SONLU HİPERBOLİK DÜZLEMLER ÜZERİNE

Mustafa SALTAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006

ON FINITE HYPERBOLIC PLANES

Mustafa SALTAN

Department of Mathematics

Thesis for Master Degree

2006

SONLU HİPERBOLİK DÜZLEMLER ÜZERİNE

Mustafa SALTAN

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman:
Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Temmuz-2006

Mustafa SALTAN' ın Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "**SONLU HİPERBOLİK DÜZLEMLER ÜZERİNE"** başlıklı bu çalışma lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

19/07/2006

Üye: Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye: Doç. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye: Y. Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, hiperbolik düzlemlerin homojenliği incelenmiştir. Birinci bölümde bazı temel kavram, tanım ve teoremler verilmiştir [2].

İkinci bölümde Graves modeli ele alınmış ve bu modelin homojen olmadığı gösterilmiştir [3].

Üçüncü bölümde, Poincare modeline değinilmiş ve bu modelin homejenliği incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Sandler [5] ve Ostrom [6] modelleri verilerek bu modellerin homojenlikleri gösterilmiştir. Ayrıca Sandler modelinin genişletilmişine de değinilmiştir [8].

Beşinci bölümde, n. mertebeden sonlu bir π projektif düzleminden herhangi üçü noktadaş olmayan $n + 2$ doğrunun atılmasıyla elde eldilen π_{n+2} düzleminin regüler bir hiperbolik düzlem olduğu ispat edilmiştir [9].

Altıncı bölümde, Seiden modelinin de bir kısmi B-L düzlemi olduğu ve bu düzlemin homojen olduğu gösterilmiştir [7]. π_{n+2} ve Seiden modelinin izomorfluğundan π_{n+2} hiperbolik düzleminin de homojen olduğu sonucuna varılmıştır.

Son bölümde ise $PG(3, n)$ dan elde edilen bir hiperbolik 3-uzayın aynı parametreli herhangi iki hiperbolik düzleminin izomorf olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif düzlem, homojen hiperbolik düzlem, hiperbolik uzay, kısmi geometri.

SUMMARY

In this thesis, it is examined homogeneities of some hyperbolic planes. To the purpose:

In the first chapter, some basic definitions, conceptions, and theorems are given [2].

In the second chapter, the model of Graves is considered and non-homogeneous of this model is shown [3].

In the third chapter, the model of Poincare [2] is mentioned and homogeneity of this model is investigated.

In the fourth chapter, homogeneities of this models Sandler [5] and Ostrom [6] are examined. Moreover, it is also considered about generalization of the model of Sandler [8].

In the fifth chapter, it is shown that the plane π_{n+2}, obtained from a finite projective plane of order n by removing $n+2$ lines no three are concurent, is a regular hyperbolic plane [9].

In the sixth chapter, it is shown that the model of Seiden [7] is also homogeneous. It is obtained that the hyperbolic plane π_{n+2} is also homogeneous since it is isomorphic to the model of Seiden.

In the last chapter, it is proven that any two hyperbolic planes with same parameters are isomorphic in a hyperbolic 3-space obtained from $PG(3,n)$.

Keywords: Projective plane, homogeneous hyperbolic plane, hyperbolic space, partial geometry.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca her türlü desteği benden esirgemeyen, tecrübe ve bilgisiyle bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın;

Prof. Dr. Şükrü OLGUN' a,

fikirlerinden yararlandığım değerli hocam Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın;

Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI' ya

en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Türkiye' de bilim insanının her zaman yanında olan

TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na

yüksek lisans çalışmalarımda bana verdiği maddi ve manevi katkılardan ötürü özel olarak teşekkür ederim.

Eskişehir, 2006 Mustafa SALTAN

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\times$	Kartezyen çarpım
P	Noktalar Cümlesi
L	Doğrular Cümlesi
$\circ$	Üzerinde bulunma bağıntısı
$\not\circ$	Üzerinde bulunmama
$(P,\ L,\ \circ)$	Geometrik yapı
$\in,\ \notin,\ \ni$	Eleman, eleman değil, öyle ki
A	Afin düzlem
$A1,\ A2,\ A3$	Afin düzlem aksiyomları
π	Projektif düzlem
$P1,\ P2,\ P3$	Projektif düzlem aksiyomları
$H,\ B-L$	Hiperbolik düzlem, Bolyai-Lobachevski düzlemi
$H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5$	Hiperbolik düzlem aksiyomları
$\cup,\ \cap$	Birleşim, kesişim
$\vee,\ \wedge$	Noktalar için birleşme, doğrular için kesişme
$\subset,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$	Altküme, gerektirme, çift gerektirme
$\emptyset$	Boşküme
Q	Oval
$(X,\ m)$	Flag
$\cong$	İzomorf
$<,\ >,\ \leq,\ \geq$	Küçük, büyük, küçük eşit, büyük eşit

Simgeler	**Açıklama**
$\parallel$	Paralel
$\lvert A \rvert$	A cümlesindeki eleman sayısı (kardinalite)
$\equiv, \ \not\equiv$	Denk, denk değil
$PG(3,n)$	n. mertebeden $3-$ boyutlu projektif uzay
(M,e)	M merkezli e eksenli merkezsel kolinasyon
$G(M)$	M merkezli tüm kolinasyonların kümesi
$G(e)$	e eksenli tüm kolinasyonlarını kümesi
$G_{ö}(e)$	e eksenli tüm ötelemelerin kümesi
$G_{ö}(M)$	M merkezli tüm ötelemelerin kümesi
$G(M,e)$	M merkezli e eksenli tüm kolinasyonların kümesi

İçindekiler

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Lineer Uzay

Tanım 1.1.1 *P ve L elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan herhangi iki küme ve $\circ \subset P \times L$ üzerinde bulunma bağıntısı olsun. Eğer $P \cap L = \emptyset$ ise $(P, L, \circ)$ sıralı üçlüsüne bir **geometrik yapı** denir. $|P \cup L|$ sonlu ise $(P, L, \circ)$ sıralı üçlüsüne **sonlu geometrik yapı** adı verilir.*

Tanım 1.1.2 *Aşagıdaki iki aksiyomu sağlayan bir $(P, L, \circ)$ geometrik yapısına bir **lineer uzay** denir.*

$L1)$ Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

$L2)$ Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

$S = (P, L, \circ)$ *bir lineer uzay olsun.* $P' \subset P$, $L' \subset L$ *ve* $\circ' = \circ \cap (P' \times L')$ *olmak üzere* $S' = (P', L', \circ')$ *bir lineer uzay ise* S' *ye* S *nin bir **altuzayı** adı verilir. Eğer* S' *altuzayının herhangi bir doğrusu üzerindeki* S *nin tüm noktaları* P' *ye ait ise* S' *ye* S *nin bir **tam altuzayı** denir. Yani;*

$$X \circ l \in L' \Rightarrow X \in P'$$

*ise S' ye S nin bir **tam altuzayı** denir. S nin herhangi iki alt uzayının kesişimi $L1$ i sağlar fakat $L2$ yi sağlamak zorunda değildir. Ancak iki tam altuzayın arakesiti yine bir tam altuzaydır. $\delta = \{X, Y, ...\}$ elemanları doğrular veya noktalar olan S nin herhangi bir altkümesi olsun. S nin δ yı kapsayan tüm tam altuzayların arakesitine δ* **nin ürettiği tam altuzay** *denir ve $< \delta >$ ile gösterilir. Sonlu bir A nokta kümesi için,*

$$\exists X \in A \text{ için } X \in < A - \{X\} >$$

*ise A **bağımlıdır** denir. Sonlu hiç bir alt kümesi bağımlı olmayan nokta kümesine **bağımsızdır** denir. S', S nin bir tam altuzayı olmak üzere, S' yü üreten bir bağımsız alt kümeye S' nün bir **bazı (tabanı)** denir. S nin sonlu üreteçli her tam altuzayı bir tabana sahiptir* (Bumcrot [1]).

Tanım 1.1.3 *S bir lineer uzay olsun. S nin sonlu olarak üretilebilen her S' tam altuzayının herhangi iki bazında eşit sayıda eleman var ise S ye **geometriktir** denir. Herhangi bazdaki bu eleman sayısına S' nün **rankı** denir ve $r(S')$ ile gösterilir. S' nün boyutu boy $S' = r(S') - 1$ olarak tanımlanır. Boyutu -1, 0, 1 olan tam altuzaylar sırasıyla boş küme, bir tek noktalı kümeler ve doğrulardır. Bir S geometrik lineer uzayının t boyutlu bir tam alt uzayına $t-$**uzay** denir. Eğer S nin boyutu t ise $t-1$ boyutlu altuzaylarına **hiperdüzlemler** denir.*

$S = (P, L, \circ)$ bir lineer uzay , $||$ kardinalite, $|P| = v$ ve $|L| = b$ olsun. S nin herhangi bir X noktası ve l doğrusu için,

$$\begin{aligned} r(X) &= |\{l \in L : X \circ l\}| \\ k(l) &= |\{X \in P : X \circ l\}| \end{aligned}$$

dir. v sonluysa S de sonludur. S için ayrıca,

$$\begin{aligned} k_m &= \min\{k(l) : l \in L\} \\ k_M &= \max\{k(l) : l \in L\} \\ r_m &= \min\{r(X) : X \in P\} \\ r_M &= \max\{r(X) : X \in P\} \end{aligned}$$

ifadelerini tanımlayalım.

Tanım 1.1.4 *$S = (P, L, \circ)$ bir lineer uzay olsun. Eğer $k_m = k_M = k$ ise S ye* ***doğrusal regüler****, $r_m = r_M = r$ ise S ye* ***noktasal regülerdir*** *denir. Hem noktasal hem de doğrusal regüler olan bir lineer uzaya* ***regülerdir*** *denir ve "S, $(k, r)-$regülerdir" şeklinde ifade olunur.*

Teorem 1.1.5 *Doğrusal regüler olan bir lineer uzay noktasal da regülerdir.*

İspat: S doğrusal regüler olduğundan $k_m = k_M = k$ dır. X ve Y farklı iki nokta olsunlar. O zaman toplam nokta sayısı;

$$v = r(X)(k-1)+1 = r(Y)(k-1)+1$$

olarak yazılabilir. Buradan da,

$$r(X) = r(Y) = r$$

elde edilir (Bumcrot [1]).

Bu teoremin tersi doğru değildir. Buna örnek Bölüm 4.2 deki Sandler Modeli verilebilir.

1.2 Afin Düzlem

Tanım 1.2.1 *Aşağıdaki aksiyomları sağlayan* $A = (P, L, \circ)$ *lineer uzayına bir* ***afin düzlem*** *adı verilir.*

$A1)$ *Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilir.*

$A2)$ *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Teorem 1.2.2 *Her sonlu* A *afin düzlemi için aşağıdaki şartlara uyan bir* $n \geq 2$ *tamsayısı vardır ve bu tamsayıya* A *nın* ***mertebesi*** *adı verilir.*

a) A *nin her doğrusu üzerinde tam olarak* n *tane nokta vardır.*

b) A *nin her noktası tam olarak* $n + 1$ *tane doğru üzerindedir.*

c) A *deki noktaların toplam sayısı* n^2 *dir.*

d) A *deki doğruların toplam sayısı* $n^2 + n$ *dir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

1.3 Projektif Düzlem

Tanım 1.3.1 *Aşağıdaki aksiyomları sağlayan* $\pi = (P, L, \circ)$ *lineer uzayına bir* ***projektif düzlem*** *adı verilir.*

$P1)$ *Her* l_1, $l_2 \in L$ *için* $X \circ l_1$ *ve* $X \circ l_2$ *olacak şekilde en az bir* $X \in P$ *noktası vardır.*

$P2)$ *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

$P1$, projektif düzlemi belirleyen en önemli aksiyom olup, bu aksiyomu aşağıdaki teorem ile genelleştirebiliriz.

Teorem 1.3.2 *Bir* π *projektif düzleminde herhangi farklı iki doğru bir tek noktada kesişir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Teorem 1.3.3 *Her sonlu π projektif düzlemi için aşağıdaki şartlara uyan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır ve bu tamsayıya π nın* ***mertebesi*** *adı verilir.*

a) *π nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ nokta vardır.*

b) *π nin her noktası tam olarak $n+1$ doğru üzerindedir.*

c) *π deki noktaların toplam sayısı n^2+n+1 dir.*

d) *π deki doğruların toplam sayısı n^2+n+1 dir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

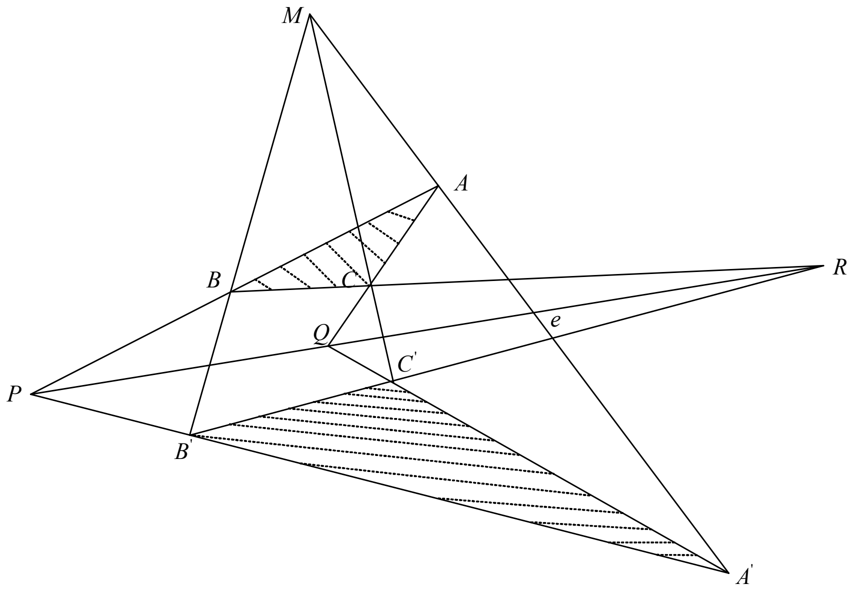
Tanım 1.3.4 *A, B, C ve A', B', C' bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A, B, C doğrudaş değil ise $\{A, B, C\}$ kümesine bir* ***üçgen*** *denir. $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ iki üçgen olsun. A ve A', B ve B', C ve C' ye üçgenlerin* ***karşılıklı köşeleri*** *diyelim. Eğer M, A, A'; M, B, B'; M, C, C' nokta üçlüleri doğrudaş olacak şekilde bir M noktası var ise bu üçgenler M* ***den perspektiftir*** *denir. Ayrıca M noktasına* ***perspektiflik merkezi****; AB ve $A'B'$, AC ve $A'C'$, BC ve $B'C'$ doğru ikililerine bu üçgenlerin* ***karşılıklı kenarları*** *denir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının ;*

$$\begin{aligned} P &= AB \cap A'B' \\ Q &= AC \cap A'C' \\ R &= BC \cap B'C' \end{aligned}$$

arakesit noktaları doğrudaş ise bunların üzerinde bulunduğu doğruya ***perspektiflik ekseni*** *denir. Perspektiflik ekseni e olan iki üçgene e* ***ekseninden perspektiftir*** *denir.*

Teorem 1.3.5 (P4 Dezarg Teoremi) *İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaş ise, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır. Dezarg teoremini kısaca, "bir noktadan perspektif olan iki üçgen bir doğrudan da perspektif olur" şeklinde ifade edebiliriz.*

Bir projektif düzlem Dezarg teoreminin şartlarını sağlıyor ise ***Dezargsel-dir*** *denir.*



Şekil 1.3.1

Tanım 1.3.6 $(P, L, \circ)$ *ve* $(P^{'}, L^{'}, \circ^{'})$ *herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer;*

$$f : P \cup L \to P^{'} \cup L^{'}$$

fonksiyonu;

i) $f(P) \subseteq P^{'}$,

ii) $f(L) \subseteq L^{'}$,

iii) *Her* $X \in P,\ l \in L$ *ve* $X \circ l \Rightarrow f(X) \circ^{'} f(l)$ *şartlarını sağlıyor ise* f *ye* $(P, L, \circ)$ *dan* $(P^{'}, L^{'}, \circ^{'})$ *ye bir* ***homomorfizm*** *denir. Birebir ve örten özelliği bulunan bir homomorfizme* ***izomorfizm*** *denir. Aralarında bir izomorfizm tanımlanabilen iki geometrik yapıya da* ***izomorf yapılar*** *denir ve*

$$(P, L, \circ) \cong (P^{'}, L^{'}, \circ^{'})$$

ile gösterilir.

Teorem 1.3.7 $\pi = (P, L, \circ)$ *ve* $\pi' = (P', L', \circ')$ *iki projektif düzlem ve*

$$f : \pi \to \pi'$$

ye bir izomorfizm olsun.

i) *Her* $X, Y \in P$, $X \neq Y$ *için* $f(X \vee Y) = f(X) \vee f(Y)$,

ii) *Her* $l, m \in L$, $l \neq m$ *için* $f(l \wedge m) = f(l) \wedge f(m)$,

iii) *Her* $X \in P$, $l \in L$ *için* $X \not\circ l \Rightarrow f(X) \not\circ' f(l)$ *dir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Tanım 1.3.8 *Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren bir izomorfizme* ***kolinasyon*** *veya* ***otomorfizm*** *denir.*

Tanım 1.3.9 $\pi = (P, L, \circ)$ *bir projektif düzlem* l *ve* l_1 , L *nin farklı iki doğrusu ve* M *de* $M \not\circ l$ *ve* $M \not\circ l_1$ *olacak şekilde* P *nin herhangi bir noktası olsun. Bu takdirde her* $X \circ l$ *için* $f(X) = MX \wedge l_1$ *olarak tanımlanan*

$$f : l \to l_1$$

dönüşümüne l *ve* l_1 *arasında* M *merkezli bir* ***perspektiflik*** *denir. Sonlu sayıda perspektifliğin bileşkesi ise bir* ***izdüşellik*** *olarak tanımlanır.*

Tanım 1.3.10 $\pi = (P, L, \circ)$ *bir projektif düzlem* M *ve* e *de* π *nin belli bir nokta ve doğrusu olsun. Eğer* π *nin bir* f *kolinasyonu her* $l \circ M$ *için* $f(l) = l$ *ise* M *ye* f *nin* ***merkezi*** *denir. Her* $X \circ e$ *için* $f(X) = X$ *ise* e *ye* f *nin bir* ***ekseni*** *denir.* M *merkezli* e *eksenli bir* f *fonksiyonuna* $(M, e)-$***merkezsel kolinasyonu*** *adı verilir.*

Teorem 1.3.11 f, π *projektif düzleminin bir kolinasyonu olsun.* f *nin bir merkezinin var olması için gerek ve yeter koşul bir ekseninin var olmasıdır.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Teorem 1.3.12 *Bir projektif düzlemin birim kolinasyonundan başka her kolinasyonunun en çok bir merkezi ve en çok bir ekseni vardır.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Tanım 1.3.13 *f, bir $(M, e)-$merkezsel kolinasyonu olsun. $M \not\circ e$ ise f ye bir* ***homoloji****, $M \circ e$ ise f ye bir* ***öteleme*** *denir.*

Tanım 1.3.14 *π projektif düzleminin birimden farklı fakat karesi birime eşit olan bir kolinasyonuna* ***involusyon*** *denir.*

Tanım 1.3.15 *M ve e seçimli nokta ve doğrular $X, Y \neq M$, $X, Y \not\circ e$ ve X, Y, M doğrudaş olacak şekilde herhangi noktalar iken $f(X) = Y$ olacak şekilde en az bir f, $(M, e)-$merkezsel kolinasyonu var ise π projektif düzlemine $(M, e)-$**geçişkendir** denir.*

Teorem 1.3.16 *π projektif düzlem, M ve e, π de seçimli nokta ve doğru olsunlar. Bu taktirde π, $(M, e)-$geçişkenir $\Leftrightarrow$ π, $(M, e)-$Dezargseldir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Teorem 1.3.17 *π bir projektif düzlem, $G(\pi)$; π nin tüm kolinasyonlarının oluşturduğu grup olsun. M ve e sırasıyla π nin seçimli bir noktası ve doğrusu olmak üzere;*

i) *M merkezli tüm kolinasyonların kümesi olan $G(M)$, $G(\pi)$ nin bir alt grubudur.*

ii) *e eksenli tüm kolinasyonların kümesi olan $G(e)$, $G(\pi)$ nin bir alt grubudur.*

iii) *e eksenli tüm ötelemelerin kümesi olan $G_{ö}(e)$, $G(\pi)$ nin bir alt grubudur.*

iv) *M merkezli tüm ötelemelerin kümesi olan $G_{ö}(M)$, $G(\pi)$ nin bir alt grubudur.*

v) *M merkezli e eksenli tüm kolinasyonların kümesi olan $G(M,e)$, $G(\pi)$ nin bir alt grubudur.*

vi) *m, E sırasıyla seçimli bir doğru ve nokta olmak üzere;*

$$G(m,e) \;=\; \bigcup_{X \circ m} G(X,e) \quad \text{ve} \quad G(M,E) \;=\; \bigcup_{E \circ x} G(M,x)$$

kümeleri $G(\pi)$ nin alt gruplarıdır.

vii) *Merkezsel kolinasyonların sonlu birleşimlerinden oluşan küme olan $G_m(\pi)$, $G(\pi)$ nin bir alt grubudur.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Teorem 1.3.18 *π Dezargsel bir projektif düzlem olsun. Bu taktirde π nin merkezsel kolinasyonlarının sonlu birleşimleri grubu olan $G_M(\pi)$, π nin herhangi üçü doğrudaş olmayan nokta dörtlüleri üzerinde geçişkendir. Üstelik verilen herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktayı yine verilen herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktaya eşleyen kolinasyon en çok beş merkezsel kolinasyonun bileşkesi olarak ifade edilebilir.*

İspat: A, B, C, D ve A', B', C', D' herhangi üçü doğrudaş olmayan seçimli iki nokta dörtlüsü olsun. Düzlem Dezargsel olduğundan dolayı her M, e ikilisi için π, (M,e)-geçişkendir (Bkz. Teorem 1.3.16). $A \not\circ e$, $A' \not\circ e$ olsun. Düzlem Dezargsel olduğundan dolayı $f(A) = A'$ olacak şekilde bir $f \in G_{ö}(e)$ kolinasyonu vardır.

$$f \;:\; A,B,C,D \;\longmapsto\; A', f(B), f(C), f(D)$$

Yine düzlemin Dezargselliğinden A' den geçen $f(B)$ ve B' den geçmeyen bir d doğrusu için $g(f(B)) = B'$ olacak şekilde bir $g \in G_{ö}(d)$ vardır.

$$g \ : \ A', f(B), f(C), f(D) \ \longmapsto \ A', B', g(f(C)), g(f(D))$$

$c = A'B'$ olsun. A, B, C ve A', B', C' üçlüleri doğrudaş olmadıklarından ve f, g birer kolinasyon olduğundan $g(f(C)) \not\circ c$ ve $C' \not\circ e$ dir. Düzlem Dezargsel olduğundan $h(g(f(C))) = C'$ olacak şekilde bir $h \in G_{ö}(c)$ vardır.

$$h \ : \ A', B', g(f(C)), g(f(D)) \ \longmapsto \ A', B', C', h(g(f(D)))$$

$h(g(f(D))) = D'$ ve $E = A'D' \cap B'D''$ olsun. D'' yü E ye, E yi D' eşleyen merkezsel kolinasyon bulunmalıdır. f, g, h nin herbiri bir kolinasyon olduğundan, A, B, C, D ve A', B', C', D' nün hipotezdeki özelliğinden ne D'ne de D'', $\{A', B', C'\}$ üçgeninin herhangi bir kenarı üzerinde bulunamaz. π Dezargsel olduğundan $(B', A'C')$ geçişkendir. O halde $\varphi(D'') = E$ olacak şekilde bir $\varphi \in G_h(B', A'C')$ vardır.

$$\varphi \ : \ A', B', C', D'' \ \longmapsto \ A', B', C', E$$

Düzlem Dezargsel olduğundan dolayı $\psi(E) = D'$ olacak şekilde en az bir $\psi \in G_h(B', A'C')$ merkezsel kolinasyonu vardır.

$$\psi \ : \ A', B', C', E \ \longmapsto \ A', B', C', D'$$

Böylece;

$$\psi \circ \varphi \circ h \circ g \circ f \ : \ A, B, C, D \ \longmapsto \ A', B', C', D'$$

elde edilir.

Tanım 1.3.19 *2-boyutlu her alt uzayı projektif düzlem olan bir lineer uzaya bir **projektif uzay** denir.*

Tanım 1.3.20 *Nokta, doğru ve düzlem denilen tanımsız geometrik nesnelerden oluşan boş olmayan üç ayrık küme, bu kümelerin elemanları arasında tanımlı üzerinde bulunma bağıntılarıyla birlikte aşağıdaki aksiyomları da gerçekliyorlarsa bunların hepsine birden bir* ***projektif 3-uzay*** *denir.*

$U1$) *Farklı iki noktadan geçen bir tek doğru vardır.*

$U2$) *Her doğru üzerinde en az üç nokta vardır.*

$U3$) *Doğrudaş olmayan üç nokta bir tek düzlem üzerindedir.*

$U4$) *Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve hepsi aynı düzlemde bulunmayan dört nokta vardır.*

$U5$) *Bir doğru ve bir düzlemin en az bir ortak noktası vardır.*

$U6$) *İki düzlemin en az bir ortak doğrusu vardır.*

Teorem 1.3.21 *Bir projektif* 3*-uzayda aşağıdakiler geçerlidir.*

i) *Farklı iki düzlem bir tek doğru boyunca kesişir.*

ii) *Bir düzlemde bulunan farklı iki noktayı birleştiren doğrunun her noktası bu düzlemde bulunur.*

iii) *Bir doğru ve bu doğru dışında bulunan bir nokta bir tek düzlem belirtir.*

iv) *Bir düzlem ve bu düzlemde bulunmayan bir doğru bir tek noktada kesişirler.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Teorem 1.3.22 *Bir projektif* 3*-uzayın her düzlemi projektif düzlemdir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

Teorem 1.3.23 *Bir projektif* 3*-uzayın her düzlemi Dezargseldir.*

İspat: Bakınız Kaya [2].

1.4 Hiperbolik Düzlem

Tanım 1.4.1 *Aşagıdaki aksiyomları sağlayan bir* $H = (P, L, \circ)$ *geometrik yapısına bir **hiperbolik düzlem** denir.*

$H1)$ *Herhangi iki noktadan geçen bir tek doğru vardır.*

$H2)$ *Her doğru üzerinde aynı sayıda nokta bulunur.*

$H3)$ *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

$H4)$ **(Ayırıcı Aksiyom)**. *Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan, birden fazla sayıda doğru vardır.*

$H5)$ **(Sınırlayıcı Aksiyom)**. $P' \subset P$, $L' \subset L$ *ve* $\circ' \subset \circ$ *olmak üzere;*

i) $X_1, X_2 \in P', X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1X_2 \in L'$

ii) $X \circ' l \in L' \Rightarrow X \in P'$

Tanım 1.4.2 *Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir* $H = (P, L, \circ)$ *geometrik yapısına Graves anlamında bir **hiperbolik düzlem** veya **Bolyai-Lobachevsky (B-L) düzlemi** denir.*

$H1)$ *Herhangi iki noktadan geçen bir tek doğru vardır.*

$H2)$ *Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.*

$H3)$ *Herhangi bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel doğru çizilebilir.*

$H4)$ *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

$H5)$ $S \subset P$ olmak üzere S, P *nin doğrudaş olmayan üç noktası ile kapsadığı herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları kapsarsa, bu taktirde* $S = P$ *dir.*

Teorem 1.4.3 *Bir hiperbolik düzlemin kolinasyonları kümesi fonksiyon bileşke işlemi altında bir grup yapısına sahiptir.*

Tanım 1.4.4 *G bir H hiperbolik düzleminin kolinasyonlar grubu olsun. Bu taktirde $H = (P, L, \circ)$ olmak üzere,*

$$\forall X,\ Y \in P \text{ için } \exists\ \varphi \in G\ \ni\ \varphi(X) = Y$$

*ise, G kolinasyon grubuna H hiperbolik düzleminin noktaları üzerinde **geçişkendir** denir. Bu durumda H hiperbolik düzlemine de Graves anlamında **homogendir** denir.*

Tanım 1.4.5 *Bir **hiperbolik uzay** aşağıdaki H aksiyomunu sağlayan geometrik lineer uzaydır.*

H) X bir nokta, l de X den geçmeyen bir doğru ise bu taktirde $\langle\{X,\ l\}\rangle$ düzlemi X den geçen ve l yi kesmeyen en az iki doğru kapsar.

Buna göre 2 boyutlu her alt uzayı hiperbolik düzlem olan bir lineer uzayın hiperbolik uzay *olacağı aşikardır.*

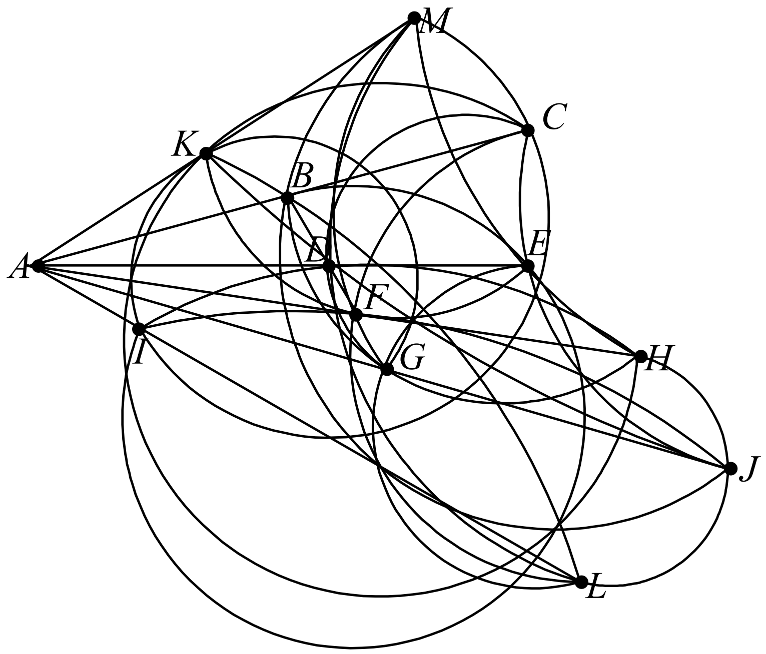
Bölüm 2

HOMOJEN OLMAYAN SONLU BİR HİPERBOLİK DÜZLEM MODELİ

2.1 Graves Modeli

$$
\begin{aligned}
N &= \{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M\} \\
D &= \{ABC,\ ADE,\ AFH,\ AGJ,\ AIL,\ AKM,\ BDF,\ BEI,\ BGH, \\
&\quad\ BJM,\ BKL,\ CDG,\ CEJ,\ CFL,\ CHK,\ CIM,\ DHI,\ DJK, \\
&\quad\ DLM,\ EFK,\ EGL,\ EHM,\ FGM,\ FIJ,\ GIK,\ HJL\}
\end{aligned}
$$

ve üzerinde bulunma bağıntısı, "*eğer bir nokta bir doğrunun üzerinde bulunuyor ise o nokta doğruyu oluşturan elemanlardan biridir*" şeklinde tanımlansın. 13 noktalı 26 doğrulu $G = (N, D, \circ)$ geometrik yapısının bir hiperbolik düzlem modeli olduğunu göstereceğiz.



Şekil 2.1.1

$H1$) Doğrular kümesinin tanımından farklı iki noktadan bir tek doğru geçtiği kolaylıkla görülür.

$H2$) Her doğru üzerinde üç nokta olduğundan bir doğru üzerinde en az iki nokta bulunma şartı sağlanır.

$H3$) Bir doğruya dışındaki bir noktadan üç tane paralel çizilebileceği için en az iki paralel doğru çizilebileceği hususu garanti edilmiş olur. Yani ABC doğrusuna dışındaki bir D noktasından bu doğruyu kesmeyen DHI, DJK, DLM doğruları çizilebilir. Doğrular kümesindeki her doğru için dışındaki bir noktadan bu doğruyu kesmeyen tam olarak üç doğrunun varlığı görülür.

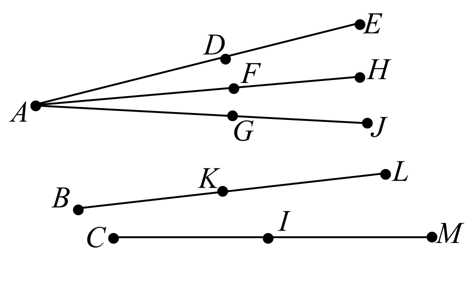
$H4$) ABC ve ADE doğrularını ele alırsak B, C, D, E noktalarının herhangi üçü aynı doğru üzerinde bulunmayan noktalar oldukları görülür.

$H5$) N nin bir altkümesi olan S doğrudaş olmayan üç nokta ve farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktaları kapsasın. Aynı doğru üzerinde olmayan A, B, D noktalarını alalım. $A, B \circ ABC$ olup A ve B

nokta çiftinden geçen doğrunun tüm noktalarını kapsayacağından $C \in S$ olur. Benzer şekilde $A, D \circ ADE$ olup A ve D nokta çiftinden geçen doğrunun tüm noktalarını kapsayacağından $E \in S$ olur. Böyle devam edersek N kümesinin tüm noktalarını elde ederiz. O halde $N = S$ olup $H5$ aksiyomu sağlanır (Graves [3]).

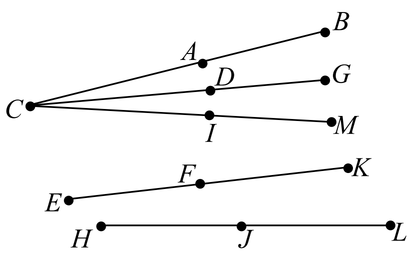
2.1.1 Graves Modelinin Homojen Olmadığının İspatı

A noktasından geçen ve kesişmeyen BKL ve CIM doğru çiftini kesmeyen yalnızca bir ADE, AFH, AGJ doğru üçlüsü vardır.

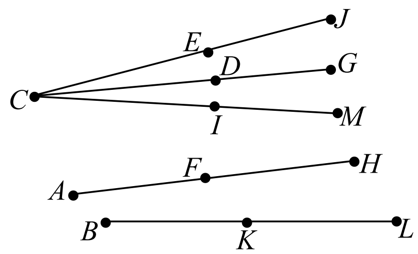


Şekil 2.1.2

Aynı şey B, F ve H noktaları için de geçerlidir. Diğer taraftan C noktasından geçen ve kesişmeyen EFK, HJL doğru çiftlerini kesmeyen ABC, CDG, CIM doğru üçlüleri var iken aynı zamanda yine C noktasından geçen ve kesişmeyen AFH, BKL doğru çiftlerini kesmeyen CDG, CEJ, CIM doğru üçlüleri mevcuttur.



Şekil 2.1.3



Şekil 2.1.4

Benzer bir durum D ve G noktaları için de geçerlidir. Buna karşılık E, I, J, K, L veya M noktalarından geçen kesişmeyen doğru çiftleri ile ortak noktası olmayan hiçbir doğru üçlüsü yoktur (Graves [3]).

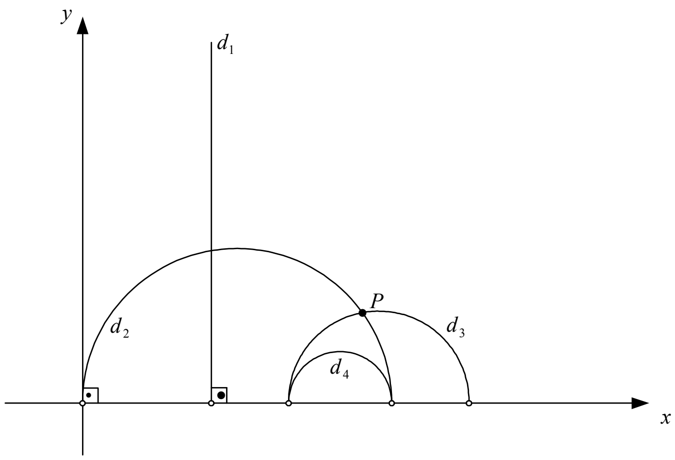
O halde A noktasını C noktasına taşıyan hiç bir kolinasyon mevcut olamayacağından Graves' in 13 nokta ve 26 doğrulu bu modeli homogen değildir.

Bölüm 3

SONLU OLMAYAN HOMOJEN BİR HİPERBOLİK DÜZLEM MODELİ

3.1 Poincare Modeli

Öklid düzleminde x−ekseninin üst tarafında kalan yarı düzlemi düşünelim. Bu yarı düzlemdeki noktalar bu modelin noktaları olarak alınsın. Merkezi bu eksen üzerinde bulunan yarı çemberler ve bu eksene dik yarı doğrular modelimizin doğruları olarak tanımlansın. x−eksenini yarı düzleme dahil etmeyip "*x− ekseni üzerinde kesişen iki doğru ve öklid yarı doğruları ile tanımlanan doğrular paraleldir*" ifadesi ile paralellik kavramı tanımlansın. Böylece x−ekseni üzerinde birbirine teğet olan yarı çemberler ya da bir noktadan geçip yarı çembere x−ekseninde teğet olan yarı doğrular da yarı çembere paralel olacaktır. Bu modelde verilen anlamda bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan birden çok doğru vardır.



Şekil 3.1.1

$N = \{(x,y) : x, y \in R \text{ ve } y > 0\}$

$D = \{[a] : a \in R\} \cup \{[|\varepsilon, r|] : (x-\varepsilon)^2 + y^2 = r^2;\ x, y \in R,\ y > 0\}$

$$\circ : \begin{cases} (x,y) \ \circ \ [a] & \Leftrightarrow \ x = a \\ (x,y) \ \circ \ [|\varepsilon, r|] & \Leftrightarrow \ (x-\varepsilon)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\| : \begin{cases} [a] \parallel [b] & \\ [a] \parallel [|\varepsilon, r|] & \Rightarrow \ [a] \wedge [|\varepsilon, r|]; \ \begin{array}{l} x-\text{ekseni üzerinde bir nokta} \\ \text{veya boş küme} \end{array} \\ [|\varepsilon, r|] \parallel [|\varepsilon', r'|] & \Rightarrow \ [|\varepsilon, r|] \wedge [|\varepsilon', r'|]; \ \begin{array}{l} x-\text{ekseni üzerinde bir nokta} \\ \text{veya boş küme} \end{array} \end{cases}$$

Poincare yarı düzlem modelinin bir hiperbolik düzlem olduğunu göstereceğiz.

$H1)$ $N_1 = (x_1, y_1)$, $N_2 = (x_2, y_2)$ ve N_1, $N_2 \in N$ olsun.

i) $x_1 = x_2$ olsun.

$$\begin{array}{lllll} (x_1, y_1) \ \circ \ [a] & \Leftrightarrow & x_1 & = & a \\ (x_2, y_2) \ \circ \ [a] & \Leftrightarrow & x_2 & = & a \end{array}$$

olup buradan;

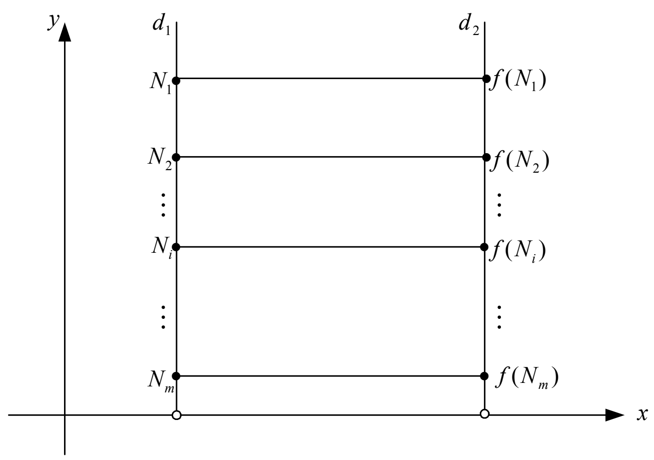
$$[a] \ = \ [x_1] \ = \ [x_2]$$

elde edilir. x_1, $x_2 \in R$ olacağından bu durumda farklı iki noktadan geçen bir tek doğru vardır.

ii) $x_1 \neq x_2$ olsun. N_1 noktasından N_2 noktasına bir doğru çizilir. N_1N_2 nin orta noktasından dik olarak çizilen doğrunun x-eksenini kestiği nokta merkezdir. Böylece farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

$H2$) Her doğru üzerinde aynı sayıda nokta olduğunu göstermeliyiz. Bunu üç durumda inceleyeceğiz.

i) $x-$eksenine dik olan doğrular gözönüne alınsın. $d_1, d_2 \in D$ olsun. d_1 ve d_2 nin eş güçlü olduklarını göstereceğiz. d_1 doğrusu üzerindeki noktalardan ikisi N_1 ve N_2 olarak adlandırılsın. $N_1 f(N_1)$ doğrusu $x-$eksenine paralel olacak şekilde d_2 doğrusu üzerinde $f(N_1)$ noktası seçilsin. Öklid düzleminde bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebileceğinden N_2 noktasından $N_1 f(N_1)$ doğrusuna çizilen bu paralel doğrunun d_2 yi kestiği nokta $f(N_2)$ olarak alınsın.



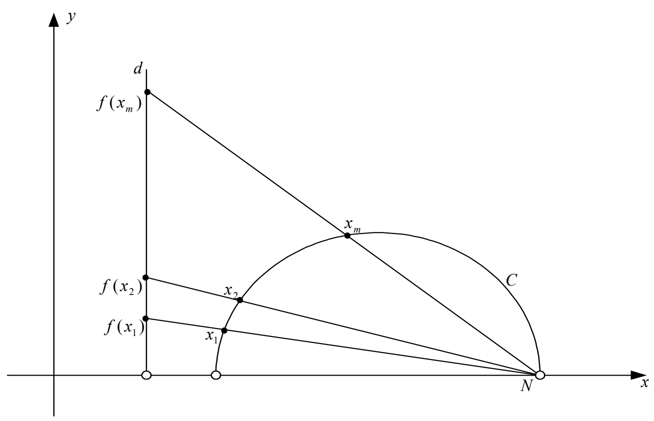
Şekil 3.1.2

Bu şekilde devam edilirse d_2 doğrusu üzerindeki nokta sayısının d_1 deki nokta sayısına eşit olduğu gösterilmiş olunur.

ii) Doğrularımızın birini d; $x-$eksenine dik olan bir doğru, diğerini C; merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir yarı çember olarak alalım. N, C doğrusunun $x-$eksenini kestiği noktalardan biri olarak alınsın. f fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} f \ : \ C &\rightarrow \quad d \\ X &\longmapsto \quad f(X) = NX \cap d \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.



Şekil 3.1.3

f fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu göstereceğiz.

$$f \ \textit{fonksiyonu birebirdir} \Leftrightarrow \forall X_i,\ X_j \in C \ \textit{için} \ f(X_i) = f(X_j) \Rightarrow X_i = X_j$$

$f(X_i) = f(Xj) = K$ olacak şekilde $K \circ d$ noktasını alalım. Bu durumda;

$$X_i = NK \cap d = X_j \Rightarrow X_i = X_j$$

elde edilir. Yani f birebirdir.

$$\begin{aligned} f \ \textit{fonksiyonu örtendir} \quad \Leftrightarrow \quad & \forall K \circ d \ \textit{için} \ f(X) = K \ \textit{olacak şekilde} \\ & \exists X \circ C \ \textit{noktası vardır.} \end{aligned}$$

$f(X) = K$ olacak şekilde $X = NK \cap C \circ C$ noktası olacağından f örtendir.

O halde $x-$eksenine dik olan bir doğru ve merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir yarı çember arasında birebir ve örten bir f fonksiyonu tanımlanabildiğinden, bu çeşit doğrular aynı sayıda nokta kapsarlar.

iii) Doğruların ikisi de merkezleri $x-$ekseni üzerinde bulunan yarı çemberler olarak alınsın. C_1 ve C_2 bu çeşit iki doğru olsunlar. ii den dolayı $x-$eksenine dik olan bir doğru ve merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir yarı çember arasında tanımlı birebir ve örten,

$$f \ : \ C_1 \ \rightarrow \ d$$

fonksiyonu vardır. Benzer şekilde ii den bu doğrular arasında birebir ve örten,

$$g \ : \ d \ \rightarrow \ C_2$$

fonksiyonu vardır. O zaman,

$$h = g \circ f \ : \ C_1 \ \rightarrow \ C_2$$

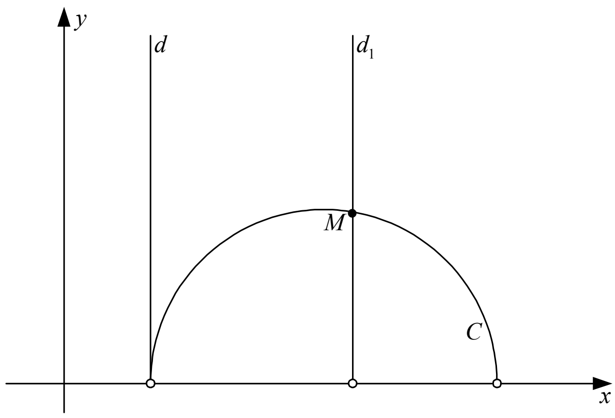
fonksiyonu da birebir ve örten bir fonksiyon olur.

Böylece bu çeşit doğrular üzerinde de aynı sayıda nokta vardır.

$H3$) Öklid düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın varlığı aşikar olduğundan $H3$ aksiyomu sağlanır.

$H4$) Bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebileceğini, doğruların durumuna göre üç farklı durumda inceleyeceğiz.

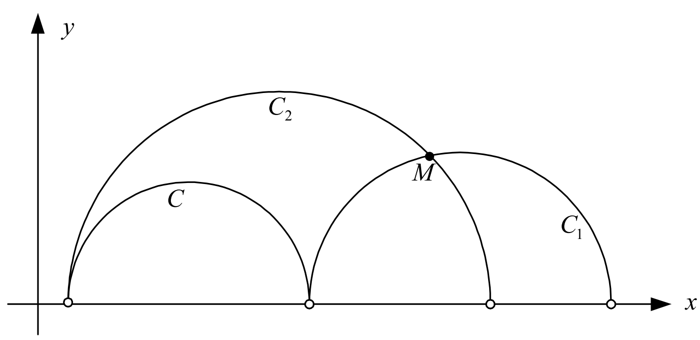
i) d, x-eksenine dik olan bir doğru ve M, bu doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda M noktasından geçen ve $x-$eksenine dik olan bir d_1 doğrusu vadır. Ayrıca d doğrusunun x-eksenini kestiği noktadan ve M den geçen, merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir C doğrusu vardır.



Şekil 3.1.4

Bu iki doğru da d ye paraleldir. Böylece bu durumda bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir.

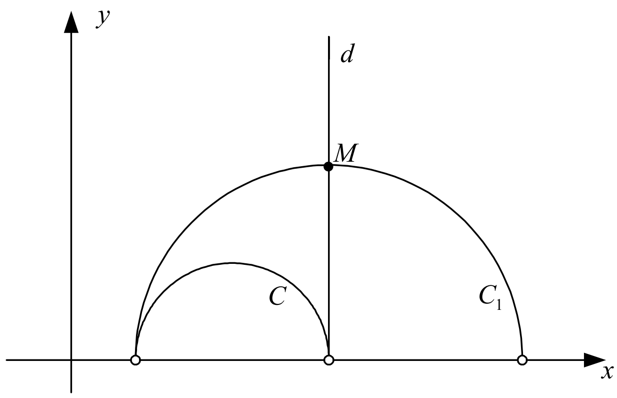
ii) C, merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir doğru ve M, bu doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda M noktasından ve C doğrusunun $x-$eksenini kestiği noktaların birinden geçen, merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir C_1 doğrusu vardır. Benzer şekilde M noktasından ve C doğrusunun x-eksenini kestiği diğer noktadan geçen, merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir C_2 doğrusu vardır.



Şekil 3.1.5

C_1 ve C_2 doğruları C doğrusuna paralel olup bu durumda bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir.

iii) C, merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir doğru ve M, bu doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda M noktasından ve C doğrusunun $x-$eksenini kestiği noktaların birinden geçen, merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir C_1 doğrusu vardır. Benzer şekilde M noktasından ve C doğrusunun $x-$eksenini kestiği diğer noktadan geçen, $x-$eksenine dik olan bir d doğrusu vardır.



Şekil 3.1.6

C_1 ve d doğruları C doğrusuna paralel olup bu durumda bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir.

$H5)$ $H^{'} \subset H$ kümesi doğrudaş olmayan üç nokta ve $H^{'}$ nün farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktalarını kapsasın. H nın herhangi bir X noktasını gözönüne alınsın. Bu doğrudaş olmayan üç noktadan geçen merkezi $x-$ekseni üzerinde bulunan bir doğru vardır. Bu çemberin iç noktalarından biri Y olarak adlandırılsın. Farklı iki noktadan geçen bir tek doğru olacağından X ve Y noktalarından geçen bir doğru vardır ve bu doğru ele alınan çemberi bir noktada kesmek zorundadır. Hipotez gereğince de $H^{'}$ alt kümesi farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktaları kapsayacağından $X \in H^{'}$ olur. Buradan da $H^{'} = H$ eşitliği elde edilir.

3.1.1 Poincare Modelinin Homojenliği

Poincare yarı düzlem modelinin Graves anlamında homojenliğini göstermek için kolinasyonlar grubunun noktalar üzerinde geçişken olduğunu göstermeliyiz.

$$(x,y)\in N \text{ ve } a,\ b\in R,\ b>0 \text{ olmak üzere } f_{a,b}(x,y)=(a+x,by)$$

birebir ve örten $f_{a,b}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$G=\{f_{a,b}: a,\ b\in R,\ b>0\}$$

olmak üzere $(G,\circ)$ yapısının fonksiyon bileşke işlemine göre bir grup olduğunu göstereceğiz.

$G1)$ $a,\ b,\ c,\ d\in R$ ve $b,\ d>0$ olmak üzere $f_{a,b},\ f_{c,d}\in G$ için $f_{a,b}\circ f_{c,d}\in G$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in N \text{ için } (f_{a,b}\circ f_{c,d})(x,y) &= f_{a,b}((f_{c,d})(x,y))\\ &= f_{a,b}(c+x,dy)\\ &= (a+(c+x),b(dy))\\ &= ((a+c)+x,(bd)y)\end{aligned}$$

$a,\ c\in R$ olduğundan $a+c\in R$ ve $b,\ d>0$ olduğundan $bd>0$ elde edilir. O halde $(G,\circ)$ kapalılık özelliğini sağlar.

$G2)$ $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\in R$ ve $b,\ d,\ f>0$ olmak üzere $f_{a,b},\ f_{c,d},\ f_{e,f}\in G$ için,

$$f_{a,b}\circ(f_{c,d}\circ f_{e,f})=(f_{a,b}\circ f_{c,d})\circ f_{e,f}$$

eşitliğini sağladığını gösterelim.

$$\forall(x,y)\in N \text{ için } (f_{a,b}\circ(f_{c,d}\circ f_{e,f}))(x,y) = ((f_{a,b}\circ f_{c,d})\circ f_{e,f})(x,y)$$

eşitliği aşikar olacağından $(G,\circ)$ birleşme özelliğini sağlar.

$G3)$ $a,\ b\in R$ ve $b>0$ olmak üzere $f_{a,b}\in G$ için $f_{a,b}\circ f_{c,d}=f_{a,b}$ olacak şekilde bir tek $f_{c,d}\in G$ olduğunu gösterelim.

$$\forall(x,y)\in N \text{ için } (f_{a,b}\circ f_{c,d})(x,y) = f_{a,b}(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f_{a,b}(c+x, dy) &= (a+x, by) \\
\Rightarrow \quad (a+(c+x), b(dy)) &= (a+x, by) \\
\Rightarrow \quad (a+c+x, bdy) &= (a+x, by) \\
\Rightarrow \quad c = 0 \quad \wedge \quad d = 1 &
\end{aligned}$$

olup $f_{c,d} = f_{0,1}$birim elemandır.

$G4)$ a, $b \in R$ ve $b > 0$ olmak üzere $f_{a,b} \in G$ için $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{0,1}$ olacak şekilde bir tek $f_{c,d} \in G$ olduğunu gösterelim.

$$\forall (x,y) \in N \text{ için } (f_{a,b} \circ f_{c,d})(x,y) = f_{0,1}(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f_{a,b}(c+x, dy) &= (x, y) \\
\Rightarrow \quad (a+(c+x), b(dy)) &= (x, y) \\
\Rightarrow \quad (a+c+x, bdy) &= (x, y) \\
\Rightarrow \quad c = -a \quad \wedge \quad d = \tfrac{1}{b} &
\end{aligned}$$

olup $-a \in R$ ve $\frac{1}{b} > 0$ olacağından $f_{c,d} = f_{-a,\frac{1}{b}}$, $f_{a,b}$ nin ters elemanıdır.

Böylece $(G, \circ)$ yapısı fonksiyonun bileşke işlemine göre bir gruptur.

Poincare yarı düzlem modelinin herhangi (x,y) ve (x', y') noktaları için $f_{a,b}(x,y) = (x', y')$ olacak şekilde en az bir $f_{a,b} \in G$ olduğu kolaylıkla görülebileceğinden sözkonusu düzlem homojendir.

Bölüm 4

BAZI SONLU HOMOJEN HİPERBOLİK DÜZLEM MODELLERİ

4.1 Ovaller Yardımıyla Elde Edilen Sonlu Bir Hiperbolik Düzlem Modeli

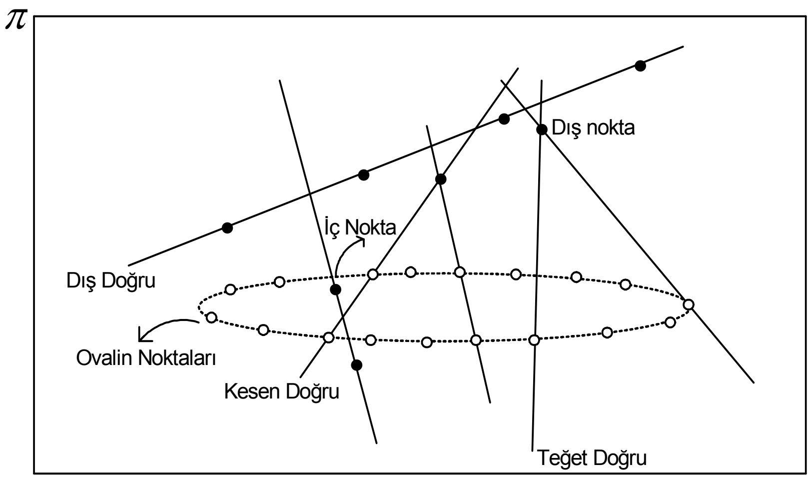
Tanım 4.1.1 *Mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan $n+1$ noktadan oluşan bir Q kümesine **oval** denir.*

n tek tamsayı olmak üzere π projektif düzlemindeki bir Q ovali için aşağıdaki tanımlar geçerlidir.

Tanım 4.1.2 *Q ovalinin tam olarak bir noktasını kapsayan doğruya **teğet doğru**, tam olarak iki noktasını kapsayan doğruya **kesen doğru**, hiçbir noktasını kapsamayan doğruya **dış doğru** denir.*

Tanım 4.1.3 *Q ovalinin iki teğeti üzerinde bulunan noktalara ovalin **dış***

noktaları *ve Q ovalinin hiç bir teğeti üzerinde olmayan noktalara ovalin* ***iç noktaları*** *denir.*



Şekil 4.1.1

Teorem 4.1.4 *n tek sayı olmak üzere n. mertebeden π projektif düzlemindeki bir oval için aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

i) $\frac{1}{2}n(n+1)$ *adet dış nokta vardır.*

ii) $\frac{1}{2}n(n+1)$ *adet kesen doğru vardır.*

iii) $\frac{1}{2}n(n-1)$ *adet iç nokta vardır.*

iv) $n+1$ *adet teğet doğru vardır.*

v) $\frac{1}{2}n(n-1)$ *adet dış doğru vardır.*

vi) *Her bir kesen doğru* $\frac{n-1}{2}$ *adet iç nokta kapsar.*

vii) *Her bir dış doğru* $\frac{n+1}{2}$*adet içnokta kapsar.*

İspat:

i) Bir dış nokta ovalin iki teğet doğrusu üzerinde bulunan noktalar olarak tanımlandığından toplam dış nokta sayısı;

$$\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

olarak bulunur.

ii) Bir kesen doğru oval üzerindeki iki noktadan geçen doğru olarak tanımlandığından ve bir oval üzerinde toplam n+1 nokta bulunduğundan toplam kesen doğru sayısı;

$$\binom{n+1}{2} \quad = \quad \frac{1}{2}n(n+1)$$

olarak elde edilir.

iii) π projektif düzleminin toplam nokta sayısından ovalin noktaları ve dış noktaları çıkarıldığında toplam iç nokta sayısı bulunur.

$$n^2+n+1-(\frac{n(n+1)}{2}+n+1) \quad = \quad \frac{1}{2}n(n-1)$$

iv) Q ovalinin n+1 adet noktasının herbiri bir tek teğeti üzerinde bulunacağından toplam teğet doğrusu sayısının $n+1$ olacağı aşikardır.

v) π projektif düzleminin toplam doğru sayısından ovalin toplam teğet ve kesen doğruları sayısı çıkarıldığında toplam dış doğru sayısı elde edilir.

$$n^2+n+1-(\frac{n(n+1)}{2}+n+1) \quad = \quad \frac{1}{2}n(n-1)$$

vi) Herhangi bir kesen doğru Q ovalinin tam olarak iki noktasını kapsar. Alınan herhangi bir kesen doğru üzerinde geriye $n-1$ nokta kalmaktadır. Ayrıca Q ovalinin bu kesen doğru tarafından kapsanan iki noktasının dışında kalan $n-1$ noktasından geçen teğet doğrular ikişer ikişer kesen doğrunun dış noktalarını belirler. Böylece belirlenen kesen doğrunun dış noktalarının sayısı $\frac{n-1}{2}$ dir. Bu durumda kesen doğru üzerinde;

$$n-1-(\frac{n-1}{2}) \quad = \quad \frac{n-1}{2}$$

adet iç nokta vardır.

vii) İki teğet doğru bir dış nokta belirlediğinden Q ovalinin n+1 adet teğet doğrusu $\frac{n+1}{2}$ adet dış nokta belirler. π projektif düzleminin doğrusu olan bir dış doğru n+1 adet nokta kapsadığından bir dış doğru;

$$n+1-(\tfrac{n+1}{2}) \;=\; \tfrac{n+1}{2}$$

adet iç nokta kapsar.

Teorem 4.1.5 *n tek tamsayı ve $n>7$ olmak üzere π projektif düzlemindeki bir Q ovali için ,*

P : *Q ovalinin iç noktaları kümesi*

L : *Q ovalinin dış ve kesen doğrularının kümesi*

$\circ$: *π projektif düzlemindeki üzerinde bulunma bağıntısının (P, L) ye kısıtlanmışı olmak üzere,*

$(P, L, \circ)$ sistemi bir hiperbolik düzlemdir. (Bu düzlem literatürde Ostrom [6] modeli olarak bilinir.)

İspat: Verilen $(P, L, \circ)$ sisteminin bir hiperbolik düzlem olduğunu ispat etmek için Graves' e ait aksiyomların sağlandığı gösterilmelidir.

$H1)$ P nin her noktası aynı zamanda π projektif düzleminin bir noktası olacağından farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceği aşikardır.

$H2)$ Bir dış doğru $\frac{n+1}{2}$ ve bir kesen doğru $\frac{n-1}{2}$ iç nokta kapsadığından,

$$\tfrac{n+1}{2} \;>\; \tfrac{n-1}{2} \;\geq\; 3 \quad (n>7)$$

elde edilir. O halde $(P, L, \circ)$ sisteminin herhangi bir doğrusu en az üç nokta kapsar.

$H3)$ Bir kesen doğru üzerinden $n+1-(\frac{n-1}{2}) \;=\; \frac{n+3}{2}$ nokta ve bir dış doğru üzerinden $n+1-(\frac{n+1}{2}) \;=\; \frac{n+1}{2}$ nokta atılmıştır. Böylece;

$$\tfrac{n+3}{2} \;>\; \tfrac{n+1}{2} \;\geq\; 4$$

olduğundan dolayı $(P, L, \circ)$ sisteminin herhangi bir doğrusuna dışındaki bir noktadan en az dört paralel doğru çizilebilir.

$H4)$ $(P, L, \circ)$ sisteminin $X \not\circ l$ olacak şekilde bir X noktası ve bir l doğrusunu alalım. Eğer l bir kesen doğru ise $\frac{n-1}{2}$ adet iç nokta kapsar. Dış doğru ise $\frac{n+1}{2}$ adet iç nokta kapsar. $n > 7$ olduğundan bu doğru üzerinde en az dört nokta vardır. Bu noktalardan ikisine A ve B dersek farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden AX ve BX doğruları vardır. Bu doğrular üzerinde de X noktası ve l yi kestiği nokta hariç en az iki nokta olacağından herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın varlığı gösterilmiş olunur.

$H5)$ $P' \subset P$ olmak üzere, P' doğrudaş olmayan üç nokta ve farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktaları kapsasın. $P' = P$ olduğunu gösterelim. Bunun için $P \subset P'$ olduğunu göstermeliyiz. Doğrudaş olmayan bu üç noktayı X, Y, Z olarak adlandıralım. YZ doğrusu eğer kesen doğru ise $\frac{n-1}{2}$, dış doğru ise $\frac{n+1}{2}$ nokta kapsayacağından bir doğru üzerinde en az $\frac{n-1}{2}$ nokta vardır. X noktası ve bu $\frac{n-1}{2}$ noktayı birleştirdiğimizde elde edilen doğrular üzerindeki tüm noktalar P' deki toplam en az nokta sayısını verir. Yani P'en az

$$(\tfrac{n-1}{2})(\tfrac{n-1}{2} - 1) + 1$$

nokta kapsar. $n > 7$ olduğundan;

$$(\tfrac{n-1}{2})(\tfrac{n-1}{2} - 1) + 1 \quad > \quad n + 1$$

dir. $A \in P$ olacak şekilde herhangi bir noktası alınsın. A noktasından geçen $n + 1$ adet doğru vardır ve yukarıdaki eşitlikten dolayı bu doğrulardan bir tanesi P' nün en az iki noktasını kapsar. Hipotez gereğince P', farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktalarını kapsayacağından dolayı $A \in P'$ elde edilir. Böylece A herhangi bir nokta olduğundan $P' = P$ eşitliği gösterilmiş olur (Ostrom [6]).

O halde $(P, L, \circ)$ sistemi bir hiperbolik düzlemdir.

Tanım 4.1.6 *Bir l doğrusu ve bu doğru üzerindeki bir X noktasının π pro-*

*jektif düzleminde oluşturduğu geometrik şekle bir **flag** denir ve (X, l) ile gösterilir.*

Teorem 4.1.7 (Segre Teoremi) *Mertebesi n çift olan bir π projektif düzlemindeki bir Q ovalinin tüm teğetleri noktadaştır.*

İspat: (X, l) bir flag olsun. l, Q ovalinin bir keseni ve X, $X \notin Q$ özelliğinde bir nokta olsun. n çift olduğundan X noktasından ovale en az bir teğet çizebiliriz. l kesen doğrusunun Q ya ait olmayan noktalarını X_i ve X_i noktalarından geçen teğet sayılarını h_i ile gösterelim $(i = 1,\ 2,\ ..., n-1)$. Bu durumda $h_i \geq 1$ dir.

$$n - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} h_i = h_1 + h_2 + ... + h_{n-1}$$

dir. Bu da $h_i = 1$ $(i = 1,\ 2,\ ..., n-1)$ olmasını gerektirir.

l kesen doğrusunun Q ovaline ait olan iki noktasına A ve B diyelim. Sırasıyla A ve B noktasından geçen teğetler a ve b ve $a \wedge b = C$ olsun. C noktası hiçbir kesen doğru üzerinde değildir. Çünkü l keseni üzerindeki herbir noktadan tek bir teğet doğru çizilir. l herhangi bir kesen olduğundan C kesen üzerinde olamaz. O halde C noktasını Q ovalinin noktalarıyla birleştirerek elde edilen doğrular ilgili noktalarda teğettirler. Başka bir deyişle, C den geçen herbir doğru Q ovaline teğettir. Bu sonuç da ovalin $n + 1$ teğetinin C noktasından geçmesini gerektirir. Yani ovalin tüm teğetleri noktadaştır (Segre [10]).

Segre teoremini kullanarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.8 *Çift mertebeden projektif düzlemlerde ovaller yardımıyla Teorem 4.1.5 deki anlamda hiperbolik düzlemler inşa edilemez.*

4.1.1 Ostrom Modelinin Homojenliği

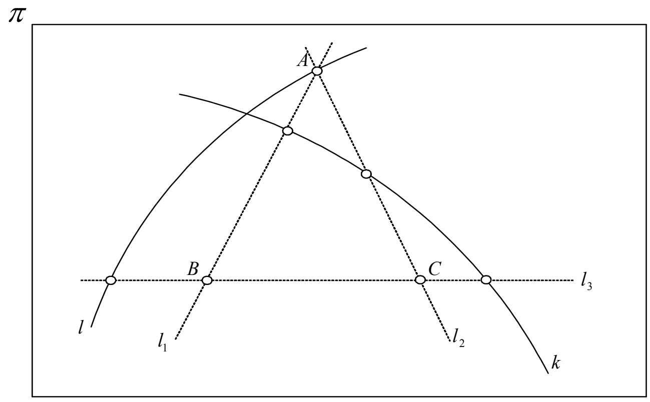
Projektif düzlemin Q ovalini kendisine dönüştüren herbir kolinasyonu, $B-L$ düzleminin de bir kolinasyonudur. Bu nedenle π projektif düzleminin Q ovalini invaryant bırakan kolinasyon grubunun , iç noktalar üzerinde geçişken olduğunu göstermek, $B-L$ düzleminin homogenliği için kafidir. Ostrom' un bu modelinde π projektif düzlemi Dezargsel ve $n \not\equiv 1(\text{mod } 8)$ ise, elde edilen $B-L$ düzlemi homogendir (Ostrom [6]).

4.2 Sandler Modeli

π, $n \geq 5$ olmak üzere n. mertebeden sonlu bir projektif düzlem olsun. π den noktadaş olmayan l_1, l_2, l_3 doğruları ve bu doğruların üzerindeki tüm noktalar atılarak elde edilen yapı π_3 olarak adlandırılsın. π_3 ün üzerinde bulunma bağıntısı, π nin üzerinde bulunma bağıntısı ile aynı olduğundan aynı sembolle gösterilebilir. Bu durumda π_3 nin bir hiperbolik düzlem olduğunu göstereceğiz. Bu düzlem Sandler [5] modeli olarak bilinir.

Sandler modelinde iki tip doğru mevcuttur. Birinci tip doğrular Şekil 4.2.1 te belirtilen l doğrularıdır. Bu doğrular bir köşe noktasından geçip $n-1$ adet noktaya sahiptirler. İkinci tip doğrular ise Şekil 4.2.1 te belirtilen hiç bir köşe noktasından geçmeyen ve $n-2$ noktaya sahip olan k doğrularıdır.

Ayrıca Sandler modelinde her noktadan $n+1$ adet doğru geçeceğinden noktasal regülerdir. Fakat doğrusal regüler değildir.

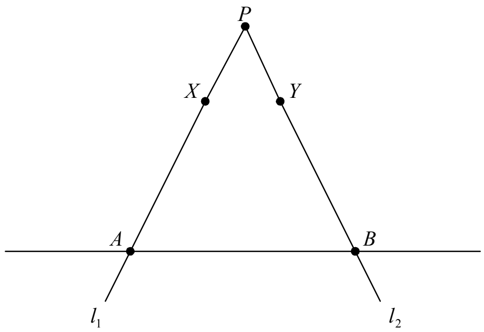


Şekil 4.2.1

$H1)$ π_3 nin tüm noktaları aynı zamanda π nin de noktaları olduğundan projektif düzlem aksiyomlarından dolayı iki nokta bir tek doğru belirtir.

$H2)$ π nin bir doğrusu üzerinden en fazla üç nokta atılmıştır. Yani π_3 nin bir doğrusu eğer π den atılan üçgenin bir köşe noktasından geçiyor ise $n-1$, hiç bir köşe noktasından geçmiyor ise $n-2$ nokta kapsar. $n \geq 5$ olduğundan dolayı herhangi bir doğru üzerinde en az 3 nokta olacağı görülür.

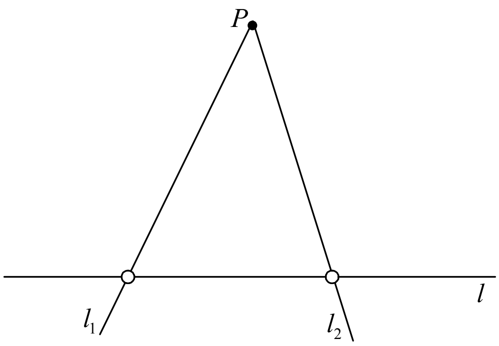
$H3)$ π de bir l doğrusu ve $P \notin l$ olacak şekilde bir P noktası alalım. Her doğru üzerinde en az üç nokta olacağından l üzerinde A ve B noktaları vardır. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden dolayı P den geçen PA ve PB doğruları sözkonusudur. Bu doğrular üzerinde de en az üç nokta olacağından PA doğrusu üzerinde P ve A noktalarından farklı bir X noktası PB doğrusu üzerinde de P ve B noktalarından farklı bir Y noktası vardır.



Şekil 4.2.2

O halde A, B, X, Y noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.

$H4)$ π nin herhangi bir l doğrusu üzerinden atılan en az nokta sayısı 2 dir. Bu noktaları A ve B olarak adlandıralım. π de $P \notin l$ olacak şekilde bir P noktasını alalım. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden PA ve PB doğruları vardır ve bu doğrular, π_3 de l doğrusuna paraleldir. Böylece bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel doğru çizildiği görülür.



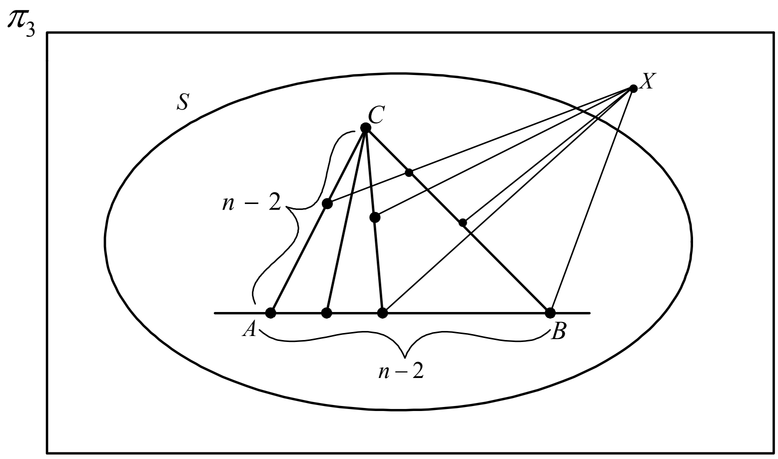
Şekil 4.2.3

$H5)$ π_3 nin noktalarının bir S alt kümesi, doğrudaş olmayan üç nokta ve S ye ait herhangi iki noktayı birleştiren doğrular üzerindeki tüm noktaları kapsasın. O zaman $A, B, C \in S$ doğrudaş olmayan üç nokta olmak üzere $l = AB$ doğrusu üzerindeki noktalar hipotez gereğince S ye aittir. Bu l

doğrusu üzerinde en az $n-2$ adet nokta olup C noktası ile bu noktalar birleştirilirse ;

$$(n-2)(n-3)+1$$

S deki en az toplam nokta sayısı olur. $X \in \pi_3$ ün herhangi bir noktası olsun.



Şekil 4.2.4

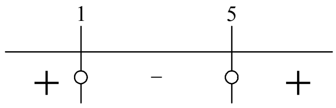
π projektif düzleminde bir noktadan $n+1$ adet doğru geçeceğinden eğer

$$(n-2)(n-3)+1 \quad \geq \quad n+2$$

olduğunu gösterirsek bu X noktasından geçen doğrulardan birinin S nin birden fazla noktasını kapsadığını garantilemiş oluruz. Bu durumda da hipotez gereğince S nin farklı iki noktasını kapsayan bir doğrunun tüm noktaları da S de olacağından $X \in S$ elde edilmiş olur. O halde;

$$(n-2)(n-3)+1 \quad \geq \quad n+2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad n^2-6n+5 \quad \geq \quad 0 \\ &\Rightarrow \quad n_1 \; = \; 1 \quad \text{veya} \quad n_2 \; = \; 5 \\ &\Rightarrow \quad n \; \geq \; 5 \quad \text{veya} \quad n \; \leq \; 1 \end{aligned}$$



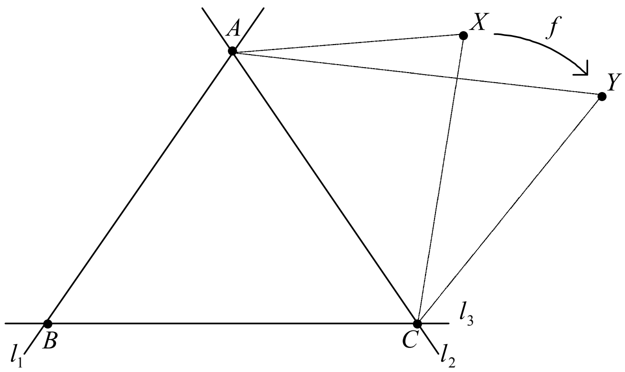
olmak zorundadır. $n \geq 2$ olduğundan $n \leq 1$ olamaz. Böylece $n \geq 5$ elde edilir. Bu da hipotez gereğince aşikardır .

Böylece π_3 bir hiperbolik düzlemdir.

4.2.1 Sandler Modelinin Homojenliği

π_3 nin Graves anlamında homojenliğini göstermek için kolinasyonlar grubunun π_3 nin noktaları üzerinde geçişken olduğunu göstermeliyiz. Dezargsel bir projektif düzlemin kolinasyonlar grubunun herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta üzerinde geçişken olduğu biliniyor (Bkz. Teorem 1.3.18).

π nin atılan üçgeni invaryant bırakan herhangi bir kolinasyonunun π_3 nin de bir kolinasyonu olacağı açıktır.



Şekil 4.2.5

Yani; π Dezargsel bir projektif düzlem iken A, B, C noktalarını invaryant bırakan kolinasyonların altgrubu π_3 nin noktaları üzerinde geçişken olan bir altgruptur. Böylece, Dezargsel bir projektif düzlemin kolinasyonlar grubu herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta üzerinde geçişken olduğundan π

nin bu özellikteki herhangi dört noktasını yine bu özellikteki herhangi dört noktasına götüren bir f kolinasyonu vardır.

$$f \ : \ ABCX \ \longmapsto \ ABCY$$

iken;

$$f \ : \ X \ \longmapsto \ Y$$

elde edilir (Sandler [5]). O halde π Dezargsel bir projektif düzlem iken π_3 Graves anlamında homojendir.

4.3 Sandler Yapısının Genişletilmişi

Bu kesimde ele alacağımız ve Sandler modelinin bir genişletilmişi olarak düşünebileceğimiz düzlem Kaya-Özcan [8] nın bir özetinden ibarettir.

π, n. mertebeden sonlu bir projektif düzlem ve m, $m \leq n+2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif bir tamsayı olsun. l_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ π nin farklı ve herhangi üçü noktadaş olmayan doğrularını göstersin. π_m, π den l_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ doğruları ve bu doğrular üzerinde bulunan tüm noktaların atılmasıyla elde edilen bir alt yapı olsun. π nin bir noktası eğer l_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ doğrularının herhangi ikisinin kesişimi ise **köşe noktası** adını alır. r, minumum köşe noktası sayısını göstersin. π_m aşağıdaki özellikleri sağlar.

a) Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

b) Her bir noktadan $n+1$ doğru geçer.

c) Toplam doğru sayısı $n^2+n+1-m$ dir.

d) Toplam nokta sayısı $n^2+(1-m)n+\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ dir.

Yardımcı teorem 4.3.1 *π_m nin bir doğrusu, π nin bir doğrusu olarak düşünülür ise, m nin tek veya çift olmasına göre, sırasıyla $\frac{m-1}{2}$ veya $\frac{m}{2}$ köşe noktası kapsar.*

İspat: Bakınız Kaya-Özcan [8].

Sonuç 4.3.2 *π de s adet köşe noktası kapsayan π_m nin bir doğrusunun tam olarak $n+1-(m-s)$ noktası vardır.*

İspat: Bakınız Kaya-Özcan [8].

Sonuç 4.3.3 *π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki köşe noktalarının minumum sayısı r, bu doğru üzerindeki π_m ne ait tüm noktaların sayısı k olsun. O zaman,*

$$\begin{array}{lcl} m \text{ çift} & \Rightarrow & n+1-m+r \leq k \leq n - \frac{1}{2}(m-2) \\ m \text{ tek} & \Rightarrow & n+1-m+r \leq k \leq n - \frac{1}{2}(m-1) \end{array}$$

dir.

İspat: Bakınız Kaya-Özcan [8].

Teorem 4.3.4 *r, π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki köşe noktalarının minumum sayısı olsun. Bu durumda,*

$$3 \leq m \leq n + r + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5})$$

ise π_m bir hiperbolik düzlemdir.

İspat: $H1$) Sonuç 4.3.2 den dolayı π_m nin bir doğrusunun üzerinde en az

$$n + 1 - (m - r)$$

nokta vardır. Hipotezden dolayı,

$$\begin{array}{rcl} m & \leq & n + r + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}) \\ \Rightarrow n & \geq & m - r - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}) \end{array}$$

olur. Burada $n \geq 2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} m - r - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}) &\geq m - r - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{13}) \\ \Rightarrow \quad m - r - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}) &\geq m - r + 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\begin{aligned} n \ \geq \quad & m - r - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}) \ \geq \ m - r + 1 \\ \Rightarrow \quad & n \ \geq \ m - r + 1 \\ \Rightarrow \quad & n - m + r \ \geq \ 1 \\ \Rightarrow \quad & n - m + r + 1 \ \geq \ 2 \\ \Rightarrow \quad & n + 1 - m + r \ \geq \ 2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$H2)$ π_m in **a)** özelliğinden sağlanır.

$H3)$ π_m de herbiri en az iki nokta içeren ve birbirine paralel iki doğru olacağından $H3$ aksiyomu aşikar olarak sağlanır.

$H4)$ l, π_m nin bir doğrusu ve P, π_m nin l üzerinde olmayan bir noktası olsun. l ye, üzerinden atılan nokta sayısı kadar, P den geçen paralel doğru çizilebilir. l den $m - s$ adet nokta atılmış ise, P noktasından geçen ve l ye paralel olan $m - s$ adet doğru çizilebilir.

m çift iken, l doğrusu üzerinde en fazla $\frac{m}{2}$ köşe noktası olduğundan l ye P den geçen en az,

$$m - \tfrac{m}{2} \ = \ \tfrac{m}{2}$$

adet paralel doğru çizilebilir.

m tek iken, l doğrusu üzerinde en fazla $\frac{m-1}{2}$ köşe noktası olduğundan l ye P den geçen en az,

$$m - \tfrac{m-1}{2} \ = \ \tfrac{m+1}{2}$$

adet paralel doğru çizilebilir.

Diğer tafartan $m \geq 3$ olduğundan,

$$\frac{m}{2} \;\geq\; 2 \quad \text{veya} \quad \frac{m+1}{2} \;\geq\; 2$$

dir.

$H5$) S, π_m nin noktaları cümlesinin doğrudaş olmayan A, B, C noktalarını kapsayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca S, S ye ait herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları da kapsasın. O zaman S; AB, AC ve BC doğruları üzerindeki tüm noktaları da kapsar. Bu doğruların herbiri, hipotezden dolayı, π de en az r adet köşe noktası kapsar. O halde AB doğrusu da π_m nin en az $n+1-m+r$ noktasını kapsar. O zaman, C ile AB doğrusu üzerindeki $n+1-m+r$ nokta birleştirilerek, C den geçen ve AB doğrusunu kesen en az $n+1-m+r$ adet doğru elde edilir. Bu doğruların herbiri C den başka en az $n-m+r$ nokta kapsar. Dolayısıyla S en az,

$$(n-m+r)(n+1-m+r)+1$$

nokta kapsar.

X, π_m nin herhangi bir noktası olsun. X ile S tarafından kapsanan,

$$(n-m+r)(n+1-m+r)+1$$

nokta birleştirilirse X den ve S nin bir noktasından geçen en az,

$$(n-m+r)(n+1-m+r)+1$$

adet doğru elde edilir. Diğer taraftan π de X den tam olarak $n+1$ doğru geçer. Bu durumda eğer,

$$(n-m+r)(n+1-m+r)+1 \;\;\geq\;\; n+2$$

ise, X noktasını S nin noktalarına birleştiren doğruların en az iki tanesi çakışır demektir (Aksi halde X den $n+2$ adet doğru geçmiş olurdu ki bu imkansızdır).

Yani X i, S nin noktalarına birleştiren bir doğru üzerinde S nin en az iki noktası mevcut olur. Hipotezden dolayı bu $X \in S$ demek olup, S ile π_m nin noktaları aynıdır.

$$\begin{aligned}
& (n-m+r)(n+1-m+r)+1 \;\geq\; n+2 \\
\Rightarrow\; & (n-m+r)(n+1-m+r)-n-1 \;\geq\; 0 \\
\Rightarrow\; & n^2+n-mn+nr-mn-m+m^2 \\
& -rm+nr+r-mr+r^2-n-1 \;\geq\; 0 \\
\Rightarrow\; & m^2-m(2n+2r+1)+n^2+2nr+r^2+r-1 \;\geq\; 0
\end{aligned}$$

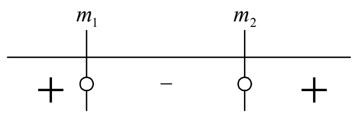
Son bulunan ikinci derece polinomun m ye göre kökleri,

$$m_{1,2} =$$

$$\frac{2n+2r+1 \mp \sqrt{4n^2+8nr+4n+4r+4r^2+1-(4n^2+8nr+4r^2+4r-4)}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; & m_{1,2} = \tfrac{2n+2r+1 \mp \sqrt{4n+5}}{2} \\
\Rightarrow\; & m_{1,2} = n+r+\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{4n+5} \\
\Rightarrow\; & m_{1,2} = n+r+\tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{4n+5}) \\
\Rightarrow\; & \begin{cases} m_1 = n+r+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{4n+5}) \\ m_2 = n+r+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5}) \end{cases}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.



Bu durumda $m \leq n+2$ olduğundan $m \leq m_1$ olmalıdır. Yani,

$$m \;\leq\; n+r+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{4n+5})$$

olup $H5$ aksiyomu sağlanır (Kaya-Özcan [8]).

Bölüm 5

SONLU REGÜLER BİR HİPERBOLİK DÜZLEM MODELİ

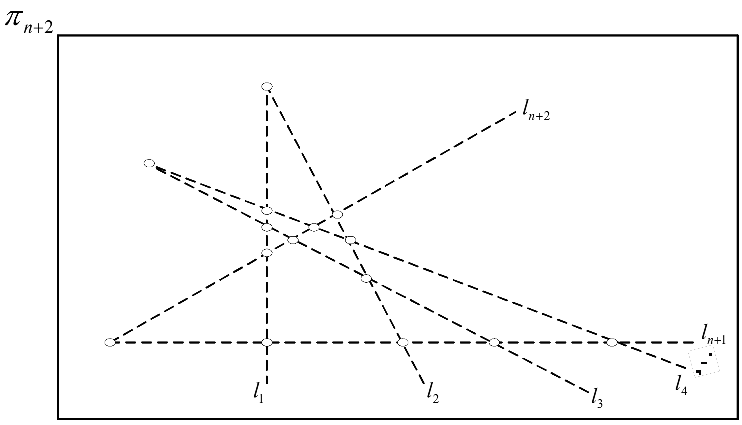
5.1 π_{n+2} Hiperbolik Düzlem Modeli

Teorem 5.1.1 *π mertebesi $n \geq 8$ ve çift olan sonlu bir projektif düzlem olsun. Bu durumda π_{n+2}, $(\frac{n}{2}, n+1)-$regüler hiperbolik düzlemdir.*

İspat: Burada $l_1, l_2, ..., l_{n+2}$; π projektif düzleminden herhangi üçü noktadaş olmayan atılan doğrular olmak üzere, bu doğruların üzerindeki tüm noktalarıyla birlikte atılmasıyla ele edilen yapı $\pi_{n+2} = \pi \setminus \{l_1, l_2, ..., l_{n+2}\}$ ile ifade edilsin. Öncelikle π_{n+2} nin $(\frac{n}{2}, n+1)-$regüler bir düzlem olduğunu göstereceğiz. π projektif düzleminin her noktasından $n+1$ adet doğru geçer. π_{n+2} nin her noktası π nin bir noktasıdır. O halde π_{n+2} nin her noktasından $n+1$ adet doğru geçmektedir. Yani noktasal regülerdir. Her doğrusu üzerinde $\frac{n}{2}$ adet nokta olduğunu yani doğrusal regülerliğini göstereceğiz. Projektif düzlemde farklı iki doğru bir tek noktada kesişeceğinden ve bu atılan doğruların herhangi üçü noktadaş olmayan doğrular olduğundan bu $n+1$ doğru $n+2$. doğruyu farklı $n+1$ noktada keser. Bir π projektif düzleminde bir doğru üzerinde $n+1$ nokta olacağından atılan doğrular üzerindeki her nokta bir köşe noktasıdır. O halde π projektif düzleminde kalan doğrular yani π_{n+2} nin doğruları ile atılan her doğru bir köşe noktasında kesişeceğinden π_{n+2} nin her bir doğrusu $\frac{n+2}{2}$ köşe noktası kapsar. Böylece;

$$n+1-\left(\tfrac{n+2}{2}\right) \quad = \quad \tfrac{n}{2}$$

π_{n+2} nin bir doğrusu üzerindeki nokta sayısı olur (Olgun [9]).



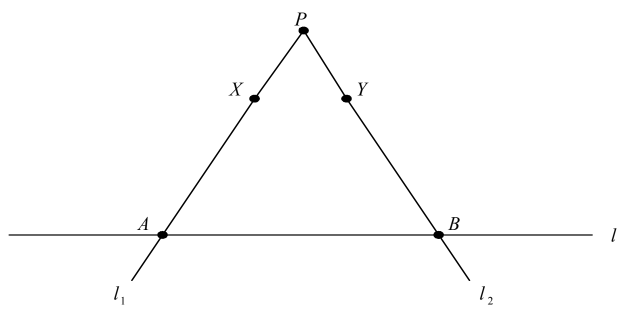
Şekil 5.1.1

Şimdi π_{n+2} nin bir hiperbolik düzlem olduğunu gösterelim. Bunun için Graves' in hiperbolik düzlem aksiyomlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

*H*1) π_{n+2} nin her noktası π nin bir noktası olacağından ve π projektif düzlem olup farklı iki noktasından bir tek doğru geçeceğinden π_{n+2} nin farklı iki noktasından bir tek doğru geçer.

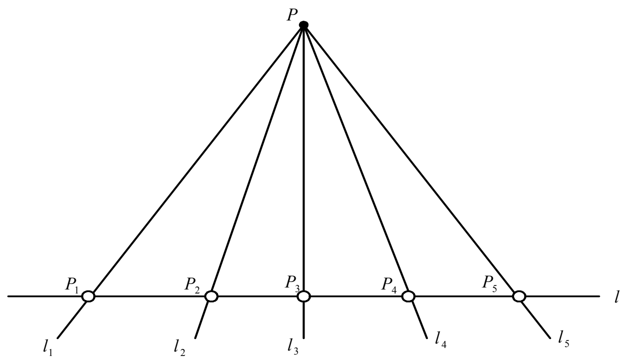
*H*2) π_{n+2} nin herbir doğrusu üzerinde en az iki nokta vardır. Çünkü π_{n+2} nin her doğrusu $\frac{n}{2}$ nokta kapsar. $n \geq 8$ olduğu için her doğru üzerinde en az dört nokta olduğu görülür.

$H3)$ π_{n+2} de bir l doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir P noktasını alalım. $H1$ den bir doğru üzerinde en az dört nokta olacağından l üzerinde en az dört nokta vardır. l doğrusu üzerinde A ve B noktalarını alalım. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden PA ve PB doğruları vardır. Yine bir doğru üzerinde en az dört nokta bulunacağından dolayı PA doğrusu üzerinde P ve A noktalarından farklı bir X noktası ve aynı şekilde PB doğrusu üzerinde bu noktalardan farklı bir Y noktası vardır. Böylece X, Y, A, B noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan noktalardır.



Şekil 5.1.2

$H4)$ π_{n+2} nin her doğrusu üzerinde $\frac{n+2}{2}$ köşe noktası vardır. $n \geq 8$ olup π_{n+2} nin bir doğrusu üzerinden atılan köşe noktası sayısı en az beş olur. π_{n+2} de herhangi bir l doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir P noktası alalım. l üzerinde en az beş köşe noktası olduğundan bu noktaları sırasıyla P noktasıyla birleştirerek elde edilen doğruları alırsak π_{n+2} de bu doğruların l doğrusu ile kesiştigi noktalar atılan noktalar olduğundan bu beş doğrunun hepsinin l ye paralel olduğu görülür.

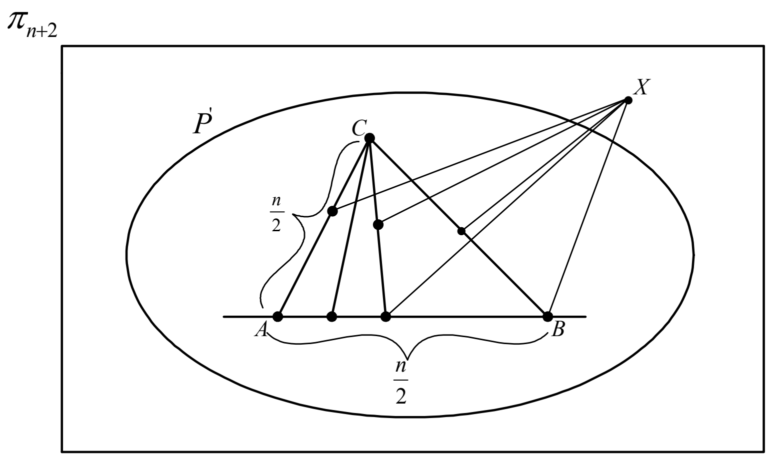


Şekil 5.1.3

$H5)$ π_{n+2} nin bir P' altkümesi doğrudaş olmayan üç nokta ve herhangi iki noktasını birleştiren doğrusu üzerindeki tüm noktaları kapsasın. Bu noktalar A, B, C olarak adlandırılsın. AB doğrusunu alalım. Bu doğru üzerinde $\frac{n}{2}$ nokta vardır. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden C noktasını bu farklı $\frac{n}{2}$ noktaya birleştirelim. Bu doğruların herbiri üzerinde C noktası hariç $\frac{n}{2} - 1$ nokta vardır. O halde P' de toplam;

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 &= \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2 - 2n + 4}{4} \end{aligned}$$

nokta vardır.



Şekil 5.1.4

$P' \subset P$ olduğu aşikardır. $P \subset P'$ olduğunu gösterirsek $P = P'$ olduğu söylenebilir. Bunun içinde herhangi $X \in P$ noktası için $X \in P'$ olduğu gösterilmelidir. Biliniyor ki bir π projektif düzleminde bir noktadan $n+1$ doğru geçer. Eğer P'deki toplam nokta sayısının $n+1$ den büyük olduğu gösterilirse istenilen elde edilmiş olur. Çünkü böylelikle bir X noktasından geçen bu doğrular üzerinde P' nün birden fazla noktasını kapsayan en az bir doğrunun varlığı gösterilmiş olunur. Hipotezden dolayıda P', farklı iki noktasından geçen bir doğru üzerindeki tüm noktaları kapsayacağından
$X \in P'$ olur.

$$\begin{aligned} \tfrac{n^2-2n+4}{4} > n+1 &\Rightarrow n^2-2n+4 > 4n+4 \\ &\Rightarrow n^2-6n > 0 \\ &\Rightarrow n(n-6) > 0 \end{aligned}$$

$$\tfrac{n^2-2n+4}{4} > n+1 \Rightarrow n < 0 \vee n > 6$$

elde edilir.

$n < 0$ olamayacağından $n > 6$ olur. n çift olduğundan dolayı da $n \geq 8$ için bu düzlem bir hiperbolik düzlem modelidir (Olgun [9]).

Bölüm 6

KISMİ GEOMETRİK YAPI

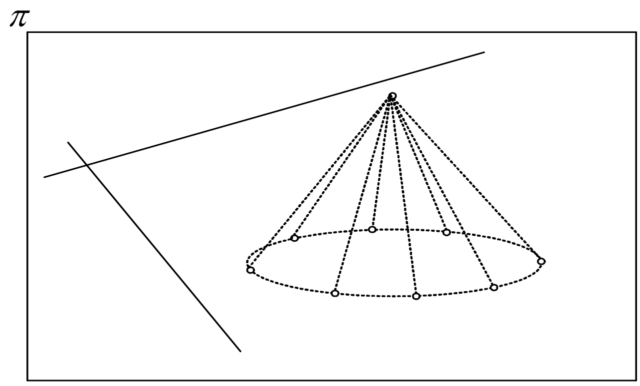
Kısmi Geometri Bose [11] tarafından aşağıdaki dört aksiyomu sağlayan nokta, doğru ve üzerinde bulunma bağıntısı olan (r, k, t) sistemi biçiminde tanımlanmıştır.

$A1$) Farklı iki nokta en çok bir doğru belirtir.

$A2$) Her noktadan r tane doğru geçer.

$A3$) Her doğru üzerinde k tane nokta vardır.

$A4$) Eğer P, l doğrusu üzerinde bulunmayan bir nokta ise P den geçen l yi kesen tam olarak t adet doğru vardır $(t \geq 1)$.



Şekil 6.1.1

$2h+2$ nokta kapsayan bir ovale sahip $n=2h$ mertebeli bir projektif düzlem gözönüne alınsın. Böyle bir düzlemin doğruları iki kategori içerisinde sınıflandırılabilir. Birinici kategori ovalin iki noktasını kapsayan ve kesen doğrular olarak adlandırılan doğrulardır. İkinci kategorinin doğruları ise ovalin hiçbir noktasını kapsamayan dış doğrular olarak adlandırılan doğrulardır. Eğer birinci kategorinin doğrularından ovalin noktalarını çıkarırsak her iki kategorinin doğruları bir kısmi geometrinin bağımsız formu olur. Bu kısmi geometrilerin herbiri ovalin noktaları haricinde orjinal projektif düzlemin bütün noktalarını kapsar. Böylece kısmi geometrilerin herbiri $4h^2-1$ noktaya sahiptir. Çünkü bir projektif düzlem n^2+n+1 noktaya sahiptir. $n=2h$ olup toplam nokta sayısı $4h^2+2h+1$ dır. Ovalin $2h+2$ noktası atılmış olup herbir kısmi geometrinin toplam nokta sayısı;

$$4h^2+2h+1-(2h+2)=4h^2-1$$

dir.

Ovalin farklı iki noktası bir tek kesen doğru belirtir. Kesen doğrular tarafından oluşturulan kısmi geometrinin doğrularının sayısı;

$$\begin{aligned} \binom{2h+2}{2} &= \tfrac{(2h+2)(2h+1)}{2} \\ &= (h+1)(2h+1) \end{aligned}$$

dir.

$n=2h$ mertebeli projektif düzlemin toplam doğru sayısı $4h^2+2h+1$ olup dış doğrular tarafından oluşturulan kısmi geometrinin doğrularının sayısı;

$$4h^2+2h+1-(h+1)(2h+1)=2h^2-h$$

dır.

Projektif düzlemde ovale ait olmayan her noktadan toplam $2h+1$ doğru geçer. Bu doğruların $h+1$ tanesi kesen doğrular ve h taneside dış doğrulardan oluşur. Böylece iki kısmi geometri için r sırasıyla $h+1$ ve h ya eşittir.

Bir doğru üzerindeki nokta sayısı olan k sırasıyla $2h-1$ (kesen doğrulardan ovalin iki noktası atıldığından) ve $2h+1$ e eşittir.

Son olarak herhangi bir l doğrusu üzerinde olmayan bir P noktasından geçen ve l yi kesen doğruların sayısı olan t sırasıyla $h-1$ ve h ya eşittir.

Çünkü bir P noktasından geçen $h+1$ kesen doğru vardır ve eğer l kesen doğru ise 2 noktası ovalin noktası olup, P den geçen l yi kesen doğru sayısı;

$$h+1-2=h-1$$

olur.

l kesen doğrusu üzerinde $2h-1$ nokta olacağından,

$$2h-1-(h-1)=h$$

P den geçen ve l yi kesen dış doğru sayısı olur (Seiden [7]).

Kısmi geometrinin bu şekilde sonsuz ugulaması bulunabilir. m pozitif tamsayı olmak üzere $2h=2^m$ mertebeli bir Dezargsel düzlemin $2h+2$ noktalı bir ovale sahip olduğu biliniyor. Fakat mertebesi çift olan Dezargsel olmayan düzlemlerin $2h+2$ noktalı ovale sahip olup olmadıkları bilinmiyor.

6.1 Bolyai-Lobachevsky Düzlemlerinin İnşası

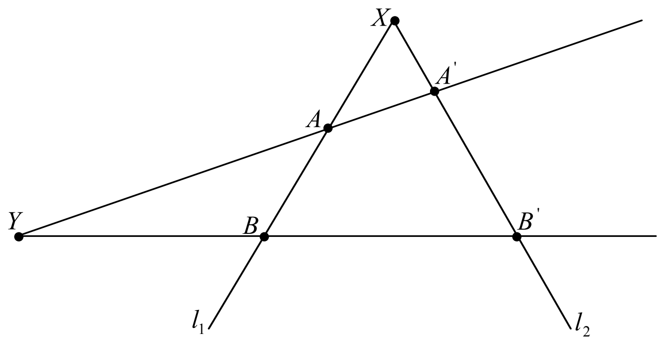
Bu bölümde mertebesi $n=2h$, $h>3$ olan bir projektif düzlemin bir hiperovale göre dış doğrularından oluşan kısmi geometrinin dualinin bir kısmi $B-L$ düzlemi olduğu gösterilecektir. Bunun için Graves' in hiperbolik düzlem aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir. Bir noktanın duali doğru ve bir doğrunun dualinin de nokta olduğu gözönüne alınarak, dış doğrulardan oluşan kısmi geometrinin dualinin doğrularının sayısının $4h^2-1$, noktalarının sayısının da $2h^2-h$ olduğunu söyleyebiliriz. Bir doğru üzerindeki nokta sayısı h iken, bir noktadan geçen doğru sayısı ise $2h+1$ e eşit olduğu açıkca görülür.

Teorem 6.1.1 *Mertebesi $n = 2h$, $h > 3$ olan bir projektif düzlemin bir hiperovale göre dış doğrularından oluşan kısmi geometrinin duali bir kısmi $B - L$ düzlemidir.*

İspat: $A1$) "*Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır*" ifadesinin duali olan "*her noktadan en az iki doğru geçer*" ifadesinin dış doğrulardan oluşan kısmi geometride sağlandığını göstermeliyiz. Bir noktadan h adet dış doğru geçeceğinden ve $h > 3$ verildiğinden bir noktadan geçen en az iki doğrunun varlığı garantilenmiş olur.

$A2$) "*Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir*" ifadesinin duali olan "*farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır*" ifadesinin dış doğrulardan oluşan kısmi geometride sağlandığını göstermeliyiz. Kısmi geometrinin doğruları dış doğrulardan oluşmakta olup bu doğruların atılan hiç bir noktası olmadığından dolayı ve bu doğrular $n = 2h$ mertebeli projektif düzlemin doğruları olacağı için bir tek ortak noktada kesişirler.

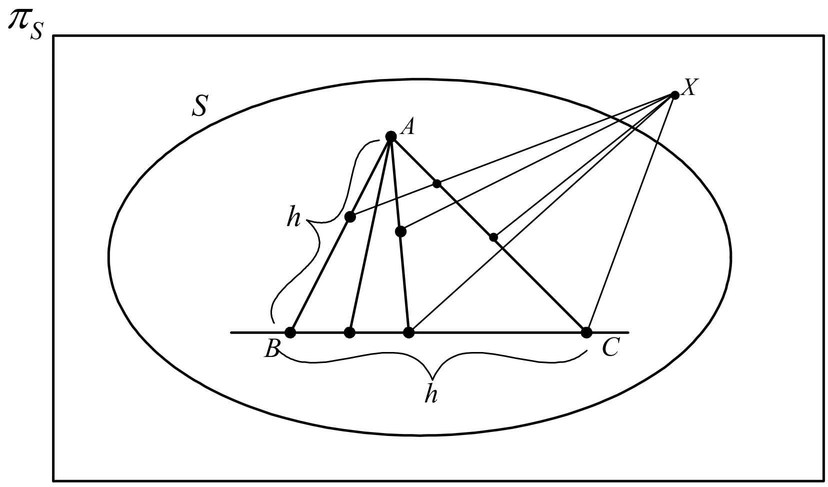
$A3$) "*P düzlemi herhangi üçü doğrudaş olmayan en az dört nokta kapsar*" önermesinin duali olan "*herhangi üçü noktadaş olmayan en az dört doğru vardır*" ifadesinin dış doğrulardan oluşan kısmi geometride sağlandığını göstermeliyiz. $h > 3$ olduğunu gözönüne alırsak bu aksiyomun sağlandığını görebiliriz. Kısmi geometride herhangi iki nokta ve bu noktalardan geçen herhangi iki doğruyu alalım. Bu noktaları sırasıyla A ve A', doğruları da l_1, l_2 olarak adlandıralım. $A \circ l_1$ ve $A' \circ l_2$ olsun. Farklı iki doğru bir noktada kesişir. Bu noktaya $X = l_1 \wedge l_2$ diyelim. Seçilen A ve A'noktarından farklı olmak üzere bu doğrular üzerinde farklı iki nokta düşünelim. $k = 2h+1$ olduğundan böyle noktalar vardır. Bu noktalara B, B' diyelim ve $B \circ l_1$, $B' \circ l_2$ olarak alalım. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden AA', BB' doğruları vardır ve bu doğrular X noktasından farklı bir noktada kesişmek zorundadır.



Şekil 6.2.1

O halde l_1, l_2, AA', BB' herhangi üçü noktadaş olmayan dört doğru olmuş olur.

A4) P nin bir altkümesi doğrudaş olmayan üç nokta ve farklı iki noktasından geçen doğrunun tüm noktalarını kapsasın. Doğrudaş olmayan bu noktalar A, B, C olarak adlandırılsın. A noktasından geçen doğrular gözönüne alınsın. Böyle $2h+1$ adet doğru bulunabilir. Bunların ikisi AB ve AC doğruları olarak adlandırılsın. B ve C bu alt kümeye ait olduğundan BC doğrusunun tüm noktaları hipotezden dolayı bu alt kümeye aittir. BC doğrusu üzerinde h adet nokta vardır. Bu h adet noktayı A noktası ile birleştirirsek bu alt kümenin tüm noktaları bu doğrular üzerindeki noktalar olurlar. A noktası hariç A dan geçen doğrular üzerinde $h-1$ adet nokta vardır. Böylelikle toplam nokta sayısı $h(h-1)+1$ olarak elde edilir.



Şekil 6.1.3

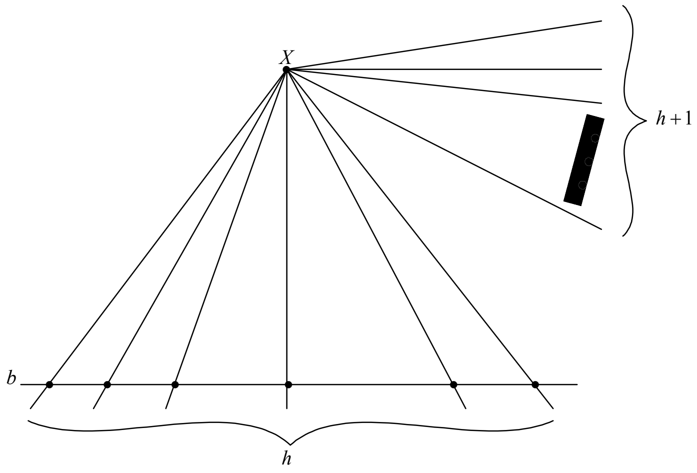
Şimdi de π_s ye ait herhangi bir X noktası gözönüne alınsın. Bu X noktasından $2h{+}1$ adet nokta geçer. Eğer $h(h{-}1){+}1 > 2h{+}1$ olduğu gösterilirse X noktasından geçen bir doğrunun bu altkümenin farklı iki noktasını içerdiği gösterilmiş olunur. Böylelikle hipotezden ötürü X noktası bu alt kümeye ait olur.

$$
\begin{aligned}
h(h-1)+1 \;>\; 2h+1 \;&\Rightarrow\; h^2 - h \;>\; 2h \\
&\Rightarrow\; h^2 - 3h \;>\; 0 \\
&\Rightarrow\; h(h-3) \;>\; 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\; h \;>\; 3 \quad \text{veya} \quad h \;<\; 0 \\
&\Rightarrow\; h \;>\; 3
\end{aligned}
$$

olup bu şart da ilgili aksiyomun sağlandığını gösterir.

$A5)$ X bir b doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. b doğrusu üzerinde h adet nokta olacağından b nin noktalarını X noktasına birleştiren h adet doğru vardır. Bu doğrulardan herbiri X noktası ve b yi kestiği nokta hariç $h-2$ adet noktaya daha sahiptir. Böylelikle X noktası hariç, X noktasından geçen ve b yi kesen doğrular üzerindeki toplam nokta sayısı $h(h-1)$ olur.



Şekil 6.1.4

Düzlemde $2h^2-h$ adet nokta olacağından X, $2h^2-h-1$ nokta ile birleşir.

$$2h^2-h-1-h(h-1) \;=\; h^2-1$$

sayısı kadar kalan nokta X ile birleşerek b ye paralel olan doğruları oluşturur. X den geçen bir doğru üzerinde X hariç $h-1$ nokta olacağından X noktasıdan geçen b ye paralel $h+1$ adet doğru çizilebildiği görülür (Seiden [7]).

6.2 Kısmi B-L Düzleminin Homojenliği

Dezargsel bir projektif düzlemden elde edilen bir kısmi B-L düzleminin Graves anlamında homojen olduğu bunun inşası için kullanılan ovalin, merkezli bir konik olması şartı ile gösterilecektir.

Hiperoval veya dual hiperoval ancak mertebesi $n = 2^m$ biçiminde olan Dezargsel projektif düzlemlerde mevcuttur. Mertebesi çift olup Dezargsel olmayan bir düzlemin hiperoval kapsayıp kapsamadığı bilinmemektedir.

Ayrıca Bose [11] tarafından gösterilmiştir ki, π yukarıdaki anlamda olmak üzere dejenere olmayan bir koniğin $2^m + 1$ noktası,

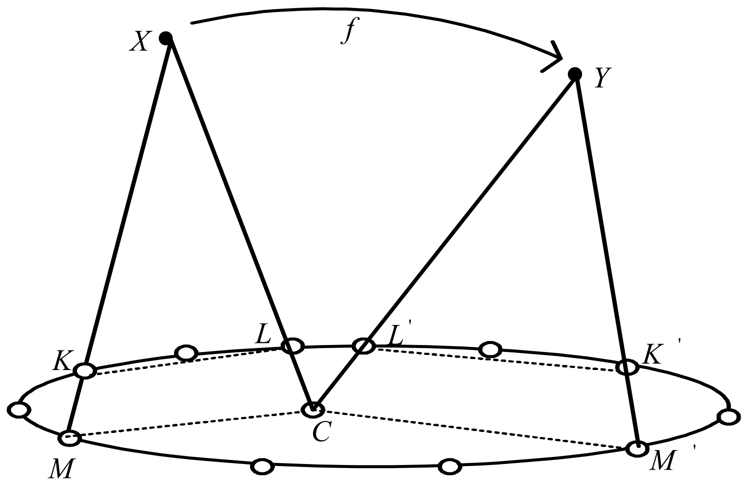
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gxz + hxy = 0$$

denklemi ile verilmişse koniğin merkezi olan hiperovalin 2^m+2. noktası (f, g, h) kordinatları ile belirtilir. Böylece bu konik üç noktası ve merkezi ile tek türlü bellidir.

Burada kullanılan Dezargsel düzlemlerin diğer bir özelliği ise onların kolinasyonlar grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olmalarıdır (Bkz. Teorem 1.3.18).

Ovalin noktalarını invaryant bırakan bir kolinasyon dış doğrular tarafından oluşturulan kısmi düzlemin bir kolinasyonu olacaktır. Böyle bir kolinasyon koniğin üç noktası ve merkezinin teşkil ettiği bir dörtgeni yine aynı özellikteki dörtgene eşleyerek bulunabilir. Koniğin üç noktası $(2^{2m} - 1)2^m$ yolla seçilebileceğinden bu sayı kolinasyon grubunun da mertebesi olacaktır. Buradaki asıl soru bu grubun ovale ait olmayan keyfi bir X noktasını yine ovale ait olmayan keyfi bir Y noktasına eşleyen bir kolinasyonu içerip içermeyeceğidir.

Koniğin merkezi C olarak adlandırılsın. Bunu göstermek için X ve Y noktaları C noktasıyla birleştirilsin. XC ve YC doğruları koniğe ait başka bir noktayı içerir. Bu noktalar da sırasıyla L ve $L^{'}$ olarak adlandırılsın. Sırasıyla X ve Y den geçen iki kesen doğruyu düşünelim ve bu doğruların ovali içeren noktaları sırasıyla K, M ve $K^{'}$, $M^{'}$ olarak adlandırılsın.



Şekil 6.2.1

C, K, M, L noktalarının teşkil ettiği dörtgeni aynı şekilde C, K', M', L' noktalarının teşkil ettiği dörtgene eşleyen kolinasyon X noktasını Y noktasına taşır. Çünkü bu konik üç noktası ve merkezi ile tek türlü belli olduğu için bu kolinasyon atılan yapıyı değişmez bırakır (Seiden [7]).

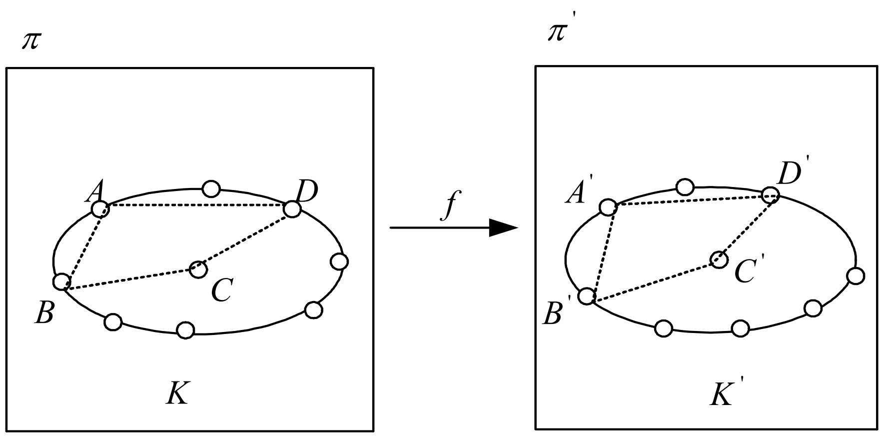
O halde $n = 2^m$ mertebeli Dezargsel bir π projektif düzleminin $n+2$ noktalı ovalinin atılması ile elde edilen dış doğrulardan oluşan kısmi düzlemin duali olan Seiden kısmi düzlemi sonlu bir homojen hiperbolik düzlem modelidir.

6.3 π_{n+2} nin Homojenliği

Bölüm 6.2 de gösterdiğimiz Seiden kısmi $B-L$ düzlemi modelinde geçişkenlik noktalar üzerinde değil de doğrular üzerinde görünmektedir. *Doğrusal geçişken bir lineer uzay aynı zamanda noktasal geçişkendir. Fakat bunun tersi doğru değildir* (Batten [12]). Seiden kısmi $B-L$ düzlemi modelinin homojenliğini kullanarak π_{n+2} nin homojenliğini göstereceğiz.

π mertebesi $n \geq 8$ ve çift olan Dezargsel bir projektif düzlem ve K, π nin bir dual hiperovali olsun. Bu taktirde $\pi\backslash K = \pi_{n+2}$ nin $(\frac{n}{2}, n+1)-$regüler hiperbolik düzlem olduğu gösterildi (Bkz. Teorem 5.1.1). Diğer taraftan Q, hiperovalin tüm kesenleri ile birlikte teşkil ettiği küme olmak üzere π den Q kümesi atılıp kalan kısmın duali alındığında $(\frac{n}{2}, n+1)-$regüler hiperbolik düzlemi elde edilmektedir. (Bkz. Teorem 6.1.1). Bu düzlemin Graves anlamında homojenliği de Bölüm 6.2 de ispatlandı. Eğer bu düzlemi $(\pi\backslash Q)^* = \pi^*\backslash Q^*$ olarak gösterirsek $\pi_{n+2} \cong \pi^*\backslash Q^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece π_{n+2} de Graves anlamında homojen olmuş olacaktır.

Yani kısaca π nin K ve K' dual hiperovallerine karşılık gelen $\pi\backslash K$ ve $\pi\backslash K'$ hiperbolik düzlemlerinin izomorf olduğu gösterilmelidir. π ve π' izomorf olmak üzere $\pi\backslash K \cong \pi'\backslash K'$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f(K) = K'$ olacak şekilde bir $f : \pi \to \pi'$ izomorfizmi var ise bu münkündür. (Kolaylık olması açısından doğruları noktalar olarak düşünürsek Şekil 6.3.1 deki gibi resmedebiliriz.)



Şekil 6.3.1

K ve K'; $ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gxz + hxy = 0$ ikinci derece denklemi ile temsil edilebildiğinden üç noktası ve merkeziyle birlikte tek türlü belli olacağı biliniyor.

Böylelikle $f : ABCD \longmapsto A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ olacak şekilde bir izomorfizm bulunabileceğinden $\pi \backslash K \cong \pi^{'} \backslash K^{'}$ olduğu söylenebilir.

O halde $n = 2^m$, $n \geq 8$ ve π Dezargsel ise π_{n+2} hiperbolik düzlemi Graves anlamında homojendir.

Bölüm 7

SONLU HİPERBOLİK UZAYLAR

Teorem 7.0.1 *$S = (P,\ L,\ \circ)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif 3-uzay, D de S nin aşağıdaki şartları sağlayan projektif düzlemlerinin bir kümesi olsun.*

C) *S nin D ye ait olmayan her projektif düzlemi D nin düzlemlerini en az noktadaş olmayan üç doğru boyunca keser. P_1 ve L_1 sırasıyla D nin düzlemlerine ait tüm nokta ve doğrular cümlesi olsunlar. Bu durumda $|D| = d$ olmak üzere eğer*

$$4 \leq d \leq n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5})$$

ise

$$S_D = (P \setminus P_1,\ L \setminus L_1,\ \circ \cap (P \setminus P_1) \times (L \setminus L_1))$$

geometrik yapısı sonlu bir hiperbolik 3-uzaydır.

İspat: **C)** şartının D nin hepsi noktadaş olmayan dört düzlem kapsamasını gerektirdiği aşikardır. Bu nedenle $d \geq 4$ olmalıdır.

S_D nin 2-boyutlu her altuzayı Teorem 4.3.4 ün hipotezlerini sağladığından sonlu bir hiperbolik düzlemdir. Böylece herbir hiperdüzlemi hiperbolik düzlem olan S_D lineer uzayı sonlu bir hiperbolik $3-$uzaydır (Olgun-Özgür [4]).

S_D nin herbir noktasından geçen toplam doğru sayısı $n^2 + n + 1$ olduğu halde herbir doğrusu üzerinde eşit sayıda nokta bulunmak zorunda olmadığından S_D sonlu hiperbolik 3-uzayı regüler değildir.

Önerme 4.3.4 de m için verilen üst sınır gerekli olmayan bir yeter şarttır. Çünkü bu sınır, atılan doğruların herhangi üçünün noktadaş olmaması pozisyonunda, düzlemin mertebesinin tek olması halinde $n+1$ e; mertebesinin çift olması durumunda da $n + 2$ ye kadar çıkabilmektedir.

7.1 Bir Projektif $3-$Uzaydan Elde Edilen bir Hiperbolik $3-$Uzayın Aynı Parametreli Hiperbolik Düzlemlerinin İzomorfluğu

Teorem 7.1.1 *π bir projektif düzlem, l de π de bir doğru olsun . Bu durumda $\pi \setminus l$ bir afin düzlemdir. (Burada sözü edilen $\pi \setminus l$ afin düzlemi, π projektif düzleminden bir l doğrusu ve bu doğrunun üzerindeki tüm noktalar atılarak elde edilen yapıdır.).*

İspat: $\pi \setminus l$ yapısının afin düzlem aksiyomlarını sağladığını göstermeliyiz.

$A1)$ π projektif düzlem olup farklı iki noktasından bir tek doğru geçeceğinden ve $\pi \setminus l$ nin noktaları π nin l doğrusu atılınca kalan noktaları olduğundan, $\pi \setminus l$ nin farklı iki noktasından bir tek doğru geçer.

$A2)$ π projektif düzlem olup herhangi üçü aynı doğru üzerinde bulunmayan dört nokta kapsadığından $\pi \setminus l$ nin bir üçgen kapsayacağı aşikardır.

$A3)$ l', $\pi \setminus l$ nin herhangi bir doğrusu olsun. $P \not\in l$ olacak şekilde $\pi \setminus l$ nin bir noktasını alalım. Eğer π de $l \wedge l' = Q$ ise $\pi \setminus l$ de P noktasından geçen ve $l^{'}$ doğrusuna paralel tek doğru $PQ \setminus Q$ dur. Böylece bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizimiş olur.

l ve $l^{'}$, π projektif düzleminin herhangi iki doğrusu olmak üzere "$\pi \setminus l$ *ve* $\pi \setminus l^{'}$ *afin düzlemlerinin ne zaman izomorf olduğu sorusuna*" Teorem 7.1.2 de cevap verilecektir.

Teorem 7.1.2 *π^l ve $\pi^{'l^{'}}$ iki afin düzleminin izomorf olabilmesi için gerek ve yeter şart π projektif düzleminden $\pi^{'}$ projektif düzlemine $\alpha(l) = l^{'}$ olacak şekilde bir α izomorfiziminin varolmasıdır (l ve $l^{'}$ sırasıyla π ve $\pi^{'}$projektif düzlemlerinin doğruları olmak üzere, $\pi^l = \pi \setminus \{l\}$ ve $\pi^{'l^{'}} = \pi^{'} \setminus \{l^{'}\}$ dir.).*

İspat: $(\Rightarrow)$

$$\theta : \pi^l \to \pi^{'l^{'}}$$

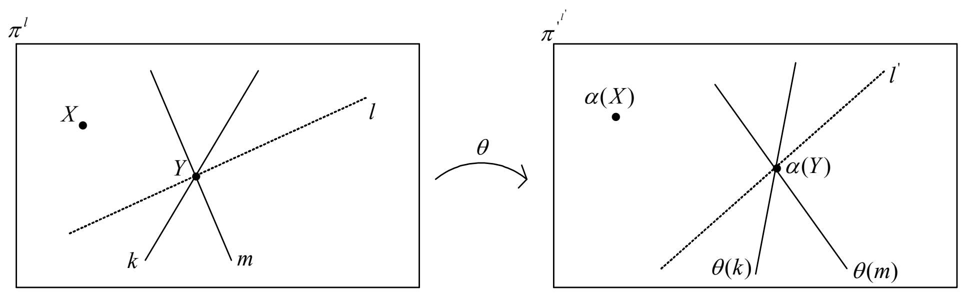
bir izomorfizm olsun. O halde θ birebir, örten bir fonksiyondur ve üzerinde bulunma bağıntısını korur.

$$X \not\circ l \text{ için } \alpha(X) = \theta(X)$$

ve

$$Y \circ l,\ Y \circ m \text{ için } \alpha(Y) = \theta(m) \cap l^{'}$$

olacak şekilde α fonksiyonunu tanımlayalım.



Şekil 7.1.1

π nin doğrular kümesinin üzerindeki bütün $h \neq l$ olacak şekildeki h doğruları $\alpha(h) = \theta(h)$ ile verilmiştir ve buradan $\alpha(l) = l'$ elde edilir.

α nın bir izomorfizm olduğunu göstermek için l üzerindeki Y için $\alpha(Y)$ nin m in seçiminden bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} Y \circ l,\, Y \circ m \text{ için} \quad \alpha(Y) &= \theta(m) \cap l' \\ Y \circ l,\, Y \circ k \text{ için} \quad \alpha(Y) &= \theta(k) \cap l' \end{aligned}$$

θ izomorfizm olduğundan $m \parallel k$ için $\theta(m) \parallel \theta(k)$ dır. Yani θ paralelliği korur. O halde l üzerindeki Y için $\alpha(Y)$, m in seçiminden bağımsızdır. Böylece α bir izomorfizmdir.

($\Leftarrow$)

$$\alpha : \pi \to \pi', \; \alpha(l) = l'$$

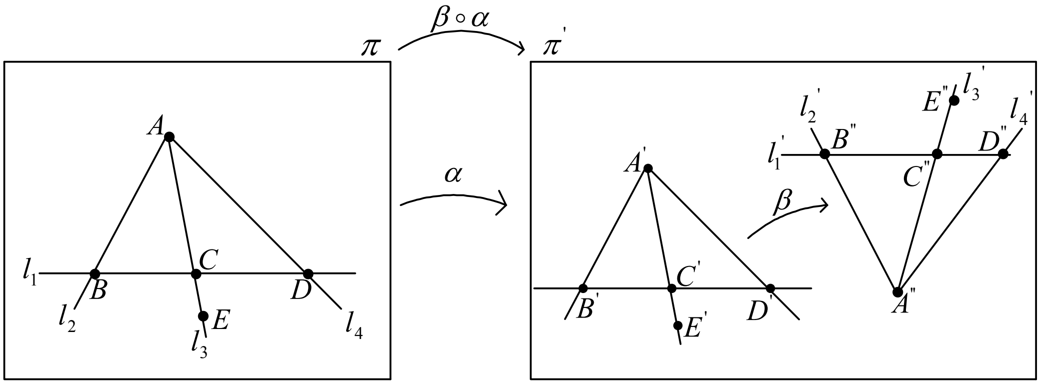
olacak şekilde bir izomorfizm olsun. Açıktır ki, α; π^l den $\pi'^{l'}$ ye birebir ve örten bir dönüşümdür. $\alpha : \pi \to \pi'$ izomorfizm olup üzerinde bulunmayı da korur. O halde $\pi^l \cong \pi'^{l'}$ dir [13].

$PG(3, n)$ den elde edilen bir hiperbolik 3-uzayın "*hiperbolik düzlemlerinin ne zaman izomorf olacakları*" sorusunun cevabını Teorem 7.1.2 yi kullanarak vereceğiz.

$PG(3, n)$ den bir dörtyüzlü atılması ($d = 4$ özel hali) sözkonusu iken oluşan hiperbolik 3-uzayın farklı hiperbolik düzlemlerinin durumlarını inceleyelim.

Teorem 7.1.3 *$PG(3, n)$ den herhangi bir dörtyüzlünün atılması halinde elde edilen hiperbolik $3-$uzayın aynı parametreli hiperbolik düzlemleri izomorftur.*

i) Dörtyüzlünün bir köşe noktasından geçen farklı iki hiperbolik düzlemin atılan doğruları Şekil 7.1.2 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 7.1.2

Projektif 3−uzayın bütün düzlemleri Dezargseldir (Bkz. Teorem 1.3.23). O halde $PG(3,n)$ ın tüm düzlemleri izomorfturlar. Bu durumda, $PG(3,n)$ ın herhangi π ve $\pi^{'}$ projektif düzlemleri için bir

$$\begin{array}{rcl} \alpha \ : & \pi & \rightarrow & \pi^{'} \\ & A,B,D,E & \longmapsto & A^{'},B^{'},D^{'},E^{'} \end{array}$$

izomorfizmi vardır. Düzlem Dezargsel olduğundan kolinasyonlar grubu dörtgenler üzerinde geçişkendir (Bkz. Teorem 1.3.18). O halde,

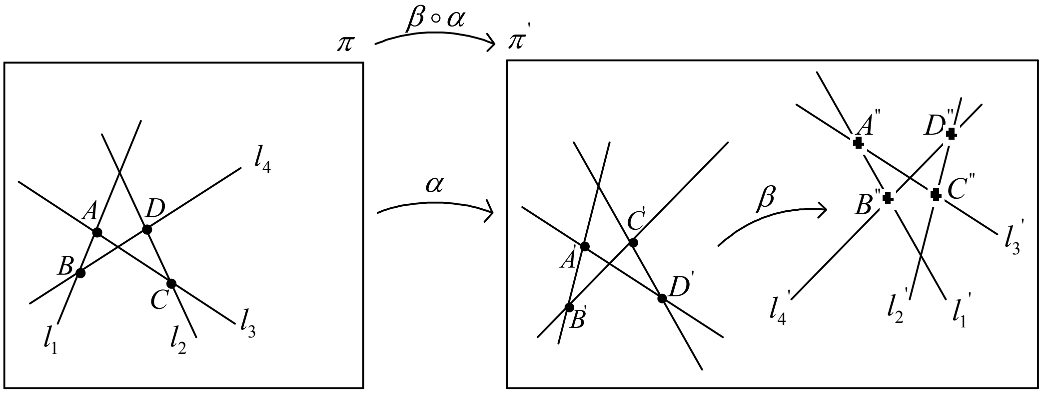
$$\begin{array}{rcl} \beta \ : & \pi^{'} & \rightarrow & \pi^{'} \\ & A^{'},B^{'},D^{'},E^{'} & \longmapsto & A^{''},B^{''},D^{''},E^{''} \end{array}$$

kolinasyonu vardır. Böylece $(\beta \circ \alpha)(l_i) = l_i^{'}$, $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ olacak şekilde

$$\begin{array}{rcl} \beta \circ \alpha \ : & \pi & \rightarrow & \pi^{'} \\ & A,B,D,E & \longmapsto & A^{''},B^{''},D^{''},E^{''} \end{array}$$

izomorfizmi elde edilir. Teorem 7.1.2 den dolayı da dörtyüzlünün bir köşe noktasından geçen aynı parametreli farklı iki hiperbolik düzlem izomorf olur.

ii) Dörtyüzlünün hiçbir ayrıt veya köşe noktasından geçmemesi halinde oluşan farklı iki hiperbolik düzlemin atılan doğruları Şekil 7.1.3 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 7.1.3

Aynı şekilde $PG(3, n)$ ın bütün düzlemlerinin Dezargselliğinden ve birbirlerine izomorfluğundan bir

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & \pi & \rightarrow & \pi' \\ & A, B, C, D & \longmapsto & A', B', C', D' \end{array}$$

izomorfizmi vardır. Düzlem Dezargsel olduğundan kolinasyonlar grubu dörtgenler üzerinde geçişkendir (Bkz. Teorem 1.3.18). O halde,

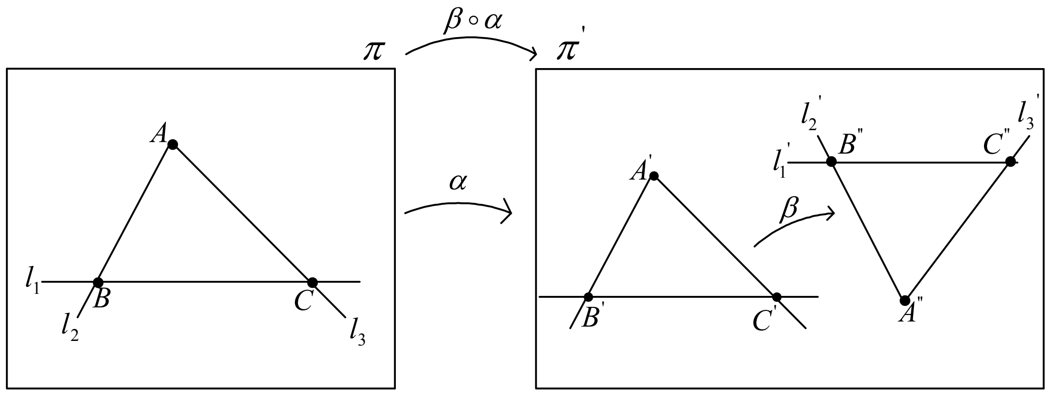
$$\begin{array}{cccc} \beta : & \pi' & \rightarrow & \pi' \\ & A', B', C', D' & \longmapsto & A'', B'', C'', D'' \end{array}$$

kolinasyonu vardır. Böylece $(\beta \circ \alpha)(l_i) = l_i'$, $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ olacak şekilde

$$\begin{array}{cccc} \beta \circ \alpha : & \pi & \rightarrow & \pi' \\ & A, B, C, D & \longmapsto & A'', B'', C'', D'' \end{array}$$

izomorfizmi elde edilir. Teorem 7.1.2 den dolayı da dörtyüzlünün bir ayrıt veya köşe noktasından geçmemesi halinde oluşan aynı parametreli farklı iki hiperbolik düzlem izomorf olur.

iii) Dörtyüzlünün bir ayrıtından geçen farklı iki hiperbolik düzlemin atılan doğruları Şekil 7.1.4 deki gibi resmedilebilir.



Şekil 7.1.4

Projektif 3−uzayın bütün düzlemleri Dezargseldir (Bkz. Teorem 1.3.23). $PG(3,n)$ ın tüm düzlemleri izomorftur. Bu durumda, $PG(3,n)$ ın herhangi π ve π' projektif düzlemleri için bir

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \pi & \longrightarrow & \pi' \\ & A,B,C & \longmapsto & A',B',C' \end{array}$$

izomorfizmi vardır. Düzlem Dezargsel olduğundan kolinasyonlar grubu dörtgenler üzerinde geçişkendir (Bkz. Teorem 1.3.18). O halde üç nokta üzerinde de geçişken olacağından

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \pi' & \longrightarrow & \pi' \\ & A',B',C' & \longmapsto & A'',B'',C'' \end{array}$$

kolinasyonu vardır. Böylece $(\beta\circ\alpha)(l_i) = l_i'$, $(i = 1,\ 2,\ 3)$ olacak şekilde

$$\begin{array}{rccc} \beta\circ\alpha : & \pi & \longrightarrow & \pi' \\ & A,B,C & \longmapsto & A'',B'',C'' \end{array}$$

izomorfizmi elde edilir. Teorem 7.1.2 den dolayı da dörtyüzlünün bir ayrıtından geçen aynı parametreli farklı iki hiperbolik düzlem izomorf olur.

Kaynaklar

[1] Bumcrot,R.J.,(1971)., "Finite Hyperbolic Spaces", Atti Convegno. Geom. Comb. esue Appl, pp. 113-130.

[2] Kaya, R.,(2005)., *Projektif Geometri,* Osmangazi Üniversitesi Yayınları.

[3] Graves,L.M,(1962)., "A Finite Bolyai-Lobachevsky Plane", Amer. Math. Monthly, Vol. 69, pp. 130-132.

[4] Olgun, Ş.-Özgür, İ.(1994)., "On some Finite Hyperbolic 3-spaces", Tr. J. of Mathematics, Vol. 18, pp. 263-271.

[5] Sandler, R.,(1963)., "Finite Homogeneous Bolyai-Lobachevsky Plane", Amer. Math. Monthly, Vol. 70, pp. 853-855.

[6] Ostrom, T.G.,(1962)., "Ovals and Finite Bolyai-Lobachevsky Plane", Amer. Math. Monthly, Vol. 69, pp. 899-901.

[7] Seiden, E.,(1966)., "On a Method of Construction of Partial Geometries and Partial Bolyai-Lobachevsky Plane", Amer. Math. Monthly, Vol 73, pp.158-161.

[8] Kaya, R.-Özcan, E.,(1982)., "On The Construction of Bolyai-Lobachevsky Planes from Projective Planes", Rendiconti del seminario Matematico Di Brescia, Vol. 7, pp. 427-434.

[9] OLGUN, Ş.,(1991)., "A Note on some Finite Hyperbolic Planes", Journal of Sci. and Arts of Gazi Üniv., Vol. 3, pp 31-36.

[10] SEGRE, B.,(1955)., "Ovals in a Finite Projective Plane", Canad. J. Math., pp. 414-416.

[11] BOSE, R.C.,(1963)., "Strongly Regular Graps, Partial Geometries and Partially Balanced Designs", Pasific J. Math,.Vol 13, pp. 389-419.

[12] BATTEN, L.M., *The Theory of Finite Lineer Spaces.*

[13] HUGHES, D.R.-PIPER, F.C.(1973)., *Projective Planes,* Springer-Verlag, New York.