ANALİTİK GEOMETRİ VE TAXICAB GEOMETRİ ÜZERİNE

Derya YAVUZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006

ON THE ANALYTIC GEOMETRY AND TAXICAB GEOMETRY

Derya YAVUZ

Department of Mathematics

Thesis for Master Degree

2006

ANALİTİK GEOMETRİ VE TAXICAB GEOMETRİ ÜZERİNE

Derya YAVUZ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Temmuz 2006

Derya YAVUZ un Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı

"ANALİTİK GEOMETRİ VE TAXICAB GEOMETRİ ÜZERİNE"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezimizde Öklid Geometrisi ve Taxicab Geometrisi ele alındı. Birinci bölümde kısaca; Öklid Geometrisi'nin temel kavramları ve Öklid Aksiyomları verildi.

İkinci bölümde Öklidyen olmayan bir geometri, Taxicab Geometri tanıtıldı. Taxicab Geometri'nin Öklidyen Geometri'ye benzeyen veya farklı olan bazı özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde, Öklidyen çemberi üzerinde bir teorem ve ispatı verildi.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen teorem Taxicab Geometride ispatlandı.

SUMMARY

In this thesis, Euclidean Geometry and Taxicab Geometry has been studied. In the first chapter, in short, the basic concepts of the Euclidean Geometry and Taxicab Geometry has been explained.

In the second chapter, a non Euclidean Geometry, named Taxicab Geometry, has been defined. The similarities and differences of Taxicab Geometry and The Euclidean Goemetry are discussed.

In the third chapter, a theorem on the Euclidean Circle, its proof is given

In the fourth chapter, the theorem, given in chapter three, is proved in the Taxicab Geometry.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocam Sayın;

Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

ve kıymetli meslektaşım

Gökçe ATAK'a

teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006 Derya YAVUZ

İçindekiler

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Öklidyen Geometri

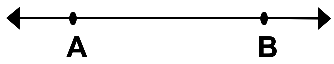
Öklidyen geometrinin mimarı, Mısır'ın İskenderiye şehrinde doğan Euclid (Öklid) (M.S. 365-M.S.300) dir. Öklidyen geometri bugün hala en çok bilinen ve kullanılan geometridir. Öklid, kendinden önce gelenlerin eserleriyle kendi özyapıtlarını derleyerek bugün Öklid Geometrisi adıyla bilinen geometriyi aksiyomlara dayandırararak geliştirmiş, yeni bir boyut kazandırmıştır.

Bu bölümde, geometrinin en temel kavramlarını öklid aksiyomlarını ve bilinen bazı analitik geometri konularını inceleyeceğiz. Bu bölümde çalışmaya esas olan tanımlar ve konular, yardımcı geometri ve analitik geometri kitaplarından alınarak verilecektir. Kaynaklar kısmında [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] ile gösterilmiştir.

Tanım 1.1.1: Nokta, geometrinin en temel kavramıdır. Kesin tanımını yapamayız fakat açıklayabiliriz. Toplu iğnenin bıraktığı iz; kalemin sivri ucunun deftere değdirildiğinde bıraktığı işaret, tebeşirin tahtaya dokundurulmasıyla elde edilen "·" biçiminde işaretin kapsadığı yer olarak düşünülebilir. Bu örnekler bize nokta hakkında bilgi verir. Ancak, nokta olarak düşünülen bu izlerin bir büyüklüğü vardır. Oysa noktayı eni, boyu, derinliği olmayan bir nesne gibi düşünmek gerekir.

Nokta, boyutsuz bir iz olarak kabul edilir. Nokta, yanına yazılan bir büyük harfle okunur. "$\cdot A$" şeklinde yazılıp, "A noktası" diye okunur.

Tanım 1.1.2: Aynı hizadaki yanyana gelmiş iki yönde sonsuza kadar giden noktalar kümesine **doğru** denir. Genellikle küçük harfle veya doğrunun üzerindeki iki büyük harfle isimlendirilir.

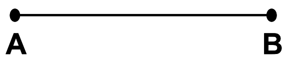


Şekil 1.1

AB doğrusu veya d doğrusu diye okunur.

Aynı doğru üzerinde bulunan noktalara **doğrusal noktalar** denir.

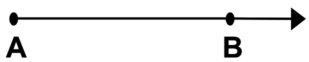
Bir doğru üzerindeki iki nokta ve bu noktalar arasındaki bütün doğrusal noktaların kümesine **doğru parçası** denir.



Şekil 1.2

$[AB]$ sembolüyle gösterilir. AB doğru parçası diye okunur.

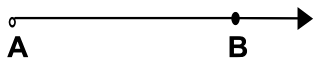
Başlangıç noktası belli ve bir yöne doğru devam eden noktalar kümesine **ışın** denir.



Şekil 1.3

$[AB$ sembolüyle gösterilir, AB ışını diye okunur.

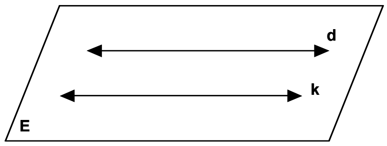
Bir $[AB$ ışınından A noktasının çıkarılmasıyla elde edilen kümeye AB **yarı doğrusu** denir.



Şekil 1.4

$]AB$ sembolüyle gösterilir. AB yarı doğrusu diye okunur.

Aynı düzlemde ortak noktaları bulunmayan doğrulara **paralel doğrular** denir.



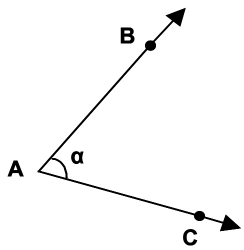
Şekil 1.5

Tanım 1.1.3: Üç boyutlu uzayda x, y, z ye göre birinci dereceden

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

biçiminde bir denklemi sağlayan bütün $P(x, y, z)$ noktalarının geometrik yerine bir **düzlem** ve denkleme de **düzlemin denklemi** denir.

Tanım 1.1.4: Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının arasındaki açıklığı **açı** denir.

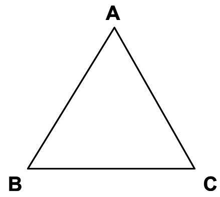


Şekil 1.6

$$[AB \cup [AC = A\hat{B}C \ , \ m(C\hat{A}B) = m(B\hat{A}C) = \alpha$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5: Bir düzlemde doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren doğru parçalarının birleşimine **üçgen** denir.



Şekil 1.7

$$[AB] \cup [BC] \cup [CA] = A\overset{\Delta}{B}C$$

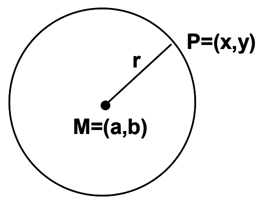
Karşılıklı açıları eş, karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenlere **benzer üçgenler** denir.

Tanım 1.1.6: $n \geq 3$ olmak üzere n tane doğru parçasının birbirini kesmeyecek ve doğrusal olmayacak şekilde uçlarının birleşmesi ile elde edilen kapalı ve düzlemsel şekle **çokgen** denir.

Kenar uzunlukları ve açıları eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir.

Tanım 1.1.7: Düzlemde verilen bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine **çember** denir.

Düzlemde verilen sabit nokta $M(a, b)$, merkeze olan uzaklık r, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ve değişken nokta $P(x, y)$ olsun. $|MP| = r$ olup



Şekil 1.8

$$C_E = \left\{(x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,\ x, y \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R},\ a, b \text{ sabit}\right\}$$

kümesine karşılık gelen geometrik yere **Öklidyen çember** denir.

Tanım 1.1.8: Düzlemde verilen iki sabit noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine **orta dikme** denir. Bu iki sabit nokta ile belirli doğru parçasının orta kümesi olarak adlandırılır.

Verilen sabit noktalar A ve B değişken nokta $X = (x_1, x_2)$ olmak üzere orta dikmenin noktalarının kümesi

$$\{(x_1, x_2) : d_E(X, A) = d_E(X, B)\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.9: $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı olmak üzere

$$\begin{array}{llll} d_E: & \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \longrightarrow & d_E\left(X,Y\right) = \left\|\overrightarrow{XY}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \right\rangle} = \sqrt{\left|\overrightarrow{XY}\right| \left|\overrightarrow{XY}\right|} \end{array}$$

olacak şekilde tanımlanan d_E fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de uzaklık fonksiyonu, $d_E(X, Y)$ sayısına X ile Y arasındaki **uzaklık** denir.

Uzaklık fonksiyonu d_E, $\mathbb{E}^n$ de bir metriktir. Yani her $X, Y, Z \in \mathbb{E}^n$ için,

a) $d_E\left(X,Y\right) \geq 0$, $d_E\left(X,Y\right) = 0 \Longleftrightarrow X = Y$

b) $d_E\left(X,Y\right) = d_E\left(Y,X\right)$

c) $d_E\left(X,Z\right) \leq d_E\left(X,Y\right) + d_E\left(Y,Z\right)$

aksiyomları sağlanır. Bu metriğe $\mathbb{E}^n$ de Öklid metriği denir.

Öklid geometrisi yukarıda da tanımladığımız gibi doğru, çember, paralel doğrular, benzer üçgenler, düzgün çokgenler, düzlemler gibi konuları inceleyen geometridir. $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ düzlemde iki nokta olsun. Bu X ve Y noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık;

$$d_E(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaklık fonksiyonuna öklid düzleminin standart u zaklık fonksiyonu denir.

1.1.1 Öklid Aksiyomları

[1] İki noktadan geçen bir tek doğru vardır.

[2] Her doğru en az iki nokta içerir.

Yukarıda belirttiğimiz bu iki aksiyoma üzerinde olma aksiyomları denir.

[3] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d_E, negatif olmayan $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca,

$$d_E(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

dir.

[4] $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dır.

[5] $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir. (Üçgen eşitsizliği)

[6] $f_L : L \rightarrow \mathbb{R}$ bire-bir ve örten ise, $A, B \in L$ için;

$$|f_L(A) - f_L(B)| = d_E(A, B)$$

dir.

[7] Eğer l herhangi bir doğru ise o zaman noktalar kümesi H_1 ve H_2 gibi iki alt kümeye ayrılır ve ayrıca

i) H_1 ve H_2 konveks

ii) $H_1 \cup H_2 =$ noktalar kümesi

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2 \Rightarrow AB \cap l \neq \phi$ dır.

[8] Her açıyı $0°$ ve $180°$ arasında bir reel sayıya eşleyen m ölçüm fonksiyonu vardır.

[9] H yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve $0°$ ile $180°$ arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(P\hat{A}B) = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[10] Bir $A\hat{B}C$ alalım. Bunun iç bölgesinde bir D noktası alalım. Bu durumda;

$$m(A\hat{B}C) = m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C)$$

dır.

[**11**] A ve C gibi iki nokta arasında bir B noktası alalım.

$$m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = 180^{\circ}$$

olur. Burada D noktası , A, B,C noktaları ile doğrusal olmayan bir noktadır

[**12**] $A\overset{\Delta}{B}C$ ve $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ gibi iki üçgen alalım. İki kenarları orantılı ve bu iki kenar arasındaki açı aynı ise (Kenar-Açı-Kenar benzerliği) bu iki üçgen benzerdir.

[**13**] Bir l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve ℓ doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

1.2 Noktanın Analitik İncelenmesi

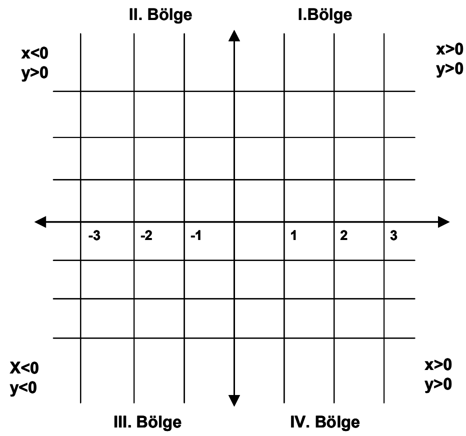
Tanım 1.2.1: a ve b nin (a, b) biçiminde bir tek eleman olarak yazılmasına **sıralı ikili** denir. Burada a'ya birinci bileşen, b'ye ikinci bileşen denir. Bileşenlerin yerleri değişemez. Yani $(a, b) \neq (b, a)$ dır.

Tanım 1.2.2: İki sıralı ikilinin birinci bileşenleri aralarında ve ikinci bileşenleri aralarında eşit ise bu **sıralı ikililer eşittir** denir. Karşıtı da doğrudur.

$$(a, b) = (x, y) \iff a = x \text{ ve } b = y$$

dir.

1.2.1 Analitik Düzlem ve Düzlemde Nokta Koordinatları



Şekil 1.9

İki reel sayı doğrusunu,"0" (sıfır) reel sayısı birbirleriyle çakışacak ve bu noktada doğrular birbirine dik olacak şekilde gözönüne aldığımızda oluşan sisteme koordinat sistemi, koordinat sisteminin üzerinde bulunduğu düzleme de **koordinat düzlemi** ya da **analitik düzlem** denir.

$x'ox$ doğrusuna x ekseni, $y'oy$ doğrusuna y ekseni 0 noktasına da orijin (başlangıç noktası) adı verilir. x ve y eksenleri analitik düzlemi dört bölgeye ayırır.

Koordinat düzlemi $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | \, x, y \in \mathbb{R}\}$ olup sıralı ikililerle donanmıştır. Bu nedenle her sıralı reel sayı ikilisine, koordinat düzleminde bir nokta karşı gelir. Ya da koordinat düzleminde alınacak olan her noktaya da karşı gelen bir reel sayı ikilisi vardır. Bu ikiliye noktanın koordinatları denir.

Bir $A = (a, b)$ noktasının yeri belirlenirken x ekseni üzerindeki a değerinden ve y ekseni üzerindeki b değerinden birer dikme çıkılır. İki dikmenin kesim noktası aranan $A = (a, b)$ noktasıdır.

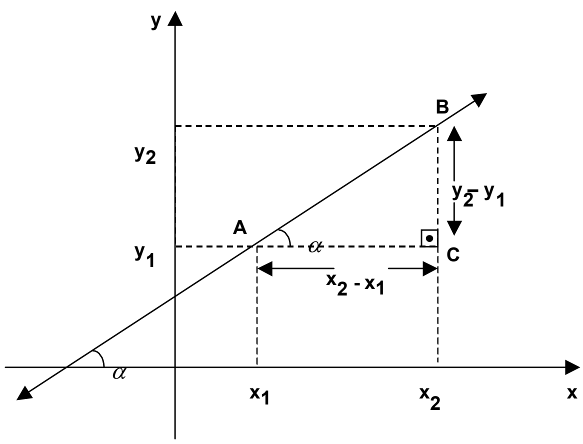
1.2.2 İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik düzlemin birinci bölgesinde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktalarını alalım. $A = (x_1, y_1)$ noktası ile $B = (x_2, y_2)$ noktası arasındaki uzaklık $|AB|$ dir.

$$|AC| = x_2 - x_1 \ , \ |BC| = y_2 - y_1$$

olmak üzere; Pisagor bağıntısından aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\ |AB|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



Şekil 1.10

Örnek 1.2.1: Düzlemde $A(-2, 5)$ ve $B(3, 6)$ noktaları veriliyor. x ekseni üzeride $|AC| = |BC|$ olacak şekilde bir C noktası bulunuz.

C noktası x ekseni üzerinde olduğundan koordinatları $(x, 0)$ dır.

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |5 - 0|^2 + |2 + x|^2 \\ |BC|^2 &= |6 - 0|^2 + |3 - x|^2 \\ |AC| &= |BC| \\ |AC|^2 &= |BC|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|5-0|^2+|2+x|^2 &= |6-0|^2+|3-x|^2 \\
29+4x &= 45-6x \\
x &= \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Örnek 1.2.2: $A(2,-1)$ ve $B(-4,3)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?

$A(2,-1)$ ve $B(-4,3)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesi $C(x,y)$ olsun. $|CA| = |CB|$ olduğundan

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
x^2-4x+4+y^2+2y+1 &= x^2+8x+16+y^2-6y+9 \\
-4x+2y+5 &= 8x-6y+25
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$3x-2y+5 = 0$$

doğrusu elde edilir ki C noktaları bu doğru üzerindeki noktalardır.

1.3 Doğrunun Analitik İncelenmesi

Bu bölümde bir doğru üzerinde alınan noktaların kendi koordinatları arasıdan nasıl bir ilişki kurduklarını araştıracağız.

Tanım 1.3.1: Bir doğru üzerinde bulunan noktaların koordinatları arasında ki bağlantıya **doğru denklemi** denir. Nokta (x,y) ise $A,B,C \in \mathbb{R}$ ve A ile B aynı anda sıfır olmamak üzere bir doğrunun genel denklemi $Ax+By+C=0$ veya

$$\begin{aligned}
By &= -Ax-C \\
y &= \frac{-A}{B}x-\frac{C}{B}
\end{aligned}$$

burada $\dfrac{-A}{B} = m$ ve $-\dfrac{C}{B} = n$ olacak şekilde

$$y = mx + n$$

olur.

Örnek 1.3.1: $A = (2,5)$ ve $B = (3,7)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulunuz.

$$\begin{aligned} A \in d &\implies 5 = m.2 + n \\ B \in d &\implies 7 = 3m + n \end{aligned}$$

olduğundan,

$$m = 2$$

bulunur. O halde

$$n = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

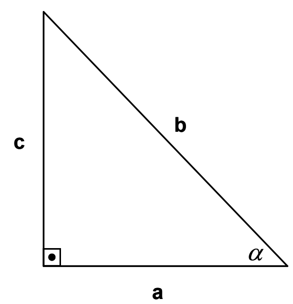
$$y = 2x + 1$$

bulunur.

1.3.1 Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi

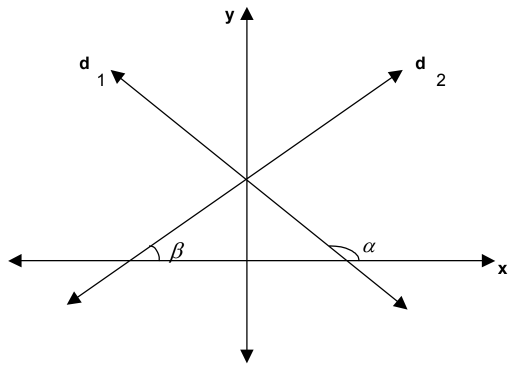
Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yapmış olduğu açıya **eğim açısı**, eğim açısının tanjant değerine ise **doğrunun eğimi** denir.

Bir açının tanjantı;



Şekil 1.11

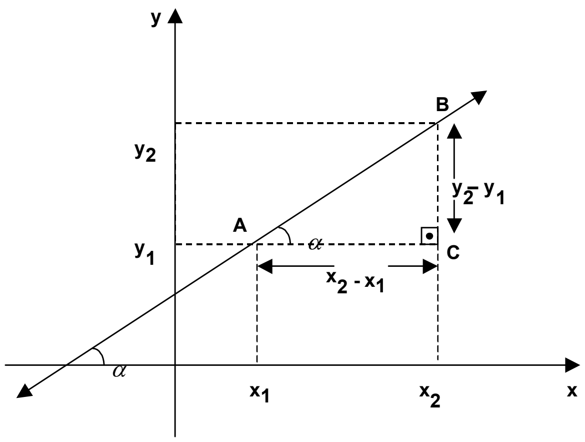
$$\tan\alpha = \frac{\text{karsı dik kenar}}{\text{komsu dik kenar}} = \frac{c}{a}$$



Şekil 1.12

α, $d_1$doğrusunun; β, d_2 doğrusunun eğim açısıdır. $m_1 = \tan\alpha$ (d_1 doğrusunun eğimi), $m_2 = \tan\beta$ (d_2 doğrusunun eğimi).

1.3.2 İki Noktası Bilinen Doğru Eğimi



Şekil 1.13

$A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi;

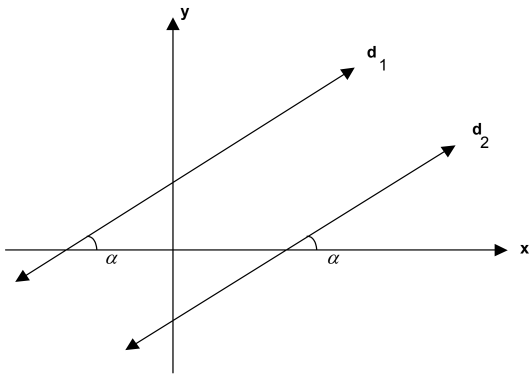
$$m = m_{AB} = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dir.

$Ax + By + C = 0$ doğrusunun eğimi; $m = -\dfrac{A}{B}$

Bazı Özel Durumlarda Eğim

a) İki doğru birbirine paralel ise eğimleri birbirine eşittir.

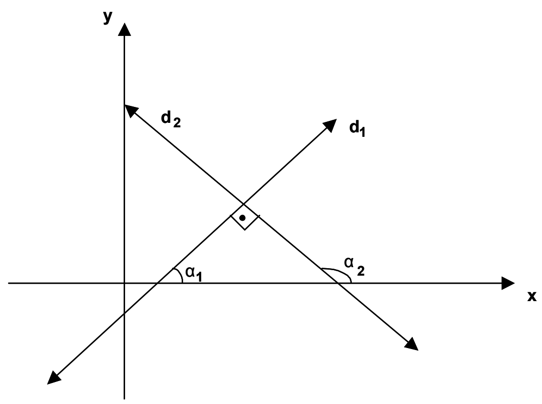


Şekil 1.14

Paralel doğruların Ox ekseni ile pozitif yönde yaptıkları açılar eşit ve açıların tanjantları da eşittir. Yani

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

b) İki doğru dik ise eğimleri çarpımı -1 e eşittir.



Şekil 1.15

$\alpha_2 = 90 + \alpha_1$, d_1 doğrusunun eğimi $\tan\alpha_1 = m_1$, d_2 doğrusunun eğimi $\tan\alpha_2 = m_2$ ile gösterilirse;

$$m_1 = \tan\alpha_1 = \tan(\alpha_2 - 90^o) = \tan(-(90 - \alpha_2)) = -\tan(90 - \alpha_2)$$

den

$$m_1 = -\tan(90 - \alpha_2) = -\cot\alpha_2 = -\frac{1}{\tan\alpha_2} = -\frac{1}{m_2}$$

bulunur. Sonuç olarak, $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$.

c) x eksenine paralel olan doğruların eğim açısı 0° olduğu için

$$m = \tan 0^{\circ} = 0$$

dır.

d) y eksenine paralel olan doğruların eğim açısı 90° olduğu için

$$m = \tan 90^{\circ} = \infty \text{ (tanımsız)}$$

Örnek 1.3.2: Bir d doğrusu, denklemi $3x - 5y + 6 = 0$ olan doğruya paralel ve denklemi $9y + (1-p)x - 14 = 0$ olan doğruya diktir. Buna göre p kaçtır?

$$3x - 5y + 6 = 0$$

doğrusu d doğrusuyla paralel ise;

$$\frac{3}{5}x + \frac{6}{5} = y$$

ve

$$m = \frac{3}{5} = m_d$$

(paralel doğrular) bulunur. Doğrular dik ise eğimler çarpımı -1 dir.

$$\begin{aligned} 9y &= (p-1)x + 14 \\ y &= \frac{p-1}{9}x + \frac{14}{9} \Longrightarrow m_2 = \frac{p-1}{9} \end{aligned}$$

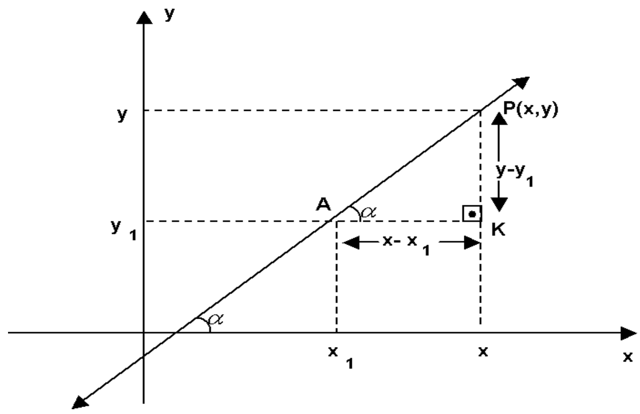
olup

$$m_1.m_2 = \frac{3}{5}\frac{p-1}{9} = -1 \Longrightarrow p = -14$$

olur.

1.3.3 Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi

Eğimi m olan ve $A = (x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun deklemini yazalım.



Şekil 1.16

PAK dik üçgeninde;

$$\tan\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

olduğundan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dir. Yani eğimi m olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

bulunur.

1.3.4 İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

$A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini

$$m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

dir. Buna göre $A = (x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi $m_{AB} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ olan doğrunun denklemi

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

olur. Buradan

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

elde edilir.

Örnek 1.3.3: $P(k,-2k)$ noktası $A(1,-2)$ ve $B(3,2)$ noktalarından geçen doğru üzerinde olduğuna göre k kaçtır?

Önce A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemini yazalım. İki noktası bilinen doğru denklemi

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

ise,

$$\begin{aligned}
\frac{y+2}{-4} &= \frac{x-1}{-2} \\
\frac{y+2}{2} &= x-1 \\
y+2 &\Longrightarrow 2x-2 \\
2x-y-4 &\Longrightarrow 0
\end{aligned}$$

bulunur. P noktası doğru üzerinde olduğuna göre koordinatları doğru denklemini sağlamalıdır.

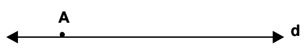
$$\begin{aligned}
2x+y-4 &= 0 \\
2.k+2k-4 &= 0 \\
k &= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Noktanın Doğruya Göre Durumları

i) Nokta doğrunun üzerinde ise:

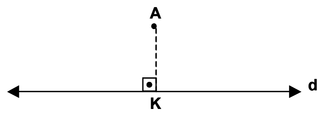
Bir A noktasının d doğrusu üzerinde olması için gerek ve yeter şart A noktasının koordinatlarının d doğrusunun denklemini sağlamasıdır.



Şekil 1.17

ii) Nokta Doğrunun Üzerinde Değilse:

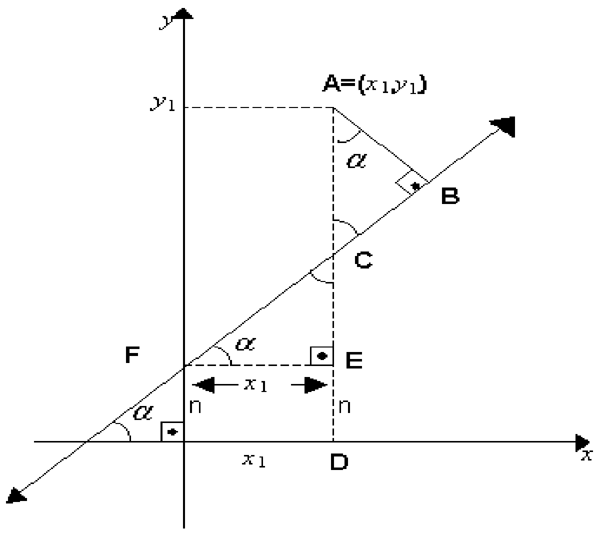
Burada noktanın doğruya olan uzaklığı ve doğrunun noktaya en yakın noktasının koordinarlarının nasıl hesaplanacağını bulacağız.



Şekil 1.18

1.3.5 Bir Noktanın Doğruya Uzaklığı

$A = (x_1, y_1)$ noktasının, denklemi $y = mx + n$ olan d doğrusuna uzaklığı, A dan d doğrusuna inilen AB dikme uzunluğudur.



Şekil 1.19

$|DE| = |OF| = n$ ve $|FE| = |OD| = x_1$ dir. $\overset{\triangle}{CFE}$ dik üçgeninde

$$\tan\alpha = \frac{|CE|}{|EF|} \Rightarrow |CE| = |EF| \,.\tan\alpha \Rightarrow |CE| = x_1 .\tan\alpha$$

olur.

$\tan\alpha$ doğrunun eğimi olup m dir. Öyleyse $|CE| = mx_1$ elde edilir.

$$|AC| = |AD| - (|CE| + |ED|) = y_1 - (n + mx_1)$$

olur.

$\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninden de $|\cos\alpha| = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ veya $|AB| = |AC|\,.\,|\cos\alpha|$ yazılır. $|AC|$ nın bulunan değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} |AB| &= |y_1 - (n + mx_1)|\,.\,|\cos\alpha| \\ |AB| &= |y_1 - mx_1 - n|\,.\,|\cos\alpha| \end{aligned}$$

bulunur.x_1

y1

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

olduğundan $|AB| = 1$ konarak

$$\begin{aligned} |AB| &= |y_1 - mx_1 - n|\,.\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ l = &= \frac{|y_1 - mx_1 - n|}{\sqrt{1+m^2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$Ax + By + C = 0$ doğrusunda

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

olduğundan

$$m = -\frac{A}{B}$$

ve

$$n = -\frac{C}{B}$$

dir. Bu değerleri yerine koyarsak,

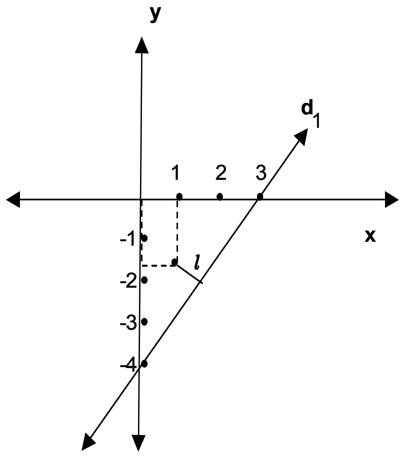
$$l = \frac{\left|y_1 + \dfrac{A}{B}x_1 + \dfrac{C}{B}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{A^2}{B^2}}} = \frac{\left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{B}\right|}{\sqrt{\dfrac{A^2+B^2}{B^2}}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

bulunur.

Örnek 1.3.4: $A = (1, -2)$ noktasının

$$d_1 : 3y = 4x - 12$$

doğrusuna olan uzaklığını hesaplayınız.



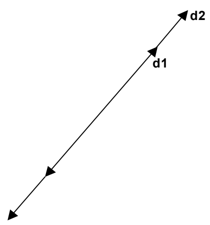
Şekil 1.20

$$\begin{aligned} 3y - 4x + 12 &= 0 \\ l &= \frac{|3.(-2) - 4.1 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

1.3.6 İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

(1) Çakışık Doğrular

Aynı düzlemde iki doğrunun birden fazla ortak noktaları vrsa bu doğrulara, **çakışık doğrular** denir. Çakışık doğrular, eş doğrulardır.



Şekil 1.21

Örneğin;

$$\begin{aligned} y &= 3x \\ 2y &= 6x \\ 3y &= 9x \end{aligned}$$

gibi belirtilen üç doğru denklemi de aslında aynı doğruyu belirtir.

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

doğrularının çakışık olabilmesi için

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

gerek ve yeter şart

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

olmalıdır.

Örnek 1.3.5:

$$d_1 : x + 2y - 1 = 0$$

ve

$$d_2 : 4x + ay + b = 0$$

doğrularının en az iki ortak noktası olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

En az ortak iki noktalarının olması bu doğruların çakışık olduğunu gösterir. O halde

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{a} = -\frac{1}{b}$$

dır. Buradan da

$$a = 8 \ , \ b = -4$$

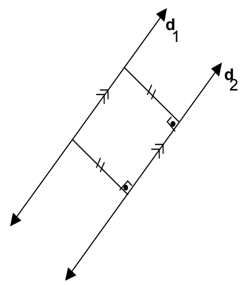
elde edilir. O zaman

$$a + b = 4$$

dır.

(2) Paralel Doğrular :

d_1 doğrusunun eğimi, d_2 doğrusunun eğimine eşittir ve d_1 ve d_2 doğrularının arasındaki uzaklık her zaman sabittir.



Şekil 1.22

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ve

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğrularının paralel olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

olmasıdır.

Örnek 1.3.6:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2 &= 0 \\ 3x + ay + b &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise $a + b$ kaç olamaz?

Denklem sistemlerinin çözüm kümesinin boş küme olması verilen doğruların paralel olduğunu gösterir.

$$d_1 : x + 3y - 2 = 0$$

ve

$$d_2 : 3x + ay + b = 0$$

Doğruları paralel olup çakışık olmadıklarında;

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{a} \neq \frac{-2}{b}$$

dır. Buradan da

$$a = 9, \quad b \in R - \{-6\}$$

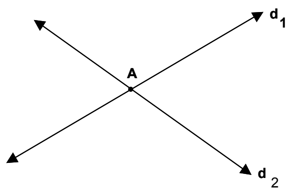
dolayısıyla

$$a + b = 9 + (-6) = 3$$

olamaz.

(3) Kesişen Doğrular :

Düzlemde paralel olmayan iki doğru bir ve yalnız bir noktada kesişir.



Şekil 1.23

Örnek 1.3.7: $d_1 : y = 3x - 1$ ve $d_2 : y = x + 5$ doğrularının kesişim noktalarını bulunuz.

İki doğru aynı düzlemde bir ve yalnız bir noktada keşistiğinden, $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ ve $A = (m, n)$ olsun.

$$A \in d_1 \qquad n = 3m - 1 \tag{1.1}$$

$$A \in d_2 \qquad n = m + 5 \tag{1.2}$$

(1.1) ve (1.2) denklemlerini ortak çözersek

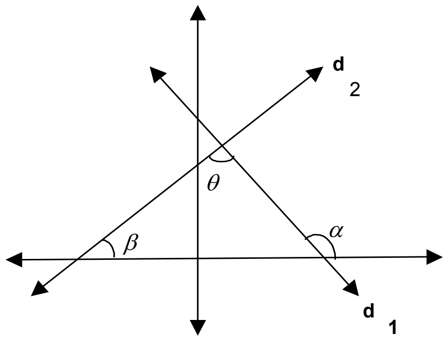
$$m + 5 = 3m - 1 \Longrightarrow 3 = m$$

olur. Bulduğumuz bu m= 3 değerini (1.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$n = 8$$

bulunur. O halde $A(3, 8)$ olur.

1.3.7 Kesişen İki Doğru Arasındaki Açı



Şekil 1.24

$$\theta = \alpha - \beta$$

olmak üzere

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

ve

$$m_{d_1} = \tan\alpha = m_1, m_{d_2} = \tan\beta = m_2$$

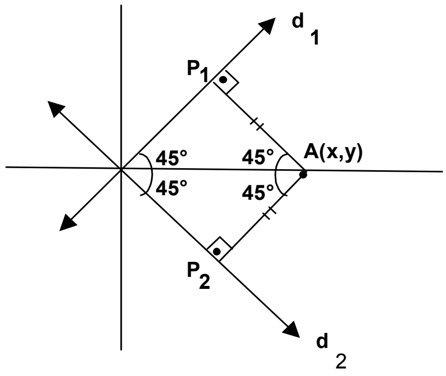
olsun. O halde

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

elde edilir.

Açıortay Denklemleri

Açıortay doğruları üzerinden kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir.



Şekil 1.25

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ve

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğrularının açıortay denklemlerini bulalım. $A = (x, y)$ noktası açıortaylarının üzerindeki değişken bir nokta olsun. O zaman

$$|AP_1| = |AP_2|$$

$$\Longrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

dır.

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

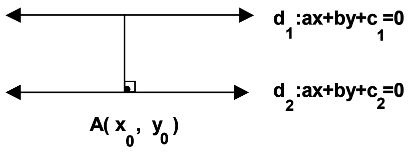
ve

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğruları paralel olsun. Paralel doğrular arasında

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

şartının olduğunu biliyoruz. Buna göre paralel iki doğrunun denklemi



Şekil 1.26

biçimindedir.

Doğru denklemleri ilk sunulduğunda, a ve b değerleri eşit olmayabilir Ancak genişletme ve sadeleştirme yöntemleriyle a ve b nin aynı olması sağlanır. Burada sadece c_1 ve c_2 değerleri birbirinden farklıdır.

d_1, d_2 doğruları arasındaki uzaklık, d_1 den d_2 doğrusuna inilen dik uzaklıktır. d_1 den d_2 doğrusuna indiğimiz nokta $A = (x_0, y_0)$ noktası olsun.

i) $A = (x_0, y_0)$ noktası d_2 doğrusu üzerinde olduğundan, d_2 doğrusunu sağlar dolayısıyla,

$$ax + by + c_2 = 0$$

denkleminde

$$ax_0 + by_0 + c_2 = 0$$

buradan da

$$ax_0 + by_0 = -c_2$$

dir.

ii) $A = (x_0, y_0)$ noktasının d_1 doğrusuna uzaklığı bildiğimiz gibi

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ile bulunur.

(i) de bulduğumuz eşitliği (ii) de yerine yazarsak,

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

elde edilir.

Örnek 1.3.8:

$$l_1 : x + ay - 5 = 0$$

ve

$$l_2 : 2x - 6y + b = 0$$

doğruları birbirine paralel ve aralarındaki uzaklık $\sqrt{10}$ birimdir. Buna göre b nin alacağı değerler toplamını bulunuz.

l_1 ve l_2 birbirine paralel ise

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{-6}$$

dir. Buradan da

$$a = -3$$

bulunur. $a = -3$ değeri yerine yazılırsa,

$$l_1 : x - 3y - 5 = 0$$

ve

$$l_2 : 2x - 6y + b = 0$$

elde edilir. l_1 doğrusunun her terimi 2 ile çarpılırsa,

$$l_1 : 2x - 6y - 10 = 0$$

bulunur. Bu iki paralel doğru arasındaki uzaklık $\sqrt{10}$ ise

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

bağıntısından

$$\begin{aligned} \sqrt{400} &= |10 + b| \\ 20 &= 10 + b \\ b &= 10 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} -20 &= 10 + b \\ b &= -10 \end{aligned}$$

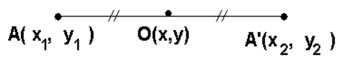
bulunur.

Buradan b nin alabileceği değerler toplamı $10 + (-30) = -20$ dir.

1.4 Simetri

1.4.1 Noktanın Noktaya Göre Simetriği

$A(x_1, y_1)$ noktasının $O(x, y)$ noktasına göre simetriği,



Şekil 1.27

A nın O ya olan uzaklığı kadar ötelenmesidir. $O(x, y)$ noktası AA' doğru parçasının orta noktasıdır.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

eşitliğinden elde edilir. Buradan da

$$x_2 = 2x - x_1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

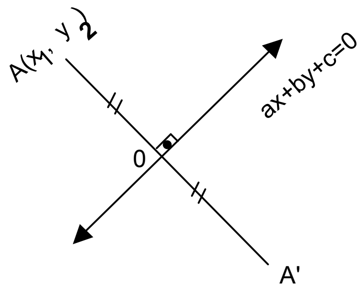
eşitliğinden elde edilir. Buradan da

$$y_2 = 2y - y_1$$

bulunur. Yani $A(x_1, y_1)$ noktasının $O(x, y)$ noktasına göre simetriği $A'\,(2x - x_1, 2y - y_1)$ noktasıdır.

1.4.2 Noktanın Doğruya Göre Simetriği

$A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre simetriği noktanın doğruya olan uzaklığı kadar ötelenmesidir. Bir noktanın genel bir doğruya göre simetriğinde



Şekil 1.28

i) Verilen $ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi bulunur.

$$ax + by + c = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b}$$

dir.

ii)Verilen dik iki doğrunun eğimleri çarpımı -1 olduğundan AA' doğrusunun eğimi hesaplanır:

$$m_1.m_2 = -1$$

olduğundan

$$\frac{-a}{b}.m_2 = -1$$

dır. Buradan da

$$m_2 = \frac{b}{a}$$

elde edilir.

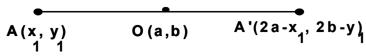
iii)Eğimi $\frac{b}{a}$ olarak bulunan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğru denklemi

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

şeklinde yazılır.

iv) Denklemi bulunan AA' doğrusu ile denklemi verilen $ax + by + c = 0$ doğrusunun denkleminden ortak çözüm ile O noktasının koordinatları bulunur.

v) A noktasının O noktasına göre simetriği A' noktasını verir.

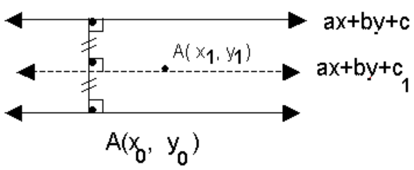


Şekil 1.29

1.4.3 Doğrunun Noktaya Göre Simetriği

$$ax + by + c = 0$$

doğrusunun $A(x_1, y_1)$ noktasına göre simetriği bulunurken,



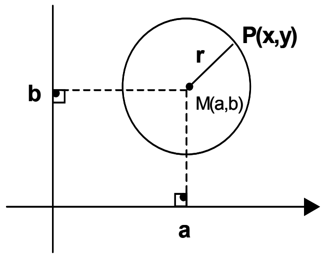
Şekil 1.30

önce $ax + by + c$ doğrusuna paralel ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğru denklemi bulunur. Bu doğru $ax + by + c_1$ şeklinde bir doğrudur.

$ax + by + c$ doğrusunun oluşan $ax + by + c_1$ doğrusuna göre simetriği bu iki doğruya paralel bir doğrudur ve denklemi de $ax + by + c_2$ şeklindedir.

1.5 Çemberin Analitik İncelenmesi

Analitik düzlemde alınan bir $M(a,b)$ noktasından r birim uzaklıkta($r \epsilon \mathbb{R}$ ve $r > 0$) bulunan noktaların kümesi $M(a,b)$ merkezli r yarıçaplı çember belirtir.



Şekil 1.31

Çemberin denklemi çember üzerindeki noktaların apsisleri ile ordinatları arasındaki bağıntıdır. Bunu da iki nokta arasındaki bağıntıyla belirtiriz:

$$\begin{aligned} r &= |MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ r^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$C_E = \left\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \ x, y \in \mathbb{R} \ a, b \in \mathbb{R} \ a, b \ sabit\right\}$$

kümesine karşılık gelen geometrik yere öklidyen çember denir.

Örneğin merkezi $C(7,3)$, yarıçapı $r = 5$ olan çemberin denklemi; $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 25$ dir.

1.5.1 Çemberin Genel Denklemi

Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r olan çemberin denklemi;

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

dir. Bu denklem açılırsa;

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu denklem de

$$-2a = D, \ -2b = E, \ a^2 + b^2 - r^2 = F$$

alınırsa,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

elde edilir.

$$-2a = D \Rightarrow a = -\frac{D}{2}$$
$$-2b = E \Rightarrow b = -\frac{E}{2}$$

den çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ dir.

$$a^2 + b^2 - r^2 = F \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 - F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \\ r &= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapı $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ olan çemberin genel denklemi;

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

biçimindedir.

Bu denkleme göre;

$$\begin{aligned} &D^2 + E^2 - 4F > 0 \quad \text{ise çember belirtir} \\ &D^2 + E^2 - 4F = 0 \quad \text{ise yanlız nokta belirtir} \\ &D^2 + E^2 - 4 < 0 \quad \text{ise boş küme belirtir.} \end{aligned}$$

1.5.2 Doğru İle Çemberin Birbirine Göre Durumları

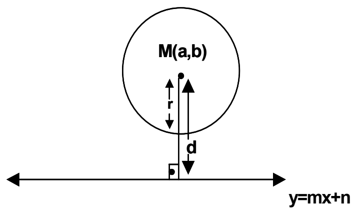
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

çemberi ile

$$y=mx+n$$

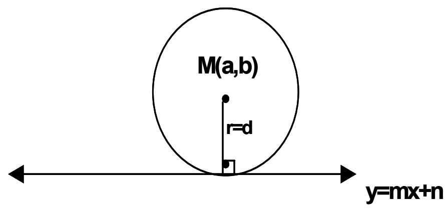
doğrusu verilmiş olsun. Çember merkezinin doğruya olan uzaklığına d diyelim.

1. Durum: $d>r$ ise doğru çemberi kesmez, doğrunun tüm noktaları çemberin dışındadır.



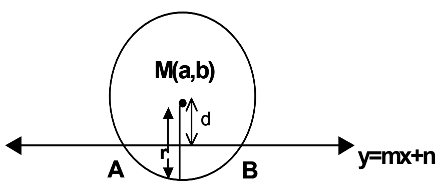
Şekil 1.32

2. Durum: $d=r$ ise doğru çembere bir ve yalnız bir noktada teğettir.



Şekil 1.33

3. Durum: $d<r$ ise doğru çemberi iki farklı noktada keser. Kesim noktaları A ve B dir.



Şekil 1.34

ya da,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

çemberi ile $y = mx + n$ doğrusunun kesim noktalarının koordinatları

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ y = mx + n \end{array}\right\}$$

sisteminin çözümüdür.

$$y = mx + n$$

değeri çember denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantının Δ ile gösterildiği hatırlanırsa,

1.) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise doğru çemberi kesmez,

2.) $\Delta = 0$ ise doğru çembere teğet

3.) $\Delta > 0$ ise doğru çemberi iki noktada keser.

Örnek 1.4.1:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$$

çemberi ile

$$y = x + 1$$

doğrusunun kesim noktalarının apsisleri nedir?

Çözüm: Doğru ile çember kesiştiklerine göre çember denkleminde y yerine

$x+1$ yazarsak,

$$\begin{aligned} x^2+(x+1)^2-6x+8(x+1)-25 &= 0 \\ x^2+x^2+2x+1-6x+8x+8-25 &= 0 \\ 2x^2+4x-16 &= 0 \\ x^2+2x-8 &= 0 \end{aligned}$$

Buradan da

$$x+4=0$$

dir. O halde $x_1=-4$ elde edilir. Benzer yolla

$$x-2=0$$

için, $x_2=2$ bulunur. $x_1=-4$ ise

$$y_1=-4+1=-3$$

bulunur. O halde $A(-4,-3)$ dır. Benzer yolla $x_2=2$ ise

$$y_2=2+1=3$$

bulunur. Buradan da $B=(2,3)$ bulunur.

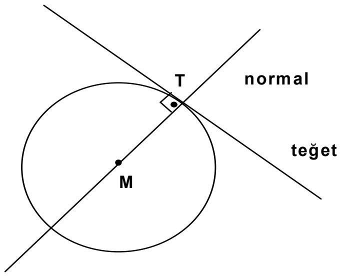
Çember ile doğrunun kesim noktaları

$$A(-4,-3) \text{ ve } B(2,3)$$

dır.

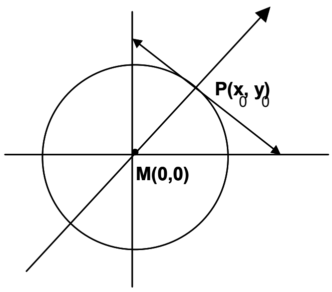
1.5.3 Çember Üzerindeki Bir Noktadan Çembere Çizilen Teğet ve Normal Denklemleri

Teğete değme noktasında dik olan doğruya normal denir. Normal çemberin merkezinden geçer.



Şekil 1.35

$M\,(0,0)$ merkezli r yarıçaplı merkezil çember üzerinde $P\,(x_0, y_0)$ noktası alalım. P noktasından çembere bir teğet çizelim. Teğetin değme noktasında teğete dik olan ve çember merkezinden geçen dik doğruya çemberin **normali** denir.



Şekil 1.36

P noktasından geçen teğet ve normal denklemlerini bulalım: Normal, $M\,(0,0)$ ve $P\,(x_0, y_0)$ noktasından geçtiğine göre,

$$m_N = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

olur. Teğet ve normal dik iki doğru olduklarından eğimleri çarpımı -1 dir.

$$m_T.m_N = -1$$

olduğundan

$$m_T \frac{y_0}{x_0} = -1 \Rightarrow m_T = \frac{-x_0}{y_0}$$

bulunur.

Teğet denklemi, $P(x_0, y_0)$ den geçen ve eğimi $\dfrac{-x_0}{y_0}$ olan doğrudur.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

den

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \\ yy_0 - y_0^2 &= -xx_0 + x_0^2 \\ xx_0 - yy_0 &= \underbrace{x_0^2 + y_0^2}_{r^2} \\ xx_0 + yy_0 &= r^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Normal denklemi, $P(x_0, y_0)$ den geçen, eğimi $m_N = \dfrac{y_0}{x_0}$ olan doğrudur.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

den

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \\ yx_0 - x_0y_0 &= xy_0 - x_0y_0 \\ xy_0 - yx_0 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.4.2:

$$x^2 + y^2 = 4$$

çemberinin üzerindeki bir $A(-1, 2)$ noktasından çizilen teğet denklemini yazınız.

Çözüm: Teğet denklemi:

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

den

$$x\,(-1) + y2 = 4$$

dir. Buradan da

$$-x + 2y = 4$$

bulunur.

Merkezi $\mathbf{M(a,b)}$ ve Yarıçapı r Olan Genel Çemberde

$P\,(x_0, y_0)$ ve $M\,(a, b)$ noktalarından geçen normalin eğimi;

$$m_N = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$$

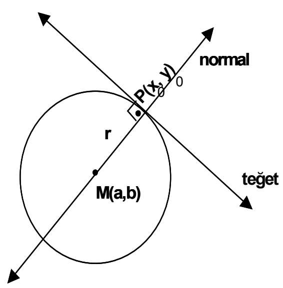
dır. Buradan da

$$m_T.m_N = -1$$

ise

$$m_T = -\frac{1}{m_N} = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

bulunur.



Şekil 1.37

Teğet denklemi $P\,(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi $m_T = -\dfrac{x_0 - a}{x_0 - b}$ olan doğru denklemidir.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

den

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{x_0 - a}{x_0 - b}\,(x - x_0) \\ (y - y_0)\,(y_0 - b) &= -\,(x - x_0)\,(x_0 - a) \\ (x - x_0)\,.\,(x_0 - a) + (y - y_0)\,(y_0 - b) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Normal denklemi $P\,(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi $m_N = \dfrac{y_0 - b}{x_0 - a}$ olan doğru denklemidir.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

den

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{y_0 - b}{x_0 - a}\,(x - x_0) \\ (y - y_0)\,(x_0 - a) &= (x - x_0)\,(y_0 - b) \\ (x - x_0)\,(y_0 - b) - (y - y_0)\,(x_0 - a) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bölüm 2

TAXICAB GEOMETRİ

Taxicab geometri, Öklidyen geometri ile hemen hemen aynıdır. Nokta ve doğru aynı şekilde tanımlanırken açı ölçüleri ise aynı yolla hesaplanır. Yalnız uzaklık fonksiyonu farklıdır.

$A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ olsun. E. F.Krause , $\mathbb{E}^2$ de bilinen

$$d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

metriği yerine, H.Minkowski tarafından tanımlanan

$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

metriği kullanarak taxicab geometriyi tanımladı. Bu bölümdeki çalışmalarda E. F.Krause [10] nin kitabından faydalanılmıştır.

2.1 Taxicab Geometride Öklid Aksiyomları

Taxicab düzlem geometri

P; Noktalar kümesi

L; P nin alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular

m; Açı ölçme fonksiyonu

d_T; Uzaklık fonksiyonu

olmak üzere $[P, L, d_T, m]$ matematiksel sistemi olarak düşünülebilir.

Şimdi, öklid aksiyomlarının taxicab geometride karşılığı tartışalım:

[1] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[2] Her doğru en az iki nokta içerir. P kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

Bu iki aksiyom nokta ve doğru kümesiyle ilgilidir.Taxicab geometrinin nokta ve doğruları öklidyen geometrinin nokta ve doğrularıyla aynı olduğundan bu iki aksiyom $[P, L, d_T, m]$ sisteminde sağlanır.

Bu iki aksiyomdan sonra gelen dört aksiyom uzaklık fonksiyonunun "pozitif tanımlı", "simetrik" ve üçgen eşitsizliğini sağladığını gösterir. Ayrıca cetvel aksiyomu denilen aksiyom sağlanır.

[3] Her sıralı (A, B) çifti için d_E negatif olmayan $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_E(A, B) = 0$ dır $\Leftrightarrow A = B$ dır

Taxicab geometride;

$$A = (a_1, a_2) \ , B = (b_1, b_2)$$

olmak üzere

$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

dir. Mutlak değerin özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= |-(b_1 - a_1)| + |-(b_2 - a_2)| \\ &= |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| = d_T(B, A) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= 0 \Rightarrow |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = 0 \\ &\Rightarrow |a_1 - b_1| = 0 \text{ ve } |a_2 - b_2| = 0 \\ &\Rightarrow a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2 \\ &\Rightarrow A = B \end{aligned}$$

dir.

[4] $d_E(A,B) = d_E(B,A)$ dır.

Taxicab geometride;

$$\begin{aligned} d_T(A,B) &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\ d_T(B,A) &= |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| \end{aligned}$$

Yine mutlak değerin özelliğini kullanırsak,

$$d_T(A,B) = d_T(B,A)$$

olur.

[5] $d_E(A,B) + d_E(B,C) \geq d_E(A,C)$ dır.

Her x, y sayısı için mutlak değerin $(|x+y| \leq |x| + |y|)$ özelliği kullanarak,

$$d_T(A,B) + d_T(B,C) \geq d_T(A,C)$$

dir.

$$A = (a_1, a_2)\ ,\ B = (b_1, b_2)\ ,\ C = (c_1, c_2)$$

olmak üzere

$$d_T(A+B, B+C) = d_T(A,C)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_T(A+B, B+C) &= |a_1 + b_1 + (-b_1 - c_1)| + |a_2 + b_2 + (-b_2 - c_2)| \\ &= |a_1 - b_1 + (b_1 - c_1)| + |a_2 - b_2 + (b_2 - c_2)| \\ &= |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1| + |a_2 - b_2| + |b_2 - c_2| \\ &= (|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|) + (|b_1 - c_1| + |b_2 - c_2|) \\ &= d_T(A,B) + d_T(B,C) \end{aligned}$$

ve

$$d_T(A,C) \leq d_T(A,B) + d_T(B,C)$$

olur.

[6]

$$f_L : L \longrightarrow R$$

bire-bir ve örten ise $A, B \in L$ için,

$$|f_L(A) - f_L(B)| = d_E(A, B)$$

dir.

Taxicab geometride (6) yı gösterirken L doğrusunun iki durumunu gözönüne alacağız. Bunlar dikey ve yatay olduğu durumlardır.

(a) L dikey olsun:

$$A = (a_1, a_2) \ , B = (b_1, b_2) \in L$$

olsun. L dikey bir doğru olduğundan bu doğrunun tüm noktalarının apsisleri aynıdır. Buna göre

$$A = B$$

olduğunda

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

dir . Buradan da

$$a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2$$

elde edilir. Ayrıca $f_L : L \longrightarrow R$ bire-bir örten fonksiyon olduğundan

$$f_L(A) = f_L(a_1, a_2) = a_2 = b_2 = f_L(b_1, b_2) = f_L(B)$$

olur ve $a_2 \epsilon R$ için $f_L(a_1, a_2) = a_2$ olacak şekilde bir tek (a_1, a_2) elemanı vardır.

L dikey bir doğru olduğundan apsisi her noktada aynıdır.

L üzerindeki $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ noktaları için $a_1 = b_1$ olacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned} |f_L(A) - f_L(B)| &= |f_L(a_1, a_2) - f_L(b_1, b_2)| \\ &= |a_2 - b_2| \end{aligned}$$

L dikey doğru ve $a_1 = b_1$ olduğundan

$$|f_L(A) - f_L(B)| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla;

$$|f_L(A) - f_L(B)| = d_T(A, B)$$

olur.

(b) L yatay olsun:

$A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2) \in L$ olsun. L yatay bir doğru olduğundan bu doğrunun tüm noktalarının ordinatları aynıdır. Buna göre

$$A = B \Rightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Rightarrow a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2$$

dir.

$f_L : L \longrightarrow R$ bire-bir örten fonksiyonu olduğundan;

$$f_L(A) = f_L(a_1, a_2) = a_1 = b_1 = f_L(b_1, b_2) = f_L(B)$$

olur ve $a_1 \epsilon R$ için $f_L(a_1, a_2) = a_1$ olacak şekilde bir tek (a_1, a_2) elemanı vardır.

L yatay bir doğru olduğundan L üzerindeki $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ noktaları için $a_2 = b_2$ olacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned} |f_L(A) - f_L(B)| &= |f_L(a_1, a_2) - f_L(b_1, b_2)| \\ &= |a_1 - b_1| \end{aligned}$$

olur.

L yatay doğru ve $a_2 = b_2$ olduğundan

$$|f_L(A) - f_L(B)| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla;

$$|f_L(A) - f_L(B)| = d_T(A, B)$$

olur.

[7] Düzlem ayırma aksiyomu olarak bilinir.

Verilen her L doğrusu için P nin H_1 ve H_2 gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır. Öyle ki,

(i) H_1 ve H_2 konveks

(ii) $H_1 \cup H_2 = P - 1$ (noktalar kümesi)

(iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $[AB] \cap L \neq \varnothing$

Taxicab Geometride bu aksiyomun sağlanabilmesi için uzaklık fonksiyonuna dayalı olarak doğru parçası ve konvekslik kavramların sağlandığını görmeliyiz.

Doğru parçası Taxicab ve Öklidyen geometri için aynı anlama gelmektedir. P herhangi bir nokta ise,

P, A ile B arasındadır $\Longleftrightarrow$ A, P, B ayrık noktalar olmak üzere

i) $d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)$

ii) A, P, B doğrudaş.

Eğer d yerine d_E yazarsak öklidyen geometride arada olmanın tanımını vermiş oluruz.P, A ile B nin taxi olarak arasında olması $[AB]$ doğru parçasını ifade ediyor. Benzer olarak Taxicab geometri için arada olmanın tanımını d yerine d_T yazarak verebiliriz. O halde Taxicab ve Öklid doğru parçaları aynıdır.

Konvekslik de Taxicab ve Öklidyen geometri için aynı anlama gelmektedir. Çünkü hem Taxicab geometri hemde Öklidyen geometri için doğru parçası aynı anlama gelmektedir. Bu durumda Taxicab geometri ve Öklidyen geometri için konveks aynı anlama gelir.

Şimdi vereceğimiz dört aksiyom açı ölçme ile ilgili olup, bir bütündür.

[8] m, her açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtir.

[9] H yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P\epsilon H$ olmak üzere $m(P\hat{A}B) = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[10] Eğer D noktası $A\hat{B}C$açısının iç bölgesinde ise,

$$m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = m(A\hat{B}C)$$

olur.

[11] Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,

$$m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = 180^{\circ}$$

olur.

Bu aksiyomlar $[P, L, d_E, m]$ sistemi için sağlandığından $[P, L, d_T, m]$ sistemi içinde sağlanmalıdır. Çünkü her iki geometri içinde m açı ölçme fonksiyonu "açı", "ışın", "yarı düzlem", "açının iç bölgesi" ve "arasında olma" kavramları aynı kavramlardır.

[12] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve arasındaki açı, ikinci üçgene karşılık gelen kenara ve açıya eş ise bu eşleme bir benzerliktir.

$[P, L, d_E, m]$ sisteminin bu temel aksiyomunu $[P, L, d_T, m]$ sistemi sağlamaz.Bu nedenledir ki $[P, L, d_T, m]$ sistemine non-Öklidyen (Öklidyen olmayan) geometri denir. Bu açı-kenar-açı aksiyomunu daha sonraki konularda daha açık vereceğiz.

Son aksiyom paralellik aksiyomu;

[13] L doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve L doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

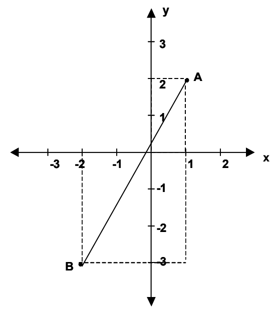
Bu aksiyom $[P, L, d_T, m]$ sistemi için kesinlikle geçerlidir. Çünkü bu aksiyom yanlız P ve d ile ilgilidir.

Şimdi taxicab geometriyi örneklerle anlatalım

Taxicab geometride iki nokta arasındaki uzaklık hesaplanırken iki nokta arasındaki yatay ve dikey blok sayıları sayılarak bulunur.

Örnek 2.1.1: A noktasının koordinatları $(1,2)$, B noktasının koordinatları $(-2,-3)$ olsun. A ve B noktaları arasındaki Öklidyen ve Taxicab uzaklığı bulunuz.

Çözüm :



Şekil 2.1

$A=(1,2)$ ve $B=(-2,-3)$ noktaları arasındaki öklidyen uzaklık

$$d_E=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$$

birim olarak bulunurken,

A ve B arasındaki taxicab uzaklık bulunurken A dan B'ye yatay ve dikey bloklar sayısı bulunur. A dan B'ye 5 tane yatay, 3 tane dikey bloğun toplanmasıdır.

$$d_T(A,B)=|-2-1|+|-3-2|=8$$

birimdir.

Örnek 2.1.2: $A=(a_1,a_2)$ ve $B=(b_1,b_2)$ olmak üzere $d_E(A,B) = d_T(A,B)$ olabilmesi için A ve B noktaları ne olmalıdır ?

Çözüm :

$$d_E(A,B)=d_T(A,B)\Rightarrow\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$

veya

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+2|a_1-b_1||a_2-b_2|$$

Bu ifadenin sağının ve solunun eşit olabilmesi için

$$2\left|a_1-b_1\right|\left|a_2-b_2\right|=0 \Rightarrow \left|a_1-b_1\right|.\left|a_2-b_2\right|=0$$

yani

$$\left|a_1-b_1\right|=0 \text{ ve } \left|a_2-b_2\right|=0$$

olmalıdır.

$$\left|a_1-b_1\right|=0 \Rightarrow a_1=b_1$$

ve

$$\left|a_2-b_2\right|=0 \Rightarrow a_2=b_2$$

dir. O halde

$$d_E\left(A,B\right)=d_T\left(A,B\right) \Leftrightarrow a_1=b_1 \text{ ve } a_2=b_2$$

dir.

Örnek 2.1.3:

$A=(-2,-1)$ ve $B=(3,2)$ verilsin.

a) $d_T \; (A,B)=?$

b)$\{P \mid d_T \; (P,A)=3$ ve $d_T \; (P,B)=5\}$ kümesinin grafiğini çizelim.

Çözüm :

a) $A=(-2,-1)$ ve $B=(3,2)$ olmak üzere A'dan B'ye taxi uzaklığını hesaplayalım.

$$d_T \; (A,B)=|-2-3|+|-1-2|=8$$

b) $\{P \mid d_T \; (P,A)=3$ ve $d_T \; (P,B)=5\}$ olmak üzere $P=(x,y)$ olsun.

$$d_T \; (P,A)=3 \Longrightarrow |x+2|+|y+1|=3;$$

a)

i) $x \leqslant -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun.Bu durumda

$$|x+2|+|y+1|=3 \implies x+y=-6$$

elde edilir.

ii) $x \leqslant -2$ ve $y \geq -1$ olsun.Bu durumda

$$|x+2|+|y+1|=3 \implies -x+y=4$$

elde edilir.

iii) $x \geq -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun.Bu durumda

$$|x+2|+|y+1|=3 \implies x-y=2$$

elde edilir.

iv) $x \geq -2$ ve $y \geq -1$ olsun.Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1|=3 \implies x+y=0$$

elde edilir.

$$d_T \ \ (P,B)=5 \Longrightarrow |x-3|+|y-2|=5$$

b)

i) $x \leqslant 3$ ve $y \leqslant 2$ olsun.Bu durumda,

$$|x-3|+|y-2|=5$$

dır.

$$-x+3-y+2=5$$

elde edilir. Buradan da

$$x+y=0$$

olur.

ii) $x \leqslant 3$ ve $y \geq 2$ olsun.Bu durumda

$$|x-3|+|y-2|=5$$

dır.

$$-x+3+y-2=5$$

elde edilir. Buradan da

$$-x+y=4$$

olur.

iii) $x \geq 3$ ve $y \leqslant 2$ olsun.Bu durumda,

$$|x-3|+|y-2|=5$$

dır.

$$x-3-y+2=5$$

elde edilir. Buradan da

$$x+y=6$$

olur.

iv) $x \geq 3$ ve $y \geq 2$ olsun.Bu durumda,

$$|x-3|+|y-2|=5$$

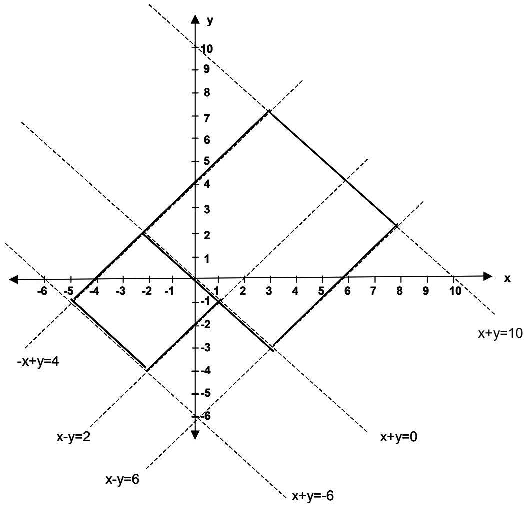
elde edilir. Buradan da

$$x-3+y-2=5$$

dır.

$$x+y=10$$

olur.

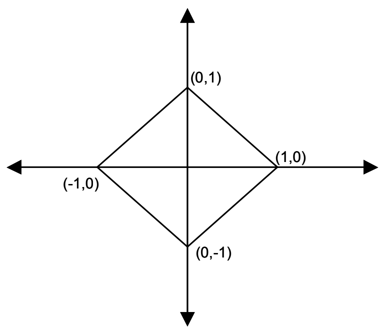


Şekil 2.2

2.2 Taxicab Çember

Tanım 2.2.1: Taxicab düzlemindesabit bir noktadan sabit uzaklıktaki noktaların geometrik kümesine **Taxicab çemberi** denir.Analitik düzlemde özel olarak merkezi $M = (0,0)$ olan, 1 birim uzaklıktaki bütün noktalar kümesine karşılık gelen geometrik yere **Taxicab birim çemberi** denir,

$$C_T = \{(x,y) : |x| + |y| = 1, \quad x, y \in R\}$$



Şekil 2.3

Burada taxicab çemberinin d_T metriğine göre çevre uzunluğu $C_T = 4.(1+1) = 8$ birimdir.

Buna göre π_T uzunluğu;

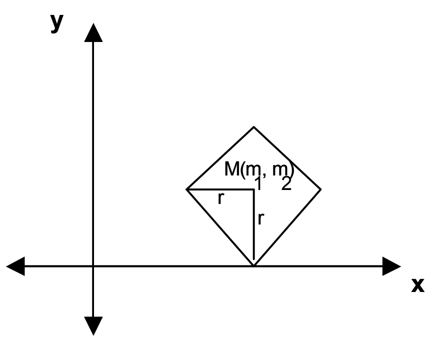
$$Ç = 2\pi_T.r = 8 \implies \pi_T = 4$$

olur.

Taxicab çemberinin denklemini genelleştirirsek, $M = (m_{1,} m_2)$ noktasına r taxi uzaklıktaki noktalar;

$$C = \{(x, y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$$

kümesini oluşturur. Bu küme, $M = (m_{1,} m_2)$ merkezli, r yarıçaplı taxi çemberidir.



Şekil 2.4

Taxicab çemberini daha iyi anlayabilmek için bir örnek çözelim:

Örnek 2.2.1: $A = (-2, -1)$ ve $B = (3, 2)$ noktaları verilsin.Aşağıdaki nokta kümelerini çiziniz.

a) A merkezli ve yarıçapı 2 olan taxi çemberi

b) $\{P \mid d_T(P, A) = 1\}$

c) A dan $1\frac{1}{2}$ taxi uzaklığındaki tüm P noktalarının kümesi

d) B merkezli ve yarıçapı 4 olan taxi çemberi

Çözüm: $P = (x, y)$ olsun.

a)

$$\begin{aligned} d_T\ \ (P,A) &= 2 \implies |x-(-2)|+|y-(-1)|=2 \\ &\implies |x+2|+|y+1|=2 \end{aligned}$$

i) $x \leqslant -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun. Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1|=2 \implies x+y=-5$$

olur.

ii) $x \leqslant -2$ ve $y \geq -1$ olsun. Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1|=2 \implies -x+y=3$$

olur.

iii) $x \geq -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun. Bu durumda,

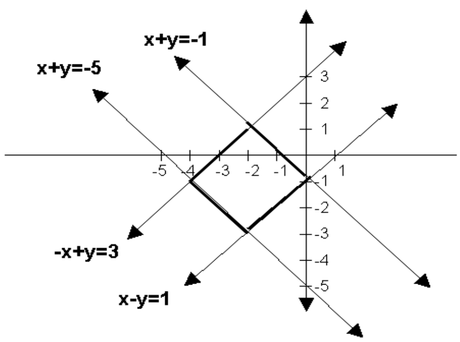
$$|x+2|+|y+1|= \implies x-y=1$$

olur.

iv) $x \geq -2$ ve $y \geq -1$ olsun. Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1|=2 \implies x+y=-1$$

olur.



Şekil 2.5

b) $\{P \mid d_T(P,A) = 1\}$ kümesinde;

$$\begin{aligned} d_T(P,A) &= 1 \Longrightarrow |x-(-2)| + |y-(-1)| = 1 \\ &\Longrightarrow |x+2| + |y+1| = 1 \end{aligned}$$

i) $x \leqslant -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun. Bu durumda

$$|x+2| + |y+1| = 1 \Longrightarrow x+y=-4$$

olur.

ii) $x \leqslant -2$ ve $y \geq -1$ olsun. Bu durumda,

$$|x+2| + |y+1| = 1 \Longrightarrow -x+y=2$$

olur.

iii) $x \geq -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun.Bu durumda,

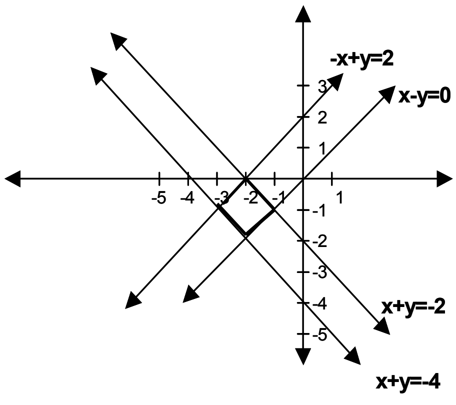
$$|x+2| + |y+1| = 1 \Longrightarrow x-y=0$$

olur.

iv) $x \geq -2$ ve $y \geq -1$ olsun.Bu durumda,

$$|x+2| + |y+1| = 1 \Longrightarrow x+y=-2$$

olur.



Şekil 2.6

c) A dan $1\frac{1}{2}$ taxi uzaklığındaki P noktaları;

$$\begin{aligned} d_T(P,A) &= 1\frac{1}{2} \Longrightarrow |x-(-2)|+|y-(-1)| = 1\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow |x+2|+|y+1| = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

i) $x \leqslant -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun. Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1| = 1\frac{1}{2} \Longrightarrow x+y = -4\frac{1}{2}$$

olur.

ii) $x \leqslant -2$ ve $y \geq -1$ olsun.Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1| = 1\frac{1}{2} \Longrightarrow -x+y = 2\frac{1}{2}$$

olur.

iii) $x \geq -2$ ve $y \leqslant -1$ olsun. Bu durumda,

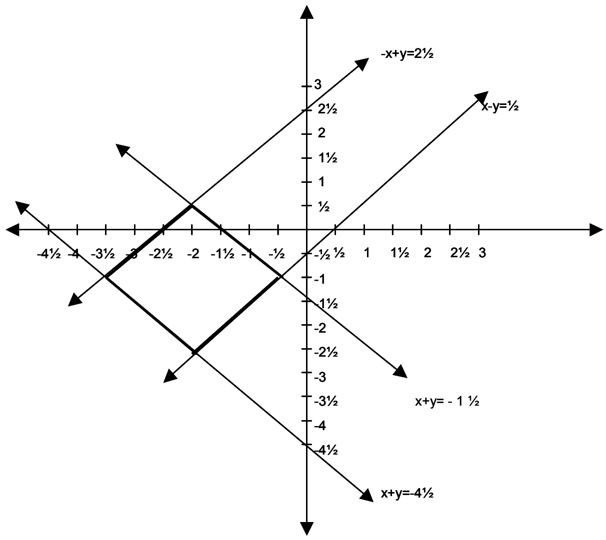
$$|x+2|+|y+1| = 1\frac{1}{2} \Longrightarrow x-y = \frac{1}{2}$$

olur.

iv) $x \geq -2$ ve $y \geq -1$ olsun.Bu durumda,

$$|x+2|+|y+1| = 1\frac{1}{2} \Longrightarrow x+y = -1\frac{1}{2}$$

olur.



Şekil 2.7

d) $d_T(P, B) = 4 \Longrightarrow |x-3| + |y-2| = 4$

i) $x \leqslant 3$ ve $y \leqslant 2$ olsun.Bu durumda,

$$|x-3| + |y-2| = 4 \implies x + y = 1$$

olur.

ii) $x \leqslant 3$ ve $y \geq 2$ olsun.Bu durumda,

$$|x-3| + |y-2| = 4 \implies -x + y = 3$$

olur.

iii) $x \geq 3$ ve $y \leqslant 2$ olsun.Bu durumda,

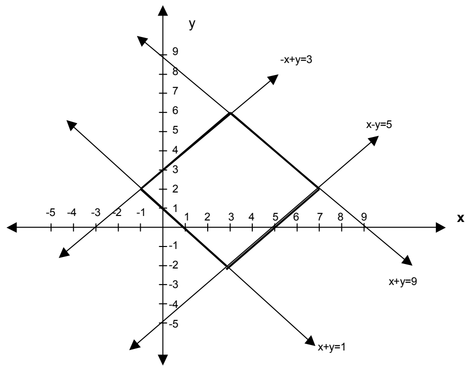
$$|x+2| + |y+1| = 4 \implies x - y = 5$$

olur.

iv) $x \geq 3$ ve $y \geq 2$ olsun. Bu durumda,

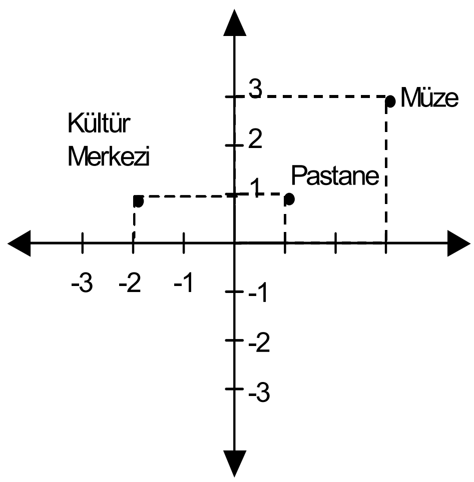
$$|x-3| + |y-2| = 4 \implies x + y = 9$$

olur.



Şekil 2.8

Taxicab geometri, kent coğrafyasında da kullanılır. Öklidyen geometriden daha yararlı bir modeldir.



Şekil 2.9

Şekil 2.9 de pastaneden müzeye olan uzaklık (Öklidyen uzaklık) $\sqrt{8}$ olmasına rağmen,pastaneden kültür merkezine olan Öklidyen uzaklık $\sqrt{9} = 3$ birimdir. Dolayısıyla pastane müzeye daha yakındır. Ama bu sonuç kaldırım ve caddede ilerlemek zorunda olan biri için geçerli değildir,kuş bakışı bir değerlendirmedir. İnsanlar için Taxicab uzaklığı gerçek uzaklıktır.

Taxicab uzaklığı gözönüne alındığında kültür merkezinin pastaneye daha yakın olduğu görülür.

Örnek 2.2.2: Aynı şehirde farklı üniversitelere başlayan iki kardeş ideal şehirde ikisi içinde ev arıyorlar. Ahmet $A = (-2, -3)$ koordinatlı üniversitede, Burcu ise $B = (1, 4)$ koordinatlı üniversitede okuyacaktır. Her ikisi de okullarına yürüyerek gitmek istiyorlar. Bu nedenle okullarına yürüyecekleri mesafelerin toplamının minimum olmasını istiyorlar. Evi nerede aramalıdırlar.

Çözüm:

A ile B nin minimum uzaklığı $d_T(A, B)$ dir.

$$d_T(A, B) = |-2 - 1| + |-3 - 4| = 10$$

birim olur. Evleri $P = (x, y)$ koordinatlı yer olsun. O halde;

$$d_T(P, A) + d_T(P, B) = d_T(A, B)$$

dır. Buradan da

$$|x + 2| + |y + 3| + |x - 1| + |y - 4| = 10$$

olmalıdır. Bunu sağlayan (x, y) koordinatlarını araştıralım.

i) $x < -2$ ve $y > -3$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d_T(P, A) + d_T(P, B) &= |x + 2| + |y + 3| + |x - 1| + |y - 4| = 10 \\ &\Longrightarrow -x - 2 - y - 3 - x + 1 - y + 4 = 10 \\ &\Longrightarrow x + y = -5 \end{aligned}$$

bulunur. Oysa, bu eşitliği verilen aralıkta sağlayan x ve y bulunamaz.

ii) $x < -2$ ve $-3 \leq y < 4$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d_T(P, A) + d_T(P, B) &= |x + 2| + |y + 3| + |x - 1| + |y - 4| = 10 \\ &\Longrightarrow -x - 2 + y + 3 - x + 1 - y + 4 = 10 \\ &\Longrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

bulunur. Oysa, $x = -2$ verilen aralıkta değildir.

iii) $x < -2$ ve $y \geq 4$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d_T(P,A) + d_T(P,B) &= |x+2| + |y+3| + |x-1| + |y-4| = 10 \\ &\Longrightarrow -x-2+y+3-x+1+y-4 = 10 \\ &\Longrightarrow -x+y = 6 \end{aligned}$$

olup, bu eşitliği verilen aralıkta sağlayan x ve y bulunamaz.

iv) $-2 \leq x < 1$ ve $y < -3$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d_T(P,A) + d_T(P,B) &= |x+2| + |y+3| + |x-1| + |y-4| = 10 \\ &\Longrightarrow x+2-y-3-x+1-y+4 = 10 \\ &\Longrightarrow y = -3 \end{aligned}$$

bulunur. Oysa, $y = -3$ verilen aralıkta değildir.

v) $-2 \leq x < 1$ ve $-3 \leq y < 4$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d_T(P,A) + d_T(P,B) &= |x+2| + |y+3| + |x-1| + |y-4| = 10 \\ &\Longrightarrow x+2+y+3-x+1-y+4 = 10 \\ &\Longrightarrow 10 = 10 \end{aligned}$$

olup,bu aralıkta aradığımız bölgedir.

vi) $-2 \leq x < 1$ ve $y \geq 4$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d_T(P,A) + d_T(P,B) &= |x+2| + |y+3| + |x-1| + |y-1| = 10 \\ &\Longrightarrow x+2-y+3-x+1+y-1 = 10 \\ &\Longrightarrow y = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

olup, $y = \frac{5}{2}$ verilen aralıkta değildir.

vii) $x \geq -1$ ve $y < -3$ olsun. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
d_T(P,A)+d_T(P,B) &= |x+2|+|y+3|+|x-1|+|y-4|=10 \\
&\Longrightarrow x+2-y-3+x-1-y+4=10 \\
&\Longrightarrow x-y=4
\end{aligned}
$$

olup, bu eşitliği verilen aralıkta sağlayan x ve y bulunamaz.

viii) $x \geq -1$ ve $-3 \leq y < 4$ olsun. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
d_T(P,A)+d_T(P,B) &= |x+2|+|y+3|+|x-1|+|y-4|=10 \\
&\Longrightarrow x+2+y+3+x-1-y+4=10 \\
&\Longrightarrow x=1
\end{aligned}
$$

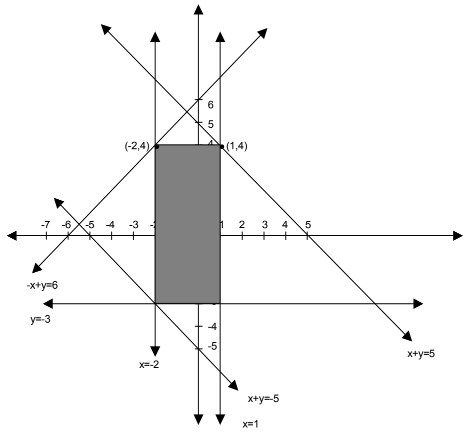
olup, $x=1$ verilen aralıktadır.

ix) $x \geq -1$ ve $y \geq -4$ olsun.Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
d_T(P,A)+d_T(P,B) &= |x+2|+|y+3|+|x-1|+|y-4|=10 \\
&\Longrightarrow x+2+y+3+x-1+y-4=10 \\
&\Longrightarrow x+y=5
\end{aligned}
$$

olup, verilen aralıkta bu eşitliği sağlayan x ve y bulunabilir.

Dolayısıyla Ahmet ve Burcu evlerini $-2 \leq x \leq 1$ ve $-3 \leq y \leq 4$ bölgelerinin arakesitinde aramalıdırlar.Aşağıdaki taralı bölge aradığımız bölgedir.



Şekil 2.10

Örnek 2.2.3: İdeal şehirde koordinatları $A = (0, 2)$ olan bir üniversite ve koordinatları $K = (2, 3)$ olan bir kütüphane bulunmaktadır.Bir müteahit A dan en çok 4 blok K dan en çok 5 blok uzakta yurt inşa edebilmesi için arsayı hangi koordinatlarda bulmalıdır?

Çözüm: $P = (x, y)$ inşa edilebilecek yurdun koordinatları olsun. Bu arsanın üniversiteye en çok 4 blok,yani $d_T(P, A) \leq 4$ ve kütüphaneye uzaklığı ise en çok 5 blok yani $d_T(P, K) \leq 5$ olması gerekir. Önce arsanın üniversiteye en çok 4 blok yani $d_T(P, A) \leq 4$ denklemini sağlayan x, y noktalar kümesini bulalım.

$$d_T(P, A) = |x| + |y + 2| \leq 4$$

eşitsizliğini sağlayan bölgeyi araştıralım.

i) $x \leq 0$ ve $y < -2$ olsun. Bu durumda,

$$|x| + |y + 2| \leq 4 \implies x + y \geq -6$$

olur.

ii) $x < 0$ ve $y \geq 2$ olsun. Bu durumda,

$$|x| + |y+2| \leq 4 \implies -x + y \leq 2$$

olur.

iii) $x \geq 0$ ve $y < -2$ olsun. Bu durumda,

$$|x| + |y+2| \leq 4 \implies x - y \leq 6$$

olur.

iv) $x \geq 0$ ve $y \geq -2$ olsun. Bu durumda,

$$|x| + |y+2| \leq 4 \implies x + y \leq 2$$

olur.

Şimdi de arsanın kütüphaneye uzaklığı en çok 5 blok yani

$$d_T(P, K) = |x-2| + |y-3| \leq 5$$

i) $x < 2$ ve $y < 3$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |x-2| + |y-3| &\leq 5 \\ -x + 2 - y + 3 &\leq 5 \\ -x - y &\leq 0 \\ x + y &\geq 0 \end{aligned}$$

olur.

ii) $x < 2$ ve $y \geq 3$ olsun.Bu durumda,

$$\begin{aligned} |x-2| + |y-3| &\leq 5 \\ -x + 2 + y - 3 &\leq 5 \\ -x + y &\leq 6 \end{aligned}$$

olur.

iii) $x \geq 2$ ve $y < 3$ olsun. Bu durumda,

$$|x-2| + |y-3| \leq 5 \implies x - y \leq 4$$

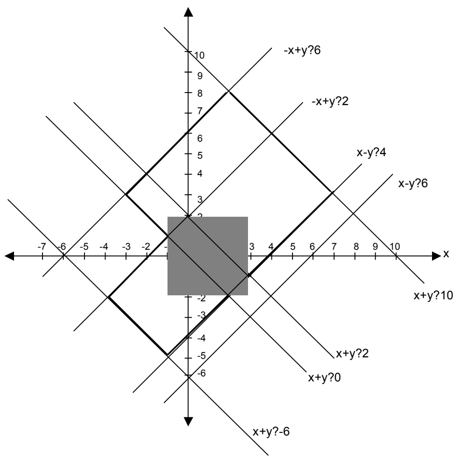
olur.

iv) $x \geq 2$ ve $y \geq 3$ olsun. Bu durumda,

$$|x-2| + |y-3| \leq 5 \implies x + y \geq 10$$

olur.

Bu iki durumun sağlandığı bölge aşağıdaki şekildetaralı olarak belirtilen alandır.



Şekil 2.11

2.2.1 Öklidyen Geometri İle Taxicab Geometri Arasındaki Bazı Farklar

1) Öklidyen geometride $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu olarak hesaplanır ve

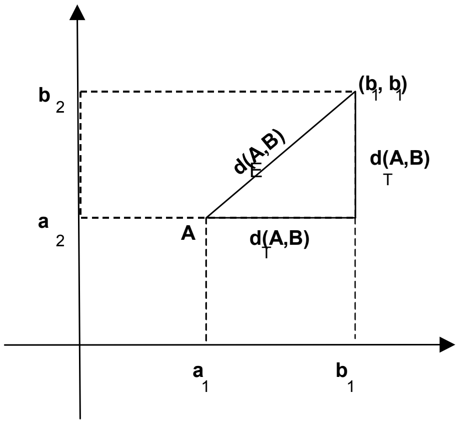
$$d_E(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

şeklinde gösterilir.

Taxicab geometride A ve B noktaları arasındaki uzaklık ise yatay ve dikey kaç blok ilerlediği hesaplanarak bulunur. Yani,

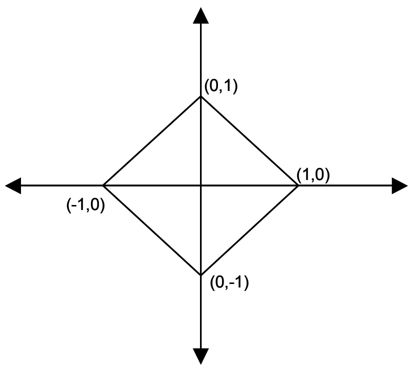
$$d_T(A,B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2|$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 2.12

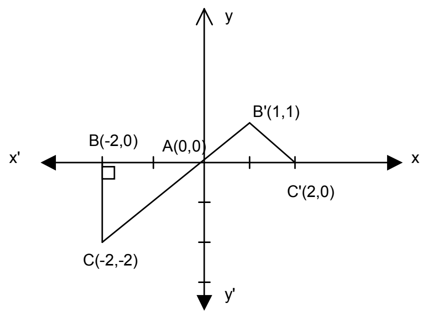
2) Öklidyen geometride $\pi_E = 3,14$ tür. Taxicab geometride ise $\pi_T = 4$ tür.π sayısı çemberin çevre formülünden, çapın çevre uzunluğuna bölünmesiyle bulunur. Taxicab geometride birim çember ele alınırsa; $(0,0)$ merkezli 1 yarıçaplı birim çemberin çevresi 8 birimdir. Dolayısıyla $\pi_T = \frac{8}{2} = 4$ olur.



Şekil 2.13

3) Öklid'in 12. aksiyomu olan Kenar-Açı-Kenar aksiyomu Taxicab geometride geçerli değildir.

Kenar-Açı-Kenar Aksiyomu: İki üçgen arasında yapılan eşleşmede iki kenar ve bu iki kenarın arasındaki açı eşitse bu iki üçgen birbirlerine benzerdir.



Şekil 2.14

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB^{'}C^{'}}$$

ise;

$$\frac{|AB|}{|AB^{'}|} = \frac{|AC|}{|AC^{'}|} = \frac{|BC|}{|B^{'}C^{'}|} = k, \quad k\epsilon R$$

oranı bulunmalıdır.

$$\begin{aligned}
|AB|_E &= d_E(A,B) = \sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2} = 2 \\
|BC|_E &= d_E(B,C) = \sqrt{(-2-(-2))^2+(-2-0)^2} = 2 \\
|AC|_E &= d_E(A,C) = \sqrt{(-2-0)^2+(-2-0)^2} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|AB^{'}\right|_E &= d_E\left(A,B^{'}\right) = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2} \\
\left|B^{'}C^{'}\right|_E &= d_E\left(B^{'},C^{'}\right) = \sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2} \\
\left|AC^{'}\right|_E &= d_E\left(A,C^{'}\right) = \sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2} = 2
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{|AB|}{|AB^{'}|}=\frac{|AC|}{|AC^{'}|}=\frac{|BC|}{|B^{'}C^{'}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

olur.

Karşılıklı açıları birbirine eşit olduğundan $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AB'C'}$ dir. Taxicab geometride ise üçgenlerin karşılıklı açıları birbirlerine eşit olmalarına rağmen,

$$\begin{aligned}|AB|_T &= d_T(A,B)=|0-(-2)|+|0-0|=2\\ |BC|_T &= d_T(B,C)=|-2-(-2)|+|-2-0|=2\\ |AC|_T &= d_T(A,C)=|-2-0|+|-2-0|=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|AB^{'}\right|_T &= d_T\left(A,B^{'}\right)=|1-0|+|1-0|=2\\ \left|B^{'}C^{'}\right|_T &= d_T\left(B^{'},C^{'}\right)=|2-1|+|0-1|=2\\ \left|AC^{'}\right|_T &= d_T\left(A,C^{'}\right)=|2-0|+|0-0|=2\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{|AB|}{|AB^{'}|}=\frac{|BC|}{|B^{'}C^{'}|}=\frac{2}{2}=1\neq\frac{|AC|}{|AC^{'}|}=\frac{4}{2}=2$$

dır. Dolayısıyla Taxicab geometride K.A.K aksiyomu sağlanmaz.

4) Taxicab geometri, kent coğrafyasında Öklidyen geometriye göre daha yararlı bir geometridir.

Örneğin; İdeal polis şubesine $X=(-1,4)$ koordinatlarında bir kaza raporu ulaştı. Alanda iki polis aracı vardır. Bunlardan A arabası $(2,1)$ koordinatlarında, B arabası $(-1,-1)$ koordinatlarında bulunmaktadır. Buna göre hangi araç olay yerine gönderilmelidir?

$X=(-1,4)$, $A=(2,1)$, $B=(-1,-1)$

$$\begin{aligned}d_T(X,A) &= |-1-2|+|4-1|=6\\ d_T(X,B) &= |-1-(-1)|+|4-(-1)|=5\end{aligned}$$

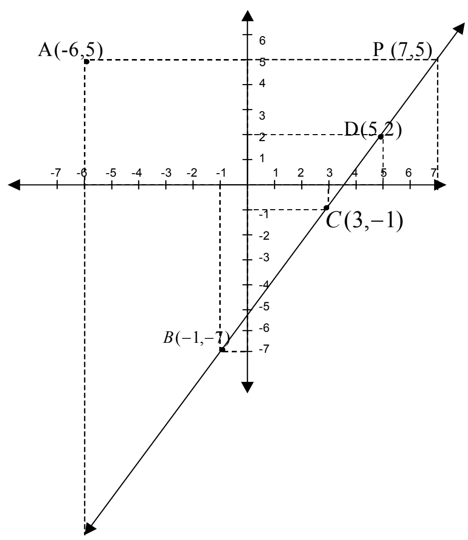
olduğunan B aracı olay yerine gönderilmelidir.

2.2.2 Taxicab Geometride Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Öklidyen geometride bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını bulurken noktanın doğruya olan dik uzaklığından bahsettik.

Taxicab geometride ise bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını bulmak için farklı bir yol izleyecek ve bunu alıştırmalarda göreceğiz.

Örnek 2.2.4:



Şekil 2.15

Yukarıda Şekil 2.15 verilen A noktası ve l doğrusuna bakınız.

a) $d_T(A, B)$ yi hesaplayınız.

b) $d_T(A, C)$ yi hesaplayınız.

c) $d_T(A, D)$ yi hesaplayınız.

d) Taxicab geometriye göre A dan mümkün olan en yakın uzaklıktaki l üzerindeki P noktasını bulunuz. A dan geçip l ye dik olan P noktası neresidir?

Çözüm:

a) $A = (-6, 5)$, $B = (-1, -7)$ olmak üzere;

$$d_T(A, B) = |-6 - (-1)| + |5 - (-7)| = 17$$

dir.

b) $A = (-6, 5)$, $C = (3, -1)$ olmak üzere;

$$d_T(A, C) = |-6 - 3| + |5 - (-1)| = 15$$

dir.

c) $A = (-6, 5)$, $D = (5, 2)$ olmak üzere;

$$d_T(A, D) = |-6 - 5| + |5 - 2| = 14$$

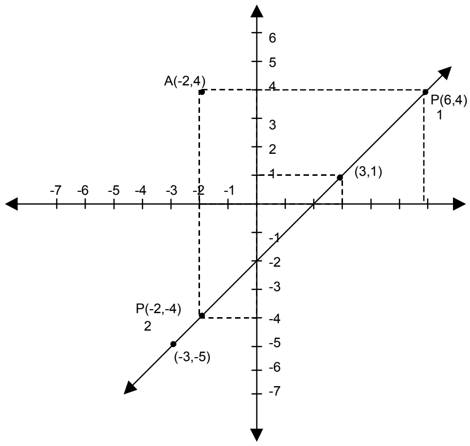
dir.

d) Taxicab geometriye göre A dan mümkün olan en yakın uzaklık isteniyor. Bunu bulmak için A dan l doğrusuna doğru x ve y eksenine paralel olacak şekilde doğrular çizecek olursak bu paralel doğruların doğruyu kestiği noktalardan yakın olanı mümkün olan en yakın uzaklıktır. O halde sorumuzda A noktasına en yakın olan l üzerindeki P noktası $(7, 5)$ dir.

A dan l ye olan taxicab uzaklığı A dan l ye olan minimum uzaklık olarak tanımlıyoruz. Buna göre A noktasından l doğrusuna olan taxicab uzaklığı

$A = (-6, 5)$, $P = (7, 5)$ olmak üzere, $d_T(A, P) = |-6 - 7| + |5 - 5| = 13$

dür.



Şekil 2.16

Burada l doğrusunun denklemini, iki noktası verilen doğrunun denkleminden;

$$\frac{x-x_1}{x_{1-}x_2}=\frac{y-y_1}{y_{1-}y_2}\Longrightarrow\frac{x-5}{3_{-}5}=\frac{y-2}{-1-2}\Longrightarrow 2x-3y=-1$$

olarak buluruz.

A dan geçen l ye dik olan doğru;

$$\frac{x+6}{a+6}=\frac{y-5}{b-5}$$

$$\Longrightarrow 6\left(b-5\right)+5\left(a+6\right)=\left(a+6\right)y-\left(b-5\right)x$$

Birbirine dik iki doğrunun eğimleri çarpımı -1 ise;

i) $2y-3x=-11$

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}\Longrightarrow m_1=\frac{3}{2}$$

olur.

ii) $\left(a+6\right)y-\left(b-5\right)x=6\left(b-5\right)+5\left(a+6\right)$

$$y=\frac{\left(b-5\right)}{\left(a+6\right)}x+\frac{6\left(b-5\right)}{\left(a+6\right)}+5\Longrightarrow m_2=\frac{b-5}{a+6}$$

olur.

$$\begin{aligned} m_1.m_2 &= -1 \\ \frac{3}{2}.\frac{b-5}{a+6} &= -1 \\ 3b+2a-3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$a = 3\ ,\ b = -1$$

dir.

Örnek 2.2.5: $(3,1)$ ve $(-3,-5)$ noktalarından geçen bir l doğrusu ile koordinatları $A = (-2,4)$ olan noktayı gösterin.

a) Taxicab geometride A dan l doğrusuna mümkün olan en yakın l doğrusu üstündeki P noktasını bulunuz.

b) $d_T(A,l)$ yi hesaplayınız.

Burada l doğrusunun denklemi, iki noktası verilen doğrunun denkleminden;

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{x_1-x_2} &= \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \\ \frac{x-3}{6} &= \frac{y-1}{6} \\ x-3 &= y-1 \\ x-2 &= y \end{aligned}$$

bulunur.

$P = (x,y)$ olsun. Doğru denklemi

$$f(x) = y = x-2$$

ise l doğrusu üzerindeki $P = (x,y)$ noktasının $A = (-2,4)$ noktasına olan taxicab uzaklık,

$$|x-(-2)|+|y-4|=|x+2|+|x-6|$$

olur.

$d_T\,(P,A)=|x+2|+|x-6|$ ise

$$\left\{\begin{array}{lr} -2x+4 & x\leq -2 \\ 8 & -2<x<6 \\ 2x-4 & x\ \geq 6 \end{array}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\min f(x)=8$$

olur.

a) Taxicab geometride A dan l doğrusuna mümkün olan en yakın taxicab uzaklığı 8 birimdir. Bu noktalar $P_1=(6,4)$ ve $P_2=(-2,-4)$ noktaları arasındaki tüm noktalardır. Yani P_1 ve P_2 noktaları arasındaki doğru parçasıdır.

b) $d_T\,(A,l)=8$ olur.

Taxicab geometride noktanın doğruya uzaklığını tanımlayabiliriz ama henüz formulize edemiyoruz. Yukarıda yaptığımız alıştırmaların taxicab geometri için tanımı aşağıdadır:

$d_T\,(A,l)$, En küçük $d_T\,(P,A)$ yı sağlayan $P\in l$ noktasıdır. Yani;

$$d_T\,(A,l)=\min d_T\,(P,A)\,,\ \ P\epsilon l$$

olarak ifade edilir.

Bu konuda yoğun araştırmalar yapan R. Kaya-Z. Akça-İ. Günaltılı-M. Özcan taxi düzlemindeki herhangi bir $P=(x_0,y_0)$ noktasının

$$l:ax+by+c=0$$

doğrusuna olan taxi uzaklığını

$$d_T\left(P,l\right)=\frac{\left|a_{x_0}+b_{y_0}+c\right|}{\max\left\{\left|a\right|,\left|b\right|\right\}}$$

formülü ile bulunacağını ifade etmişlerdir.

Bölüm 3

ÖKLİDYEN GEOMETRİDE BİR TEOREM İNCELEMESİ

Teorem 3.1.1: Öklid geometride, düzlemdeki bir düzgün çokgenin çevrel çemberi içinde, üzerinde, dışında veya çevrel çemberin bulunduğu düzlemin dışında seçilen bir P noktasının çokgenin köşelerine olan uzaklıklarının kareleri toplamı $n\left(l^2 + R^2\right)$ dir. [11]

Burada $n =$Çokgenin köşe sayısı,

$l =$Çemberin merkezinin P noktasına olan uzaklığı,

$R =$Çemberin yarıçapı

Bu teoremin ispatını kısaca anlatıp, aynı teoremi taxicab geometride uygulamaya çalışacağız.

Teoremin ispatında kullanacağımız bir trigonometrik eşitliği

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + ... + \cos(\alpha+n\beta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) ... + \sin(\alpha+n\beta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta \sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

İSPAT : Bu iki eşitliği birlikte gösterelim.

$$[\cos\alpha + i\sin\alpha] + [\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + ... + [\cos(\alpha+n\beta) + i\sin(\alpha+n\beta)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta\left[\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$\cos\alpha + i\sin\alpha = a$ ve $\cos\beta + i\sin\beta = x$ diyelim.

Kompleks sayılarda çarpma ve De Moivre formüllerini kullanarak;

$$a + ax + ax^2 + ... + ax^n = a.\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}
a.\frac{x^{n+1}-1}{x-1} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\cos(n+1)\beta + i\sin(n+1)\beta - 1}{cos\beta + i\sin\beta - 1} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{[(\cos(n+1)\beta - 1) + i\sin(n+1)\beta]}{[(cos\beta - 1) + i\sin\beta]} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{-2\sin^2(\frac{n+1}{2})\beta + 2i\sin(\frac{n+1}{2})\beta\cos(\frac{n+1}{2})\beta}{-2\sin^2(\frac{\beta}{2}) + 2i\sin(\frac{\beta}{2}).\cos(\frac{\beta}{2})}
\end{aligned}$$

$$= \quad (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{2i\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\beta\left[\cos\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\beta + i\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\beta\right]}{2i\sin\dfrac{\beta}{2}\left[\cos\dfrac{\beta}{2} + i\sin\dfrac{\beta}{2}\right]}$$

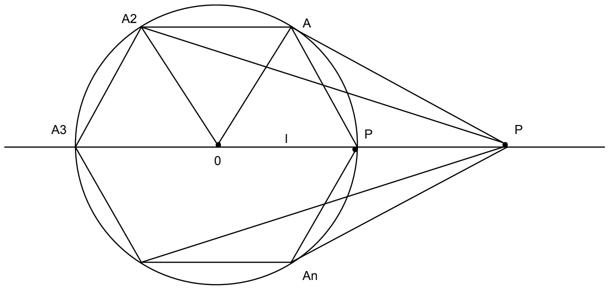
$$= \quad \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\left[\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta + i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta\right]\left[\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}\right]}{\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$= \quad \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\beta}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)\right]$$

bulunur.

Öklid geometrisinde teoremin ispatı:

a) P noktası çevrel çemberin dışında ise;



Şekil 3.1

Önce temsili bir çokgen ve çevrel çemberini çizelim. Merkezini O, çokgen köşelerini $A_1, A_2, ..., A_n$ ile gösterelim. P noktasından ve merkezden geçen doğruyu çizelim.

$|PO| = 1$, Çemberin yarıçapı R olmak üzere

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + ... + |PA_n|^2 = n\left(l^2 + R^2\right)$$

mi dir?

i) $\overset{\Delta}{POA_1}$ de cosinüs teoremi uygulayalım. $\overset{\Delta}{POA_1} = \alpha$ olsun.

$$\begin{aligned} |PA_1|^2 &= |PO|^2 + |OA_1|^2 - 2\,|PO|\,|OA_1|\cos \overset{\wedge}{POA_1} \\ &= l^2 + R^2 - 2.l.R\cos\alpha \end{aligned}$$

dır.

ii) $\overset{\Delta}{POA_2}$ de cosinüs teoremi uygulayalım.

$$\begin{aligned} |PA_2|^2 &= |PO|^2 + |OA_2|^2 - 2\,|PO|\,|OA_2|\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) \\ &= l^2 + R^2 - 2.l.R\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

dır.

iii) $\overset{\Delta}{POA_n}$ de cosinüs teoremi uygulayalım.

$$\begin{aligned} |PA_n|^2 &= |PO|^2 + |OA_n|^2 - 2\,|PO|\,|OA_n|\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\,2\pi}{n}\right) \\ &= l^2 + R^2 - 2.l.R\cos\left(\alpha + \frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

dır.

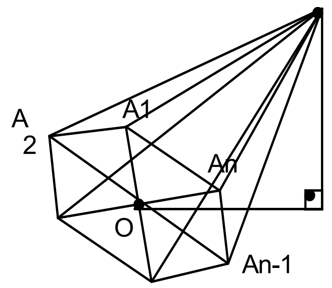
$$\sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = n\left(l^2 + R^2\right) - 2.l.R\left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}\right)\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)}{2}\right) = \frac{\sin\frac{n-1+1}{2}\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{2n}}.\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)}{2}.\frac{2\pi}{r}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = n\left(l^2 + R^2\right)$$

bulunur.

b) Şimdi de P noktasını düzlemin dışında alalım.



Şekil 3.2

P noktasından düzleme dik inelim ve bu noktaya $P^{\prime}$ diyelim.P ve $P^{\prime}$noktalarını çokgenin köşelerine birleştirelim.

$$|PO| = l \ , \ |OA_i| = R \ , \ i = 1, 2, ..., n$$

olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = n\left(l^2 + R^2\right)$$

mi dir?

PP_1 doğrusu düzleme dik olduğu için $PP^{\prime}A_1$ açıları $(i = 1, ..., n)$ dik açılardır. $P\overset{\Delta}{P^{\prime}}A_1, P\overset{\Delta}{P^{\prime}}A_2, ..., P\overset{\Delta}{P^{\prime}}A_n$ dik üçgenlerine pisagor teoremini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 &= |PA_1|^2 + |PA_2|^2 + ... + |PA_n|^2 \\
&= |PP^{\prime}|^2 + |P^{\prime}A_1|^2 + |PP^{\prime}|^2 + |P^{\prime}A_2|^2 + ... + |PP^{\prime}|^2 + |P^{\prime}A_n|^2 \\
&= n.\,|PP^{\prime}|^2 + \underbrace{\left|P^{\prime}A_1\right|^2 + \left|P^{\prime}A_2\right|^2 + ... + \left|P^{\prime}A_n\right|^2}
\end{aligned}$$

Bu kısım bir önceki ispattan dolayı $n.\left(|P^{\prime}O|^2 + R^2\right)$ dir.

O halde;

$$\begin{aligned}
&= n.\left|PP^{\prime}\right|^2 + n.\left(\left|P^{\prime}O\right|^2 + R^2\right) \\
&= n\left(\left|PP^{\prime}\right|^2 + \left|P^{\prime}O\right|^2 + R^2\right) \\
&= n\left(|PO|^2 + R^2\right) \\
&= n\left(l^2 + R^2\right)
\end{aligned}$$

olur.

c) P noktası çevrel çemberin üzerinde ise;

$$|PO| = l = R$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = n\left(l^2 + R^2\right) = 2nR^2$$

$|PA_1| = \alpha$ ile gösterelim. Buna göre

$$|PA_2|, |PA_3|, ..., |PA_n|$$

sırasıyla

$$\alpha + \frac{2\pi}{n}, \alpha + \frac{4\pi}{n}, ..., \alpha + \frac{2(n-1)}{n}\pi$$

olur.

Herhangi bir AB kirişinin uzunluğu $2R\sin\frac{\widehat{AB}}{2}$ dır.

Öyle ise

$$\begin{aligned}
|PA_1| &= 2R\sin\frac{\alpha}{2} \\
|PA_2| &= 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n}\right) \\
|PA_3| &= 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{n}\right) \\
\\
|PA_n| &= 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

bulmaya çalıştığımız

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + |PA_3|^2 + ... + |PA_n|^2 = n(l^2 + R^2)$$

idi. Buradan verilenler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(2R\sin\frac{\alpha}{2})^2 + \left(2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + ... + \left(2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right) \\
&= 4R^2\left[\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n}) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{n}\right) + ... + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

trigonometrik eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= 4R^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\alpha+1-\cos(\alpha+\frac{2\pi}{n})+1-\cos(\alpha+\frac{4\pi}{n})+...+1-\cos(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n})\right)\right] \\
&= 4R^2\left[\frac{1}{2}\left(n-\left(\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{n})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{n})+...+\cos(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)\right] \\
&= 4R^2\left[\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi\cos(\alpha+\frac{n-1}{n}\pi)}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)\right] \\
&= 4R^2\frac{n}{2} \\
&= 2nR^2
\end{aligned}$$

olur. Burada P noktası çevrel çember üzerinde idi, yani $l = R$ olduğundan $2nR^2 = n(R^2+R^2) = n(l^2+R^2)$ olarak bulunur.

d) P noktası çevrel çemberin içinde ise;

$|PO| = l$, çemberin yarıçapı R olmak üzere

$$|PA_1|^2+|PA_2|^2+...+|PA_n|^2 = n\left(l^2+R^2\right)$$

eşitliğinin ispatı, P noktası çevrel çemberin dışında olma durumundaki gibi cosinüs teoremi kullanılarak yapılabilir.

i) $P\overset{\Delta}{O}A_1$ de cosinüs teoremi uygulayalım. $P\overset{\Delta}{O}A_1 = \alpha$ olsun.

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= |PO|^2+|OA_1|^2-2\,|PO|\,|OA_1|\cos P\hat{O}A_1 \\
&= l^2+R^2-2.l.R\cos\alpha
\end{aligned}$$

dır.

ii) $P\overset{\Delta}{O}A_2$ de cosinüs teoremi uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|PA_2|^2 &= |PO|^2+|OA_2|^2-2\,|PO|\,|OA_2|\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right) \\
&= l^2+R^2-2.l.R\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

dır.

iii) $P\overset{\Delta}{O}A_3$ de cosinüs teoremi uygulayalım.

$$\begin{aligned} |PA_n|^2 &= |PO|^2 + |OA_n|^2 - 2\,|PO|\,|OA_n| \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\,2\pi}{n}\right) \\ &= l^2 + R^2 - 2.l.R \cos\left(\alpha + \frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

dır.

$$\sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = n\left(l^2 + R^2\right) - 2.l.R\left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}\right)\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)}{2}\right) = \frac{\sin\frac{n-1+1}{2}\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{2n}} . \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)}{2}.\frac{2\pi}{r}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = n\left(l^2 + R^2\right)$$

bulunur.

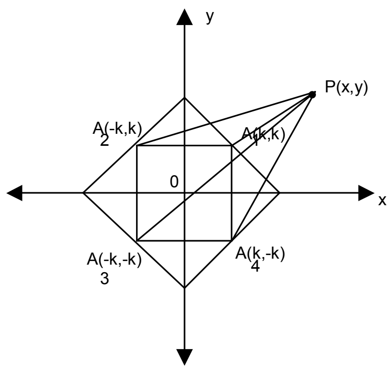
Bölüm 4

TAXICAB GEOMETRİDE BİR TEOREM İNCELEMESİ

Şimdi de taxicab geometride teoreme bakalım. Taxi çember içinde bir düzgün dörtgen alalım. Dörtgenin ve taxi çemberin merkezini koordinat sisteminin merkezine yerleştirelim.

4.1 Taxi Çember İçinde Bir Kare

a) P noktası taxi çemberinin ve x, y eksenlerinin dışında ise;



Şekil 4.1

bulmamız gereken eşitlik

$$\left|PA_1\right|^2+\left|PA_2\right|^2+\left|PA_3\right|^2+...+\left|PA_n\right|^2 \;=\; n(l^2+R^2)$$

olmalıdır. Buna göre, $|OP|=|x|+|y|=l$ ve $R=2k$ alalım.

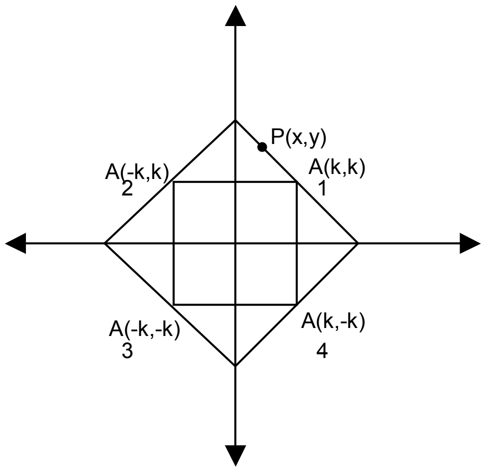
$$\begin{aligned}
\left|PA_1\right|^2 &= (|y-k|+|x-k|)^2\\
\left|PA_2\right|^2 &= (|y-k|+|x+k|)^2\\
\left|PA_3\right|^2 &= (|y+k|+|x+k|)^2\\
\left|PA_4\right|^2 &= (|y+k|+|x-k|)^2
\end{aligned}$$

Verilenler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\left|PA_i\right|^2 &= 2\left|y-k\right|^2+2\left|x-k\right|^2+2\left|y+k\right|^2+2\left|x+k\right|^2\\
&\quad +2\left[\;|y-k|\,|x-k|+|y-k|\,|x+k|+|y+k|\,|x+k|+|y+k|\,|x-k|\;\right]\\
&= 2\left[y^2+k^2-2yk+x^2+k^2-2kx+y^2+k^2+2yk+x^2+k^2+2xk\;\right]\\
&\quad +2[yx-yk-kx+k^2+yx+yk-kx-k^2-yx+yk+kx+yx\\
&\quad -yk+kx-k^2]\\
&= 4y^2+8k^2+4x^2+2\,(4yx)\\
&= 4y^2+4x^2+8xy+8k^2\\
&= 4\,(|x|+|y|)^2+8k^2\\
&= 4l^2+2R^2\\
&= 4\left(l^2+\frac{R^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) P noktası taxi çember üzerinde ise;



Şekil 4.2

$$\begin{aligned}
|PA_1| &= (|k-x|+|y-k|)^2 = k^2+x^2-2kx+y^2+k^2-2yk+2\left(ky-k^2-xy+xk\right)\\
|PA_2| &= (|x+k|+|y-k|)^2 = x^2+k^2+2kx+y^2+k^2-2yk+2\left(xy-xk+ky-k^2\right)\\
|PA_3| &= (|x+k|+|y+k|)^2 = x^2+k^2+2kx+y^2+k^2+2yk+2\left(xy+xk+ky+k^2\right)\\
|PA_4| &= (|k-x|+|y+k|)^2 = k^2+x^2-2kx+y^2+k^2+2yk+2\left(ky+k^2-xy-xk\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} |PA_i|^2 &= 4x^2+4y^2+8k^2+8ky\\
&= 4x^2+4y^2+8xy-8xy+8k^2+8ky\\
&= 4\,(x+y)^2+8k^2-8xy+8ky\\
&= 4l^2+8\left(\tfrac{R}{2}\right)^2-8xy+8ky
\end{aligned}$$

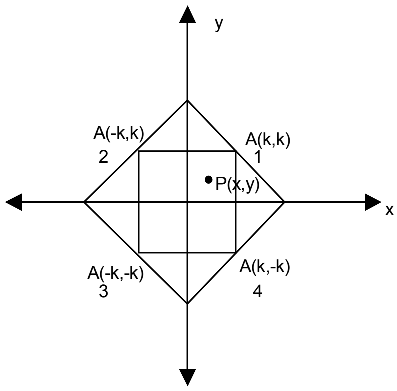
işleminin sonucunda $n(l^2+R^2)$ ifadesine uygun bir eşitlik bulunamadığından $|OP| = |x|+|y| = l$ ve $R = 2k$ ifadelerine ek olarak $||x|-|y|| = \lambda$ alırsak,

$$\begin{aligned}
|PA_1| &= (|k-x|+|y-k|)^2 = \lambda^2\\
|PA_2| &= (|x+k|+|y-k|)^2 = (2k)^2\\
|PA_3| &= (|x+k|+|y+k|)^2 = (4k)^2\\
|PA_4| &= (|k-x|+|y+k|)^2 = (\lambda+2k)^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{4} |PA_i|^2 = \lambda^2 + 4k^2 + 16k^2 + (\lambda + 2k)^2$$
$$= \lambda^2 + 20k^2 + \lambda^2 + 4k\lambda + 4k^2$$
$$= 2\lambda^2 + 24k^2 + 4k\lambda$$
$$= 2\lambda^2 + 6R^2 + 2R\lambda$$
$$= 4(\frac{3}{2}R^2 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{R\lambda}{2})$$

elde edilir.

c) P noktası taxi çemberin içinde ise;



Şekil 4.3

$$|PA_1| = (|k - x| + |k - y|)^2 = k^2 + x^2 - 2kx + k^2 + y^2 - 2ky + 2\left(k^2 - ky - xk + xy\right)$$
$$|PA_2| = (|x + k| + |k - y|)^2 = x^2 + k^2 + 2kx + k^2 + y^2 - 2ky + 2\left(xk - xy + k^2 - ky\right)$$
$$|PA_3| = (|x + k| + |y + k|)^2 = x^2 + k^2 + 2xk + y^2 + k^2 + 2yk + 2\left(xy + xk + ky + k^2\right)$$
$$|PA_4| = (|k - x| + |y + k|)^2 = k^2 + x^2 - 2kx + y^2 + k^2 + 2yk + 2\left(ky + k^2 - xy - xk\right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}|PA_i|^2 &= 4x^2+4y^2+16k^2 \\
&= 4x^2+4y^2+8xy-8xy+16k^2 \\
&= 4\,(x+y)^2+16k^2-8xy \\
&= 4l^2+4R^2-8xy \\
&= 4\left(l^2+R^2\right)-8xy \\
&= 4\left(l^2+R^2-2xy\right)
\end{aligned}$$

işleminin sonucunda $n(l^2+R^2)$ ifadesine uygun bir eşitlik bulunamadığından $|OP|=|x|+|y|=l$ ve $R=2k$ ifadelerine ek olarak $||x|-|y||=\lambda$ alırsak

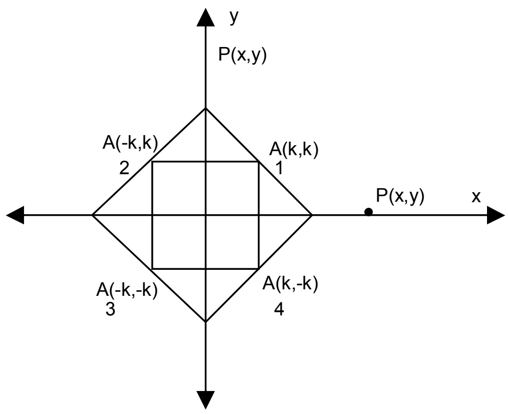
$$\begin{aligned}
|PA_1| &= (|k-x|+|k-y|)^2=(2k-(x+y))^2 \\
|PA_2| &= (|x+k|+|k-y|)^2=(2k+(x-y))^2 \\
|PA_3| &= (|x+k|+|y+k|)^2=(2k+(x+y))^2 \\
|PA_4| &= (|k-x|+|y+k|)^2=(2k-(x-y))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}|PA_i|^2 &= 4\,(2k)^2+2\,(x+y)^2+2\,(x-y)^2-4k\,(x+y)+4k\,(x+y) \\
&\quad +4k\,(x-y)-4k\,(x-y) \\
&= 16k^2+2x^2+2y^2+4xy+2x^2+2y^2-4xy-4kx-4ky+4kx \\
&\quad +4ky+4kx-4ky-4kx+4ky
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16k^2+2x^2+2y^2+4xy+2x^2+2y^2-4xy \\
&= 16k^2+2\,(x+y)^2+2\,(x-y)^2 \\
&= 16\left(\frac{R}{2}\right)^2+2l^2+2\lambda^2 \\
&= 4R^2+2l^2+2\lambda^2 \\
&= 4\left(R^2+\frac{l^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

d) P noktası x veya y ekseni üzerinde ise;



Şekil 4.4

$$\begin{aligned}
|PA_1| &= (|x-k| + |y-k|)^2 \\
|PA_2| &= (|x+k| + |y-k|)^2 \\
|PA_3| &= (|x+k| + |y+k|)^2 \\
|PA_4| &= (|x-k| + |y+k|)^2
\end{aligned}$$

P, x ekseni üzerinde ise $P = (x, y) = (x, 0)$ dır. Dolayısıyla $|OP| = |x| = l$ olur. Yine $R = 2k$ olsun.

$$\begin{aligned}
|PA_1| &= (|x-k| + |-k|)^2 \\
|PA_2| &= (|x+k| + |-k|)^2 \\
|PA_3| &= (|x+k| + |k|)^2 \\
|PA_4| &= (|x-k| + |k|)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}|PA_i|^2 &= |x-k|^2+k^2+2k\,|x-k|+|x+k|^2+k^2+2k\,|x+k| \\
&+ |x+k|^2+k^2+2k\,|x+k|+|x-k|^2+k^2+2k\,|x-k| \\
&= x^2+k^2-2kx+k^2+2kx-2k^2+x^2+k^2+2kx \\
&+ k^2+2kx+2k^2+x^2+k^2+2xk+k^2+2kx+2k^2 \\
&+ x^2+k^2-2xk+k^2+2kx-2k^2 \\
&= 4x^2+8kx+8k^2
\end{aligned}$$

P noktası x ekseni üzerinde olduğundan $l = |OP| \; = |x|$ dir. Dolayısıyla denklemde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}
&= 4l^2+8\left(\frac{R}{2}\right)^2+4lR \\
&= 4\left(l^2+\frac{R^2}{2}+lR\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

P, y ekseni üzerinde ise $P=(x,y)=(0,y)$ dır.

$$\begin{aligned}
|PA_1| &= (|-k|+|y-k|)^2 \\
|PA_2| &= (|k|+|y-k|)^2 \\
|PA_3| &= (|k|+|y+k|)^2 \\
|PA_4| &= (|-k|+|y+k|)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}|PA_i|^2 &= |y-k|^2+k^2+2k\,|y-k|+|y+k|^2+k^2+2k\,|y+k| \\
&\quad +|y+k|^2+k^2+2k\,|y+k|+|y-k|^2+k^2+2k\,|y-k| \\
&= 4y^2+8ky+8k^2
\end{aligned}$$

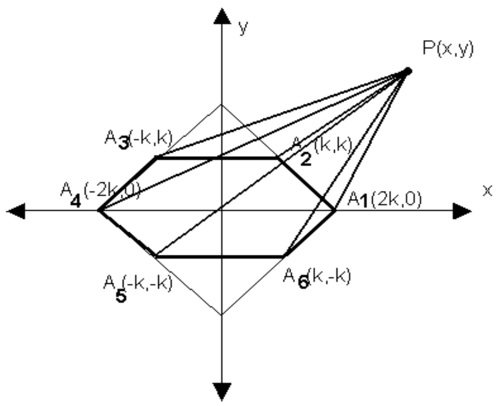
P noktası y ekseni üzerinde olduğundan $l = |OP| \; = |y|$ dir. Dolayısıyla denklemde yerine yazıldığında;

$$
\begin{aligned}
&= 4l^2 + 8\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 4lR = n.\left(l^2 + \frac{R^2}{2} + lR\right) \\
&= 4\left(l^2 + \frac{R^2}{2} + lR\right)
\end{aligned}
$$

bulunur

4.2 Taxi Çember İçinde Bir Altıgen

a) P noktası taxi çember dışında ise;



Şekil 4.5

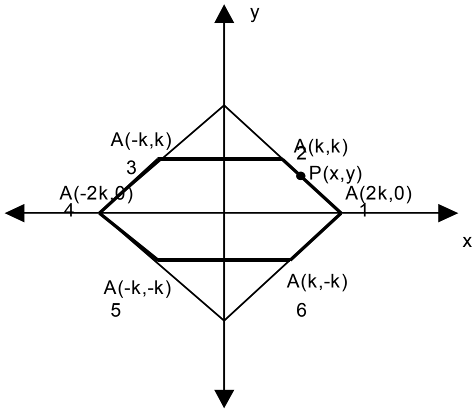
$l = |OP| = |x| + |y|$

$R = 2k$ alalım.

$$
\begin{array}{rclcl}
|PA_1|^2 & = & (|x-k|+|y-k|)^2 & = & x^2+k^2-2kx+y^2+k^2-2yk \\
 & & & + & 2xy-2xk-2ky+2k^2 \\
|PA_2|^2 & = & (|x+k|+|y-k|)^2 & = & x^2+k^2+2kx+y^2+k^2-2yk \\
 & & & + & 2xy-2xk+2ky-2k^2 \\
|PA_3|^2 & = & (|x+2k|+|y|)^2 & = & {}^2+4k^2+4kx+y^2+2xy+4ky \\
|PA_4|^2 & = & (|x+k|+|y+k|)^2 & = & x^2+k^2+2kx+y^2+k^2+2yk \\
 & & & + & 2xy+2xk+2ky+2k^2 \\
|PA_5|^2 & = & (|x-k|+|y+k|)^2 & = & x^2+k^2-2kx+y^2+k^2+2yk \\
 & & & & 2xy+2xk-2ky-2k^2 \\
|PA_6|^2 & = & (|x-2k|+|y|)^2 & = & x^2+4k^2-4kx+y^2+2xy-4ky
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} |PA_i|^2 &= 6x^2+6y^2+12xy+16k^2 \\
&= 6\,(x+y)^2+16k^2 \\
&= 6l^2+16\left(\frac{R}{2}\right)^2 \\
&= 6l^2+4R^2 \\
&= 6\left(l^2+\frac{2}{3}R^2\right) \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

b) P noktası taxi çember üzerinde ise;



Şekil 4.6

$$l = |OP| = |x| + |y|$$

$R = 2k$ alalım.

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|2k-x| + |y-0|)^2 = 4k^2 + x^2 - 4kx + y^2 + 4yk - 2xy \\
|PA_2|^2 &= (|x-k| + |k-y|)^2 = x^2 + k^2 + 2kx + y^2 + k^2 - 2yk + 2xy \\
& \quad -2xy - 2k^2 + 2ky \\
|PA_3|^2 &= (|x+k| + |k-y|)^2 = x^2 + k^2 + 2kx + y^2 + k^2 - 2yk + 2xk \\
& \quad -2xy + 2k^2 - 2ky \\
|PA_4|^2 &= (|x+2k| + |y-0|)^2 = x^2 + 4k^2 + 4xk + y^2 + 2yx + 4yk \\
|PA_5|^2 &= (|x+k| + |y+k|)^2 = x^2 + k^2 + 2kx + y^2 + k^2 + 2yk + \\
& \quad 2xy + 2xk + 2ky + 2k^2 \\
|PA_6|^2 &= (|x-k| + |y+k|)^2 = x^2 + k^2 - 2kx + y^2 + k^2 + 2yk + \\
& \quad 2xy + 2xk - 2ky - k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}|PA_i|^2 &= 6x^2+6y^2+16k^2+8ky+8kx \\
&= 6x^2+6y^2+12xy-12xy+16k^2+8ky+8kx \\
&= 6\left(x+y\right)^2+16k^2-12xy+8k\left(x+y\right) \\
&= 6l^2+16\left(\frac{R}{2}\right)^2-12xy+8kl \\
&= 6l^2+4R^2-12xy+8kl
\end{aligned}$$

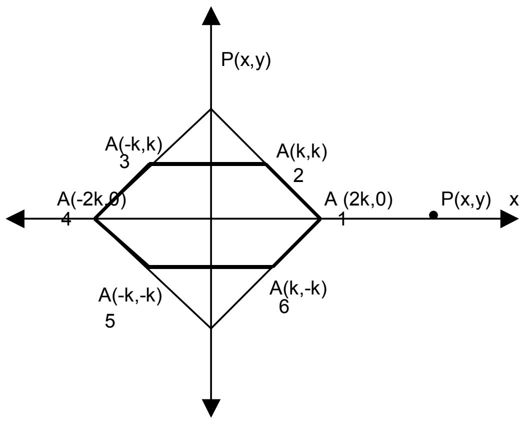
işleminin sonucunda $n(l^2+R^2)$ ifadesine uygun bir eşitlik bulunamadığından $|OP|=|x|+|y|=l$ ve $R=2k$ ifadelerine ek olarak $||x|-|y||=\lambda$ alırsak

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= \left(|2k-x|+|y-0|\right)^2=\left(2k-(x-y)\ \right)^2 \\
|PA_2|^2 &= \left(|x-k|+|k-y|\right)^2=\left(x-y\right)^2 \\
|PA_3|^2 &= \left(|x+k|+|k-y|\right)^2=\left(2k+(x-y)\ \right)^2 \\
|PA_4|^2 &= \left(|x+2k|+|y-0|\right)^2=\left(2k+(x+y)\ \right)^2 \\
|PA_5|^2 &= \left(|x+k|+|y+k|\right)^2=\left(2k+(x+y)\ \right)^2 \\
|PA_6|^2 &= \left(|x-k|+|y+k|\right)^2=\left(x+y\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}|PA_i|^2 &= 4k^2-4k\left(x-y\right)+\left(x-y\right)^2+\left(x-y\right)^2+4k^2 \\
&+ 4k\left(x-y\right)+\left(x-y\right)^2+4k^2+4k\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2 \\
&+ 4k^2+4k\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2+\left(x+y\right)^2 \\
&= 16k^2+3\left(\left(x-y\right)^2+\left(x+y\right)^2\right)+8k\left(x+y\right) \\
&= 16\left(\frac{R}{2}\right)^2+3\left(\lambda^2+l^2\right)+8\frac{R}{2}l \\
&= 4R^2+3\lambda^2+3l^2+4Rl \\
&= 6\left(\frac{2}{3}R^2+\frac{l^2}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{2}{3}Rl\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) P noktası x veya y ekseni üzerinde ise;



Şekil 4.7

P, x ekseni üzerinde ise $P = (x, y) = (x, 0)$ dır.

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|x-2k|+0) = x^2+4k^2-4xk \\
|PA_2|^2 &= (|x-k|+|k-0|)^2 = x^2+k^2-2xk+k^2+2xk-2k^2 \\
|PA_3|^2 &= (|x+k|+|k-0|)^2 = x^2+k^2+2xk+k^2+xk+k^2 \\
|PA_4|^2 &= (|x+k|+|k-0|)^2 = x^2+4k^2+4xk \\
|PA_5|^2 &= (|x+k|+|k|)^2 = x^2+k^2+2xk+k^2+xk+k^2 \\
|PA_6|^2 &= (|x-k|+|k|)^2 = x^2+k^2-2xk+k^2+xk-k^2
\end{aligned}$$

P noktası x ekseni üzerinde olduğundan $l = |OP| = |x|$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} |PA_i|^2 &= 6x^2+16k^2-8xk \\
&= 6l^2+16\frac{R^2}{4}-8l\frac{R}{2} \\
&= 6l^2+4R^2-4Rl \\
&= 6\left(l^2+\frac{2}{3}R^2-\frac{2}{3}Rl\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

P, y ekseni üzerinde ise $P = (x, y) = (0, y)$ dır.

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|0-2k| + |y-0|)^2 = 4k^2 + 4yk + y^2 \\
|PA_2|^2 &= (|0-k| + |y-k|)^2 = k^2 + 2ky^2 - 2k^2 + y^2 - 2yk + k^2 \\
|PA_3|^2 &= (|0+k| + |y-k|)^2 = k^2 + 2ky - 2k^2 + y^2 - 2yk + k^2 \\
|PA_4|^2 &= (|0+k| + |y-0|)^2 = 4k^2 + 4yk + y^2 \\
|PA_5|^2 &= (|0+k| + |y+k|)^2 = k^2 + 2ky + 2k^2 + y^2 + 2yk + k^2 \\
|PA_6|^2 &= (|0-k| + |y+k|)^2 = k^2 + 2ky + 2k^2 + y^2 + 2yk + k^2
\end{aligned}$$

P noktası y ekseni üzerinde olduğundan $l = |OP| \ = |y|$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} |PA_i|^2 &= 16k^2 - 8xk + 6y^2 \\
&= 16\frac{R^2}{4} - 8l^2 - 8\frac{R}{2}l \\
&= 6l^2 + 4R^2 - 4Rl \\
&= 6\left(l^2 + \frac{2}{3}R^2 - \frac{2}{3}Rl\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

d) P noktası taxi çemberin içinde ise;

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|2k-x|+|y-0|)^2 = 4k^2+x^2-4kx+y^2+4ky-2xy \\
|PA_2|^2 &= (|k-x|+|k-y|)^2 = x^2+k^2-2kx+k^2+y^2-2ky \\
&\quad +2\left(k^2-ky-xk+xy\right) \\
|PA_3|^2 &= (|x+k|+|k-y|)^2 = x^2+k^2+2xk+y^2+k^2-2yk \\
&\quad +2\left(xk-xy+k^2-ky\right) \\
|PA_4|^2 &= (|x+2k|+|y-0|)^2 = x^2+4k^2+4kx+y^2+2\,(xy+2yk) \\
|PA_5|^2 &= (|x+k|+|y+k|)^2 = x^2+k^2+2kx+k^2+y^2+2ky \\
&\quad +2\left(k^2+ky+xk+xy\right) \\
|PA_6|^2 &= (|k-x|+|y+k|)^2 = x^2+k^2-2kx+k^2+y^2+2ky \\
&\quad +2\left(k^2+ky-xk-xy\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}|PA_i|^2 &= 6x^2+6y^2+24k^2+8ky \\
&= 6x^2+6y^2+12xy-12xy+24k^2+8ky \\
&= 6\left(x^2+2xy+y^2\right)-12xy+24k^2+8ky \\
&= 6\,(x+y)^2+24\left(\frac{R}{2}\right)^2+8ky-12xy \\
&= 6l^2+6R^2+8ky-12xy
\end{aligned}$$

işleminin sonucunda $n(l^2+R^2)$ ifadesine uygun bir eşitlik bulunamadığından

$|OP| = |x| + |y| = l$ ve $R = 2k$ ifadelerine ek olarak $||x| - |y|| = \lambda$ alırsak;

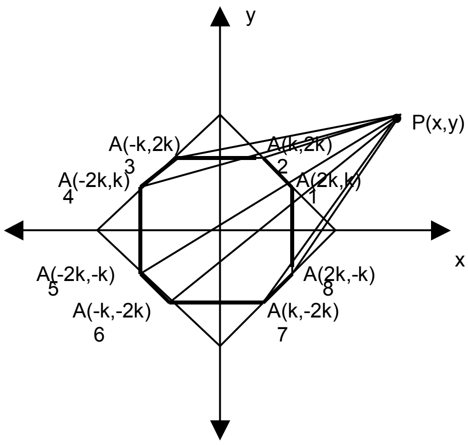
$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|2k - x| + |y - 0|)^2 = (2k - (x - y)\ )^2 \\
|PA_2|^2 &= (|k - x| + |k - y|)^2 = (2k - (x + y)\ )^2 \\
|PA_3|^2 &= (|x + k| + |k - y|)^2 = (2k + (x - y)\ )^2 \\
|PA_4|^2 &= (|x + 2k| + |y - 0|)^2 = (2k + (x + y)\ )^2 \\
|PA_5|^2 &= (|x + k| + |y + k|)^2 = (2k + (x + y)\ )^2 \\
|PA_6|^2 &= (|x - k| + |y + k|)^2 = (2k - (x - y)\ )^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} |PA_i|^2 &= 8k^2 - 8k(x - y) + 2(x - y)^2 + 4k^2 - 4k(x + y) + (x + y)^2 \\
&\quad +4k^2 + 4k(x - y) + (x - y)^2 + 8k^2 + 4k(x + y) + 2(x + y)^2 \\
&= 24k^2 - 4kx + 4ky + 3(x - y)^2 + 3(x + y)^2 \\
&= 24\left(\frac{R}{2}\right)^2 - 4\frac{R}{2}\lambda + 3\lambda^2 + 3l^2 \\
&= 6R^2 + 3\lambda^2 + 3l^2 - 2R\lambda \\
&= 6\left(R^2 + \frac{l^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{3}R\lambda\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3 Taxi Çember İçinde Düzgün Sekizgen

a) $P = (x, y)$ noktası taxi çemberin dışında ise;



Şekil 4.8

$$
\begin{aligned}
|PO| &= |x| + |y| = l \\
R &= 3k \text{ alalım.}
\end{aligned}
$$

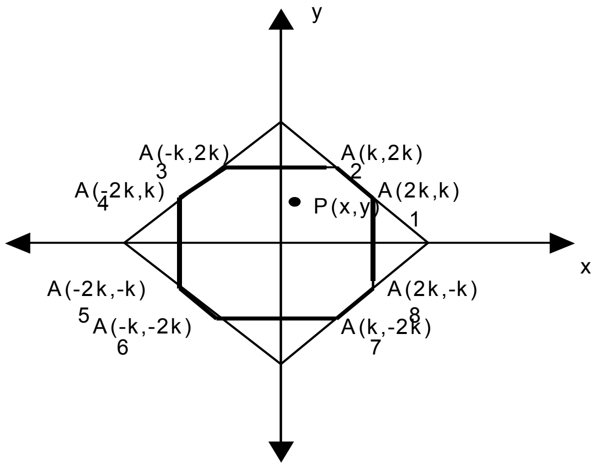
$$
\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|x-2k| + |y-k|)^2 = x^2 + 4k^2 - 4kx + y^2 + k^2 - 2ky \\
&\quad +2\left(xy - xk - 2ky + 2k^2\right) \\
|PA_2|^2 &= (|x-k| + |y-2k|)^2 = x^2 + k^2 - 2kx + y^2 + 4k^2 - 4ky \\
&\quad +2\left(xy - 2xk - ky + 2k^2\right) \\
|PA_3|^2 &= (|x+k| + |y-2k|)^2 = x^2 + k^2 + 2xk + y^2 + 4k^2 - 4yk \\
&\quad +2\left(xy - 2xk + ky - 2k^2\right) \\
|PA_4|^2 &= (|x+2k| + |y-k|)^2 = x^2 + 4k^2 + 4kx + y^2 + k^2 - 2ky \\
&\quad +2\left(xy - xk + 2yk - 2k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|PA_5|^2 &= (|x+2k|+|y+k|)^2 = x^2+4k^2+4kx+k^2+y^2+2ky \\
&\quad +2\left(2k^2+2ky+xk+xy\right) \\
|PA_6|^2 &= (|x+k|+|y+2k|)^2 = x^2+k^2+2kx+4k^2+y^2+4ky \\
&\quad +2\left(2k^2+ky+2xk+xy\right) \\
|PA_7|^2 &= (|x-k|+|y+2k|)^2 = x^2+k^2-2kx+y^2+4k^2+4ky \\
&\quad +2\left(xy+2xk-ky-2k^2\right) \\
|PA_8|^2 &= (|x-2k|+|y-k|)^2 = x^2+4k^2-4kx+y^2+k^2-2ky \\
&\quad +2\left(xy-xk-2ky+2k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} |PA_i|^2 &= 8x^2+20k^2+8y^2+20k^2+16xy \\
&= 8\left(x^2+2xy+y^2\right)+40k^2 \\
&= 8\left(x+y\right)^2+40k^2 \\
&= 8l^2+40\left(\frac{R}{3}\right)^2 \\
&= 8\left(l^2+5\frac{R^2}{9}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

b) P noktası taxi çember içindeyse;



Şekil 4.9

$|PO| = |x| + |y| = l$ ve $R = 3k$ alalım.

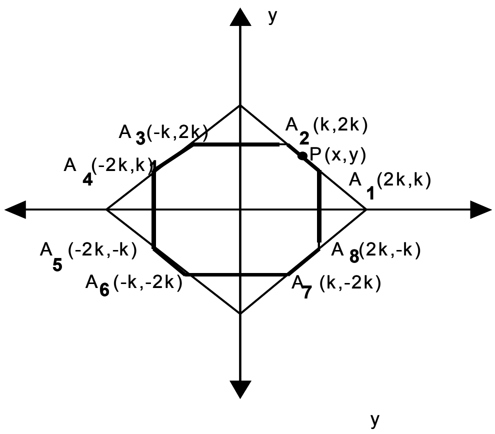
$$
\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|x-2k| + |y-k|)^2 = x^2 + 4k^2 - 4kx + y^2 + k^2 - 2ky \\
&\quad +2\left(xy - xk - 2ky + 2k^2\right) \\
|PA_2|^2 &= (|x-k| + |y-2k|)^2 = x^2 + k^2 - 2kx + y^2 + 4k^2 - 4ky \\
&\quad +2\left(xy - 2xk - ky + 2k^2\right) \\
|PA_3|^2 &= (|x+k| + |y-2k|)^2 = x^2 + k^2 + 2xk + y^2 + 4k^2 - 4yk \\
&\quad +2\left(xy - 2xk + ky - 2k^2\right) \\
|PA_4|^2 &= (|x+2k| + |y-k|)^2 = x^2 + 4k^2 + 4kx + y^2 + k^2 - 2ky \\
&\quad +2\left(xy - xk + 2yk - 2k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|PA_5|^2 &= (|x+2k|+|y+k|)^2 = x^2+4k^2+4kx+k^2+y^2+2ky \\
&\quad +2\left(2k^2+2ky+xk+xy\right) \\
|PA_6|^2 &= (|x+k|+|y+2k|)^2 = x^2+k^2+2kx+4k^2+y^2+4ky \\
&\quad +2\left(2k^2+ky+2xk+xy\right) \\
|PA_7|^2 &= (|x-k|+|y+2k|)^2 = x^2+k^2-2kx+y^2+4k^2+4ky \\
&\quad +2\left(xy+2xk-ky-2k^2\right) \\
|PA_8|^2 &= (|x-2k|+|y-k|)^2 = x^2+4k^2-4kx+y^2+k^2-2ky \\
&\quad +2\left(xy+xk-2ky-2k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} |PA_i|^2 &= 8x^2+8y^2+40k^2+16xy \\
&= 8x^2+8y^2+16xy+40k^2 \\
&= 8\left(x^2+2xy+y^2\right)+40k^2 \\
&= 8\,(x+y)^2+40k^2 \\
&= 8l^2+40\left(\frac{R}{3}\right)^2 \\
&= 8\left(l^2+5\frac{R^2}{9}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

c) P noktası taxi çenberi üzerinde ise,



Şekil 4.10

$|PO| = |x|+|y| = l$ ve $R = 3k$ alalım.

$$
\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|x-2k|+|y-k|)^2 &= & \; x^2+4k^2-4kx+y^2+k^2-2yk \\
& & + & \; 2\,(2ky-2k^2-xy+xk) \\
|PA_2|^2 &= (|x-k|+|y-2k|)^2 &= & \; x^2+k^2-2kx+y^2+4k^2-4yk \\
& & + & \; 2\,(2xk-xy-2k^2+ky) \\
|PA_3|^2 &= (|x+k|+|y-2k|)^2 &= & \; x^2+k^2+2kx+y^2+4k^2-4yk \\
& & + & \; 2\,(2xk-xy+2k^2-ky) \\
|PA_4|^2 &= (|x+2k|+|y-k|)^2 &= & \; x^2+4k^2+4kx+y^2+k^2-2yk \\
& & + & \; 2\,(xy-xk+2ky+2k^2) \\
|PA_5|^2 &= (|x+2k|+|y+k|)^2 &= & \; x^2+4k^2+4kx+y^2+k^2+2yk \\
& & + & \; 2\,(xy+xk+ky+k^2) \\
|PA_6|^2 &= (|x+k|+|y-2k|)^2 &= & \; x^2+k^2+2kx+y^2+4k^2-4yk \\
& & + & \; 2\,(2xk-xy+2k^2-ky) \\
|PA_7|^2 &= (|x-k|+|y+2k|)^2 &= & \; x^2+k^2-2kx+y^2+4k^2+4yk \\
& & + & \; 2\,(xy+2xk-ky-2k^2) \\
|PA_8|^2 &= (|x-2k|+|y+k|)^2 &= & \; x^2+4k^2-4kx+y^2+k^2+2yk \\
& & + & \; 2\,(ky+2k^2-xy-xk)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}|PA_i|^2 &= 8x^2+8y^2-4xy+48k^2+16kx+2yk\\ & 8\left(x+y\right)^2-20xy+48k^2+16kx+2yk\\ & 8l^2-20xy+48\tfrac{R^2}{9}+16\tfrac{R}{3}x+2y\tfrac{R}{3}\end{aligned}$$

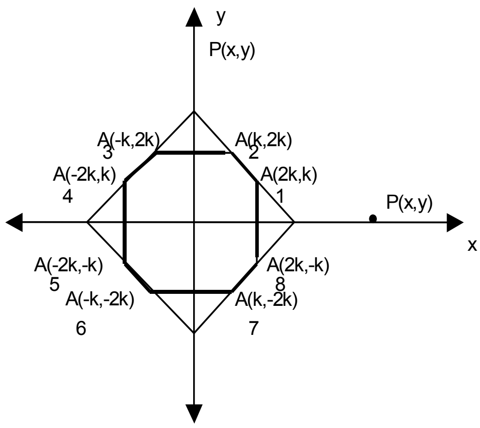
işleminin sonucunda $n(l^2+R^2)$ ifadesine uygun bir eşitlik bulunamadığından $|OP| = |x| + |y| = l$ ve $R = 3k$ ifadelerine ek olarak $||x| - |y|| = \lambda$ alırsak

$$\begin{aligned}|PA_1|^2 &= (|x-2k|+|y-k|)^2 &= (k-\lambda)^2\\ |PA_2|^2 &= (|x-k|+|y-2k|)^2 &= (k+\lambda)^2\\ |PA_3|^2 &= (|x+k|+|y-2k|)^2 &= (3k+\lambda)^2\\ |PA_4|^2 &= (|x+2k|+|y-k|)^2 &= (k+l)^2\\ |PA_5|^2 &= (|x+2k|+|y+k|)^2 &= (3k+l)^2\\ |PA_6|^2 &= (|x+k|+|y-2k|)^2 &= (3k+\lambda)^2\\ |PA_7|^2 &= (|x-k|+|y+2k|)^2 &= (k+l)^2\\ |PA_8|^2 &= (|x-2k|+|y+k|)^2 &= (3k-\lambda)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}|PA_i|^2 &= 40k^2+5\lambda^2+3l^2+16kl\\ &= 40\left(\frac{R}{3}\right)^2+5\lambda^2+3l^2+16\frac{R}{3}l\\ &= 8\left(\frac{3}{8}l^2+\frac{5}{8}\lambda^2+\frac{5R^2}{9}+\frac{2R}{3}l\right)\end{aligned}$$

elde edilir

P noktası x ve y ekseni üzerinde ise;



Şekil 4.11

P, x ekseni üzerinde ise $P = (x, y) = (x, 0)$ dır.

$$
\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|x-2k|+|-k|)^2 = x^2+4k^2-4kx+k^2+2xk-4k^2 \\
|PA_2|^2 &= (|x-k|+|-2k|)^2 = x^2+k^2-2kx+4k^2+4xk-4k^2 \\
|PA_3|^2 &= (|x+k|+|-2k|)^2 = x^2+k^2+2xk+4k^2+4xk+4k^2 \\
|PA_4|^2 &= (|x+2k|+|-k|)^2 = x^2+4k^2+4kx+k^2+2xk+4k^2 \\
|PA_5|^2 &= (|x+2k|+|k|)^2 = x^2+4k^2+4kx+k^2+2xk+4k^2 \\
|PA_6|^2 &= (|x+k|+|2k|)^2 = x^2+k^2+2kx+4k^2+4xk+4k^2 \\
|PA_7|^2 &= (|x-k|+|2k|)^2 = x^2+k^2-2kx+4k^2+4xk-4k^2 \\
|PA_8|^2 &= (|x-2k|+|-k|)^2 = x^2+4k^2-4kx+k^2+2xk-4k^2
\end{aligned}
$$

P noktası x ekseni üzerinde olduğundan $l = |OP| \; = |x|$ olur. Denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} |PA_i|^2 &= 8x^2 + 40k^2 + 24xk \\
&= 8l^2 + 40\left(\frac{R}{3}\right)^2 + 24l\frac{R}{3} \\
&= 8l^2 + \frac{40R^2}{9} + 8lR \\
&= 8\left(l^2 + \frac{5}{9}R^2 + lR\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

P, y ekseni üzerinde ise $P = (x, y) = (0, y)$ dır.

$$\begin{aligned}
|PA_1|^2 &= (|-2k| + |y-k|)^2 = 4k^2 + y^2 + k^2 - 2ky + 4ky - 4k^2 \\
|PA_2|^2 &= (|-k| + |y-2k|)^2 = k^2 + y^2 + 4k^2 - 4ky + 2ky - 4k^2 \\
|PA_3|^2 &= (|k| + |y-2k|)^2 = k^2 + y^2 + 4k^2 - 4yk + 2ky - 4k^2 \\
|PA_4|^2 &= (|2k| + |y-k|)^2 = 4k^2 + y^2 + k^2 - 2ky + 4ky - 4k^2 \\
|PA_5|^2 &= (|2k| + |y+k|)^2 = 4k^2 + k^2 + y^2 + 2ky + 4ky + 4k^2 \\
|PA_6|^2 &= (|k| + |y+2k|)^2 = k^2 + 4k^2 + y^2 + 4ky + 2ky + 4k^2 \\
|PA_7|^2 &= (|-k| + |y+2k|)^2 = k^2 + y^2 + 4k^2 + 4ky + 2ky + 4k^2 \\
|PA_8|^2 &= (|-2k| + |y-k|)^2 = 4k^2 + y^2 + k^2 - 2ky + 4ky - 4k^2
\end{aligned}$$

P noktası y ekseni üzerinde olduğundan $l = |OP| \ = |y|$ olur. Denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} |PA_i|^2 &= 8y^2 + 32k^2 + 20ky \\
&= 8l^2 + 32\left(\frac{R}{3}\right)^2 + 20\frac{R}{3}l \\
&= 8\left(l^2 + \frac{4}{9}R^2 + \frac{5}{6}Rl\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[**1**] Derman, M.Z., Toy F., Ökköseler Ö., Çetiner B., 2005., Analitik Geometri I-II., Zafer Yayınları., Ankara.

[**2**] Ceran., A., 2001, Analitik Geometri Serisi., Alp Yayıncılık, Ankara.

[**3**] Hançerlioğulları, A., Alan F., 2002, Geometri, Tümay Yayınları, Ankara.

[**4**] Hançerlioğulları, A., Alan F., 2001, Matematik Seti 2, Tümay Yayınları, Ankara.

[**5**] Komisyon, 2002, Geometri, Sınav Dergisi Yayınları, Ankara.

[**6**] Komisyon, 2003, ÖSS Geometri, Demirler Yayıncılık, Ankara.

[**7**] Komisyon, 2003, ÖSS Geometri, FEM Yayınları, Ankara.

[**8**] Kaya, R. , 2002, Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi.

[**9**] Kaya, R. , 2002, Çözümlü Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi.

[**10**] Krause, E.F. , 1975, Taxicab Geometry, Addison Wesley.

[**11**]D.O.Shylyarsky, N.N.Chentsov, I.M. Yaglom, 1979, Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematic