ÜRETİLMİŞ FUNKTORLAR

Ayşenur Akgün

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2006

ÜRETİLMİŞ FUNKTORLAR

Ayşenur Akgün

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

July 2006

ÜRETİLMİŞ FUNKTORLAR

Ayşenur Akgün

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya Arvasi

Temmuz 2006

Ayşenur Akgün' in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Üretilmiş Funktorlar" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Zekeriya Arvasi

Üye : Prof. Dr. Mahmut Koçak

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal Ulualan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bu çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar olan “Kategori ve Funktorlar, Direkt Çarpım ve Direkt Toplam, Tamlık, Serbest R-Modüller ve Tensör Çarpım” tanımlandı ve ilgili teoremler verildi.

İkinci bölümde “İnjektif Modüller” ve “Baer Kriteri” verildi.

Üçüncü bölümde ise “R-Modül Kompleksleri” tanımlandı ve Modül kategorileri arasında, ‘Üretilmiş Funktor’ olarak adlandırılan bir funktor dizisi tanımlandı. Bunun için bir M, R-Modülünün bir çözülmesi bir T funktoruna uygulandı. Daha sonra bu injektif çözülmeye karşı gelen kısaltılmış kompleks yardımıyla R_nT sağ üretilmiş funktor tanımlandı.

SUMMARY

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, we give some basic information such as "categories and functors, direct product and direct sum, exactness, free *R*-Modules and tensor product and homological algebras"

In the following chapter, we give the notions of "Injective Modules" and "Baer Criterion".

In the following chapter of this thesis given a functor T between categories of modules, we construct a sequence of a new functor called desined functor T study of grup extensions. To evaluate this functor on a module *M* choose a injective resolution of *M*, aplly the functor T and take homology of the resulating complex by using deleted complex which is associated the injective resolution.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Prof. Dr. Zekeriya Arvasi'ye

teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006 Ayşenur Akgün

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ………………………………………………………………….. **iv**
SUMMARY ……………………………………………………………….. **v**
TEŞEKKÜR ……………………………………………………………….. **vi**

1. TEMEL BİLGİLER ……………………………………………………………... **1**
1.1. Kategori Teori ve Homolojiksel Cebir ……………………………. **1**
1.2. Direkt Çarpım ve Direkt Toplam …………………………………… **10**
1.3. Tamlık …………………………………………………………………… **11**
1.4. Serbest *R*-Modüller ………………………………………………... **14**
1.5. Tensör Çarpım ……………………………………………………… **18**

2. İNJEKTİF MODÜLLER ……………………………………………………... **24**
2.1. İnjektif Modüller ……………………………..………………….. **24**
2.2. Baer Kriteri ……………………………………………………………… **33**

3 ÜRETİLMİŞ FUNKTORLAR …………………………………………….. **38**
3.1. İnjektif Çözülme ………………..………..……………………… **38**
3.2. Üretilmiş Funktorlar ……………………...…………………… **42**

4. KAYNAKLAR DİZİNİ …………………………………………………….. **51**

Bölüm 1

1. Temel Bilgiler

1.1. Kategori Teori ve Homolojiksel Cebir

Bu bölümde kategori kavramı tanımlanarak, direkt çarpım ve direkt toplam, tamlık, serbest R-modüller ve tensör çarpım kavramları açıklanacaktır.

Tanım 1.1.1.

a) Objeler sınıfı; $Ob\,(\mathscr{C})$,

b) Morfizmler kümesi; $\mathscr{C}(A,B)$ veya $Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ veya $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$,

c) Kompozisyon; $Ob\,(\mathscr{C})$ deki A,B,C objeleri için

$$K^{B}_{A,C}: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(A,B)\times\mathscr{C}(B,C) & \to & \mathscr{C}(A,C) \\ (f,g) & \mapsto & gf \end{array}$$

olmak üzere;

i) Asosyatiflik şartı; $f\in\mathscr{C}(A,B)$, $g\in\mathscr{C}(B,C)$, ve $h\in\mathscr{C}(A,C)$ için $h(gf)=(hg)f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & D \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "hg"] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

ii) Birimlik şartı; $f\in\mathscr{C}\,(A,B)$ için $fe_A = f = e_B f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_A"'] & B \arrow[d, "e_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "e_B"'] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

şartlarını sağlayan sisteme bir kategori denir ve $\mathscr{C}=\{Ob(\mathscr{C}), Mor_{\mathscr{C}}\ (A,B)\ , K^{B}_{A,C}\}$ veya kısaca $\mathscr{C}$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.2.

Kümeler Kategorisi; $\mathscr{C}$=***Küme***

Ob ($\mathscr{C}$) = *Ob* (***Küme***) =*Bütün Kümeler Sınıfı*

$Mor_{\mathscr{C}}\ (X,Y) = Fonk_{\textbf{Küme}}(X,Y) = \{f \,|\, f : X \to Y \ fonksiyon\}$;

Kompozisyon; bilinen bileşke işlemi olarak alındığında ***Küme*** bir kategori oluşturur.

Örnek 1.1.3.

Gruplar kategorisi; $\mathscr{C}$ = ***Grp***

Ob($\mathscr{C}$) = *Ob*(***Grp***)=*bütün gruplar sınıfı;*

$Mor_{\mathscr{C}}\ (G_1, G_2) = Hom_{\textbf{Grp}}(G_1, G_2) = \{f \,|\, f : G_1 \to G_2, grup\ homomorfizmi\ \}$,

Kompozisyon; bilinen bileşke işlemi olarak alındığında ***Grp*** bir kategori oluşturur.

Örnek 1.1.4.

Abelyen Gruplar Kategorisi; $\mathscr{C}$ = ***Ab***

Ob($\mathscr{C}$) = *Ob*(***Ab***) = *bütün abelyen gruplar sınıfı*;

$Mor_{\mathscr{C}}\ (G_1, G_2) = Hom_{\textbf{Ab}}\ (G_1, G_2) = \{f \,|\, f : G_1 \to G_2\ , grup\ homomorfizmi\ \}$;

Kompozisyon; bilinen bileşke işlemi olarak alındığında ***Ab*** bir kategori oluşturur.

Örnek 1.1.5.

Topolojik Uzaylar Kategorisi; $\mathscr{C}$ = ***Top***;

Ob($\mathscr{C}$) = *Ob*(***Top***) = b*ütün Topolojik Uzaylar Sınıfı;*

$Mor_{\mathscr{C}}(X,Y) = SFonk_{Top}(X,Y) = \{f \,|\, f : X \to Y\ \ sürekli\ \ fonksiyonlar\}$;

Kompozisyon; bilinen bileşke işlemi olarak alındığında ***Top*** bir kategori oluşturur.

Örnek 1.1.6.

$\mathscr{C}$ = $_{\mathbf{R}}$**Mod**; sol R-modüller kategorisini verelim.

Öncelikle sol R-modül kavramını hatırlayalım:

R birimli bir halka ve M herhangi bir küme olsun.

$$\cdot : \begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (r,m) & \mapsto & r \cdot m \end{array}$$

R halkasının M kümesi üzerine etkisi olmak üzere;

i) $(M, +)$ toplamsal abelyen grup,

ii) $\forall r \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ için, $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$

iii) $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için, $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$

iv) $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için, $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$

v) $1_R \in R$ için $1_R \cdot m = m$

şartları sağlanıyorsa M ye **sol *R*-modül** denir.

Benzer şekilde;

$$\cdot : \begin{array}{ccc} M \times R & \to & M \\ (m,r) & \mapsto & m \cdot r \end{array}$$

ikili işlemi tanımlandığında **sağ *R*-modül** yapısı oluşturulur. Bu tezde modüller üzerinde çalışırken $\cdot$ işlemi yazımını ihmal edeceğiz.

Örnek 1.1.7.

G herhangi bir abelyen grup ise ***G*** bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

$$\mathbb{Z} \times G \to G$$

$$(n,g) \mapsto n.g = \begin{cases} \underbrace{g + \ldots + g}_{n \text{ tane}}, n > 0 \\ e, \quad n = 0 \\ \underbrace{g + \ldots + g}_{|n| \text{ tane}}, n < 0 \end{cases}$$

ve böylece ***G*** nin $\mathbb{Z}$-modülleri ***G*** nin altgruplarıdır.

Tanım 1.1.8.

M_1 ve M_2, R -modül olsun. $f : M_1 \to M_2$ fonksiyonu;

(i) Her $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ için, $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$,

(ii) Her $r \in R$ ve $m \in M_1$ için, $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$, şartlarını sağlıyorsa f' ye M_1 den M_2'ye **modül homomorfizmi** denir.

Bu durumda sol R-modüller kategorisi; $\mathscr{C} = {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$,

$Ob(\mathscr{C}) = Ob({}_R\mathrm{Mod}) = M_1, M_2, \ldots$. Bütün modüller sınıfı;

$Mor_{\mathscr{C}}(M_1, M_2) = Hom_{{}_R Mod}(M_1, M_2) = \{f \mid f : M_1 \to M_2$, modül homomorfizmi$\}$;

Kompozisyon; homomorfizmlerin bileşkesi işlemi olarak alındığında ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ bir kategori oluşturur. Benzer şekilde $\mathbf{Mod_R}$ sağ R-modüller kategori tanımlanır.

Örnek 1.1.9.

$\mathscr{C} = \{Ob(\mathscr{C}), Mor_{\mathscr{C}}(A,B), .\}$ kategorisi verilsin.

$$f * g = g \cdot f$$

işlemi tanımlandığında $\mathscr{C}^{Op} = \{Ob(\mathscr{C}), Mor_{\mathscr{C}}(B,A), *\}$ bir kategori oluşturur ve bu kategoriye $\mathscr{C}$ nin **dual kategorisi** veya **opposite kategori** denir ve kısaca $\mathscr{C}^{op}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.10.

$\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ iki kategori olsun.

i) $Ob(\mathscr{D})$, $Ob(\mathscr{C})$ nin bir alt sınıfı;

ii) $A,B \in Ob(\mathscr{D})$ için $Mor_{\mathscr{D}}(A,B) \subset Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ şartları sağlanıyorsa $\mathscr{D}$ ye $\mathscr{C}$ nin **alt kategorisi** denir.

Tanım 1.1.11.

$\mathscr{C}$ bir kategori olsun. $\mathscr{C}$ deki her $f : A \to B$ morfizmi sol sadeleşme özelliğini sağlıyorsa, yani;

$$f o g_1 = f o g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

veya g_1 o f olacak şekilde $g : B \to A$ morfizmi var ise f ye **monik** denir.

Önerme 1.1.12.

$\mathscr{C}$ =$_R$**Mod** kategorisinde f nin monik olması için gerek ve yeter şart f nin bire-bir olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$ $f : A \to B$ bire-bir fonksiyon ve $\mathscr{C} \overset{g_1}{\underset{g_2}{\longrightarrow}} A \xrightarrow{f} B$ olmak üzere,

$fog_1 = fog_2$ olsun.

Her $x \in \mathscr{C}$ için, $fog_1(x)= fog_2(x)$

$\Rightarrow f(g_1(x)) = f(g_2(x))$

$\Rightarrow g_1 (x) = g_2 (x)$ (f ~1-1)

$\Rightarrow g_1 = g_2$

$\Rightarrow$ Sol sadeleşme kuralı sağlanır.

$\Leftarrow$ Sol sadeleşme kuralı sağlansın. O halde

$\mathscr{C} \overset{g_1}{\underset{g_2}{\longrightarrow}} A \xrightarrow{f} B$ ve $\mathscr{C}=\{\alpha\}$

$g_1(\alpha) = x$ ve $g_2(\alpha) = y$ olacak şekilde $x,y\in A$ vardır.

$f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(g_1(\alpha)) = f(g_2(\alpha))$

$\Rightarrow (fog_1)(\alpha)=(fog_2)(\alpha)$

$\Rightarrow g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$ (Sol sadeleşme kuralı sağlansın)

$\Rightarrow x = g_1(\alpha) = g_2(\alpha) = y$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f$~ bire-birdir.

Tanım 1.1.13.

$\mathscr{C}$ bir kategori olsun. $\mathscr{C}$ deki her $f : A \to B$ morfizmi sağ sadeleşme özelliğini sağlıyorsa, yani;

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$$

veya fog_1=1_B olacak şekilde $g : B \to A$ morfizmi var ise f ye **epik** denir.

$\mathscr{C}$ =$_R$Mod kategorisinde f nin epik olması için gerek ve yeter şart f nin örten olmasıdır.

Teorem 1.1.14.

$\mathscr{C}$ bir kategori olsun. $\mathscr{C}$ deki $f : A \to B$ morfizminin bir izomorfizm olması için gerek ve yeter şart f in hem monik hem de epik olmasıdır.

Tanım 1.1.15.

$\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ iki kategori olsun.

$$F : \begin{array}{ccc} Mor_{\mathscr{C}} & \to & Mor_{\mathscr{D}} \\ f & \mapsto & Ff \end{array}$$

fonksiyonu, A, $\mathscr{C}$ nin bir objesi olmak üzere $FA \in Ob(\mathscr{D})$ ve $f : A \to B$, $\mathscr{C}$ de bir morfizm ise $Ff : FA \to FB$, $\mathscr{D}$ de bir morfizm olmak üzere;

$i)$ $f : A \to B$, $g : B \to C$, $\mathscr{C}$ de morfizmler ise, $F(gf) = (Fg)(Ff)$;

$ii)$Her $A \in Ob(\mathscr{C})$ için $F(1_A) = 1_{FA}$

şartlarını sağlıyorsa F ye $\mathscr{C}$ den $\mathscr{D}$ ye bir **funktor** denir.

Yukarıdaki gibi tanımlanan funktorlara özel olarak **kovaryant funktor da** denir.

Örnek 1.1.16.

F:$\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ olsun. $A \in Ob(\mathscr{C})$ ise $FA = A \in Ob$ ($\mathscr{C}$) ve

$$f : A \to B$$

$\mathscr{C}$ de bir morfizm ise

$$Ff = f : FA = A \to FB = B$$

$\mathscr{C}$ de bir morfizmdir.

$i)$ $f : A \to B$, $g : B \to C$, $\mathscr{C}$ de morfizmler ise, $F(gf) = gf = FgFf$ dir.

$ii)$ Her $A \in Ob(\mathscr{C})$ için $F(1_A) = 1_A = 1_{FA}$ olur.

O halde F: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ funktoruna **birim funktor** denir.

Örnek 1.1.17.

$\mathscr{D}$ bir kategori ve $\mathscr{C}$ de $\mathscr{D}$ nin bir alt kategorisi olsun. $A \in Ob(\mathscr{C})$ ise $IA = A \in Ob(\mathscr{D})$ ve $f : A \to B$, $\mathscr{C}$ de bir morfizm ise

$$If = f : IA \to IB$$

$\mathscr{D}$ de bir morfizm olmak üzere;

$i)$ $f: A \to B$, $g: B \to C$, $\mathscr{C}$ de morfizmler ise, $I(gf) = gf = IgIf$;

$ii)$ Her $A \in Ob$ ($\mathscr{C}$) için $I(1_A) = 1_A = 1_{IA}$ olur.

Bu I: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktoruna **içine funktor** denir.

Tanım 1.1.18.

$\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ iki kategori olsun.

$$F: \begin{array}{ccc} Mor_{\mathscr{C}} & \to & Mor_{\mathscr{D}} \\ f & \mapsto & Ff \end{array}$$

morfizmi, $A \in Ob(\mathscr{C})$ ise $FA \in Ob(\mathscr{D})$ ve $f: A \to B$, $\mathscr{C}$ de bir morfizm ise $Ff: FB \to FA$, $\mathscr{D}$ de bir morfizm olmak üzere;

$i)$ $f: A \to B$, $g: B \to C$, $\mathscr{C}$ de morfizmler ise, $F(fg) = (Fg)(Ff)$;

$ii)$ Her $A \in Ob(\mathscr{C})$ için $F(1_A) = 1_{FA}$;

şartlarını sağlıyorsa F ye **kontravaryant funktor** denir.

Örnek 1.1.19.

F: $\boldsymbol{Ab} \to$ ***Küme,*** Abelyen gruplar kategorisinden kümeler kategorisine bir kontravaryant funktor oluşturalım. Gerçekten; $A \in Ob(\boldsymbol{Ab})$ ve B sabit abelyen grup olmak üzere $f: A_1 \to A_2 \in Hom(\boldsymbol{Ab})$ ve $g: A_1 \to A_2 \in Hom(\boldsymbol{Ab})$ için

$$FA = Hom(A, B) \in Ob(\boldsymbol{Küme})$$

ve

$$\begin{array}{cccc} & FA_2 & \to & FA_1 \\ Ff: & Hom(A_2, B) & \to & Hom(A_1, B) \\ & Q & \mapsto & (Ff)(Q) = Qf \end{array}$$

tanımlayalım.

$$(F(fg))Q = Q(fg) = (Qf)g = (Fg)(Ff)(Q)$$

olup

$$F(fg) = (Fg)(Ff)$$

elde edilir. O halde F bir kontravaryant funktordur.

Tanım 1.1.20.

$\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ iki kategori, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ bir funktor olsun. $FG = 1_{\mathscr{D}}$ ve $GF = 1_{\mathscr{C}}$ olacak şekilde $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ funktoru varsa $\mathscr{C}$ kategorisi $\mathscr{D}$ kategorisine **izomorf**tur denir ve $\mathscr{C}\cong\mathscr{D}$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.21.

R bir halka, R^{op} ise üzerinde toplama işlemi R halkası ile aynı, çarpma işlemi;

$$\begin{array}{ccc} R\times R & \to & R \\ (r,s) & \mapsto & r\cdot s = s\cdot r \end{array}$$

biçiminde olan R^{Op} opposite halkası olsun. $\mathscr{C}={}_R\mathrm{Mod}$ ve $\mathscr{D}'=\mathrm{Mod}_{R^{Op}}$ alalım. Bu durumda

$\mathscr{C}\cong\mathscr{D}'$ dir.

$F: {}_R\mathrm{Mod}\to\mathrm{Mod}_{R^{Op}}$

bir funktordur ve her $M\in Ob({}_R\mathrm{Mod})$ için $FM=M=Ob(\mathrm{Mod}_{R^{Op}})$ olur.

$$\begin{array}{ccc} M\times R^{Op} & \to & M \\ (m,r) & \mapsto & m\cdot r = r\cdot m \end{array}$$

olsun. Bu tanımlama M yi sağ R^{Op}-modül yapar.

$f: M\to N$ sol R-modül homomorfizmi olsun. Bu durumda;

$$Ff: \begin{array}{ccc} FM & \to & FN \\ m & \mapsto & (Ff)m = fm \end{array}$$

bir sağ R^{Op} -modül homomorfizmi olur. Örneğin;

$$\begin{array}{rcl} (Ff)(mr) & = & f(mr) \;\; (\;Ff \text{ tanımından}) \\ & = & f(rm) \;\; (\; M\ sağ\ R^{Op} - \text{modül}) \\ & = & rf(m) \;\; (\; M\ sağ\ R^{Op} - \text{modül}) \\ & = & f(m)r \;\; (\; M\ sağ\ R^{Op} - \text{modül}) \\ & = & ((Ff)m)r \;\; (\;Ff \text{ tanımından}) \end{array}$$

Benzer şekilde;

$$G: Mod_{R^{Op}} \to {}_R Mod$$

tanımlandığında $GF = 1_{{}_R Mod}$ ve $FG = 1_{Mod_{R^{Op}}}$ olup $Mod_{R^{Op}} \cong {}_R Mod$ olur.

Teorem 1.1.22.

$\mathscr{C}$ bir kategori olsun. Her $A,B \in Ob(\mathscr{C})$ için $Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ toplamsal abelyen grup ve $Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ üzerinde dağılma özelliği geçerli ise $\mathscr{C}$ ye **ön-toplamsal kategori** denir.

Örnek 1.1.23.

${}_RMod$ ve Mod_R ön-toplamsal kategorilerdir.

Tanım 1.1.24.

$\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ ön-toplamsal kategoriler ve F: $\mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D}$ bir funktor olsun.

$$Mor_{\mathscr{C}}(\mathscr{C},\mathscr{C}') \rightarrow Mor_{\mathscr{C}}(F\mathscr{C},F\mathscr{C}')$$

dönüşümü $f \mapsto Ff$ ile verilsin. Her f ,g morfizm ikilisi için;

$$F\,(f + g) = Ff + Fg$$

oluyorsa funktoruna **toplamsal funktor** denir.

Tanım 1.1.25. (Doğal Transformasyon)

$F : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ ve $G : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ iki funktor olsun. $A \in Ob(\mathscr{C})$ olmak üzere, $\eta : F(\mathrm{A}) \rightarrow G(\mathrm{A})$ fonksiyonu $\mathscr{B}$ nin bir morfizmi; $\mathscr{A}$ nın her bir $f : A_1 \rightarrow A_2$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(A_2) \arrow[r, "\eta"'] & G(A_2)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise, $(F,\ \eta\ ,G)$ (veya $\eta : F \rightarrow G$) üçlüsüne bir (veya η ye) **doğal transformasyon** (morfizmler arasındaki yol) denir.

Tanım 1.1.26. (Doğal Denklik)

$\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ iki kategori, $F : \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D}$ ve $G : \mathscr{D} \rightarrow \mathscr{C}$ iki funktor, $A \in Ob(\mathscr{C})$ olsun. $t : F \rightarrow G$ nin doğal denklik olması için gerek ve yeter şart her bir $A \in Ob(\mathscr{C})$ için $t_A : FA \rightarrow GA$ morfizminin bir izomorfizm olmasıdır.

1.2. Direkt Çarpım ve Direkt Toplam

Tanım 1.2.1

$\{M_i : i \in I\}$ *R*-modüllerin bir ailesi olsun. *I* indis kümesi ve $x = (x_i)_{i\in I}$, $x_i \in M_i$ olmak üzere;

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \times ...$$

kartezyen çarpımı

i) $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$

ii) $a(x_i) = (ax_i)$, $a \in R$

işlemlerle bir *R*-modülüdür. Bu özellikleri sağlayan *R*-modüle, M_i modüllerinin direkt çarpımı denir ve $\prod_{i\in I} M_i$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ sonlu sayıda *R*-modül olsun.

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$$

kartezyen çarpımı,

i) $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

ii) $a(x_1, x_2, ..., x_n) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$, $a \in R$

işlemlerle bir *R*-modüldür. Bu özellikleri sağlayan *R*-modül, $M_1, M_2, ..., M_n$ nin direkt toplamı denir ve $\oplus M_i \subset \Pi M_i$ olmak üzere,

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$$

veya $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ile gösterilir.

M, *R*-modül, M_1 ve M_2 , *M* nin alt modülleri olmak üzere;

i) $M = M_1 + M_2$ (Her $m \in M$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ için; $m = m_1 + m_2$);

ii) $M_1 \cap M_2 = \{0\}$;

ise *M* ye M_1 ve M_2 nin direkt toplamı denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ ile gösterilir.

Not: *I* indis kümesi sonlu olduğunda direkt çarpım direkt toplama eşittir.

Teorem 1.2.3.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ için $f_i : M_i \to N$, R-modül homomorfizmleri ise

$$f: \begin{array}{ccc} M_1 \oplus \ldots \oplus M_n & \to & N \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \end{array}$$

şeklinde tanımlı f bir R-modül homomorfizmidir.

1.3. Tamlık

Tanım 1.3.1.

R halka, $i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere M_i ler R-modüller olsun.

$$\mathrm{M} : \ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

R-modüllerin bir dizisi ve R-modül homomorfizmleri için,

$$Gör(f_i) = Çek(f_{i+1})$$

ise M dizisi M_i de tam dizidir denir.

M dizisi her bir M_i de tam ise **tam dizidir** denir.

Önerme 1.3.2.

$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ tam dizidir $\Leftrightarrow f$ bire-birdir.

İspat:

$0 \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{f} M$ bir tam dizi ise $Gör(h) = Çek(f)$ dir. $h(0) = 0$ olduğundan $Çek(f) = Gör(h) = h(0) = 0$ olup, f bire-birdir.

Diğer taraftan; f bire-bir ise $Çek(f) = 0$ dır. $0 \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{f} M$ dizisinde $h(0) = Gör(h) = 0$ olur. Dolayısıyla; $Çek(f) = Gör(h)$ olduğundan dizi tam dizidir.

Önerme 1.3.3.

$M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ tam dizidir $\Leftrightarrow g$ örtendir.

İspat:

$M \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{p} 0$ bir tam dizi ise $Gör(g) = Çek(p)$ dir. *Çek* (p) nin tanımından *Çek* (p) = M_2 olduğu görülür. Dolayısıyla $Gör(g) = Çek(p) = M_2$ olup, g örtendir.

Diğer taraftan; g örtense $Gör(g) = M_2$ dir. Aynı zamanda *Çek* (p) nin tanımından *Çek* (p) = M_2 dir. Dolayısıyla; $Gör(g) = Çek(p)$ olup, dizi tam dizidir.

Önerme 1.3.4.

$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ tam dizidir $\Leftrightarrow$ f bire-bir, g örten ve $Gör(f) = Çek(g)$ dir.

İspat:

$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ bir tam dizi ise $Gör(f) = Çek(g)$, *Önerme 1.3.2.* ve *Önerme 1.3.3* den f bire-bir ve g örtendir. Tersine f bire-bir, g örten ve $Gör(f) = Çek(g)$ ise yine *Önerme 1.3.2.* ve *Önerme 1.3.3* den dizi tam dizidir.

Tanım 1.3.5.

$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ dizisi tam ise bu diziye **kısa tam dizi** denir.

Tanım 1.3.6.

A,B,C,R-modüller , F: ${}_R Mod \rightarrow {}_R Mod$ bir funktor olsun.

$A,B,C,R \in Ob\ ({}_R Mod)$ için,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

tam dizi iken;

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC$$

dizisi de tam dizi oluyorsa F funktoru **sol tamdır** denir.

A, B, C, R $\in Ob\ ({}_R Mod)$ için,

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

tam dizi iken;

$$FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \longrightarrow 0$$

tam dizi oluyorsa F funktoru **sağ tamdır** denir.

F sol tam ise $F\alpha : FA \to FB$ moniktir ve $Gör(F\alpha) = Çek(F\beta)$ dir. Bu durumda F **monomorfizm**leri korur. Benzer şekilde F sağ tam ise $F\alpha$ **epik**tir ve **epimorfizm**leri korur.

Tanım 1.3.7.

Bir funktor hem **sağ** hem de **sol tam** ise **tamdır**.

Teorem 1.3.8.

Her M, R-modülü için $Mor(M,-)$ sol tam funktordur.

İspat:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

tam iken $F\alpha : f \mapsto \alpha f$ ve $F\beta : g \mapsto \beta g$ olmak üzere;

$$0 \longrightarrow Mor(M,A) \xrightarrow{F\alpha} Mor(M,B) \xrightarrow{F\beta} Mor(M,C)$$

dizisinin tamlığı gösterilmelidir.

i) $F\alpha$ monik olduğunu göstermek için $ÇekF\alpha = \{ f \,|\, (F\alpha)f = 0 \} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $F(\alpha)f = 0$ ise $f = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $F\alpha$'nın tanımından $\alpha f = 0$ ve her $a \in A$ için $\alpha f(a) = 0$ dır. Bu durumda α monik olduğundan, her $a \in A$ için $f(a) = 0$ dır. Yani
$f = 0$ dır.

ii) $GörF\alpha \subset ÇekF\beta$. $g \in GörF\alpha$ olduğunu kabul edelim. O halde bazı $f \in Mor(M,A)$ için $g = \alpha f$ dir. Buradan;

$$(F\beta)g = \beta g = \beta\alpha f = 0$$

olduğundan $\beta\alpha = 0$ olup $g \in ÇekF\beta$ dır.

iii) $ÇekF\beta \subset GörF\alpha$. $g \in ÇekF\beta$ ise $g \in Mor(M,B)$ ve $\beta g = 0$ dır. Bazı $f : M \to A$ için $g = \alpha f$ olduğu gösterilirse $g \in GörF\alpha$ olur.

$m \in M$ ise $(\beta g)m = 0$ ve $gm \in Çek\beta = Gör\alpha$ dır. α monik olduğundan $a\alpha = gm$ olacak şekilde bir tek $a \in A$ vardır.

$$f : M \to A$$

$$f(m) = \alpha = \alpha^{-1} g(m)$$

tanımlandığında $\alpha f = g$ olduğu açıktır.

1.4. Serbest *R*-Modüller

Tanım 1.4.1.

R bir halka, *M* bir *R*-modül, *S* de *M* nin bir alt kümesi olsun. $S = \{x_1, x_2, ..., x_n : i \neq j, x_i \neq x_j\}$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ için,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = 0$$

olacak şekilde en az bir $a_i \neq 0$ varsa *S* kümesine ***R*-lineer bağımlıdır** denir.

S kümesi *R*-lineer bağımlı değilse yani;

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = 0$$

olması için,

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

olması gerekiyorsa *S* kümesine ***R*-lineer bağımsızdır** denir.

Tanım 1.4.2.

M bir *R*-modül, *S* de *M* nin bir alt kümesi olsun *S*, *M* yi üretiyor ve *S*, *R*-lineer bağımsız ise *S* ye *M* nin bir **tabanı** denir.

Diğer bir deyişle; $S \subseteq M$ nin bir taban olabilmesi için gerek ve yeter şart;

$M = \{0\}$ ise $S \neq 0$ bir taban; veya $M \neq \{0\}$ ve

i) Bazı $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ üreteçler olup, $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ için $\forall x \in M$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

biçiminde yazılabilir.

ii) $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ farklı elemanlar ve $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ için,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = 0$$

ise

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

dır. *i* ve *ii* şartları birleştirilirse, taban tanımı aşağıdaki biçimde de verilebilir.

S, $M \neq \{0\}$ nin bir tabanı olması için gerek ve yeter şart $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ ve $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ için M nin her x elemanının,

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

şeklindeki biricik olarak yazılmasıdır.

Not: M bir R-modül, $Rx_i \cong R$ ve $M = \bigoplus_{i=1}^{n} Rx_i$ ise, $\{x_i : i \in I\}$, M nin bir **tabanı**dır.

Tanım 1.4.3.

Bir tabana sahip olan herhangi bir M R-modülüne **serbest *R*-modül** denir.

Örnek 1.4.4.

F bir cisim olsun, $F^n, e_i = (0,0,...,0,1,0,...,0)$ olmak üzere $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tabanı ile bir serbest F-modüldür. Çünkü her $x \in F^n$ için $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1(1,0,...,0) + x_2(0,1,...,0) + ... + x_n(0,0,...,1) = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$ biriciktir.

Örnek 1.4.5.

G sonlu abelyen grup ise G nin bir $\mathbb{Z}$-modül olduğu *Örnek 1.1.7.* den bilinmektedir. G nin $\mathbb{Z}$-lineer bağımsız olan boş kümeden farklı hiçbir altkümesi olmadığından sonlu abelyen gruplar serbest $\mathbb{Z}$-modül değildir. ($G = \{0\}$ hariç, çünkü bu durumda $\langle \varnothing \rangle = G$ dir.)

Teorem 1.4.6.

i) Evrensellik Özelliği:

A, $S = \{x_i : i \in I\}$ kümesi üzerinde serbest bir R-modül olsun. Herhangi bir B, R-modülü ve $f : S \to B$ fonksiyonu verildiğinde;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}"] & \\ S \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $f : A \to B$ R-modül homomorfizmi vardır.

ii) Serbest Modülün Varlığı:

X bir küme olsun. Bu durumda X i taban kabul eden bir serbest M, R-modülü vardır.

iii) Her modül M bir serbest R-modülün bir bölümüdür.

Tanım 1.4.7.

F_n ler serbest R-modüller ve

$$\ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow 0$$

dizi olsun. M bir R-modül ve $\varepsilon : F_0 \to M$ bir homomorfizm olmak üzere;

$$\ldots F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

dizisi tam dizi ise bu tam diziye M nin bir **serbest çözülmesi** denir.

Teorem 1.4.8.

Her M, R-modülünün bir serbest çözülmesi vardır.

İspat:

Teorem 1.4.6. iii'e göre bir F_0 serbest modülü var olup

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Benzer şekilde F_1 serbest modülü var olup

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Bu şekilde devam edilirse F_n serbest modülü için

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow F_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. d_n dönüşümleri indirgenmiş bileşkeler olmak üzere bütün bu diziler birleştirilerek, aşağıdaki diyagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots & & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Bu diyagram her n için $Çekd_n = S_n$ ve $Görd_n = S_{n-1}$ dir. Bundan dolayı $Görd_{n+1} = Çekd_n$ olup diyagram tamdır.

Not: Bir modülün birden fazla serbest çözülmesi var olabilir.

Teorem 1.4.9.

F bir serbest R-modül ve $\alpha : F \to C$ herhangi bir dönüşüm olsun. Bu durumda β epik olmak üzere;

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\alpha = \beta\gamma$) olacak şekilde $\gamma : F \longrightarrow B$ dönüşümü vardır.

İspat:

$X = \{x_i : i \in I\}$, F in bir tabanı olsun. β epik olduğundan her bir $\alpha(x_i)$ için $\beta(b_i) = \alpha(x_i)$ olacak şekilde bir $b_i \in B$ vardır. Ayırma aksiyomuna göre; $\forall i \in I$ için $\varphi(x_i) = b_i$ olacak şekilde $\varphi : X \longrightarrow B$ bir fonksiyonu vardır. F serbest olduğundan $\forall i \in I$ için $\gamma(x_i) = \varphi(x_i)$ olacak şekilde $\gamma : F \longrightarrow B$ bir dönüşümdür. Buradan;

$$\beta\gamma(x_i) = \beta\varphi(x_i) = \beta(b_i) = \alpha(x_i)$$

olduğundan $\alpha = \beta\gamma$ olduğu görülür. Yani diyagram değişmelidir.

Sonuç 1.4.10.

F serbest R-modül ise $Mor(F,-)$ nin sol tam olduğu *Teorem 1.3.8.* den bilinmektedir. Bu durumda sağ tam olduğunu göstermek için yalnızca epimorfizmleri koruduğunu göstermek yeterlidir. $\beta : B \longrightarrow C$ homomorfizm olmak üzere;

$$B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

tam dizi ise,

$$Mor(F,B) \xrightarrow{\beta} Mor(F,C) \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı gösterilmelidir. Yani eğer $f \in Mor(F,C)$ ise bazı $g \in Mor(F,B)$ için;

$$\beta(g) = \beta g = f$$

olmalıdır. *Teorem 1.4.9.* daki gibi;

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramından $\beta g = f$ olduğu görülür. Bu durumda, $Mor(F,-)$ funktoru hem sol hem de sağ tamdır. Bu durumda $Mor(F,-)$ funktoru tamdır.

1.5. Tensör Çarpım

Tanım 1.5.1.

G bir abelyen grup ve *X*, *G* nin bir alt kümesi olsun.

G nin her *g* elemanı,

$$g = \sum_{x_i \in X} m_i x_i \quad (m_i \in \mathbb{Z})$$

olacak şekilde biricik ifade ediliyor ve hemen hemen $m_i = 0$ ise *G* ye *X* tabanı tarafından üretilen **serbest abelyen grup** denir.

Tanım 1.5.2.

R birimli bir halka, *A* sağ *R*-modül, *B* sol *R*-modül ve *G* **toplamsal abelyen grup** olsun.

$f : A \times B \to G$ bir fonksiyon

$\forall\ a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$ ve $r \in R$ için;

$i) \, f(a_1 + a_2, b_1) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_1),$

$ii) \, f(a_1, b_1 + b_2) = f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2),$

$iii) \, f(a_1 r, b_1) = f(a_1, r b_1)$

şartlarını sağlıyor ise R-iki **lineer fonksiyonu** (veya **bilineer**) denir.

Şimdi kartezyen çarpım yardımıyla yeni bir yapı tanımlayacağız.

Tanım 1.5.3.

A ve B iki abelyen grup olsun.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

nin A ile B nin kartezyen çarpımı olduğu bilinmektedir. $F(A \times B)$, $A \times B$ yi taban kabul eden bir serbest abelyen grup olsun. Yani $F(A \times B)$, $\mathbb{Z}$ nin sıralı ikililerin lineer kombinasyonlarının bir grubu, $A \times B$ de $F(A \times B)$ nin bir alt kümesi ve $F(A \times B)$ nin her bir elemanı;

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i (a_i, b_i), \; n_i \in \mathbb{Z}$$

şeklinde ifade edilebilir. R halka olmak üzere $r \in R$ için;

$$\begin{array}{ccc} R \times F(A \times B) & \to & F(A \times B) \\ \left(r . \sum_{i=1}^{\infty} n_i (a_i, b_i) \right) & & \sum_{i=1}^{\infty} n_i (r a_i, b_i) \end{array}$$

işlemiyle $F(A \times B)$ bir R-modüldür. Çünkü;

$i)$ $(F(A \times B), +)$ toplamsal abelyen grup,

$ii)$ $\forall r \in R$ ve $m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} n_i (a_i, b_i)$, $m_2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (c_i, d_i) \in F(A \times B)$ için,

$$
\begin{aligned}
r\cdot(m_1+m_2) &= r\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty} n_i(a_i,b_i)+\sum_{i=1}^{\infty} m_i(c_i,d_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} r\cdot(n_i(a_i,b_i))+\sum_{i=1}^{\infty} r\cdot(m_i(c_i,d_i))\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} n_i(ra_i,b_i)+\sum_{i=1}^{\infty} m_i(rc_i,d_i)\\
&= r\cdot\sum_{i=1}^{\infty} n_i(a_i,b_i)+r\cdot\sum_{i=1}^{\infty} m_i(c_i,d_i)\\
&= r\cdot m_1+r\cdot m_2
\end{aligned}
$$

iii) $\forall r_1,r_2\in R$ ve $m=\sum_{i=1}^{k} n_i(a_i,b_i)\in F(A\times B)$ için;

$$
\begin{aligned}
(r_1+r_2)\cdot m &= (r_1+r_2)\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i(a_i,b_i)\\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\left((r_1+r_2)a_i,b_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\left(r_1a_i+r_2a_i,b_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i\left(r_1a_i,b_i\right)+\sum_{i=1}^{k} n_i\left(r_2a_i,b_i\right)\\
&= r_1\cdot m+r_2\cdot m
\end{aligned}
$$

iv) $\forall r_1,r_2\in R$ ve $m=\sum_{i=1}^{\infty} n_i(a_i,b_i)\in F(A\times B)$ için;

$$
\begin{aligned}
(r_1r_2)\cdot m &= \sum_{i=1}^{k} n_i\left(r_1(r_2a_i),b_i\right)\\
&= r_1\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i(r_2a_i,b_i)\\
&= r_1\cdot\left(r_2\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i(a_i,b_i)\right)\\
&= r_1\cdot(r_2\cdot m)
\end{aligned}
$$

v) $1_R\in R$ için $m=\sum_{i=1}^{\infty} n_i(a_i,b_i)\in F(A\times B)$ için,

$$\begin{aligned} 1_R \cdot m &= 1_R \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i(a_i, b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i(1_R a_i, b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i(a_i, b_i) \\ &= m \end{aligned}$$

dır.

$S \subseteq F(A \times B)$ olsun. Bu durumda S kümesi,

$H_1 = \{(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) : a_1, a_2 \in A, b \in B\}$

$H_2 = \{(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) : a \in A, b_1, b_2 \in B\}$

$H_3 = \{(ar, b) - (a, rb) : a \in A, b \in B, r \in R\}$ olmak üzere S,

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

kümeleri tarafından üretilen bir **normal alt grup**dur.

$$A \otimes_R B = A \otimes B = F(A \times B)/S = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} n_i(a_i, b_i) + S \mid n_i \in \mathrm{Z}, (a_i, b_i) \in A \times B \right\}$$

ile tanımlayacağımız çarpım bir **bölüm grubudur**. Bu çarpıma da A ile B nin **tensör çarpımı** denir. Tensör çarpımın elemanları;

$$a \otimes b = (a, b) + S$$

biçimindedir. Bu durumda;

$$h : \begin{array}{ccc} A \times B & \to & A \otimes B \\ (a,b) & \mapsto & a \otimes b \end{array}$$

R-iki lineer fonksiyonudur.

Tensör çarpım **evrensellik** özelliğine sahiptir.

Teorem 1.5.4.

G herhangi bir abelyen grup ve $f : A \times B \to G$ bir R-iki lineer fonksiyon olsun. Bu durumda; $h : A \times B \to A \otimes B$ olmak üzere;

$$g : \begin{array}{ccc} A \otimes B & \to & G \\ a \otimes b & \mapsto & f(a,b) \end{array}$$

olacak şekilde bir tek homomorfizm vardır.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes B \arrow[dl, "g"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

İspat:

Yukarıdaki tanım ve teoremlerle kurulan tensör çarpımın

$$A \otimes B = F(A \times B)/S$$

olduğunu ve elemanlarının $a \otimes b = (a,b) + S$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu durumda;

$$h: \begin{array}{ccc} A \times B & \rightarrow & A \otimes B \\ (a,b) & \mapsto & a \otimes b \end{array}$$

nin bir R-iki lineer fonksiyon olduğundan;

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes B \arrow[dl, "g"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. Burada $F(A \times B)$, $A \times B$ üzerinde serbest olduğundan;

$$\pi: \begin{array}{ccc} F(A \times B) & \rightarrow & G \\ (a,b) & \mapsto & \pi(a,b) = f(a,b) \end{array}$$

şeklinde bir tek homomorfizm vardır ve f bir R-iki lineer fonksiyon olduğundan $Çek\pi = S$ dir. Bu durumda h, g homomorfizmini;

$$g: \begin{array}{l} F(A \times B)/S = A \otimes B \rightarrow G \\ \qquad (a,b) + S \mapsto \pi(a,b) = f(a,b) \end{array}$$

biçimine indirger.

Buradan $g : A \otimes B \rightarrow G$ homomorfizminin $g(a \otimes b) = f(a,b)$ biçiminde olduğu görülür. g nin biricik olduğu açıktır.

Sonuç 1.5.5.

A bir sağ R-modül olsun. Bu durumda B, B' sol R-modüller, $f : B \rightarrow B'$ bir R-modül homomorfizmi ve $Ff = 1_A \otimes f$ olmak üzere;

$$B \mapsto F(B) = A \otimes_R B$$

ile tanımlı

$$F\text{: }{}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$$

biçiminde bir toplamsal funktor vardır.

Benzer şekilde *B* bir sol *R*-modül olsun. Bu durumda *A*, sağ *R*-modüller, $g : A \to A'$ bir *R*-modül homomorfizmi ve $Gg = g \otimes 1_B$ olmak üzere;

$$A \mapsto G(A) = A \otimes_R B$$

ile tanımlı

$$G\text{: }\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}} \to \mathbf{Ab}$$

biçiminde bir toplamsal funktor vardır.

İlerleyen bölümlerde genellikle *F* yerine $A \otimes_R -$, *G* yerine de $- \otimes_R B$ yi kullanacağız.

Örnek 1.5.6.

R bir halka, *B* bir sol *R*-modül ise;

$$\begin{array}{ccc} R \otimes B & \cong & B \\ r \otimes b & \mapsto & rb \end{array}$$

ile tanımlı bir *R*-izomorfizm vardır.

Örnek 1.5.7.

R bir değişmeli halka, *A* ve*B*, *R*-modüller olsun. Bu durumda;

$$r : \begin{array}{ccc} A \otimes B & \to & B \otimes A \\ a \otimes b & \mapsto & b \otimes a \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir *R*-izomorfizm vardır.

Bölüm 2

İnjektif Modüller

2.1. İnjektif Modüller

Tanım 2.1.1.

$\mathscr{C}$ bir kategori ve E, $\mathscr{C}$ nin herhangi bir objesi olsun.

$$g : B \longrightarrow A$$

$\mathscr{C}$ de bir monomorfizm ve

$$f : B \longrightarrow E$$

$\mathscr{C}$ de herhangi morfizm olmak üzere

$$hg = f$$

olacak şekilde;

$$h : A \longrightarrow E$$

morfizmi var ise E, $\mathscr{C}$ de **injektif** denir.

Eğer $\mathscr{C} = {}_R\mathrm{Mod}$ alınırsa tanım aşağıdaki şekilde oluşur:

R bir halka, E bir R-modül , A bir R-modül ve B, A nın bir alt modülü,

$$f : B \longrightarrow E$$

herhangi bir modül homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$g : B \longrightarrow A$$

herhangi bir monomorfizm olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & A \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $f = h.g$) olacak şekilde

$$h : A \longrightarrow E$$

dönüşümü var ise, *E*, *R*-modülüne **injektif *R*-modül** denir.

Diyagramlarla ifade edilirse;

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A$$

tam dizi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u] \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

herhangi diyagramından

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı oluşturulmasıdır.

Not:

İşlemler bu kısımdan itibaren *R*-modüller kategorisi üzerinde yapılacaktır. *E*, sol *R*-modül olsun. Aşağıdaki birbirine denk şartları sağlanıyor ise *E* ye **injektif modül** denir.

(1) *E*, diğer bir *M*, *R*-modülünün bir alt modülü ise,

$$E + K = M \text{ ve } E \cap K = \{0\} \text{ } (M, Q \text{ nun direkt toplamı })$$

olacak şekilde *M* nin bir K alt modülü var olması,

(2) *B, A* nın sol alt *R*-modülü ve $g : B \longrightarrow E$ homomorfizm ise

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, dashed, "h"] \\ E & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & b \arrow[dl, mapsto] \\ g(b) = h(b) & \end{tikzcd} \quad (\forall b \in B)$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $h : A \longrightarrow E$ var olması,

(3) A ve *B* sol *R*-modüller ve $f : B \longrightarrow A$ herhangi bir injektif (monomorfizm veya birebir) ise

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[dl] \\ & E & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olması;

(4) $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$

kısa tam dizi ve burada *E, M, K* lar split *R*-modüller,

(A, B, P ; *R*-modüller, $i : B \longrightarrow P$ modül homomorfizmi olmak üzere; $ij = 1_P$ olacak şekilde $j : P \longrightarrow B$ dönüşümü varsa;

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine **split** denir.)

(5) Hom(-, *E*): ${}_R$Mod $\longrightarrow$ Ab Grp

funktorunun tam olması.

Adım adım bu şartları ispat edeceğiz.

Örnekler 2.1.2.

(1) $\{0\}$ sıfır modülü injektiftir.

(2) Her *E* vektör uzayı bir injektiftir.

Çünkü *E*, *V* vektör uzayının bir alt uzayı ise *E* nin bir tabanı bulunabilir ve *V* nin tabanına genişletilebilir. Elde edilen genişletilmiş taban, *V* nin bir *K* alt uzayını üretir. Böylece *V*, *E* ve *K* nın bir direkt toplamı olur. Yani $V = E \oplus K$ (yani $V = E + K$ ve $E \cap K = \{0\}$)

(3) G sonlu grup ve *F* bir cisim olsun. *Çek*(*F*) = 0 olmak üzere *F*(*G*) abelyen grup üzerinde bütün modüller injektiftir.

Teorem 2.1.3.

Hom(-, *E*): ${}_R$Mod $\longrightarrow$ Ab Grp

funktorunun tam olması için gerek ve yeter şart *E* modülünün injektif olmasıdır.

İspat:

E modülü injektif olsun. *Hom*(,*E*) kontravaryant sol tam ise, bu epimorfizmin monomorfizme dönüştüğünün gösterilmesi için yeterlidir. Eğer;

$$\alpha : A \longrightarrow B$$

monikse,

$$\alpha^* : Hom(B,E) \longrightarrow Hom(A,E)$$

epiktir. Böylece, $f \in Hom(A,E)$ iken $\alpha^*(g) = f$ olacak şekilde $g \in Hom(B,E)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha^*(g) = g\alpha$ olduğundan yani

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tam ise

$$0 \longrightarrow Hom(A,E) \longrightarrow Hom(B,E) \longrightarrow Hom(C,E) \longrightarrow 0$$

dizisi tam olup E nin injektif olduğu kolayca gösterilir. Yani E nin injektif tanımı gereğince $g\alpha = f$ olup istenilendir.

Teorem 2.1.4.

$\mathscr{C}$, bir R-modül kategorisi olsun. $(Q_i)_{i\in I}$, $\mathscr{C}$ nin objelerinin bir ailesi olsun. $\mathscr{C}$, direkt çarpım $Q = \prod_{i\in I} Q_i$ yi içersin. Q nun injektif olması için gerek ve yeter şart Q_i nin injektif olmasıdır.

İspat:

$\pi_i \alpha_i = 1_{Q_i}$ olacak şekilde,

$$\pi_i : Q \longrightarrow Q_i$$

birebir fonksiyon, ve

$$\alpha_i : Q_i \longrightarrow Q$$

morfizmi olsun. Eğer, Q injektifse,

$$f : X' \longrightarrow X$$

$\mathscr{C}$ de monomorfizm olsun.

$$g : X' \longrightarrow Q_i$$

de morfizm olsun. Öyleki $\alpha_i \circ g : X' \to Q$ olsun.

$$h \circ f = \alpha_i \circ g \text{ ve } \pi_i \circ h \circ f = \pi_i \circ \alpha_i \circ g$$

olacak şekilde;

$$h : X \longrightarrow Q$$

olsun. Buradan Q_i injektiftir. Her $i \in I$ için Q_i injektiftir.

$$g : X' \longrightarrow Q$$

$\mathscr{C}$ de morfizm olsun. π_i olacak şekilde

$$h : X \longrightarrow Q_i$$

olsun. Direkt çarpımın tanımından, $\pi_i \circ h = h_i$ olacak şekilde

$$h : X \longrightarrow Q$$

biricik morfizm vardır. Sonuç olarak, $h \circ f = g$ olur. Böylece Q injektiftir.

Tanım 2.1.5.

F, A, B bir R-modüller ve

$$\alpha : F \longrightarrow B$$

herhangi bir R-modül homomorfizmi olsun. Bu durumda,

$$\beta : A \longrightarrow B$$

herhangi bir epimorfizm olmak üzere,

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
A \arrow[r, "\beta"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $\alpha = \beta\gamma$) olacak şekilde,

$$\gamma : F \longrightarrow A$$

var ise F R-modülüne **projektif *R*-modül** denir.

Teorem 2.1.6.

E injektif modül , A, D nin alt modülü ve $D = E \oplus A$ ise, D injektiftir.

İspat:

Sırasıyla λ ve p injektif ve projektif olmak üzere,

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, shift left, "\lambda"] & E \arrow[l, shift left, "p"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

$h = p.g$ olacak şekilde tanımlansın.

$$h\alpha = pg\alpha = p\lambda f = f \quad (\because \; p\lambda = 1_D)$$

olup D injektiftir. Yani

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "h"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Teorem 2.1.7.

Her kısa tam dizisi

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

split olması için gerek ve yeter şart, E modülünün injektif olmasıdır. Böylece B, E ve C nin direkt toplamıdır.

İspat:

E injektif olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_E"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.Yani $g \text{ o } i = 1_E$ olacak şekilde $g : B \longrightarrow E$ vardır. Böylece

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow[i]{} B$$

dizisi splittir.

Tersi ve

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "\alpha'"] & P \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı (α, f) nin bir ileri itmesidir. Buradan $\alpha' : E \to P$ moniktir. Hipotezden, $\beta\alpha' = 1_E$ olmak üzere $\beta : P \to E$ vardır. $g = \beta f'$ olmak üzere $g : M \to E$ ye tanımlanır. Bu durumda

$$g\alpha = \beta f'\alpha = \beta\alpha' f = f$$

olup

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. O halde E injektiftir.

Teorem 2.1.8.

Q, $\mathscr{C}$ nin bir alt objesi ise Q, $\mathscr{C}$ nin bir direkt toplamıdır.

İspat:

$$i : Q \to \mathscr{C}$$

birebir fonksiyon olsun. $p \circ i = 1_Q$ olacak şekilde;

$$p : \mathscr{C} \to Q$$

olsun. Diyagramdan;

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[d, "1_Q"'] & \mathscr{C} \arrow[l, shift left, "p"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Q injektifse, $\mathscr{C}$

$$p\colon \mathscr{C} \to Q$$

iken $p \circ i = 1_Q$ olur.

Teorem 2.1.9.

$\mathscr{C}_1$ ve $\mathscr{C}_2$ abelyen kategoriler olsun.

$$G : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$$

funktoru,

$$F\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$$

funktorunun adjoint funktorudur. F funktoru tam ise,

$$G\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$$

injektif objesine giden bir dönüşümdür.

Teorem 2.1.10.

Q, $\mathscr{C}_2$ nin bir injektif objesi olsun. $G(Q)$, $\mathscr{C}_1$ kategorisinde bir injektif objedir.

İspat:

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

dizisi $\mathscr{C}_1$ kategorisinde tam dizi olsun.

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}_1}\left(X'', G(Q)\right) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}_1}\left(X, G(Q)\right) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}_1}\left(X', G(Q)\right) \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Buradan

$$0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$$

tamdır. Buradan Q injektif olur.

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}_1}\left(F(X''), Q\right) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}_1}\left(F(X), Q\right) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}_1}\left(F(X'), Q\right) \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{T}_1}(F(X''),Q) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{T}_1}(F(X),Q) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{T}_1}(F(X'),Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{T}_1}(X'',G(Q)) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{T}_1}(X,G(Q)) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{T}_1}(X',G(Q)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Önerme.2.1.11.

E, injektif R-modül olsun.

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

dizisi bir tam dizi ve $f\alpha = 0$ olmak üzere aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Bu durumda bu diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $g: C \longrightarrow E$ (yani $g\beta = f$ olacak şekilde) homomorfizmi vardır.

İspat:

$X = Çek\beta$ (=$Gör\alpha$) olsun.β,

$$\overline{\beta}:\ B/X \longrightarrow C,\ \overline{\beta}\ (b+X) = \beta(b)\,,\ b \in B$$

monomorfizminin oluşmasına sebep olur. Çünkü $\beta(X) = 0$ dır. $\beta(X) = 0$ olduğundan

$$b + X = b' + X \Rightarrow\ b - b' \in X \text{ ve } \beta(\, b - b') \in \beta(X) = 0$$

olup $\beta(b) = \beta(b')$ yani $\overline{\beta}(\, b+X) = \overline{\beta}\ (b' + X)$ bulunur.

Aynı zamanda $f\alpha = 0$ olmak üzere α nın görüntüsü f nin çekirdeği tarafından kapsanır demektir ve böylece f,

$$\overline{f}: B/X \longrightarrow E\ ,\ \overline{f}\,(\, b+X) = f(b),\ b \in B$$

şeklinde bir fonksiyon üretir. Çünkü $f(X) = f(\alpha(A)) = 0$ dır. Gerçekten de,

$$b + X = b' + X \Rightarrow\ b - b' \in X$$

olup $f(b) - f(b') \in f(X)$ ve $f(X) = 0$ olduğundan $f(b) = f(b')$ olur. Bu ise

$\overline{f}\,(b + X) = \overline{f}\,(b' + X)$ olması demektir. Yani $\overline{f}$ iyi tanımlı bir homomorfizmdir.

$$\pi : B \longrightarrow B / X$$

doğal projeksiyon olsun. Buradan $f = \overline{f}\,\pi$ ve $\beta = \overline{\beta}\,\pi$ olur. Böylece, E injektifken

$\overline{f} = g\,\overline{\beta}$ olacak şekilde

$$g\colon C \longrightarrow E$$

biricik homomorfizmi vardır. Buradan,

$$g\beta = g(\overline{\beta}\;\pi) = (g\overline{\beta}\,)\,\pi = \overline{f}\,\pi = f$$

olur.

2.2. Baer Kriteri:

Bu kriterin ispatı için kısmi sıralı kümeler içerisindeki Zorn Önermesine ihtiyaç vardır. Öncelikle kısmi sıralı küme kavramını açıklayalım:

Tanım 2.2.1.

S boş olmayan bir küme ve "≤" bağıntısı S üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bağıntı olsun.

i) $x \leq x$, her $x \in S$

ii) $x \leq y$ ve $y \leq x \;\Rightarrow\; x = y,\; x, y \in S$.

iii) $x \leq y$ ve $y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z,\; x, y, z \in S$.

(Yani bağıntı, yansıyan, ters simetrik ve geçişli ise) Bu S kümesine **kısmi sıralı küme** denir.

Tanım 2.2.2.

S, bir kısmi sıralı küme olsun ve A, S nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $a \in A$ için $a \leq x$ ve her $a \in A$ için $a \leq y$ olduğunda $x \leq y$ oluyorsa $x \in S$ elemanına S nin **en küçük üst sınırı** denir.

A alt kümesinin en küçük üst sınırı olabilir veya olmayabilir. Eğer en küçük üst sınırı varsa, biriciktir.

$\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesini göstersin. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde "$\leq$" bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

(a) $\dfrac{2a+1}{2^b} \leq \dfrac{2x+1}{2^y}$ ise $(a,b) \leq (x,y)$

(b) $a < x$ veya $a = x$ ve $b < y$ ise $(a,b) \leq (x,y)$

(c) $a \leq x$ ve $b \leq y$ ise $(a,b) \leq (x,y)$ dir.

Verilen bu üç bağıntıda kısmi sıralı bağıntılardır fakat bu bağıntıların hiçbiri için $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ kısmi sıralı kümesinin üst sınırı ve en küçük üst sınırı yoktur.

Tanım 2.2.3.

$x \leq y$ olacak şekilde hiçbir $y \in S$ (x hariç) bulunamıyorsa $x \in S$ ye S nin **maksimal elemanı** denir. Kısmi sıralı kümeler birden çok maksimal elemana sahip olabilirler.

Örnek 2.2.4.

S, gömme fonksiyonuyla kısmi sıralı tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ nin, toplamsal Abelyen grubunun tüm uygun alt gruplarının kümesi olsun. Her asal sayı p için $\mathbb{Z}$ nin altgrubu $p\mathbb{Z}$, S nin bir maksimal elemanıdır.

Tanım 2.2.5.

S bir kısmi sıralı küme olsun. Her $x,y \in S$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ oluyorsa S ye **zincir** veya **basit sıralı küme** veya **lineer sıralı küme** denir.

Önerme 2.2.6. (Zorn Önermesi)

S kısmi sıralı bir küme olsun. S nin içindeki her zincir en küçük üst sınıra sahipse, S nin bir maksimal elemanı vardır. Zorn önermesinin kullanışlı bir uygulaması için aşağıdaki Baer kriteri olarak bilinen teoremi verelim:

Teorem 2.2.7. (Baer Kriteri)

M**,** R-modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart R nin herhangi bir sol ideali I için, her $I \longrightarrow M$ R-homomorfizminin, $R \longrightarrow M$ R-homomorfizmine genişletilebilmesidir.

İspat:

M bir injektif R-modül olsun. I, R nin bir sol ideali ve $f : I \longrightarrow M$ R-homomorfizmi olsun. İnjektif modülün tanımından f, $R \longrightarrow M$ R-homomorfizmine genişletilebilir.

Tersine, R nin herhangi bir I sol ideali için her $I \longrightarrow M$ R-homomorfizmi, $R \longrightarrow M$ R-homomorfizmine genişletilebilir olsun. A, B sol R-modül olsun, ve

$$i : B \longrightarrow A$$

sol R-modülün bir monomorfizmi ve

$$f : B \longrightarrow M$$

bir R-homomorfizm olsun. Notasyona uygunluğu için, B nin A nın bir alt modülü olduğuna ve i nin bir gömme fonksiyonu olarak değerlendireceğiz.

S, (B_j, f_j) sıralı ikililerinin bir kümesi olsun. B_j, A nın bir alt modülü olsun. $B \subset B_j$ ve

$$f_j : B_j \longrightarrow M$$

R-homomorfizmi f nin bir genişlemesi olsun. f_j nin B ye sınırlanmışı f dir.

(B_j,f_j), $(B_k,f_k) \in S$ sıralı ikilileri için B_k, B_j ninbir alt modülü ve f_j, f_k nın bir genişlemesi ise $(B_j,f_j) \leq (B_k,f_k)$ olur. Bu bağıntı S yi kısmi sıralı küme yapar.

$$\{(B_j,f_j) \mid j \in \Lambda\}$$

S de bir zincir olsun. Bu durumda

$$B' = \cup B_j$$

A nın bir alt modülüdür. $b \in B'$ ve bazı $j \in \Lambda$ için $b \in B_j$ olup

$$f'(b) = f_j(b)$$

dir.

$$f' : B' \longrightarrow M$$

olup $b, b' \in B'$ ve $r,s \in R$ olsun. Burada a $k \in \Lambda$ ve b, $b' \in B_k$ dır.Böylece

$$f'(rb + sb') = f_k(rb + sb') = r f_k(b) + s f_k(b') = r f'(b) + s f'(b')$$

f' nün bir R-homomorfizm olduğunu gösterir. Açıkça her $j \in \Lambda$ için f', f_j ye genişler. Bundan dolayı (B', f') zincirin bir üst sınırıdır. Aynı zamanda (B', f') bu zincirin en küçük üst sınırıdır. Zorn önermesinden S nin bir maksimal elemanı vardır ve bu eleman

(C, g) olsun. $C = A$ olduğunu kabul edelim. $C \neq A$ ise $a \in A$ ve $a \notin C$ olacak şekilde bir a elemanı mevcuttur.

$$C \subset C' \subset A$$

olacak şekilde $C' = C + Ra$ bir sol R-modüldür. Buradan

$$I = \{ r \in R \mid ra \in C \}$$

olur. I alt kümesi aynı zamanda R nin bir sol idealidir.

$$h(r) = g(ra),\ r \in I$$

olacak şekilde

$$h : I \longrightarrow M$$

vardır. h bir R-homomorfizmidir ve her $r \in I$ için

$$\alpha(r) = h(r)$$

olacak şekilde,

$$\alpha : R \longrightarrow M$$

bir R-homomorfizmi vardır.

$$g'(c + ra) = g(c) + \alpha(r),\ \ c \in \mathrm{C}\ \text{ ve }\ \mathrm{r} \in R$$

den bir

$$g' : C' \longrightarrow M$$

tanımlanır. g' bir R-homomorfizmi içine gömülür ve g ye genişler. Böylece

$$(C, g) \leq (C', g') \text{ ve } (C, g) \neq (\mathrm{C}', g')$$

dir. Bu da (C, g) nin seçimiyle çelişir. Buradan $C = A$ ve

$$g : A \longrightarrow M$$

bir R-homomorfizmidir ve g, f ye genişler. Böylece ispat tamamlanır, M bir injektif R-modüldür.

Sonuç 2.2.8.

Eğer R nin bir sol I ideali injektif bir R-modül ise, bu durumda I, R nin bir direkt toplamıdır.

Tanım 2.2.9.

A bir R-modül olsun. $r \in R$, R de bir sıfır böleni yoksa her $a \in A$ ve her $r \in R$ için

$a = rb$ olacak şekilde bir $b \in A$ elemanı varsa, A modülüne **bölünebilir *R*-modül** denir.

Eğer R bir tamlık bölgesi ise, bu durumda sıfırdan farklı hiçbir eleman sıfır bölen olmadığından A modülünün bölünebilir olması için şu şart verilebilir:
Her $a \in A$ ve $r \neq 0$ olmak üzere her $r \in R$ için $a = rb$ olacak şekilde $b \in A$ vardır.

Örnek 2.2.10.

Her Abelyen grubun bir bölünebilir $\mathbb{Z}$-modül olduğunu gösterelim. Bölünebilir R-modülün bir alt modülü bölünebilir olmayabilir. Örneğin; Rasyonel sayılar kümesi Q nun toplamsal grubu bir bölünebilir $\mathbb{Z}$-modüldür. Fakat $\mathbb{Z}$ bir bölünebilir $\mathbb{Z}$-modül değildir.

R bir tamlık bölgesi ve Q bir bölüm cismi olsun. $r,s \in R$, $s \neq 0$ ise Q nun hiçbir elemanı r/s formunda değildir. Her $a \in R$, $a \neq 0$ için bu kesirler $ra/sa = r/s$ özelliğine sahiptir. Bundan dolayı her $r/s \in Q$, $a \in R$, $a \neq 0$ için $r/as \in Q$, elemanı vardır ve
$a(r/as) = r/s$ dir. Böylece Q bir bölünebilir R-modüldür.

Bölüm 3

3. Üretilmiş Funktorlar

3.1. İnjektif Çözülme:

Tanım 3.1.1.

A bir R-modül olsun. R-modüllerin ve homomorfizmlerinin

$$E:0\longrightarrow A\xrightarrow{\eta}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\quad\longrightarrow E^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}E^n\xrightarrow{d^n}E^{n+1}\longrightarrow$$

tam dizisini göz önüne alalım. Bu dizideki her bir E^i bir injektif R-modül ise E tam dizisine A R-modülünün **injektif çözülmesi** denir.

Tanım 3.1.2.

$$E:0\longrightarrow A\xrightarrow{\eta}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\ldots\xrightarrow{d^{n-1}}E^n\xrightarrow{d^n}E^{n+1}\longrightarrow\ldots,$$

kompleksi verilsin.

$$0\longrightarrow E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\ldots\xrightarrow{d^{n-1}}E^n\xrightarrow{d^n}E^{n+1}\longrightarrow\ldots$$

kompleksine E nin **kesilmiş kompleksi** denir ve E_A şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3.

$$E:0\longrightarrow A\xrightarrow{\eta}E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}\quad\xrightarrow{d^{n-1}}E^n\xrightarrow{d^n}E^{n+1}\longrightarrow\quad,$$

ve

$$F:0\longrightarrow B\xrightarrow{\eta_1}F^0\xrightarrow{d_1^0}F^1\xrightarrow{d_1^1}\quad\xrightarrow{d_1^{n-1}}F^n\xrightarrow{d_1^n}F^{n+1}\longrightarrow\quad,$$

kompleksleri verilsin. $f:A\longrightarrow B$ bir homomorfizm olsun. R-homomorfizmlerin her $n\geq 0$ için $d_1^n f^n = f^{n+1}d^n$ ve $f^0\eta=\eta_1 f$ şartlarını sağlayan $\{f^{\,n}\}$ ailesi bir **zincir dönüşümü** olarak adlandırılır ve $E_A\longrightarrow F_B$ ile gösterilir.

Her R-modül projektif R-modülün bir homomorfik görüntüsüdür. Her modülün bir projektif çözülmesi olduğunu biliyoruz[1]. Aynı zamanda her R-modül bir injektif R-modülün içine gömülebilir. Aşağıdaki teoremleri bu bilgilere dayanarak ispatlayacağız.

Teorem 3.1.4.

Her R-modülün bir injektif çözülmesi vardır.

Örnek 3.1.5.

(1) R bir Esas İdealler Bölgesi ve Q bölümlerin alanı olsun. Q ve Q/R bölünebilir R-modüller olsun. Bu nedenle de injektif R-modüllerdir. Böylece

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{\pi} Q/R \longrightarrow 0 \quad \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

dizisi i bir gömme fonksiyonu ve π de bir doğal projeksiyon olmak üzere R R-modülünün bir injektif çözülmesidir.

(2) G = $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p. mertebeden bir devirli gruptur. Burada p asal dır. Prufer grubunun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ bir alt grubudur. Prufer grup, bölünebilir bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Bundan dolayı $\mathbb{Z}(p^\infty)$ / $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bölünebilirdir ve $\mathbb{Z}(p^\infty)$ / $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ ye izomorftur.

Alternatif olarak, $p^*: \ (p^\infty) \longrightarrow \ (p^\infty)$ ise $r,k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ iken $p^*(r/p^k) = r/p^{k-1}$ olur. p^*, p nin bir çarpım fonksiyonudur. *Çekp** = $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ise p^* bir üzerine homomorfizmdir. Böylece

$$0 \longrightarrow \ /p \ \longrightarrow \ (p^\infty) \longrightarrow \ (p^\infty) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \qquad (1)$$

tam dizisi oluşur.

$\mathbb{Z}(p^\infty)$ abelyen grubu injektif $\mathbb{Z}$-modül ise bölünebilirdir ve (1), $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modülünün bir injektif çözülmesidir.

---

[1]L.R. Vermani, An Elementary Approach To Homological Algebra, , s.118.

Teorem.3.1.6. (Karşılaştırma Teoremi)

R-modüller ve homomorfizmler üzerinde

$$\begin{tikzcd} X:0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & X^0 \arrow[r, "d^0"] & \ldots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d^n"] & X^{n+1} \arrow[r] & \ldots \\ E:0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\varsigma"'] & E^0 \arrow[r, "\delta^0"'] & \ldots \arrow[r] & E^n \arrow[r, "\delta^n"'] & E^{n+1} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. Burada üst dizi tamdır ve alt kompleksteki her bir E^n bir injektif *R*-modüldür. Bu durumda $f: A \longrightarrow B$ üzerinde $\{f^n\}: X_A \longrightarrow E_B$ şeklinde bir zincir dönüşümü vardır ve üstelik böyle iki zincir dönüşümleri birbirine homotopiktir.

İspat:

E^0 bir injektif modül ve η bir monomorfizm olduğundan, $\varsigma f = f^0\eta$ olacak şekilde bir $f^0: X^0 \longrightarrow E^0$ *R*-homomorfizmi vardır. $n \geq 0$ olsun ve $f^i: X^i \longrightarrow E^i$ homomorfizmi vardır. Her *i,* $0 \leq i \leq n-1$ için $\varsigma f = f^0\eta$ ve $f^{i+1}d^i = \delta^i f^i$ sağlanır.

Aşağıdaki diyagramda

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "\delta^n f^n"'] & X^{n+1} \\ & E^{n+1} & \end{tikzcd}$$

dizi tamdır ve E^{n+1} bir injektif *R*-modüldür. Böylece

$$(\delta^n f^n)d^{n-1} = \delta^n(f^n d^{n-1}) = \delta^n(\delta^{n-1}f^{n-1}) = (\delta^n\delta^{n-1})f^{n-1} = 0$$

olur. Burada $f^{n+1}: X^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ *R*-homomorfizmi vardır ve $f^{n+1}d^n = \delta^n f^n$ olur. Buradan tümevarım tamamlanmış olur ve böylece *f* üzerinde bir $\{f^n\}: X_A \longrightarrow E_B$ zinciri tanımlanmış olur.

$\{g^n\}: X_A \longrightarrow E_B$, *f* üzerinde başka bir zincir olsun. $s^0: X^0 \longrightarrow B$ bir sıfır fonksiyon olsun. Aşağıdaki diyagramda

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] & X^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f^n-g^n"] & X^1 \\ & E^0 & \end{tikzcd}$$

dizi tamdır. E^0 bir injektif R-modüldür ve

$$(f^0 - g^0)\eta = f^0\eta - g^0\eta = \varsigma f - \varsigma f = 0$$

olur. Böylece $s^1 : X^1 \longrightarrow E^0$ R-homomorfizmi vardır ve

$$f^0 - g^0 = s^1 d^0 = s^1 d^0 + \varsigma s^0$$

sağlanır. $n \geq 0$ iken $s^m : X^m \longrightarrow E^{m-1}$ homomorfizmi oluşur ve $0 \leq m \leq n-1$ için

$$f^i - g^i = \delta^{i-1} s^i + s^{i+1} d^i, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

olur. (Burada $E^{-1} = B$ dir.)

Aşağıdaki diyagramı göz önüne alırsak,

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n - g^n - \delta^{n-1}s^n"] & X^{n+1} \\ & E^n & \end{tikzcd}$$

dizi tamdır ve E^n bir injektif R-modüldür ve

$$\begin{aligned} (f^n - g^n - \delta^{n-1}s^n)d^{n-1} &= f^n d^{n-1} - g^n d^{n-1} - \delta^{n-1}(s^n d^{n-1}) \\ &= \delta^{n-1} f^{n-1} - \delta^{n-1} g^{n-1} - \delta^{n-1}(s^n d^{n-1}) \\ &= \delta^{n-1}(f^{n-1} - g^{n-1} - s^n d^{n-1}) \\ &= \delta^{n-1}(\delta^{n-2} s^{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $s^{n+1} : X^{n+1} \longrightarrow E^n$ R-homomorfizmi vardır ve

$$f^n - g^n - \delta^{n-1}s^n = s^{n+1}d^n$$

veya

$$f^n - g^n = \delta^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n$$

dir. Tümevarım böylece tamamlanır ve $\{f^n\}$ ve $\{g^n\}$ arasında $\{s^n\}$ homotopisi olduğu görülür.

Not:

A bir R-modül olsun.

$$E: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

ve

$$Y: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{t} Y^0 \xrightarrow{\delta^0} Y^1 \xrightarrow{\delta^1} \ldots \xrightarrow{\delta^{n-1}} Y^n \xrightarrow{\delta^n} Y^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

A nın iki injektif çözülmesi olsun.

Burada $\{f^n\}: E_A \longrightarrow Y_A$ ve $\{g^n\}: Y_A \longrightarrow E_A$ olmak üzere iki zincir fonksiyonu ve ikisi üzerinde de birim fonksiyon 1_A vardır. Böylece 1_A üzerinde $\{g^n f^n\}: E_A \longrightarrow E_A$ ve $\{f^n g^n\}: Y_A \longrightarrow Y_A$ zincir fonksiyonları vardır. Bununla beraber $\{1_{E^n}\}: E_A \longrightarrow E_A$, 1_A üzerinde bir zincir fonksiyon olup $\{1_{Y^n}\}: Y_A \longrightarrow Y_A$ de bir zincir fonksiyonudur. Zincir fonksiyonları, bir önceki teorem gereğince $\{g^n f^n\}$ ve $\{1_{E^n}\}: E_A \longrightarrow E_A$ homotopiktir. Böylece $\{f^n g^n\}$ ve $\{1_{Y^n}\}: Y_A \longrightarrow Y_A$ zincir fonksiyonları da homotopiktir.

3.2. Üretilmiş Funktorlar

3.2.1.

Daha önce gördük ki her R-modülün bir projektif çözülmesi vardır[2]. Her R-modül için bir projektif çözülme seçebiliriz. S başka bir halka ve $T: {}_R M \longrightarrow {}_S M$ (kovaryant veya Ab) ve $T^{'}: {}_R M \longrightarrow {}_S M$ kontravaryant funktor olsun. A, B, C birer sol R-modül olsun ve

$$P: \ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

$$P^{'}: \ldots \longrightarrow P^{'}_{n+1} \xrightarrow{d^{'}_{n+1}} P^{'}_n \xrightarrow{d^{'}_n} P^{'}_{n-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d^{'}_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon^{'}} B \longrightarrow 0$$

$$P^{"}: \ldots \longrightarrow P^{"}_{n+1} \xrightarrow{d^{"}_{n+1}} P^{"}_n \xrightarrow{d^{"}_n} P^{"}_{n-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d^{"}_1} P^{"}_0 \xrightarrow{\varepsilon^{"}} C \longrightarrow 0$$

sırasıyla A, B ve C nin projektif çözülmeleri olsun. $n \geq 0$ için

$$(L_n T)A = H_n(T\,\mathbf{P}_A) = \text{Çek}Td_n \,/\, \text{Gör}Td_{n+1}$$

---

[2] L.R. Vermani, An Elementary Approach To Homological Algebra, , s.117.

ve

$$(R^nT')A = H^n(T'\mathbf{P}_A) = \c{C}ekT'd_{n+1} / G\ddot{o}rT'd_n$$

tanımlayalım. Burada $T\mathbf{P}_A$ sol kompleks iken $T'\mathbf{P}_A$ sağ komplekstir. $f : A \longrightarrow B$ bir R-homomorfizm ve $\{f_n\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathrm{P}'_{\mathrm{B}}$, f üzerinde bir zincir fonksiyonu olsun.

$\{Tf_n\}$: $T\mathbf{P}_A \longrightarrow T\mathbf{P'}_B$, $Tf : T(A) \longrightarrow T(B)$ üzerinde bir zincir fonksiyon,

$\{T'f_n\}$: $T'\mathbf{P}_B \longrightarrow T'\mathbf{P}_A$, $T'f : T'(B) \longrightarrow T'(A)$ üzerinde bir zincir fonksiyon olsun. Bu zincir fonksiyonları

$$H_n(Tf)(x + G\ddot{o}rTd_{n+1}) = T(f_n)(x) + G\ddot{o}rTd_{n+1}, \quad x \in \c{C}ekTd_n$$

$$H_n(T'f)(y + G\ddot{o}rT'd'_n) = T'(f_n)(y) + G\ddot{o}rT'd'_n, \quad \mathrm{y} \in \c{C}ekTd'_{n+1}$$

tarafından tanımlanarak

$$H_n(Tf) : (L_nT)A \longrightarrow (L_nT)B$$

ve

$$H_n(T'f) : (R^nT')B \longrightarrow (R^nT')A$$

homomorfizmlerinin oluşmasını sağlar.

$\{f'n\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P'}_B$ f üzerinde bir başka zincir fonksiyon ise, $\{f_n\}$ ve $\{f'n\}$ homotopiktir. Eğer $\{\mathrm{T}f_n\}$ ve $\{\mathrm{T}f'n\}$ zincir fonksiyonları homotopikse, $\{Tf'n\}$ ve $\{T'f'n\}$ zincir fonksiyonları da homotopiktir. Böylece her $n \geq 0$ için,

$$H_n(Tf) = H_n(Tf') \text{ ve } H_n(T'f) = H_n(T'f')$$

dir. Burada $H_n(Tf)$ ve $H_n(T'f)$ zincir fonksiyonları, $\{f_n\}$ zincir fonksiyonunun seçiminden bağımsızdır. O halde,

$$H_n(Tf) = (L_nT)f \text{ ve } H^n(T'f) = (R^nT')f$$

yazabiliriz.

Her $n \geq 0$ için, $1_{P_n} : P_n \longrightarrow P_n$ birim fonksiyonunun alınmasıyla $1_A : A \longrightarrow A$ üzerinde $\{1_{P_n}\} : P_A \longrightarrow P_A$ zincir fonksiyonunu elde ederiz. $H_n(Tf)$ ve $H_n(T'f)$ tanımlarından görülür ki $H_n(T1_A)$ ve $H_n(T'1_A)$ birim fonksiyonlardır. Yani her $n \geq 0$ için, $(L_nT)1_A = 1_{(L_nT)A}$ ve $(R^nT')1_A = 1_{(R^nT')A}$ olur.

$g: B \longrightarrow C$ bir R-homomorfizm ve $\{g_n\}$: $\mathbf{P}'_B \longrightarrow \mathbf{P}''_C$, g üzerinde bir zincir fonksiyon olsun. Bu durumda $\{g_n f_n\}: \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}''_C$, $gf: A \longrightarrow B$ üzerinde bir zincir fonksiyon olsun. $x \in ÇekTd_n$ ve $y \in ÇekT'd''_{n+1}$ alalım. Tanımdan,

$$\begin{aligned}
(L_nT)(gf)(x + GörTd_{n+1}) &= T(g_n f_n)(x) + GörTd''_{n+1} \\
&= (T(g_n)T(f_n))(x) + GörTd''_{n+1} \\
&= T(g_n)(T(f_n)(x)) + GörTd''_{n+1} \\
&= (L_nT)g(T(f_n)(x) + GörTd'_{n+1}) \\
&= (L_nT)g((L_nT)f(x + GörTd_{n+1})) \\
&= ((L_nT)g(L_nT)f)(x + GörTd_{n+1})
\end{aligned}$$

dır ve bu

$$(L_nT)(gf) = (L_nT)g(L_nT)f$$

anlamına gelir.

$$\begin{aligned}
(R^nT')(gf)(y + GörT'd''_n) &= T'(g_n f_n)(y) + GörT'd_n \\
&= (T'(f_n)T'(g_n))(y) + GörT'd_n \\
&= T'(f_n)(T'(g_n)(y)) + GörT'd_n \\
&= (R^nT')f(T'(g_n)(y) + GörT'd'_n) \\
&= (R^nT')f((R^nT')(g)(y + GörT'd''_n)) \\
&= ((R^nT')f((R^nT')g)(y + GörT'd''_n)
\end{aligned}$$

dir ve bu da

$$(R^nT')(gf) = (R^nT')f(R^nT')g$$

anlamına gelir.

3.2.2.

Her $n \geq 0$ için, $L_nT: {}_RM \longrightarrow {}_SM$ (veya Ab) bir kovaryant funktor ve $R^nT': {}_RM \longrightarrow {}_SM$ (veya Ab) bir kontravaryant funktordur.

$h: A \longrightarrow B$ başka bir R-homomorfizm olsun ve $\{h_n\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}'_B$, h üzerinde bir zincir fonksiyon olsun. Böylece $\{f_n + h_n\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}'_B$, $f + h$ üzerinde bir zincir fonksiyondur. Her $n \geq 0$ için,

$(L_nT)(f+h): (L_nT)A \longrightarrow (L_nT)B$ ve $(R_nT')(f+h): (R_nT')B \longrightarrow (R^nT')A$

homomorfizmleri vardır. $x \in ÇekTd_n$ ve $y \in ÇekT'd'_{n+1}$ olsun. Böylece,

$$
\begin{aligned}
& L_nT(f+h)(x+GörTd_{n+1}) \\
& = T(f_n+h_n)(x)+GörTd'_{n+1} \\
& = (T(f_n)+T(h_n))(x)+GörTd'_{n+1} \\
& = T(f_n)(x)+T(h_n)(x)+GörTd'_{n+1} \\
& = (T(f_n)(x)+GörTd'_{n+1})+(T(h_n))(x)+GörTd'_{n+1}) \\
& = (L_nT)f(x+GörTd_{n+1})+(L_nT)h(x+GörTd_{n+1}) \\
& = ((L_nT)f+(L_nT)h)(x+GörTd_{n+1})
\end{aligned}
$$

dir Bu da

$$(L_nT)(f+h)=(L_nT)f+(L_nT)h$$

anlamına gelir.

Yine

$$
\begin{aligned}
& (R^nT')(f+h)(y+GörT'd'_n) \\
& = T'(f_n+h_n)(y)+GörT'd_n \\
& = (T'(f_n)+T'(h_n))(y)+GörT'd_n \\
& = T'(f_n)(y)+T'(h_n)(y)+GörT'd_n \\
& = (T'(f_n)(y)+GörT'd'_n)+(T'(h_n))(y)+GörT'd_n) \\
& = (R^nT')(f)(y+GörT'd'_n)+(R^nT')(h)(y+GörT'd'_n) \\
& = ((R^nT')f+(R^nT')h)(y+GörT'd'_n)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$(R^nT')(f+h)=(R^nT')f+(R^nT')h$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem.3.2.3.

Her $n \geq 0$ için, $L_nT : {}_RM \longrightarrow {}_SM$ (veya Ab) bir toplamsal kovaryant funktor ve $R^nT' : {}_RM \longrightarrow {}_SM$ (veya Ab) bir toplamsal kontravaryant funktordur.

Tanım.3.2.4.

L_nT ye T nin n. dereceden **sol üretilmiş funktoru**, R^nT ye $T^{'}$ nün n. dereceden **sağ üretilmiş funktoru** denir.

T nin sağ üretilmiş funktoru ve $T^{'}$ nün sol üretilmiş funktoru olup olmadığını karşılaştıralım: Biliyoruz ki her R-modülün bir injektif çözülmesi vardır. Uygun bir karşılaştırma için kabul edelim ki her R-modül için tam bir injektif çözülme seçilsin.

A, B, C sol R-modüller olsun ve

$$E: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

$$E_1: 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E_1^0 \xrightarrow{d_1^0} E_1^1 \xrightarrow{d_1^1} \ldots \xrightarrow{d_1^{n-1}} E_1^n \xrightarrow{d_1^n} E_1^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

$$E_2: 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\eta_2} E_2^0 \xrightarrow{d_2^0} E_2^1 \xrightarrow{d_2^1} \ldots \xrightarrow{d_2^{n-1}} E_2^n \xrightarrow{d_2^n} E_2^{n+1} \longrightarrow \ldots,$$

sırasıyla A, B, C nin seçilen injektif çözülmeleri olsun. $n \geq 0$ için,

$$(R^nT)A = H^n(T\mathbf{E}_A) = ÇekTd^n/GörTd^{n-1}$$

ve

$$(L_nT')A = H_n(T'\mathbf{E}_A) = ÇekT^{'}d^{n-1}/GörT^{'}d^n$$

tanımlayalım.

$f: A \longrightarrow B$ bir R-homomorfizm ve $\{f^n\}$: $\mathbf{E}_A \longrightarrow \mathbf{E}_{1B}$, f üzerinde bir zincir fonksiyonu olsun. $\{Tf^n\}$:$T(E_A) \longrightarrow T(E_{1B})$, $Tf: T(A) \longrightarrow T(B)$ üzerinde bir zincir fonksiyondur. $\{T'f^n\}$: $T'(E_{1B}) \longrightarrow T'(E_A)$, $T'(f): T'(B) \longrightarrow T'(A)$ üzerinde bir zincir fonksiyondur. Bu zincir fonksiyonlar,

$$H^n(Tf): H^n(T\mathbf{E}_A) \longrightarrow H_n(T\mathbf{E}_B)$$

ve

$$H_n(T'f): H_n(T'\mathbf{E}_{1B}) \longrightarrow H_n(T'\mathbf{E}_A)$$

homomorfizmlerinin oluşmasını sağlar. Bu homomorfizmler f üzerindeki $\mathbf{E}_A \longrightarrow \mathbf{E}_{1B}$ zincir fonksiyonunun seçiminden bağımsızdır ve iyi tanımlıdırlar. $H^n(Tf)$ için $(R^nT)f$, $H_n(T'f)$ için $(L_nT')f$ yazarız.

Teorem.3.2.5.

Her $n \geq 0$ için, $L_nT^{'}$: ${}_RM \longrightarrow {}_SM$ (veya Ab) bir toplamsal kontravaryant funktor iken

$$R^nT : {}_RM \longrightarrow {}_SM \text{ (veya } Ab)$$

bir toplamsal kovaryant funktordur.

3.2.6.

Kabul edelim ki, her R-modülü için bir projektif çözülmenin tam olarak tek bir ikinci seçimini veya her bir R-modülün injektif çözülmesi için tam olarak tek bir ikinci seçimini yapalım. **X,** birinci seçimde M R-modülünün bir projektif çözülme (veya injektif çözülme) ise $\mathbf{X}$, ikinci seçimde M nin bir projektif çözülmesi (veya injektif çözülme) olur. L_nT, R^nT kovaryant toplamsal funktorları göstersin ve projektif (injektif) çözülmelerin yeni seçimi için sırasıyla L_nT ve R^nT ye karşılık gelsin.

L_nT', R^nT' kontravaryant toplamsal funktorları göstersin ve projektif (injektif) çözülmelerin yeni seçimi için sırasıyla L_nT' ve R^nT' ye karşılık gelsin.

Teorem.3.2.7.

Her $n \geq 0$ için,

(a) L_nT' ve L_nT *(c)* R^nT' ve R^nT'

(b) R^nT ve R^nT *(d)* L_nT' ve L_nT'

funktorları birbirlerine denktir.

İspat:

A bir R-modül ve P, $\hat{P}A$ nın seçilen iki projektif çözülmesi olsun. $\{f_n\}$:$\mathbf{P}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A$ ve $\{g_n\}$: $\hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$, 1_A birim fonksiyonu üzerinde zincir fonksiyonları olsun. $\{g_n f_n\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$ ve $\{f_n g_n\}$: $\hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A$, 1_A üzerinde zincir fonksiyonlarıdır. $\{1_{P_n}\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$ ve $\{1_{\hat{P}_n}\}$: $\hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A$, 1_A üzerinde zincir fonksiyonları olduğundan zincir fonksiyonları $\{g_n f_n\}$, $\{1_{P_n}\}$: $\mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$ homotopiktirler. Bundan dolayı da $\{f_n g_n\}$, $\{1_{\hat{P}_n}\}$: $\hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A$ zincir fonksiyonları da homotopiktir. Böylece,

$$(i)\ \{T(g_n f_n)\}=\{T(g_n)T(f_n)\},$$

$$\{T(1_{Pn})\}=\{1_{T(Pn)}\}: T(\mathbf{P}_A) \longrightarrow T(\mathbf{P}_A);$$

$$(ii)\ \{T(f_n g_n)\}=\{T(f_n)T(g_n)\},$$

$$\{T(1_{\hat{P}_n})\}=\{1_{T(\hat{P}_n)}\}: T(\hat{\mathbf{P}}_A) \longrightarrow T(\hat{\mathbf{P}}_A);$$

$$(iii)\ \{T'(g_n f_n)\}=\{T'(g_n)T'(f_n)\},$$

$$\{T'(1_{Pn})\}=\{1_{T'(Pn)}\}: T'(\mathbf{P}_A) \longrightarrow T'(\mathbf{P}_A);$$

$$(iv)\ \{T'(f_n g_n)\}=\{T'(f_n)T'(g_n)\},$$

$$\{T'(1_{\hat{P}_n})\}=\{1_{T'(\hat{P}_n)}\}: T'(\hat{\mathbf{P}}_A) \longrightarrow T'(\hat{\mathbf{P}}_A);$$

zincir fonksiyonları homotopiktir. Herhangi **X** kompleksi için, her $n \geq 0$ olmak üzere, $H_n(\mathbf{X}) \longrightarrow H_n(\mathbf{X})$ den, birim fonksiyonu $\{1_{Xn}\}: \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ oluşur. Öyle ki,

$$H_n(T(gf)): H_n(T\,\mathbf{P}_A) \longrightarrow H_n(T\,\mathbf{P}_A);$$

$$H_n(T(fg)): H_n(T\hat{\mathbf{P}}_A) \longrightarrow H_n(T\hat{\mathbf{P}}_A);$$

$$H^n(T'(gf)): H^n(T'\mathbf{P}_A) \longrightarrow H^n(T'\mathbf{P}_A);$$

$$H^n(T'(fg)): H^n(T'\hat{\mathbf{P}}_A) \longrightarrow H^n(T'\hat{\mathbf{P}}_A);$$

fonksiyonlarının hepsi birim fonksiyondur. Böylece

$$(L_nT)A \xrightarrow{H_n(Tf)} (\hat{L}_nT)A \xrightarrow{H_n(Tg)} (L_nT)A$$

$$(\hat{L}_nT)A \xrightarrow{H_n(Tg)} (L_nT)A \xrightarrow{H_n(Tf)} (\hat{L}_nT)A$$

$$(R^nT')A \xrightarrow{H^n(T'g)} (\hat{R}^nT')A \xrightarrow{H^n(T'f)} (R^nT')A$$

$$(\hat{R}^nT')A \xrightarrow{H^n(T'f)} (R^nT')A \xrightarrow{H^n(T'g)} (\hat{R}^nT')A$$

düzenlemelerinin hepsi modüllerin gösteriminin birim fonksiyonlarıdır. Bundan dolayı $H_n(Tf) : (L_nT)A \longrightarrow (\hat{L}_nT)A$, $H_n(Tg)$ ile bir izomorfizmdir ki $H_n(Tg)$ tersidir. Aynı şekilde $H^n(T'f) : (R^nT')A \longrightarrow (\hat{R}^nT')A$, $H^n(T'f)$ ile bir izomorfizmdir ki $H^n(T'f)$ tersidir.

İzomorfizmlerin funktoriyel olduğunu ispat edelim. B bir başka R-modül, $h : A \longrightarrow B$ bir R-homomorfizm ve $\mathbf{P}', \hat{\mathbf{P}}'$ B nin seçilen iki projektif çözülmesi olsun. $\{h_n\}: \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}'_B$ ve $\{\hat{h}_n\}: \hat{\mathbf{P}}'_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}'_B$ h üzerinde iki zincir fonksiyonu olsun. $\{k_n\} : \mathbf{P}'_B \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}'_B$, 1_B üzerinde bir zincir fonksiyonu ise, $\{\hat{h}_n f_n\} : \mathbf{P}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}'_B$,

$h1_A = h$ üzerinde bir zincir fonksiyonu, $\{ k_n\ h_n\} : \mathbf{P}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}'_B$, $h1_B = h$ üzerinde bir zincir fonksiyonu olur. $\{\hat{h}_n\ f_n\}$ ve $\{ k_n\ h_n\}$ zincir fonksiyonları h üzerinde olup homotopiktirler. $T(h)$ üzerindeki $\{T(\hat{h}_n f_n)\} = \{T(\hat{h}_n)\ T(f_n)\}$ ve $\{\mathrm{T}(k_n\ h_n)\} = \{T(k_n)\ T(h_n)\}$ zincir fonksiyonları homotopiktir, böylece $\{T'(\hat{h}_n f_n)\} = \{T'(\hat{h}_n) T'(f_n)\}$ ve $\{T'(k_n\ h_n)\} = \{T'(k_n) T'(h_n)\}$ zincir fonksiyonları da homotopiktir. Homomorfizmler, $\{T(\hat{h}_n) T(f_n)\}$ ve $\{T(k_n) T(h_n)\}$ nin homoloji modül üzerinde birimli olmasına neden olur. Böylece homomorfizmler $\{T'(\hat{h}_n)\ T'(f_n)\}$ ve $\{T'(k_n)\ T'(h_n)\}$ zincir fonksiyonlarıyla homoloji modül üzerinde olmalarına neden olur. Bu ispatlar her $n \geq 0$ için sağlanır.

$$\begin{tikzcd}
(L_nT)A \arrow[r, "H_n(Tf)"] \arrow[d, "(L_nT)h"'] & (\hat{L}_nT)A \arrow[d, "(\hat{L}_nT)h"] \\
(L_nT)B \arrow[r, "H_n(Tk)"'] & (\hat{L}_nT)B
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
(\hat{R}^nT')B \arrow[r, "\hat{R}^n(T'h)"] \arrow[d, "H^n(T'k)"'] & (\hat{R}^nT')A \arrow[d, "H^n(T'f)"] \\
(R^nT')B \arrow[r, "R^n(T'h)"'] & (R^nT')A
\end{tikzcd}$$

diyagramlar değişmelidir. L_nT ve L_nT funktorları denktir ve buna bağlı olarak R^nT' ve R^nT' kontravaryant funktorları da denktir. Böylece teoremin (a) ve (b) şıkları ispat edilmiş oldu. (c) ve (d) şıkları da bu ispata benzer şekilde yapılır.

Böylece doğal denklik, funktorların sol üretilmiş funktorları ve sağ üretilmiş funktorları, kovaryant veya kontravaryant oluşu, modüllerin projektif veya injektif çözülmelerinden bağımsız seçimini ispatlamış olduk. Artık L_nT ye T nin n. dereceden **sol üretilmiş funktoru**, R^nT ye T nin n. dereceden **sağ üretilmiş funktoru** diyebiliriz.

3.2.8.

M bir sol R-modül ve N de bir sağ R-modül olsun. Daha önce görmüştük ki $Hom_R(M,-):\ {}_R M \longrightarrow Ab$ ve $N \otimes_R -:\ {}_R M \longrightarrow Ab$ kovaryant funktorlar, $-\otimes_R M:\ {}_R M \longrightarrow Ab$ ve $Hom_R(-,M):\ {}_R M \longrightarrow Ab$ kontravaryant funktorlardır.

4. KAYNAKLAR DİZİNİ

BALVANT S., RAGHAVAN S. & SRIDHARAN R., Homological Methods in Commutative Algebra, Oxford University Press, 1975.

CARTAN, H. & EILENBERG, S., Homological Algebra, Oxfprd University Press, Princeton 1956.

DAUNS, J., Modules and Rings, Cambridge University Press, 1994.

FAITH, C., Rings, Modules and Categories, Springer Verlag, New York 1976.

GERFARD, S. & MANIN, Y., Methods of Homological Algebra, Springer Verlag, New York 1996.

HILTON, P., Lectures in Homological Algebra, Providence : AMS 1971.

HU-SZE-TSEN, Introduction to Homological Algebra, San Francisco, Holden-Das 1968.

OSBORNE, M. S., Basic Homological Algebra, University of Washington, 1998.

ROTMAN, J. J., An Introduction to Homological Algebra, Illinois University Press, Illinois 1979.

STANISLAW, BALCERZYK W. & TADEUSZ, J., Commutative Rings, Ellis Horwood Limited, 1989.

VERMANİ, L.R., An Elementary Approach to Homological Algebra, CRC Press LLC 2003.