Bazı Manifoldların Warped Çarpımları Üzerine

Yasemin Emine Cengiz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ekim 2011

On The Warped Products of Some Manifolds

Yasemin Emine Cengiz

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

October 2011

Bazı Manifoldların Warped Çarpımları Üzerine

Yasemin Emine Cengiz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

Ekim 2011

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Yasemin Emine Cengiz’in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Bazı Manifoldların Warped Çarpımları Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Üye : Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, bazı manifoldlar üzerinde warped çarpım yapısını incelemektir. Fernando Dobarro ve Enrique Lami Lami Dozo tarafından yayınlatılan "Scalar Curvature and Warped Products of Riemann Manifolds" ile Bang-Yen Chen tarafından yayınlatılan "Warped Products in Real Space Form" çalışmalarında verilen teoremler detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Giriş bölümünde, Riemann ve yarı-Riemann manifoldları üzerinde warped çarpımı yapısının tarihsel gelişim süreci açıklanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, yapılacak hesaplamalarda yardımcı olacak olan Riemann manifoldları, yarı-Riemann manifoldları ve Çarpım uzayları için bazı önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise yarı-Riemann manifoldlarda warped çarpımı kavramı ele alınmış ve çarpım manifoldları da kullanılarak warped çarpım manifoldlarında bir eğrinin geodezik olması için gerekli şartlar araştırılmıştır. Daha sonra warped çarpım eğriliği bulunmuştur.

Çalışmanın son bölümünde ise, Riemann manifoldlarda warped çarpımı üzerinde skalar eğrilik hesaplanmıştır. Ayrıca reel uzay formlar üzerinde warped çarpımı ile ilgili bazı teoremler ve ispatları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çarpım manifoldları, warped çarpımı, eğrilikler

SUMMARY

The aim of this study is to examine the structure of warped product on some manifolds. In this thesis, some theorems have been examined in detail, proved in the studies, titled “Warped Products in Real Space Form” by Bang-Yen Chen and titled “Scalar Curvature and Warped Products of Riemann Manifolds” by Fernando Dobarro and Enrique Lami Lami Dozo.

In the introduction section, the historical development of the structure of warped product on the Riemann and semi-Riemann manifolds is explained.

In the second chapter of the study, significant definitions and theorems for the Riemann manifolds, semi-Riemann manifolds and product space which are used for all calculations are presented.

In the third chapter, the concept of warped product on the semi-Riemann manifolds is discussed and necessary conditions for a curve to be geodesic on the warped product manifolds are investigated as well using the product manifolds. Then the curvature of warped product is found.

In the last chapter, scalar curvature of warped products on the Riemann manifolds is calculated. Additionally, some theorems and proofs regarding warped product on the Real space forms are presented.

Key words: Product manifolds, Warped products, Curvatures

TEŞEKKÜR

Bazı Manifoldların Warped Çarpımları Üzerine adlı tez çalışmamda ve derslerimde beni yönlendiren bana her türlü olanağı sağlayan danışmanım

Sayın Doç. Dr. Cumali Ekici

hocama teşekkür ederim.

Eskişehir 2011 Yasemin Emine CENGİZ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{E}^n$	$n-$ boyutlu Öklid uzay
$T_p(M)$	Vektör uzayı
$B \times F$	Çarpım manifoldu
$B \times_f F$	Warped çarpım manifoldu
D	Levi-Civita koneksiyonu
Δ	Laplasiyen Operatörü
K	Kesit eğriliği
Ric	Ricci eğrilik tensörü
R_{ij}	Ricci eğriliği
$<,>$	Öklidyen skalar çarpım
g	Metrik tensör
π	Tabii izdüşüm
v	İndeks
$[,]$	Lie parantez operatörü
H	Yüzeyin ortalama eğriliği
D_X	X vektör alanına göre kovaryant türev
f	Warping fonksiyon
I^q	q-uncu Esas form

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Riemann manifoldlarının warped yapı kavramı ilk olarak O'Neill ve Bishop tarafından tanımlanmıştır. Yazarlar, warped yapıları negatif kesit eğriliğinin kontrol edilebildiği uzaylarda Riemann manifoldlarını inşa etmek için kullanmışlardır (O'Neill and Bishop, 1969).

Son zamanlarda bu manifoldların geometrik yönü birçok bilim adamlarının dikkatini çekmiştir (Bang-Yen, 2004; Şahin, 2006). Yüksek yerçekim alanlı bir cisim etrafındaki uzayın, warped çarpım manifoldu üzerinde modellenebilmesi bulunduktan sonra çoğu araştırma makaleleri farklı yapılar altındaki manifoldların warped çarpım altmanifoldlarının varlığı ile ortaya çıkmıştır. Bu sebepten warped çarpımları doğal bir şekilde diferensiyel geometri çalışmalarında kullanılmıştır. Bir dönel yüzey, liftleri dönme eğrilerinin farklı pozisyonlarda ve fiberleri dönel çemberler olan bir warped çarpımıdır.

B ve F yarı-Riemann manifoldları olsun. B manifoldunun metrik tensörünü g_B ve F manifoldunun metrik tensörünü ise g_F ile gösterelim. O halde $B \times F$ yarı-Riemann çarpım manifoldunun metrik tensörü

$$\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$$

şeklindedir. Burada π ve σ, sırasıyla, $B \times F$ çarpım manifoldunun B ve F manifoldları üzerindeki izdüşümleridir. $f : B \to (0, \infty)$ fonksiyonu B manifoldu üzerinde pozitif bir fonksiyondur. Bu fonksiyona warped çarpımının warping fonksiyonu denir (O'Neill and Bishop, 1969). $\mathbf{M} = B \times_f F$ warped çarpımı, $x \in \mathbf{M}$ noktasındaki herhangi bir $X \in T_x\mathbf{M}$ tanjant vektörü için,

$$\| X \| = \| \pi_*(X) \|^2 + f^2(\pi(x)) \| \eta_*(X) \|^2$$

olacak şekilde Riemann yapı ile donatılmış $B \times F$ manifoldudur. Böylece $g = g_B + f^2 g_F$ olur. Warped çarpım notasyonu fizikte olduğu gibi diferensiyel geometride de bazı önemli roller oynar (Beem et al., 1982; O'Neill, 1983). Örneğin, bir yıldız kütlesi veya kara delik etrafındaki dış uzayı tanımlayan Schwarzchild uzay zamanın en iyi göreceli modeli bir warped çarpımı olarak verilir (O'Neill, 1983).

Diferensiyel geometride izoperimetrik eşitsizlik, Chern-Lashof eşitsizliği ve Gauss-Bonnet teoremi gibi birçok önemli sonuçlar incelenmiştir. Son yıllarda, bir altmanifoldun iç invaryantları ve dış invaryantları arasında basit ilişki bulma problemi değişik yazarlar tarafından incelenmiştir.

Sonraları (Beem et al., 1982) çalışmasında "Einstein's Field Equation" için gerekli birçok çözümün Lorentzian warped yapılar için de ifade edilebileceği belirtilmiştir. Ayrıca O'Neill warped yapı bileşenlerinin eğrilikleri vasıtasıyla bu yapıların eğrilik formüllerini bulmuştur (O'Neill, 1983). Besse ise warped yapıları Riemann submersiyonları olarak dikkate almış ve özel durumlar için bazı sonuçlar elde etmiştir (Besse, 1987). 4-boyutlu Einstein denklemlerinin tüm çözümleri, 4-boyutlu uzay zamanının iki yüzeyli genel bir warped çarpım yapısı gibi kabul edilmesiyle elde edilmiştir (Katanaev et al. 1999).

Bu çalışmada, çarpım manifoldları üzerinde inşa edilebilen Riemann manifoldların warped çarpımları üzerinde geodezikler ve eğrilikler, özel yarı-Riemann metrik olan warped metrikler ve reel uzay formların warped çarpımları verilmiştir.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayı

Bu kısımda, çalışmamızda sıkça kullanılan kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1: Boş olmayan bir A cümlesi ve K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

(1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

(2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2: 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. $\mathbb{R}^3$ afin uzayında Öklid iç çarpımı

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlıdır. Böylece $(\mathbb{R}^3, <, >)$ yapısı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

Bir reel afin uzayda tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanırlar. Bununla beraber reel afin uzaylar ile Öklid uzayları farklıdırlar. Çünkü, bir V reel vektör uzayı ile birleşen A afin uzayındaki metrik özelikler V vektör uzayında seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar; bu nedenle Öklid uzayındaki özelliklerle diğer afin uzaylardaki özellikler farklı olurlar (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3: $p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longrightarrow d(p, q) = \left[\sum_{i=1}^{3} (p_i - q_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(p, q)$ reel sayısına da $p, q \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.4:

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ uzayında Öklid metriği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.5: $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^3$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{yx}\| \, \|\overrightarrow{yz}\|}$$

eşitliğinden hesaplanan θ reel sayısıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6: $\mathbb{E}^3$ uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne, $\mathbb{R}^3$ uzayında karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine $\mathbb{E}^3$ uzayının bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Sonuç 2.1.7: $\mathbb{E}^3$ uzayında $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$ ve $E_3 = (0,0,1)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar. $<\overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j}>= \delta_{ij}$ olduğundan, $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$ sistemi $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir ortanormal bazdır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.8: $\mathbb{E}^3$ uzayındaki $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.9: $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayında parametrik eğri,

$$\begin{aligned} \alpha : \quad I &\rightarrow \mathbb{E}^{n+1} \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_{n+1}(t)) \end{aligned}$$

olsun. $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayı üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere $\forall t \in I$ için $\dfrac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ ise α eğrisine X vektör alanının $\alpha(0) = P$ noktasından geçen bir integral eğrisi denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.10: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $[,] : V \times V \rightarrow V$ dönüşümü de;

1) 2-lineer

2) Alterne $\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için; $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$,

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V vektör uzayı üstünde bir Lie operatörü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.11: $\mathcal{F}(M)$, M manifoldu üzerinde bütün diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $f \in \mathcal{F}(M)$ fonksiyonunun $M \times N$ manifoldunun lifti $\widetilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{F}(M \times N)$ şeklindedir. $x \in T_p(M)$ ve $q \in N$ ise (p,q) noktasında x vektörünün lifti $\widetilde{x}$, $T_{(p,q)}(M)$ vektör uzayında tek vektördür öyleki $d\pi(\widetilde{x}) = x$ olur. $X \in \chi(M)$ vektör alanının $M \times N$ çarpım manifolduna lifti $\widetilde{X}$ vektör alanıdır, onun her (p,q) noktasındaki değeri ise bu noktada X_p vektör alanının liftidir. Çarpım koordinat sisteminde $\widetilde{X}$ diferensiyellenebilirdir. Böylece $X \in \chi(M)$ vektör alanının $M \times N$ manifolduna lifti $\chi(M \times N)$ uzayının bir tek elemanıdır. Bu lift vektör alanı π ile X vektör alanına taşınır, σ ile de N manifoldu üzerinde sıfır vektör alanına taşınır.

Bütün $\widetilde{X}$ yatay liftlerin kümesi $\mathcal{L}(M)$ ile gösterilir. N manifoldu üzerindeki fonksiyonlar, tanjant vektörler ve vektör alanları, σ izdüşüm fonksiyonunun yukarıdaki gibi kullanılmasıyla $M \times N$ manifolduna yükseltilir (lifti alınır). Dikkat edilirse $\mathcal{L}(M)$ ve simetriği olan dikey lifti $\mathcal{L}(N)$, $\chi(M \times N)$ uzayının alt vektör uzayıdır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.12: Bütün yatay ve dikey liftlerin kümesi, sırasıyla, $\mathcal{L}(M)$ ve $\mathcal{L}(N)$ olsun.

(1) Eğer $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{L}(M)$ ise $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = [X,Y]^{\sim} \in \mathcal{L}(M)$ olur. Bu eşitlik $\mathcal{L}(N)$ için de geçerlidir.

(2) $\widetilde{X} \in \mathcal{L}(M)$ ve $\widetilde{V} \in \mathcal{L}(N)$ ise $\left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0$ olur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.13: $\mathbb{E}^n$ uzayında 1-formların cümlesi $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} d: & C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R}) & \rightarrow & \chi^*(\mathbb{E}^n) \\ & f & \rightarrow & df \end{array}$$

öyle ki, $\forall X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ için $df(X) = X(f)$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna diferensiyel operatör denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.14:

$$\begin{array}{rccc} Grad: & C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R}) & \rightarrow & \chi(\mathbb{E}^n) \\ & f & \rightarrow & Gradf \end{array}$$

öyle ki, $\mathbb{E}^n$ uzayında $\{x_1, ..., x_n\}$ bir koordinat sistemi olmak üzere

$$Gradf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı $Grad$ fonksiyonuna, $\mathbb{E}^n$ uzayında $\{x_1, ..., x_n\}$ koordinat sistemine göre gradient fonksiyonu denir ve ∇ sembolü ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.15: $f \in \mathcal{F}(M)$ fonksiyonunun gradienti $gradf$, $df \in \chi^*(M)$ diferensiyeline metrik olarak eşit bir vektör alanıdır. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$< gradf, X >= df(X) = X(f)$$

şeklindedir. Koordinat sistemi açısından $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ dır, burada

$$gradf = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$$

şeklinde olur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.16: $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ bir dönüşüm ve $\overrightarrow{v} \in T_{\mathbb{E}^n}(p)$ olsun. $\mathbb{E}^m$ uzayının $t \to f(\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{v})$ eğrisinin $t = 0$ anındaki hız vektörü

$$(f_*)_p(\overrightarrow{v}_p) \in T_{\mathbb{E}^m}(f(p))$$

ise

$$(f_*)_p : T_{\mathbb{E}^n}(p) \to T_{\mathbb{E}^m}(f(p))$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun p noktasındaki türev dönüşümü denir. Burada $\forall \overrightarrow{v}_p \in T_{\mathbb{E}^n}(p)$ ve $f = (f_1, f_{2,} ..., f_m)$ için

$$f_*(\overrightarrow{v}_p) = \sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{v}_p[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_{f(p)}$$

olur. f_* fonksiyonunun lineer dönüşümünün eki

$$f^* : T^*_{\mathbb{E}^m}(f(p)) \to T^*_{\mathbb{E}^n}(p)$$

ile gösterilen bir diğer lineer dönüşümdür. Burada f^* fonksiyonunun belirtilmesinde yeterli olan matris f fonksiyonunun Jakobian matrisinin transpozudur. f^* fonksiyonunu

$$[f^*(W)]_p\,(\overrightarrow{v}_p) = W\,|_{f(p)}\,[f_*(\overrightarrow{v}_p)]$$

şeklinde tanımlayabiliriz (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.17: $f \in \mathcal{F}(M)$ fonksiyonunun Hessian'ı, fonksiyonun ikinci kovaryant türevidir. Yani,

$$H^f = D(Df)$$

olur (O'Neill, 1983).

Yardımcı Teorem 2.1.18: f fonksiyonunun H^f Hessian'ı, simetrik $(0,2)$ tipinde tensör alanıdır. Öyle ki $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H^f(X,Y) &= XY(f) - (D_X Y)f \\ &= < D_X(\operatorname{grad} f), Y > \end{aligned}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983).

2.2 Riemann Manifoldu ve Hiperyüzey

Bu kısımda, manifold üzerinde koneksiyon ve bazı dönüşümler ifade edilmiştir.

Tanım 2.2.1: M bir topolojik uzay olsun. M uzayı için aşağıdaki önermeler doğru ise M uzayı bir $n-$boyutlu topolojik manifold veya $n-$manifold adını alır:

(1) M uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

(2) M uzayı $n-$boyutlu lokal Öklidyendir.

(3) M uzayı açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.2: M bir $n-$boyutlu topolojik manifold olsun. M manifoldu üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M manifolduna C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.3: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $P \in M$ üzerinde bir vektör alanı diye

$$X: \quad M \to \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

birebir ve örten olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.4: M bir C^∞ manifold olsun. M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$<\,,\,>: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M manifolduna bir Riemann manifoldu denir. Burada, $<,>$ işlemi M manifoldu üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik adını alır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.5: M bir C^∞ manifold olsun. M manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D: \quad \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} i) \quad & D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ, \\ ii) \quad & D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y, \end{aligned}$$

özellikleri sağlanıyorsa D fonksiyonuna M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve D_X operatörüne de X vektör alanına göre kovaryant türev operatörü denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.2.6: M yarı-Riemann manifoldu olsun. M manifoldu üstünde bir D afin koneksiyonu

(1) C^{∞} sınıfındandır.

(2) M manifoldunun bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$D_XY - D_YX = [X, Y]$$

olur.

(3) M manifoldunun bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall P \in A$ için

$$X_P < Y, Z >= < D_XY, Z >|_P + < Y, D_XZ >|_P$$

özelliklerini sağlanıyorsa, D koneksiyonuna, M manifoldu üstünde bir Riemann koneksiyonu ve D_X operatörüne de X vektör alanına göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.2.7: $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında $(n-1)-$boyutlu bir hiperyüzey diye $\mathbb{E}^n$ uzayındaki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset \mathbb{E}^n \middle| \quad \begin{array}{rccl} f: & U & \xrightarrow{dif.bilir} & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = c \end{array} , \ U \text{ açık}, \ c = \text{sabit} \right\}$$

olmak üzere, $\nabla f|_P \neq 0$, her $P \in M$ biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.8: $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve N, M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı olarak verilsin. $\mathbb{E}^n$ uzayında Riemann koneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M hiperyüzeyi üzerinde şekil operatörü veya M hiperyüzeyinin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.9: $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde $q-$uncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$\begin{array}{rrcll} I^q: & \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \\ & (X, Y) & \rightarrow & I^q(X, Y) & = < S^{q-1}(X), Y > \end{array}$$

şeklinde tanımlı, I^q fonksiyonuna denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.10: $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rrcll} K: & M & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ & P & \rightarrow & K(P) & = \det S(P) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan K fonksiyonuna M hiperyüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M hiperyüzeyinin P noktasındaki Gauss eğriliği denir (Oprea, 1997).

Tanım 2.2.11: $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M olsun.

$P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll} H: & M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \rightarrow & H(P) & = iz\,(S(P)) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan H fonksiyonuna M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M hiperyüzeyinin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Oprea, 1997).

Tanım 2.2.12: $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve M hiperyüzeyinin şekil operatörü S olsun. M hiperyüzeyinin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ şekil operatörünün karakteristik değerlerine M hiperyüzeyinin bu noktadaki asli eğrilikleri denir. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M hiperyüzeyinin P noktasındaki asli eğrilik vektörleri veya asli eğrilik doğrultuları denir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.3 Simetrik Bilineer Formlar

Bu kısımda vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer formlar ve skalarla çarpım uzayları ifade edilmiştir.

Tanım 2.3.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için

$i)$ $g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$

$ii)$ $g(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = ag(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + bg(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$,

$g(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}) = ag(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + bg(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.2: Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma bir skalar çarpma denir. V reel vektör uzayı üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.3: V bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g\mid_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.4: $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ iken $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ise $\overrightarrow{v}$ ile $\overrightarrow{w}$ vektörleri diktir denir ve $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ şekilinde gösterilir. V reel vektör uzayının bir altuzayı W olmak üzere,

$$W^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V : \overrightarrow{v} \perp W\}$$

olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V reel vektör uzayının dik altuzayı denir. $W^{\perp}$ altuzayı, W alt uzayının ortogonal komplemanı olamaz. Çünkü $W + W^{\perp}$ uzayı genellikle V reel vektör uzayının tamamı değildir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.3.5: W uzayı bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman,

$i)$ $boyW + boyW^{\perp} = boyV$

$ii)$ $(W^{\perp})^{\perp} = W$

özellikleri vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.6: α eğrisinin hız vektör alanı T, eğri boyunca paralel ise, yani kendi kendine paralel ise α eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri adı verilir. Böylece $D_T T = 0$ olur (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.7: Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma g olsun. Bir $\overrightarrow{v} \in V$ vektörünün normu

$$\| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{| g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) |}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de ortonormal sistem denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.3.8: Bir $V \neq \{\overrightarrow{0}\}$ skalar çarpım uzayı bir ortanormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.3.9: V reel vektör uzayı için bir ortanormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, $i = 1, ...n$ olmak üzere $\forall$ $\overrightarrow{v} \in V$ vektörü

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\overrightarrow{v}, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.10: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.4 Yarı-Riemann Manifoldlar

Bu kısımda, çalışmamızda kullanılan koneksiyon, eğrilikler ve onların özellikleri gibi kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.4.1: M bir C^{∞} manifold olsun. $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_PM olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} g_P : \ T_PM \times T_PM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X_P, Y_P) & \longrightarrow & g_P(X_P, Y_P) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensörüne M manifoldu üzerinde bir metrik tensör veya indefinite metrik denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.2: M bir C^{∞} manifold olsun. M manifoldu bir g metrik tensör ile donatılmışsa, M manifolduna bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.3: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.4: $\mathbb{R}^n_p$ uzayı üzerinde $u^1, ..., u^n$ doğal koordinatlar olsun. Eğer

$$V \text{ ve } W = \sum W_i \partial_i$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^n_p$ üzerinde vektör alanı iseler,

$$D_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W vektör alanının V vektör alanına göre kovaryant türevi denir. Burada, $\{\partial_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}^n_p)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.5: M bir C^{∞} manifold olsun. M manifoldu üzerinde bir D koneksiyonu,

$i) D_V W,\ V$ vektör alanına göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

$ii) D_V W,\ W$ vektör alanına göre $\mathbb{R}$ lineerdir.

$iii) D_V(fW) = V(f)W + fD_V W,\ \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

olacak şekilde

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

fonksiyonudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.6: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$i)\ [X, Y] = D_X Y - D_Y X$

$ii)\ Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$

olacak şekilde bir tek D koneksiyonu vardır. D koneksiyonuna M manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu denir ve Levi-Civita koneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.7: M bir Riemann manifoldu ve M manifoldu üzerindeki Riemann koneksiyonu D olsun. O zaman, M manifoldu üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilen eğri boyunca geodezik eğrilik vektör alanı diye, bu eğrinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere, $D_T T$ vektör alanına denir.

$$\begin{aligned} k_g :\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow k_g(t) = \| D_T T \| \end{aligned}$$

olarak tanımlanan k_g fonksiyonuna da α eğrisinin geodezik eğrilik fonksiyonu denir (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 2.4.8: Levi-Civita koneksiyonu D olan bir yarı-Riemann manifold M olsun. $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X,\ Y,\ Z) &\longrightarrow R(X,Y)Z = D_{[X,Y]}Z - D_X D_Y Z - D_Y D_X Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M manifoldu üzerinde $(1,3)$ tensördür. Bu tensöre M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.4.9: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

eşitlikleri vardır (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.10: M bir yarı-Riemann manifold ve $P \in M$ noktasındaki $X_P,\ Y_P$ tanjant vektörlerinin gerdiği T_PM tanjant uzayının 2-boyutlu bir non-dejenere altuzayı Π olsun.

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına, Π altuzayının kesit eğriliği denir. M manifoldu sabit kesit eğriliğine sahipse M manifolduna sabit eğriliklidir denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.4.11: Eğer M manifoldu sabit bir c eğriliğine sahipse M manifoldunun eğrilik tensörü $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.12: (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, $\chi(M)$ uzayının bir bazı olsun.

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{S} \;:\chi(M) & \longrightarrow & \chi(M) \\ X & \longrightarrow & \widetilde{S}(X) = -\sum\limits_{i=1}^{n} R(X_i, X)X_i \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $\widetilde{S}$ operatörüne M manifoldunun Ricci operatörü denir. $\widetilde{S}$ yardımı ile M manifoldunun Ric veya S ile gösterilen Ricci eğrilik tensörü,

$$\begin{array}{rlcll} Ric: & \chi(M) \times \chi(M) & \longrightarrow & C^{\infty}(M, \mathbb{R}) & \\ & (X,\ Y) & \longrightarrow & S(X,Y) = Ric(X,Y) & = g(\widetilde{S}(X), Y) \\ & & & & = -g(\sum\limits_{i=1}^{n} R(X_i, X)X_i, Y) \end{array}$$

olarak tanımlanan bir $(0, 2)$ tensördür (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.4.13: $(N, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$h(X, Y) = g(X, Y)\widetilde{H}$$

eşitliği sağlanıyorsa M manifolduna total umbilik altmanifold adı verilir.

Eğer

$$\widetilde{g}(h(X, Y), \widetilde{H}) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M manifoldu üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M manifolduna pseudo-umbilik altmanifold denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.4.14: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $T_P M$ uzayının bir ortanormal bazı ve $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, $i = 1, ..., n$ olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} R_{ijk}^{k} \quad \text{veya} \quad \rho = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

değerine M manifoldunun skalar eğriliği denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.15: $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun C^{∞} altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ manifoldundaki metrik g olsun.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & M & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ & P & \longrightarrow & \phi(P) = P \end{array}$$

inclusion (daldırma) dönüşümü için $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$\phi_* \mid p : T_P M \to T_P \widetilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$\phi^* \mid p : T_P \widetilde{M}^* \to T_P M^*$$

olmak üzere, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\phi^* \mid_p (g_p)(X_p, Y_p) = g(\phi_*(X_p), \phi_*(Y_p))$$

eşitliği ile tanımlı $\phi^* \mid_p (g_p),\ M$ manifoldu üzerinde bir metrik ise M manifolduna $\widetilde{M}$ manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.16: M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall P \in M$ için $T_P M^{\perp}$ uzayının boyutuna M manifoldunun dik tümleyeninin boyutu (codimension), $T_P M^{\perp}$ uzayının indeksine de M manifoldunun dik tümleyeninin indeksi (co-indeksi) denir (O'Neill, 1983).

M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olduğunda

$$T_P \widetilde{M} = T_P M \oplus T_P M^{\perp}$$

olduğundan $X_P \in T_P \widetilde{M}$ için tanjant ve normal bileşenleri yardımıyla

$$X_p = \tan X_p + nor X_p$$

yazılır. Burada $\tan X_P \in T_P M,\ nor X_P \in T_P M^{\perp}$ olur. Ortogonal izdüşümlerin sonucu olarak,

$$\tan : T_P \widetilde{M} \to T_P M$$

$$nor : T_P \widetilde{M} \to T_P M^{\perp}$$

dönüşümleri $\mathbb{R}-$lineerdir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.17: $\forall\ X,\ Y \in \chi(M)$ ve $\widetilde{D}$, $\chi(E^n)$ üzerinde koneksiyon olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} h:\ \chi(M)\ \times\ \chi(M) & \longrightarrow & \chi(M)^{\perp} \\ (X,Y) & \longrightarrow & h(X,Y) = nor \widetilde{D}_X Y \end{array}$$

şeklinde tanımlı h dönüşümü 2- lineer ve simetriktir. h fonksiyonuna M manifoldunun şekil tensörü veya ikinci temel tensörü denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.18: M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $\widetilde{M}$ manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\widetilde{D}$ olsun.

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{D}:\ \chi(M)\ \times\ \chi(\widetilde{M}) & \longrightarrow & \chi(\widetilde{M}) \\ (X,Y) & \longrightarrow & D_X Y = \tan \widetilde{D}_X Y \end{array}$$

indirgenmiş fonksiyonuna M yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş koneksiyon denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.19: M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. D ve $\widetilde{D}$, sırasıyla, M ve $\widetilde{M}$ manifoldları üzerindeki Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere $\forall\ X,\ Y \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$\widetilde{D}_X Y = D_X Y + h(X,Y)$$

eşitliğine M manifoldunun Gauss denklemi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.20: $M \subset \widetilde{M}$ ve M yarı-Riemann hiperyüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı U olsun. $\forall V, W \in \chi(M)$ için,

$$< S(V), W >=< h(V, W), U >$$

olacak şekilde ki S, $(1,1)$ tensör alanına M hiperyüzeyinin şekil operatörü denir. Her bir $P \in M$ noktasında $S : T_P M \rightarrow T_P M$ bir lineer operatör belirtir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.21: $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ yarı-Riemann manifoldları, $g_{\widetilde{M}}$ ve $g_{\widetilde{N}}$ metrikleri ile verilsin.

$$\Psi : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$$

dönüşümü diffeomorfizm ve $c \neq 0$ sabit olmak üzere

$$\Psi^*(g_{\widetilde{N}}) = c g_{\widetilde{M}}$$

ise Ψ dönüşümüne c katsayısının homotetisi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.22: M, $\widetilde{M}$ bir yarı-Riemann hiperyüzeyi olmak üzere, M hiperyüzeyinin ikinci temel tensörü sıfır ise M hiperyüzeyine total geodeziktir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.23: M ve N birer C^∞ yarı-Riemann manifoldları olsun. f, M manifoldundan N manifolduna tanımlanan bir C^∞ fonksiyon olmak üzere, (f_*) jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M manifoldunun her bir P noktası için birebir ise f fonksiyonuna bir immersiyon denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.4.24: M ve N birer C^∞ yarı-Riemann manifoldları olsun. M manifoldundan N manifolduna tanımlanan f fonksiyonu bir immersiyon olmak üzere $\forall\ X,\ Y \in T_PM$ için,

$$g(f_*(X), f_*(Y)) = g(X, Y)$$

ise f fonksiyonuna bir izometrik immersiyon adı verilir. Burada g metriği, T_PM uzayından indirgenmiş metriktir (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.4.25: M, C^∞ yarı-Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun bir $P \in M$ noktasındaki kotanjant uzayı $T_P^*(M)$ olsun. Buna göre, bir

$$w : M \to \bigcup_{P\in M} T_P^*(M)$$

fonksiyonu için

$$\pi o w : M \to M$$

özdeşlik fonksiyonu olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{P\in M} T_P^*(M) \to M$$

fonksiyonu mevcut ise w dönüşümüne M manifoldu üstünde bir 1-form denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.4.26: M bir Riemann manifoldu, M manifoldunun k-boyutlu altmanifoldu $\widetilde{M}$ ve M manifoldunun Riemann koneksiyonu D, eğrilik tensörü R, $\widetilde{M}$ manifoldunun Riemann koneksiyonu $\widetilde{D}$, eğrilik tensörü $\widetilde{R}$, ikinci temel tensörü V olsun. O zaman $\forall\ X,\ Y,\ Z \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\tan(R(X,Y)Z) = \widetilde{R}(X,Y)Z + \tan\{D_XV(Y,Z) - D_YV(X,Z)\}$$

denklemi $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde genelleştirilmiş Gauss eğrilik denklemi ve

$$\begin{aligned} nor(R(X,Y)Z) &= V(X, \widetilde{D}_YZ) - V(Y, \widetilde{D}_XZ) - V([X,Y], Z) \\ &\quad + nor\{D_XV(Y,Z) - D_YV(X,Z)\} \end{aligned}$$

denklemine de $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde genelleştirilmiş Codazzi-Mainardi denklemi denir (Hacısalihoğlu, 2004).

2.5 Çarpım Uzayları

Bu kısımda çarpım manifoldları ve çarpım uzayları için tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Tanım 2.5.1: X boş olmayan bir küme ve τ da X kümesinin kuvvet kümesi olan $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kolleksiyonu olsun.

T-1) X ve ϕ kümeleri τ ya aittir.

T-2) τ nun herhangi bir alt kolleksiyonuna ait kümelerin birleşimi yine τ ya aittir.

T-3) τ ya ait iki kümenin kesişimi yine τ ya aittir.

özellikleri sağlanıyorsa τ ya X kümesi üzerinde bir topoloji denir. τ kolleksiyonu X kümesi üzerinde bir topoloji ise (X, τ) sıralı ikilisine topolojik uzay denir (Koçak, 2004).

Tanım 2.5.2: J bir indis kümesi olmak üzere $j \in J$ için X_j boş olmayan bir küme ve $X = \Pi_{j \in J} X_j$ olsun. $i \in J$ için $\pi_i((x_j)_{j \in J}) = x_i$ şeklinde tanımlı $\pi_i : X \to X_i$ fonksiyonuna izdüşüm (projeksiyon) fonksiyonu denir (Koçak, 2004).

Tanım 2.5.3: (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzayları verilsin. X_1 ve X_2 kümelerinin herhangi açık alt kümeleri, sırasıyla, U ve V olmak üzere $X_1 \times X_2$ kartezyen çarpımının bütün alt kümelerinin $U \times V$ formundaki kolleksiyonu $X_1 \times X_2$ üzerindeki topoloji için bir bazdır. Bu topolojiye çarpım topolojisi denir ve böylece $X_1 \times X_2$ topolojik uzayı X_1 ve X_2 topolojilerinin çarpımı adını alır. Burada

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1,\ \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

izdüşüm fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır (Brickell and Clark, 1970).

Tanım 2.5.4: M ve N iki manifold ve bu manifoldların açık alt kümeleri, sırasıyla, U ve V olsun.

$\phi : (x^1, ..., x^m) : U \to \mathbb{R}^m$, $\psi : (y^1, ..., y^n) : V \to \mathbb{R}^n$, M ve N manifoldlarının koordinat sistemleri olmak üzere $\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ çarpım fonksiyonu

$$(\phi \times \psi)(p, q) = (x^1(p), ..., x^m(p), y^1(q), ..., y^n(q))$$

şeklinde tanımlanır. $(\phi \times \psi)$ ifadesi $M \times N$ manifoldunun çarpım koordinat sistemidir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.5: M ve N iki manifold olmak üzere, $M \times N$ çarpım koordinat sistemleri kümesi, $M \times N$ manifoldu üzerinde bir atlas oluşturuyorsa bu manifolda M ve N manifoldlarının çarpım manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.6: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) terimleri X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 \in N$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğundan

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Balcı, 2000).

Tanım 2.5.7: (X, d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her Cauchy dizisi X uzayının bir noktasına yakınsıyorsa X uzayına tam metrik uzay denir

(Balcı, 2000).

Teorem 2.5.8: $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^k$ standart uzayının bir A alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart A kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır (Koçak, 2004).

BÖLÜM 3
WARPED ÇARPIMI

Bu bölümde iki yarı-Riemann manifoldun warped çarpımı ve bunun bazı özellikleri, warped çarpımın geodezikleri ve eğrilikleri incelenmiştir.

3.1 Warped Çarpımları

B ve F yarı-Riemann manifoldları verilsin. B manifoldunun metrik tensörünü g_B ve F manifoldunun metrik tensörünü ise g_F ile gösterelim. O halde $B \times F$ yarı-Riemann çarpım manifoldunun metrik tensörü

$$\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F) \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada π ve σ, $B \times F$ çarpım manifoldunun, sırasıyla, B ve F manifoldları üzerindeki izdüşümleridir.

Tanım 3.1.1: Kabul edelim ki B ve F iki yarı-Riemann manifoldlar ve $f : B \to (0, \infty)$, $f > 0$, B manifoldu üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $\mathbf{M} = B \times_f F$ warped çarpımı

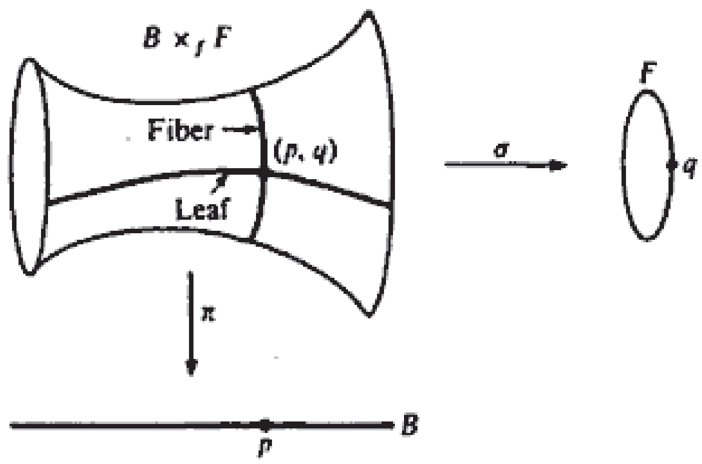
$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F) \tag{3.2}$$

metrik tensörü dahilinde $B \times F$ çarpım manifoldudur. Eğer x, (p, q) noktasında $B \times F$ çarpım manifoldunun teğeti ise o zaman

$$g(x, x) = g_B(d\pi(x), d\pi(x)) + f^2(p) g_F(d\sigma(x), d\sigma(x)) \tag{3.3}$$

olur.

f warping fonksiyonu 1 olduğunda $B \times_f F$ manifoldu, yarı-Riemann çarpım manifoldu olur. Burada B manifolduna $\mathbf{M} = B \times_f F$ çarpım manifoldunun tabanı, F manifoldu ise fibre olarak adlandırılır.



Şekil 3.1. $\mathbf{M} = B \times_f F$ warped çarpımı

Tanım 2.1.15 dikkate alındığında

$$T_B^*(\pi(p)) = \{k \mid k : T_B(\pi(p)) \times T_B(\pi(p)) \to \mathbb{R}\}$$

ve

$$T_F^*(\pi(q)) = \{t \mid t : T_F(\pi(q)) \times T_F(\pi(q)) \to \mathbb{R}\}$$

olduklarından

$$g_B : T_p(B) \times T_p(B) \to C^\infty(B, \mathbb{R}) \text{ ve } g_F : T_q(B) \times T_q(B) \to C^\infty(F, \mathbb{R})$$

metrikleri, sırasıyla, $T_B^*(\pi(p))$ ve $T_F^*(\pi(q))$ uzaylarının elemanlarıdır.

$\mathbf{M} = B \times_f F$ üzerinde vektör alanları X ve Y olsun. $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ olarak aldığımızda B manifoldunun vektör alanları X_1, Y_1 ve F manifoldunun vektör alanları ise X_2, Y_2 olur. Böylece

$$g_{\mathbf{M}} = \pi^*(g_B) + (f o \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rcll} g_{\mathbf{M}} : T_p(\mathbf{M}) \times T_p(\mathbf{M}) & \longrightarrow & C^{\infty}(\mathbf{M}, \mathbb{R}) & \\ (X \ , \ Y) & \longrightarrow & g_{\mathbf{M}}(X, Y) & = g_{\mathbf{M}}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \\ & & & = g_{\mathbf{M}}(X_1, Y_1) + g_{\mathbf{M}}(X_2, Y_2) \\ & & & = \ g_B(X_1, Y_1) + g_F(X_2, Y_2) \\ & & & = (\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F))(X, Y) \end{array}$$

olur. Buradan da (3.1) eşitliği elde edilir.

Tanım 2.1.13 ve Tanım 2.1.16 gözönüne alınırsa

$$[\pi^*(g_B)](x) = g_B[\pi_*(x)] = g_B(d\pi(x))$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\begin{aligned} g(x,x) &= (\pi^*(g_B) + (fo\pi)^2\sigma^*(g_F))(x,x) \\ &= \pi^*(g_B)(x,x) + (fo\pi)^2(x,x)\sigma^*(g_F)(x,x) \\ &= g_B(d\pi)(x,x) + (fo\pi)^2(x,x)g_F(d\sigma)(x,x) \\ &= g_B(d\pi(x), d\pi(x)) + (fo\pi)(x,x)(fo\pi)(x,x)g_F(d\sigma(x), d\sigma(x)) \\ &= g_B(d\pi(x), d\pi(x)) + f^2(p)g_F(d\sigma(x), d\sigma(x)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (3.3) ifadesi ispat edilmiş olur.

Yarı-Riemann yapısında $p \times F = \pi^{-1}(p)$ fibrelerinin ve $B \times q = \sigma^{-1}(q)$ liftlerinin $\mathbf{M}$ manifoldunun yarı-Riemann altmanifoldları olduğu ve warped metriği aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

1) Her $q \in F$ için $\pi \mid_{(B \times q)}$ fonksiyonu B manifolduna izometridir.

2) Her $p \in B$ için $\sigma \mid_{(p \times F)}$ fonksiyonu $1/f(p)$ skalar çarpanıyla F manifoldu üzerine pozitif bir homotetidir.

3) Her $(p, q) \in \mathbf{M}$ için $B \times q$ lifti ve $p \times F$ fibresi (p, q) noktasında ortogonaldir.

Teğet vektörleri liftlere yatay, fibrelere ise dikeydir. Burada $T_{(p,q)}(\mathbf{M})$ uzayının yatay altuzayı olan $T_{(p,q)}(B \times q)$ uzayın üzerindeki ortogonal izdüşümünü

$\aleph$ ile dik altuzayı $T_{(p,q)}(p \times F)$ üzerindeki izdüşümünü ise ϑ ile gösterelim.

Yardımcı Teorem 3.1.2: M ve N yarı-Riemann manifoldlar, g_B ve g_F, sırasıyla, M ve N manifoldlarının metrik tensörleri olsun. Eğer π ve σ, $M \times N$ manifoldunun izdüşümleri ise

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$$

şeklinde elde edilir. g metriği, $M \times N$ manifoldu üzerinde metrik tensör ise bu manifold yarı-Riemann çarpım manifoldu olur.

İspat: Eğer $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ olmak üzere (3.3) ifadesi gözönüne alınırsa

$$g(v,w) = g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), d\sigma(w))$$

olarak bulunur. Yani g_M ve g_N, sırasıyla, M ve N manifoldlarında metrik tensörüdür. Metrik tensörde iç çarpım tanımlı olduğundan

$$\begin{aligned} g(v,w) &= g_M(v,w) + g_N(v,w) \\ &= g_M(w,v) + g_N(w,v) \\ &= g(w,v) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde g simetriktir. Şimdi non-dejenere olduğunu gösterelim.

$\forall w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ için $g(v,w) = 0$ iken $v = 0$ olur. Yani $w \in T_{(p,q)}(N)$, $d\pi(w) = 0$ olduğu için $g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)) = 0$ elde edilir. M manifoldundaki $d\pi(w)$ diferensiyeli sıfır olduğundan $M \times N$ çarpım manifoldunda N manifolduna ait elemanlarda sıfır olur. T_qN uzayındaki her eleman $d\sigma(w)$ formundadır. Bu durumda $d\sigma(v) = 0$ olur. Aynı şekilde $d\pi(v) = 0$ bulunur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

T_pM ve T_qN uzaylarının ortanormal bazlarının birleşimi, $T_{(p,q)}(M \times N)$ uzayının ortanormal bazı olarak bulunur. Bu yüzden g metriğinin indeksi

$indM + indN$ sabit değeridir.

Yardımcı Teorem 3.1.3: $h \in \mathcal{F}(B)$ olmak üzere $\mathbf{M} = B \times_f F$ manifolduna göre h fonksiyonunun $h \circ \pi$ liftinin gradienti, B manifoldu üzerinde h fonksiyonun gradientinin $\mathbf{M}$ manifolduna göre liftidir.

İspat: $\mathrm{grad}(h\circ\pi)$, B manifoldu üzerinde $\mathrm{grad}\, h$ dönüşümünün π ile ilişkili ve yatay olduğunu göstereceğiz.

$\Rightarrow$Eğer v, $\mathbf{M}$ manifoldunda dik teğet vektör ise Tanım 2.1.15 dikkate alındığında;

$$\begin{aligned} < \mathrm{grad}(h \circ \pi), v > &= v(h \circ \pi) \\ &= d(h \circ \pi)(v) \\ &= d\pi(v)h \\ &= d\pi(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathrm{grad}\, f$, df diferensiyeline metrik olarak denktir. Her bir $v \in T_{(p,q)}\mathbf{M}$ için $\mathrm{grad}\, f$, $\mathbf{M}$ manifoldunun normali olduğundan

$$< \mathrm{grad}\, f, v >= v(f) = v(f\mid_{\mathbf{M}}) = 0$$

eşitliği vardır.

$\Leftarrow$ Eğer x yatay ise

$$\begin{aligned} < d\pi(\mathrm{grad}(h \circ \pi), d\pi(x) > &= < \mathrm{grad}(h \circ \pi), x > \\ &= x(h \circ \pi) \\ &= d\pi(x)h \\ &= < \mathrm{grad}\, h, d\pi(x) > \end{aligned}$$

olur.

Önerme 3.1.4: $\mathbf{M} = B \times_f F$ üzerinde $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ ve $V, W \in \mathcal{L}(F)$ ise

1) $D_X Y \in \mathcal{L}(B)$, B manifoldu üzerinde $D_X Y$ vektör alanının liftidir.

2) $D_X V = D_V X = (X(f)/f)V$.

3) $nor D_V W = II(V,W) = -(< V, W > /f)\,\mathrm{grad}\, f$.

4) $tan D_V W \in \mathcal{L}(F)$, F manifoldu üzerinde $D_V W$ vektör alanının liftidir.

İspat:

1) Teorem 2.1.12 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 2 < D_X Y, V > &= X < Y, V > +Y < V, X > -V < X, Y > \\ &\quad - < X, [Y, V] > + < Y, [V, X] > + < V, [X, Y] > \\ &= < V, [X, Y] > -V < X, Y > \\ &= < V, [X, Y] > \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$< D_X Y, V > \;=\; 0$$

elde edilir.

Bu durumda $V \in \mathcal{L}(F)$ olduğundan $D_X Y \in \mathcal{L}(B)$ olur.

2) $[X, V] = 0$ olduğundan $D_X V - D_V X = 0$ bulunur. Yani $D_X V = D_V X$ olur. B ve F manifoldlarındaki vektör alanları birbirine dik olduğundan $X < Y, V >= 0$ elde edilir. Bu işlemler açıkça yazılırsa

$$\begin{aligned} X < Y, V > &= < D_X Y, V > + < Y, D_X V > \\ &= < V, D_X Y > + < D_X V, Y > \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$< D_X V, Y > \;=\; - < V, D_X Y > \;=\; 0$$

bulunur. Teorem 2.1.12 ifadesindeki Kozsul formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2 < D_X V, W > &= X < V, W > + V < W, X > - W < X, V > \\ &\quad - < X, [V, W] > + < V, [W, X] > + < W, [X, V] > \\ &= X < V, W > - < X, [V, W] > \end{aligned}$$

veya

$$2 < D_X V, W >= X < V, W > \tag{3.4}$$

bulunur.

Warped metrik tensör tanımından

$$g(V, W) = g_B(V, W) + f^2(p) g_F(V, W)$$

olur. Burada $V, W \in \mathcal{L}(F)$ olduğundan g_B metriği sıfırdır. Böylece

$$< V, W > (p, q) = f^2(p) g_F(V_q, W_q) \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde $f \circ \pi$ yerine f yazılırsa;

$$< V, W >= f^2(g_F(V, W) \circ \sigma) \tag{3.6}$$

eşitliği bulunur.

X vektör alanı teğet olduğu yüzeylerde sabittir. Bu yüzden

$$X < V, W >= X[f^2(g_F(V, W) \circ \sigma)] \tag{3.7}$$

olur.

(3.4) eşitliğinde (3.7) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2 < D_X V, W > &= X < V, W > \\ &= X[f^2(g_F(V, W) \circ \sigma)] \\ &= X(f^2)((V, W) \circ \sigma) + f^2 X[((V, W) \circ \sigma)] \\ &= 2f X(f)(V, W) \circ \sigma) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$< D_X V, W >= 2f X(f)(V, W) \circ \sigma) \tag{3.8}$$

eşitliği bulunur. (3.6) ifadesi (3.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$2 < D_X V, W >= 2f X(f) \frac{< V, W >}{f^2} \tag{3.9}$$

elde edilir. Böylece (3.9) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$< D_X V, W > \;=\; < \frac{X(f)}{f} V, W >$$

ve iç çarpım özellikleri kullanılarak

$$D_X V \;=\; \frac{X(f)}{f} V \tag{3.10}$$

bulunur.

3)

$$V < W, X >=< D_V W, X > + < W, D_V X >= 0$$

ve

$$< D_V W, X >= - < W, D_V X > \tag{3.11}$$

olur.

(3.11) denkleminde (3.10) ifadesi kulanılırsa

$$\begin{aligned} - < W, D_V X > &= - < W, \frac{X(f)}{f} V > \\ &= - \frac{X(f)}{f} < V, W > \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.1.15 yardımıyla

$$\begin{aligned} < D_V W, X > &= (- \frac{< \operatorname{grad} f, X >}{f}) < V, W > \\ &= - < (\frac{< V, W >}{f} \operatorname{grad} f, X) > \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$D_V W = -\frac{< V, W >}{f} \operatorname{grad} f$$

elde edilir.

$V, W \in \mathcal{L}(F)$ olduğu için $nor D_V W = D_V W$ bulunur. Tanım 2.4.17 gözönüne alınırsa $nor D_V W = II(V, W)$ olur. Dolayısıyla

$$nor D_V W = II(V, W) = -\frac{< V, W >}{f} \operatorname{grad} f$$

bulunur.

4) V ve W vektörleri bütün fibrelere teğet olduğundan, V ve W vektörlerine kovaryant türev uygulanmış olan fibre $tan D_V W$ anlamına gelir. Homotetiler, Levi-Civita koneksiyonu koruduğundan σ ilişkili olduğu ortaya çıkar.

Sonuç 3.1.5: Bir warped çarpımının $B \times q$ liftleri total geodezik; $p \times F$ fibreleride total umbiliktir.

İspat: Önerme 3.1.4 gereğinde bulunan **(1)** ifadesi yardımıyla her liftin şekil tensörü sıfırdır. Yani $< D_X Y, V >= 0$ olur. Fibre iddiası ise Önerme 3.1.4 ile verilen **(3)** ifadesinden gösterilir.

3.2 Warped Çarpım Örnekleri

1) Bir dönme yüzeyi, dönen eğrinin farklı konumlardaki yüzeyleri ve dönme halkasındaki fibreleriyle birlikte bir warped çarpımıdır. **M** manifoldu, bir C düzlem eğrisinin $\mathbb{R}^3$uzayındaki bir eksen etrafında dönmesiyle elde ediliyorsa ve $f : C \to \mathbb{R}^+$ eksene kadar olan mesafeyi veriyorsa o zaman $\mathbf{M} = C \times_f S^1(1)$ ifade edilir.

2) $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ uzayına bakalım. Küresel koordinatlarda $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ uzayının yay elemanı

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

şeklindedir.

$r = 1$ için S^2 birim küresinin doğrusal elemanını elde ederiz. $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ uzayının $(t, p) \to t_p$ doğal dönüşümü altında $\mathbb{R}^+ \times S^2$ manifolduna difeomorf olduğu açıktır. Bu nedenle ds^2 formülü vasıtasıyla $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, $\mathbb{R}^+ \times S^2$ manifoldu ile tanımlanabilir. $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ uzayında yüzeyler, başlangıç noktası orijin olan ışınlardır.

Fibrelerde $S^2(r)$, $r > 0$ küreleridir. Genel olarak $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ manifolduna izometriktir.

3) Warped çarpımlar, çevremizdeki en basit örnekleri yıldızlar ve kara delikler olan evrenin standart uzay çağı modelidir.

3.3 Warped Çarpım Geodezikleri

Herhangi bir çarpım manifoldunda olduğu gibi $B \times_f F$ manifoldunda da γ eğrisinin B ve F manifoldlarına olan izdüşümleri, sırasıyla, α ve β olduğunda γ eğrisi,

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 3.3.1: $\mathbf{M} = B \times_f F$ warped çarpımında bir $\gamma = (\alpha, \beta)$ eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart

1- B manifoldunda $\alpha'' = g_F(\beta', \beta') f \circ \alpha \operatorname{grad} f$,

2- F manifoldunda $\beta'' = \dfrac{-2}{f \circ \alpha} \dfrac{d(f \circ \alpha)}{ds} \beta'$ olmasıdır.

İspat: Sonuç lokal olacağından keyfi olarak küçük aralıkta çalışmak yeterlidir. O halde $s = 0$ olsun.

Durum 1:

$\gamma'(0)$ eğrisi ne yatay ne de dikey olsun. Bu durumda α ve β eğrileri regülerdir. Kabul edelim ki α eğrisi, B manifoldu üzerinde X vektör alanının integral eğrisi ve β eğrisi, F manifoldu üzerinde V vektör alanının integral eğrisi olsun. X ve V vektör alanları ile **M** manifoldundaki liftleri gösterebiliriz. γ eğrisi, $X + V$ vektör alanının integral eğrisidir.

Tanım 2.1.9 yardımıyla

$$\frac{d\gamma}{dt} = (X + V)(\gamma(t))$$

bulunur. γ eğrisinin ikinci mertebeden türevini aldığımızda

$$\begin{aligned}
\gamma'' &= D_{\gamma'}(X + V) \\
&= D_{X+V}(X + V) \\
&= D_X X + D_X V + D_V X + D_V V \\
&= \tan \gamma'' + nor\gamma'' \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Önerme 3.1.4 gereğince

$$< D_X X + D_V X + D_X V + D_V V + \tfrac{<X,X>+2<X,V>+<V,V>}{f} \operatorname{grad} f, U >= 0$$

elde edilir. $D_X X \in \mathcal{L}(B)$, $U \in \mathcal{L}(F)$ ise işlemler açıldığında;

$$< D_X X + 2D_V X + D_V V + \frac{< X, X >}{f} \operatorname{grad} f + \frac{< V, V >}{f} \operatorname{grad} f, U >= 0$$

olur.

Önerme 3.1.4 gereğindeki **(3)**. ifadede

$$nor D_V W = II(V, W) = -(< V, W > / f) \operatorname{grad} f$$

olduğundan $tanD_V W \in \mathcal{L}(F)$ ve F manifoldu üzerinde $D_V W$ vektör alanının liftidir. Böylece

$$norD_{X+V}(X+V) = II(X+V, X+V) = -(\frac{<X+V, X+V>}{f})\,\mathrm{grad}\, f = 0$$

olur. Burada son eşitlik ele alındığında;

$$-\frac{<X,X> +2<X,V> + <V,V>}{f}\,\mathrm{grad}\, f = 0$$

elde edilir. O halde

$$\frac{<X,X>}{f}\,\mathrm{grad}\, f + \frac{<V,V>}{f}\,\mathrm{grad}\, f = 0 \tag{3.12}$$

eşitliği bulunur. Önerme 3.1.4 gereğindeki **(3)**. ifadeden dolayı

$$D_X X = -\frac{<X,X>}{f}\,\mathrm{grad}\, f$$

bulunur. Burada $nor\gamma'' = 0$ olur. Böylece

$$D_X X = \frac{<V,V>}{f}\,\mathrm{grad}\, f \Rightarrow D_X X - \frac{<V,V>}{f}\,\mathrm{grad}\, f = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Önerme 3.1.4 gereği dikkate alınırsa

$$<D_X X + 2D_V X + D_V V + \frac{<X,X>}{f}\,\mathrm{grad}\, f + \frac{<V,V>}{f}\,\mathrm{grad}\, f, U>= 0$$

ve

$$<D_X X + 2D_V X + D_V V, U>= 0$$

olur. Son eşitlikte işlemler yapıldığında;

$$<D_X X, U> + <2D_V X, U> + <D_V V, U>= 0$$

elde edilir. Burada $D_X X \in \mathcal{L}(B)$ ve $U \in \mathcal{L}(F)$ olduğundan $<D_X X, U>= 0$ olur. O halde

$$<2D_V X + D_V V, U>= 0$$

olur. Böylece

$$2D_VX + D_VV = 0$$

bulunur. Önerme 3.1.4 gereğindeki **(2)** ifadesinden**,**

$$2(\frac{X(f)}{f}) + D_VV = 0$$

elde edilir. Buradan $< V, V >= f^2 g_F(V, V)$ ve $\alpha^{'} = X$, $\beta' = V$ olur. Böylece (3.13) denkleminde $< V, V >= f^2 g_F(V, V)$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D_XX &= \frac{f^2 g_F(V,V)}{f}\,\mathrm{grad}\, f \\ &= f g_F(V,V)\,\mathrm{grad}\, f \\ &= f g_F(\beta',\beta')\,\mathrm{grad}\, f \end{aligned}$$

elde edilir. (3.12) denklemi yardımıyla

$$\alpha'' = (f \circ \alpha) g_F(\beta',\beta')\,\mathrm{grad}\, f$$

olur. Önerme 3.1.4 gereğindeki **(2)**. ifadeyi elde etmek için aşağıdaki işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} 2(\frac{X(f)}{f})V + D_VV &= 0 \\ D_VV &= -2(\frac{X(f)}{f})V \\ &= -2\frac{< \mathrm{grad}\, f, X >}{f}V \\ &= -2\frac{< \mathrm{grad}\, f, \alpha' >}{f}\beta' \\ \beta'' &= \frac{-2}{f\circ\alpha}\frac{d(f\circ\alpha)}{ds}\beta' \end{aligned}$$

bulunur.

Durum 2:

Bu durumda $\gamma'(0)$ yatay şartı vardır. Eğer γ eğrisi geodezik ise böylece liftler total geodeziktir. Tanım 2.3.6 gözönüne alındığında γ eğrisi geodezik ise $\gamma^{''} = 0$ olur. $\gamma^{''} = 0$ olduğunda $tan\gamma^{''} = 0$ ve $nor\gamma^{''} = 0$ bulunur.

$nor\gamma^{''} = 0$ durumunda γ eğrisi, total geodeziktir ve $\gamma'(0)$ eğrisi yatay olduğundan noktalar $\beta \times \beta(0)$ üzerinde kalır. Sadece $\gamma'(0)$ eğrisi B manifolduna düştüğünden ve $\beta^{'}$eğrisinde fibre olduğundan tek $\alpha^{'}$ kalır. Buradan $\beta^{'}(0) = 0$ olur Dolayısıyla β sabittir. $\gamma = (\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma' = (\alpha^{'}, \beta^{'})$ olur. Önerme 3.3.1 gereğinin **(1)**. ve **(2)**. ifadelerinde β eğrisinin türevleri olduğundan β eğrisi, **(1).** ve **(2).** ifadelerinde sabit olduğu aşikardır. Aksine **(2)**. ifadesi kabul edilirse buradan $\beta^{'}(0) = 0$ ve β eğrisi sabit olur. Sonra **(1).** ifade gösterir ki α eğrisi geodeziktir. Böylece γ eğriside geodeziktir.

$\beta^{'}(0) = 0$ olduğundan **(1).** ifadeden $\alpha^{''} \neq 0$ ve **(2).** ifadeden $\beta^{''} = 0$ olur. Buradan α ve β eğrileri geodezik olur. Böylece γ eğrisi geodeziktir.

Durum 3:

Bu durumda $\gamma'(0) \neq 0$ ve dikey şartı vardır. O zaman $p = \alpha(0)$ noktasında $gradf \neq 0$ kabul edilebilir. Durum 2 de gösterildiği gibi $p \times F$ fibresi total geodeziktir. Eğer γ eğrisi geodezik ise γ eğrisi sıfırı içeren bir aralık üzerinde olmaz ve γ eğrisi, $p \times F$ fibresinde kalır. Bu nedenle $\forall i$ için $\{s_i\} \to 0$ şeklinde bir dizi vardır. Böylece $\gamma^{'}(s_i)$ eğrisi ne yatay ne de dikey olur. O zaman Durum 1 ifadesinin devamı olur. Tersine $\alpha^{''}(0) \neq 0$ olduğunu göstersin. O halde yukarıdaki gibi $\{s_i\}$ dizisi vardır ve Durum 1 ifadesindeki gibi γ eğrisi geodeziktir.

Açıklama.

$\gamma = (\alpha, \beta)$ eğrisi, $\mathbf{M} = B \times_f F$ manifoldunda geodezik olsun. Eğer $\alpha^{'}$ ve $\alpha^{''}$ lineer bağımlı ise $\alpha^{''}(s) = f(s)\alpha^{'}(s)$ şartını sağlayan α eğrisine pregeodezik denir. α eğrisi pregeodezik ise $< \alpha^{'}, \alpha^{'} >= 0$ olur. Böylece Önerme 3.3.1 gereğinin **(2).** ifadeden dolayı β eğrisi pregeodeziktir. β eğrisi pregeodezik ise (3.14) eşitliğinin türevi alındığında

$$C = (f \circ \alpha)^4 g_F(\beta^{'}, \beta^{'}) \tag{3.14}$$

fonksiyonu sabit olur. Önerme 3.3.1 gereğinin **(2).** ifadeden dolayı da türevi sıfırdır. Buradan

$$C^{'} = 4(f \circ \alpha)^3 (f \circ \alpha)^{'} g_F(\beta^{'}, \beta^{'})$$

olur. β eğrisi pregeodezik olduğundan $g_F(\beta^{'}, \beta^{'}) = 0$, $C^{'} = 0$ olur. Böylece $g_F(\beta^{'}, \beta^{'})$ metriği (3.14) denklemindeki Önerme 3.3.1 gereğinin **(1).** ifade de yerine konulur ve $\phi = \dfrac{C}{2f^2}$ eşitliği yazılırsa,

$$\alpha'' = \frac{C}{(f \circ \alpha)^3} \operatorname{grad} f = -\operatorname{grad} \phi$$

elde edilir. Böylece parametrelendirme yoluyla $\dfrac{C}{2}$, β eğrisinin keyfi karakterine bağlı olarak -1, 0, 1 düşünülebilir.

Yarı-Riemann çarpımının özel bir halinde warped fonksiyonu sabit oldu ğunda önermenin **(1).** ve **(2).** şıkkındaki denklemler,

1) $\alpha^{''} = 0$,

2) $\beta^{''} = 0$

şeklinde olur.

Yardımcı Teorem 3.3.2: B ve F tam Riemann manifoldları ise, $\mathbf{M} = B \times_f F$ manifoldu her f warped fonksiyonu için tamdır.

İspat: Metrik tamlık kriteri kullanılarak ilk önce v vektörü, $\mathbf{M}$ manifolduna teğet olduğu zaman $f > 0$ ve Riemann manifoldu olur. Dolayısıyla $< v, v > \geqslant < d\pi v, d\pi v >$ bulunur. Bu yüzden herhangi bir eğri parçası için

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant g(x) \\ \textstyle\int_a^b f(x) &\geqslant \textstyle\int_a^b g(x) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$L(\alpha) \geqslant L(\pi \circ \alpha)$$

elde edilir. Bundan dolayı her $m, m^{'} \in \mathbf{M}$ için

$$d(m, m^{'}) \geqslant d(\pi m, \pi m^{'})$$

şeklindedir. Bu özellik de bize şunu ifade eder;

M manifoldunda $\{(p_i, q_i)\}$, Cauchy dizisi ise o zaman $\{p_i\}$, B manifoldunda da Cauchy dizisidir. B manifoldu tam olduğundan $\{p_i\}$ dizisi B manifoldunda p noktasına yakınsar. Böylece dizinin B manifoldundaki bazı kompakt K kümelerinde bulunduğu kabul edilirse K kümesinde $f \geqslant c > 0$ olur. O zaman değişkenin varyantı $\forall m, m^{'} \in K \times F$ için

$$d(m, m^{'}) \geqslant cd(\sigma m, \sigma m^{'})$$

şeklindedir. Artık $\{q_i\}$, F manifoldu üzerinde bir Cauchy dizisi olur. Bu durumda $\{q_i\}$ dizisi yakınsaktır. O halde, $\mathbf{M}$ manifoldu tamdır. Bu sonuç indefinite metriklerde geçersizdir. Aşağıdaki örnekte B ve F manifoldlarıda definite metriklerdir.

Örnek 3.3.3: (Beem, Buseman): $\mathbf{M} = \mathbb{R}^1_1 \times_{e^t} \mathbb{R}^1$ olsun. Önerme 3.3.1 gereğince geodezik denklemler aşağıdaki sayısal formüllere indirgenebilir. Böylece

$$\alpha^{''} = -\beta^{'2} e^{2\alpha}, \; \beta^{''} = -2\alpha^{'}\beta^{'}$$

olur. $\gamma(s) = (lns, 1/s)$ eğrisi, $s > 0$ noktasında tanımlanan bir geodeziktir. γ eğrisi uzatılamaz ve tam olmadığı bellidir, o halde $\mathbf{M}$ manifoldu da tam değildir.

Tersine bakılırsa $\mathbf{M}$ manifoldunun metriği, $\mathbf{M} = \mathbb{R}^1_1 \times_{e^t} \mathbb{R}^1$ için de aynı sonucu verir.

3.4 Warped Çarpımın Eğriliği

Çalışmamızın bu kısmında, bir $\mathbf{M} = B \times_f F$ warped çarpımının eğriliği, f warping fonksiyonu yardımı ile B ve F manifoldlarının eğrilikleri cinsinden hesaplanması verilmiştir.

B manifoldu üzerindeki bir A kovaryant tensörü için A tensörünün $\mathbf{M}$ manifoldundaki lifti $\tilde{A}$, $\pi : \mathbf{M} \rightarrow B$ izdüşümü altında A tensörünün $\pi^*(A)$ geri dönüşümüdür. $(1, s)$ tipinde

$$A : \chi(B) \times ... \times \chi(B) \times \chi(B) \longrightarrow \chi(B)$$

şeklinde tanımlanan tensörünü gözönüne alalım. Eğer $v_1, ..., v_s \in T_{(p,q)}(\mathbf{M})$ tensörleri ile $\tilde{A}(v_1, ..., v_s)$, (p, q) tipinde yatay vektör olarak tanımlanırsa, $A(d\pi v_1, ..., d\pi v_s)$, $T_p(B)$ uzayının izdüşümü olur. Böylece her iki durumda $\tilde{A}$ herhangi bir dikey vektörler üzerinde sıfırdır. Bu tanımlamalar benzer bir şekilde F manifoldundaki liftler için de geçerlidir.

$h \in \mathcal{F}(B)$ ise h fonksiyonunun Hessian'ının $\mathbf{M}$ manifoldundaki lifti H^h ile gösterilir.

Önerme 3.4.1: $\mathbf{M} = B \times_f F$ manifoldu, Riemann eğrilik tensörüyle birlikte bir warped çarpımı olsun. $X, Y, Z \in \mathcal{L}(B)$ ve $U, V, W \in \mathcal{L}(F)$ ise,

(1) $R_{XY}Z \in \mathcal{L}(B)$, B manifoldu üzerinde ${}^{B}R_{XY}Z$ 'nin liftidir.

(2) $R_{VX}Y = (H^f(X, Y)/f)V$. Burada H^f, f fonksiyonunun Hessianıdır.

(3) $R_{XY}V = R_{VW}X = 0$.

(4) $R_{XV}W = (< V, W > /f)D_X(\text{grad}\, f)$.

(5) $R_{VW}U = {}^{F}R_{VW}U - (\dfrac{< \text{grad}\, f, \text{grad}\, f >}{f^2})\{< V, U > W - < W, U > V\}$.

şartları sağlanır. Bunlar tensör denklemleridir ve özel tanjant vektörlerinde de geçerlidir.

İspat:

(1) Kabul edelim ki ${}^{B}R$ ve ${}^{F}R$, sırasıyla, B ve F manifoldlarının Riemann eğrilik tensörlerinin $\mathbf{M}$ manifoldundaki liftleri olsun. π izdüşümü her lifte izometri olduğundan ${}^{B}R$, B manifoldundaki liftlerin Riemann eğriliğini verir. Benzer durum σ izdüşümü bir homoteti olduğundan ${}^{F}R$ için de geçerlidir. Çünkü yüzeyler total geodeziktir ve ${}^{B}R$ yatay vektörlerde $\mathbf{M}$ manifoldunun R eğrilik tensörü ile bağdaşır.

Fibreler genelde sadece umbilik olduğundan benzer iddia ${}^{F}R$ ve R liftleri için geçersizdir.

(2) $V \in \mathcal{L}(F)$ ve $X \in \mathcal{L}(F)$ olduğundan $[V, X] = 0$ olur.

$$\begin{aligned} R_{VX}Y &= D_{[V,X]}Y - [D_V, D_X]\,Y \\ &= -D_V D_X Y + D_X D_V Y \end{aligned}$$

(3.10) eşitliği gözönünde bulundurulursa $D_X D_V Y$ vektör alanının türevi,

$$\begin{aligned} D_X D_V Y &= D_X((Y(f)/f)V) \\ &= X(Y(f)/f)V + (V(f)/f)D_X V \\ &= [XY(f)/f + Y(f)X(1/f)]\,V + (Y(f)/f)V \\ &= [XY(f)/f - (D_X Y)(f)/f]V \\ &= H^f((X, Y)/f)V. \end{aligned}$$

olur.

(3) $[V, X] = 0$ kabul edilirse bir önceki ispata benzer şekilde

$$R_{VW}X = -D_V D_W X + D_W D_V X$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} D_V D_W X &= D_V(X(f)/f)W \\ &= -V(X(f)/fW) - (X(f)/f)D_V W \end{aligned}$$

olur. $X(f)/f$ fibrelerde sabit olduğundan $V(X(f)/f) = 0$ olur. Bu durumda

$$D_V D_W X = (X(f)/f)D_V W$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} D_W D_V X &= D_W(X(f)/fV) \\ &= W(X(f)/fV) + X(f)/f D_W V \end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde $W(X(f)/f) = 0$ olur. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} R_{VW}X &= -(X(f)/f)D_V W + (X(f)/f)D_W V \\ &= (X(f)/f)\,(-D_V W + D_W V) \\ &= (X(f)/f)\,[W, V] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğriliğin simetriliğinden dolayı

$$< R_{XY}V, W >=< R_{VW}X, Y >= 0$$

bulunur. Böylece

$$< R_{XY}V, Z >= - < R_{XY}Z, V >= 0$$

olur. Çünkü burada $R_{XY}Z \in \mathcal{L}(B)$, $V \in \mathcal{L}(F)$ şeklindedir. Bu eşitliklerden $W \in \mathcal{L}(F)$, $Z \in \mathcal{L}(B)$ olduğundan $R_{XY}V = 0$ olur.

(4) İlk olarak $< R_{XV}W, U >=< R_{WU}X, V >$ olduğundan **(3).** ifadeden dolayı sonuç sıfırdır. U vektör alanı dikey olduğundan $R_{XV}W$ yataydır. **(3)** ifadesinden yola çıkılarak $R_{VW}X = 0$ olduğundan ve eğriliğin simetrisinden dolayı $R_{XV}W = R_{XW}V$ olur. Burada **(2)** ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} < R_{XY}W, Y > \;=\; < R_{VX}Y, W > &= H^f(X, Y) < V, W > /f \\ &= (< V, W > /f) < D_X(\operatorname{grad} f), Y > \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $R_{XV}W$ yataydır ve bu denklem tüm Y vektör alanları için geçerlidir. O halde **(4)** sağlanır.

(5) Önerme 3.4.1 ifadesinde verilen **(3)** numaralı özellik gereğince $R_{VW}U$ diktir. Bu sebepten $< R_{VW}U, X >= - < R_{VW}X, U >= 0$ olur. Çünkü σ izdüşümü fibrelerde homotetidir ve ${}^F R_{VW}U \in \mathcal{L}(F)$ her fibredeki V, W, U

eğrilik tensörlerinin bir uygulamasıdır. Bu yüzden ${}^{F}R_{VW}U$, $R_{VW}U$ Gauss eşitliğiyle ilişkilidir. Fibrelerin şekil tensörü,

$$II(V,W) = -(< V,W > /f)gradf$$

olarak verildiğinden istenilen sonuç bulunur.

Şimdi bir warped çarpımın Ricci eğriliğini gözönüne alalım. B manifoldunun Ricci eğriliğinin liftini (π geri dönüşümünü) ${}^{B}Ric$ şeklinde ve benzer yolla F manifoldunun Ricci eğriliğini ise ${}^{F}Ric$ ile gösterelim.

Sonuç 3.4.2: $d = boyF > 1$ olmak üzere $\mathbf{M} = B \times_f F$ warped çarpımında X, Y vektör alanlarının yatay ve V, W vektör alanlarının dikey olduğunu kabul edelim. O zaman

1. $Ric(X,Y) =^{B} Ric(X,Y) - (d/f)H^f(X,Y)$

2. $Ric(X,V) = 0$

3. $Ric(V,W) =^{F} Ric(V,W) - < V,W > f^*$, öyle ki

$$f^* = \frac{\Delta(f)}{f} + (d-1)\frac{< \text{grad}\, f, \text{grad}\, f >}{f^2}$$

ve $\Delta(f) = C(H^f)$, B manifoldu üzerinde Laplasiyenidır.

İspat:

1. Tanım 2.4.12 gözönüne alınırsa $Ric(X,Y) = -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(X_i,X)X_i, Y\right)$ olur. Burada $X,Y \in \mathcal{L}(B)$, $X_i \in \mathcal{L}(M)$ ve $X_i = (U_i + V_i)$ olacak şekilde $U_i \in \mathcal{L}(B)$, $V_i \in \mathcal{L}(F)$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(X_i,X)X_i, Y\right) \\ &= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_i+V_i,X)(U_i+V_i), Y\right) \\ &= -g\left(\sum_{i=1}^{n} \left[R(U_i,X) + R(V_i,X)\right](U_i+V_i), Y\right) \end{aligned}$$

olur. $g = g_B + f^2 g_F$ eşitliği ve Riemann eğriliğinin lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= -g\left(\sum_{i=1}^{n}\left[R(U_i,X)+R(V_i,X)\right]U_i,Y\right) \\
&\qquad -g\left(\sum_{i=1}^{n}\left[R(U_i,X)+R(V_i,X)\right]V_i,Y\right) \\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n}\left[R(U_i,X)U_i+R(V_i,X)U_i\right],Y\right) \\
&\qquad -g\left(\sum_{i=1}^{n}\left[R(U_i,X)V_i+R(V_i,X)V_i\right],Y\right) \\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n}R(U_i,X)U_i,Y\right)-g\left(\sum_{i=1}^{n}R(V_i,X)U_i,Y\right) \\
&\qquad -g\left(\sum_{i=1}^{n}R(U_i,X)V_i,Y\right)-g\left(\sum_{i=1}^{n}R(V_i,X)V_i,Y\right) \\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n}R(U_i,X)U_i,Y\right)-H^f(X,Y)\frac{<V_i,V_i>}{f} \\
&= -g_B\left(\sum_{i=1}^{n}R(U_i,X)U_i,Y\right)-H^f(X,Y)\sum_{i=1}^{n}g<V_i,V_i>/f \\
&= {}^{B}Ric(X,Y)-(\frac{d}{f})H^f(X,Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. $X\in\mathcal{L}(B)\,,\,V\in\mathcal{L}(F)$ olduğundan $Ric(X,V)=0$ elde edilir.

3. Tanım 2.4.12 gözönüne alınırsa, $Ric(V,W)=-g\left(\sum_{i=1}^{n}R(X_i,V)X_i,W\right)$ olur. Burada $V,W\in\chi(F)$, $X_i\in\chi(M)$ ve $X_i=(U_i+V_i)$ olacak şekilde $U_i\in\mathcal{L}(B), V_i\in\mathcal{L}(F)$ olur ve Riemann eğriliğinin lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
Ric(V,W) &= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(X_i,V)X_i,W\right)\\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_i+V_i,V)(U_i+V_i),W\right)\\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_i+V_i,V)U_i,W\right)-g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_i+V_i,V)V_i,W\right)\\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n}\left[R(U_i,V)+R(V_i,V)\right]U_i,W\right)\\
&\qquad -g\left(\sum_{i=1}^{n}\left[R(U_i,V)+R(V_i,V)\right]V_i,W\right)\\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_{_i},V)U_{_i},W\right)-g\left(\sum_{i=1}^{n} R(V_{_i},V)U_{_i},W\right)\\
&\qquad -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_{_i},V)V_{_i},W\right)-g\left(\sum_{i=1}^{n} R(V_{_i},V)V_{_i},W\right)\\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{n} R(U_{_i},V)U_{_i},W\right)-g\left(\sum_{i=1}^{n} R(V_{_i},V)V_{_i},W\right)\\
&= -g\left[\sum_{i=1}^{n}\ {}^{F}R_{V_{\dot{I}}V}V_{\dot{I}}-\left(\frac{<\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f>}{f^2}\right)\{<V_i,V_i>V\right.\\
&\qquad\qquad -<V,V_i>V_i\},W]\\
&= {}^{F}Ric(V,W)-\frac{<\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f>}{f^2}<V,W>\sum_{i=1}^{n}<V_i,V_i>\\
&\quad -<\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f>/f^2<V,W>+<V,W>\tfrac{\nabla f}{f}\\
&= {}^{F}Ric(V,W)-<V,W>\left(\tfrac{d}{f^2}<\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f>\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{<\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f>}{f^2}+\tfrac{\nabla f}{f}\right)\\
&= {}^{F}Ric(V,W)-<V,W>\left(\tfrac{d-1}{f^2}<\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f>+\tfrac{\nabla f}{f}\right)\\
&= {}^{F}Ric(V,W)-<V,W>f^{*}
\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

RIEMANN MANİFOLDLARIN WARPED ÇARPIMLARI VE SKALAR EĞRİLİĞİ

Bu bölümde M ve N Riemann manifoldlarının eğrilikleri ile $M \times_f N$ warped çarpımının skalar eğriliği arasındaki ilişki elde edilmiştir. M kompakt iken $M \times_f N$ çarpım manifoldunda sabit skalar eğriliğini elde etmek için f fonksiyonu araştırılmıştır.

$M = (M_m, g)$ ve $N = (N_n, h)$ Riemann manifoldları olsun. $f \in C^\infty(M)$, M manifoldu üzerinde $f > 0$ için warped çarpımı

$$M \times_f N = ((M \times N)_{m+n}, g + f^2 h)$$

şeklinde ifade edilir. $M \times_f N$, N ve M manifoldlarının, sırasıyla, $\widetilde{R}$, H ve R skalar eğrilikleri arasındaki ilişki gösterilmiştir. Bu ilişki f fonksiyonundan sağlanan lineer olmayan kısmi diferensiyel eşitliktir. Bu durumda M kompakt ve irtibatlıdır. Ayrıca kanonik eliptik operatör $-D + \dfrac{R}{2}$ ifadesinin asli eğrilik değerleri ve asli eğrilik fonksiyonları elde edilmiştir. Burada D koneksiyonu, M manifoldu için Laplasiyendir. Sonuç olarak f fonksiyonunu bulmak için $M \times_f N$ manifoldunun sahip olduğu skalar eğrilik kullanılmıştır.

$M \times_f N$ üzerindeki $\widetilde{g} = g + f^2 h$ Riemann metriği, $M \times N$ manifoldu üzerinde $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ vektör alanları için

$$\widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = g(\pi_* \widetilde{X}, \pi_* \widetilde{Y}) + (f \circ \pi)^2 h(w_* \widetilde{X}, w_* \widetilde{Y})$$

şeklinde tanımlanır. Burada π ve w, sırasıyla, M ve N manifoldları üzerindeki kanonik izdüşüm fonksiyonlarıdır.

$u \in C^2(M)$ için $\Delta_g u = D^i D_i u =\mid g \mid^{-\frac{1}{2}} \partial(g^{ij} \mid g \mid^{\frac{1}{2}} \partial_j u)$ ifadesi ile (M_m, g) manifoldunun Laplasiyen operatörü $\Delta_g$veya Δ olur. Böylece $M = \mathbb{R}$ eşitliğinde u reel değerli fonksiyon için $\Delta u = u''$ şeklindedir (Dobarro and Lami Dozo, 1987).

M manifoldu üzerinde $k \in C^\infty(M)$, $k > 0$ olmak üzere $g' = kg$ olsun. g' metriği, g metriğine konformal olarak adlandırılır. (M_m, g) manifoldu üzerinde R' skalar eğriliği, R skalar eğriliği ile bağlantılıdır.

$m \geq 3$ ve $k = u^{4/(m-2)}$ alındığında Yamabe eşitliği;

$$-\frac{4(m-1)}{m-2}\Delta_g u + Ru = R' u^{(m+2)/(m-2)} \tag{4.1}$$

olarak verilir.

Teorem 4.1: R, H ve $\widetilde{R}$, sırasıyla, M, N ve $M \times_f N$ manifoldlarının skalar eğrilikleri olsun. $u = f^{(n+1)/2}$ olduğunda

$$-\frac{4n}{n+1}\Delta_g u + Ru + Hu^{(n-3)/(n+1)} = \widetilde{R}u \tag{4.2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\widetilde{g} \equiv g + f^2 h = f^2(f^{-2}g + h)$, böylece $\widetilde{g}$, $M \times_f N$ manifoldu üzerinde $\overset{\approx}{g} = (f^{-2}g + h)$ eşitliğine, $f^{-2}g$ ifadesi de, M manifoldunda g skalarına konformaldir. $m \geqslant 3$ olmak üzere f fonksiyonu için M manifolduna (4.1) eşitliğini uygulanırsa

$$\frac{-4(m-1)}{m-2}\Delta_g \eta + R\eta = \eta^{(m+2)/(m-2)}\hat{R} \tag{4.3}$$

elde edilir. $\eta^{4/(m-2)} = f^{-2}$ eşitliği ile f fonksiyonunu bulunur. Burada $\hat{R}$, $(M_m, f^{-2}g)$ manifoldu üzerindeki skalar eğriliği ifade eder.

$m + n \geqslant 3$ iken, $M \times N$ çarpım manifoldunda (4.1) denklemi kullanılırsa;

$$\frac{-4(m+n-1)}{m+n-2}\Delta_{\overset{\approx}{g}}\psi + \overset{\approx}{R}\psi = \widetilde{R}\psi^{(m+n+2)/(m+n-2)} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. $\psi^{4/(m+n-2)} = f^2$ eşitliği ile f fonksiyonu elde edilir. Böylece $\approx\!\!\!\!R$, $((M \times N)_{m+n}, \overset{\approx}{g})$ manifoldu üzerinde skalar eğriliği ve $\Delta_{\overset{\approx}{g}}$ ifadesi de Laplasiyen operatörü tanımlar.

$\psi \in C^\infty(M)$ olduğunda $\Delta_{\overset{\approx}{g}}\psi \equiv \Delta_{(f^{-2}g+h)}\psi = \Delta_{(f^{-2}g)}\psi$ olur. Lokal koordinatlarda

$$| f^{-2}g |= \det(f^{-2}g_{ij}) = f^{-2m} \mid g \mid$$

ve

$$(f^{-2}g)^{ij} = f^2 g^{ij}$$

eşitliği ile

$$\Delta_{f^{-2}g}\psi =| f^{-2}g |^{-1/2} \partial_i[(f^{-2}g)^{ij} \left|f^{-2}g\right|^{1/2} \partial_j\psi$$

bulunur. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \Delta_{f^{-2}g}\psi &= \eta^{-2m/(m-2)} \left|g\right|^{-1/2} \partial_i \left[\eta^2 g^{ij} \left|g\right|^{1/2} \partial_j\psi\right] \\ &= \left[\eta\Delta_g\psi + 2g^{ij}\partial_i\eta\partial_j\psi\right] \eta^{-(m+2)/(m-2)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

olur. Diğer bir yandan

$$\Delta_g(\eta\psi) = \eta\Delta_g\psi + \psi\Delta_g\eta + 2g^{ij}\partial_i\eta\partial_j\psi$$

ve (4.5) denklemiyle

$$\eta^{(m+2)/(m-2)}\Delta_{\overset{\approx}{g}}\psi = \Delta_g(\eta\psi) - \psi\Delta_g\eta \tag{4.6}$$

elde edilir. $\overset{\approx}{R} = \hat{R} + H$ eşitliği vardır ve (N_n, h) ile $(M_m, f^{-2}g)$ ifadeleri birer manifold olarak düşünülür, (4.6) eşitliğinde (4.4) eşitliğini kullanır ve $\eta^{(m+2)/(m-2)}$ ifadesi ile çarpma yapılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}\psi^{(m+n+2)/(m+n-2)}\eta^{(m+2)/(m-2)} &= \tfrac{-4(m+n-1)}{m+n-2}(\Delta_g(\eta\psi) - \psi\Delta_g\eta) \\ &\quad +\eta^{(m+2)/(m-2)}(\hat{R} + H)\psi \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\psi\eta\psi^{4/(m+n-2)}\eta^{4/(m-2)} &= -\tfrac{4n}{(m+n-2)(m-2)}\psi\Delta_g\eta - \tfrac{4(m+n-1)}{m+n-2}\Delta_g(\eta\psi) \\ &\quad +R\eta\psi + H\eta^{(m+2)/(m-2)}\psi\end{aligned}$$

bulunur.

$\psi^{4/(m+n-2)}\eta^{4/(m-2)} = 1$ eşitliğine bakılırsa, $u = f^{(n+1)/2}$ eşitliği alınıp, bu son eşitlikteki u terimini değiştirip, $u^{1-n/(n+1)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{R}u &= -\tfrac{4n}{(m+n-2)(m-2)}u^{(m+n-1)/(n+1)}\Delta_g u^{-(m-2)/(n+1)} \\ &\quad -\tfrac{4n}{(m+n-2)(m-2)}u^{1/(n+1)}\Delta_g u^{n/(n+1)} + Ru + Hu^{(n-3)/(n+1)}\end{aligned}$$

elde edilir. M manifoldu üzerinde herhangi bir $\alpha \neq 0$, $v \in C^\infty(M)$, $v > 0$ için

$$\Delta_g v^\alpha = \alpha(\alpha-1)v^{\alpha-2}D^i v D_i v + \alpha v^{\alpha-1}\Delta_g v \tag{4.7}$$

olur. Böylece $\alpha = n(n+1)$ ve (4.7) denkleminde $\alpha = -(m-1)/(n+1)$ eşitliği seçilerek sonuca ulaşılır.

4.1 Sabit Skalar Eğrilik

M ve N manifoldlarının, sırasıyla, skalar eğrilikleri R ve H olsun. M manifoldu üzerinde $f > 0$, $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunu arayacağız. $R \in C^\infty(M)$, $u = f^{(n+1)/2} \in C^\infty(M)$ ve $H \in C^\infty(N)$ hesaba katılırsa Teorem 4.1 ifadesinden $\widetilde{R}$ için λ eğrisinin sabit olduğunu ve H skalar eğriliği ile ifade edilen N manifoldunun sabit skalar olduğu anlaşılmaktadır.

Teorem 4.1.1: M manifoldu kompakt ve irtibatlı olsun. N manifoldunu sıfır skalar eğrilik olarak kabul edelim. $M \times_f N$ üzerindeki skalar eğrilik $\widetilde{R}$

ve $\widetilde{R}$ skalar eğriliğinde f fonksiyonunun sabit değeri λ_1 olur. f fonksiyonu pozitif çarpılabilir, sabittir, λ tektir ve aşağıdaki eşitlik verilir;

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_M \left(\frac{4n}{n+1}Dv^2 + Rv^2\right) dV; v \in H^1(M), \int_M v^2 dV = 1\right\}.$$

Burada $H^1(M) = \left\{v \in L^2(M); |Dv|^2 \equiv D^i v D_i v \in L^1(M)\right\}$ bir Sabolev uzayıdır.

İspat: (4.2) eşitliği gereğince M manifoldu üzerinde $u > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $u \in C^\infty(M)$ olmak üzere $Lu = \lambda u$ olur. Burada $Lu = -4n\Delta_g u/(n+1) + Ru$ şeklindedir.

Tanım 4.1.2: M kompakt ve irtibatlı manifoldu üzerindeki lineer özdeğer problemi, $max_M u_1 = 1$ ile bir tek negatif olmayan u_1 çözüm fonksiyonuna sahiptir. Hatta M manifoldu üzerinde $u_1 > 0$ fonksiyonuna, L eliptik operatörünün asli eğrilik fonksiyonu denir. Karşılık gelen λ_1 özdeğer fonksiyonu basit ve asli özdeğer olarak adlandırılır (Dobarro and Lami Dozo, 1987).

Sonuç 4.1.3: K Gauss eğriliği ve Δ Laplasiyen operatörü kompakt, irtibatlı $M = (M_2, g)$ manifoldu ile verilsin, o zaman $-\Delta + K$ kanonik eliptik operatörün u_1 asli eğrilik fonksiyonu $M \times_{u_1} S^1$ warped çarpımı $-\Delta + K$ operatörün Δ_1 asli eğrilik değeri sabit skalar eğriliğe eşit olma özelliğini sağlar.

İspat: (4.2) ifadesinde $n = 1$ alınsın. 2-boyutlu manifoldda $R/2 = K$ ve S^1 küresinde $H = 0$ olduğu gözönüne alınırsa, $H \in \mathbb{R}$, $H < 0$ durumu, $\{(\lambda, f(\lambda); \lambda < \lambda_1\}$ eğrisinin $\{(\lambda_1, ru), r > 0\}$ yarı doğrusuna deforme edildiği için $H = 0$ eşitliğine benzerdir.

4.2 Reel Uzay Formlarda Warped Çarpımları

Çalışmamızın bu bölümünde reel uzay formlar üzerinde warped çarpımı tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.1: $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu N, N ve $\widetilde{M}$ manifoldunun Levi-Civita koneksiyonları, sırasıyla, D ve $\widetilde{D}$ olsun. Gauss ve Weingarten formülleri

$$\widetilde{D}_X Y = D_X Y + h(X,Y),$$

$$\widetilde{D}_X \xi = -A\xi X + D_X \xi$$

şeklindedir. Burada X, Y vektör alanları N manifolduna teğet ve ξ vektör alanı ise N manifolduna normaldir. h, ikinci temel formu tanımlar, D normal koneksiyon ve A ise N altmanifoldunun şekil operatörüdür.

$\overrightarrow{H}$ ortalama eğrilik vektörü,

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n} izh = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_{i,}e_i)$$

olarak tanımlanır. Burada $\{e_{1,...,}e_n\}$, N manifoldunun TN tanjant demetinin ortanormal çatısıdır. $<,>$ iç çarpım olmak üzere kareli ortalama eğrilik, $H^2 =< \overrightarrow{H}, \overrightarrow{H} >$ şeklinde ifade edilir.

$K(\pi)$, $\pi \subset T_pN$, $p \in N$ noktasında kesitsel eğriliktir. τ, N altmanifoldunun skalar eğriliği ise

$$\tau = \sum_{i<j} K(e_i \wedge e_j)$$

olur.

$n+1$, $n \geqslant 2$ durumunda $a_1, ..., a_n, c$ reel sayılar olduğunda

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + c\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. $a_1 + a_2 = a_3 = ... = a_n$ olması durumunda $2a_1a_2 \geqslant c$ eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.2: $\phi : N_1 \times_f N_2 \to R^m(c)$ fonksiyonu, c sabit kesitsel eğrilikli Riemann manifoldunda $N_1 \times_f N_2$ warped çarpımının izometrik immersiyonu olsun.

(1) $N_1 \times_f N_2$ warped çarpımının τ skalar eğriliği,

$$\tau \leq \frac{Df}{n_1 f} + \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}H^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $n_1 = boyN_1$, $n = boyN_1 \times N_2$ olmak üzere H^2, ϕ fonksiyonunun kareli ortalama eğriliğidir. Ayrıca N_1 manifoldunun Laplasiyen operatörü Δ ile gösterilir.

(2) $n = 2$ alındığında (4.9) eşitliği elde edilir.

(3) Eğer $n \geq 3$ durumunda aşağıdaki şatlar sağlanırsa (4.9) eşitliği elde edilir;

(3a) $N_1 \times_f N_2$ warped çarpımı, c sabit kesitsel eğrilikli Riemann manifoldu ve onun warping fonksiyonu $\Delta f = cf$ olur. Total geodezik altmanifoldda olduğu gibi $N_1 \times_f N_2$ manifoldu $R^m(c)$ uzayında daldırılmıştır veya

(3b) H^2 karesel ortalama eğriliğin pozitif olduğu açık alt kümenin herhangi bir nokta komşuluğunda, $N_1 \times_f N_2$ manifoldu, $R^{n+1}(c)$ uzayının geodeziği ile $R^m(c)$ uzayının $R^{n+1}(c)$ total geodezik altmanifoldunda dönel hiperyüzey gibi izometrik daldırılmış olabilir.

İspat: $\phi : N_1 \times_f N_2 \to \mathbb{R}^m(c)$ fonksiyonu c sabit kesitsel eğriliğin bir Riemann manifoldunda $N_1 \times_f N_2$ manifoldunun izometrik immersiyonu olsun.

$n_{1,}$ n_2 ve n, sırasıyla, N_1, N_2 ve $N_1 \times N_2$ manifoldlarının boyutlarıdır. Burada $n = n_1 + n_2$ olur.

Gauss eğriliği kullanılarak

$$2\tau = n^2H^2 - \parallel h \parallel^2 + n(n-1)c \tag{4.10}$$

elde edilir.

$$\delta = 2\tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1}H^2 - (n+1)(n-2)c \tag{4.11}$$

olarak verildiğinde (4.10) ve (4.11) eşitlikleri kullanılarak

$$n^2H^2 = (n-1) \parallel h \parallel^2 + (n-1)(\delta - 2c) \tag{4.12}$$

bulunur.

X ve Z, N_1 ve N_2 manifoldlarına teğet vektör alanları olsunlar. Öyle $e_1, ..., e_m$ ortanormal çatı seçeriz ki $e_1 = X$, $e_{n+1} = Z$ olur. Böylece e_{n+1} ortalama eğrilik vektörüne paraleldir. (4.12) eşitliği yardımıyla

$$(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1})^2 = (n-1)\{\sum_{i=1}^{n}(h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\neq j}^{n}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^{r})^2 + \delta - 2c\} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) denklemine (4.8) eşitliği uygulanırsa

$$2h_{11}^{n+1}h_{n_1+1n_1+1}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^{r})^2 + \delta - 2c \tag{4.14}$$

olur. $\Omega_{1n_1+1} = \{1, ..., n\} \backslash \{1, n_1+1\}$ olduğunda

$$\begin{aligned} K(e_1 \wedge e_{n_1+1}) \geq & \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\in\Omega_{1n_1+1}}\{(h_{1j}^{n+1})^2 + (h_{n_1+1j}^{r})^2\} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq j \\ i,j\in\Omega_1 n_1+1}}(h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j\in\Omega_1 n_1+1}(h_{ij}^{r})^2 \\ & + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}(h_{11}^{r} + h_{n_1+1n_1+1}^{r})^2 + \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur.

$N_1 \times_f N_2$ çarpım manifoldu bir warped çarpımı olduğunda N_1, N_2 manifoldlarına, sırasıyla, teğet olan X, Z vektör alanları için

$$D_X Z = D_Z X = (X \ln f) Z$$

eşitliği elde edilir. Bundan dolayı

$$K(X \wedge Z) = < D_Z D_X X - D_Z D_X X, Z > = \frac{1}{f}\{(D_X X)f - X^2 f\} \tag{4.16}$$

ifade edilir. (4.11), (4.15) ve (4.16) denklemlerinin birleştirilmesiyle

$$\tau \leq \frac{1}{f}\{(D_{e_1} e_1)f - e_1^2 f\} + \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} H^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c \tag{4.17}$$

eşitliği sağlanır. (4.17) eşitsizliği dikkate alınırsa (4.14) ve (4.15) denklemlerindeki bütün eşitsizlikler sağlanır. Böylece $i \neq j$ için

$$h_{1j}^{n+1} = 0,\ h_{jn_1+1}^{n+1} = 0,\ h_{ij}^{n+1} = 0 \tag{4.18}$$

ve $i, j \in \Omega_{1n_1+1}$, $r = n+2, ..., m$ için

$$h_{1j}^r = h_{jn_1+1}^r = h_{ij}^r = 0,\ h_{11}^r + h_{n_1+1n_1+1}^r = 0$$

olur. Diğer bir yandan şekil tensörü aşağıdaki formdadır;

$$\mathbf{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & \mu I_{n_1-1} & & & \mathbf{0} & & \\ 0 & & & b & 0 & & \ldots & 0 \\ & & & 0 & & & & \\ & & \mathbf{0} & \vdots & & \mu I_{n_2-1} & & \\ & & & 0 & & & & \end{bmatrix},\ a + b = \mu; \tag{4.19}$$

ve

$$A_r = \begin{bmatrix} h^r_{11} & 0 & \cdots & 0 & h^r_{1n_1+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ h^r_{1n_1+1} & 0 & \ldots & 0 & -h^r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$r = n+2,...,m$ için I_k, $k-$yıncı mertebeden birim matrisini ve $\mathbf{0}$, uygun mertebeden sıfır matrisini göstermektedir.

(4.17) eşitliğine benzer şekilde $\alpha = 1, 2, ..., n_1$ için

$$\tau \leq \frac{1}{f}\{(De_\alpha e_\alpha)f - e^2_\alpha f\} + \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}H^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c \tag{4.21}$$

elde edilir. Böylece α, 1'den $n_1^{'}$ e kadar toplanarak

$$n_1\tau \leq \frac{\Delta f}{f} + \frac{n_1 n^2(n-2)}{2(n-1)}H^2 + \frac{1}{2}n_1(n+1)(n-2)c \tag{4.22}$$

eşitsizliği elde edilir ve (4.9) denklemi ifade edilir. (4.9) eşitsizliği özdeş ise herhangi bir $\alpha \in \{1, ..., n_1\}$ için (4.21) denklemi sağlanır. Böylece her bir $\alpha \in \{1, ..., n_1\}$ ve $t \in \{n_1, ..., n\}$ için

$$i \neq j;\ h^{n+1}_{\alpha j} = 0, h^{n+1}_{ij} = 0, h^{n+1}_{ij} = 0, \tag{4.23}$$

ve

$$h^r_{\alpha j} = h^r_{ij} = h^r_{ij} = 0, h^r_{\alpha\alpha} + h^r_{tt} = 0 \tag{4.24}$$

olur.

Eğer $n = 2$ ise, $n_1 = n_2 = 1$ olur. Böylece (4.16) yardımıyla $\tau = \Delta f$ bulunur. Böylece (4.9) denkleminin sağlandığı görülür.

Sonra $n = n_1 + n_2 \geq 3$ olduğunu farz edelim. (4.24) eşitliğine dikkat edilirse $A_{n+2} = ... = A_m = 0$ olur. Ayrıca $n \geq 3$ ile (4.23) eşitliğine bakılırsa,

(a) $A_{n+1} = 0$ veya

(b) $a = 0,\ b = \mu \neq 0$ veya $a = \mu \neq 0,\ b = 0$ elde edilir.

Durum (a): $A_{n+1} = 0$ olsun. $N_1 \times_f N_2$ manifoldunun, $\mathbb{R}^m(c)$ uzayının total geodezik altmanifoldu olduğu durumda $N_1 \times_f N_2$ manifoldu c sabit eğrilikli reel uzay formdur. Bu uzay formu $\tau = n(n-1)c/2$ ile $N_1 \times_f N_2$ manifoldunun skalar eğriliğini sonuç olarak verir.

Total geodezik altmanifold küçük olduğundan (4.9) denklemi ve $\tau = n(n-1)c/2$ eşitliği ile $\Delta f = cf$ ifadesi gösterilir. Bundan dolayı f fonksiyonu, $c = 0$ veya $c \neq 0$ olduğunda ya harmonik fonksiyon yada c asli eğrilik değeri ile Laplasiyenin asli eğrilik fonksiyonudur.

Aksine $N_1 \times_f N_2$ manifoldu, $\mathbb{R}^n(c)$ reel uzay formun bir warped çarpım dağılmasıdır. Öyle ki f warping fonksiyonu $\Delta f = cf$ eşitliğini sağlar. Açıkça herhangi bir $m > n$ için $N_1 \times_f N_2$ manifoldu, total geodezik altmanifold gibi aynı eğriliğin $\mathbb{R}^m(c)$ bir reel uzay formda lokal izometrik daldırılmış olmaktadır.

Durum (b): $a = 0,\ b = \mu \neq 0$ veya $a = \mu \neq 0,\ b = 0$ olsun. Bu durumda $U = \{p \in N_1 \times_f N_2 : H^2(p) > 0\}$ açık alt kümesi üzerinde A_{n+1}, 1, $n-1$ çokluklarıyla 0, μ gibi asli eğrilik değerlerine tamamen ayrılır. Birinci normal alt demet olan Imh, U kümesi üzerinde bir ranklıdır ve $1 \leq i \neq j \leq n$ ise

$$h(e_1, e_1) = 0, h(e_2, e_2) = ... = h(e_n, e_n) = \mu e_{n+1} \tag{4.25}$$

düşünülebilir ve bu eşitlikten yola çıkılarak $j \in \{2, ..., n\}$ ve $k \in \{1, ..., n\}$ için h ikinci temel form kovaryant türevi $\overline{D}h$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}(\overline{D}_{e_k} h)(e_j, e_i) &= (e_k \mu) e_{n+1} + \mu D_{e_k} e_{n+1} \\ (\overline{D}_{e_j} h)(e_j, e_k) &= -(w_j^k(e_j) + w_k^j(e_j)) e_{n+1}\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Böylece Codazzi eşitliği $j \neq k,\ j > 1$ için

$$\mu D_{e_k} e_{n+1} + (w_j^k(e_j) + w_k^j(e_j) + e_k \mu) e_{n+1} = 0 \tag{4.27}$$

elde edilir.

$D_X e_{n+1}$, e_{n+1} vektörüne dikey olduğundan X, $e_1, ..., e_n$ vektörlerinden biridir. Böylece (4.27) denklemi $D_X e_{n+1} = 0$ olmasını gerektirir. Bundan dolayı birinci normal alt demet e_{n+1} tarafından gerilen Imh, U üzerinde bir paralel normal alt demettir. Böylece, M manifoldu temelde koboyutu birdir. Böylece U kümesinin her bir noktasının bir komşuluğunda, $N_1 \times_f N_2$ manifoldu, $\mathbb{R}^m(c)$ uzayının $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ total geodezik altmanifolduna izometrik daldırılmıştır. Çünkü U kümesinin şekil operatörü, $n-1$ çokluğunun asli eğrilik değerinden biridir ve diğer asli eğrilik değeri sıfırdır. M manifoldu bir dönel yüzey ve bu yüzeyin $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ uzayının geodeziğidir. H^2 kareli ortalama eğriliğin sürekliliği kullanılırsa U, $N_1 \times_f N_2$ manifoldunun açık kümesi olarak bulunur.

Aksine M manifoldu $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ reel uzay formda dönel yüzey ve bu yüzeyin α profil eğrisi $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ uzayının bir geodeziği olsun. s yay uzunluğu fonksiyonu tarafından α profil eğrisi parametrize edilebilir. M manifoldu $I \times M^{n-1}(\delta)$ manifolduna izometriktir ve burada I manifoldu, $\mathbb{R}$ uzayının açık aralığıdır. Böylece M manifoldunun şekil operatörü, 1 ve $n-1$ çoklukları, sırasıyla, 0 ve μ iki asli eğrilik değerlere ayrılır.

Böylece kareli ortalama eğrilik,

$$H^2 = \frac{(n-1)^2\mu^2}{n^2} \tag{4.28}$$

şeklinde bulunur. Sonra Gauss eğriliği uygulanarak dönel hiperyüzeyin skalar eğriliği

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2}c + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\mu^2 \tag{4.29}$$

olur. Çünkü yay uzunluğu fonksiyonundan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ uzayında geodeziktir.

$$h\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{f'' + cf}{\sqrt{\delta - cf^2 - f'^2}}$$

ifadesi ile f warping fonksiyonu $f''(s) + cf(s) = 0$ diferensiyel eşitliği sağlar. Böylece

$$\Delta f = cf \tag{4.30}$$

elde edilir.

(4.28), (4.29) ve (4.30) eşitliklerinden $\mathbb{R}^{n+1}(c)$ uzayında $I \times M^{n-1}(\delta)$ dönel hiperyüzeyi elde edilir. Böylece (4.9) eşitsizliği sağlanır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma sırasında, Öklid uzayı ve Çarpım uzay ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Fernando Dobarro ve Enrique Lami Lami Dozo tarafından yayınlatılan "Scalar Curvature and Warped Products of Riemann Manifolds" ile Bang-Yen Chen tarafından yayınlatılan "Warped Products in Real Space Form" çalışmalarında verilen teoremlerin ispatları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Öncelikle yarı-Riemann manifold üzerinde warped çarpımı hesaplanmıştır. Warped çarpım uzayında bir eğrinin geodezik olması için gerekli şartlar araştırılmıştır. Warped çarpımın eğriliği, warping fonksiyonu yardımıyla warped çarpımında kullanılan manifoldların eğrilikleri cinsinden hesaplanmıştır. Ayrıca bazı warped çarpım manifoldlarının skalar eğrilikleri ile Riemann manifoldlarının skalar eğriliği arasındaki ilişki verilmiştir. Bunun yanısıra skalar eğrilik, warping fonksiyonu ve ortalama eğrilik kullanılarak reel uzay formlarda warped çarpımı açıklanmıştır. Böylece warped çarpım örneği olan küreler, çarpım küreleri, doubly (çift katlı) warped çarpımları için eğrilikler hesaplanabilir ve bazı özellikleri incelenebilir. Paralel manifoldlar için çarpım manifoldları tanımlanabilir ve bu manifoldlar için warped çarpımı üzerinde araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Balcı, M., 2000, Reel Analiz, Ertem Matbaa, 141.

Beem, J.K., Ehrlich, P. and Powell, T.G., 1982, Warped Product Manifolds in Relativity in Selected Studies: A Volume Dedicated to the Memory of Albert Einstein, T.M. Rassias, (Eds.), North-Holland, Amsterdam, 41-56.

Besse, A. L., 1987, Einstein Manifolds. Springer-Verlag, Germany.

Bang-Yen, C., 2004, Warped Products in Real Space Forms, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 34, 551-562.

Bishop, R.L. and Goldberg, S.I., 1968, Tensör Analysis on Manifolds The Macmillan Company, Newyork, 280.

Bishop, R.L. and O'Neill, B., 1969, Manifold of Negative Curvature, Trans. Am. Math. Soc., 145, 1-49.

Boothby, W.M., 1986, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Second Edition, Academic Press Inc., Florida.

Brickell, F. and Clark, S., 1970, Differentiable Manifolds an Introduction, London, 286.

Carmo, M.P. do, 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Cengiz, N., 2002, Cebirsel Poliafinor Yapılar ve Liftler, Doktora Tezi , Atatürk Üniv. Fen Bilimleri Ens., Erzurum.

Dobarro, F. and Lami Dozo, E.,1987, Scalar Curvature and Warped Products of Riemann Manifolds, Transactions of The American Mathematical Society, 303, 161-168.

Duggal, L. K. and Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, 300p., AH Dordrecht.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Ünv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları, No. 2.

Hacısalihoğlu H.H., 1998, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hacısalihoğlu, H.H., 2000, Diferensiyel Geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, 340.

Hacısalihoğlu H.H., Ekmekçi N., 2003, Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 251.

Katanaev, M. O., Klösch, T. and Kummer, W., 1999, Global Properties of Warped Solutions in General Relativity, Ann. Physics, 276.

Koçak, M., 2004, Genel Topolojiye Giriş, Osmangazi Üniv. Yayınları, Eskişehir, 411.

Künhel, W., 2006, Differential Geometry, American Mathematical Society, 380.

O'Neill, B., 1966, Elementary Differential Geometry, Acedemic Press, Inc.

O'Neill, B., 1983, Semi Riemann Geometry, Akademic Press, Newyork, London, 468.

Oprea, J., 1997, Differential Goemetry And Its Applications, Prentice-Hall, Inc.

Şahin, B., 2005, Warped Product Lightlike Submanifold, Sarajevo Journal of Mathematics, 1(14), 251–260.

Şahin, B., 2006, Nonexistence of Warped Product Semi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifolds, Geometriae Dedicata, DOI 10.1007/s10711-005-9023-2, 195–202.

Şahin, B., 2009, Warped Product Semi-Slant Submanifold of a Locally Product Riemannian Manifold, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, DOI: 10.1556/SScMath.2009.1086.

Şahin, B., 2010, Skew CR-Warped Products of Kaehler Manifolds, Mathematical Communication, 15(1), 189-204.