor. Doğru parçası yatay durumlu olup,-1 eğimli ışın bir ucuna, düzlemsel bölge de diğer ucuna bitişiktir.
	2a=2c	Hiperbol, F①ve F❷nin köşe olduğu {(x,y):y✧ -x+✓+❶ve y✧ x-✓+❶} ve{(x,y):y⌑ x-❷+❸ve y⌑ -x+❷+❸}düzlemsel bölgelerinden oluşur.
∞	2a=0	Hiperbol,[F①F❷]doğru parçasının orta dikme doğrusunun bir parçası ve Doğru parçasının ucuna bitişik {(x,y):y✧ -x+✓+❶ve y⌑ x-❷+❸} ve {(x,y): y✧ x-✓+❶ve y⌑ -x+❷+❸}düzlemsel bölgelerden oluşur.
	0<2a<2c	Hiperbolün kolları [F①F❷] orta dikmesine göre simetriktir.Her bir kol yatay durumlu doğru parçasından ve –1 ve +1 eğimli iki ışından oluşur.
	2a=2c	Hiperbol, F①ve F❷nin köşe olduğu {(x,y):y✧ -x+✓+❶ve y✧ x-✓+❶} ve{(x,y):y⌑ x-❷+❸ve y⌑ -x+❷+❸}düzlemsel bölgelerinden oluşur.

Tablo 4. 2 İki Odaklı m- hiperbolü $(m_{F_1F_2} > 0)$

İspat: (4.2) denklemi gözönüne alındığında çözümün bulunabilmesi için mutlak değerli ifadelerin x_i, y_i, $2a$ ve $2c$ nin mümkün bütün halleri için çözülmeleri gerektiği görülebilir. Çözümleri $+2a$ için yapılmıştır. $-2a$ için de verilen çözümde $+2a$ yerine $-2a$ yazılması yeterlidir. $P = (x, y)$ herhangi bir nokta olsun.

F_1F_2 doğrusunun eğimi m, $2a$ ve $2c$ nin değerlerine göre aşağıdaki durumlar incelenir. $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ yani, $m_{F_1F_2} \geq 0$ olsun. $m_{F_1F_2} < 0$ olması halinde benzer ispat yapılır. $m_{F_1F_2} < 0$ ise $M-$hiperbolleri $m_{F_1F_2} \geq 0$ halindeki $M-$hiperbollerinin $x = 0$ doğrusuna göre simetriğidir.

$$d_M(P, F_1) - d_M(P, F_2) = 2a$$

yani

$$max\{|x-x_1|,|y-y_1|\}-max\{|x-x_2|,|y-y_2|\}=2a$$

dir.

a) $|x-x_1|=|y-y_1|$ ve $|x-x_2|=|y-y_2|$ olsun.

$$|x-x_1|-|x-x_2|=2a$$

a$_1$) $x\leq x_1$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } y=x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_2$) $x\leq x_1$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } y=x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_3$) $x\leq x_1$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } y=-x+x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_4$) $x_1\leq x\leq x_2$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x=(x_1+x_2+2a)/2$ doğrusu ile

$$\{(x,y):\ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } y=x-x_2+y_2\}$$

kümesinin kesişim noktası olan

$$A_4=(((x_1+x_2+2a)/2),\ \ (x_1-x_2+y_1-2a)/2)$$

noktasıdır.

a$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: Boş kümedir.

a$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusu ile $\{(x,y): \ y = x - x_1 + y_1$ ve $y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişim noktası olan

$$A_6 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2, \ (-x_1 + x_2 + y_1 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

a$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): y = x - x_1 + y_1 \ ve \ y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

a$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b) $|x - x_1| = |y - y_1|$ ve $|x - x_2| > |y - y_2|$ olsun.

$$|x - x_1| - |x - x_2| = 2a$$

b$_1$) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_2$) $x \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_3$) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusu ile
$\{(x, y):\ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişim noktası olan

$$B_4 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2,\ (x_1 - x_2 + y_1 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

b$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusu ile
$\{(x, y):\ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişim noktası olan

$$B_5 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2,\ (-x_1 + x_2 + y_1 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

b$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x=(x_1+x_2+2a)/2$ doğrusu ile

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } y<-x+x_2+y_2\}$$

kümesinin kesişim noktası olan

$$B_6=((x_1+x_2+2a)/2,\ (-x_1+x_2+y_1+2a)/2)$$

noktasıdır.

b$_7$) $x\geq x_2$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } y>-x+x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_8$) $x\geq x_2$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=\ x-x_1+y_1 \text{ ve } y>-x+x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

b$_9$) $x\geq x_2$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } y<x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c) $|x-x_1|=|y-y_1|$ ve $|x-x_2|<|y-y_2|$ olsun.

$$|y-y_1|+|y-y_2|=2a$$

c_1) $x\leq x_1$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1-y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } y<x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $y_1 - y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

$c_2)$ $x \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusu ile

$$\{(x, y) : \ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

kümesinin kesişme noktası olan

$$C_2 = ((2x_1 + y_1 - y_2 - 2a)/2, \ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

$c_3)$ $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \ y = -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-\,y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c$_4)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1 - y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $y_1 - y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c$_5)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusu ile
$\{(x, y) : \ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişme noktası olan

$$C_5 = ((2x_1 - y_1 + y_2 + 2a)/2, \ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

c$_6)$ $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \ y = x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1+y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c$_7$) $x\geq x_2$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1-y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=-x+x_1+y_1 \text{ ve } y<-x+x_2+y_2\}$$

kümesidir $y_1-y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

c$_8$) $x\geq x_2$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusu ile

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } \quad y<-x+x_2+y_2\}$$

kümesinin kesişme noktası olan

$C_8=((2x_1-y_1+y_2+2a)/2,\ (y_1+y_2+2a)/2)$ noktasıdır.

c$_9$) $x\geq x_2$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm:$-y_1+y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y=x-x_1+y_1 \text{ ve } y>x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $-y_1+y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur

d) $|x-x_1|>\ |y-y_1|$ ve $|x-x_2|=|y-y_2|$ olsun.

$$|x-x_1|-|x-x_2|=2a$$

d$_1$) $x\leq x_1$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y=x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_2$) $x\leq x_1$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y=x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_3$) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusu ile

$$\{(x,y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesinin kesişim noktası olan

$$D_4 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2,\ (x_1 - x_2 + 2y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

d$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusu ile

$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişim noktası olan

$$D_5 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2,\ (x_1 - x_2 + 2y_2 + 2)/2)$$

noktasıdır.

d$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusu ile

$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişim noktası olan

$$D_6 = ((x_1 + x_2 + 2a)/2,\ (-x_1 + x_2 + 2y_2 - 2a)/2)$$

noktasıdır.

d$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

d$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

e) $|x - x_1| < |y - y_1|$ ve $|x - x_2| = |y - y_2|$ olsun.

$$|y - y_1| - |y - y_2| = 2a$$

e_1) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1 - y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $y_1 - y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

e_2) $x \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusu ile $\{(x,y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişme noktası olan

$$E_2 = ((2x_2 + y_1 - y_2 + 2a)/2, (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

e_3) $x \le x_1$ ve $y \ge y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \ne 2a$ iken çözüm yoktur.

e$_4$) $x_1 \le x \le x_2$ ve $y \le y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1 - y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir $y_1 - y_2 \ne 2a$ iken çözüm yoktur.

e$_5$) $x_1 \le x \le x_2$ ve $y_1 \le y \le y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusu ile $\{(x, y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = x - x_2 + y_2\}$ kümesinin kesişme noktası olan

$$E_5 = ((2x_2 + y_1 - y_2 + 2a)/2,\ (y_1 + y_2 + 2a)/2)$$

noktasıdır.

e$_6$) $x_1 \le x \le x_2$ ve $y \ge y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \ne 2a$ iken çözüm yoktur.

e$_7$) $x \ge x_2$ ve $y \le y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1 - y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y = -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir $y_1 - y_2 \ne 2a$ iken çözüm yoktur.

e$_8$) $x \ge x_2$ ve $y_1 \le y \le y_2$ olsun.

Çözüm: $y=(y_1+y_2+2a)/2$ doğrusu ile $\{(x,y): \ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y=-x+x_2+y_2\}$ kümesinin kesişme noktası olan

$$E_8=((2x_2+y_1-y_2+2a)/2, \ (y_1+y_2+2a)/2)$$

noktasıdır.

e$_9$) $x\geq x_2$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1+y_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y=x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $-y_1+y_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur

f) $|x-x_1|> |y-y_1|$ ve $|x-x_2|>|y-y_2|$ olsun.

$$|x-x_1|-|x-x_2|=2a$$

f$_1$) $x\leq x_1$ ve $y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y>x-x_1+y_1 \text{ ve } y>x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

f$_2$) $x\leq x_1$ ve $y_1\leq y\leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y>x-x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

f$_3$) $x\leq x_1$ ve $y\geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1-x_2=2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y<-x+x_1+y_1 \text{ ve } y<-x+x_2+y_2\}$$

kümesidir. $x_1-x_2\neq 2a$ iken çözüm yoktur.

f$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y): \ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

f$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y): \ y < \ x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

f$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x = (x_1 + x_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y): \ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

f$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

f$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y < \ x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

f$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $x_1 - x_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y): \ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $x_1 - x_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

g) $|x - x_1| < |y - y_1|$ ve $|x - x_2| > |y - y_2|$ olsun

$$|y - y_1| - |x - x_2| = 2a$$

g_1) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g_2) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1 \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_3$) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_2 + y_1 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

g$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_2 + y_1 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y) : \ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır

h) $|x - x_1| < |y - y_1|$ ve $|x - x_2| < |y - y_2|$ olsun.

$$|y - y_1| - |y - y_2| = 2a$$

h$_1$) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun

Çözüm: $y_1 - y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y) : y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $y_1 - y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_2$) $x \ \leq x_1$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_3$) $x \ \leq x_1$ ve $y \ \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x, y) : \ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } \ y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesidir. $-\ y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y_1 - y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $y_1 - y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

h$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = (y_1 + y_2 + 2a)/2$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

h$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $-y_1 + y_2 = 2a$ olmak üzere

$$\{(x,y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

kümesidir. $-\ y_1 + y_2 \neq 2a$ iken çözüm yoktur.

k) $|x - x_1| > |y - y_1|$ ve $|x - x_2| < |y - y_2|$ olsun.

$$|x - x_1| - |y - y_2| = 2a$$

k$_1$) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 + y_2 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y > x - x_1 + y_1 \text{ ve } y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_2$) $x \leq x_1$ ve $y \leq y_1 \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x,y):\ y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_3$) $x \leq x_1$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : y < -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_4$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -x - x_1 + y_2 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_5$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_1 + y_2 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < x - x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_6$) $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x - x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y > -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır

k$_7$) $x \geq x_2$ ve $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = - \; x + x_1 + y_2 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y > -x + x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_8$) $x \geq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = -x + x_1 + y_2 + 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y) : \; y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } \; y < -x + x_2 + y_2\}$$

bölgesinde kalan kısmıdır.

k$_9$) $x \geq x_2$ ve $y \geq y_2$ olsun.

Çözüm: $y = x - x_1 + y_2 - 2a$ doğrusunun

$$\{(x, y):\ y < x - x_1 + y_1 \text{ ve } y > x - x_2 + y_2\}$$

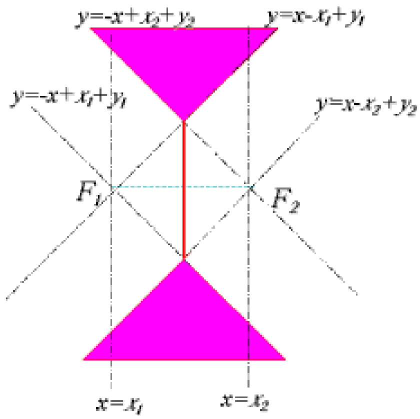
bölgesinde kalan kısmıdır.

Böylece, (4.2) denkleminin çözümleri bütün mümkün haller için incelenmiştir. F_1F_2 nin eğimi m, $2a$ ve $2c$ nin alabileceği değerlere karşılık çözümler gözönüne alındığında aşağıdaki $M-$ hiperbollerini oluşturmak mümkündür. Burada dejenere olan ve olmayan bütün durumlar verilmiştir. $i = 1, 2, ..., 9$ olmak üzere $a_i, b_i, .., k_i$ simgeleri ispat esnasında incelenen hallerin başındaki harflerle aynı olup ilgili haldeki çözüm olan doğru parçalarını veya bölgeleri göstermektedir.

I durum: $m = 0$ olsun. Bu durumda $M-$hiperbolü, $2a = 0$ iken

$$e_1, e_2, c_4, c_7, h_1, h_4, h_7, f_4, f_6, e_3, e_6, c_6, c_9, h_3, h_6, h_9$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.6),



Şekil 4.4.6

$0 < 2a < 2c$ iken

$$k_7, k_4, f_4, f_6, k_6, k_9 \quad \text{ve} \quad g_1, g_4, f_4, h_6, g_6, g_3$$

çözümlerinden ,

$2a = 2c$ iken

$$b_1, b_2, f_1, f_3 \ \ ve \ d_7, d_9, f_7, f_9$$

çözümlerinden oluşuyor.

II durum: $0 < m < 1$ olsun. Bu durumda $M-$hiperbolü,

$2a = 0$ iken

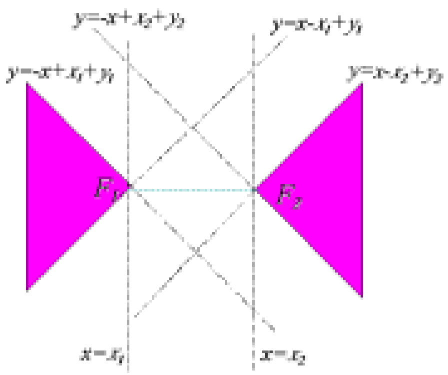
$$g_3, g_6, f_5, k_4, k_7$$

çözümlerinden $(orta\ küme)$,

$0 < 2a < |y_2 - y_1|$ iken

$$k_1, g_5, f_5, f_4, k_4, k_7 \ \ \text{ve} \ \ g_3, k_6, f_6, f_5, k_5, k_7$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.7),

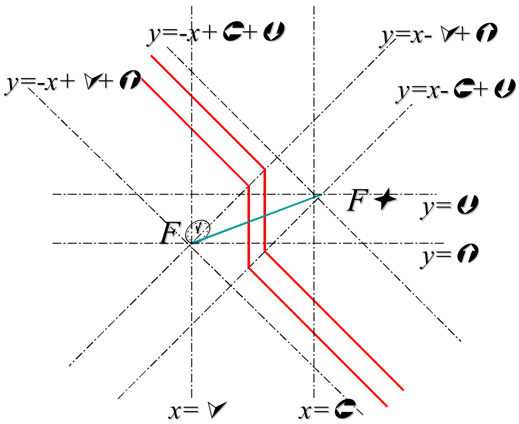


Şekil 4.4.7

$2a = |y_2 - y_1|$ iken

$$e_1, e_2, c_4, c_7, f_4, f_5, g_5, g_2, g_3 \ \ \text{ve} \ \ e_3, e_6, c_6, c_9, f_6, f_5, k_5, k_8, k_7$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.8),



Şekil 4.4.8

$|y_2 - y_1| < 2a < 2c$ iken

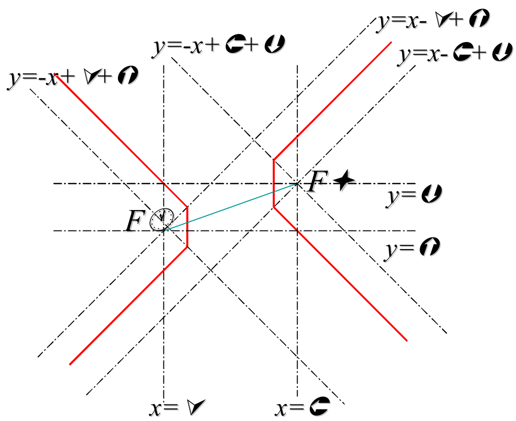
$$g_1, g_4, f_4, f_5, g_5, g_2 \quad \text{ve} \quad k_7, k_8, k_5, f_5, f_6, k_6, k_9$$

çözümlerinden,

$2a = 2c$ iken

$$b_1, b_2, b_3, f_1, f_2, f_3 \quad ve \quad d_7, d_8, d_9, f_7, f_8, f_9$$

çözümlerinden oluşuyor (Şekil 4.4.9).



Şekil 4.4.9

III durum: $m = 1$ olsun. Bu durumda $M-$hiperbolü,

$2a = 0$ iken

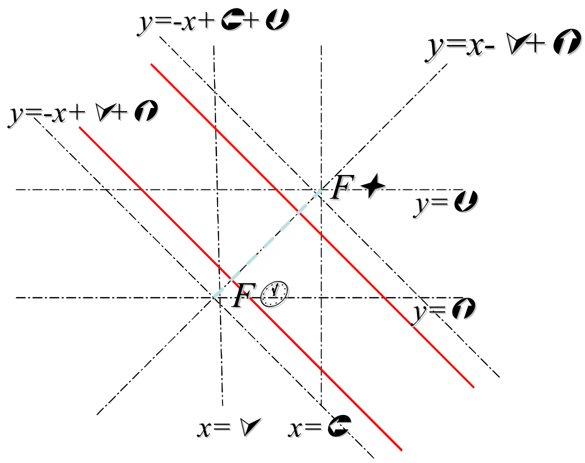
$$g_2, g_3, k_7 \text{ veya } g_2, k_5, k_7$$

çözümlerinden ($orta\ küme$),

$0 < 2a < 2c$ iken

$$g_3, g_2, g_5, k_4, k_7 \quad \text{ve} \quad g_3, g_6, k_5, k_8, k_7$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.10),



Şekil 4.4.10

$2a = 2c$ iken

$$g_3, f_3, g_2, f_2, f_1, k_4, h_4, k_7, h_7 \quad \text{ve} \quad g_3, h_3, g_6, h_6, f_9, k_8, k_7, f_7$$

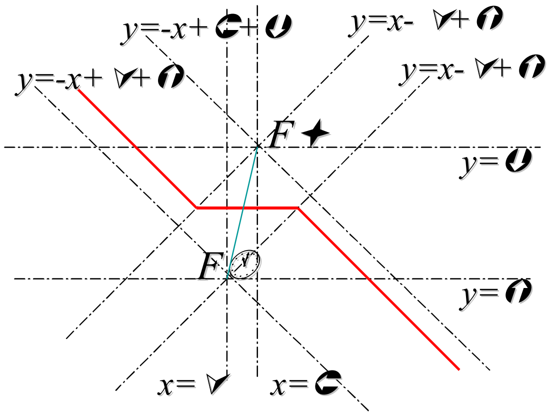
çözümlerinden oluşuyor.

IV durum: $1 < m < \infty$ olsun. Bu durumda $M-$hiperbolü,

$2a = 0$ iken

$$g_3, g_2, f_5, k_8, k_7$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.11),



Şekil 4.4.11

$0 < 2a < |x_2 - x_1|$ iken çözümlerinden ,

$$g_3, g_2, h_5,\ k_8, k_7 \quad \text{ve} \quad g_3, g_5, h_5, k_8, k_7$$

çözümlerinden,

$2a = |x_2 - x_1|$ iken

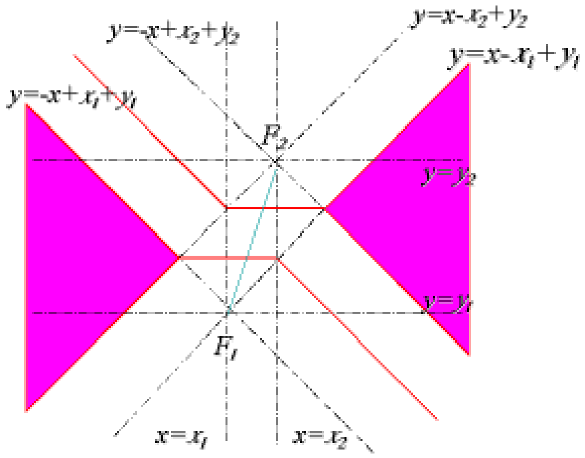
$$d_1, d_2, b_2, b_3, f_1, f_2, f_3, h_2, h_5, k_5, k_8, k_7 \quad \text{ve} \quad d_7, d_8, b_8 b_9, f_7, f_8, f_9, h_8, h_5, g_5, g_5, g_6$$

çözümlerinden,

$|x_2 - x_1| < 2a < 2c$ iken

$$k_6, h_2, h_5, k_5, k_4, k_7 \quad \text{ve} \quad g_3, g_6, g_5, h_5, h_8, g_8$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.12),



Şekil 4.4.12

$2a = 2c$ iken

$$c_1, c_4, c_7, h_1, h_4, h_7 \quad \text{ve} \quad e_3, e_6, e_9, h_3, h_6, h_9$$

çözümlerinden oluşuyor.

V durum: $m \to \infty$ olsun. Bu durumda $M-$hiperbolü,

$2a = 0$ iken

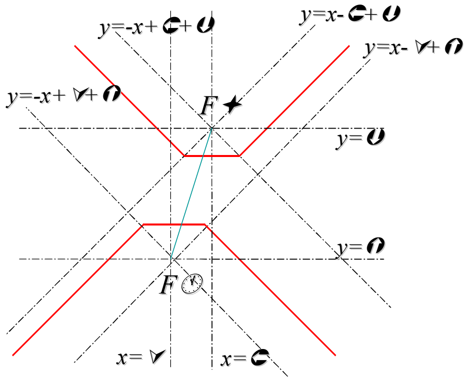
$$d_1, d_2, b_2, b_3, f_1, f_2, f_3, h_2, h_8, d_7, d_8, b_8, b_{9,} f_7, f_8, f_9$$

çözümlerinden $($*orta küme*$)$,

$0 < 2a < 2c$ iken

$$k_1, k_2, h_5, k_8, k_7 \quad \text{ve} \quad g_3, g_2, h_2, g_8, g_9$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.13)



Şekil 4.4.13

$2a = 2c$ iken

$$c_1, c_2, h_1, h_7 \quad \text{ve} \quad e_1, e_2, h_3, h_9$$

çözümlerinden oluşuyor.

4.5 Odak -Doğrultman M-Konikleri

Odak-Doğrultman M- Koniklerinin Genel Denklemlerinin Bulunması

Tanım 4.5.1. Verilen bir $F = F_1 = (x_1, y_1)$ odak noktasına d_M-uzaklığının verilen bir $\ell ...\ ax + by + c = 0$ $($*doğrultman*$)$ doğrusuna d_M-uzaklığına oranı, verilen bir e $($*dış merkezlik*$)$ sayısı olan noktaların kümesine *odak-doğrultman* $M-$*konik* denir. Yani, $M-$düzleminde

$$\left\{ X : \frac{d_M(X, F)}{d_M(X, \ell)} = e \right\}$$

kümesine konik denir. Bu konik,

$$e < 1 \quad iken \quad M - elipsi,$$

$$e = 1 \quad iken \quad M - parabolü$$

$$e > 1 \quad iken \quad M - hiperbolü$$

belirtir. Odak-doğrultman $M-$koniklerinin denklemi

$$max\left\{|x-x_1|,|y-y_1|\right\}-e\frac{|ax+by+c|}{|a|+|b|}=0 \tag{4.3}$$

olarak ifade edilebilir.

Teorem 4.5.1. $M-$ düzleminde (4.3) denklemi ile verilen $M-$konikleri $F_1=(x_1,y_1)$ (odak) noktası, $l...$ $ax+by+c=0$ (*doğrultman*) doğrusu ve e (*dış merkezlik*) katsayısının alacağı değerlere göre Tablo 4.3 de verilen geometrik yerlerden biridir:

e	-a/b	**Geometrik yer**
$0<e<1$	$\forall$-a/b	Köşegenleri F noktasından geçen ∓1 eğimli doğrular olan dörtgendir.
e=1	-a/b$\in\{0,\infty\}$	M-parabolü yatay yada dikey doğru parçasından, ∓1 eğimli iki ışından oluşuyor.Doğru parçasının orta kümesi simetri eksenidir.
	$\lvert -a/b\rvert=1$	M-parabolü,iki doğru parçası ve iki ışından oluşur. F den geçen ve *l* ye dik olan doğru simetri eksenidir.
	$\lvert -a/b\rvert\in(0,1)$ veya $\lvert -a/b\rvert\in(1,\infty)$	M-parabolü, iki doğru parçasından, nokta ve doğrunun konumuna göre -1 (veya $+1$) eğimli iki ışından oluşuyor.
e>1	-a/b$\in\{0,\infty\}$ve $e>\lvert a\rvert+\lvert b\rvert=1$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Kolların her biri bir doğru parçasından ve iki ışından oluşur.*l* nin eğimine bağlı olarak bu doğru parçaları yatay veya dikey doğrulardır.Ayrıca F den geçen ve *l* ye dik olan doğru simetri eksenidir.Bu dört ışın,kesişme noktası simetri ekseni ile *l* doğrusunun kesişme noktası olan iki doğru üzerindedir.
	-a/b$\in\{-1,1\}$ve $\lvert -a/b\rvert<e<\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Kollardan biri iki doğru parçasından ve iki ışından,diğer kol ise sadece iki ışından oluşur.F den geçen ve *l* ye dik olan doğru simetri eksenidir.Bu dört ışın,kesişme noktası simetri ekseni üzerinde olan iki doğru üzerindedir.İkinci kolu oluşturan iki ışının başlangıç noktası bu noktadır.
	-a/b$\in\{-1,1\}$ve $\lvert -a/b\rvert<e=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Kollardan biri iki doğru parçasından ve iki ışından,diğer kol ise sadece iki ışından oluşur.F den geçen ve *l* ye dik olan doğru simetri eksenidir.Bu dört ışın,kesişme noktası simetri ekseni olan yatay ve dikey iki doğru üzerindedir.İkinci kolu oluşturan ışınlar bu noktadan başlar.

	$-a/b\in\{-1,1\}$ ve $e>\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Kollardan biri iki doğru parçasından ve iki ışından,diğer kol ise sadece iki ışından oluşur.F den geçen ve l ye dik olan doğru simetri eksenidir. Dört ışın,kesişme noktası simetri ekseni olan iki doğru üzerindedir.
	$0<\lvert -a/b\rvert<1$ ve $\lvert -a/b\rvert<e<\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür. Kollardan biri iki doğru parçasından ve iki ışından,diğeri iki ışından oluşur. Dört ışın, kesişen iki doğru üzerindedir.
	$0<\lvert -a/b\rvert<1$ ve $\lvert -a/b\rvert<e=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Kollardan biri bir doğru parçasından ve iki ışından, diğeri iki ışından oluşur. Her iki koldaki ışınlardan biri yatay durumlu olup aynı doğru üzerindedir.Diğer iki ışın ise paralel doğrular üzerindedir.
$e>1$	$0<\lvert -a/b\rvert<1$ ve $e>\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Her iki kol bir doğru parçasından ve iki ışından oluşur. Dört ışın, kesişme noktası l üzerinde olan iki doğru üzerindedir.
	$1<\lvert -a/b\rvert<\infty$ ve $\lvert -a/b\rvert<e<\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M hiperbolüdür.Kollardan biri iki doğru parçasından ve iki ışından,diğeri iki ışından oluşur. Dört ışın,kesişen iki doğru üzerindedir.
	$1<\lvert -a/b\rvert<\infty$ ve $\lvert -a/b\rvert<e=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür.Kollardan biri bir doğru parçasından ve iki ışından, diğeri iki ışından oluşur. Her iki koldaki ışınlardan biri dikey durumlu olup aynı doğru üzerindedir. Diğer iki ışın ise paralel doğrular üzerindedir.
	$1<\lvert -a/b\rvert<\infty$ ve $e>\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	İki kollu bir M-hiperbolüdür. Her iki kol bir doğru parçasından ve iki ışından oluşur. Dört ışın, kesişme noktası l üzerinde olan iki doğru üzerindedir.

Tablo 3 Odak-Doğrultman m- konikleri

İspat: $P=(x,y)$ herhangi bir nokta ve l doğrusunun eğimi $m=-a/b$ olsun.

$d_M(P,F)=max\{|x-x_1|,|y-y_1|\}$ ve $d_M(P,\ell)=\dfrac{|ax+by+c|}{|a|+|b|}$ olur.

P noktasının l nin alt veya üst bölgesinde olması durumu dikkate alınırsa aşağıdaki durumlar elde edilir.

I Durum:. $ax+by+c<0$ olsun.

a) $|x-x_1|\geq|y-y_1|$ olsun. Bu durumda,

$$|x-x_1|=e\,\frac{-ax-by-c}{|a|+|b|}$$

olur.

a_1) $x\leq x_1,\ y\leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y=(|a|+|b|-ea)\,x/be-((|a|+|b|)\,x_1+ec)\,/be$

doğrusunun $y\geq x-x_1+y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

a_2) $x \leq x_1$, $y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = (|a| + |b| - ea)\, x/be - ((|a| + |b|)\, x_1 + ec)\, /be$ doğrusunun $y \leq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

a_3) $x \geq x_1$, $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -(|a| + |b| + ea)\, x/be + ((|a| + |b|)\, x_1 - ec)\, /be$ doğrusunun $y \geq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

a_4) $x \geq x_1$, $y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -(|a| + |b| + ea)\, x/be + ((|a| + |b|)\, x_1 - ec)\, /be$ doğrusunun $y \leq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

b) $|x - x_1| < |y - y_1|$ olsun. Bu durumda

$$|y - y_1| = e\frac{-ax - by - c}{|a| + |b|}$$

olur.

b_1) $x \leq x_1$, $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = eax/\,(|a| + |b| - eb) + ((|a| + |b|)\, y_1 + ec)\, /\, (|a| + |b| - eb)$ doğrusunun $y \leq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

b_2) $x \leq x_1$, $y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -eax/\,(|a| + |b| + eb) + ((|a| + |b|)\, y_1 - ec)\, /\, (|a| + |b| + eb)$ doğrusunun $y \geq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

b_3) $x \geq x_1$, $y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = eax/\,(|a| + |b| - eb) + ((|a| + |b|)\, y_1 + ec)\, /\, (|a| + |b| - eb)$ doğrusunun $y \leq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

b_4) $x \geq x_1$, $y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -eax/\,(|a| + |b| + eb) + ((|a| + |b|)\, y_1 - ec)\, /\, (|a| + |b| + eb)$ doğrusunun $y \geq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

II Durum:. $ax + by + c > 0$ olsun.

a$^{\shortmid}$) $|x-x_1| \geq |y-y_1|$ olsun. Bu durumda

$$|x-x_1| = e\frac{ax+by+c}{|a|+|b|}$$

olur.

$a_1^{\shortmid}$) $x \leq x_1,\, y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = (|a|+|b|+ea)\,x/be - ((|a|+|b|)\,x_1+ec)\,/be$

doğrusunun $y \geq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

$a_2^{\shortmid}$) $x \leq x_1,\, y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = (|a|+|b|+ea)\,x/be - ((|a|+|b|)\,x_1+ec)\,/be$

doğrusunun $y \leq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

$a_3^{\shortmid}$) $x \geq x_1,\, y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = (|a|+|b|-ea)\,x/be - ((|a|+|b|)\,x_1+ec)\,/be$

doğrusunun $y \geq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

$a_4^{\shortmid}$) $x \geq x_1,\, y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = (|a|+|b|-ea)\,x/be - ((|a|+|b|)\,x_1+ec)\,/be$

doğrusunun $y \leq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

b$^{\shortmid}$) $|x-x_1| < |y-y_1|$ olsun. Bu durumda

$$|y-y_1| = e\frac{ax+by+c}{|a|+|b|}$$

olur.

$b_1^{\shortmid}$) $x \leq x_1,\, y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -eax/\,(|a|+|b|+eb) - ((|a|+|b|)\,y_1+ec)\,/\,(|a|+|b|+eb)$

doğrusunun $y \leq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

$b_2^{\shortmid}$) $x \leq x_1,\, y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = eax/\,(|a|+|b|-eb) + ((|a|+|b|)\,y_1+ec)\,/\,(|a|+|b|-eb)$

doğrusunun $y \geq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

$b_3^{\shortmid}$) $x \geq x_1,\, y \leq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = -eax/\left(|a| + |b| + eb\right) - \left(\left(|a| + |b|\right) y_1 + ec\right) / \left(|a| + |b| + eb\right)$ doğrusunun $y \leq -x + x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

$b'_4)$ $x \geq x_1$, $y \geq y_1$ olsun.

Çözüm: $y = eax/\left(|a| + |b| - eb\right) + \left(\left(|a| + |b|\right) y_1 + ec\right) / \left(|a| + |b| - eb\right)$ doğrusunun $y \geq x - x_1 + y_1$ bölgesinde kalan kısmıdır.

Bu çözümlerde $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ olarak alındığında *odak-doğrultman* $M-$*konikleri* elde edilir.

Odak-Doğrultman M-Elipsi

$max\left\{|x - x_1|, |y - y_1|\right\} = e \; d_M\left(P, \ell\right)$ odak -doğrultman $M-$konik denkleminde $e < 1$ olarak alınırsa $M-$*elipsi* elde edilir. $ax_1 + by_1 + c < 0$ ve $m = 0$ veya $m \to \infty$ iken *odak-doğrultman* $M-$*elipsi*

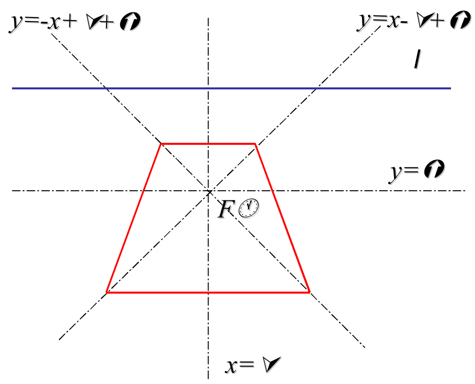
$$a'_1, a'_2, a_3, a_4, b'_1, b_2, b'_3, b_4$$

çözümlerinden, diğer durumlarda

$$a_1, a_2, a'_3, a'_4, b_1, b'_2, b_3, b'_4$$

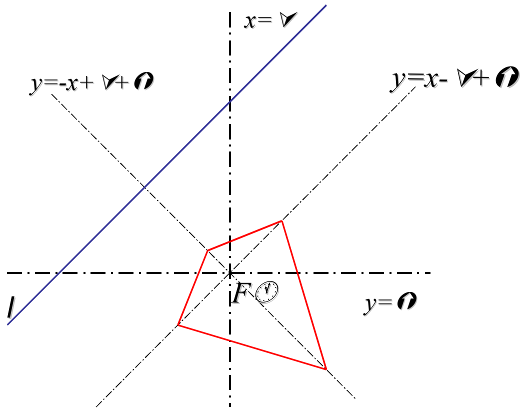
çözümlerinden oluşuyor. $(ax_1 + by_1 + c > 0)$ için de benzer durum geçerlidir. Aşağıdaki şekiller odak-doğrultman $M-$elipslerine birer örnektir:

$m = 0$ iken (Şekil 4.4.14),



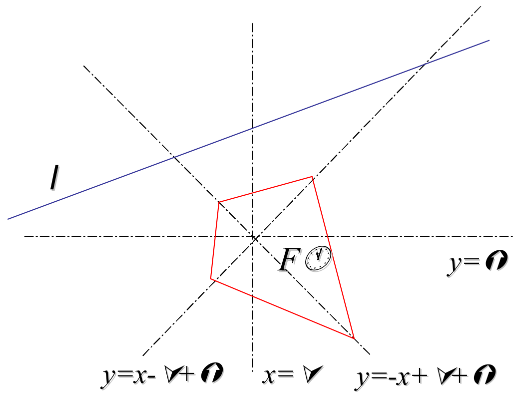
Şekil 4.4.14

$m = 1$ iken (Şekil 4.4.15),



Şekil 4.4.15

$m \neq 1$ iken (Şekil 4.4.16),



Şekil 4.4.16

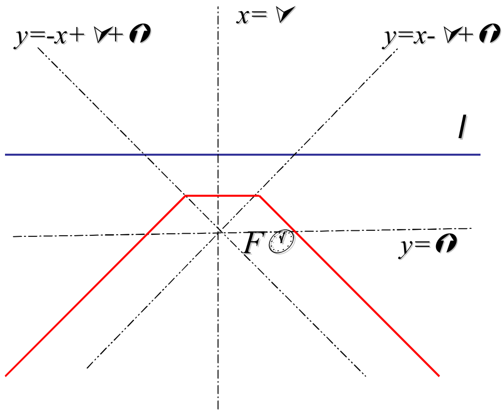
Odak-Doğrultman M-Parabolü

$max\left\{|x - x_1|, |y - y_1|\right\} = e \;\; d_M\left(P, \ell\right)$ odak -doğrultman $M-$konik denkleminde $e = 1$ olarak alınırsa, $M-$*parabolü* elde edilir. $ax_1 + by_1 + c < 0$ iken $M-$*parabolü* aşağıdaki gibidir:

$m = 0$ iken

$$a_1^{'}, a_2^{'}, b_2, b_4, a_2, a_1$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.17),



Şekil 4.4.17

$m \to \infty$ iken

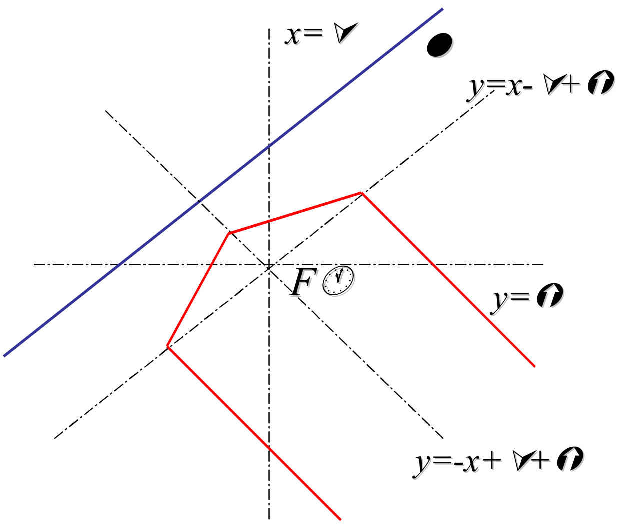
$$b_2, b_4, a_4, a_3, b_1^{\shortmid}, b_4^{\shortmid}$$

çözümlerinden, diğer durumlarda

$$a_3, a_1, a_1^{\shortmid}, a_2^{\shortmid}, b_2, b_4^{\shortmid}, b_4, b_3$$

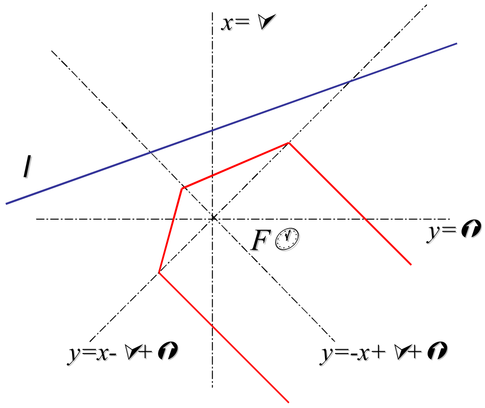
çözümlerinden oluşuyor. Bazı $M-$parabol örnekleri aşağıdaki gibidir:

$m = 1$ iken (Şekil 4.4.18),



Şekil 4.4.18

$1 < m < \infty$ iken (Şekil 4.4.19),



Şekil 4.4.19

Odak-Doğrultman M-Hiperbolü

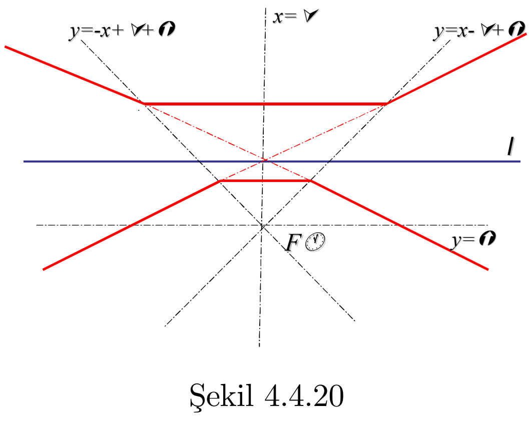
$max\left\{|x - x_1|, |y - y_1|\right\} = e \ \ d_M\left(P, \ell\right)$ odak -doğrultman $M-$konik denkleminde $e > 1$ olarak alınırsa, $M-$*hiperbolü* elde edilir. $ax_1 + by_1 + c < 0$ iken

odak -doğrultman $M-$*hiperbolü*

$m = 0$, $e > |a| + |b| = 1$ iken

$$a'_2, b_2, b_4, a_3 \text{ ve } a_1, a_2, b'_2, b'_4, a_4, a'_3$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.20),

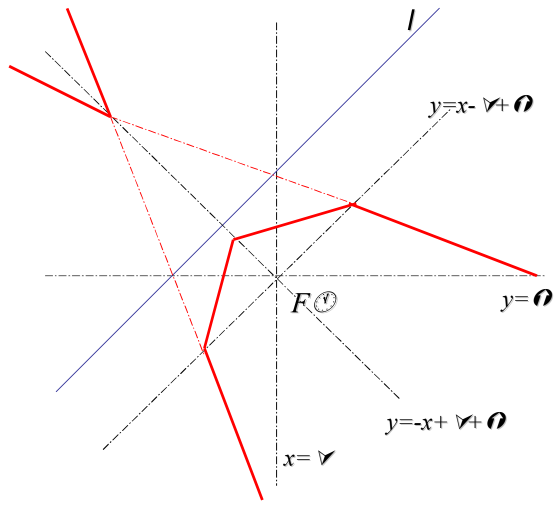


Şekil 4.4.20

$m = 1,\ 1 < e < |a| + |b|$ iken

$$a'_2, b_2 \text{ ve } b_3, b_1, a_1, a_2, b'_2, b'_4, a'_4, a'_3$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.21),



Şekil 4.4.21

$m = 1,\ 1 < e = |a| + |b|$ iken

$$a'_2, b_2 \text{ ve } b_1, a_1, a_2, b'_2, b'_4, a'_4$$

çözümlerinden,

$m = 1,\ e > |a| + |b|$ iken

$$b'_1, b'_2, b_2, b_4 \text{ ve } b_1, a_1, a_2, b'_2, b'_4, b_4$$

çözümlerinden,

$0 < m < 1,\ m < e < |a| + |b|$ iken

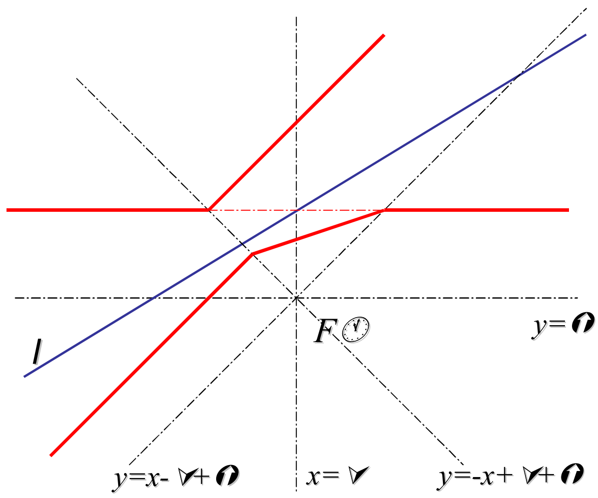
$$a'_2, b_2 \text{ ve } b_1, a_1, a_2, b'_2, b'_4, a'_4, a'_3$$

çözümlerinden,

$0 < m < 1,\ m < e = |a| + |b|$ iken

$$a_2^{'}, b_2, b_4 vea_1, a_2, b_2^{'}, b_4^{'}, a_4^{'}$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.22),



Şekil 4.4.22

$0 < m < 1,\ \ e > |a| + |b|$ iken

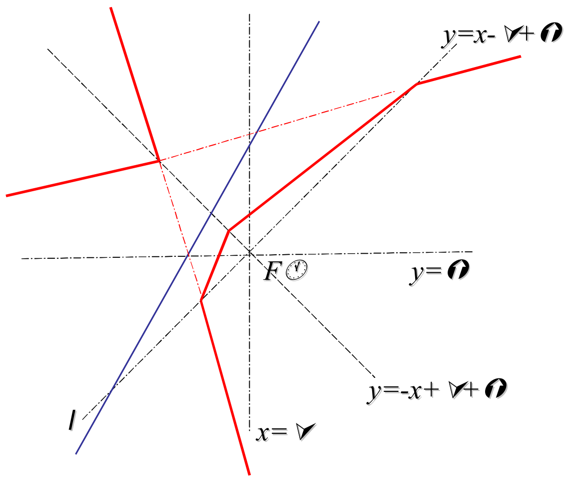
$$a_1^{'}, a_2^{'}, b_2, b_4, a_4 \text{ ve } a_1, a_2, b_1^{'}, b_2^{'}, a_4^{'}$$

çözümlerinden,

$1 < m < \infty,\ m < e < |a| + |b|$ iken

$$a_1^{'}, a_2^{'}, b_1 \text{ ve } b_3, b_1, a_1, a_2, b_2^{'}, b_4^{'}, a_4^{'}$$

çözümlerinden (Şekil 4.4.23),



Şekil 4.4.23

$1 < m < \infty$, $m < e = |a| + |b|$ iken

$$a'_1, a'_2, b_1 \text{ ve } b_1, a_1, a_2, b'_2, b'_4$$

çözümlerinden,

$1 < m < \infty$, $\ e > |a| + |b|$ iken

$$b'_1, a'_1, a'_2, b_2, b_4 \text{ ve } b_1, a_1, a_2, b'_2, b'_4$$

çözümlerinden,

$m \to \infty$, $\ e > |a| + |b| = 1$ iken

$$b'_1, b'_3, a_3, a_4, b_4, b_2 \text{ ve } b_3, a'_3, a'_4, b'_4$$

çözümlerinden oluşuyor.

4.6 Dejenere Odak-Doğrultman M-Konikleri

$$max\left\{|x-x_1|,|y-y_1|\right\}-e\left(|a|+|b|\right)^{-1}|ax+by+c|=0$$

denklemi için $F\circ l$ iken aşağıdaki *dejenere odak doğrultman $M-$konikleri* elde edilir. Bu konikleri Tablo 4.4 de verildiği şekilde sınıflandırabiliriz:

<table>
<tr><th>e</th><th colspan="2">-a/b</th><th>Geometrik yer</th></tr>
<tr><td>0<e<1</td><td colspan="2">∀-a/b</td><td>F=(⋎,●) odak noktasıdır.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">e=1</td><td colspan="2">-a/b=0</td><td>{(x,y):y⌑ ●ve y ⌑ -x+⋎+●ve y ⌑ x-⋎+●} ve
{(x,y):y✧ ●ve y ⌑ -x+⋎+●ve y ⌑ x-⋎+●}
düzlemsel bölgesidir.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-a/b→Ⅱ</td><td>{(x,y):x✧ ⋎ ve y ✧ -x+⋎+●ve y ⌑ x-⋎+●} ve
{(x,y):x⌑ ⋎ ve y ⌑ -x+⋎+●ve y ✧ x-⋎+●}
düzlemsel bölgesidir.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-a/b∉{0,Ⅱ}</td><td>F noktasından geçen y=-x+⋎+● doğrusudur.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">e>1</td><td colspan="2">e<|a|+|b|</td><td>F noktasında kesişen iki doğrudur.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">e=|a|+|b|</td><td>-a/b∈ {0,Ⅱ}</td><td>y= x-⋎+● ve y= -x+⋎+● doğrularıdır.</td></tr>
<tr><td>-a/b=1</td><td>x=⋎ ve y=●doğrularıdır.</td></tr>
<tr><td>0<-a/b<1</td><td>y=●ve y= x-⋎+●doğrularıdır.</td></tr>
<tr><td>1<-a/b< Ⅱ</td><td>x=⋎ ve y= x-⋎+●doğrularıdır.</td></tr>
<tr><td colspan="2">e>|a|+|b|</td><td>F=(⋎,●) odak noktasıdır.</td></tr>
</table>

Tablo 4.4 Dejenere Odak-Doğrultman M-konikleri

I Durum: $0<e<1$ olsun. Bu durumda çözüm $F=(x_1,y_1)$ odak noktasıdır.

II Durum: $e=1$ olsun.

i) $-\frac{a}{b}=0,\ b\neq 0$ iken çözüm

$$\{(x,y):y\geq y_1\text{ ve }\ y\geq -x+x_1+y_1\text{ ve }y\geq x-x_1+y_1\}$$

ve

$$\{(x,y):y\leq y_1\text{ ve }\ y\leq -x+x_1+y_1\text{ ve }y\leq x-x_1+y_1\}$$

düzlemsel bölgeleridir.

ii) $-\frac{a}{b}=\infty$ iken çözüm

$$\{(x,y):x\geq x_1\text{ ve }\ y\leq -x+x_1+y_1\text{ ve }y\geq x-x_1+y_1\}$$

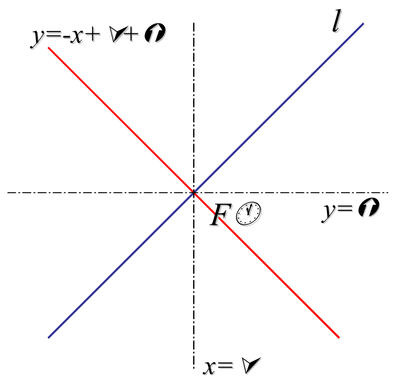
ve

$$\{(x,y) : x \geq x_1 \quad \text{ve} \quad y \geq -x + x_1 + y_1 \text{ ve } y \leq x - x_1 + y_1\}$$

düzlemsel bölgeleridir.

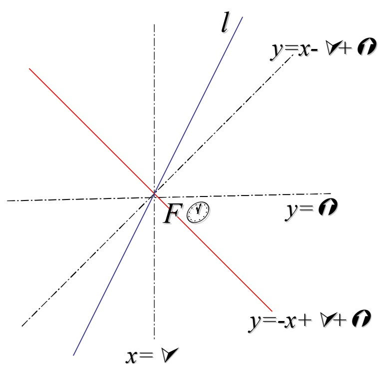
iii) Diğer durumlarda çözüm $y = -x + x_1 + y_1$ doğrusudur

$-\frac{a}{b} = 1$ iken (Şekil 4.4.24)



Şekil 4.4.24

$1 < -\frac{a}{b} < \infty$ iken (Şekil 4.4.25).



Şekil 4.4.25

III Durum: $e > 1$ olsun. Budurumda çözüm

i) $-\frac{a}{b} = 0,\, b \neq 0$ iken,

$$a_2, a_3^{'} \quad \text{ve} \quad a_1, a_4^{'}$$

çözümlerinden oluşan kesişen iki doğru,

ii) $-\frac{a}{b} \to \infty$ iken

$$b_2, b_3' \text{ ve } b_1, b_4'$$

çözümlerinden oluşan kesişen iki doğru,

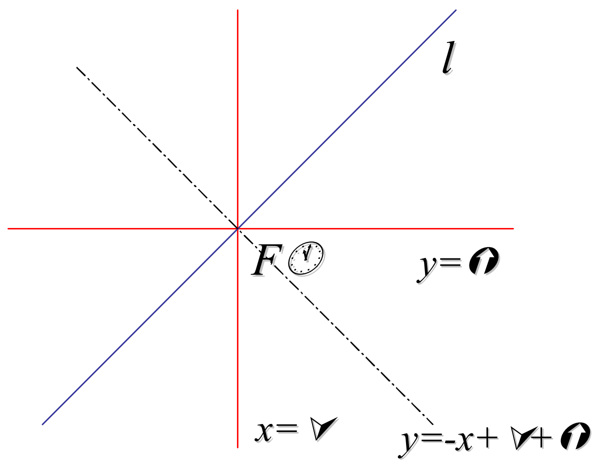
iii) $-\frac{a}{b} = 1$ olsun.

$e < |a| + |b|$ iken,

$$a_2', \ a_3 \text{ ve } b_2, b_3'$$

çözümlerinden oluşan ve $F = (x_1, y_1)$ odak noktasında kesişen iki doğru,

$e = |a| + |b|$ iken çözüm $x = x_1$ ve $y = y_1$ doğruları (Şekil 4.4.26),

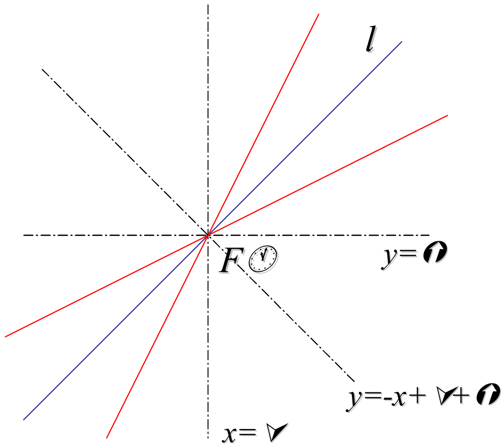


Şekil 4.4.26

$e > |a| + |b|$ iken,

$$a_1', \ a_4 \text{ ve } b_1, b_4'$$

çözümlerinden oluşan ve $F = (x_1, y_1)$ odak noktasında kesişen iki doğrudur (Şekil 4.4.27).



Şekil 4.4.27

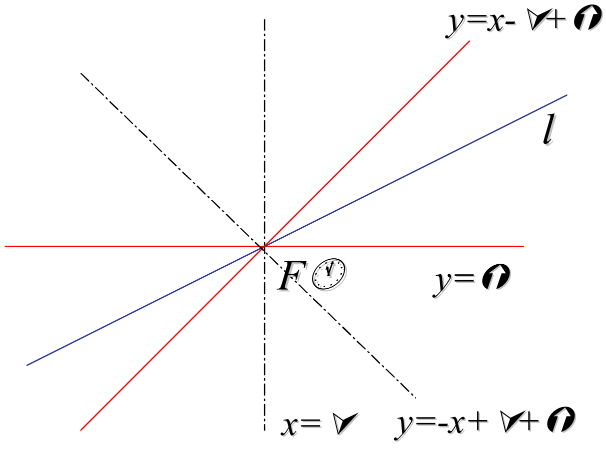
iv) $0 < -\frac{a}{b} < 1$olsun.

$e < |a| + |b|$ iken,

$$a_2, \; a_3^{'} \text{ ve } \; b_2, b_4^{'}$$

çözümlerinden oluşan ve $F = (x_1, y_1)$ odak noktasında kesişen iki doğru,

$e = |a| + |b|$ iken, $y = y_1$ ve $y = x - x_1 + y_1$ doğruları (Şekil 4.4.28),



Şekil 4.4.28

$e > |a| + |b|$ iken çözüm $F = (x_1, y_1)$ odak noktasıdır.

v) $1 < -\frac{a}{b} < \infty$ olsun.

$e < |a| + |b|$ iken,

$$a_2,\ a_3^{'} \text{ ve } b_2, b_3^{'}$$

çözümlerinden oluşan ve $F = (x_1, y_1)$ odak noktasında kesişen iki doğru,

$e = |a| + |b|$ iken,

$$x = x_1 \ ve \ y = x - x_1 + y_1$$

doğruları,

$a > |a| + |b|$ iken,

$$F = (x_1, y_1)$$

odak noktasıdır.

4.7 M-Koniklerinin Genel Denklemi

Bu kısımda tüm $M-$koniklerini temsil eden bir genel denklem [8] de izlenen yöntemle verilmektedir.

Teorem 4.6.1. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) odaklı ve (x_1, y_1) odaklı, $ax+by+c = 0$ doğrultmanlı tüm $M-$koniklerinin denklemi $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e(\alpha^2 - 1)(|a| + |b|)^{-1}$, $\gamma \leq 0$ ve *e dış merkezlik oranı* olmak üzere

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\}+\alpha(max\{|x - x_2|, |y - y_2|\})-\beta\ |ax+by+c|\pm\alpha\gamma = 0$$

şeklindedir.

İspat: (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) odaklı $M-$koniklerinin denklemi $p \in \{-1, 1\}$ ve $q \geq 0$ olmak üzere

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} + p(max\{|x - x_2|, |y - y_2|\}) = \pm q \qquad (4.4)$$

şeklindedir. Benzer şekilde, (x_1, y_1) odaklı ve $ax + by + c = 0$ doğrultmanlı $M-$koniklerinin denklemi

$$max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} + r\ |ax + by + c| = 0,\ r < 0 \qquad (4.5)$$

şeklindedir. (4.4) ve (4.5) denklemlerinin lineer bileşimi olan

$$\begin{aligned} a_1 \left(max \left\{ |x - x_1|, |y - y_1| \right\} + a_2 \left(max \left\{ |x - x_2|, |y - y_2| \right\} \right) \right) \\ + a_3 |ax + by + c| \pm a_4 = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

denklemi tüm $M-$koniklerini kapsar. Burada $a_1 \neq 0$, $a_1 = 1$ dir. (4.6) denkleminde, $a_2 \in \{-1, 1\}$, $a_3 = 0$ ve $a_4 \leq 0$ olarak alınırsa (4.4) denklemi elde edilir. Eğer $a_2 = 0$, $a_3 = (\alpha^2 - 1)\, t$, $t \in R$, $a_3 < 0$, $a_4 = 0$ olarak alınırsa (4.5) denklemi elde edilir. $a_4 = a_2 \gamma$, $t > 0$, $\gamma \leq 0$ alalım. $a_2 = \alpha$ dersek (4.6) denklemi $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $t > 0$, $\gamma \leq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} max \left\{ |x - x_1|, |y - y_1| \right\} + \alpha \left(max \left\{ |x - x_2|, |y - y_2| \right\} \right) + \\ + \left(\alpha^2 - 1 \right) t |ax + by + c| \pm \alpha \gamma = 0 \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu denklemde $\alpha = 0$ olarak alınırsa

$$max \left\{ |x - x_1|, |y - y_1| \right\} - |ax + by + c| = 0$$

olur. Buradan

$$t = \frac{max \left\{ |x - x_1|, |y - y_1| \right\}}{|ax + by + c|}$$

dir. Dış merkezlik oranı

$$e = \frac{d_M (P, F_1)}{d_M (P, l)} = \frac{max \left\{ |x - x_1|, |y - y_1| \right\}}{\frac{|ax + by + c|}{|a| + |b|}} = t \left(|a| + |b| \right)$$

olarak elde edilir. Buradan, $t = e \left(|a| + |b| \right)^{-1}$ olur. O halde

$$\left(\alpha^2 - 1 \right) t = e \left(\alpha^2 - 1 \right) \left(|a| + |b| \right)^{-1} = \beta$$

alırsak teorem ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[**1**] Chen, G. : Lines and Circles in the Taxicab Geometry, Master Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Central Missouri State University, 1992.

[**2**] Ekici C. Kocayusufoğlu İ., Akça Z. , The Norm in Taxicab Geometry, Tr. J. of Mathematics, 22 (1998), 295-307.

[**3**] Ekmekçi S. : Taksi çemberiyle ilgili özellikler, Doktora Tezi, OGÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

[**4**] George E. Martin : The fundations of Geometry and Non-Euclidean Plane, Springer, 1998.

[**5**] Ho Y. P., Lıu Y.: Parabolas in Taxicab Geometry, Missouri J. of Math. Sci., 8(1996), 63-72

[**6**] Kaya R.: Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2002.

[**7**] Kaya R. : Area Formula for Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon Journal, (to appear, Fall 2005).

[**8**] Kaya R., Akça Z., Günaltılı I., Özcan M. :General Equation for Taxicab Conics and Their classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19 (2000), 135-148

[**9**] Kaya R., Çolakoğlu H.B. :Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems, IJPAM, 26, 69-81, (2006).

[**10**] Kaya R., Gelişgen Ö., Ekmekçi S. and Bayar A. : Group of Isometries of CC-Plane, Missouri J. of Math. Sci (MJMS), (to appear in 2006)

[11] Krause E. F. : Taxicab Geometry: Addison-Wesley, Menlo Park (1975).

[12] Laatsch R. : Pramidal Sections in Taxicab Geometry, Mitt. Math. Magazine, 55 (1982), 205-212.

[13] Moser J. M., Kramer F.: Lines and Parabolas in Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon Journal, Vol 7, No 7 (1982).

[14] Özcan M., Kaya R. : On the Ratıo of Directed Lengths in the Taxicab plane and Related Properties, Missouri J. of Math. Sci., 14 (2002), 107-117.

[15] Özcan M., Kaya R., Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance, Missouri J. of Math. Sci., 15 (2003), 178-185.

[16] Reynolds B.E. : Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon Journal, 7 (1980), 77-88.

[17] Richard S. Millman, George D .Parker, Geometry a Metrik Approach with Models, Springer, 1991.

[18] Schattschneider D. J. : The Taxicab Group,Amer. Math. Monthly, 91 (1984), 423-428.

[19] Shing - Seung So, Zuwaina S. Al-Maskari : Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry, Kansas Science Teacher (J. of Math. and Science Teaching), Vol 11, 14-18 (1995).

[20] Tian S. ,So S.S., Chen G. : Concerning Circles in Taxicab Geometry, J. Math. Educ. Sci. Technol ., 28 (1997), 727-733.

[21] Turan M. : Çin Dama Konikleri Üzerine, Doktora tezi, OĞÜ Fen Bilimleri Ensitüsü, 2004.