FUZZY METRİK UZAYLARI

Vijdan FIRINCIOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2009

FUZZY METRIC SPACES

Vijdan FIRINCIOĞLU

Department of Mathematics

MASTER OF SCIENCE DISSERTATION

2009

FUZZY METRİK UZAYLARI

Vijdan FIRINCIOĞLU

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Haziran 2009

ONAY

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Vijdan FIRINCIOĞLU ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " **FUZZY METRİK UZAYLARI**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

İkinci Danışman:

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Yrd.Doç. Dr.Ummahan EGE ARSLAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Enver USLU

Üye: Yrd.Doç. Dr.İ.İlker AKÇA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Fuzzy metrik uzayları üzerine hazırlanmış bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde kısa bir giriş verilmiştir.

İkinci bölümde Sushil Sharma [50] makalesinde verilen fuzzy metrik uzayında genel sabit nokta teoremi ve bu teoremin fuzzy 2 ve 3- metrik uzaylarına genişletilmişi incelenmiştir. Bu teorem Fisher [12] nin sonucunun fuzzy metrik uzayları için bir genişlemesidir.

Üçüncü bölümde Valentin Gregori ve Almanzor Sapena [22] nın makalesinde verilen Fuzzy metrik uzaylarında sabit nokta sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Sushil Sharma [51] makalesinde verilen büzülme dönüşümü kavramı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy uzayı, Fuzzy topoloji, Fuzzy metrik uzayı, Sabit nokta

SUMMARY

This thesis based on Fuzzy metric spaces consist of four chapters.

In the first chapter, we give a short introduction.

In the second chapter, we studied the results of the paper by Sushil Sharma [50] entitled “On fuzzy metric spaces.”

In the third chapter, we studied the results of the paper by Valentin Gregori ve Almanzor Sapena [22] entitled “On fixed-points theorems in fuzzy metric spaces.”

In the fourth chapter, we studied the results of the paper by Sushil Sharma [51] entitled “Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces.’

Keywords: Fuzzy space, Fuzzy topology, Fuzzy metric space, Fixed point

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten değerli hocalarım Prof.Dr. Mahmut Koçak ve Prof.Dr. Zekeriya Arvasi ye, bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Pfof. DR. Mahmut KOÇAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fuzzy küme kavramı 1965 yılında Zadeh [55] tarafından verildi. O günden sonra birçok araştırmacı fuzzy küme teorisi ve uygulamaları hakkında çalışmaktadır. Fuzzy metrik uzay kavramıda Deng [9], Erceg [12], Kaleva ve Seikkala [34], Kramosil ve Michalek [36] tarafından değişik şekillerde tanımlanmıştır. Yakın zamanda bir çok araştırmacı fuzzy metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerini ve fuzzy dönüşümlarini çalışmışlardır. Örneğin [1], [6], [13], [20], [23], [30], [29], [38] makaleleri fuzzy metrik uzaylarda fuzzy sabit nokta teormleri ile alakalı ve [3], [4], [5], [7], [26], [37] çalışmalarıda fuzzy dönüşümleri ile alakalıdır. Fuzzy topolojisinde metrik uzay kavramına farklı açılardan bakılmaktadır. Bunlar iki grupta toplanabilir.

Birinci gurupta fuzzy metrik olarak, $X \subset I^x$ yada $X =$bir kümenin bütün fuzzy noktaları olmak üzere metrik aksiyomlarına benzer aksiyomları sağlayan bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu olarak bakılmaktadır, [12],[3]. Bu yolla fuzzy nesneleri arasında sayısal bir bağ sağlanmaktadır.

İkinci grup sonuçları ise nesneleri arasındaki uzaklığın fuzzy olduğu, nesnelerin ise kendi kendilerine fuzzy olup olmayabileceği durum olarak ifade edebiliriz. Bu doğrultudaki en ilginç referanslar [11], [34], [35] tür. Gähler bir dizi makalede örneğin [15], [16], [17] makalelerinde 2-metrik uzayları araştırmıştır.

Sharma, Sharma ve Iseki [49], 2-metrik uzaylarda büzülme tipi dönüşümler için ilk çalışmaları yapmışlardır. Yakın zamanda Wenzhi [54] ve birçok başka araştırmacı, olasılıksal 2-metrik uzaylar (yada 2-PM uzayları) üzerine çalışmaktadır. 2-metrik uzay, soyut özellikleri Öklid uzaylarında alan fonksiyonu ile belirtilen, bir X kümesi üzerinde bir nokta üçlüsünün reel değerli fonksiyonudur. Hacim fonksiyonu ile belirtilebilecek olan 3-metrik kavramı doğal bir beklenti olmaktadır. Bunu ifade eden metod doğal olarak 2-metrik uzay teorisinden farklıdır. Burada, cebirsel topolojideki simplex teorisinin kullanılması zorunludur.

Fuzzy metrik uzaylarında büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisi, Menger tipi olasılıksal metrik uzaylarındaki aynı tip dönüşümler için sabit nokta teorisi ile yakından alakalıdır ([53], [45],[24],[39],[41]). Yukarıda değinildiği gibi fuzzy metrik uzay kavramı bir çok araştırmacı tarafından değişik yollarla verilmektedir [9],[12], [34]. [18],[19]. nolu referanslarda George ve Veeramani, Kramosil ve Michalek tarafından verilen ([36]) fuzzy metrik uzay kavramını değiştirdiler ve bu tarz fuzzy metrik uzaylar için bir Hausdorff Topolojisi elde ettiler. Yakın zamanda, George ve Veeramani tarzındaki bir fuzzy metrik uzayının ürettiği bu topolojinin gerçekten metriklenebilir olduğu [21] nolu referansta ispatlandı. Bu makalenin amacı, Banach sabit nokta teoremini, birkaç yolla tam fuzzy metrik uzayları üzerindeki (fuzzy) büzülme dönüşümlerine genişletmektir.

Grabiec [20], Kramosil ve Michalek [36] i takip ederek Banach büzülme ilkesinin fuzzy versiyonunu elde etti. Bununla birlikte, Kramosil ve Michalek [36] in fuzzy metrik uzayları üzerine yaptıkları çalışmanın sabit nokta teoremleri sahasında özelliklede büzülme tipindeki dönüşüm çalışmaları için bir düzgünleştirme mekanizması geliştirmeye yol açtığını göstermiştir.

Fang [13] fuzzy metrik uzaylarında bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır. Bu ispatlar, Banach [2], Edelstein [10], Istratescu [28], Sehgal ve Bharucha-Reid [46] in bazı temel sonuçlarını geliştiren, genelleyen, bütünleştiren ve genişleten ispatlardır.

Sessa [47], zayıf değişmelilik diye adlandırılan, değişmeliliğin bir genellemesini tanımlamıştır. İlaveten, Jungck [32] uygunluk olarak adlandırılan daha da genelleştirilmiş değişmeliliği vermiştir. Mishra et.al. [38] fuzzy metrik uzayları üzerinde uyumlu dönüşümler için ortak sabit nokta teoremlerini elde etmişlerdir.

Yakın zamanda Jungck et.al. [33] metrik uzaylarda (α) tipinde uyumlu dönüşümler kavramını ortaya çıkardılar. Bu kavram, metrik uzaylarda ispatlanmış ortak sabit nokta teoremleri ve bazı koşullar altındaki uyumlu dönüşüm kavramına denktir. Cho [8] fuzzy metrik uzaylarındaki (α) tipinde uyumlu dönüşümler kavramını ortaya çıkardı.

Fuzzy metrik uzaylarında sabit nokta teorisi ile ilgi çekici referanslar [13],[30],[29], [20], [23], [1], [6], [38], [50] ve fuzzy dönüşümleri [3], [37],[4], [5], [7], [38] dır.

BÖLÜM 2

Fuzy Metrik Uzayları Üzerine

Tanım 2.1 (Schweizer ve Sklar [44]) $([0,1], *)$ birimi 1 olan abelyen bir topolojik monoid ve $a \leq c$, $b \leq d$ özelliğindeki her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a * b \leq c * d$ ise $* : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine sürekli bir t-norm denir.

Örnek 2.1 $a * b = ab$ ve $a * b = \min\{a, b\}$ birer t-normdur.

Tanım 2.2 (Kramosil ve Michalek [36]) Eğer X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M ise $X^2 \times [0, \infty)$ üzerinde her $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fuzzy kümesi ise $(X, M, *)$ sıralı 3-lüsüne bir fuzzy metrik uzayı (kısaca FM-uzayı) denir.

(FM-1). $M(x, y, 0) = 0$,

(FM-2). Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ dir,

(FM-3). $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(FM-4). $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

(FM-5). $M(x, y, .) : [0, 1) \rightarrow [0, 1]$ sol süreklidir.

Bundan sonra $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzayını gösterecektir. $M(x, y, t)$ değerini x ile y arasında t ye göre yakınlık derecesi olarak düşünülebilir. Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1$ ile $x = y$ ve ∞ ile $M(x, y, t) = 0$ aynı anlama gelmektedir.

Aşağıdaki örnek her metriğin aslında bir fuzzy metrik olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.2 [18] (X, d) bir metrik uzay olsun. $a * b = ab$ (yada $a * b = \min\{a, b\}$) ve her $x, y \in X$, $t > 0$ için

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \tag{2.1}$$

tanımlarını yapalım. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır. d metriği ile üretilen bu M fuzzy metriği standart fuzzy metrik olarak adlandırılır. Diğer yandan X üzerinde (2.1] yı sağlayan hiç metrik yoktur.

Yardımcı Teorem 2.3 [20] Her $x, y \in M$ için $M(x, y, .)$ azalmayandır.

Tanım 2.4 [20] $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun:

(1) $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere, eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$$

ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

(2) $\{x_n\}$ X de bir dizi olmak üzere, eğer her $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

(3) Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu fuzzy metrik uzaya tamdır denir.

Uyarı 2.5 $*$ sürekli olduğundan, (FM-4) gereğince bir FM-uzayında bir dizinin limiti tektir.

$(X, M, *)$ aşağıdaki koşulu sağlayan bir fuzzy metrik uzay olsun.

(FM-6). Her $x, y \in X$ için $\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$

Yardımcı Teorem 2.6 [8]$\{y_n\}$, (FM-6) koşulunu sağlayan $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $t > 0$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$M(y_{n+2}, y_{n+1}, qt) \geq M(y_{n+1}, y_n, t) \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $q \in (0, 1)$ sayısı varsa $\{y_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

İspat. $t > 0$ ve $q \in (0, 1)$ için

$$M(y_2, y_3, qt) \geq M(y_1, y_2, t) \geq M(y_0, y_1, t/q)$$

yada

$$M(y_2, y_3, t) \geq M(y_0, y_1, t/q^2)$$

dir.

(2.2) [20] koşuluyla basit bir tümevarım uygulanırsa her $t > 0$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$M\left(y_{n+1}, y_{n+2,} t\right) \geq M\left(y_1, y_2, t/q^n\right) \tag{2.3}$$

olur. Böylece (2.3) ve (FM-4) gereğince herhangi bir p pozitif tamsayısı $t > 0$ reel sayısı için

$$\begin{aligned} M(y_n, y_{n-p}, t) &\geq M(y_n, y_{n+1}, t/p) * \overset{p \text{ defa}}{\cdots\cdots} * M(y_{n+p-1}, y_{n+p}, t/p) \\ &\geq M(y_1, y_2, t/pq^{n-1}) * \overset{p \text{ defa}}{\cdots\cdots} * M(y_1, y_2, t/pq^{n+p-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, (FM-6) gereğince

$$\lim_{n\to\infty} MM(y_n, y_{n+p}, t) \geq 1 * \overset{p \text{ defa}}{\cdots\cdots} * 1 \geq 1$$

olur. Bu da $\{y_n\}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olmasını gerekir. □

Yardımcı Teorem 2.7 [38] Her $x, y \in X$, $t > 0$ ve bir $q \in (0, 1)$ sayısı için $M(x, y, qt) \geq M(x, y, t)$ oluyorsa bu durumda $x = y$ dir.

Tanım 2.8 $x_n \to x$, $y_n \to y$ olduğunda her $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, y_n, t\right) = M\left(x, y, t\right)$$

oluyorsa M fonksiyonuna süreklidir denir.

Tanım 2.9 X fuzzy metrik uzayı üzerinde A ve S iki dönüşüm olsun. Her $u \in X$ ve $t > 0$ için

$$M\left(ASu, SAu, t\right) \geq M\left(Au, Su, t\right)$$

oluyorsa A ve S dönüşümlerine zayıf değişmelidir denir.

Tanım 2.10 $* : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ bir ikili işlem ve $([0, 1], *)$ ikilisi birimi 1 olan abelyen topolojik bir monoid olsun. $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$ özelliğindeki her a_1, a_2, b_1, b_2 ve $c_1, c_2 \in [0, 1]$ için

$$a_1 * b_1 * c_1 \leq a_2 * b_2 * c_2$$

oluyorsa $* : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ ikili işlemine sürekli bir t-norm denir.

Tanım 2.11 X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M ise $X^3 \times [0, \infty)$ üzerinde bir fuzzy kümesi olsun. Her $x, y, z, u \in X$ ve $t_1, t_2, t_3 > 0$ için aşağıdaki koşulları sağlanıyorsa $(X, M, *)$ sıralı 3-lüsüne bir fuzzy 2-metrik uzay denir.

(FM$'$-1). $M(x,y,z,0)=0$,

(FM$'$-2). Üç noktanın en az ikisi eşit ve $t>0$ olduğunda $M(x,y,z,t)=1$ dir.

(FM$'$-3). $M(x,y,z,t)=M(x,z,y,t)=M(y,z,x,t)$, (üç değişkene göre simetri)

(FM$'$-4). $M(x,y,z,t_1+t_2+t_3)\geq M(x,y,u,t_1)*M(x,u,z,t_2)*M(u,y,z,t_3)$ (Bu özellik 2-metrik uzaylarda dörtyüzlü eşitsizliği)

$M(x,y,z,t)$ fonksiyon değeri, üçgenin alanının t den küçük olma olasılığı olarak düşünülebilir.

(FM$'$-5). $M(x,y,z,\cdot):[0,1)\to[0,1]$ sol süreklidir.

Tanım 2.12 $(X,M,*)$ bir fuzzy 2-metrik uzay olsun:

(1) Eğer her $a\in X$ ve $t>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n,x,a,t\right)=1$$

ise X fuzzy 2-metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisine $x\in X$ noktasına yakınsar denir.

(2) Eğer her $a\in X$ ve $t>0$, $p>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p},x_n,a,t\right)=1$$

ise X fuzzy 2-metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(3) Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy 2-metrik uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.13 Her $a\in X$ ve $t>0$ için $x_n\to x$, $y_n\to y$ olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n,y_n,a,t\right)=M\left(x,y,a,t\right)$$

oluyorsa M fonksiyonuna fuzzy 2-metrik uzayda süreklidir denir.

Tanım 2.14 X fuzzy 2-metrik uzayı üzerinde A ve S iki dönüşüm olsun. her $u,a\in X$ ve $t>0$ için

$$M\left(ASu,SAu,a,t\right)\geq M\left(Au,Su,a,t\right)$$

oluyorsa A ve S ye zayıf değişmeli denir.

Tanım 2.15 $([0,1],*)$ ikilisi birimi 1 olan abelyen bir topolojik monoid olmak üzere $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$ ve $d_1 \leq d_2$ özelliğindeki her $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ve $d_1, d_2 \in [0,1]$ için

$$a_1 * b_1 * c_1 * d_1 \leq a_2 * b_2 * c_2 * d_2$$

oluyorsa $* : [0,1]^4 \to [0,1]$ ikili işlemine sürekli bir t-norm denir.

Tanım 2.16 X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M ise $X^4 \times [0,\infty)$ üzerinde her $x, y, z, w,\ u \in X$ ve $t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fuzzy kümesi ise $(X, M, *)$ sıralı 3-lüsüne bir fuzzy 3-metrik uzay denir.

(FM″-1). $M(x,y,z,w,0) = 0$,

(FM″-2). Her $t > 0$ için $M(x,y,z,w,t) = 1$ dir (Sadece $< x,y,z,w >$ üç simplex i bozulduğunda),

(FM″-3). $M(x,y,z,w,t) = M(x,w,z,y,t) = M(y,z,w,x,t) = M(z,w,x,y,t) = \cdots$ (üç değişkene göre simetri),

(FM″-4). $M(x,y,z,w,t_1+t_2+t_3+t_4) \geq M(x,y,z,u,t_1) * M(x,y,u,w,t_2) * M(x,u,z,w,t_3) * M(u,y,z,w,t_4)$,

(FM″-5) $M(x,y,z,w,\cdot) : [0,1) \to [0,1]$ sol süreklidir.

Tanım 2.17 $(X, M, *)$ bir fuzzy 3-metrik uzay olsun:

(1) Eğer her $a, b \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, a, b, t) = 1$$

ise X fuzzy 3-metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsar denir.

(2) Eğer her $a, b \in X$ ve $t > 0$, $p > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, a, b, t) = 1$$

ise X fuzzy 3-metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisidir denir.

(3) Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy 3-metrik uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.18 her $a, b \in X$ ve $t > 0$ için $x_n \to x$, $y_n \to y$ olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, a, b, t) = M(x, y, a, b, t)$$

oluyorsa M fonksiyonuna süreklidir denir.

Tanım 2.19 X fuzzy 2-metrik uzayı üzerinde A ve S iki dönüşüm olsun. $u, a, b \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(ASu, SAu, a, b, t) \geq M(Au, Su, a, b, t)$$

oluyorsa A ve S ye zayıf değişmeli denir.

Fisher [14] aşağıdaki teoremi tam metrik uzaylarda üç dönüşümler için ispatlamıştır.

Teorem 2.20 S ve T dönüşümleri (X, d) metrik uzayından kendine sürekli dönüşüm olsun. Eğer S ve T ile değişmeli X den $S(X) \cap T(X)$ içine her $x, y \in X$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(Sx, Ty)$$

özelliği sağlayan sürekli bir A dönüşümü varsa S ve T nin ortak tek bir sabit noktası vardır. Aslında S, T ve A nın ortak bir sabit noktası vardır.

Teorem 2.20 yı fuzzy metrik uzayına, fuzzy 2-metrik uzayına ve fuzzy 3-metrik uzayına aşağıdaki şekilde genelleştirilir.

Teorem 2.21 $(X, M, *)$ üçlüsü (FM-6) koşulunu sağlayan bir tam fuzzy metrik uzay ve S ile T, X den X e sürekli iki dönüşüm olsunlar. Eğer S ve T ile değişmeli X den $S(X) \cap T(X)$ içine her $x, y \in X$ ve $0 < q < 1$ için

$$M(Ax, Ay, qt) \geq \min\{M(Ty, Ay, t), M(Sx, Ax, t), M(Sx, Ty, t)\} \tag{2.4}$$

özelliği sağlayan sürekli bir A dönüşümü varsa S, T ve A nın ortak tek bir sabit noktası vardır.

İspat.

$$Ax_{2n} = Sx_{2n-1} \text{ ve } Ax_{2n-1} = Tx_{2n},\ n = 1, 2, ...$$

şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. $\{Ax_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için (2.4) de $x = x_{2n}$ ve $y = x_{2n+1}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&M(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, qt) \\
&\quad \geq \min\{M(Tx_{2n+1}, Ax_{2n+1}, t), M(Sx_{2n}, Ax_{2n}, t), M(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, t)\} \\
&\quad \geq \min\{M(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, t), M(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, t), M(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, t)\} \\
&\quad \geq \min\{M(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, t/q), M(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, t/q), M(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, t/q)\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$M\left(Ax_{2n},Ax_{2n+1},qt\right)\geq M\left(Ax_{2n-1},Ax_{2n},t/q\right)$$

elde edilir. Her k ve $m\in\mathbb{N}$ için tümevarımla

$$M\left(Ax_{2k},Ax_{2m+1},qt\right)\geq M\left(Ax_{2m},Ax_{2k-1},t/q\right)$$

bulunur. Eğer $2m+1>2k$ ise

$$\begin{array}{lll} M\left(Ax_{2k},Ax_{2m+1},qt\right) & \geq & M\left(Ax_{2k-1},Ax_{2m},t/q\right) \\ \cdots\cdots\cdots.. & \geq & M\left(Ax_0,Ax_{2m+1-2k},t/q^{2k}\right) \end{array} \tag{2.5}$$

ve $2k>2m+1$ ise

$$\begin{array}{lll} M\left(Ax_{2k},Ax_{2m+1},qt\right) & \geq & M\left(Ax_{2k-1},Ax_{2m},t/q\right) \\ \cdots\cdots\cdots.. & \geq & M\left(Ax_{2k-(2m+1)},Ax_0,t/q^{2m+1}\right) \end{array} \tag{2.6}$$

olur. (2.5) ve (2.6) gereğince basit tümevarım yapılırsa $n=2k$, $p=2m+1$ yada $n=2k+1$, $p=2m+1$ için

$$M\left(Ax_n,Ax_{n+p},qt\right)\geq M\left(Ax_0,Ax_p,t/q^n\right)$$

ve eğer $n=2k$, $p=2m$ yada $n=2k+1$, $p=2m$ ise (FM-4) gereğince

$$M\left(Ax_n,Ax_{n+p},qt\right)\geq M\left(Ax_0,Ax_1,t/2q^n\right)*M\left(Ax_1,Ax_p,t/2q^n\right) \tag{2.7}$$

elde edilir. Her p ve $n\in\mathbb{N}$ pozitif tam sayıları için

$$n\to\infty \text{ iken } M\left(Ax_0,Ax_p,t/q^n\right)\to 1$$

dir. Böylece $\{Ax_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X uzayı tam olduğundan

$$z=\lim_{n\to\infty}Ax_n \text{ ve } z=\lim_{n\to\infty}Sx_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}Tx_{2n}$$

vardır. Buradan $Az=Sz=Tz$ ve

$$M\left(Az,A^2z,qt\right)\geq\min\left\{M\left(TAz,AAz,t\right),M\left(Sz,Az,t\right),M\left(Sz,TAz,t\right)\right\}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{array}{lll} M\left(Az,A^2z,qt\right) & \geq & M\left(Sz,TAz,t\right) \\ & \geq & M\left(Sz,ATz,t\right) \\ & \geq & M\left(Az,A^2z,t\right) \\ & & \cdots. \\ & \geq & M\left(Az,A^2z,t/q^n\right) \end{array}$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} M\left(Az, A^2z, t/q^n\right) = 1$$

olduğundan $Az = A^2z$ elde edilir. Buradan da z noktası A, S ve T nin ortak sabit noktası olur.

Teklik için, A, S ve T nin diğer bir ortak sabit noktası w $(w \neq z)$ olsun. (2.4) gereğince

$$M(Az, Aw, qt) \geq \min\{M(Tw, Aw, t), M(Sz, Az, t), M(Sz, Tw, t)\}$$

olur ki bu da

$$M(z, w, qt) \geq M(z, w, t)$$

olmasını gerektirir. Buradan yardıncı teorem (4.5) gereğince $z = w$ elde edilir.

Şimdi fuzzy 2-metrik uzay için Teorem 2.21 i ispat edelim. □

Teorem 2.22 $(X, M, *)$ üçlüsü bir tam fuzzy 2-metrik uzay ve S ile T, X ten X e sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda, eğer S ve T ile değişmeli her $x, y, a \in X$, $t > 0$ ve $0 < q < 1$, için

$$M(Ax, Ay, a, qt) \geq \min\{M(Ty, Ay, a, t), M(Sx, Ax, a, t), M(Sx, Ty, a, t)\} \tag{2.8}$$

ve $x, y, z \in X$ için

$$\lim_{t\to\infty} M(x, y, z, t) = 1 \tag{2.9}$$

olacak şekilde X den $S(X) \cap T(X)$ içine sürekli bir A dönüşümü varsa S, T ve A nın X içinde tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat.

$$Ax_{2n} = Sx_{2n-1} \text{ ve } Ax_{2n-1} = Tx_{2n},\ n = 1, 2, ...$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım.

$\{Ax_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayacağız. Bunun için (2.8) de $x = x_{2n}$ ve $y = x_{2n+1}$ kabul edelim.

$$\begin{aligned}
&M(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a, qt) \\
&\qquad \geq \min\{M(Tx_{2n+1}, Ax_{2n+1}, a, t), M(Sx_{2n}, Ax_{2n}, a, t), M(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, a, t)\} \\
&\qquad \geq \min\{M(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a, t/q), M(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a, t/q), M(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a, t/q)\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$M(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a, qt) \geq M(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a, t/q)$$

elde edilir. Her k ve $m \in \mathbb{N}$ için tümevarımla

$$M\left(Ax_{2k}, Ax_{2m+1}, a, qt\right) \geq M\left(Ax_{2m}, Ax_{2k-1}, a, t/q\right)$$

bulunur. eğer $2m+1 > 2k$ ise

$$\begin{aligned} M\left(Ax_{2k}, Ax_{2m+1}, a, qt\right) &\geq M\left(Ax_{2k-1}, Ax_{2m}, a, t/q\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdot\cdot &\geq M\left(Ax_0, Ax_{2m+1-2k}, a, t/q^{2k}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

ve eğer $2k > 2m+1$ ise

$$M\left(Ax_{2k}, Ax_{2m+1}, a, qt\right) \geq M\left(Ax_{2k-(2m+1)}, Ax_0, a, t/q^{2m+1}\right) \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) ve tümevarım prensibi gereğince $n = 2k$, $p = 2m+1$ yada $n = 2k+1$, $p = 2m+1$ için

$$M\left(Ax_n, Ax_{n+p}, a, qt\right) \geq M\left(Ax_0, Ax_p, a, t/q^n\right)$$

ve eğer $n = 2k$, $p = 2m$ yada $n = 2k+1$, $p = 2m$ ise (FM$'$-4) gereğince

$$\begin{aligned} M\left(Ax_n, Ax_{n+p}, a, qt\right) \geq\ & M\left(Ax_0, Ax_p, Ax_1, t/3q^n\right) * \\ & M\left(Ax_0, Ax_1, a, t/3q^n\right) * M\left(Ax_1, Ax_p, a, t/3q^n\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir. Her p ve $n \in \mathbb{N}$ pozitif tam sayıları için

$$n \to \infty \text{ iken } M\left(Ax_0, Ax_p, a, t/q^n\right) \to 1$$

dir. Böylece $\{Ax_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X uzayı tam olduğundan

$$z = \lim_{n\to\infty} Ax_n \text{ ve } z = \lim_{n\to\infty} Sx_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n}$$

olur. Buradan $Az = Sz = Tz$ ve

$$M\left(Az, A^2z, a, qt\right) \geq \min\left\{M\left(TAz, AAz, a, t\right), M\left(Sz, Az, a, t\right), M\left(Sz, TAz, a, t\right)\right\}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} M\left(Az, A^2z, a, qt\right) &\geq M\left(Sz, TAz, a, t\right) \\ &\geq M\left(Sz, ATz, a, t\right) \\ &\geq M\left(Az, A^2z, a, t\right) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\geq M\left(Az, A^2z, a, t/q^n\right) \end{aligned}$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} M\left(Az, A^2z, a, t/q^n\right) = 1 \text{ olduğundan } Az = A^2z$$

elde edilir. Buradan da z noktası A, S ve T nin ortak sabit noktası olur.

Teklik için, S, T ve A nın diğer bir ortak sabit noktası w $(w \neq z)$ olsun. (2.8) gereğince

$$M(Az, Aw, a, qt) \geq \min\{M(Tw, Aw, a, t), M(Sz, Az, a, t), M(Sz, Tw, a, t)\}$$

olur ki bu da

$$M(z, w, a, qt) \geq M(z, w, a, t)$$

olmasını gerektirir. Buradan yardımcı teorem 4.5 gereğince $z = w$ elde edilir. □

Şimdi fuzzy 3-metrik uzay için Teorem 2.21 i ispat edelim.

Teorem 2.23 $(X, M, *)$ üçlüsü bir tam fuzzy 3-metrik uzay ve S ile T, X ten X e sürekli dönüşüm olsunlar. Bu durumda, eğer S ve T ile değişmeli her $x, y, a, b \in X$, $t > 0$ ve $0 < q < 1$ için

$$M(Ax, Ay, a, b, qt) \geq \min\{M(Ty, Ay, a, b, t), M(Sx, Ax, a, b, t), M(Sx, Ty, a, b, t)\} \tag{2.13}$$

ve $x, y, z, w \in X$ için

$$\lim_{t\to\infty} M(x, y, z, w, t) = 1 \text{ her } x, y, z, w \in X \tag{2.14}$$

olacak şekilde X den $S(X) \cap T(X)$ içine sürekli bir A dönüşümü varsa S, T ve A nın tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat.

$$Ax_{2n} = Sx_{2n-1} \text{ ve } Ax_{2n-1} = Tx_{2n},\ n = 1, 2, ...$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım.

$\{Ax_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayacağız. Bunun için (2.13) de $x = x_{2n}$ ve $y = x_{2n+1}$ kabul edelim.

$$\begin{aligned} &M(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a, b, qt) \\ &\quad \geq \min\{M(Tx_{2n+1}, Ax_{2n+1}, a, b, t), M(Sx_{2n}, Ax_{2n}, a, b, t), M(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, a, b, t)\} \\ &\quad \geq \min\{M(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a, b, t/q), M(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a, b, t/q), M(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a, b, t/q)\} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$M\left(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a, b, qt\right) \geq M\left(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a, b, t/q\right)$$

elde edilir. Her k ve $m \in \mathbb{N}$ için tümevarımla

$$M\left(Ax_{2k}, Ax_{2m+1}, a, b, qt\right) \geq M\left(Ax_{2m}, Ax_{2k-1}, a, b, t/q\right)$$

bulunur. Eğer $2m+1 > 2k$ ise

$$M\left(Ax_{2k}, Ax_{2m+1}, a, b, qt\right) \geq M\left(Ax_0, Ax_{2m+1-2k}, a, b, t/q^{2k}\right) \tag{2.15}$$

Eğer $2k > 2m+1$ ise

$$M\left(Ax_{2k}, Ax_{2m+1}, a, b, qt\right) \geq M\left(Ax_{2k-(2m+1)}, Ax_0, a, b, t/q^{2m+1}\right) \tag{2.16}$$

olur. (2.15) ve (2.16) gereğince basit tümevarım yapılırsa $n = 2k$, $p = 2m+1$ yada $n = 2k+1$, $p = 2m+1$ için

$$M\left(Ax_n, Ax_{n+p}, a, b, qt\right) \geq M\left(Ax_0, Ax_p, a, b, t/q^n\right)$$

ve eğer $n = 2k$, $p = 2m$ yada $n = 2k+1$, $p = 2m$ ise (FM″-4) gereğince

$$\begin{aligned} M\left(Ax_n, Ax_{n+p}, a, b, qt\right) \geq\ & \{M\left(Ax_0, Ax_p, a, Ax_1, t/4q^n\right) * M\left(Ax_0, Ax_p, Ax_1, b, t/4q^n\right) \\ & *M\left(Ax_0, Ax_1, a, b, t/4q^n\right) * M\left(Ax_1, Ax_p, a, b, t/4q^n\right)\} \end{aligned} \tag{2.17}$$

elde edilir. Her p ve $n \in \mathbb{N}$ pozitif tam sayıları için

$$n \to \infty \text{ iken } M\left(Ax_0, Ax_p, a, b, t/q^n\right) \to 1$$

dir. Böylece $\{Ax_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X uzayı tam olduğundan

$$z = \lim_{n\to\infty} Ax_n \text{ ve } z = \lim_{n\to\infty} Sx_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n}$$

vardır. Buradan $Az = Sz = Tz$ olur. Böylece z noktası S, T ve A nın ortak sabit noktası olur.

$$M\left(Az, A^2z, a, b, qt\right) \geq M\left(Az, A^2z, a, b, t/q^n\right)$$

dır.

$$\lim_{n\to x} M\left(Az, A^2z, a, b, t/q^n\right) = 1 \text{ olduğundan } Az = A^2z$$

elde edilir. Buradan da z noktası A, S ve T nin ortak sabit noktası olur.

Teklik için, S, T ve A nın diğer bir ortak sabit noktası w $(w \neq z)$ olsun. (2.13) gereğince

$$M\left(Az, Aw, a, b, qt\right) \geq \min\left\{M\left(Tw, Aw, a, b, t\right), M\left(Sz, Az, a, b, t\right), M\left(Sz, Tw, a, b, t\right)\right\}$$

olur ki bu da

$$M\left(z, w, a, b, qt\right) \geq M\left(z, w, a, b, t\right)$$

olmasını gerektirir. Buradan yardımcı teorem 4.5 gereğince $z = w$ elde edilir. □

BÖLÜM 3

Fuzy Metrik Uzaylarında Büzülme Dönüşümü Teoremi

Tanım 3.1 (Schweizer ve Sklar [44]) $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ bir ikili işlem ve $([0,1], *)$ birimi 1 olan bir abelyen topolojik monoid olsun. $a \leq c$ ve $b \leq d$ özelliğindeki her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a * b \leq c * d$ oluyorsa $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemine sürekli bir t-norm denir.

Tanım 3.2 (Kramosil ve Michalek [36]) X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M, $X^2 \times [0, \infty[$ üzerinde $x, y, z \in X$ bir fuzzy kümesi olsun. $t, s > 0$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(X, M, *)$ sıralı 3-lüsüne bir fuzzy metrik uzayı denir.

(FM-1). $M(x, y, 0) = 0$,

(FM-2). Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ dir,

(FM-3). $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(FM-4). $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

(FM-5). $M(x, y, .) : [0, \infty[\to [0, 1]$ sol süreklidir.

Fuzzy metrik uzay üzerinde bir Hausdorff topolojisi oluşturmak için [18] nolu referansta yazarlar aşağıdaki tanımları vermişlerdir.

Tanım 3.3 (George ve Veeramani [18]) X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M, $X^2 \times]0, \infty[$ üzerinde $x, y, z \in X$ bir fuzzy kümesi olsun. $t, s > 0$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(X, M, *)$ sıralı 3-lüsüne bir fuzzy metrik uzayı denir.

1. $M(x, y, t) > 0$,

2. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ dir,

3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

3. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

4. $M(x, y, .) :]0, \infty[\to [0, 1]$ süreklidir.

Tanım 3.4 (George ve Veeramani [18]) $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $x \in X$ merkez ve r, $0 < r < 1$ yarıçap olmak üzere $t > 0$ için $B(x, r, t)$ açık yuvarı

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\{B(x, r, t) : x \in X,\ 0 < r < 1,\ t > 0\}$$

ailesi, X üzerinde bir Hausdorff topolojisinin tabanı olur. Bu topolojiye M fuzzy metriği tarafından üretilen topoloji denir.

Tanım 3.5 (George ve Veeramani [18]) Bir (X, d) metrik uzayında,

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

ve $a*b = ab$ olmak üzere, $(X, M_d, *)$ üçlüsü bir fuzzy metrik uzay olur. M_d fuzzy metriğine d tarafından üretilen standart fuzzy metrik denir.

Standart fuzzy metriği ve ona karşılık gelen metrik tarafından üretilen topolojiler aynıdır.

Tanım 4.1 ve Tanım 3.3 ile verilen her iki fuzzy metrik uzayı için de aşağıdaki yardıncı teorem yazılabilir.

Yardımcı Teorem 3.6 Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot)$ azalmayandır.

3.1 George ve Veeramani Fuzzy Metrik Uzaylarında Düzgün Yapı

Bu kısımda, $(X, M, *)$ üçlüsü, George ve Veeramani anlamında bir fuzzy metrik uzay olacaktır.

Uyarı 3.7 Bir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında herhangi bir $r \in]0, 1[$ için $s * s \geq r$ olacak şekilde bir $s \in]0, 1[$ bulunabilir.

Fuzzy Metrik Uzayında Düzgün Yapı: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{B}_n = \{(x, y) \in X \times X : y \in B(x, 1/n, 1/n)\}$$

kümesini tanımlayalım.

[18] da $\{\mathrm{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ (sayılabilir) ailesinin X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgün uzay yapısı için bir taban olduğu ve $\mathcal{U}$ tarafından üretilen topoloji ile M fuzzy metriği tarafından üretilen topolojilerin aynı topoloji olduğu gösterilmiştir. $\mathcal{U}$ düzgün uzay yapısına M tarafından üretilen düzgün uzay yapısı denir.

$(X, M_1, *)$ ve $(Y, M_2, *)$ iki fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{U}_i$ de M_i, $i = 1, 2$ ile üretilen düz yapı olsun. Bir $f : X \to Y$ dönüşümünün $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ ye göre düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart verilen bir $r_2 \in \,]0, 1[$ ve $t_2 > 0$ için

$$\text{her } x, y \in X \text{ için } M_1(x, y, t_1) \geq 1 - r_1 \Rightarrow M_2(f(x), f(y), t_2) \geq 1 - r_2$$

olacak şekilde bir $r_1 \in \,]0, 1[$ ve bir $t_1 > 0$ olmasıdır.

Tanım 3.8 $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşümün olsun. Eğer, $0 < \varepsilon < 1$ özelliğindeki her ε

$$\text{her } x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ için } M(x, y, t) \geq 1 - r \Rightarrow M(f(x), f(y), t) \geq 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde bir $0 < r < 1$ varsa f dönüşümüne t-düzgün süreklidir denir.

Açıkça f dönüşümü t-düzgün sürekli ise M ile tarafından üretilen düzgün yapıya görede düzgün sürekli ve M tarafından üretilen topolojiye görede sürekli olur.

Önerme 3.9 $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f dönüşümünün t-düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\delta > 0$ için

$$\text{her } x, y \in X \text{ ve } t > 0 \text{ için } 1/M(x, y, t) - 1 \leq \eta \Rightarrow 1/M(f(x), f(y), t) - 1 \leq \delta$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ olmasıdır.

Tanım 3.10 $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşümün olsun. Eğer, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\frac{1}{M(f(x), f(y), t)} - 1 \leq k \left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1 \right)$$

olacak şekilde $k \in \,]0, 1[$ varsa f dönüşümüne fuzzy büzülme dönüşümü denir. (k, f nin büzülme sabiti olarak adlandırılır.)

Önerme 3.11 $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $f : X \to X$ fuzzy büzülme dönüşümü ise f dönüşümü t-düzgün süreklidir.

Önerme 3.12 (X, d) bir metrik uzay olsun. $f : X \to X$ dönüşümü, (X, d) metrik uzayı üzerinde büzülme sabiti k olan bir büzülme dönüşümü olması için gerek ve yeter şart f dönüşümünün d metriği ile üretilen $(X, M_d, *)$ standart fuzzy metrik uzayı üzerinde büzülme sabiti k olan fuzzy büzülme dönüşümü olmasıdır.

Hatırlanacağı gibi, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq kd(x_n, x_{n+1})$$

olacak şekilde $k \in]0, 1[$ varsa (X, d) metrik uzayında (x_n) dizisine büzülebilir denildiğini biliyoruz. Bu tanım fuzzy metrik uzaylarında aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 3.13 $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Eğer, her $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{M(x_{n+1}, x_{n+2}, t)} - 1 \leq k \left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1 \right)$$

olacak şekilde bir $k \in]0, 1[$ varsa X deki (x_n) dizisine fuzzy büzülebilir denir.

Önerme 3.14 $(X, M_d, *)$ fuzzy metrik uzayı X üzerindeki d metriği ile üretilen standart fuzzy metrik uzay olsun. X deki (x_n) dizisinin (X, d) metrik uzayında büzülebilir olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin $(X, M_d, *)$ de fuzzy büzülebilir olmasıdır.

$(X, M, *)$ daki metrik kavramından söz ederken bir karışıklık meydana gelebilecekse M-... gösterimi kullanılacaktır. Örneğin M-Cauchy dizisi gibi.

3.2 Goerge ve Veeramani Fuzzy Metrik Uzaylarında Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, $(X, M, *)$ üçlüsü George ve Veeramani anlamında bir fuzzy metrik uzay olarak alınacaktır.

Tanım 3.15 (George Veeramani [18]) $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon \in]0, 1[$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı her $t > 0$ ve $n, m \geq n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy metrik uzayına tam fuzzy metrik uzayı denir.

Teorem 3.16 (George ve Veeramani [18]) $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı ve (x_n), X de bir dizi olsun. (x_n) dizisinin $(X, M, *)$ uzayında x e yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $M(x_n, x, t) \to 1$ olmasıdır.

Uyarı 3.7 kullanılarak her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi olduğu kolayca gösterilebilir

Sonuç 3.17 (George ve Veeramani [18]) (X, d) bir metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(X, M, *)$ standart fuzzy metrik uzayının tam olmasıdır.

Banach sabit nokta teoreminin, tam fuzzy metrik uzayların fuzzy büzülme dönüşümlerine genişletilmesi aşağıda yapılacaktır.

Teorem 3.18 (Fuzzy Banach Büzülme Teoremi) $(X, M, *)$, fuzzy büzülebilir dizilerin Cauchy dizisi olduğu tam bir fuzzy metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü büzülme sabiti k olan bir fuzzy büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x \in X$ noktasını sabitleyelim. $x_n = T^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $t > 0$ için

$$\frac{1}{M(T(x), T^2(x), t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x, x_1, t)} - 1\right)$$

olur. Tümevarım prensibi kullanılarak

$$\frac{1}{M(x_{n+1}, x_{n+2}, t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right)$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda (x_n) bir fuzzy büzülebilir dizisi olur. Dolayısıyla bir Cauchy dizisidir ve böylece bazı $y \in X$ ler için (x_n) dizisi y ye yakınsar. Bu y noktasının T için bir sabit nokta olduğunu daha sonra göreceğiz. Teorem 3.16 gereğince $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{M(T(y), T(x_n), t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(y, x_n, t)} - 1\right) \to 0$$

olur. Bu durumda, her $t > 0$ için $\lim_n M(T(y), T(x_n), t) = 1$ dir. Böylece $\lim_n T(x_n) = T(y)$ dir. Yani $\lim_n x_{n+1} = T(y)$ ve buradan $T(y) = y$ olur. Tekliği gösterirken; bazı

$z \in X$ için $T(z) = z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $t > 0$ için $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M(y,z,t)} - 1 &= \frac{1}{M(T(y),T(z),t)} - 1 \\
&\leq k\left(\frac{1}{M(y,z,t)} - 1\right) \\
&= k\left(\frac{1}{M(T(y),T(z),t)} - 1\right) \\
&\leq k^2\left(\frac{1}{M(y,z,t)} - 1\right) \\
&\leq \cdots \leq k^n\left(\frac{1}{M(y,z,t)} - 1\right) \to 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece $M(y,z,t) = 1$ ve buradan da $y = z$ elde edilir.

Şimdi $(X, M_d, *)$ ın X üzerinde d metriği ile üretilen bir tam standart fuzzy metrik uzay olduğunu kabul edelim. Sonuç 3.17 gereğince (X,d) uzayı tamdır. Bu durumda eğer (x_n) dizisi bir fuzzy büzülebilir dizisi ise Önerme 3.14 gereğince bu dizi (X,d) uzayında büzülebilirdir. Bu durumda (x_n) dizisi yakınsak olur. Öyleyse, Teorem 3.18 gereğince tam metrik uzaylar üzerinde klasik Banach büzülme teoreminin fuzzy versiyonu olarak ta düşünülebilen aşağıdaki sonuç elde edilir. □

Sonuç 3.19 $(X, M_d, *)$ tam bir standart fuzzy metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fuzzy büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki örnekte, X üzerinde aynı topolojiyi üreten iki fuzzy metriği verilerek bunlardan bir tanesinin yukarıdaki teoremin koşullarını sağladığı gösterilecektir.

Örnek 3.1 $X = \mathbb{N}$ olsun ve $a * b = ab$ alalım. M yi

$$M(x,y,t) = \begin{cases} x/y, & x \leq y \text{ ise} \\ y/x, & y \leq x \text{ ise} \end{cases} \quad \text{her } t > 0$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır ve X üzerinde

$$M(x,y,t) = t/(t + d(x,y))$$

olacak şekilde hiçbir d metriği yoktur .

M, X üzerinde ayrık topolojiyi üretir. Gerçekten de, $x \neq y$ için

$$M(x,y,t) \leq \frac{x}{x+1}$$

dir. Şimdi, $0 < r < 1 - x/(x+1)$ olacak şekilde r seçersek, bu durumda, $y \in B(x,r,t)$ dir ancak ve ancak

$$M(x,y,t) > 1 - r > \frac{x}{x+1}$$

ve buradan da $B(x,r,t) = \{x\}$ olur.

$x \neq y$ ise $P(x,y,t) = 1/2$ ve $P(x,x,t) = 1$ ile verilen P, $X^2 \times]0,+\infty[$ kümesinin bir fuzzy kümesidir ve X üzerinde bir fuzzy metriğidir. Bu fuzzy metriğide X üzerinde ayrık topolojiyi üretir.

Eğer (x_n) dizisi X üzerinde bir M-Cauchy dizisi ise bu durumda her $n \geq n_0$ için $x_n = c$ olacak şekilde $c \in C$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ nin var olduğunu göstereceğiz. Gerçekten de, (x_n) dizisini bir M-Cauchy dizisi kabul edelim ve son koşulun sağlanmadığını düşünelim. O zaman iki durum karşımıza çıkar:

(a) $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için $x_n \in \{i_1, ..., i_k\}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $i = \max\{i_s/i_t : s,t = 1,...,k, s < t\} < 1$ olsun. $1 - \varepsilon > i$ ve $t > 0$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda $n, m \geq n_0$ için

$$M(x_n, x_m, t) \leq i < 1 - \varepsilon$$

olur. Bu durumda (x_n) dizisi M-Cauchy değildir.

(b) Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$A_m = \{x_n : n > m\} \subset \mathbb{N}$$

kümesinin sonsuz olduğunu kabul edelim. Şimdi, $m \in \mathbb{N}$ için A_m nin ilk elemanı x_{m_0} olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için her $m \in \mathbb{N}$ ye karşılık $x_{m_0}/x_s < 1 - \varepsilon$ yani

$$M(x_{m_0}, x_s, t) < 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x_s \in A_m$ $(m < s)$ elemanı bulunabilir. Bu durumda (x_n) dizisi M-Cauchy olmaz.

M-Cauchy diziler ailesinin P-Cauchy diziler ailesi ile aynı olduğu ve her iki $(X, M, *)$ ve $(X, P, *)$ uzayının da tam olduğu açıktır.

Kolayca gösterilebilir ki X de bir (x_n) dizisisinin P-fuzzy büzülebilir olması için gerek ve yeter şartın her $n \geq 2$ için $x_n = c$ olacak şekilde bir $c \in X$ olması gerektiği gösterilebilir.

Bu durumda, bir P-fuzzy büzülebilir dizi P-Cauchy dizisidir ve böylece P fuzzy metriği yukardaki teoremin koşullarını sağlar.

Diğer yandan, bir P-fuzzy büzülebilir dizinin M-fuzzy büzülebilir dizi olduğu açıktır. Ancak bunun tersi tersi doğru değildir. Gerçekten de, $1, 3, 6, 6, 6, ...$ dizisi $M-$fuzzy büzülebilir dizidir ancak $P-$fuzzy büzülebilir dizi değildir. Dahası, eğer $x_1, x_2, ..., x_n$ "sonlu dizisi" M-fuzzy büzülebilir ise $x_1, x_2, ..., x_n, x_n, ..., x_n, ...$dizisi $M-$fuzzy büzülebilirdir (fakat $x_2 \neq x_3$ ise $P-$fuzzy büzülebilir değildir). Ancak tersinin doğru olup olmadığını bilmediğimizden bu durumu, her $M-$fuzzy büzülebilir dizinin $M-$Cauchy olduğunu söyleyemeyiz.

Şimdi, Banach sabit nokta teoremini, tam fuzzy metrik uzaylardaki bu büzülme dönüşümlerine genişletebilmek için Grabiec [20] tarafından verilen büzülme dönüşüm kavramını kullanacağız. Grabiec tarafından verilen Cauchy dizi tanımı Tanım 3.15 den daha zayıf olduğu için ve bu durumda [20] deki Teorem 5 ile yapılan tartışma, George ve Veeramani anlamında Cauchy olacak şekilde dizi oluşturmayı garanti etmeye yeterli olmadığından bizim ispatımız ve başlangıç koşulumuz [20] te verilenden farklı olacaktır. Aşağıdaki gösterim ve kabullerle başlayalım.

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayındaki $M(x, y, t_1) * \cdots * M(x, y, t_n) * \cdots$ sonsuz "çarpımı"

$$\prod_{i=1}^{\infty} M(x, y, t_i)$$

ile gösterilecektir. Hatırlanırsa, eğer reel sayıların çarpımlar dizisi $\pi_n = \prod_{m=1}^{n} u_m$ yakınsak ise u_n reel sayılarının sonsuz çarpımı $\prod_{i=1}^{\infty} u_i$ ye yakınsaktır denir. Yani $n \to \infty$ iken (π_n) sıfırdan farklı bir reel sayıya yakınsıyorsa $\prod_{i=1}^{\infty} u_i$ ye yakınsaktır denir. Bu durumda, $R_m = \prod_{n=m+1}^{\infty} u_n$ kalanlar dizisi $m \to \infty$ iken 1 e yakınsar.

Tanım 3.20 Her $m \geq m_0$ için $t_m + 1 \leq t_{m+1}$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa pozitif reel sayıların (t_n) dizisine bir s-artan dizi denir.

Teorem 3.21 (Fuzzy Banach Büzülme Teoremi) $(X, M, *)$ bir tam fuzzy metrik uzay ve her $\varepsilon > 0$ ve s-artan (t_n) dizisi için $\prod_{n \geq n_0} M(x, y, t_n) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var (yada $*$, $(0, 1]$ de alışılmış çarpım olmak üzere $\prod_{n=1}^{\infty} M(x, y, t_n)$ yakınsak) olsun.

$k \in]0,1[$ ve her $x, y \in X$ için

$$M(T(x), T(y), kt) \geq M(x, y, t)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm $T : X \to X$olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x \in X$ noktasını sabitleyelim. $x_n = T^n(x)$, $n = 1, 2, ...$ olsun.

$$M(x_1, x_2, t) = M(T(x), T^2(x), kt) \geq M(x, T(x), t/k) = M(x, x_1, t/k)$$

olur ve tümevarımla

$$M(x_n, x_{n+1}, t) \geq M(x, x_1, t/k^n),\ n = 1, 2, ...$$

elde edilir.

$t > 0$, $\varepsilon > 0$ olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ için $n < m$ kabul edelim. Eğer $s_n + \cdots + s_{m-1} \leq 1$ sağlanacak şekilde $s_i > 0$, $i = n, ..., m-1$ alınırsa bu durumda

$$\begin{aligned} M(x_n, x_m, t) &\geq M(x_n, x_{n+1}, s_n t) * \cdots * M(x_{m-1}, x_m, s_{m-1} t) \\ &\geq M\left(x, x_1, \frac{s_n t}{k^n}\right) * \cdots * M\left(x, x_1, \frac{s_{m-1} t}{k^{m-1}}\right) \end{aligned}$$

Özellikle, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) = 1$ olduğundan

$$s_i = 1/i(i+1),\ i = n, ..., m-1$$

alabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} M(x_n, x_m, t) &\geq M\left(x, x_1, \frac{t}{n(n+1)k^n}\right) * \cdots * M\left(x, x_1, \frac{t}{(m-1)mk^{m-1}}\right) \\ &\geq \prod_{n=1}^{\infty} M\left(x, x_1, \frac{t}{n(n+1)k^n}\right) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, $t_n = t/n(n+1)k^n$ yazarsak $n \to \infty$ iken $(t_{n+1} - t_n) \to \infty$ olduğunun gösterilebilir. Öyleyse (t_n) bir $s-$artan dizidir ve bu durumda

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} M\left(x, x_1, \frac{t}{n(n+1)k^n}\right) > 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olur. Bu durumda (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(Eğer $*$, $(0,1]$ de alışılmış çarpım ise, kabulden, $\prod_{n=1}^{\infty} M\left(x, x_1, t/n(n+1)k^n\right)$ yakınsaktır ve bu durumda kalanların dizisi $R_m = \prod_{n=m+1}^{\infty} M\left(x, x_1, t/n(n+1)k^n\right)$, $m \to \infty$ iken 1 e yakınsar. Aksi halde

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} M\left(x, x_1, \frac{t}{n(n+1)k^n}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

X tam olduğundan $\lim_n x_n = y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. y nin T için bir sabit nokta olduğunu iddia edelim. Teorem 3.16 gereğince $*$ sürekli olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} M(T(y), y, t) &\geq M(T(y), T(x_n), \frac{t}{2}) * M(x_{n+1}, y, \frac{t}{2}) \\ &\geq M(y, x_n, \frac{t}{2k}) * M(x_{n+1}, y, \frac{t}{2}) \\ &\to 1 * 1 \end{aligned}$$

Öyleyse, $M(T(y), y, t) = 1$ olur ve $T(y) = y$ elde edilir.

Tekliği göstermek için bazı $z \in X$ için $T(z) = z$ kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1 &\geq M(z, y, t) = M(T(z), T(y), t) \geq M(z, y, \frac{t}{k}) = M(T(z), T(y), \frac{t}{k}) \\ &\geq M(z, y, \frac{t}{k^2}) \geq \cdots \geq M(z, y, \frac{t}{k^n}) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi (t/k^n) nin bir $s-$artan dizi olduğunu göstermek kolaydır. Bu durumda kabulümüz gereğince verilen bir $\varepsilon \in]0,1[$ için

$$\prod_{n \geq n_0} M(z, y, t/k^n) \geq 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Açıkça $\lim_n M(z, y, t/k^n) = 1$ dir. Buradan $M(z, y, t) = 1$ ve böylece $z = y$ olur. □

Uyarı 3.22 En son teoremde, $T : X \to X$ dönüşümü bazı $k \in]0,1[$ için

$$M(T(x), T(y), kt) \geq M(x, y, t), \ x, y \in X, \ t > 0$$

büzülme koşuşunu sağlar. Menger uzayları için bu koşulun [46] nolu referansta verildiğini belirtelim.

Aşağıdaki örnekte, $\mathbb{N}$ üzerinde aynı topolojiyi üreten iki fuzzy metriği vereceğiz ve bunlardan yalnız birinin yukarıdaki teoremin koşullarını sağladığını göstereceğiz.

Örnek 3.2 **(a)** Örnek 3.1 daki $(X, P, *)$ tam fuzzy metrik uzayını alalım. Şimdi, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $t_n = n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şeklinde verilen reel sayıların s-artan (t_n) dizisini düşünelim. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = \dfrac{1}{2}$ olmak üzere $\prod_{n=1}^{\infty} P(x, y, t_n) = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$ dir ve böylece $\pi_n = \prod_{m=1}^{\infty} u_m$ dizisi 0 a yakınsar. Öyleyse, P fuzzy metriği yukarıdaki teoremin koşulunu sağlamaz.

Eğer T dönüşümü olarak birim dönüşüm (yani $T(x) = x$, $x \in X$) alınırsa bu durumda T ,

$$P(T(x), T(y), kt) \geq P(x, y, t)$$

$x, y \in X$, $0 < k < 1$ büzülme koşulunu sağlar. Ancak T nin sabit noktası tek değildir. (Gerçekten de $\mathbb{N}$ nin bütün noktaları T nin sabit noktası olur.)

(b) $X = \mathbb{N}$ olsun ve her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olsun. $X^2 \times]0, +\infty[$ nin Q fuzzy kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x \neq y \text{ ise } Q(x, y, t) = t^2/(t^2 + 1) \text{ ve } Q(x, x, t) = 1.$$

Q nun X üzerinde ayrık topolojiyi üreten bir fuzzy metriği olduğu ve X in bir (x_n) dizisinin Q-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın her $n \geq n_0$ için $x_n = c$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $c \in X$ var olması gerektiği gösterilebilir. Sonuç olarak $(X, Q, *)$ tamdır.

Şimdi, (x_n) pozitif reel sayıların bir $s-$artan dizisi olsun. $\prod_{n=1}^{\infty} Q(x, x, t_n)$ nin yakınsak olduğu açıktır. Şimdi

$$\prod_{n=1}^{\infty} Q(x, y, t_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^2}{t_n^2 + 1}$$

sonsuz çarpımının $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için yakınsak olduğunu görelim. Bunun için, $u_i = 1$, $i = 1, ..., n_0 - 1$ ve

$$u_n = \left(t_n^2 + 1\right)/t_n^2 = 1 + 1/t_n^2,$$

$n_0 \geq n$ olmak üzere $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ nin yakınsak olduğu gösterilecektir. $v_n = 0$, $n = 1, ..., n_0 - 1$ ve $v_n = 1/t_n^2$, $n_0 \geq n$ olmak üzere

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + v_n)$$

dir. Eğer $m_n \leq t_n \leq m_{n+1}$ ise $int(t_n) = m_n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq int(t_n)$ dir. Böylece (t_n) nin kabulu gereğince

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(int(t_n))^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

olur. Şimdi, karşılatırma kriteri gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serisi yakınsaktır. Sonuç olarak $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ sıfır olmayan bir A reel sayısına yakınsar. Öyleyse, $\prod_{n \geq n_0}^{\infty} \frac{t_n^2}{t_n^2+1}$ $1/A$ ya yakınsar. Buradan da $\prod_{n=1}^{\infty} Q(x, y, t_n)$ yakınsak olur.

Q fuzzy metriğinin yukarıdaki teoremin bütün şartlarını sağladığını ispatlamış olduk.

Dikkat edilirse, bu durumda birim dönüşüm her $x, y \in X$ ve $0 < k < 1$ için

$$Q(T(x), T(y), kt) \geq Q(x, y, t)$$

büzülme koşulunu sağlamaz.

Aşağıdaki örnekte, tam bir metrik uzay üzerinde aynı topolojiyi üreten iki fuzzy metriği verilecek ve bunlardan sadece birinin son teoremin şartlarını sağladığı gösterilecektir.

Örnek 3.3 $x, y \in X$ gibi iki nokta için $d(x, y) \geq 1$ olacak şekilde (X, d) tam metrik uzayı verilsin.

Her $a, b \in [a, b]$ için $a * b = ab$ olsun ve

$$M(x, y, t) = \frac{t^2}{t^2 + d(x, y)}$$

ile verilen $X^2 \times]0, +\infty[$ nin M fuzzy kümesini düşünelim. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Kolayca gösterilebilir ki X üzerinde M ve d ile üretilen topolojiler çakışıktır ve bir (x_n) dizisinin M-Cauchy olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin d-Cauchy olmasıdır. Sonuç olarak $(X, M, *)$ tamdır.

Örnek 3.2(b) deki benzer tartışma ile $x, y \in X$ ve pozitif reel sayıların her s-artan (t_n) dizisi için $\prod_{n=1}^{\infty} M(x, y, t_n)$ nin yakınsak olduğu gösterilir. Öyleyse, $(X, M, *)$ son teoremin bütün koşullarını sağlar.

Diğer yandan d nin ürettiği M_d (tam) standart fuzzy metriği düşünülür ve $d(x,y) \geq 1$ olacak şekilde $x, y \in X$ ve $t_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ alınırsa, sonsuza ıraksayan

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{d(x,y)}{t_n}\right) \geq \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

bulunur ve sonuç olarak

$$u_m = \frac{t_n}{t_n + d(x,y)}$$

olmak üzere $\pi_n = \prod_{m=1}^{\infty} u_m$, 0 a yakınsar. Yani,

$$\prod_{n=1}^{\infty} M_d(x,y,t_n) = \prod_{n=1}^{\infty} t_n/(t_n + d(x,y))$$

yakınsamaz. Öyleyse, M_d Teorem 3.21 in koşullarını sağlamaz.

3.3 Grabiec Anlamında Tam Olan Kramosil ve Michalek Fuzzy Metrik Uzaylarında Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda, $(X, M, *)$, Kramosil ve Michalek anlamında bir fuzzy metrik uzayı olacaktır.

Banach sabit nokta teoremi, Grabiec [20] anlamında tam fuzzy metrik uzayların fuzzy büzülme dönüşümlerine genişletilecektir. Aşağıdaki tanımlar ve sonuçlar [20] nolu referansta bulunabilir. Biz, zaten tanımlanmış olan benzer kavramları ayırmak için notasyonda küçük değişiklik yapacağız.

Tanım 3.23 Her $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$\lim_{n} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$$

ise(x_n) dizisine $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında G-Cauchy dizisi denir.

Her $t > 0$ için

$$M(x_n, x, t) = 1$$

ise (x_n) dizisine yakınsaktır denir. Her $G-$Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy metrik uzayına $G-$tam dır denir. Eğer her dizinin yakınsak bir altdizisi varsa $(X, M, *)$ ya kompakt denir.

Kramosil ve Michalek anlamında bir fuzzy metrik uzayında bir düzgün yapı verememiş olmamıza rağmen, sırasıyla, fuzzy büzülme dönüşümü ve fuzzy büzülebilir dizisinin tanımlandığı yukarıdaki Tanım 3.10 ve Tanım 3.13 geçerli kalır.

Teorem 3.24 (Fuzzy Banach Büzülme Teoremi) $(X, M, *)$ bir G-tam fuzzy metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fuzzy büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $k \in]0,1[$ olsun ve T dönüşümünün $t > 0$ içi

$$\frac{1}{M(T(x), T(y), t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1\right)$$

ifadesini sağladığını kabul edelim.

$x \in X$ noktasını sabitleyelim. $x_n = T^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Teorem 3.18 ün ispatında görüldüğü gibi (x_n)

$$\frac{1}{M(x_{n+1}, x_{n+2}, t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right), \ n \in \mathbb{N}$$

ifadesini sağlayan bir fuzzy büzülme dizisidir. Böylece, $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(x_{n+1}, x_{n+2}, t)} - 1 &\leq k^2\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1\right) \\ &\leq \cdots \leq k^n\left(\frac{1}{M(x_1, x_2, t)} - 1\right) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

olur ve buradan $\lim_n M(x_n, x_{n+1}, t) = 1$, $\forall t > 0$ elde edilir.

Bu durumda, bir $p \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_n, x_{n+p}, t) \geq M(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}) * \cdots * M(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}) \to \overbrace{1 * \cdots * 1}^{p} = 1$$

olur ve böylece (x_n) bir G-Cauchy dizisidir. Bu nedenle bazı $y \in X$ için (x_n) dizisi y ye yakınsar. Şimdi, Teorem 3.18 ün ispatı taklit edilerek T nin tek sabit noktasının y olduğu gösterilebilir.

[18, Teorem 8] de yazar aşağıdaki Edelstein büzülme teoremini vermiştir: "$(X, M, *)$ bir kompakt fuzzy metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü her $x \neq y$ için

$$M(T(x), T(y), \cdot) > M(x, y, \cdot)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır."

Eğer $T : X \to X$ dönüşümü, bazı $k \in \,]0,1[$ için

$$\frac{1}{M(T(x),T(y),t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x,y,t)} - 1\right), \; t > 0$$

ifadesini sağlayan bir fuzzy büzülme dönüşümü ise

$$M(T(x),T(y),t) > M(x,y,t), \; x \neq y$$

olur. Buradan, bahsedilen Edelstein büzülme teoremi fuzzy büzülme dönüşümleri için sağlanır. □

BÖLÜM 4

Fuzy Metrik Uzaylarında Ortak Sabit Nokta Toremleri

Bu bölümde bazılarını daha önce verdiğimiz tanımları tekrar hatırlamak amacıyla tekrarlayarak bu bölüme başlayalım. $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ bir ikili işlem ve $([0,1], *)$ birimi 1 olan bir abelyen topolojik monoid olsun. $a \le c$ ve $b \le d$ özelliğindeki her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a * b \le c * d$ oluyorsa $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemine sürekli bir t-norm denir.

Tanım 4.1 (Kramosil ve Michalek [36]) X keyfi bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M, $X^2 \times [0, \infty[$ üzerinde $x, y, z \in X$ bir fuzzy kümesi olsun. $t, s > 0$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(X, M, *)$ sıralı 3-lüsüne bir fuzzy metrik uzayı (FM-uzayı) denir.

(FM-1). $M(x, y, 0) = 0$,

(FM-2). Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ dir,

(FM-3). $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(FM-4). $M(x, y, t) * M(y, z, s) \le M(x, z, t + s)$,

(FM-5). $M(x, y, .) : [0, \infty[\to [0, 1]$ sol süreklidir.

$M(x, y, t)$ değeri x ile y arasında t ye göre yakınlık derecesi olarak düşünülebilir. Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1$ ile $x = y$ ve ∞ ile $M(x, y, t) = 0$ aynı anlama gelmektedir. [18] nolu referansta, fuzzy metrik uzaylarının bazı topolojik özellikleri ve örnekleri bulunabilir. Aşağıdaki örnekte her metriğin bir fuzzy metriği ürettiği bilinmektedir.

Tanım 4.2 (Grabiec [20]) $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun:

(1). $\{x_n\}$ X te bir dizi olmak üzere, eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} M(x_n, x, t) = 1$$

ise $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyordur denir ve bu durum $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

(2). $\{x_n\}$ X de bir dizi olmak üzere her $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

(3). İçinden alınan her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir fuzzy metrik uzayı tamdır denir.

Uyarı 4.3 $*$ sürekli olduğundan, (FM-4) gereğince FM-uzayındaki bir dizinin limiti tek türlü belirlenir.

$$\text{(FM-6)}\ \text{Her } x, y \in X \text{ için} \lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$$

özelliğini sağlayan bir fuzzy metrik uzay $(X, M, *)$ olsun:

Yardımcı Teorem 4.4 (Cho [8] ve Mishra et.al.[38]) $\{y_n\}$, (FM-6) koşulunu sağlayan $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $t > 0$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$M(y_{n+2}, y_{n+1}, kt) \geq M(y_{n+1}, y_n, t)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ sayısı varsa $\{y_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

Yardımcı Teorem 4.5 (Mishra et.al. [38]) Her $x, y \in X$, $t > 0$ ve bir $k \in (0, 1)$ sayısı için

$$M(x, y, kt) \geq M(x, y, t)$$

oluyorsa $x = y$ dir.

4.1 (α) Tipinde Uyumlu Dönüşümler

Bu kısımda, fuzzy metrik uzaylarında (α) tipinde uyumlu metrik dönüşüm kavramını ve bu dönüşümlerin bazı özelliklerini vereceğiz.

Tanım 4.6 (Mishra [38]) A ve B, bir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayından kendi içine dönüşüm olsun. Eğer her $t > 0$ ve bazı $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = z$$

özelliğindeki her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} M(ABx_n, BAx_n, t) = 1$$

oluyorsa A ve B dönüşümlerine uyumlu denir.

Tanım 4.7 (Cho [8]) A ve B, bir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayından kendi içine dönüşüm olsunlar. Eğer her $t > 0$ ve bazı $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = z$$

özelliğine sahip her $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} M(ABx_n, BBx_n, t) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} M(BAx_n, AAx_n, t) = 1$$

oluyorsa A ve B dönüşümlerine (α) tipinde uyumlu dönüşümler denir.

Uyarı 4.8 [33] [32] referanslarında Tanım 4.6 ve 4.7 nin denk formülasyonları ve bunların metrik uzaylardaki örnekleri bulunabilir. Bu şekildeki dönüşümler birbiriyle bağımsız ve uyumluluk ve zayıf uyumlulukdan daha geneldir [31] [47].

Önerme 4.9 (Cho [8]) Her $t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve A ile B, X den kendi içine sürekli dönüşüm olsunlar. Bu durumda A ile B nin uyumlu olması için gerek ve yeter şart A ile B nin (α) tipinde uyumlu olmasıdır.

Önerme 4.10 (Cho [8]) Her $t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve A ile B, X den kendi içine dönüşüm olsunlar. Eğer A ile B, (α) tipinde uyumlu ve bazı $z \in X$ için $Az = Bz$ ise

$$ABz = BBz = BAz = AAz$$

olur.

Önerme 4.11 (Cho [8]) Her $t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve A ile B, X den kendi içine dönüşüm olsunlar. Eğer A ile B (α), tipinde uyumlu ve $\{x_n\}$ dizisi bazı $z \in X$ için

(1) $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = z$ olacak şekilde X içinde bir dizi ise

(2) Eğer A dönüşümü z de sürekli ise $\lim_{n\to\infty} BAx_n = Az$ olur.

(3) Eğer A ile B dönüşümleri z de sürekli iseler $ABz = BAz$ ve $Az = Bz$ olur.

4.2 Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, bazı koşulları sağlayan altı dönüşüm için bazı ortak sabit nokta teoremlerini ispatlayacağız.

Teorem 4.12 Her $t \in [0,1]$ için $t*t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$, (FM-6) koşulunu sağlayan bir tam fuzzy metrik uzay olsun. A, B, S, T, P ve Q, X den kendi içine aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşüm olsunlar.

(4.1) $P(X) \subset AB(X)$, $Q(X) \subset ST(X)$,

(4.2) $AB = BA$, $ST = TS$, $PB = BP$, $QS = SQ$, $QT = TQ$,

(4.3) A, B, S ve T süreklidir,

(4.4) (P, AB) ve (Q, ST) ikilileri (α) tipinde uyumludur,

(4.5) Her $x, y \in X$, $\beta \in (0,2)$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} M(Px, Qy, kt) &\geq M(ABx, Px, t) * M(STy, Qy, t) * M(STy, Px, \beta t) \\ &\quad * M(ABx, Qy, (2-\beta)t) * M(ABx, STy, t) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ sayısı vardır.

Bu durumda A, B, S, T, P ve Q nun X içinde bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat. $P(X) \subset AB(X)$ olduğundan herhangi $x_0 \in X$ için, (4.1) gereğince $Px_0 = ABx_1$ olacak şekilde bir $x_1 \in X$ noktası vardır.

$Q(X) \subset ST(X)$ olduğundan bu x_1 noktası için $Qx_1 = STx_2$ olacak şekilde bir $x_2 \in X$ noktası seçilebilir.

Bu şekilde devam edilirse tümevarım prensibi gereğince X içinde aşağıdaki gibi bir $\{y_n\}$ dizisi bulunabilir:

$n = 0, 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned} y_{2n} &= Px_{2n} = ABx_{2n+1} \text{ ve} \\ y_{2n+1} &= Qx_{2n+1} = STx_{2n+2} \end{aligned}$$

(4.5) gereğince $q \in (0,1)$ olmak üzere her $t > 0$ ve $\beta = 1 - q$ için

$$\begin{aligned}
M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt) &= M(Px_{2n+1}, Qx_{2n+2}, kt) \\
&\geq M(ABx_{2n+1}, Px_{2n+1}, t) * M(STx_{2n+2}, Qx_{2n+2}, t) \\
&\quad * M(STx_{2n+2}, Px_{2n+1}, \beta t) * M(ABx_{2n+1}, Qx_{2n+2}, (2-\beta)t) \\
&\quad * M(ABx_{2n+1}, STx_{2n+2}, t) \\
&= M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * M(y_{2n+1}, y_{2n+1}, (1-q)t) \\
&\quad * M(y_{2n}, y_{2n+2}, (1+q)t) * M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) \qquad (4.1) \\
&\geq M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * 1 * M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) \\
&\quad * M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) \\
&\geq M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * M(y_{2n}, y_{2n+1}, qt)
\end{aligned}$$

olur. t-normu $*$ sürekli ve $M(x, y, .)$ sol sürekli olduğundan (4.1) da $q \to 1$ alınırsa

$$M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, kt) \geq M(y_{2n}, y_{2n+1}, t) * M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) \qquad (4.2)$$

bulunur. Benzer olarak,

$$M(y_{2n+2}, y_{2n+3}, kt) \geq M(y_{2n+1}, y_{2n+2}, t) * M(y_{2n+2}, y_{2n+3}, t) \qquad (4.3)$$

elde edilir. Böylece (4.2) ve (4.3) gereğince $n = 1, 2, ...$ için

$$M(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \geq M(y_n, y_{n+1}, t) * M(y_{n+1}, y_{n+2}, t)$$

olur. Böylece n, p pozitif tamsayıları için

$$M(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \geq M(y_n, y_{n+1}, t) * M(y_{n+1}, y_{n+2}, t/k^p)$$

olur. Buradan da $p \to \infty$ iken

$$M(y_{n+1}, y_{n+2}, t/k^p) \to 1$$

olacağından

$$M(y_{n+1}, y_{n+2}, kt) \geq M(y_n, y_{n+1}, t)$$

elde edilir. Yardıncı teorem 4.4 gereğince $\{y_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\{y_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar. $\{Px_{2n}\}$, $\{Qx_{2n+1}\}$, $\{ABx_{2n+1}\}$ ve $\{STx_{2n+2}\}$ dizileri $\{y_n\}$ nin alt dizileri olduğundan onlar da z noktasına yakınsar. Yani $n \to \infty$ iken

$$Px_{2n}, Qx_{2n+1}, STx_{2n+2} \to z$$

olur. A ile B sürekli ve $\{P, AB\}$ ikilisi de (α) tipinde uyumlu dönüşüm olduğundan Önerme 4.9gereğince $n \to \infty$ iken

$$P(AB)x_{2n+1} \to ABz, \quad (AB)^2 x_{2n+1} \to ABz$$

olur. Benzer olarak, S ile T sürekli ve $\{Q, ST\}$ ikilisi de (α) tipinde uyumlu dönüşüm olduğundan Önerme 4.9 gereğince $n \to \infty$ iken

$$Q(ST)x_{2n+2} \to STz, \quad (ST)^2 x_{2n+2} \to STz$$

dir. (4.5) de $\beta = 1$ olmak üzere $x = (AB)x_{2n+1}$ ve $y = x_{2n+2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} M(P\ (AB)x_{2n+1}, Qx_{2n+2}, kt) \ &\geq \ M(\ (AB)^2 x_{2n+1}, P\ (AB)x_{2n+1}, t) \\ &\quad * M(STx_{2n+2}, Qx_{2n+2}, t) * M(STx_{2n+2}, P(AB)x_{2n+1}, t) \\ &\quad * M(\ (AB)^2 x_{2n+1}, Qx_{2n+2}, t) * M(\ (AB)^2 x_{2n+1}, STx_{2n+2}, t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da $n \to \infty$ iken

$$M(ABz, z, kt) \geq 1 * 1 * M(z, ABz, t) M(ABz, z, t) * M(ABz, z, t) \geq M(ABz, z, t)$$

olmasını gerektirir. Böylece yardımcı teorem 4.5 gereğince $ABz = z$ olur.

(4.5) te $\beta = 1$ olmak üzere $x = Px_{2n}$ ve $y = x_{2n+1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} M(P\ (Px_{2n}), Qx_{2n+1}, kt) \ &\geq \ M(\ AB(Px_{2n}), P\ (Px_{2n}), t) \\ &\quad * M(STx_{2n+1}, Qx_{2n+1}, t) * M(STx_{2n+1}, P(Px_{2n}), t) \\ &\quad * M(AB\ (Px_{2n}), Qx_{2n+1}, t) * M(AB\ (Px_{2n}), STx_{2n+1}, t) \end{aligned}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} M(Pz, z, kt) \ &\geq \ M(z, Pz, t) * M(z, z, t) * M(z, Pz, t) * M(z, z, t) * M(z, z, t) \\ &= \ M(z, Pz, t) * 1 * M\ (z, Pz, t) * 1 * 1 \\ &\geq \ M(Pz, z, t) \end{aligned}$$

bulunur. Yardımcı teorem 4.5 gereğince $Pz = z$ elde edilir. Böylece $ABz = z = Pz$ olur.

Şimdi $Bz = z$ olduğunu gösterelim. (4.5) de $\beta = 1$ olmak üzere $x = Bz$ ve $y = x_{2n+1}$ alınır ve (4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M(P\ (Bz), Qx_{2n+1}, kt) \ &\geq \ M(\ AB(Bz), P\ (Bz), t) \\ &\quad * M(STx_{2n+1}, Qx_{2n+1}, t) * M(STx_{2n+1}, P(Bz), t) \\ &\quad * M(AB\ (Bz), Qx_{2n+1}, t) * M(AB(Bz), STx_{2n+1}, t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} M(Bz,z,kt) &\geq M(Bz,Bz,t) * M(z,z,t) * M(z,Bz,t) \\ &\quad * M(Bz,z,t) * M(Bz,z,t) \\ &= 1 * 1 * M(z,Bz,t) * M(Bz,z,t) * M(Bz,z,t) \\ &\geq M(Bz,z,t) \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Böylece yardıncı teorem 4.5 gereğince $Bz = z$ olur. $ABz = z$ olduğundan böylece $Az = z$ elde edilir.

(4.5) te $\beta = 1$ olmak üzere $x = z$ ve $y = STx_{2n+2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} M(P\ z, Q(ST)x_{2n+2}, kt) &\geq M(\ ABz), Pz, t) * M((ST)^2 x_{2n+2}, Q(ST)x_{2n+2}, t) \\ &\quad * M((ST)^2 x_{2n+2}, Pz, t) * M(AB\ z, Q(ST)x_{2n+2}, t) \\ &\quad * M(ABz, (ST)^2 x_{2n+2}, t) \end{aligned}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} M(z,STz,kt) &\geq M(z,z,t) * M(STz,STz,t) * M(STz,z,t) * M(z,STz,t) * M(z,STz,t) \\ &= 1 * 1 * M(STz,z,t) * M(z,STz,t) * M(z,STz,t) \\ &\geq M(z,STz,t) \end{aligned}$$

bulunur. Yardımcı teorem 4.5 gereğince $STz = z$ olur.

Şimdi (4.5) te $\beta = 1$ olmak üzere $x = z$ ve $y = Qx_{2n+1}$ alınır ve (4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M(Pz, Q\left(Qx_{2n+1}\right), kt) &\geq M(\ ABz, Pz, t) * M(ST\left(Qx_{2n+1}\right), Q\left(Qx_{2n+1}\right), t) \\ &\quad * M(ST\left(Qx_{2n+1}\right), Pz, t) * M(ABz, Q\left(Qx_{2n+1}\right), t) \\ &\quad * M(ABz, ST\left(Qx_{2n+1}\right), t) \end{aligned}$$

bulunur. $n \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned} M(z,Qz,kt) &\geq M(z,z,t) * M(z,Qz,t) * M(z,z,t) * M(z,Qz,t) * M(z,z,t) \\ &= 1 * M(z,Qz,t) * 1 * M(z,Qz,t) * 1 \\ &\geq M(z,Qz,t) \end{aligned}$$

olur. Böylece yardımcı teorem 4.5 ile bu $Qz = z$ olmasını gerektirir ve buradan da $STz = z = Qz$ elde edilir. Son olarak $Tz = z$ olduğunu gösterelim. (4.5) de $\beta = 1$ olmak üzere $x = z$ ve $y = Tz$ alınır ve (4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M(Pz, Q(Tz), kt) &\geq M(\ ABz, Pz, t) * M(ST(Tz), Q(Tz), t) * M(ST(Tz), Pz, t) \\ &\quad * M(ABz, Q(Tz), t) * M(ABz, ST(Tz), t) \\ &= M(z, z, t) * M(Tz, Tz, t) * M(Tz, z, t) * M(z, Tz, t) * M(z, Tz, t) \\ &= 1 * 1 * M(Tz, z, t) * M(z, Tz, t) * M(z, Tz, t) \\ &\geq M(Tz, z, t) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece yardımcı teorem 4.5 gereğince $Tz = z$ elde edilir. $STz = z$ olduğundan $Sz = z$ olur. Yukarıdaki sonuçların birleştirilmesi ile

$$Az = Bz = Sz = Tz = Pz = Qz = z$$

bulunur. Yani, z noktası A, B, S, T, P ve Q nun ortak sabit noktasıdır.

Teklik için, kabul edelim ki w $(w \neq z)$ noktası A, B, S, T, P ve Q nun birbaşka ortak sabit noktası ve $\beta = 1$ olsun. Bu durumda (4.5) gereğince

$$\begin{aligned} M(Pz, Qw, kt) &\geq M(\ ABz, Pz, t) * M(STw, Qw, t) * M(STw, Pz, t) \\ &\quad * M(ABz, Qw, t) * M(ABz, STw, t) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} M(z, w, kt) &\geq M(z, z, t) * M(w, w, t) * M(w, z, t) * M(z, w, t) * M(z, w, t) \\ &= 1 * 1 * M(w, z, t) * M(z, w, t) * M(z, w, t) \\ &\geq M(z, w, t) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece yardımcı teorem 4.11 gereğince $z = w$ elde edilir. □

Uyarı 4.13 Teorem 4.12 de eğer $P = Q$ alınırsa bizim teoremimiz Cho [8] nun sonucuna indirgenir.

Eğer Teorem 4.12 de $B = T = I_x$ (X üzerindeki birim dönüşüm) alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.14 Her $t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$ (FM-6) koşulunu sağlayan bir tam fuzzy metrik uzay olsun. A, S, P ve Q, X den kendi içine aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümler olsunlar:

(4.6). $P(X) \subset A(X)$, $Q(X) \subset S(X)$,

(4.7). $\{P, A\}$ ve $\{Q, S\}$ ikilileri (α) tipinde uyumludur,

(4.8). A ve S süreklidir,

(4.8). Her $x, y \in X$, $\beta \in (0, 2)$ ve $t > 0$ için

$$M(Px, Qy, kt) \geq M(Ax, Px, t)*M(Sy, Qy, t)*M(Sy, Px, \beta t)*M(Ax, Qy, (2-\beta)t)*M(Ax, Sy, t)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ sayısı vardır.

Bu durumda A, S, P ve Q dönüşümlerinin X içinde bir tek ortak sabit noktası vardır.

Teorem 4.12 de $A = B = S = T = I_x$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.15 Her $t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$ (FM-6) koşulunu sağlayan bir tam fuzzy metrik uzay olsun. P ve Q, X den kendi içine dönüşüm olsunlar. Eğer, her $x, y \in X$, $\beta \in (0, 2)$ ve $t > 0$ için

$$M(Px, Qy, kt) \geq M(x, Px, t) * M(y, Qy, t) * M(y, Px, \beta t) * M(x, Qy, (2-\beta)t) * M(x, y, t)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ sayısı varsa P ve Q dönüşümlerinin X içinde bir tek ortak sabit noktası vardır.

Teorem 2.3 de $P = Q$, $A = S$ ve $B = T = I_x$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.16 Her $t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ olmak üzere $(X, M, *)$ (FM-6) koşulunu sağlayan bir tam fuzzy metrik uzay olsun. P ve S, X üzerinde $P(X) \subset S(X)$ olacak şekilde (α) tipinde uyumlu dönüşüm olsunlar. Eğer, S sürekli ve her $x, y \in X$, $\beta \in (0, 2)$ ve $t > 0$ için

$$M(Px, Py, kt) \geq M(Sx, Px, t)*M(Sy, Py, t)*M(Sy, Px, \beta t)*M(Sx, Py, (2-\beta)t)*M(Sx, Sy, t)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ sayısı varsa P ve Q dönüşümlerinin X içinde bir tek ortak sabit noktası vardır.

Örnek 4.1 X kümesi $[0, 1]$ olsun ve d metriği $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlansın. Her bir $t \in [0, 1]$ ve her $x, y \in X$ için M yi

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|} \text{ ve } M(x, y, 0) = 0$$

şeklinde tanımlayalım.

$*$ işlemi $a*b=ab$ şeklinde tanımlanırsa $(X,M,*)$ tam bir fuzzy metrik uzay olur.

A, B, S, T, P ve Q dönüşümleri her $x\in X$ için

$$Ax=x,\ \ Bx=x/2,\ \ Sx=x/5,\ \ Tx=x/3,\ \ Px=x/6 \text{ ve } Qx=0$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda,

$$P(X)=[0,1/6]\subset[0,1/2]=AB(X)veQ(X)=\{0\}\subset[0,1/15]=ST(X)$$

olur.

Eğer $k=1/2$, $t=1$ ve $\beta=1$ alınırsa Teorem 4.12 in (4.5) koşulunun sağlandığı görülür. Teorem 4.12 in (4.2) ve (4.3) koşullarının sağlandığı açıktır. Üstelik, $\{P,AB\}$ ikilisi (α) tipinde uyumlu dönüşümlerdir: $\{x_n\}$ dizisi X de bir dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ ise bazı $0\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}Px_n=\lim_{n\to\infty}AB\left(x_n\right)=0$$

dır.

Benzer şekilde, $\{Q,ST\}$ ikilisi de (α) tipinde uyumlu dönüşümdür.

Böylece Teorem 4.12 in bütün koşulları sağlanır ve 0 noktası A, B, S, T, P ve Q nun tek ortak sabit noktası olur.

(4.5) koşulunun metrik versiyonu aşağıdaki gibidir.

A, B, S, T, P ve Q dönüşümleri (X,d) metrik uzayının kendi olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Px,Qy)\le k\max\{d(ABx,Px),d(STy,Qy),1/2(d(ABx,Qy)+d(STy,Px)),d(ABx,STy)\} \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $k\in(0,1)$ sayısı vardır.

(4.4) de $P=Q$ alınırsa her $x,y\in X$ ve $k\in(0,1)$ için

$$d(Px,Py)\le k\max\{d(ABx,Px),d(STy,Py),1/2(d(ABx,Py)+d(STy,Px)),d(ABx,STy)\} \tag{4.5}$$

elde edilir.

(4.5) de sırasıyla $B = T = I_x$ ve $A = B = S = T = I_x$ alınırsa $k \in (0, 1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Px, Py) \leq k \max\{d(Ax, Px), d(Sy, Py), 1/2(d(Ax, Py) + d(Sy, Px)), d(Ax, Sy)\} \tag{4.6}$$

ve

$$d(Px, Py) \leq k \max\{d(x, Px), d(y, Py), 1/2(d(x, Py) + d(y, Px)), d(x, y)\} \tag{4.7}$$

elde edilir.

Metrik uzaylar üzerinde (4.5), (4.6) ve (4.7) koşullarını sağlayan üç yada dört yada beş dönüşüm için çok sayıda sabit nokta teoremleri birçok makalede bulunabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] R. Badart, Fixed point theorems for fuzzy numbers**, Fuzzy sets and Systems 13 (1984) 291-302.**

[2] S. Banach, Theorie les operations Lineaires, **Manograie Mathematyezne, Warsaw, Poland, 1932.**

[3] B.K. Bose, D. Sahani, Fuzzy mappings and fixed point theorems, **Fuzzy Sets and Systems 21 (1987) 53-58.**

[4] D. Butnariu, Fixed poind for fuzzy mappings, **Fuzzy Sets and Systems 7 (1982) 191-207.**

[5] S.S. Chang, Fixed point theorems for fuzzy numbers**, Fuzzy sets and Systems 17 (1985) 181-187.**

[6] S.S. Chang, Y.J. Cho, B.S. Lee, J.S. Jung, S.M. Kang, Coincidence point and minimization theorems in fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 88 (1) (1997) 119-128.**

[7] S.S. Chang, Y.J.Cho, B.S. Lee, G.M. Lee, Fixed degree and fixed point theorems for fuzzy mappings, **Fuzzy sets and Systems 87 (3) (1997) 325-334.**

[8] Y.J. Cho, Fixed points in fuzzy metric spaces, **J. Fuzzy Math. 5 (4) (1997) 949-962.**

[9] Z.K. Deng, Fuzzy pseudo-metric space, **J.Math. Anal. Appl. 86 (1982) 74-95.**

[10] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contraction mappings, **J. Lond. Math. Soc. 37 (1962) 74-79.**

[11] I. Ekland, S. Gahler, Basic notions for fuzzy topology, **Fuzzy Sets and Systems 26 (1988) 333-356.**

[12] M.A. Erceg, Metric space in fuzzy set theory, **J. Math. Anal. Appl. 69 (1979) 205-230.**

[13] J.X. Fang, On fixed poind theorems in fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 46 (1992) 107-113.**

[14] B. Fisher, Mappings with a common fixed point, **Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 7 (1979) 81-84.**

[15] S. Gahler, 2-metrische Raume and ihra topologische structure, **Math. Nachr. 26 (1983) 115-148.**

[16] S. Gahler, Linear 2-normierte Raume, **Math. Nachr. 28 (1964) 1-43.**

[17] S. Gahler, Über 2-Banach Raume, **Math. Nachr. 42 (1969) 335-347.**

[18] A. George, P. Veeramani, On some results in fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 64 (1994) 395-399.**

[19] A. George, P. Veeramani, On some results of analysis for fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 90 (1997) 365-365.**

[20] M. Grabiec, Fixed poinds in fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 27 (1988) 385- 389.**

[21] V. Gregori, S. Romaguera, Some properties of fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Sys- tems, to appear.**

[22] V. Gregori, A. Sapena, On Fixed-point theorems in fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 125 (2002) 245-252.**

[23] O. Hadzic, Fixed point theorems for multi-vaued mappings in some classes of fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 29, (1989) 115-125.**

[24] O. Hadzic, Fixed point theory in probabilistic metric spaces, Serbian Academy of Scien- ces and Arts, Branch and Novi Sad, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, **1995**

[25] O. Hadzic, Fixed Point Theorems in Probabilistic Metric Spaces, Serbian Academy of Sciences and Arts, Institute of Mathematics, University of Novi Sad, Yugoslavia, **1995.**

[26] S. Heilpern, Fuzzy mappings and fixed point theorems, **J. Math. Anal. Appl. 83 (1981) 566-569.**

[27] C. Hu, Fuzzy topological spaces, **J. Math. Anal. Appl 110 (1985) 141-178.**

[28] I. Istratescu, A fixed point theorem for mappings with a probabilistic contractive iterate, **Rev. Roumaire Math. Pure Appl. 26 (1981) 431-435.**

[29] J.S. Jung, Y.J. Cho, S.S. Chang, S.M. Kang, Coincidence theorems for set-valued map- pings and Ekland's variational principle in fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Sys- tems 79 (1996) 239-250.**

[30] J.S. Jung, Y.J. Cho, J.K. Kim, Minimization theorems for fixed point theorems in fuzzy metric spaces and aplications, **Fuzzy sets and Systems 61 (1994) 199-207.**

[31] G. Jungck, Commuting mappings and fixed points, **Amer. Math. Monthly 83 (1976) 261-263.**

[32] G. Jungck, Compatiple mappings and common fixed points, **Intenat. J. Math. Math. Sci. 9 (4) (1986) 771-779.**

[33] G. Jungck, P.P. Murthy, Y.J. Cho, Compatible mappings of type (A) and common fixed points, **Math. Japonica 38 (2) (1993) 381-390.**

[34] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, **Fuzzy sets and Systems 12 (1984) 215- 229.**

[35] O. Kaleva, The completion of fuzzy metric spaces, **J. Math. Anal. Appl. 109 (1985) 194- 198.**

[36] I. Kramosil, J. Michalek, Fuzzy metric and Statistical metric spaces, **Kybernetica 11 (1975) 326-334.**

[37] B.S. Lee, Y.J. Cho, J.S. Jung, Fixed point theorems for fuzzy mappings and applications, **Comm. Korean Math. Soc. 11 (1966) 89-108.**

[38] S.N. Mishra, N. Sharma, S.L. Singh, Common fixed points of maps on fuzzy metrics spaces, **Internat. J. Math. Math. Sci. 17 (1994) 253-258.**

[39] E. Pap, O. Hadzic, R. Mesiar, A fixed point theorem in probabilistic metric spaces and an application, **J. Math. Anal. Appl. 202.(1996) 433-449.**

[40] E. Parau, V. Radu, Some remarks on Tardiff's fixed point theorem on Menger spaces, **Portugal. Math. 54, Fasc 4, 1997, 431-440.**

[41] V. Rafu, Some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, Stability problems for stochastic models, Lecture Notes in Mathematics, **vol. 1233, Springer, Berlin, 1987, pp. 125-133.**

[42] A. Razani, A Contraction Teorem in Fuzzy Metric Spaces, Hindawi Publishing Corpora- tion, **2005:3,(2005) 257-265.**

[43] B.E. Rhoades, A comparision of various definitions of contractive mappings, **Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977) 257-290.**

[44] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces, **Pacific J. Math. 10 (1960) 313-334.**

[45] B. Schweizer, H. Sherwood, R.M. Tardiff, Contractionson probablistic matric spaces: examlles and counterexamples, **Stochastica 12 (1) (1988) 5-17.**

[46] V.M. Sehgal, A.T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces, **Math. Systems Theory 6 (1972) 97-102.**

[47] S. Sessa, On weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, **Publ. Inst. Math. Beograd 32 (46) (1982) 149-153.**

[48] S. Sessa, B.E. Rhoades, S.M. Khan, On common fixed points of compatible mappings in metric and Banach spaces, **Internat J. Math. Math. Sci. 11 (2) (1988) 375-392.**

[49] P.L. Sharma, B.K. Sharma, K. Iseki, Contractive type mapping on 2-metric space, **Math. Japonica 21 (1976) 67-70**

[50] S. Sharma, On fuzzy metric space, **Southeast Asian J. Math. (2002)26:133-145.**

[51] S. Sharma, Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces, **Fuzzy Sets and Systems 127 (2002) 345-352.**

[52] S.L. Singh, B.D. Pant, Common fixed point theorem in probabilitic metric spaces and extension to uniform spaces Honam, **Math. J. 6 (1981) 1-12.**

[53] R.M. Tardiff, Contraction maps an probabilistic metric spaces, **J. Math. Anal. Appl. 165 (1992) 517-523.**

[54] Z. Wenzhi, Probabilistic 2-metric spaces, **J. Math. Research Expo. 2 (1987) 241-245.**

[55] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, **Inform. and Control 8 (1965) 338-353.**