$S-$ MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Nesip AKTAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Kasım 2006

ON THE GEOMETRY OF $S-$ MANİFOLDS

Nesip AKTAN

Ph. D. THESIS

Department of Mathematics

November 2006

$S-$ MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Nesip AKTAN

Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışmanlar:

Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Prof. Dr. A.Ceylan ÇÖKEN

Kasım 2006

Nesip AKTAN'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı

"$S-$**MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE**"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Üye: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN

Üye: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu$'$ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde $S-$manifoldlar üzerinde bazı yapılar incelenmiştir. $S-$manifoldların, zayıf simetrik, zayıf Ricci simetrik, genelleştirilmiş recurrent ve $\phi-$recurrent olması için gerekli olan koşullar verilmiştir. Dördüncü bölümde, $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri incelenmiştir. $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri için Euler Teoremi ispat edilerek Euler Teoreminin bazı sonuçları, Dupin göstergesi ve Meusnier Teoremi verilmiş ve ayrıca $S-$uzay formların umbilik non-invaryant hiperyüzeylerinin olmadığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde, indefinite $S-$manifoldların lightlike hiperyüzeyleri incelenmiş ve indefinite $S-$uzay formların lightlike hiperyüzeylerinin bazı temel özellikleri elde edilmiştir.

SUMMARY

This work consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be nedeed for later use. In the third chapter, some structures on $S-$manifolds are investigated. Necessary conditions of $S-$manifolds are given for being weakly symmetric, weakly Ricci symmetric, generalized recurrent and ϕ-recurrent. In the fourth chapter, non-invariant hypersurfaces of $S-$manifolds are investigated. Euler's theorem for non-invariant hypersurfaces of $S-$manifolds is proved. By giving Dupin indicatrix, Meusnier's Theorem and some corollary of Euler's theorem, non-existence of non-umbilic hypersurfaces of $S-$manifolds is given. Finally in the fifth chapter, lightlike hypersurfaces of indefinite $S-$manifolds are investigated, and some fundamental characteristics for lightlike hypersurfaces of indefinite $S-$space forms are obtained.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmanın her safhasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ ve Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren sevgili eşim Songül AKTAN, kızım Sude, dostlarım ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Nesip AKTAN

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\overline{g}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki metrik
g	M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş metrik
$\chi(\overline{M})$ veya $\Gamma(T\overline{M})$	$\overline{M}$ manifoldunu üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$T_p\overline{M}$	$p \in \overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay
$T\overline{M}$	$\overline{M}$ manifoldunun tanjant demeti
ϕ	$f-$ yapı
$\overline{R}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
$\overline{Ric}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki Ricci eğrilik tensörü
N	Hiperyüzeyin normali
A_N	N birim normali ile birleştirilmiş şekil operatörü
N_ϕ	Nijenhuis tensörü
k_i	$i-$ yinci asli eğrilik
$k_n(X_p)$	$X_p \in T_pM$ doğrultusundaki normal eğrilik
$\overline{k}_g$	$\overline{M}$ manifoldunda geodezik eğrilik
$\overline{\nabla}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki koneksiyon
∇	M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyon
$\mathrm{Rad}T_pM$	$p \in M$ noktasında T_pM nin radikali
$S(TM)$	TM nin screen(ekran) alt uzayı
$\overset{*}{\nabla}$	$S(TM)$ üzerine indirgenmiş koneksiyon

İçindekiler

Bölüm 1

GİRİŞ

Hemen hemen kontakt metrik yapıların ve hemen hemen Hermitian yapıların bir genelleştirilmesi olan metrik çatılı yapılar ilk kez Yano (1963) tarafından ortaya atılmış ve günümüze kadar bu alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Nakagava (1966), Ishahara (1966), Kobayashi ve Tsuchiya (1972), Mihai (1983) ve Kobayashi (1990) dır. 1970 yılında Goldberg ve Yano, metrik çatılı manifoldlar üzerindeki $f-$yapı yardımı ile bir kompleks yapı tanımlayıp metrik çatılı yapıların normallik koşullarını inceleyerek bu alanda yapılacak olan çalışmalara ışık tutmuş oldular.

1970 yılında Blair, normal metrik çatılı yapılara, normal metrik çatılı yapıların sağlamış olduğu bazı yeni koşulları ilave ederek, hemen hemen Hermit durumunda Kaehler yapıların ve hemen hemen kontakt durumda Sasakian yapıların bir genelleştirilmişi olan $S-$manifoldları tanıtmıştır.

Daha sonra 1984 de Mihai'nin $S-$manifoldların Cauchy-Riemann altmanifoldlarını incelemeye başlaması ile bu alandaki çalışmalar hız kazanmıştır. Yapılan bu çalışmadan hemen sonra benzer bir çalışma da Ornea (1984) tarafından yapılarak $S-$manifoldların generic Cauchy-Riemann alt manifoldları incelenmiştir.

1990 lı yıllarda İspanyol matematikçiler Cabrerizo, Fernandez, L. M. ve Fernandez, M. $S-$manifoldlara ait ciddi çalışmalar yapmışlardır. Bunlardan bazıları Cabrerizo, Fernandez, L. M. ve Fernandez, M. (1991, 1992, 1993, 1996) dır. 1990 lı yıllarda yapılan çalışmaların yanı sıra günümüze kadar $S-$manifoldlar ile ilgili Kobayashi (1990), Lotta ve Pastore (2004), Dileo ve Lotta (2005), Terlizi (2006) gibi çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Bu doktora çalışmasının orjinal bölümleri ise aşağıdaki çalışmalar doğrultusunda hazırlanmıştır

Lokal simetrik ve Ricci simetrik manifoldların genelleştirilmesi olan zayıf simetrik ve zayıf Ricci simetrik manifoldlar Tamassy ve Binh (1992) tarafından ortaya atılmış ve $K-$kontakt manifoldların zayıf simetrik ve zayıf Ricci simetrik olma durumları incelenmiştir.

Ricci recurrent uzaylar Patterson (1952) de, Genelleştirilmiş recurrent uzaylar ilk kez Dubey (1979) da verilmiştir. Ricci recurrent manifoldlar 1995 yılında genelleştirilerek De, Guha ve Kamilya (1995) de verilmiştir. Genelleştirilmiş Ricci recurrent Sasakian manifoldlar Guha (2000) de ve genelleştirilmiş Ricci recurrent trans-Sasakian manifoldlar Kim, Prasad ve Tripathi (2002) de çalışılmıştır. Geneleştirilmiş concircular recurrent manifoldlar Maralabhavi ve Rathnamma (1999) ve Khan (2004) de verilmiştir.

$\phi-$simetrik Sasakian manifoldlar ilk kez 1977 yılında Takahashi tarafından çalışılmış ve Takahashi'nin sonuçları De, Shaikh ve Biswas (2003) tarafından genelleştirilerek $\phi-$recurrent sasakian manifoldlar tanıtılmış ve $\phi-$recurrent Sasakian manifoldlara ait bazı özellikler elde edilmiştir.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde, yukarıda bahsedilen $\phi-$recurrent, zayıf simetrik, zayıf Ricci simetrik ve genelleştirilmiş recurrent bağıntıları $S-$manifoldlara genelleştirilerek çalışılmıştır.

Riemann manifoldların hiperyüzeyleri için Euler Teoremi Hacısalihoğlu

(1983) de, Pseudo-Euclidean uzaylarda paralel Pseudo-Euclidean hiperyüzeyleri için Euler Teoremi Görgülü ve Çöken (1993) de, Pseudo-Euclidean uzaylarda paralel Pseudo-Euclidean hiperyüzeyleri için Euler Teoremi ve Dupin göstergesi Çöken (2001) de verilmiştir. Indefinite Kaehler manifoldlarında kompleks ve reel hiperyüzeyleri için Euler Teoremi ve Meusnier Teoremi Yücesan (2004) te araştırılmıştır. Çalışmamızın dördüncü bölümünde, $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeylerinin bazı temel özellikleri elde edildikten sonra, yukarıda sözü geçen çalışmalar esas alınarak $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri için Euler Teoremi, Euler Teoreminin bazı sonuçları, Dupin göstergesi ve Meusnier Teoremi verilmiştir. Bu bölümde ayrıca $S-$manifoldların non-invaryant umbilik hiperyüzeylerinin olmadığı ispat edilmiştir.

İlk kez Duggal tarafından ortaya atılan lightlike hiperyüzeyler teorisi, diferensiyel geometrinin en önemli konularından biri olup bu güne kadar bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Lightlike hiperyüzey teorisinde, dik uzayın kendisi hiperyüzeyin tanjant uzayının içinde kaldığından Riemann (veya Semi-Riemann) geometrideki hiperyüzey teorisinden oldukça farklı bir durum ortaya çıkar. Bu farklılığın başında, lightlike hiperyüzey üzerine indirgenen koneksiyon gelir. Çünkü bir lightlike hiperyüzey üzerine indirgenen koneksiyon her zaman metrik koneksiyon değildir. Bir diğer önemli farklılık şekil operatöründen kaynaklanmaktadır. Riemann (veya Semi-Riemann) geometride hiperyüzeyler için ikinci temel form ile şekil operatörü arasında bir ilişki vardır. Riemann geometrideki hiperyüzeylerin aksine lightlike hiperyüzeyler teorisinde böyle bir durum söz konusu değildir. Üstelik bir lightlike hiperyüzey üzerinde biri hiperyüzeyin diğeri ekran dağılımına ait olmak üzere iki tane şekil operatörü vardır.

Riemann (veya Semi-Riemann) hiperyüzeylerinin aksine lightlike hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörü her zaman simetrik olmaz. Ricci tensörünün simetrik olması hem geometri hem de fizik açısından istenen bir durumdur. Dolayısıyla lightlike geometride Ricci tensörünün simetrik olma şartlarını araştırmak önemli bir problemdir. Bu konudaki ilk çalışmayı Bejancu (1996) yapmıştır. Yapılan çalışmada bir lightlike hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşulun $d\tau = 0$ olması gerektiği gösterildi. Aynı sonuç lokal olarak Duggal ve Bejancu (1996) tarafından ispat edildi. Ayrıca Güneş, Şahin ve Kılıç (2003), bir hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşulun şekil operatörünün lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formuna göre simetrik olması gerektiğini gösterdiler.

Bir Kaehler manifoldunun lightlike reel hiperyüzeyleri Duggal ve Bejancu (1993) tarafından çalışıldı. Indefinite Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri Kang, Jung, Kim, K. Pak ve S. Pak (2003) tarafından incelendi.

Çalışmamızın son bölümü olan beşinci bölümde, yukarıda sözünü ettiğimiz çalışmalar esas alınarak indefinite $S-$manifoldların lightlike hiperyüzeyleri araştırılarak, $S-$manifoldların lightlike hiperyüzeylerinin bazı temel özellikleri elde edilmiştir.

Eskişehir, 2006 Nesip AKTAN

Bölüm 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldları ve Alt Manifoldlar

Tanım 2.1.1 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ ve $\overline{M}$ den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\overline{g} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer $\overline{g}$ Riemann metriği ile birlikte $\overline{M}$ ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.2 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ olmak üzere, $\forall f, g \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$, için,

$$\begin{array}{rlcl} \overline{\nabla} : & \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \to & \chi(\overline{M}) \\ & (X, Y) & \to & \overline{\nabla}(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y \end{array}$$

fonksiyonu için

i) $\overline{\nabla}_{fX+gY} Z = f\overline{\nabla}_X Z + g\overline{\nabla}_Y Z$

ii) $\overline{\nabla}_X (fY) = f\overline{\nabla}_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa $\overline{\nabla}$ ye $\overline{M}$ manifoldu üzerinde bir **afin koneksiyon** ve

$\overline{\nabla}_X$ e de X e göre **kovaryant türev operatörü** denir (Hacısalihoğlu, 1983, Spivak, 1979).

Tanım 2.1.3 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\overline{\nabla}$ da $\overline{M}$ üzerinde bir afin koneksiyon olsun O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere, $\overline{\nabla}$ dönüşümü

i) $\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X, Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X\overline{g}(Y, Z) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z)$ (Metrikle bağdaşmabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, $\overline{\nabla}$ ya $\overline{M}$ üzerinde **Riemann (veya Levi-Civita) konneksiyonu** adı verilir (Yano ve Kon,1984).

Tanım 2.1.4 V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{array}{rccc} [,]: & V \times V & \rightarrow & V \\ & (X, Y) & \rightarrow & [X, Y] \end{array}$$

dönüşümü de;

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için;

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir **Lie operatörü (Lie parantez operatörü)** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.5 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ olsun.

$$\begin{array}{rccc} [,]: & \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \rightarrow & \chi(\overline{M}) \\ & (X, Y) & \rightarrow & [X, Y] \end{array}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[,]$ bir Lie operatörüdür (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.6 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(\overline{M})$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre **Lie türev operatörü** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984, Duggal ve Bejancu, 1996)

i) $L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^{\infty}(\overline{M},\mathbb{R})$

ii) $L_X Y = [X,Y]\,, \quad \forall Y \in \chi(\overline{M})$

iii) $L_X\overline{g}\,(Y,Z) = X\left(\overline{g}\,(Y,Z)\right) - \overline{g}\left([X,Y]\,,Z\right) - \overline{g}\left([X,Z]\,,Y\right),$

$\forall Y,Z \in \chi(\overline{M})$.

Tanım 2.1.7 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve L_X, X vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Eğer $X \in \chi(\overline{M})$ için

$$L_X\overline{g} = 0$$

ise $X \in \chi(\overline{M})$ **killing vektör alanı** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.8 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. $\overline{M}$ üzerinde verilen her bir diferensiyel $q-$forma bir diferensiyel $q+1-$form karşılık getiren diferensiyel operatörü **dış türev operatörü** olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir $1-$form w ve bir $2-$form Ω için d operatörü

$$dw(X,Y) = \frac{1}{2}\left\{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])\right\}$$

ve

$$\begin{aligned} d\Omega(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{X(\Omega(Y,Z)) - Y(\Omega(X,Z)) - Z(\Omega(X,Y)) \\ &\quad -\Omega([X,Y]\,,Z) + \Omega([X,Z]\,,Y) - \Omega([Y,Z]\,,X)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Duggal ve Bejancu, 1996).

$(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{\nabla}$ da $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z\in\chi(\overline{M})$ olmak üzere Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned}2\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y,Z) &= X\overline{g}(Y,Z)+Y\overline{g}(Z,X)-Z\overline{g}(X,Y)\\ &-\overline{g}(X,[Y,Z])+\overline{g}(Y,[Z,X])+\overline{g}(Z,[X,Y])\end{aligned} \tag{2.1}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Yano ve Kon,1984).

Tanım 2.1.9 $\overline{M}$ Riemann manifoldu ve $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(\overline{M})$ için

$$\begin{aligned}\overline{R}:\ \chi(\overline{M})\times\chi(\overline{M})\times\chi(\overline{M}) &\rightarrow \chi(\overline{M})\\ (X,Y,Z) &\rightarrow \overline{R}(X,Y)Z=\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z-\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{R}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına $\overline{M}$ nin **Riemann eğrilik tensörü** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi 2003, Spivak, 1979).

Teorem 2.1.10 $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{R}$, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,W\in\chi(\overline{M})$ için

i) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W)=-\overline{g}(\overline{R}(Y,X)Z,W)$,

ii) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W)=-\overline{g}(\overline{R}(X,Y)W,Z)$,

iii) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W)=\overline{g}(\overline{R}(Z,W)X,Y)$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{R}$, $(\overline{M},\overline{g})$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(\overline{M})$ için

$$\overline{R}(X,Y)Z+\overline{R}(Z,X)Y+\overline{R}(Y,Z)X=0$$

eşitliği **I. Bianchi özdeşliği** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.12 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu, $\overline{R}$, $(\overline{M},\overline{g})$ nin Riemann eğrilik tensörü ve $\overline{\nabla}$ Levi-civita koneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{R}\right)(Y,Z)+\left(\overline{\nabla}_Y\overline{R}\right)(Z,X)+\left(\overline{\nabla}_Z\overline{R}\right)(X,Y)=0$$

eşitliği **II. Bianchi özdeşliği** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.13 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. Bir $P \in \overline{M}$ noktasındaki $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının, X_P, Y_P tanjant vektörleri tarafından gerilen $2-$boyutlu bir altuzayı Π olmak üzere

$$\overline{K}(\Pi)=\frac{\overline{g}(\overline{R}(X_P,Y_P)Y_P,X_P)}{\overline{g}(X_P,X_P)\overline{g}(Y_P,Y_P)-\overline{g}(X_P,Y_P)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{K}(\Pi)$ reel sayısına Π nin **kesit eğriliği** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.14 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü $\overline{R}$ ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, $\chi(\overline{M})$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$\begin{array}{rcll} Q: & \chi(\overline{M}) & \rightarrow & \chi(\overline{M}) \\ & X & \rightarrow & QX=-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(e_i,X)e_i \end{array}$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne $\overline{M}$ nin **Ricci operatörü** adı verilir. Ayrıca Q yardımı ile $\overline{M}$ nin **Ricci eğrilik tensörü** $\overline{Ric}$,

$$\begin{array}{rcll} \overline{Ric}: & \chi(\overline{M})\times\chi(\overline{M}) & \rightarrow & C^\infty(\overline{M},\mathbb{R}) \\ & (X,Y) & \rightarrow & \overline{Ric}(X,Y)=\overline{g}(QX,Y) \end{array}$$

biçiminde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.15 $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y \in\chi(\overline{M})$ için

$$\overline{Ric}(X,Y)=\lambda\overline{g}(X,Y)$$

olacak biçiminde $\overline{M}$ üzerinde bir λ fonksiyonu var ise $\overline{M}$ ye **Einstein manifoldu** adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.16 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının bir bazı olmak üzere $\overline{M}$ nin **skalar eğriliği**

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \overline{Ric}(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.17 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve bir P$\in$ $\overline{M}$ noktasındaki $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının, X_P, Y_P tanjant vektörleri tarafından gerilen 2−boyutlu bir altuzayı Π olmak üzere, Π nin kesit eğriliği $\overline{K}(\Pi)$ olsun. $\overline{M}$ nin her p noktasındaki her Π için $\overline{K}(\Pi)$ sabit ise $(\overline{M},\overline{g})$ **sabit eğrilikli uzay** adını alır. Sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu **uzay form** olarak adlandırılır. $\overline{M}$ nin sabit kesit eğriliği c olmak üzere $\overline{M}$ uzay formu $\overline{M}(c)$ ile gösterilir. Eğer

$$\begin{cases} c = 0 & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = E^n \text{ Öklid uzayı} \\ \\ c = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = S^n(r) \text{ Küresi} \\ \\ c = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay} \end{cases}$$

dır (Chen, 1973).

Teorem 2.1.18 $(\overline{M}, \overline{g})$ kesit eğriliği c olan bir sabit eğrilikli uzay ve $\overline{R}$, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\left[\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y\right]$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.19 $n-$boyutlu, $(n > 2)$ düzlemsel olmayan bir C^{∞} manifold $\overline{M}$ olsun. α,β,γ,δ hepsi birden sıfır olmayan $1-$formlar, $X, Y, Z, U, V \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere eğer $(0, 4)$ tipindeki $\overline{R}$ eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\overline{R})(Y, Z, U) = \;& \alpha(X)\overline{R}(Y, Z)U + \beta(Y)\overline{R}(X, Z)U \\ & +\gamma(Z)\overline{R}(Y, X)U + \delta(U)\overline{R}(Y, Z)X \\ & +\overline{g}(\overline{R}(Y, Z)U, X)P\end{aligned} \tag{2.2}$$

koşulunu sağlar ise $(\overline{M}, \overline{g})$ ye **zayıf simetriktir** denir. Burada P, $\forall X \in\chi(\overline{M})$ için $\overline{g}(P, X) = \rho(X)$ koşulunu sağlayan bir vektör alanıdır (2.2) eşitliğine denk olarak

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X\overline{Ric}\right)(Z, U) = \;& \alpha(X)\overline{Ric}(Z, U) + \beta(\overline{R}(X, Z)U) + \gamma(Z)\overline{Ric}(X, U) \\ & +\rho(\overline{R}(X, U)Z) + \delta(U)\overline{Ric}(Z, X)\end{aligned} \tag{2.3}$$

verilebilir (De, Binh ve Shaikh, 2000).

Tanım 2.1.20 $n-$boyutlu, $(n > 2)$ düzlemsel olmayan bir C^{∞} manifold $\overline{M}$ olsun. Eğer Ricci tensorü $\overline{Ric}$ sıfırdan farklı ve

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{Ric}\right)(Y, Z) = \rho(X)\overline{Ric}(Y, Z) + \mu(Y)\overline{Ric}(X, Z) + \upsilon(Z)\overline{Ric}(X, Y) \tag{2.4}$$

koşulu sağlanıyor ise $(\overline{M}, \overline{g})$ ye **zayıf Ricci-simetriktir** denir (De, Binh ve Shaikh, 2000).

Tanım 2.1.21 $n-$boyutlu bir C^{∞} manifold $\overline{M}$ olsun. Eğer $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\left(\overline{\triangledown}_X\overline{R}\right)(Y, Z)W = \alpha(X)\overline{R}(Y, Z)W + \beta(X)\left[\overline{g}(Z, W)Y - \overline{g}(Y, W)Z\right] \tag{2.5}$$

koşulu sağlanıyor ise $(\overline{M}, \overline{g})$ ye **genelleştirilmiş recurrent** manifold denir. Burada α ve β,

$$\alpha(X) = \overline{g}(X, A), \qquad \beta(X) = \overline{g}(X, B) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlı 1-formlar, A ve B sırasıyla, α ve β ile birleştirilmiş vektör alanlarıdır (Maralabhavi ve Rathnamma, 1999).

Tanım 2.1.22 $n-$boyutlu bir C^∞ manifold $\overline{M}$ olsun. Eğer $\overline{M}$ nin Ricci tensörü $\overline{Ric}$,

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{Ric}\right)(Y,Z) = \alpha(X)\overline{Ric}(Y,Z) + n\beta(X)\overline{g}(Y,Z) \tag{2.7}$$

koşulunu sağlarsa $\overline{M}$ ye **genellleştirilmiş Ricci recurrent** manifold adı verilir (Maralabhavi ve Rathnamma, 1999).

Tanım 2.1.23 $n-$boyutlu bir C^∞ manifold $\overline{M}$ olsun. Eğer $\overline{M}$ nin

$$\overline{C}(X,Y)Z = \overline{R}(X,Y)Z - \frac{\overline{\tau}}{n(n-1)}(\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y) \tag{2.8}$$

ile tanımlı concircular eğrilik tensörü

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{C}\right)(Y,Z)W = \alpha(X)\overline{C}(Y,Z)W + \beta(X)\left[\overline{g}(Z,W)Y - \overline{g}(Y,W)Z\right] \tag{2.9}$$

koşulunu sağlarsa $\overline{M}$ ye **genelleştirilmiş concircular recurrent** manifold adı verilir. Burada $\overline{\tau}$, $\overline{M}$ nin skalar eğriliğidir (Maralabhavi ve Rathnamma, 1999).

Tanım 2.1.24 M ve $\overline{M}$ birer C^∞ manifold ve

$$\Psi : M \to \overline{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer rankΨ =boy$M$ ise Ψ dönüşümüne bir immersiyon (daldırma) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.25 M ve $\overline{M}$ birer C^∞ manifold ve $M \subset \overline{M}$ olsun. Eğer

$$j : M \to \overline{M}$$

doğal injeksiyonu bir immersiyon ise M ye $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu denir (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım 2.1.26 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için

$$TM^\perp = \left\{ V \in T_p\overline{M} \mid \overline{g}\left(X_p, V\right) = 0, \forall X_p \in T_pM \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. $p \in M$ noktasında $\forall X_p \in T_pM$ için $\overline{g}\left(X_p, V\right) = 0$ koşulunu sağlayan V vektörüne M nin **normal vektörü**, V nin birim vektör olması halinde de M nin **birim normal vektörü** denir. Birim normal vektör alanı bazen **normal kesit** olarakta adlandırılır. M nin tüm normal vektörlerini içeren $TM^\perp$ cümlesine ise M nin **normal demeti** adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.27 M ve $\overline{M}$ sırasıyla n ve $n+d$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, M, $\overline{M}$ nin alt manifoldu, $\overline{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla M ve $\overline{M}$ de kovaryant türevler olsun. Böylece $\forall X,\ Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.10}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya **Gauss formülü** adı verilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. (2.10) bağıntısında tanımlanan h ya M nin **ikinci temel formu** adı verilir. Eğer $h = 0$ ise M ye **total geodeziktir** denir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.28 M ve $\overline{M}$ sırasıyla n ve $n+d$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, M, $\overline{M}$ nin alt manifoldu olsun. M nin birim normal vektör alanı V olsun. $\overline{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_V X$ ve $\nabla^\perp_X V$ olmak üzere

$$A_V : \chi(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^\perp_X V \tag{2.11}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya **Weingarten formülü** denir. Burada A_V ye M nin şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $TM^{\perp}$ normal demetindeki koneksiyon adı verilir. M nin şekil operatörü A_V ile ikinci temel form h arasında

$$g(A_V X, Y) = \overline{g}(h(X,Y), V)$$

bağıntısı vardır. Burada g, M üzerine indirgenmiş skalar çarpımdır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.29 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir alt manifoldu olsun. M nin ikinci temel tensörü h olmak üzere $X_p \in T_pM$ için

$$k_n(X_p) = \|h(X_p, X_p)\|$$

reel sayısına M nin X_p doğrultusundaki **normal eğriliği** denir (Hicks, 1965).

Tanım 2.1.30 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $(\overline{M}, \overline{g})$ üzerindeki Riemann koneksiyonu $\overline{\nabla}$ olsun. $(\overline{M}, \overline{g})$ üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilen $\alpha(I)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$\overline{\nabla}_T T$$

vektör alanına $\alpha(I)$ *eğrisi* boyunca geodezik eğrilik vektör alanı denir.

$$\begin{aligned} k_g : \quad & I \to \mathbb{R} \\ & t \to k_g(t) = \left\|\overline{\nabla}_T T\right\| \end{aligned}$$

olarak tanımlanan k_g fonksiyonuna da α eğrisinin **geodezik eğrilik fonksiyonu** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.31 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir alt manifoldu olsun. (M, g) ve $(\overline{M}, \overline{g})$ üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla $\overline{R}$ ve R olsun. $\forall X,\ Y,\ Z,\ W \in \chi(M)$ için

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z, W\right) = g\left(R(X,Y)Z, W\right) - \overline{g}\left(h(X,W), h(Y,Z)\right) + \overline{g}\left(h(Y,W), h(X,Z)\right)$$

ile tanımlanan bağıntıya **Gauss denklemi** denir. Gauss denkleminin normal bileşeninin alınması ile elde edilen

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)$$

bağıntısına ise **Codazzi denklemi** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.32 $\overline{M}$, $n-$boyutlu ve N, $(n-1)-$boyutlu birer C^∞ manifold olsunlar.

$$f: \quad N \to \overline{M}$$

fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = M$ manifolduna $\overline{M}$ nin bir **hiperyüzey**i denir (Hacısalihoğlu, 1983, Brickell ve Clark, 1970).

$(\overline{M}, \overline{g})$ $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve (M,g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin $(n-1)$ $-$boyutlu bir alt manifoldu olsun. Bu durumda (M,g) nin bir hiperyüzey olacağı açıktır. Bu durumda (2.11) bağıntısında belirtilen $\nabla_X^{\perp} V$ normal bileşeni için $\nabla_X^{\perp} V = 0$ dır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Tanım 2.1.33 $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. $\overline{M}$ de Riemann koneksiyonu $\overline{\bigtriangledown}$ olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$A_N X = \overline{\bigtriangledown}_X N$$

şeklinde tanımlı, A_N dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşüm**ü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.34 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M,g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi, $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun. Bu durumda,

1) $A_N : \chi(M) \to \chi(M)$ dir.

2) A_N lineerdir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.35 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi, $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun. Bu durumda A_N simetriktir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.36 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi, $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun.

$$\begin{aligned} H &: M \to \mathbb{R} \\ p &\to H(p) = \text{İz}H \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin **ortalama eğrilik fonksiyonu** ve $H(p)$ ye de $p \in M$ noktasında M nin **ortalama eğriliği** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.37 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olmak üzere, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için, $A_N = \lambda I$ ise p noktasına M nin **umbilik noktası** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.38 $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi, $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun. Eğer $X_p, Y_p \in T_pM$ için

$$g(A_N X_p, Y_p) = 0$$

ise bu iki tanjant vektöre **eşleniktirler** denir. Bir $X_p \neq 0$ tanjant vektörü için

$$g(A_N X_p, X_p) = 0$$

ise X_p doğrultusuna M nin p noktasındaki **asimptotik doğrultusu** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2 Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\overline{g}\mid_V : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

i) $\overline{g}\mid_V(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{u})$

ii) $$\begin{aligned} \overline{g}\mid_V (a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) &= a\overline{g}\mid_V (\vec{u}, \vec{w}) + b\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{w}) \\ \overline{g}\mid_V (\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) &= a\overline{g}(\vec{u}, \vec{v}) + b\overline{g}\mid_V (\vec{u}, \vec{w}) \end{aligned}$$

özelliklerine sahip ise $\overline{g}\mid_V$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilineer form** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\overline{g}\mid_V$ olsun.

i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\overline{g}\mid_V(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna **pozitif (definite)tanımlı**,

ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\overline{g}\mid_V(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı**,

iii) $\forall \vec{v} \in V$ için $\overline{g}\mid_V(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna **pozitif (semi-definite)yarı tanımlı**,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ için $\overline{g}\mid_V(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna **negatif yarı tanımlı**,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\overline{g}\mid_V(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olmak zorunda ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna **non-dejenere**, aksi taktirde **dejeneredir** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3 V bir reel vektör uzayı ve

$$\overline{g}\mid_V : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\overline{g}\mid_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\overline{g}\mid_V$ **simetrik bilineer formun indeksi** denir ve ν ile gösterilir. W altuzayı üzerine indirgenmiş $\overline{g}\mid_W$ simetrik bilineer formuna **indirgenmiş simetrik bilineer form** adı verilir ve kısaca g ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4 $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ iken $\overline{g}\mid_V (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ise $\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{w}$ vektörleri **diktir** denir ve $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ şeklinde gösterilir (O'Neill, 1983, Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.5 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $p \in \overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\overline{M}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \overline{g}: & T_p\overline{M} \times T_p\overline{M} & \to & \mathbb{R} \\ & (X_p, Y_p) & \to & \overline{g}(X_p, Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer ve non-dejenere $(0, 2)$ tipindeki tensör alanına $\overline{M}$ üzerinde bir **metrik tensör** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6 $\overline{g}$ metrik tensörü ile donatılmış bir C^∞ $\overline{M}$ manifolduna **yarı-Riemann manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7 Bir $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\overline{g}$ metrik tensörünün indeksine **yarı-Riemann manifoldunun indeksi** denir ve ind$\overline{M}$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8 $\overline{M}$ bir C^∞ yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{g}$, $\overline{M}$ üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Eğer $\forall p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ için

$$\overline{g} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

i) $\overline{g}(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise X_p vektörüne **uzay benzeri (Spacelike)**,

ii) $\overline{g}(X_p, X_p) < 0$ ise X_p vektörüne **zaman benzeri (timelike)**,

iii) $\overline{g}(X_p, X_p) = 0$, $X_p \neq 0$ ise X_p vektörüne **ışık benzeri (lightlike veya null)** denir (O'Neill,1983).

2.3 Hemen Hemen Kompleks ve Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.3.1 $\overline{M}$ bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. $\overline{M}$ nin her p noktasındaki $T_p\overline{M}$ tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir

$$J : T_p\overline{M} \to T_p\overline{M}$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye $\overline{M}$ üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir. Hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış $\overline{M}$ manifolduna **hemen hemen kompleks manifold** denir. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.2 $\overline{M}$, hemen hemen kompleks bir manifold, J, $\overline{M}$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. $\overline{g}$, $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere

$\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{g}(JX, JY) = \overline{g}(X, Y)$$

koşulu sağlanıyor ise $\overline{g}$ ye $\overline{M}$ üzerinde **Hermit metrik** denir. Hermit metrik ile donatılmış hemen hemen kompleks $\overline{M}$ manifolduna **hemen hemen Hermit manifold** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.3 $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu manifold, ϕ, ξ ve η da $\overline{M}$ üzerinde sırasıyla, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, $\overline{M}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere ;

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya $\overline{M}$ üzerinde bir **hemen hemen kontakt yapı** denir. Bu yapı ile birlikte $\overline{M}$ manifolduna **hemen hemen kontakt manifold** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.4 $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu manifold, η da $\overline{M}$ üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulu sağlanıyor ise $\overline{M}$ ye bir **kontakt yapıya sahiptir** denir. Bu kontakt yapı ile birlikte $\overline{M}$, **kontakt manifold** olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.3.5 $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu bir kontakt manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ üzerinde, $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ ve $\overline{g}$ Riemann metriği olmak üzere

$$\overline{g}(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.12}$$

koşulunu sağlayan bir $(\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ hemen hemen kontakt metrik yapı vardır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.6 $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu bir kontakt manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde (2.12) bağıntısını sağlayan $(\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ hemen hemen kontakt metrik yapısı var ise bu yapıya **kontakt metrik yapısı**, bu yapı ile birlikte $\overline{M}$ ye **kontakt metrik manifold** denir (Yano ve Kon, 1984).

$(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontakt manifoldu $\overline{M}$ verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen kontakt yapı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel doğruyu $\mathbb{R}$ ile göstererek $\overline{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu göz önüne alalım. $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $(X, f\frac{d}{dt})$ şeklindedir. Burada X, $\overline{M}$ ye teğet bir vektör alanı, t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f de $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$\overline{M} \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{2.13}$$

ile tanımlanır. Bu şekilde tanımlı J lineer dönüşümü $J^2 = -I$ koşulunu sağlamaktadır. Bu durumda J, $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır (Yano, Kon 1984).

Tanım 2.3.7 $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve ϕ, $\overline{M}$ üzerinde bir (1,1) tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ *için*

$$N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y]$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipinde tensör alanına ϕ nin **Nijenhuis tensör alanı** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.8 $\overline{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold, $\overline{M}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilirdir** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.9 $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontakt manifoldu $\overline{M}$ verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen kontakt yapı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel doğruyu $\mathbb{R}$ ile göstererek $\overline{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. Eğer $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerindeki (2.13) ile verilen hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirse (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına **normaldir** denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.10 $\overline{M}$, $(2n+1)$ boyutlu $(\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ kontakt metrik yapıya sahip bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer $\overline{M}$ nin kontakt metrik yapısı normal ise $\overline{M}$ bir Sasakian yapıya ya da normal kontakt metrik yapıya sahiptir denir. Sasakian yapıya sahip $\overline{M}$ manifolduna **Sasakian manifold** adı verilir ve $\overline{M}(\phi,\overline{g},\xi)$ ile gösterilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.11 $\overline{M}(\phi,\overline{g},\xi)$ bir Sasakian manifold ve

$$D = \{X : \overline{g}(X, \xi) = 0\}$$

olsun. Eğer $\forall X, Y, Z, W \in \chi(D)$ için

$$\phi^2(\left(\overline{\nabla}_W \overline{R}\right)(X,Y)Z) = 0 \tag{2.14}$$

oluyor ise $\overline{M}(\phi,\overline{g},\xi)$ ye **lokal** $\phi-$**simetrik** Sasakian manifold adı verilir (De, Shaikh ve Biswas, 2003).

Tanım 2.3.12 $\overline{M}(\phi,\overline{g},\xi)$ bir Sasakian manifold olsun. Eğer $\forall X, Y, Z, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\phi^2(\left(\overline{\nabla}_W \overline{R}\right)(X,Y)Z) = A(W)\overline{R}(X,Y)Z \tag{2.15}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir A $1-$formu var ise $\overline{M}(\phi,\overline{g},\xi)$ ye $\phi-$**recurrent** Sasakian manifold denir (De, Shaikh ve Biswas, 2003).

2.4 Lightlike Hiperyüzeyler

Tanım 2.4.1 M, $0 < \nu < m+1$ indekse sahip $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasında T_pM nin dik uzayı $T_pM^{\perp}$ ve radikali $RadT_pM$, sırasıyla,

$$T_pM^{\perp} = \left\{Y_p \in T_p\overline{M} \mid \overline{g}\left(Y_p, X_p\right) = 0, \forall X_p \in T_pM\right\}$$

ve

$$RadT_pM = \left\{Y_p \in T_pM \mid g\left(Y_p, X_p\right) = 0, \forall X_p \in T_pM\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.2 M, $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun $n-$boyutlu bir alt manifoldu olsun. M üzerinde

$$RadTM \;\; : \;\; p \in M \;\; \rightarrow \;\; RadT_pM$$

şeklinde tanımlı her bir noktayı bir $r-$boyutlu alt vektör uzaya eşleyen $RadTM$ dönüşümüne **radikal dağılım**, M ye ise $r-$**lightlike (dejenere) manifold** denir. $RadT_pM$ nin boyutu nullT_pM ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Lemma 2.4.3 $(W, \overline{g})$, null$W = r < n$ olacak şekilde, reel $n-$boyutlu lightlike vektör uzayı olsun Bu durumda radikal uzaya tümleyen altuzay non-dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.4 $(V, \overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve $\left(W, \overline{g}_{|W}\right)$, null$W = r < n$ olacak şekilde, reel $n-$boyutlu lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzaya tümleyen altuzaya W nin **screen(ekran) altuzayı** denir ve SW ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.5 $(V, \overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da onun altuzayı olsun. W üzerine indirgenmiş metrik g dejenere ise W ya **lightlike (dejenere) altuzay** denir. Aksi durumda W ya **non-dejenere** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.6 $(V, \overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da onun altuzayı olsun

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \overline{g}(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W **uzayının diki** denir (O'Neill,1983, Duggal ve Bejancu, 1996).

Lemma 2.4.7 $(V, \overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da onun altuzayı olsun. Bu durumda,

i) $boyW + boyW^{\perp} = m$,

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$,

iii) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dır (O'Neill,1983, Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.8 M, $0 < \nu < m+1$ indekse sahip $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. $\forall p \in M$ için

$$RadT_pM = T_pM \cap T_pM^{\perp} \neq \{0\}$$

ise M ye $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldunun **Lightlike (dejenere, null) hiperyüzeyi** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Lemma 2.4.9 (M, g), $0 < \nu < m+1$ indekse sahip $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) M, $\overline{M}$ nin lightlike hiperyüzeyidir.

ii) g, M de sabit m rankına sahiptir.

iii) $TM^{\perp} = \bigcup\limits_{x \in M} T_xM^{\perp}$, M de bir dağılımdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Yardımcı teorem 2.4.3 den $S(TM)$, $RadTM$ ye ortogonal ve non-dejeneredir. $S(TM)$, M üzerinde sabit indeksli olarak alınsın. Buradan

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{2.16}$$

ortogonal direkt toplamı gözönüne alınabilir. Böylece

$$T\overline{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{2.17}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $S(TM)^{\perp}$, ekran dağılımı olarak adlandırılan $S(TM)$ nin ortogonal tümleme vektör demetidir. $tr(TM)$, $S(TM)$ de $TM^{\perp}$ in tümleme vektör demetini göstersin. Buradan

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus tr(TM) \tag{2.18}$$

dir.Buradaki $tr(TM)$, tranversal vektör demeti olarak adlandırılır.(Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 2.4.10 $(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g}\ )$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerinde

$$\overline{g}(N, \xi) = 1 \tag{2.19}$$

ve

$$\overline{g}(N, N) = \overline{g}(N, W) = 0, \forall W \in \Gamma(S(TM)) \tag{2.20}$$

olacak şekilde rankı 1 olan bir tek $N \in \Gamma(tr(TM))$ bazı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

(2.16) ve (2.17) özellikleri kullanılarak

$$T\overline{M}_{|M} = S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus (trTM)) \tag{2.21}$$

eşitliği elde edilir. Böylece herhangi bir $S(TM)$ ekran dağılımı için (2.19) ve (2.20) özelliklerini sağlayan ve TM için tümleme vektör demeti olan bir tek $tr(TM)$ transversal vektör demeti vardır (Duggal ve Bejancu,1996).

Örnek 2.4.11 R_2^4 de, $M = \left\{(x^0, x^1, x^2, x^3) \mid\ x^3 = x^0 + \frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2,\ x^i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 3\right\}$ hiperyüzeyi göz önüne alınsın. M bir lightlike hiperyüzeydir Gerçektende,

$M = \left\{\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \mid\ f:\ U \subset R_2^4 \to R\right\},\ f\ \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = -x^0 - \dfrac{1}{2}(x^1 + x^2)^2 + x^3$

$$gradf = \nabla f = \sum \varepsilon_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\varepsilon_0 \frac{\partial f}{\partial x^0}, \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial x^3}\right)$$

$$\nabla f = \xi = \left\{1, \left(x^1 + x^2\right), -\left(x^1 + x^2\right), 1\right\} = \frac{\partial}{\partial x^0} + \left(x^1 + x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^1} - \left(x^1 + x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}$$

elde edilir. $\overline{g}(\xi, V) \neq 0$ olacak şekilde $V = (1, (x^1 + x^2), (x^1 + x^2), -1)$ seçilirse,

$$\overline{g}(\xi, V) = -1 - \left(x^1 + x^2\right)^2 - \left(x^1 + x^2\right)^2 - 1 = -2\left[1 + \left(x^1 + x^2\right)^2\right]$$

ve

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\overline{g}(\xi, V)}\left\{V - \frac{\overline{g}(V, V)}{2\overline{g}(\xi, V)}\xi\right\} \\ &= \frac{1}{-2\left[1 + (x^1 + x^2)^2\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial x^0} + \left(x^1 + x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^1} - \left(x^1 + x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{g}(N, W_1) = \overline{g}(N, W_2) = \overline{g}(W_1, W_2) = 0$ olacak şekilde $S(TM)$ yi geren W_1, W_2 vektör alanları $W_1 = \{-(x^1 + x^2), 1, 0, 0\}$ *ve* $W_2 = \{0, 0, 1, (x^1 + x^2)\}$ olarak alınabilir. Böylece $TM^{\perp}, S(TM)$ ve $tr(TM)$ değerleri

$$\begin{aligned} &tr\,(TM) = Sp\,\{N\} \\ &\xi = (1, (x^1 + x^2), -(x^1 + x^2), 1) \\ &\overline{g}(N, W_1) = \overline{g}(N, W_2) = \overline{g}(W_1, W_2) = 0 \\ &W_1 = \{-(x^1 + x^2), 1, 0, 0\}, \text{zaman benzeri (timelike)} \\ &W_2 = \{0, 0, 1, (x^1 + x^2)\}, \text{uzay benzeri (spacelike)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(M, g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ve $\overline{\nabla}$, M de Levi-Civita koneksiyon olsun. Kabul edelim ki, $S(TM)$ ve $tr(TM)$ sırasıyla ekran dağılım ve lightlike transversal vektör demeti olsun. Böylece, M boyunca $T\overline{M}$ nin $\{\xi, N, W_i\}$ $, 1 < i < m$ lokal quasi ortanormal vektör alanları gözönüne alınarak,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.22}$$

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V \tag{2.23}$$

bağıntıları yazılır. Burada $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma\left(tr(TM)\right)$, $\nabla_X Y$ ve $A_V X$ $\in \Gamma(TM)$, $h(X,Y)$ ve $\nabla^t_X V \in \Gamma\left(tr(TM)\right)$ dir. Sırasıyla, (2.22) ve (2.23) eşitlikleri Gauss ve Weingarten formülleri olarak adlandırılır. ∇, M üzerinde torsiyon-free lineer koneksiyon, h, $\Gamma\left(tr\left(TM\right)\right)-$değerli simetrik bilineer form, $\nabla^{\perp}$, $tr(TM)$ üzerinde lineer koneksiyon ve A_V, M nin şekil operatörüdür.

$\forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$B(X,Y) = \overline{g}\left(h\left(X,Y\right),\xi\right), \forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$$

ve

$$\tau\left(X\right) = \overline{g}\left(\nabla^{\perp}_X N, \xi\right) \tag{2.24}$$

olarak tanımlansın. Böylece (2.22) ve (2.23) eşitlikleri sırasıyla

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B\left(X,Y\right)N \tag{2.25}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \tau\left(X\right)N \tag{2.26}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilirler (Duggal ve Bejancu, 1996).

Sonuç 2.4.12 (M,g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M},\overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerinde

$$B(X,\xi) = 0, \ \forall X \in \Gamma(TM) \tag{2.27}$$

dır. Yani, lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$P : TM \rightarrow S(TM)$ bir projektif dönüşümünü göstersin. $S(TM)$ üzerindeki Gauss ve Weingarten denklemleri sırasıyla

$$\nabla_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + \overset{*}{h}(X, PY), \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.28}$$

ve

$$\nabla_X U = -\overset{*}{A}_U X + \overset{*}{\nabla}{}^t{}_X U, \ \forall X \in \Gamma(TM), U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right) \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overset{*}{\nabla}_X PY, \overset{*}{A}_U X \in \Gamma(S(TM))$ ve $h^*(X, PY)$, $\overset{*}{\nabla}_X \overset{t}{U} \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\overset{*}{h}$ ve $\overset{*}{A}_U$, sırasıyla, $S(TM)$ nin ikinci temel formu ve şekil operatörü olarak adlandırılır. (2.28) ve (2.29) eşitliklerine sırasıyla $S(TM)$ için Gauss ve Weingarten formülleri denir. (2.25), (2.23), (2.28) ve (2.29) eşitlikleri kullanılarak gerekli hesaplamalarla

$$g(A_V Y, PW) = \overline{g}\left(V, \overset{*}{h}(Y, PW)\right); \ \overline{g}(A_V Y, V) = 0 \tag{2.30}$$

ve

$$g\left(\overset{*}{A}_U X, PY\right) = g\left(U, \overset{*}{h}(X, PY)\right); \ g\left(\overset{*}{A}_U Y, V\right) = 0 \tag{2.31}$$

bulunur. Burada $\forall X, Y \in \Gamma(TM), U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ dir. Şimdi U üzerinde

$$C(X, PY) = \overline{g}\left(\overset{*}{h}(X, PY), N\right)$$

ve

$$\varepsilon(X) = \overline{g}\left(\overset{*}{\nabla}{}^t{}_X \xi, N\right)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\overset{*}{h}(X, PY) = C(X, PY)\,\xi$$

ve

$$\overset{*}{\nabla}{}^{t}{}_{X}\xi = \varepsilon\left(X\right)\xi$$

dir. Bu eşitlikler (2.28), (2.29) da yerine yazılırsa

$$\nabla_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + C\left(X, PY\right)\xi \tag{2.32}$$

ve

$$\nabla_X U = -\overset{*}{A}_U X + \varepsilon\left(X\right)\xi \tag{2.33}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon\left(X\right) = -\tau\left(X\right)$ dir. Sonuç olarak (2.30) ve (2.31) eşitlikleri

$$g\left(A_N Y, PW\right) = C\left(Y, PW\right);\ \overline{g}\left(A_N Y, N\right) = 0 \tag{2.34}$$

ve

$$g\left(\overset{*}{A}_\xi X, PY\right) = B\left(X, PY\right)\ ; g\left(\overset{*}{A}_\xi Y, N\right) = 0 \tag{2.35}$$

şekline dönüşür (Duggal ve Bejancu, 1996).

(M, g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerine indirgenmiş koneksiyon genel olarak metrik koneksiyon değildir. Bu gerçek aşağıdaki yardımcı teoremde ifade edilmiştir.

Lemma 2.4.13 (M, g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $S\left(TM\right)$ ekran dağılımının üzerindeki koneksiyon $\overset{*}{\nabla}$ ve (M, g) üzerine indirgenmiş koneksiyon ∇ olmak üzere

i) Lineer koneksiyon $\overset{*}{\nabla}$ metrik koneksiyondur.

ii) İndirgenmiş koneksiyon aşağıdaki eşitligi sağlar

$$\left(\nabla_X g\right)\left(Y, Z\right) = B\left(X, Y\right)\overline{g}(Z, N) + B\left(X, Z\right)\overline{g}(Y, N),\ \forall X, Y, Z \in \Gamma\left(TM\right) \tag{2.36}$$

(Duggal ve Bejancu, 1996).

(M,g) , $(\overline{M},\overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\overline{M}$ ve M üzerinde Levi-civita koneksiyon ve lineer koneksiyon, $\bar{R}$ ve R de Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. Buradan (2.22) ve (2.23) eşitlikleri kullanılarak $\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)\end{aligned} \tag{2.37}$$

bulunur. Burada

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla_X^t(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \tag{2.38}$$

dır.

Ayrıca $\forall X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)\,,U\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right),V\in\Gamma(tr(TM))$ için

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z,PW\right) &= g(R(X,Y)Z,PW) \\ &\quad + \overline{g}\left(h(X,Z)\,,\overset{*}{h}(Y,PW)\right) \\ &\quad - \overline{g}\left(h(Y,Z)\,,\overset{*}{h}(X,PW)\right),\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\overline{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z,U\right) = \overline{g}((\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)\,,U) \tag{2.40}$$

ve

$$\overline{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z,V\right) = \overline{g}(R(X,Y)Z,V) \tag{2.41}$$

elde edilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Lemma 2.4.14 (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. ∇, M üzerinde Levi-civita koneksiyonu, $\bar{R}$ ve R de sırasıyla $\overline{M}$ ve M üzerinde Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. Bu durumda $\bar{R}$ ve R arasında

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(X,Z)A_N Y - B(Y,Z)A_N X \\ &\quad +(\nabla_X B)(Y,Z)N + B(Y,Z)\tau(X)N \\ &\quad -(\nabla_Y B)(X,Z)N - B(X,Z)\tau(Y)N \end{aligned} \tag{2.42}$$

ilişkisi mevcuttur (Güneş, Şahin, ve Kılıç, 2003).

Tanım 2.4.15 $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\forall X,\ Y \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X, PY) = \rho g(X, PY) \tag{2.43}$$

koşulu sağlanıyor ise $S(TM)$**, ekran dağılımına total umbiliktir** denir. Burada λ, M üzerinde düzgün bir fonksiyondur (Duggal ve Bejancu,1996).

Tanım 2.4.16 $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M nin ikinci temel formu

$$B(X,Y) = \rho g(X,Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.44}$$

koşulunu sağlıyorsa M *ye* **total umbiliktir** denir. Burada ρ, M üzerinde bir C^{∞} fonksiyondur (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.17 $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi, M üzerindeki şekil operatörü A ve $S(TM)$ üzerindeki şekil operatörü A^* olsun. $p \in M$ noktasındaki A nın rankına M nin p noktasındaki **tip sayısı** adı verilir ve $t(p)$ ile gösterilir. $p \in M$ noktasındaki A^* nın rankına $S(TM)$ ekran dağılımının p noktasındaki **tip sayısı** adı verilir ve $t^*(p)$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.5 $S-$Manifoldlar

Tanım 2.5.1 $\overline{M}$, $(2m+n)$ boyutlu bir C^{∞} manifold olsun. $\overline{M}$ nin tanjant demeti $T\overline{M}$ olmak üzere, $T\overline{M}$, nin

$$\phi^3+\phi=0 \quad , \quad rank(\phi)=2m \tag{2.45}$$

koşulunu sağlayan $(1,1\ )$ tipindeki non-null, C^{∞} ϕ tensör alanına $f-$**yapı** denir (Goldberg,ve Yano, 1970).

$f-$yapı, hemen hemen kompleks $(n=0)$ ve hemen hemen kontakt $(n=1)$ yapıların bir genelleştirilmişidir. hemen hemen kontakt durumda $\overline{M}$ yönlendirilebilirdir.

$$(i)\ P=-\phi^2 \qquad (ii)\ Q=\phi^2+I \tag{2.46}$$

ile tanımlanan iki bütünleyen projeksiyon operatörlere karşılık $\dim(D)=2m$ ve $\dim(D^{\perp})=n$ olacak şekilde D ve $D^{\perp}$ bütünleyen dağılımları vardır.

Lemma 2.5.2 $\overline{M}$, $(2m+n)-$boyutlu olan bir C^{∞} manifold olsun. ϕ, $\overline{M}$ üzerinde bir $f-$ yapı, P ve Q ise (2.46) ile tanımlı bütünleyen projeksiyonlar olmak üzere,

$$i)\ \phi P=P\phi=\phi \ \ , \ \ ii)\ \phi Q=Q\phi=0 \ \ , \ \ iii)\ \phi^2P=-P \ \ , \ \ iv)\ \phi^2Q=0 \tag{2.47}$$

eşitlikleri geçerlidir (Ishihara ve Yano, 1964).

(2.47) koşulunu sağlayan P ve Q projeksiyonları yardımı ile $T\overline{M}$, biri $2m$ diğeri n boyutlu olan iki dağılımın toplamı olarak,

$$T\overline{M}=D\oplus D^{\perp} \ \ , \ \ D\cap D^{\perp}=\{0\} \tag{2.48}$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 2.5.3 $D_x^{\perp}$, $\forall x \in \overline{M}$ noktasında n tane global tanımlı $\{U_a\}$ tarafından gerilsin. U_a nın duali u^a olmak üzere

$$\phi^2 = -I + \sum_{a=1}^{n} u^a \otimes U_a \tag{2.49}$$

dır (Yanove Kon, 1984).

Tanım 2.5.4 $\overline{M}$, $(2m+n)-$boyutlu bir C^∞ manifold olsun. Eğer $\overline{M}$ üzerinde (2.49) ile belirtilen bir yapı var ise bu yapı ile birlikte $\overline{M}$ ye bir **global çatılı** ya da kısaca **çatılı manifold** denir ve $\overline{M}(\phi, U_a)$ ile gösterilir (Goldberg ve Yano, 1970).

Lemma 2.5.5 $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, ϕ $f-$ yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a olsun. Bu durumda

$$\text{i) } \phi U_a = 0, \quad \text{ii) } u^a \circ \phi = 0, \quad \text{iii) } u^a(U_b) = \delta_b^a \tag{2.50}$$

eşitlikleri geçerlidir (Goldberg ve Yano, 1970).

Lemma 2.5.6 $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, ϕ $f-$ yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a, L Lie türev operatörü ve S_ϕ torsiyon tensör alanı olsun. Eğer $S_\phi = 0$ ise aşağıdaki bağıntılar geçerlidir (Goldberg,ve Yano, 1970).

i) $L_{U_a} u^b = 0,$

ii) $[U_a, U_b] = 0,$

iii) $L_{U_a} \phi = 0,$

iv) $(L_{\phi X} u^a)(Y) - (L_{\phi Y} u^a)(X) = 0.$

Tanım 2.5.7 $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, N_ϕ Nijenhuis tensör alanı, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere

$$S_\phi = N_\phi + 2\sum_{a=1}^{n} du^a \otimes U_a \tag{2.51}$$

ile belirtilen $(1,2)$ tipindeki S_ϕ tensör alanına **torsiyon tensör alanı** adı verilir. Torsiyon tensör alanının sıfır olması halinde $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifolduna **normaldir** denir (Goldberg ve Yano, 1970).

Lemma 2.5.8 $\overline{M}$, $(2m+n)$ boyutlu bir C^∞ manifold ve $\overline{M}$ üzerinde $f-$yapı ϕ olsun. ϕ nin matris formu

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Ishihara ve Yano, 1964).

Lemma 2.5.9 $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a olsun. Bu durumda $\overline{g}$ metriği

$$\overline{g}(\phi X, \phi Y) = \overline{g}(X, Y) - \sum_{a=1}^{n} u^a(X)u^a(Y) \tag{2.52}$$

$$\overline{g}(X, U_a) = u^a(X) \tag{2.53}$$

koşullarını sağlar (Yano ve Kon, 1984).

(2.52) gözönüne alındığında $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold üzerindeki metriğin

$$\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0 \tag{2.54}$$

koşulunu sağladığı, yani; ϕ nin ters-simetrik olduğu görülmektedir. (2.52) ve (2.53) koşullarını sağlayan keyfi bir Riemann metrik her zaman bulunabilir (Duggal ve Bejancu,1996).

Tanım 2.5.10 Eğer $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifoldu üzerinde (2.52) ve (2.53) yapıları varsa $\overline{M}(\phi, U_a)$ ye **metrik çatılı manifold** denir. Metrik çatılı manifold yapısı $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ ile gösterilir (Terlizzi ve Pastore, 2002).

Tanım 2.5.11 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir metrik çatılı manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde $\overline{\Omega}$, **temel 2-formu**,

$$\overline{\Omega}(X, Y) = \overline{g}(X, \phi Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M}) \tag{2.55}$$

ile tanımlanır (Terlizzi ve Pastore, 2002).

Tanım 2.5.12 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir metrik çatılı manifold ve $\overline{\Omega}$ bir temel $2-$form olsun. Eğer $\overline{M}$ normal, $U_1, ..., U_n$ vektör alanları birer killing vektör alanı ve $\overline{\Omega}$, 2-formu kapalıysa, yani $d\overline{\Omega} = 0$ ise $\overline{M}$, normal metrik çatılı manifold ya da K**-manifold** olarak adlandırılır (Terlizzi ve Pastore, 2002).

Tanım 2.5.13 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir K-manifold olsun. $\forall a$, $1 \leq a \leq n$, için U_a nın duali u^a olmak üzere $u^1 \wedge ... \wedge u^n \wedge \left(\overline{\Omega}\right)^m \neq 0$ olduğunda K**-manifolduna yönlendirilebilirdir** denir (Terlizzi ve Pastore, 2002).

Tanım 2.5.14 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir yönlendirilebilir $K-$manifold olsun. Eğer

$$\overline{\Omega}(X, Y) = du^a(X, Y) \tag{2.56}$$

oluyor ise $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ ye $S-$**manifold** denir (Terlizzi ve Pastore, 2002).

Örnek 2.5.15 E^{2m+n}, $(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_n)$ kartezyen koordinatlarına sahip bir Öklid uzay olsun.

$$\begin{aligned}
U_a &= 2\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \ a = 1, 2, ..., n \\
u^a &= \frac{1}{2}(dz_a - \sum_{i=1}^{m} y_i dx_i), \\
\phi X &= \sum_{i=1}^{m} Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial y_i} + (\sum_{i=1}^{m} Y^i y_i)(\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_a}), \\
\overline{g} &= \sum_{a=1}^{n} u^a \otimes u^a + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}(dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i)
\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$u^1 \wedge ... \wedge u^n \wedge \overline{\Omega}^m \neq 0$$

ve

$$du^1 = ... = du^n = \sum_{a=1}^{n} dx_a \wedge dy_a$$

dır. Böylece üzerindeki $(\phi, \overline{g}, U_a)$ yapısıyla birlikte E^{2m+n} bir $S-$manifold olur. Burada $X = \sum_{i=1}^{m}(X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y_i}) + \sum_{a=1}^{n} Z^a \frac{\partial}{\partial z_a}$ *dır.*

Lemma 2.5.16 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{\nabla}$, Riemann koneksiyonu, ϕ, $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları olmak üzere $\forall X \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{\nabla}_X U_a = -\phi X \tag{2.57}$$

dir (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Lemma 2.5.17 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{\nabla}$, Riemann koneksiyonu, ϕ, $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{g}(\phi X, \phi Y) U_i + u^i(Y)\phi^2 X\right) \tag{2.58}$$

dır (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Lemma 2.5.18 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{R}(X, Y)U_a = \sum_{i=1}^{n} u^i(X)\phi^2 Y - u^i(Y)\phi^2 X \tag{2.59}$$

dır (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Sonuç 2.5.19 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, u^a, $1 \leq a \leq n$, U_a yapı vektör alanlarının dual vektör alanları olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$u^a(\overline{R}(X,Y)Z) = \sum_{i=1}^{n} u^i(X)\overline{g}(\phi Y,\phi Z) - u^i(Y)\overline{g}(\phi X,\phi Z)$$

dır (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Lemma 2.5.20 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X,Y \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{R}(X,U_a)Y = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\overline{g}(\phi X,\phi Y)U_i + u^i(Y)\phi^2 X\right\} \tag{2.60}$$

dır (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Sonuç 2.5.21 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold ve.$1 \leq a \leq n$ için

$$D = \{X : \overline{g}(X,\xi_a) = 0\}$$

olsun. $\overline{M}$ üzerinde, $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı olmak üzere $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(D)$ için

$$\overline{R}(\phi X,\phi Y,\phi Z,\phi W) = \overline{R}(X,Y,Z,W)$$

dır (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Lemma 2.5.22 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{Ric}$ Ricci eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{Ric}(X,U_a) = 2m\sum_{j=1}^{n} u^j(X) \tag{2.61}$$

dır (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Lemma 2.5.23 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, Ric Ricci eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{Ric}(\phi X, \phi Y) = \overline{Ric}(X, Y) - 2m \sum_{i,j=1}^{n} u^i(X)u^j(Y)$$

dir (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1990).

Tanım 2.5.24 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $p \in \overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\overline{M}$ ve D, (2.47) ile verilen dağılım olsun. $X \in \chi(D)$ birim vektör alanı olmak üzere $T_p\overline{M}$ nin $\{X, \phi X\}$ tarafından gerilen iki boyutlu bir alt uzayına $T_p\overline{M}$ nin $\phi-$**kesiti** adı verilir ve Π ile gösterilir (Fernandez, Hans-Uber, 2005).

Tanım 2.5.25 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $p \in \overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\overline{M}$ ve $T_p\overline{M}$ nin $\phi-$kesiti Π olsun. Π nin

$$K\left(X, \phi X\right) = g(R\left(X, \phi X\right)\phi X, X) \tag{2.3.1}$$

olarak tanımlanan kesit eğriliğine Π nin $\phi-$**kesitsel eğriliği** adı verilir (Fernandez, Hans-Uber, 2005).

Tanım 2.5.26 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve $p \in \overline{M}$ noktasındaki $\overline{M}$ nin tanjant uzayı $T_p\overline{M}$ olsun. $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin $\phi-$kesitsel eğriliği bütün $\Pi \subset T_p\overline{M}$ alt düzlemleri için $\forall p \in \overline{M}$ noktasında bir c sabitine eşit ise $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ $S-$manifoldu $S-$**uzay form** olarak adlandırlır ve $\overline{M}(c)$ ile gösterilir (Fernandez, Hans-Uber, 2005).

Lemma 2.5.27 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)$ boyutlu bir $S-$uzay form, $\overline{R}$, $\overline{M}(c)$ üzerinde Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = & \sum_{i,j=1}^{n}\left\{u^i(X)u^j(Z)\phi^2 Y - u^i(Y)u^j(Z)\phi^2 X\right. \\ & \left. -\overline{g}(\phi X, \phi Z)u^i(Y)U_j + \overline{g}(\phi Y, \phi Z)u^i(X)U_j\right\} \\ & +\frac{c+3n}{4}\left[\overline{g}(\phi X, \phi Z)\phi^2 Y - \overline{g}(\phi Y, \phi Z)\phi^2 X\right] \\ & +\frac{c-n}{4}\left[\overline{g}(X, \phi Z)\phi Y - \overline{g}(Y, \phi Z)\phi X + 2\overline{g}(X, \phi Y)\phi Z\right]\end{aligned} \tag{2.62}$$

dir (Cabrerizo, L. Fernandez ve M. Fernandez, 1993).

Bölüm 3

$S-$MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI YAPILAR

3.1 Zayıf Simetrik $S-$Manifoldlar

Teorem 3.1.1 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve α, δ, γ Tanım 2.1.19 de ifade edilen 1-formlar olsun. Eğer $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ zayıf simetrik ise $\alpha + \delta + \gamma = 0$ dır.

İspat: $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ $S-$manifoldu zayıf simetrik olsun. (2.3) eşitliğinde $X = U_a$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Z,U) = \; & \alpha(U_a)\overline{Ric}(Z,U) + \beta(\overline{R}(U_a,Z)U) \\ & +\gamma(Z)\overline{Ric}(U_a,U) + \rho(\overline{R}(U_a,U)Z) + \delta(U)\overline{Ric}(Z,U_a)\end{aligned} \tag{3.1}$$

olur. (3.1) eşitliğinden

$$\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Z,U) = -\overline{Ric}(\overline{\nabla}_Z U_a, U) - \overline{Ric}(Z, \overline{\nabla}_U U_a).$$

dır. Böylece

$$\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Z,U) = \overline{Ric}(\phi Z, U) + \overline{Ric}(Z, \phi U).$$

olup ϕ nin ters simetrik, Q Ricci operatörünin simetrik ve $Q\phi = \phi Q$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Z,U) = 0. \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) kullanılarak (3.1) ifadesi

$$\begin{aligned}&\alpha(U_a)\overline{Ric}(Z,U) + \beta(\overline{R}(U_a,Z)U) + \gamma(Z)\overline{Ric}(U_a,U)\\&+\rho(\overline{R}(U_a,U)Z) + \delta(U)\overline{Ric}(Z,U_a) = 0\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde yeniden yazılarak $Z = U = U_a$ alınırsa

$$\begin{aligned}&\alpha(U_a)\overline{Ric}(U_a,U_a) + \beta(\overline{R}(U_a,U_a)U_a) + \gamma(U_a)\overline{Ric}(U_a,U_a)\\&+\rho(\overline{R}(U_a,U_a)U_a) + \delta(U_a)\overline{Ric}(U_a,U_a) = 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinden

$$(\alpha(U_a) + \delta(U_a) + \gamma(U_a))\,\overline{Ric}(U_a,U_a) = 0.$$

olduğu görülür. Burada $\overline{Ric}(U_a,U_a) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\alpha(U_a) + \delta(U_a) + \gamma(U_a) = 0 \tag{3.5}$$

dır. O halde bir $S-$ manifoldunun zayıf simetrik olması için U_a vektör alanları üzerinden $\alpha + \beta + \gamma = 0$ olmalıdır.

$\overline{M}$ nin tüm vektör alanları üzerinden $\alpha+\delta+\gamma = 0$ olması gerektiğini ispat etmek için (2.3) eşitliğinde $X = Z = U_a$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(U_a,U) = \;&\alpha(U_a)\overline{Ric}(U_a,U) + \beta(\overline{R}(U_a,U_a)U) + \gamma(U_a)\overline{Ric}(U_a,U)\\&+\rho(\overline{R}(U_a,U)U_a) + \delta(U)\overline{Ric}(U_a,U_a)\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}&\alpha(U_a)\overline{Ric}(U_a,U) + \beta(\overline{R}(U_a,U_a)U) + \gamma(U_a)\overline{Ric}(U_a,U)\\&+\rho(\overline{R}(U_a,U)U_a) + \delta(U)\overline{Ric}(U_a,U_a) = 0\end{aligned}$$

dır. U yerine X alınırsa,

$$\begin{aligned}&\alpha(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)+\gamma(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)\\&+\rho(\overline{R}(U_a,X)U_a)+\delta(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)=0\end{aligned}\tag{3.6}$$

elde edilir.

(2.3) eşitliğinde $X=U=U_a$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Z,U_a)= \;&\alpha(U_a)\overline{Ric}(Z,U_a)+\beta(\overline{R}(U_a,Z)U_a)+\gamma(Z)\overline{Ric}(U_a,U_a)\\&+\rho(\overline{R}(U_a,U_a)Z)+\delta(U_a)\overline{Ric}(Z,U_a)\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}&\alpha(U_a)\overline{Ric}(Z,U_a)+\beta(\overline{R}(U_a,Z)U_a)\\&+\gamma(Z)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\delta(U_a)\overline{Ric}(Z,U_a)=0\end{aligned}$$

olup, Z yerine X alınırsa

$$\begin{aligned}&\alpha(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)+\beta(\overline{R}(U_a,X)U_a)\\&+\gamma(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\delta(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)=0\end{aligned}\tag{3.7}$$

elde edilir.

(2.3) eşitliğinde, $Z=U=U_a$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{X}\overline{Ric}\right)(U_a,U_a)= \;&\alpha(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\beta(\overline{R}(X,U_a)U_a)+\gamma(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)\\&+\rho(\overline{R}(X,U_a)U_a)+\delta(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)\end{aligned}$$

yazılır.

$$\left(\overline{\nabla}_{X}\overline{Ric}\right)(U_a,U_a)=0$$

olacağından

$$\begin{aligned}&\alpha(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\beta(\overline{R}(X,U_a)U_a)+\gamma(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)\\&+\rho(\overline{R}(X,U_a)U_a)+\delta(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)\end{aligned}\tag{3.8}$$

dır. (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitliklerinin taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned}
&\alpha(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)+\gamma(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)\\
&+\rho(\overline{R}(U_a,X)U_a)+\delta(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)\\
&+\alpha(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)+\beta(\overline{R}(U_a,X)U_a)\\
&+\gamma(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\delta(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)\\
&\alpha(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\beta(\overline{R}(X,U_a)U_a)+\gamma(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)\\
&+\rho(\overline{R}(X,U_a)U_a)+\delta(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte (3.5) göz önüne alınırsa

$$(\delta(X)+\gamma(X)+\alpha(X))\,\overline{Ric}(U_a,U_a)=0$$

ve $\overline{Ric}(U_a,U_a)\neq 0$ olduğundan

$$\delta(X)+\gamma(X)+\alpha(X)=0 \quad \forall X\in\chi(\overline{M})$$

bulunur. Bu son eşitlik $\forall X\in\chi(\overline{M})$ için sağlandığından

$$\alpha+\delta+\gamma=0.$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

3.2 Zayıf Ricci-Simetrik $S-$Manifoldlar

Teorem 3.2.1 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold ve ρ,μ,ν Tanım 2.1.20 de ifade edilen 1-formlar olsun. Eğer $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ zayıf Ricci-simetrik ise $\rho+\mu+\upsilon=0$ dır.

İspat: $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir zayıf Ricci-simetrik $S-$manifold olsun. (2.4) eşitliğinde $X=U_a$ alınırsa

$$\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Y,Z)=\rho(U_a)\overline{Ric}(Y,Z)+\mu(Y)\overline{Ric}(U_a,Z)+\upsilon(Z)\overline{Ric}(U_a,Y)$$

dır. Bu eşitlikte $\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Y,Z)=0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\rho(U_a)\overline{Ric}(Y,Z)+\mu(Y)\overline{Ric}(U_a,Z)+\upsilon(Z)\overline{Ric}(U_a,Y)=0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $Y=Z=U_a$ alınır ve $\overline{Ric}(U_a,U_a)\neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\rho(U_a)+\mu(U_a)+\upsilon(U_a)=0 \tag{3.9}$$

bulunur. Yani bir $S-$ manifoldun zayıf Ricci-simetrik olması için U_a vektör alanları üzerinden $\rho+\mu+\upsilon=0$ olmalıdır.

$\overline{M}$ nin tüm vektör alanları üzerinden $\rho+\mu+\upsilon=0$ olması gerektiğini ispat etmek için (2.4) eşitliğinde $X=Y=U_a$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(U_a,Z)&=\rho(U_a)\overline{Ric}(U_a,Z)+\mu(U_a)\overline{Ric}(U_a,Z)\\&+\upsilon(Z)\overline{Ric}(U_a,U_a)=0\end{aligned}$$

yazılır ve Z yerine X alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(U_a,X)&=\rho(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)+\mu(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)\\&+\upsilon(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)=0,\end{aligned}$$

ve buradan

$$\rho(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)+\mu(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)+\upsilon(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)=0 \tag{3.10}$$

bulunur. (2.4) de $X=Z=U_a$ alınarak

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{U_a}\overline{Ric}\right)(Y,U_a)&=\rho(U_a)\overline{Ric}(Y,U_a)+\mu(Y)\overline{Ric}(U_a,U_a)\\&+\upsilon(U_a)\overline{Ric}(U_a,Y)=0\end{aligned}$$

yazılır ve Y yerine Xalınmasıyla

$$\rho(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)+\mu(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\upsilon(U_a)\overline{Ric}(U_a,X)=0 \tag{3.11}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.4) de $Y=Z=U_a$ alınarak

$$\rho(X)\overline{Ric}(U_a,U_a)+\mu(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)+\upsilon(U_a)\overline{Ric}(X,U_a)=0 \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.10), (3.11) ve (3.12) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &2(\rho(U_a)+\mu(U_a)+\upsilon(U_a))\overline{Ric}(U_a,X) \\ &+(\rho(X)+\mu(X)+\upsilon(X))\,\overline{Ric}(U_a,U_a)=0 \end{aligned}$$

bulunur. $\rho(U_a)+\mu(U_a)+\upsilon(U_a)=0$ ve $\overline{Ric}(U_a,U_a)\neq 0$ olduğundan

$$\rho(X)+\mu(X)+\upsilon(X)=0,\ \forall X\in\chi(\overline{M}) \tag{3.13}$$

bulunur. Bu eşitlik $\forall X\in\chi(\overline{M})$ için sağlandığından

$$\rho+\mu+\upsilon=0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece İspat tamamlanmış olur. □

3.3 Genelleştirilmiş Recurrent $S-$Manifoldlar

Teorem 3.3.1 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold ve α ve β Tanım 2.1.21 de ifade edilen 1-formlar olsun. Eğer $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ genelleştirilmiş recurrent ise

$$n\alpha+\beta=-(n-1)\frac{\beta\otimes Z}{\phi^2 Z}$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ $S-$manifoldu bir genelleştirilmiş recurrent manifold olsun. (2.5) eşitliğinde $Y=W=U_a$ alınırsa

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{R}\right)(U_a,Z)U_a=\alpha(X)\overline{R}(U_a,Z)U_a+\beta(X)\left[\overline{g}(Z,U_a)U_a-\overline{g}(U_a,U_a)Z\right]$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \left(\overline{\nabla}_X\overline{R}\right)(U_a,Z)U_a &= \overline{\nabla}_X\overline{R}(U_a,Z)U_a-\overline{R}(\overline{\nabla}_X U_a,Z)U_a \\ &-\overline{R}(U_a,\overline{\nabla}_X Z)U_a-\overline{R}(U_a,Z)\overline{\nabla}_X U_a \end{aligned} \tag{3.14}$$

dır. Bu eşitlikteki ifadeler hesap edilirse,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{R}(U_a,Z)U_a &= -\overline{\nabla}_X Z+\sum_{j=1}^{n}\left\{\eta^j(\overline{\nabla}_X Z)U_j-\overline{g}(Z,\phi X)U_j-\eta^j(Z)\phi X\right\}, \\
\overline{R}(\overline{\nabla}_X U_a,Z)U_a &= -\sum_{j=1}^{n}\eta^j(Z)\phi X, \\
\overline{R}(U_a,\overline{\nabla}_X Z)U_a &= -\overline{\nabla}_X Z+\sum_{j=1}^{n}\eta^j(\overline{\nabla}_X Z)U_j, \\
\overline{R}(U_a,Z)\overline{\nabla}_X U_a &= -\sum_{j=1}^{n}\overline{g}(Z,\phi X)U_j,
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (3.14) de yerlerine yazılır ise

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{R}\right)(U_a,Z)U_a=0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\alpha(X)\overline{R}(U_a,Z)U_a+\beta(X)\left\{\overline{g}(Z,U_a)U_a-\overline{g}(U_a,U_a)Z\right\}=0$$

olur. Yardımcı teorem 2.5.18 kullanılarak

$$\alpha(X)\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta^i(U_a)\phi^2 Z-\eta^i(Z)\phi^2 U_a\right\}+\beta(X)\left\{\overline{g}(Z,U_a)U_a-Z\right\}=0$$

ve buradan

$$\alpha(X)\phi^2 Z+\beta(X)\left\{\eta^a(Z)U_a-Z\right\}=0$$

bulunur. Bu son eşitlikte a üzerinden toplama geçilirse,

$$n\alpha(X)\phi^2 Z+\beta(X)\phi^2 Z+(n-1)\beta(X)Z=0$$

olup

$$n\alpha(X)+\beta(X)=-(n-1)\frac{\beta(X)Z}{\phi^2 Z}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall X\in\chi(\overline{M})$ için doğru olduğundan

$$n\alpha+\beta=-(n-1)\frac{\beta\otimes Z}{\phi^2 Z}$$

bulunur. □

Teorem 3.3.2 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a ve $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin skalar eğriliği $\overline{\tau}$ olsun. Eğer $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ *genelleştirilmiş recurrent ise*

$$u^a(A)\overline{\tau} + (c\,(c-1)-1)\,u^a(B) - 2m\sum_{j=1}^{n} u^j(A) + 1 = 0$$

dır. Burada $c = 2m+n$ dir.

İspat: II.Bianchi özdeşliğinden,

$$\begin{aligned}
&\alpha(X)\overline{R}(Y,Z)W + \beta(X)\,[\overline{g}(Z,W)Y - \overline{g}(Y,W)Z] \\
&+\alpha(Y)\overline{R}(Z,X)W + \beta(Y)\,[\overline{g}(X,W)Y - \overline{g}(Z,W)X] \\
&+\alpha(X)\overline{R}(X,Y)W + \beta(Z)\,[\overline{g}(Y,W)X - \overline{g}(X,W)Y] \;\; = 0
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\overline{M}$ nin bir $p \in \overline{M}$ noktasındaki $T_p\overline{M}$ tanjant uzayının $\{V_1,...,V_m,\phi V_1,...,\phi V_m,U_1,...U_n\}$ olan bazını $\{E_1,E_2,...,E_{2m+n}\}$ ile gösterelim. Bu eşitlik Y ile iç çarpılır, $Y = E_i$ alınır ve i üzerinden toplama geçilirse,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2m+n}\big\{\alpha(X)\overline{g}(\overline{R}(E_i,Z)W,E_i) + \beta(X)\,[\overline{g}(Z,W)\overline{g}(E_i,E_i) - \overline{g}(E_i,W)\overline{g}(Z,E_i)] \\
&+\alpha(E_i)\overline{g}(\overline{R}(Z,X)W,E_i) + \beta(E_i)\,[\overline{g}(X,W)\overline{g}(E_i,E_i) - \overline{g}(Z,W)\overline{g}(X,E_i)] \\
&+\alpha(Z)\overline{g}(\overline{R}(X,E_i)W,E_i) + \beta(Z)\,[\overline{g}(E_i,W)\overline{g}(X,E_i) - \overline{g}(X,W)\overline{g}(E_i,E_i)]\big\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha(X)\overline{Ric}(Z,W) + (c-1)\,\beta(X)\overline{g}(Z,W) + \overline{g}(\overline{R}(Z,X)W,A) \\
&+ [\overline{g}(X,W) - \beta(X)\overline{g}(Z,W)] \\
&-\alpha(Z)\overline{Ric}(X,W) + (c-1)\,\beta(Z)\overline{g}(X,W) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade de $Z = W = E_i$ alınır ve i üzerinden toplama geçilirse

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2m+n}\big\{\alpha(X)\overline{Ric}(E_i,E_i) + (c-1)\,\beta(X)\overline{g}(E_i,E_i) + \overline{g}(\overline{R}(E_i,X)E_i,A) \\
&+ [\overline{g}(X,E_i) - \beta(X)\overline{g}(E_i,E_i)] \\
&-\alpha(E_i)\overline{Ric}(X,E_i) + (c-1)\,\beta(E_i)\overline{g}(X,E_i)\big\} = 0
\end{aligned}$$

$$\alpha(X)\overline{\tau}+c\,(c-1)\,\beta(X)-\overline{Ric}(X,A)$$
$$+\sum_{i=1}^{2m+n}\overline{g}(X,E_i)-c\beta(X)-\overline{Ric}(X,A)+(c-1)\,\beta(X)=0$$

olur. Bu son ifade de $X=U_a$ alınırsa

$$\eta^a(A)\overline{\tau}+(c\,(c-1)-1)\,\eta^a(B)-2m\sum_{j=1}^{n}\eta^j(A)+1=0$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.3.3 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold, α ve β Tanım 2.1.22 de ifade edilen 1-formlar olsun. Eğer $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent ise

$$m\alpha(X)+c\beta(X)=0$$

dır. Burada $c=2m+n$ dir.

İspat: Genelleştirilmiş Ricci-recurrent manifold tanımında $Z=U_a$ alınırsa

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{Ric}\right)(Y,U_a)=\alpha(X)\overline{Ric}(Y,U_a)+2c\beta(X)\overline{g}(Y,U_a)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X\overline{Ric}\right)(Y,U_a) &= \overline{\nabla}_X\overline{Ric}(Y,U_a)-\overline{Ric}(\overline{\nabla}_XY,U_a)-\overline{Ric}(Y,\overline{\nabla}_XU_a)\\ &= -2mn\overline{g}(Y,\phi X)+\overline{Ric}(Y,\phi X)\end{aligned}$$

olup

$$-2mn\overline{g}(Y,\phi X)+\overline{Ric}(Y,\phi X)=\alpha(X)\overline{Ric}(Y,U_a)+2c\beta(X)\overline{g}(Y,U_a)$$

dır. Bu son ifade de $Y=U_i$ alınırsa

$$-2m\overline{g}(U_i,\phi X)+\overline{Ric}(U_i,\phi X)=\alpha(X)\overline{Ric}(U_i,U_a)+2c\beta(X)\overline{g}(U_i,U_a)$$

bulunur. Böylece

$$2m\alpha(X)\sum_{j=1}^{n}\eta^{j}(U_i)+2c\beta(X)\delta_{ia}=0$$

ve $i=a$ için

$$m\alpha(X)+c\beta(X)=0$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.3.4 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold, α ve β Tanım 2.1.23 de ifade edilen 1-formlar ve $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin skalar eğriliği $\overline{\tau}$ olsun. Eğer $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ genelleştirilmiş concircular recurrent ise

$$\alpha(X)\left[n+\frac{n(n-1)Z}{\phi^{2}Z-(n-1)Z}-\frac{\overline{\tau}}{c}\right]+n\beta(X)=-\frac{nX\left[\overline{\tau}\right]}{c}$$

dır. Burada $c=2m+n$ dir.

İspat: Genelleştirilmiş concircular recurrent manifold tanımında $Y=U_a$, $W=U_\beta$, $1\leq a,\beta\leq n$, alınırsa

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{C}\right)(U_a,Z)U_\beta=\alpha(X)\overline{C}(U_a,Z)U_\beta+\beta(X)\left[\overline{g}(Z,U_\beta)U_a-\overline{g}(U_a,U_\beta)Z\right]$$

olur. Öte yandan, kovaryant türev tanımından,

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{C}\right)(U_a,Z)U_\beta=\overline{\nabla}_X\overline{C}(U_a,Z)U_\beta-\overline{C}(\overline{\nabla}_XU_a,Z)U_\beta-\overline{C}(U_a,\overline{\nabla}_XZ)U_\beta-\overline{C}(U_a,Z)\overline{\nabla}_XU_\beta$$

dır. Bu değerler hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X\overline{C}\right)(U_a,Z)U_\beta \;=\;& \overline{\nabla}_X\left[\phi^{2}Z-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\eta^{a}(Z)U_a-Z\right)\right]\\ &+\left[\sum_{j=1}^{n}\eta^{j}(Z)\phi X-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\eta^{a}(Z)\phi X\right)\right]\\ &-\left[\phi^{2}\overline{\nabla}_XZ-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\eta^{a}(\overline{\nabla}_XZ\right)U_a-\overline{\nabla}_XZ\right]\\ &-\left[\sum_{j=1}^{n}\overline{g}(Z,\phi X)U_j-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\overline{g}(Z,\phi X)U_a\right)\right]\end{aligned}$$

bulunur. Kovaryant türev alınarak,

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{C}\right)(U_a,Z)U_\beta = -\frac{X\left[\overline{\tau}\right]}{c}\left(\eta^a(Z)U_a-Z\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\alpha(X)\overline{C}(U_a,Z)U_\beta+\beta(X)\left[\overline{g}(Z,U_\beta)U_a-\overline{g}(U_a,U_\beta)Z\right] &= \alpha(X)\left[\phi^2Z-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\eta^a(Z)U_a-Z\right)\right]\\ &\quad+\beta(X)\left[\eta^a(Z)U_a-Z\right]\\ \alpha(X)\left[\phi^2Z-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\eta^a(Z)U_a-Z\right)\right]+\beta(X)\left[\eta^a(Z)U_a-Z\right] &= -\frac{X\left[\overline{\tau}\right]}{c}\left(\eta^a(Z)U_a-Z\right)\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeden

$$\frac{\alpha(X)\left[\phi^2Z-\frac{\overline{\tau}}{c}\left(\eta^a(Z)U_a-Z\right)\right]}{\left(\eta^a(Z)U_a-Z\right)}+\beta(X)=-\frac{X\left[\overline{\tau}\right]}{c}$$

yazılabilir. a üzerinden toplam alınırsa

$$\alpha(X)\left[n+\frac{n(n-1)Z}{\phi^2Z-(n-1)Z}-\frac{\overline{\tau}}{c}\right]+n\beta(X)=-\frac{nX\left[\overline{\tau}\right]}{c}$$

bulunur. □

3.4 $\phi-$Recurrent $S-$Manifoldlar

Teorem 3.4.1 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$, $\phi-$recurrent $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $\forall Y,W\in\chi(\overline{M})$ için

$$n\sum_{a=1}^{n}u^a(Y)u^a(W)+\sum_{a,\beta=1}^{n}u^a(Y)u^\beta(W)=0$$

olmasıdır.

İspat: Tanım 2.3.12 kullanılarak $\forall X,Y,Z,W \in \chi(\overline{M})$ için

$$-\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z+\sum_{a=1}^{n}u^a(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z)U_a = A(W)\overline{R}(X,Y)Z$$

dır. Bu eşitliğin $U \in \chi(\overline{M})$ ile iç çarpımı yapılırsa

$$-\overline{g}\left(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z,U\right)+\sum_{a=1}^{n}u^a(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z)u^a(U) = A(W)\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,U)$$

elde edilir. $p \in \overline{M}$ noktasındaki $T_p\overline{M}$ tanjant uzayının $\{V_1,...,V_m,\phi V_1,...,\phi V_m,U_1,...U_n\}$ olan bazını $\{E_1,E_2,...,E_{2m+n}\}$ ile gösterelim. $X=U=E_i$ alınırsa

$$-\overline{g}\left(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(E_i,Y)Z,E_i\right)+\sum_{a=1}^{n}u^a(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(E_i,Y)Z)u^a(E_i) = A(W)\overline{g}\left(\overline{R}(E_i,Y)Z,E_i\right)$$

olur ve i üzerinden toplama geçilirse,

$$-\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{Ric}\right)(Y,Z)+nu^a(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(U_a,Y)Z) = A(W)\overline{Ric}(Y,Z)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$u^a(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(U_a,Y)Z) = \overline{g}(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(U_a,Y)Z,U_a)$$

olup $Z=U_\beta$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{g}(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(U_a,Y)U_\beta,U_a) &= \overline{g}(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}(U_a,Y)U_\beta,U_a)-\overline{g}(\overline{R}(\overline{\bigtriangledown}_W U_a,Y)U_\beta,U_a)\\ &\quad -\overline{g}(\overline{R}(U_a,\overline{\bigtriangledown}_W Y)U_\beta,U_a)-\overline{g}(\overline{R}(U_a,Y)\overline{\bigtriangledown}_W U_\beta,U_a)\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) deki değerlerin hesaplanması ile

$$\overline{g}(\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{R}\right)(U_a,Y)U_\beta,U_a)=0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$-\left(\overline{\bigtriangledown}_W\overline{Ric}\right)(Y,U_\beta) = A(W)\overline{Ric}(Y,U_\beta)$$

elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_W\overline{Ric}\right)(Y,U_\beta) &= \overline{\nabla}_W\overline{Ric}(Y,U_\beta)-\overline{Ric}(\overline{\nabla}_WY,U_\beta)-\overline{Ric}(Y,\overline{\nabla}_WU_\beta)\\ &= 2mn\overline{g}(Y,\phi W)+\overline{Ric}(Y,\phi W)\end{aligned}$$

olacağından

$$\overline{Ric}(Y,\phi W)=-2mn\overline{g}(Y,\phi W)-2mA(W)\sum_{a=1}^{n}u^a(Y)$$

olur. Böylece

$$\overline{Ric}(Y,W)=-2mn\overline{g}(Y,W)+2mn\sum_{a=1}^{n}u^a(Y)u^a(W)+2m\sum_{a,\beta=1}^{n}u^a(Y)u^\beta(W)$$

dır. Einstein manifold tanımı göz önüne alındığında ispat tamamlanmış olur.
□

Teorem 3.4.2 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ $\phi-$recurrent $S-$manifold olsun. Bu durumda yapı vektör alanları ve bir A $1-$ formuna karşılık gelen vektör alanı ρ arasında

$$A(W)=\sum_{j=1}^{n}u^a(\rho)u^j(W)$$

ilişkisi mevcuttur. Burada

$$A\left(U_a\right)=\overline{g}(U_a,\rho)=u^a(\rho)$$

dır.

İspat: Tanım 2.3.12 kullanılarak $\forall X,Y,Z,W\in\chi(\overline{M})$ için

$$-\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z+\sum_{a=1}^{n}u^a(\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z)U_a=A(W)\overline{R}(X,Y)Z$$

yazılabilir. Bu eşitliğe II. Bianchi özdeşliği uygulanırsa,

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{R}\right)(Y,W)Z=\sum_{a=1}^{n}u^a(\left(\overline{\nabla}_X\overline{R}\right)(Y,W)Z)U_a-A(X)\overline{R}(Y,W)Z$$

$$\left(\overline{\nabla}_Y\overline{R}\right)(W,X)Z = \sum_{a=1}^{n} u^a(\left(\overline{\nabla}_Y\overline{R}\right)(W,X)Z)U_a - A(Y)\overline{R}(W,X)Z$$

$$\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z = \sum_{a=1}^{n} u^a(\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)Z)U_a - A(W)\overline{R}(X,Y)Z$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$A(X)\overline{R}(Y,W)Z + A(Y)\overline{R}(W,X)Z + A(W)\overline{R}(X,Y)Z = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlik U_a ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & A(X)\overline{g}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[u^j(Y)\phi^2W - u^j(W)\phi^2Y\right], Z\right) \\ & +A(Y)\overline{g}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[u^j(W)\phi^2X - u^j(X)\phi^2W\right], Z\right) \\ & +A(W)\overline{g}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[u^j(X)\phi^2Y - u^j(Y)\phi^2X\right], Z\right) \quad = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{M}$ nin bir $p \in \overline{M}$ noktasındaki $T_p\overline{M}$ tanjant uzayının $\{V_1, ..., V_m, \phi V_1, ..., \phi V_m, U_1, ...U_n\}$ olan bazı $\{E_1, E_2, ..., E_{2m+n}\}$ ile gösterilsin. $Y = Z = E_i$ alınır ve i üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2m+n} \Bigg\{ & A(X)\sum_{j=1}^{n} u^j(E_i)\overline{g}\left(\phi^2W, E_i\right) - u^j(W)\overline{g}\left(\phi^2E_i, E_i\right) \\ & +A(E_i)\sum_{j=1}^{n} u^j(W)\overline{g}\left(\phi^2X, E_i\right) - u^j(X)\overline{g}\left(\phi^2W, E_i\right) \\ & +A(W)\sum_{j=1}^{n} u^j(X)\overline{g}\left(\phi^2E_i, E_i\right) - u^j(E_i)\overline{g}\left(\phi^2X, E_i\right)\Bigg\} \quad = 0 \end{aligned}$$

veya

$$(2m+n)\left\{\sum_{j=1}^{n} A(W)u^j(X) - A(X)u^j(W)\right\} = 0$$

dır. $X = U_a$ alınırsa,

$$A(W) = \sum_{j=1}^{n} A\left(U_a\right)u^j(W)$$

bulunur. $A(U_a) = \overline{g}(U_a, \rho) = \eta^a(\rho)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$A(W) = \sum_{j=1}^{n} \eta^a(\rho) u^j(W)$$

elde edilir. □

Lemma 3.4.3 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, Riemann eğrilik tensörü $\overline{R}$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\phi Z &= \phi\overline{R}(X,Y)Z + n\left\{\overline{g}(\phi X, \phi Z)\phi Y - \overline{g}(\phi Y, \phi Z)\phi X\right. \\
&\left. -\overline{g}(\phi X, Z)\phi^2 Y + \overline{g}(\phi Y, Z)\phi^2 X\right\} \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\{u^i(Y)\,\overline{g}(\phi X, Z)U_j - u^i(Y)\,u^j(Z)\,\phi X\right. \qquad (3.16) \\
&\left. -u^i(X)\,\overline{g}(\phi Y, Z)U_j + u^i(X)\,u^j(Z)\,\phi Y\right\}
\end{aligned}$$

dır.

İspat: Riemann eğrilik tensörü tanımından,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\phi Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \phi Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \phi Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\phi Z \\
&= \overline{\nabla}_X \left(\phi \overline{\nabla}_Y Z + \left(\overline{\nabla}_Y \phi\right) Z\right) - \overline{\nabla}_Y \left(\phi \overline{\nabla}_X Z + \left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Z\right) \\
&\quad -\phi \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z - \left(\overline{\nabla}_{[X,Y]}\phi\right) Z \\
&= \overline{\nabla}_X \left(\phi \overline{\nabla}_Y Z\right) + \overline{\nabla}_X \left(\left(\overline{\nabla}_Y \phi\right) Z\right) - \overline{\nabla}_Y \left(\phi \overline{\nabla}_X Z\right) - \overline{\nabla}_Y \left(\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Z\right) \\
&\quad -\phi \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z - \left(\overline{\nabla}_{[X,Y]}\phi\right) Z \\
&= \phi \overline{\nabla}_X \left(\overline{\nabla}_Y Z\right) + \left(\overline{\nabla}_X \phi\right) \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_X \left(\left(\overline{\nabla}_Y \phi\right) Z\right) - \phi \overline{\nabla}_Y \left(\overline{\nabla}_X Z\right) \\
&\quad - \left(\overline{\nabla}_Y \phi\right) \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_Y \left(\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Z\right) - \phi \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z - \left(\overline{\nabla}_{[X,Y]}\phi\right) Z \\
&= \phi \overline{R}(X,Y)Z + \left(\overline{\nabla}_X \phi\right) \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_X \left(\left(\overline{\nabla}_Y \phi\right) Z\right) \\
&\quad - \left(\overline{\nabla}_Y \phi\right) \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_Y \left(\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Z\right) - \left(\overline{\nabla}_{[X,Y]}\phi\right) Z
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.57) ve (2.58) kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılarsa (3.16) bulunur. □

Teorem 3.4.4 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $\phi-$recurrent $S-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin sabit eğrilikli olması için gerek ve yeter koşul $X,Y\in\chi(D)$ için

$$(n+1)\left\{\overline{g}(Y,\phi Z)\phi X+\overline{g}(X,\phi Z)\phi Y\right\}=0$$

dır. Burada D, (2.47) ile verilen dağılımdır.

İspat: Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevinden

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)U_a &= \overline{\nabla}_W\overline{R}(X,Y)U_a-\overline{R}(\overline{\nabla}_WX,Y)U_a\\ &\quad -\overline{R}(X,\overline{\nabla}_WY)U_a-\overline{R}(X,Y)\overline{\nabla}_WU_a\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)U_a &= \overline{R}(X,Y)\phi W+\sum_{j=1}^{n}\left\{\overline{\nabla}_W\left(\eta^j(Y)\phi^2X\right)-\overline{\nabla}_W\left(\eta^j(X)\phi^2Y\right)\right.\\ &\quad -\eta^j(Y)\phi^2\overline{\nabla}_WX+\eta^j(\overline{\nabla}_WX)\phi^2Y-\eta^j(\overline{\nabla}_WY)\phi^2X\\ &\quad \left.+\eta^j(X)\phi^2\overline{\nabla}_WY+\eta^j(Y)\phi^2\overline{\nabla}_WX\right\}\\ &= \overline{R}(X,Y)\phi W+\overline{g}(Y,\phi W)X-\overline{g}(X,\phi W)Y\\ &\quad +\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\left[\eta^j(X)-\eta^k(X)\right]\overline{g}(Y,\phi W)+\left[\eta^k(Y))-\eta^j(Y\right]\overline{g}(X,\phi W)\right\}U_k\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.4.2, Yardımcı teorem 3.16 ve

$$\left(\overline{\nabla}_W\overline{R}\right)(X,Y)U_a=-A(W)\overline{R}(X,Y)U_a$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n}\eta^a(\rho)\eta^j(Z)\left(\eta^i(X)\phi^2Y-\eta^i(Y)\phi^2X\right)=\phi\overline{R}(X,Y)Z+\overline{g}(Y,\phi Z)X-\overline{g}(X,\phi Z)Y\\ &+n\left\{\overline{g}(\phi X,\phi Z)\phi Y-\overline{g}(\phi Y,\phi Z)\phi X-\overline{g}(\phi X,Z)\phi^2Y+\overline{g}(\phi Y,Z)\phi^2X\right\}\\ &\sum_{i,J=1}^{n}\left\{\eta^i(Y)\,\overline{g}(\phi X,Z)U_j-\eta^i(Y)\,\eta^j(Z)\,\phi X-\eta^i(X)\,\overline{g}(\phi Y,Z)U_j+\eta^i(X)\,\eta^j(Z)\,\phi Y\right\}\\ &+\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\left[\eta^j(X)-\eta^k(X)\right]\overline{g}(Y,\phi Z)+\left[\eta^k(Y))-\eta^j(Y\right]\overline{g}(X,\phi Z)\right\}U_k\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $X,\ Y \in \chi(D)$ ise

$$\begin{aligned} &\phi\overline{R}(X,Y)Z + \overline{g}(Y,\phi Z)X - \overline{g}(X,\phi Z)Y \\ &+n\left\{\overline{g}(X,Z)\phi Y - \overline{g}(Y,Z)\phi X + \overline{g}(\phi X,Z)Y - \overline{g}(\phi Y,Z)X\right\} \quad = 0 \end{aligned}$$

dır. Bu eşitliğe ϕ uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &-\overline{R}(X,Y)Z + (n+1)\left\{\overline{g}(Y,\phi Z)\phi X + \overline{g}(X,\phi Z)\phi Y\right\} \\ &+n\left\{\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y\right\} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $(n+1)\left\{\overline{g}(Y,\phi Z)\phi X + \overline{g}(X,\phi Z)\phi Y\right\} = 0$ ise

$$\overline{R}(X,Y)Z = n\left\{\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y\right\}$$

dır. Bu ise $\overline{M}$ nin sabit eğrilikli olduğunu gösterir. $\square$

Bölüm 4

$S-$MANİFOLDLARIN NON-İNVARYANT HİPERYÜZEYLERİ

4.1 $S-$Manifoldların Non-İnvaryant Hiperyüzeyleri Üzerinde $f-$Yapılar

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir hiperyüzeyi olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\phi X = fX + w(X)N \tag{4.1}$$

yazılabilir. Burada f, M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı ve w bir 1-formdur. Eğer (4.1) ifadesinde $w = 0$ alınırsa M hiperyüzeyi invaryant hiperyüzey ve eğer $w \neq 0$ alınırsa M hiperyüzeyi non-invaryant hiperyüzey olarak adlandırılır. M hiperyüzeyinin invaryant olması durumunda $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerindeki f-yapı ϕ ile M hiperyüzeyi üzerindeki f-yapı çakışacakları için invaryant hiperyüzeylerde yapılacak olan çalışmalar bir anlam ifade etmeyecektir. Bu nedenle bu bölümde, $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri üzerinde çalışmalar yapılacaktır.

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin $D^{\perp} \subset \Gamma(TM)$ olacak şekildeki bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Yüzeyin normali N olmak üzere

$$\xi_{n+1} = \phi N$$

olsun. $u^a(N) = \overline{g}(N, U_a) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) &= \overline{g}(\phi N, \phi N) = \overline{g}(N, N) - \sum_{a=1}^{n} u^a(N) u^a(N) \\
&= \overline{g}(N, N) = 1
\end{aligned}$$

ve

$$\overline{g}(\xi_{n+1}, N) = \overline{g}(\phi N, N) = 0, \ \overline{g}(\xi_{n+1}, U_a) = u^a(\phi N) = 0$$

olur. Yani $\xi_{n+1} \in \Gamma(TM)$ dir.

(4.1) bağıntısı N ile iç çarpılırsa

$$w(X) = -u^{n+1}(X)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$fX = \phi X + u^{n+1}(X) N \tag{4.2}$$

şeklinde yeniden yazılır. Burada u^{n+1}, ξ_{n+1} in dualini ve fX, ϕXin teğet kısmını temsil etmektedir.

Lemma 4.1.1 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. f, (4.1) bağıntısını sağlayan $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı ise M non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde

$$f^2 = -I + \sum_{i=1}^{n+1} u^i \otimes U_i \tag{4.3}$$

dir.

İspat: M non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde f nin anti-simetrik ve $\phi N = fN = \xi_{n+1}$ oluşu gözönüne alınrsa

$$\phi X = fX - u^{n+1}(X)N \tag{4.4}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\phi^2 X &= f^2X - u^{n+1}(X)fN - u^{n+1}(fX)N - u^{n+1}(X)u^{n+1}(N)N \\
&= f^2X - u^{n+1}(X)fN \\
&= f^2X - u^{n+1}(X)\xi_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.1.2 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nın bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. f, (4.1) bağıntısını sağlayan $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı ise M non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde

$$f^3 + f = 0 \tag{4.5}$$

dir.

İspat: (4.3) bağıntısından $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$f^3X = -fX + \sum_{i=1}^{n+1} u^i(X)fU_i$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1) bağıntısından $fU_i = 0$ dır. Dolayısıyla M hiperyüzeyi üzerinde $f^3X + fX = 0$ dır. Bu eşitlik $\forall X \in \Gamma(TM)$ için sağlandığından $f^3 + f = 0$ dır. □

Lemma 4.1.3 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. M non-invaryant hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş metrik g ile tanımlanırsa,

$$g(fX, Y) + g(X, fY) = o$$

dır. Yani, f anti-simetriktir.

İspat: $\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0$ olduğundan ve (4.4) ve Yardımcı teorem 4.1.1 kullanılarak $g(fX, Y) + g(X, fY) = 0$ olduğu görülür. □

Metrik çatılı manifold ve Yardımcı teorem 4.1.3 göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.4 Bir $S-$manifoldun non-invaryant hiperyüzeyi yine bir metrik çatılı manifoldtur.

Lemma 4.1.5 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. M non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde

$$\phi\xi_{n+1} = -N; \;\; fU_i = 0, \;\; u^i \circ f = 0, \;\; \forall i \in \{1, ..., n+1\}$$

bağıntıları sağlanmaktadır.

İspat: Yardımcı teorem 2.5.5 in ispatı ile aynıdır. □

Burada bir notasyon değişikliğine gidilerek $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ $S-$manifoldunun bir noktadaki tanjant uzayının $\{V_1, ..., V_m, \phi V_1, ..., \phi V_m, U_1, ...U_n\}$ olan bazını M non-invaryant hiperyüzeyinin bir noktasındaki tanjant uzayının bazından ayırtedilebilmesi için, $p \in M$ noktasındaki T_pM nin bazı

$$\left\{e_1, ..., e_{n-1}, \phi e_1, ..., \phi e_{n-1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1} = \phi N\right\}$$

ile gösterilsin. Dolayısıyla (4.3) bağıntısı yeniden

$$f^2 = -I + \sum_{i=1}^{n+1} \eta^i \otimes \xi_i \tag{4.6}$$

şeklinde ifade edilir. (4.6) den yararlanarak

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^{n+1} \eta^i(X)\eta^i(Y) \tag{4.7}$$

elde edilir. Buradaki η^i, ler ξ_i lerin dual vektör alanlarını göstermektedir.

M non-invaryant hiperyüzeyi üzerindeki temel $2-$form

$$\overline{\Omega}(X,Y)=\Omega(X,Y) \tag{4.8}$$

ile tanımlıdır.

(2.48) ayrışımı ve (4.4) gözönüne alındığında,

$$T\overline{M}=D\oplus D^{\perp}=D\oplus Sp\left\{\xi_1,...,\xi_n\right\}=\widetilde{D}\oplus Sp\left\{\xi_1,...,\xi_n,\xi_{n+1}=\phi N\right\}\oplus\left\{N\right\}$$

$$\begin{aligned} TM &= \widetilde{D}\oplus Sp\left\{\xi_1,...,\xi_n,\xi_{n+1}=\phi N\right\} && (4.9)\\ &= \widetilde{D}\oplus\widetilde{\widetilde{D}} && (4.10)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Lemma 4.1.6 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. S_ϕ ve S_f sırasıyla $\overline{M}$ ve M üzerindeki torsiyon tensör alanları olmak üzere $\forall X\in\widetilde{D}$ için

a) $S_\phi(X,Y)=S_f(X,Y)+\eta^{n+1}([X,\phi Y])\xi_{n+1}+\eta^{n+1}([\phi X,Y])\xi_{n+1}$

b) $S_f(X,\xi_i)=S_\phi(X,\xi_i)-\eta^{n+1}([\phi X,\xi_i])N,\ \forall i\in\{1,...,n\}$

c) $S_f(X,\xi_{n+1})=S_\phi(X,\xi_{n+1})+[\phi X,N]-\phi\,[X,N]-\eta^{n+1}(\left[\phi X,\xi_{n+1}\right])N$

d) $S_f(\xi_i,\xi_{n+1})=S_\phi(\xi_i,\xi_{n+1})-\phi\,[\xi_i,N]\,,\ \forall i\in\{1,...,n\}$

e) $S_\phi(\xi_i,\xi_j)=S_f(\xi_i,\xi_j),\forall i,j\in\{1,...,n\}$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: a) (4.4) kullanılarak,

$$\begin{aligned} S_\phi(X,Y) &= \phi^2\,[X,Y]+[\phi X,\phi Y]-\phi\,[\phi X,Y]-\phi\,[X,\phi Y]\\ &+2\sum_{a=1}^{n}d\eta^a(X,Y)\xi_a\\ &= f^2\,[X,Y]+[fX,fY]-f\,[fX,Y]-f\,[X,fY]\\ &+2\sum_{a=1}^{n+1}d\eta^a(X,Y)\xi_a+\eta^{n+1}([X,\phi Y])N+\eta^{n+1}([\phi X,Y])N\\ &= S_f(X,Y)+\eta^{n+1}([X,\phi Y])N+\eta^{n+1}([\phi X,Y])N\end{aligned}$$

elde edilir.

b) (a) şıkkında $Y=\xi_i$ alınır ve $\phi\xi_i=0$, $\forall i\in\{1,...,n\}$, olduğu gözönüne alınırsa,

$$S_\phi(X,\xi_i) \quad = S_f(X,\xi_i)+\eta^{n+1}([\phi X,\xi_i])N$$

elde edilir.

c)

$$\begin{aligned} S_f(X,\xi_{n+1}) &= f^2\left[X,\xi_{n+1}\right]+\left[fX,f\xi_{n+1}\right]-f\left[fX,\xi_{n+1}\right]-f\left[X,f\xi_{n+1}\right] \\ &+2\sum_{a=1}^{n+1} d\eta^a(X,\xi_{n+1})\xi_a \\ &= \phi^2\left[X,\xi_{n+1}\right]+\eta^{n+1}(\left[X,\xi_{n+1}\right])N+\left[\phi X,\phi\xi_{n+1}\right]+\left[\phi X,N\right] \\ &-\phi\left[X,\phi\xi_{n+1}\right]-\phi\left[X,N\right]-\phi\left[\phi X,\xi_{n+1}\right]-\eta^{n+1}(\left[\phi X,\xi_{n+1}\right])N \\ &+2\sum_{a=1}^{n+1} d\eta^a(X,\xi_{n+1})\xi_a \\ &= S_\phi(X,\xi_{n+1})+\left[\phi X,N\right]-\phi\left[X,N\right]-\eta^{n+1}(\left[\phi X,\xi_{n+1}\right])N \end{aligned}$$

elde edilir.

d) (c) şıkkında $X=\xi_i$, $\forall i\in\{1,...,n\}$, alınırsa,

$$S_f(\xi_i,\xi_{n+1}) \quad = S_\phi(\xi_i,\xi_{n+1})-\phi\left[\xi_i,N\right]$$

elde edilir.

e) (a) şıkkında $X=\xi_i,\ Y=\xi_j$ alınır ve $\phi\xi_i=0$, $\forall i,j\in\{1,...,n\}$, olduğu gözönüne alınırsa

$$S_\phi(\xi_i,\xi_j) \quad = S_f(\xi_i,\xi_j)$$

elde edilir. □

$\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold olduğundan $\overline{M}$ normal yani; $S_\phi=0$ dır. $S_\phi=0$ olduğu gözönüne alınarak M non-invaryant hiperyüzeyinin normallik koşulunu veren aşağıdaki lemma ifade edilebilir.

Lemma 4.1.7 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. M nin normal olması için gerek ve yeter koşul

1) $\eta^{n+1}([\phi X, \xi_i])N = 0, \; \forall X \in \widetilde{D}, \forall i \in \{1, ..., n\}$

2) $[\phi X, N] - \phi\,[X, N] - \eta^{n+1}(\left[\phi X, \xi_{n+1}\right])N = 0, \forall X \in \widetilde{D}$

3) $\phi\,[N, \xi_i] = 0, \; \forall i \in \{1, ..., n\}$

olmasıdır.

Lemma 4.1.8 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ $S-$manifoldunun bir M non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde aşağıdaki özellikler elde edilir.

i) $[N, \xi_i] = 0 \; \forall X \in \widetilde{D}, \; \forall i \in \{1, ..., n\}$

ii)$\eta^{n+1}([\phi X, \xi_i]) = 0, \forall X \in \widetilde{D}, \; \forall i \in \{1, ..., n\}$

iii)$\eta^{n+1}(\left[\phi X, \xi_{n+1}\right]) = 0, \forall X \in \widetilde{D}$

iv) $\eta^{n+1}([fX, Y]) = B(fX, fY) - B(X, Y), \forall X, Y \in \widetilde{D}$

İspat: *i)* $\|N\| = 1$, ξ_i ler killing vektör alanları ve $\overline{\nabla}_{\xi_i}\xi_i = 0$, $i \in \{1, ..., n\}$, olduğundan

$$\overline{g}([N, \xi_i]\,, N) = \overline{g}(\overline{\nabla}_N \xi_i, N) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\xi_i} N, N) = \overline{g}(\overline{\nabla}_N \xi_i, N) = 0$$

$$\overline{g}([N, \xi_i]\,, \xi_j) = \overline{g}(\overline{\nabla}_N \xi_i, \xi_j) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\xi_i} N, \xi_j) = -\overline{g}(\overline{\nabla}_{\xi_j} \xi_i, N) + \overline{g}(N, \overline{\nabla}_{\xi_j} \xi_i) = 0$$

yazılabilir. Öte yandan $\forall X \in \widetilde{D}$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}([N, \xi_i]\,, X) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_N \xi_i, X) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\xi_i} N, X) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi_i, N) - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\xi_i} X, N) \\ &= -B(X, \xi_i) + B(\xi_i, X) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall X \in \widetilde{D}, \; \forall i \in \{1, ..., n\}$ için $[N, \xi_i] = 0$ dir.

ii) $\phi(\overline{\nabla}_X \xi_i) = \overline{\nabla}_{\phi X} \xi_i$ ve $\overline{\nabla}_{\xi_i} \phi = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{g}(\xi_{n+1}, [\phi X, \xi_i]) &= \overline{g}(\xi_{n+1}, \overline{\nabla}_{\phi X} \xi_i) - \overline{g}(\xi_{n+1}, \overline{\nabla}_{\xi_i} \phi X) \\ &= \overline{g}(\xi_{n+1}, \phi \overline{\nabla}_X \xi_i) - \overline{g}(\xi_{n+1}, \phi \overline{\nabla}_{\xi_i} X) \\ &= \overline{g}(N, \overline{\nabla}_X \xi_i) - \overline{g}(N, \overline{\nabla}_{\xi_i} X) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\forall X \in \widetilde{D},\ \forall i \in \{1,...,n\},\ \eta^{n+1}([\phi X, \xi_i]) = 0$ demektir.

iii) (2.58) ve Gauss denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\eta^{n+1}(\left[\phi X, \xi_{n+1}\right]) &= \overline{g}(\xi_{n+1}, \overline{\nabla}_{\phi X}\xi_{n+1}) - \overline{g}(\xi_{n+1}, \overline{\nabla}_{\xi_{n+1}}\phi X) \\ &= -\overline{g}(\xi_{n+1}, \phi(\overline{\nabla}_X \xi_{n+1}) - \overline{g}(\xi_{n+1}, \phi(\overline{\nabla}_{\xi_{n+1}} X) \\ &= -\overline{g}(N, \overline{\nabla}_X \xi_{n+1}) - \overline{g}(N, \overline{\nabla}_{\xi_{n+1}} X)\end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold olduğundan $\forall X, Y \in \widetilde{D}$ için $\phi\left(\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Y\right) = 0$ dır. Böylece $fX = \phi X,\ fY = \phi Y$ ve

$$\begin{aligned}\eta^{n+1}([fX, Y]) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\phi X} Y, \phi N) - \overline{g}(\overline{\nabla}_Y \phi X, \phi N) \\ &= -\overline{g}(\phi \overline{\nabla}_X Y, N) + \overline{g}(\phi\left(\overline{\nabla}_Y \phi X\right), N) \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\phi X} \phi Y, N) - \overline{g}(\overline{\nabla}_Y X, N) = B(fX, fY) - B(X, Y)\end{aligned}$$

bulunur. □

Lemma 4.1.9 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi ve M nin şekil operatörü A_N olsun. M non-invaryant hiperyüzeyi için

$$\nabla_X \xi_{n+1} = -f A_N X \tag{4.11}$$

dir.

İspat: $\forall X \in \Gamma(TM)$ için Gauss denkleminden,

$$\begin{aligned}\nabla_X \xi_{n+1} &= \overline{\nabla}_X \xi_{n+1} - \overline{g}(A_N X, \xi_{n+1})N \\ &= \phi \overline{\nabla}_X N + \left(\overline{\nabla}_X \phi\right) N + \overline{g}(\phi A_N X, N)N \\ &= -\phi A_N X + \overline{g}(f A_N X - \eta^{n+1}(A_N X)N, N)N \\ &= -f A_N X + \eta^{n+1}(A_N X)N - \eta^{n+1}(A_N X)N = -f A_N X\end{aligned}$$

bulunur. □

Lemma 4.1.10 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi ve M nin şekil operatörü A_N olsun. M nin bir $K-$manifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall X \in \widetilde{D}$ için

$$A_N(fX) = f(A_N X) \tag{4.12}$$

olmasıdır.

İspat: Yardımcı teorem 4.1.7 de (2) ve Yardımcı teorem 4.1.8 de (ii) kullanılarak M nin bir $K-$manifold olması için gerek ve yeter koşulun $\forall X \in \widetilde{D}$ için

$$[\phi X, N] - \phi\,[X, N] = 0$$

olması gerektiği görülebilir. Üstelik $\forall X \in \widetilde{D}$ için $fX = \phi X \in \widetilde{D}$ olup

$$\begin{aligned}[\phi X, N] - \phi\,[X, N] &= \overline{\nabla}_{\phi X} N - \overline{\nabla}_N \phi X - \phi(\overline{\nabla}_X N) + \phi(\overline{\nabla}_N X) \\ &= -A_N(\phi X) - \left(\overline{\nabla}_N \phi\right) X + \phi(A_N X)\end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.58) den

$$\left(\overline{\nabla}_N \phi\right) X = 0 \tag{4.14}$$

dır. (4.13) eşitliğinde (4.14) kullanılırsa

$$A_N(fX) = f(A_N X)$$

elde edilir. □

Sonuç 4.1.11 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold ve M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. M nin bir $K-$manifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \widetilde{D}$ için

$$B(fX, Y) = -B(X, fY) \tag{4.15}$$

olmasıdır.

İspat: (4.12) bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(A_N(fX),Y) &= g(f(A_NX),Y) \\ \overline{g}(N,\overline{\nabla}_{fX}Y) &= -\overline{g}(N,\overline{\nabla}_XfY) \\ B(fX,Y) &= -B(X,fY) \end{aligned}$$

elde edilir. □

$\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold olduğundan

$$d\overline{\Omega}(X,Y)=0$$

dır. Ayrıca $\overline{\Omega}(X,Y)=\Omega(X,Y)$ olduğundan M non-invaryant hiperyüzeyi üzerinde de

$$d\Omega(X,Y)=0$$

dır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 4.1.12 $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. M nin bir $K-$manifold olması için gerek ve yeter koşul $\phi N=\xi_{n+1}$ in Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki M bir $K-$manifold olsun. Bu durumda yapı vektör alanları killing olacaklarından ξ_{n+1} killing vektör alanıdır.

Şimdi tersine kabul edelim ki ξ_{n+1} killing vektör alanı olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla_X\xi_{n+1},Y)=\overline{g}(\overline{\nabla}_X\xi_{n+1},Y)-\overline{g}(B(X,\xi_{n+1})N,Y)=\overline{g}(\overline{\nabla}_X\xi_{n+1},Y)$$

olup

$$g(\nabla_X\xi_{n+1},Y)+g(\nabla_Y\xi_{n+1},X)=\overline{g}(\overline{\nabla}_X\xi_{n+1},Y)+\overline{g}(\overline{\nabla}_Y\xi_{n+1},X)$$

dır. $\forall X, Y \in \widetilde{D}$ için

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi_{n+1}, Y) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X \phi N, Y) = \overline{g}(\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) N, Y) + \overline{g}(\phi \overline{\nabla}_X N, Y) = g(A_N X, fY) = B(X, fY)$$

bulunur. Killing vektör alanı tanımı ve Sonuç 4.1.11 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi_{n+1}, Y) + g(\nabla_Y \xi_{n+1}, X) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi_{n+1}, Y) + \overline{g}(\overline{\nabla}_Y \xi_{n+1}, X) \\ &= B(fX, Y) + B(X, fY) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ξ_{n+1} in bir killing vektör alanı olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.1.13 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin non-invaryant hiperyüzeyi ve M nin şekil operatörü A_N olsun. Eğer M bir $S-$manifold ise $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$A_N X = X$$

dır.

İspat: Yardımcı teorem 4.1.9 den açıktır. □

Sonuç 4.1.14 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Eğer M bir $S-$manifold ise M üzerindeki bütün doğrultuların asli eğriliği bir olan birer asli eğrilik doğrultusudur.

Sonuç 4.1.15 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Eğer M bir $S-$manifold ise M üzerinde asimptotik doğrultu bulunmamaktadır.

4.2 $S-$Uzay Formların Umbilik Non-İnvaryant Hiperyüzeyleri

Lemma 4.2.1 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$uzay form, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi, M üzerine indirgenmiş koneksiyon $\bigtriangledown$ ve indirgenmiş metrik g olsun. M non-invaryant hiperyüzeyi için

$$(\bigtriangledown_X f)\, Y = \left(\overline{\bigtriangledown}_X \phi\right) Y + g(A_N X, Y)\xi_{n+1} - \eta^{n+1}(Y) A_N X \tag{4.16}$$

dir.

İspat: (4.1) eşitliği ve Gauss formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\bigtriangledown_X f)\, Y &= \bigtriangledown_X fY - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \bigtriangledown_X \left(\phi Y + g(Y, \xi_{n+1})N\right) - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \overline{\bigtriangledown}_X \left(\phi Y + g(Y, \xi_{n+1})N\right) - \overline{g}(A_N X, \phi Y)N - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \overline{\bigtriangledown}_X \phi Y + \overline{\bigtriangledown}_X g(Y, \xi_{n+1})N + \overline{g}(\phi A_N X, Y)N - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \left(\overline{\bigtriangledown}_X \phi\right) Y + \phi \overline{\bigtriangledown}_X Y + \overline{\bigtriangledown}_X g(Y, \xi_{n+1})N + \overline{g}(\phi A_N X, Y)N - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \left(\overline{\bigtriangledown}_X \phi\right) Y + f \overline{\bigtriangledown}_X Y - \overline{g}(\overline{\bigtriangledown}_X Y, \xi_{n+1})N \\
&\quad + \overline{\bigtriangledown}_X g(Y, \xi_{n+1})N + \overline{g}(\phi A_N X, Y)N - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \left(\overline{\bigtriangledown}_X \phi\right) Y + f \bigtriangledown_X Y + g(A_N X, Y)\xi_{n+1} - \overline{g}(\overline{\bigtriangledown}_X Y, \xi_{n+1})N \\
&\quad + \overline{g}(\overline{\bigtriangledown}_X Y, \xi_{n+1})N + \overline{g}(Y, \overline{\bigtriangledown}_X \xi_{n+1})N + \overline{g}(\phi A_N X, Y)N - f \bigtriangledown_X Y \\
&= \left(\overline{\bigtriangledown}_X \phi\right) Y + g(A_N X, Y)\xi_{n+1} - \eta^{n+1}(Y) A_N X
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.2.2 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$uzay form, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi, M üzerine indirgenmiş koneksiyon $\bigtriangledown$ ve indirgenmiş metrik g olsun M non-invaryant hiperyüzeyi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $g((\bigtriangledown_X A_N)\,Y - (\bigtriangledown_Y A_N)\,X, \xi_{n+1}) = \dfrac{c-n}{2}\overline{g}(X, \phi Y)$,

ii) $g((\bigtriangledown_X A_N)\,\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) = g(\left(\bigtriangledown_{\xi_{n+1}} A_N\right) X, \xi_{n+1}) = g(\left(\bigtriangledown_{\xi_{n+1}} A_N\right) \xi_{n+1}, X)$.

İspat: i) (2.62) bağıntısı kullanılarak Codazzi denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{aligned} (\bigtriangledown_X A_N)\,Y - (\bigtriangledown_Y A_N)\,X &= \overline{R}^{\perp}(X,Y)Z \\ &= \frac{c-n}{4}\left[\eta^{n+1}(X)\phi Y - \eta^{n+1}(Y)\phi X + 2\overline{g}(X,\phi Y)\xi_{n+1}\right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} g((\bigtriangledown_X A_N)\,Y - (\bigtriangledown_Y A_N)\,X, \xi_{n+1}) &= \frac{c-n}{4}\left[\eta^{n+1}(X)\overline{g}(\phi Y, N) - \eta^{n+1}(Y)\overline{g}(\phi X, N) + 2\overline{g}(X, \phi Y\right. \\ &= \frac{c-n}{4}\left[+2\overline{g}(X,\phi Y) - \eta^{n+1}(X)\eta^{n+1}(Y)\right. \\ &\left. +\eta^{n+1}(Y)\eta^{n+1}(X)\overline{g}(\phi X, N)\right] \\ &= \frac{c-n}{2}\overline{g}(X,\phi Y) \end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir.

ii) Teoremin (i) şıkkında $Y = \xi_{n+1}$ alınırsa

$$g((\bigtriangledown_X A_N)\,\xi_{n+1} - \left(\bigtriangledown_{\xi_{n+1}} A_N\right) X, \xi_{n+1}) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$g((\bigtriangledown_X A_N)\,\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) = g(\left(\bigtriangledown_{\xi_{n+1}} A_N\right) X, \xi_{n+1}) \tag{4.19}$$

dır. $\square$

Lemma 4.2.3 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$uzay form, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi, M üzerine indirgenmiş koneksiyon $\bigtriangledown$ olsun. $\phi N = \xi_{n+1}$ olmak üzere, eğer $n \neq c$ ise $\bigtriangledown\xi_{n+1} \neq 0$ dır.

İspat: (4.11) den $\triangledown \xi_{n+1} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $fA_N X = 0$ olmasıdır. Bu koşul $\forall X \in \Gamma(TM)$ için geçerlidir.

$$\begin{aligned} fA_N X &= 0 \Rightarrow f^2 A_N X = 0 \Rightarrow -A_N X + \sum_{i=1}^{n+1} \eta^i(A_N X)\xi_i = 0 \\ &\Rightarrow A_N X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i(A_N X)\xi_i \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $A_N X \in \mathrm{Sp}\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\}$ dır. Böylece $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\triangledown_X A_N) Y = \triangledown_X A_N Y - A_N \triangledown_X Y \in \mathrm{Sp}\left\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\}$$

dır. Codazzi denkleminden

$$\frac{c-n}{4}\left[\eta^{n+1}(X)\phi Y - \eta^{n+1}(Y)\phi X + 2\overline{g}(X, \phi Y)\xi_{n+1}\right] \in \mathrm{Sp}\left\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\}$$

olup $Y = \xi_{n+1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{c-n}{4}\left[\eta^{n+1}(X)\phi^2 N - \phi X\right] &\in \mathrm{Sp}\left\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\} \\ &\Rightarrow -\frac{c-n}{4}\left[\eta^{n+1}(X)N - \phi X\right] \in \mathrm{Sp}\left\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\} \\ &\Rightarrow -\frac{c-n}{4}\left[\eta^{n+1}(X)N + fX - \eta^{n+1}(X)N\right] \in \mathrm{Sp}\left\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\} \\ &\Rightarrow \frac{n-c}{4} fX \in \mathrm{Sp}\left\{\xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir ki $\dfrac{n-c}{4} \neq 0$ olacağından bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\triangledown \xi_{n+1} \neq 0$ olmalıdır. □

Teorem 4.2.4 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$uzay form, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi olsun. Eğer $n \neq c$ *ise* M nin şekil operatörü A_N, indirgenmiş koneksiyon $\triangledown$ ya göre paralel değildir.

İspat: A_N paralel, yani, $\bigtriangledown A_N = 0$ olsun. $X \neq 0$ ve $X \perp \xi_{n+1}$ olarak seçelim, Codazzi denkleminde $Y = \xi_{n+1}$ alınırsa

$$\frac{n-c}{4} fX = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte $fX \neq 0$ olacağından $n = c$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. □

Teorem 4.2.5 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$uzay form, M, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi ve M nin şekil operatörü A_N olsun. Eğer $n \neq c$ ise $A_N = \lambda I$ formunda değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A_N = \lambda I$ olsun. Codazzi denkleminden,

$$(X\lambda) Y - (Y\lambda) X = \frac{c-n}{4} \left[\eta^{n+1}(X)\phi Y - \eta^{n+1}(Y)\phi X + 2\overline{g}(X, \phi Y)\xi_{n+1} \right]$$

dır. Eğer $Y = \xi_{n+1}$ alınırsa

$$(X\lambda) \xi_{n+1} - \left(\xi_{n+1}\lambda\right) X = \frac{n-c}{4} fX$$

yazılabilir. Eğer $X \neq 0$ ve $X \perp \xi_{n+1}$ ise $\left\{X, fX, \xi_{n+1}\right\}$ cümlesi lineer bağımsız olacağından $n = c$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. □

Dolayısıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.6 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$uzay form olsun. $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin $n \neq c$ için umbilik non-invaryant hiperyüzeyi yoktur.

4.3 $S-$Manifoldların Non-İnvaryant Hiperyüzeyleri İçin Euler Teoremi, Dupin Göstergesi ve Meusnier Teoremi

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi M olsun. $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ için (4.9) ayrışımını göz önüne alınsın. (4.6) den M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş $f-$yapı f, $\widetilde{D}$ dağılımı üzerinde hemen hemen kompleks yapıdır.

$$A_N : T_pM \to T_pM$$

şekil operatörünün karakteristik değerlerinin farklı olduğunu varsayalım. Yani; şekil operatörünün asli eğrilikleri farklı olsun. e_i herhangi bir asli eğriliğe karşılık gelen asli doğrultu ise, $\widetilde{D}$ dağılımı üzerinde

$$A_N e_i = k_i X_i, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

$$A_N f e_i = -k_i f X_i, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

olacaktır (Montiel ve Romero, 1983). ξ_j herhangi bir asli eğriliğe karşılık gelen asli doğrultu ise $\widetilde{\widetilde{D}}$ dağılımın üzerinde

$$A_N \xi_j = \overline{k}_j \xi_j, \quad 1 \leq j \leq (n+1)$$

olduğu kabul edilsin. Farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular ortogonal bir çatı oluşturacaklarından T_pM nin bir bazı $\left\{e_1, ..., e_{m-1}, fe_1, ...fe_{m-1}, \xi_1, ...\xi_{n+1}\right\}$

şeklinde ve T_pM nin bu bazına göre şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$
A_N = \begin{pmatrix}
k_1 & & & & & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & & & & \\
 & & \cdot & & & & & & & & \\
 & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & k_{m-1} & & & & & 0 & \\
 & & & & & -k_1 & & & & & \\
 & & & & & & \cdot & & & & \\
 & & & & & & & \cdot & & & \\
 & & & & & & & & \cdot & & \\
 & & & & & & & & & -k_{m-1} & \\
 & & & & 0 & & & & & & \overline{k}_1 \\
 & & & & & & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & & & & \overline{k}_{n+1}
\end{pmatrix}
$$

biçiminde olacaktır.

Teorem 4.3.1 (Euler) $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi M olsun. Bir $p \in M$ noktası alalım. p noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. $i = 1, ..., m-1$ ve $j = 1, ..., n+1$ için k_i, $-k_i$ ve $\overline{k}_j$ asli eğriliklerin farklı olduğunu varsayalım. Asli eğriliklerden oluşan ortonormal çatıyı $\left\{e_1, ..., e_{m-1}, fe_1, ..., fe_{m-1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\}$ ile gösterelim. Herhangi bir $X_p \in T_pM$ vektörünün $e_1, ..., e_{m-1}, fe_1, ..., fe_{m-1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}$ baz vektörleri arasındaki açıları sırasıyla θ_1,...,θ_{m-1},θ_m,...,$\theta_{2(m-1)}$,$\alpha_1, ...,\alpha_{n+1}$ile gösterelim. Bu durumda $X_p \in T_pM$ olmak üzere,

$$
k_n(X_p) = \sum_{i=1}^{m-1} k_i \cos 2\theta_i + \sum_{j=1}^{n+1} \cos^2 \alpha_j
$$

dir.

İspat: $X_p \in T_pM$ olmak üzere, $\|X_p\| = 1$ almamız genelliği bozmayacaktır. Bu tanjant vektörü baz vektörleri cinsinden,

$$X_p = \sum_{i=1}^{m-1} g(X_p, e_i)e_i + \sum_{i=1}^{m-1} g(X_p, fe_i)fe_i + \sum_{j=1}^{n+1} g(X_p, \xi_j)\xi_j$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$X_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\cos\theta_i e_i + \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \cos\alpha_j \xi_j$$

olacaktır. Ayrıca,

$$A_N X_p = \sum_{i=1}^{m-1} (k_i \cos\theta_i e_i - k_i \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j \cos\alpha_j \xi_j$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} k_n(X_p) &= g(A_N X_p, X_p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m-1} (k_i \cos\theta_i e_i - k_i \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j \cos\alpha_j \xi_j, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{m-1} (\cos\theta_i e_i + \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \cos\alpha_j \xi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(k_i \cos^2\theta_i - k_i \sin^2\theta_i\right) + \sum_{j=1}^{n+1} \cos^2\alpha_j \\ &\quad \sum_{i=1}^{m-1} k_i \cos 2\theta_i + \sum_{j=1}^{n+1} \cos^2\alpha_j \end{aligned}$$

□

Sonuç 4.3.2 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi M olsun. Bir $p \in M$ noktası alalım. p noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun $i = 1, ..., m-1$ ve $j = 1, ..., n+1$ için k_i, $-k_i$ ve $\overline{k}_j$ asli eğriliklerin farklı olduğunu varsayalım. Asli vektörler ile birlikte oluşan ortonormal çatıyı $\{e_1, ..., e_{m-1}, fe_1, ..., fe_{m-1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}\}$ ile gösterelim. Herhangi bir $X_p \in T_pM$ vektörünün $e_1,...,e_{m-1},fe_1,...,fe_{m-1},\xi_1,...,\xi_{n+1}$ baz vektörleri arasındaki açılar sırasıyla θ_1,...,θ_{m-1},θ_m,...,$\theta_{2(m-1)}$,$\alpha_1,...$,α_{n+1} ve herhangi bir $Y_p \in T_pM$ vektörü ile $e_1,...,e_{m-1},fe_1,...,fe_{m-1},\xi_1,...,\xi_{n+1}$ baz vektörleri arasındaki açıları sırasıyla θ'_1,...,θ'_{m-1},θ'_m,...,$\theta'_{2(m-1)}$,$\alpha'_1,...$,α'_{n+1} ile gösterelim. Bu durumda $X_p, Y_p \in T_pM$ tanjant vektörlerinin eşlenik olmaları için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{m-1} k_i \cos(\theta_i + \theta'_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j \cos\alpha_j \cos\alpha'_j = 0$$

olmasıdır.

İspat: $X_p \in T_pM$ olmak üzere, $\|X_p\| = 1$ almamız genelliği bozmayacaktır. Bu tanjant vektörü baz vektörleri cinsinden,

$$X_p = \sum_{i=1}^{m-1} g(X_p, e_i)e_i + \sum_{i=1}^{m-1} g(X_p, fe_i)fe_i + \sum_{j=1}^{n+1} g(X_p, \xi_j)\xi_j$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$X_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\cos\theta_i e_i + \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \cos\alpha_j \xi_j$$

ve

$$A_N X_p = \sum_{i=1}^{m-1} (k_i \cos\theta_i e_i - k_i \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j \cos\alpha_j \xi_j$$

olacaktır. Ayrıca

$$Y_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\cos'\theta_i e_i + \sin\theta'_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \cos\alpha'_j \xi_j$$

dır. Eşlenik tanjant vektör tanımından

$$g(A_N X_p, Y_p) = 0$$

ise

$$\left(\sum_{i=1}^{m-1} (k_i \cos\theta_i e_i - k_i \sin\theta_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j \cos\alpha_j \xi_j, \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m-1} (\cos'\theta_i e_i + \sin\theta'_i fe_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \cos\alpha'_j \xi_j \right) = 0$$

dir. Bu işlemler sadeleştirilise

$$\sum_{i=1}^{m-1} k_i \cos(\theta_i + \theta_i') + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j \cos\alpha_j \cos\alpha_j' = 0$$

eşitliği bulunur. $\square$

Sonuç 4.3.3 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi M olsun. Bir $p \in M$ noktası alalım. p noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. $i = 1, ..., m-1$ ve $j = 1, ..., n+1$ için k_i, $-k_i$ ve $\overline{k}_j$ asli eğriliklerin farklı olduğunu varsayalım. Asli eğriliklerden oluşan ortonormal çatıyı $\left\{e_1, ..., e_{m-1}, fe_1, ..., fe_{m-1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}\right\}$ ile gösterelim. Herhangi bir $X_p \in T_pM$ vektörünün $e_1, ..., e_{m-1}, fe_1, ..., fe_{m-1}, \xi_1, ..., \xi_{n+1}$ baz vektörleri arasındaki açılar sırasıyla θ_1,...,θ_{m-1},θ_m,...,$\theta_{2(m-1)}$,$\theta_{2(m-1)+1}$,...,$\theta_{2(m-1)+(n+1)}$ olsun. Bu durumda $X_p \in T_pM$ tanjant vektörünün asimptotik olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{m-1} k_i \cos 2\theta_i + \sum_{j=1}^{n+1} \cos^2\alpha_j = 0$$

olmasıdır.

İspat: Asimptotik tanjant vektör tanımından ve Euler Teoreminden ispat açıktır. $\square$

$S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri için Dupin göstergesini elde edelim:

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $S-$manifold, $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi M olsun. $X_p \in T_pM$ olmak üzere,

$$X_p = \sum_{i=1}^{m-1} x_i e_i + x_{m+i} fe_i + \sum_{j=1}^{n+1} x_{2m+j}\xi_j$$

$$\begin{aligned} A_N X_p &= \sum_{i=1}^{m-1} x_i A_N e_i + x_{m+i} A_N f e_i + \sum_{j=1}^{n+1} x_{2m+j} A_N \xi_j \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} k_i x_i e_i - k_i x_{m+i} f e_i + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j x_{2m+j} \xi_j \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_N X_p, X_p) &= g\Bigg(\sum_{i=1}^{m-1} (x_i e_i + x_{m+i} f e_i) + \sum_{j=1}^{n+1} x_{2m+j} \xi_j, \\ &\qquad \sum_{i=1}^{m-1} (k_i x_i e_i - k_i x_{m+i} f e_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j x_{2m+j} \xi_j \Bigg) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} k_i \left(x_i^2 - x_{m+i}^2 \right) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j x_{2m+j}^2 \end{aligned}$$

dır. $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri için Dupin göstergesi

$$\mathcal{D} = \left\{ X_p : \sum_{i=1}^{m-1} k_i \left(x_i^2 - x_{m+i}^2 \right) + \sum_{j=1}^{n+1} \overline{k}_j x_{2m+j}^2 = \pm 1,\ X_p \in T_p M \right\} \qquad (4.20)$$

şeklinde bulunur. Bu da, $S-$manifoldların non-invaryant hiperyüzeyleri için Dupin göstergesinin bir hiperkuadrik olduğunu gösterir.

$S-$manifoldlarındaki non-invaryant hiperyüzeyler için Meusnier Teoreminin ifade ve ispatı (Hacısalihoğlu(1983), s.665) ile tamamen aynı olduğundan burada sadece teoremin ifadesi verilecektir.

Teorem 4.3.4 (Meusnier) $(2m+n)-$boyutlu bir $S-$manifoldu $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ ve $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin bir non-invaryant hiperyüzeyi M olsun.

i) Bir $p \in \overline{M}$ noktasından geçen $\overline{M}$ nin bütün eğrilikleri arasında aynı T_p birim teğetine sahip olanları için p deki normal eğrilik aynıdır.

ii) Bir

$$\alpha : I \to \overline{M},\ I \in \mathbb{R}$$

eğrisinin M ve $\overline{M}$ deki geodezik eğrilikleri, sırasıyla, k_g ve $\overline{k}_g$ ile gösterilirse, α nın birim teğet vektör alanı T yönündeki normal eğriliği k_T olmak üzere,

$$(k_g)^2 = \left(\overline{k}_g\right)^2 + (k_T)^2$$

dir.

iii)

$$\alpha : I \to \overline{M},\ I \in \mathbb{R}$$

eğrisinin M ye göre $2-$nci Frenet vektör alanı V_2 ile normal eğrilik vektör alanı $h(T,T)$ arasındaki açı tanımlı ve θ ise

$$k_T = k_g \cos\theta$$

dir.

Bölüm 5

INDEFINITE $S-$MANİFOLDLARIN LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ

5.1 Indefinite $S-$Manifoldlar

$\overline{M}(\phi, U_a)$ bir $(2m+n)-$boyutlu çatılı manifold ve $\overline{g}$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde indeksi $0 < v < 2m+n$ olan yarı-Riemann metrik olsun. $\overline{g}$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde (2.54) bağıntısını sağlasın. $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifoldu için (2.49) ve (2.54) den,

$$\overline{g}(\phi X, \phi Y) = \overline{g}(X, Y) - \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a u^a(X) u^a(Y) \tag{5.1}$$

$$\overline{g}(X, U_a) = \varepsilon_a u^a(X) \tag{5.2}$$

dir. Burada ε_a, U_a nın spacelike veya timelike olmasına bağlı olarak $+1$ veya -1 dir

$\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde $\overline{\Omega}$ 2-formu,

$$\overline{\Omega}(X,Y)=\overline{g}(\phi X,Y),\quad \forall X,Y\in\Gamma(T\overline{M})$$

ile tanımlanır. Dolayısıyla (2.1) kullanılarak (2.58) bağıntısı yeniden

$$\left(\overline{\nabla}_X\phi\right)Y=-\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{g}(\phi X,\phi Y)U_i+u^i(Y)\phi^2X\right] \tag{5.3}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $\overline{M}(\phi,U_a)$ çatılı manifoldu (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlayan bir yarı-Riemann metrik yapısına sahip, normal, yönlendirilebilir, $\overline{\Omega}$ $2-$formu kapalı yani,

$$d\overline{\Omega}(X,Y)=0$$

ve

$$du^a(X,Y)=\overline{\Omega}(X,Y),\quad \forall X,Y\in\Gamma(T\overline{M}) \tag{5.4}$$

koşulu sağlanıyorsa $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ yapısına indefinite $S-$manifold adı verilir.

Bu bölümde genelliği bozmaksızın $\varepsilon_a=1$ alınacaktır. Bu durumda $\overline{g}$ nin indeksi $\nu=2\rho$, $0<\rho<m$ olacaktır.

5.2 Indefinite $S-$Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri

(M,g), $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ indefinite $S-$manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $E\in\Gamma(TM^{\perp})$ ise $\overline{g}(E,E)=0$ olup bu $E\in\Gamma(TM)$ demektir. Bu durumda hem TM hem de $TM^{\perp}$, $T\overline{M}$ nin dejenere alt vektör demetleridir. Böylece $TM^{\perp}$, M üzerinde bir boyutlu dağılımdır. Üstelik $g(\phi E,E)=0$ olacağından $\phi E\in\Gamma(TM)$ dir. Böylece M üzerinde rankı bir olan $\phi(TM^{\perp})$ dağılımı elde edilmiş olur. Şimdi TM de, $S(TM)$ ile gösterilen ve ekran dağılım olarak adlandırılan $TM^{\perp}$ in bütünleyen dağılımını seçelim. $S(TM)$

nondejenere olduğundan $S(TM)$ ye ortogonal olan bir bütünleyen $S(TM)^{\perp}$ dağılımı vardır. Böylece

$$T\overline{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{5.5}$$

yazılabilir. Buradan $S(TM)^{\perp}$ in iki boyutlu bir dağılım olduğu görülmektedir.Bu durumda $E \in \Gamma(TM^{\perp})$ için Teorem 2.4.10 dan

$$\overline{g}(N, E) = 1 \tag{5.6}$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(SM^{\perp})$ vardır. Böylece $N \notin TM$ dir. $T\overline{M}$ nin $N \in \Gamma(trTM)$ olacak şekilde bir boyutlu bir dağılımı seçilsin. Bu durumda

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus trTM \tag{5.7}$$

dır. Böylece

$$T\overline{M} = S(TM) \perp \left(TM^{\perp} \oplus trTM\right) = TM \oplus trTM \tag{5.8}$$

yazılabilir. N, ϕE ye ortogonal olduğundan

$$\overline{g}(\phi N, E) = -\overline{g}(N, \phi E) = 0,\ \overline{g}(N, \phi N) = 0 \tag{5.9}$$

dır. Bu ise $\phi N \in \Gamma(S(TM))$ olduğunu göstermektedir. Ayrıca ϕN ve ϕE

$$\overline{g}(\phi N, \phi E) = 1 \tag{5.10}$$

koşulunu sağlayan null vektörler olduklarından $\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(trTM)$, $S(TM)$ nin rankı iki olan bir non-dejenere alt vektör demetidir. O zaman M nin

$$S(TM) = \left(\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(trTM)\right) \perp D_0 \tag{5.11}$$

olacak şekilde bir non-dejenere dağılımı vardır. Burada $\{U_1, ..., U_n\} \in \Gamma(D_0)$ dır. (2.48) ve (2.50) den ϕ, D dağılımı üzerinde null operatör olduğundan $\phi(D_0) \subset D_0$ dır. Yani, D_0 invaryant bir dağılımdır. (5.5), (5.7) den

$$TM = \left(\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(trTM)\right) \perp D_0 \perp TM^{\perp} \tag{5.12}$$

ve

$$T\overline{M} = \big(\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(trTM)\big) \perp D_0 \perp \big(T_pM^{\perp} \oplus trTM\big) \tag{5.13}$$

elde edilir.

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun.

$$\widetilde{D} = TM^{\perp} \perp \phi(TM^{\perp}) \perp D_0, \; D' = \phi(trTM)$$

olacak şekildeki $\widetilde{D}$ ve D' dağılımlarını göz önüne alınsın. Bu durumda

$$TM = \widetilde{D} \oplus D' \tag{5.14}$$

dır. Ayrıca lokal lightlike

$$U_{n+1} = -\phi N, \; V = -\phi E \tag{5.15}$$

vektör alanlarını göz önüne alınsın. $\phi U_{n+1} = N$ olduğu açıktır. (5.14) den $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = SX + FX \tag{5.16}$$

yazılabilir. Burada $S : TM \to \widetilde{D}$ ve $F : TM \to D'$ şeklinde projeksiyon dönüşümleridir. $FX \in \Gamma\left(\phi(trTM)\right)$ oduğundan u^{n+1} bir $1-$form olmak üzere $FX = u^{n+1}(X)U_{n+1}$ yazılabilir. Böylece (5.16) ifadesi

$$X = SX + u^{n+1}(X)U_{n+1} \tag{5.17}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $u^{n+1}(X) = g(X, V)$ dir. (5.17) ifadesine ϕ uygulanacak olunursa, $\phi SX = fX$ olmak üzere

$$\phi X = fX + u^{n+1}(X)N \tag{5.18}$$

dır. Burada f, M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır. (5.18) ve (2.49) kullanılarak,

$$\begin{aligned} f^2X &= -X + u^{n+1}(X)U_{n+1} + \sum_{a=1}^{n} u^a(X)U_a \\ &= -X + \sum_{a=1}^{n+1} u^a(X)U_a \end{aligned} \tag{5.19}$$

bulunur.

Lemma 5.2.1 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. f, (5.18) bağıntısını sağlayan $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı ise (M, g) üzerinde

$$f^3 + f = 0$$

dır. Dolayısıyla (M, g) üzerinde bir çatılı yapı mevcuttur.

İspat: (5.19) bağıntısından $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$f^3X = -fX + u^{n+1}(X)fU_{n+1} + \sum_{a=1}^{n} u^a(X)fU_a$$

yazılabilir. Ayrıca (5.18) ve (5.19) bağıntılarından $fU_{n+1} = 0$ ve $fU_a = 0$ olacağından (M, g) üzerinde $f^3 + f = 0$ dır. $\square$

Lemma 5.2.2 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) üzerindeki $f-$yapı için aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır.

$$fu^i = 0, \quad u^i \circ f = 0, \quad i \in \{1, ..., n+1\} \tag{5.20}$$

İspat: Yardımcı teorem 2.5.5 in ispatı ile aynıdır. $\square$

Sonuç 5.2.3 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) hiperyüzeyi (5.19) ve (5.20) koşullarını sağladığından (M, g) lightlike hiperyüzeyi üzerinde bir çatılı yapı vardır.

Sonuç 5.2.4 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) üzerinde metrik çatılı yapı yoktur.

İspat: $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerinde indefinite metrik yapısı mevcut olup, bu yapı için

$$\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0$$

koşulunu sağlamaktadır. (5.18) bağıntısı kullanılarak aynı koşulun (M, g) üzerinde sağlanmadığını görmek mümkündür. Dolayısıyla (M, g) üzerinde bir metrik çatılı yapı yoktur. □

Sonuç 5.2.5 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. $P : \Gamma(TM) \to \Gamma(SM)$ iz düşüm operatörü olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $M(f, g, \xi_i, P)$ $1 \leq i \leq n+1$, yapısı bir metrik çatılı manifolttur.

İspat: $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerinde indefinite metrik yapısı mevcut olup, bu yapı için

$$\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0$$

koşulunu sağlamaktadır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için (5.18) bağıntısı kullanılarak

$$\phi PX = fPX$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\overline{g}(fPX, PY) + \overline{g}(PX, fPY) = 0$$

dır. Yani P izdüşüm operatörü ile birlikte M lightlike hiperyüzeyi üzerinde bir çatılı yapı kurulabilir. □

Lemma 5.2.6 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi ve (M, g) üzerine indirgenmiş koneksiyon $\bigtriangledown$ olsun.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y &= -\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overline{g}(\phi X, \phi Y)U_a + u^{\alpha}(Y)\phi^2 X\right) \\ &\quad -B(X,Y)U_{n+1} + u^{n+1}(Y)A_N X\end{aligned} \tag{5.21}$$

ve

$$(\nabla_X u^{n+1})Y = -B(X, fY) - u^{n+1}(Y)\tau(X) \tag{5.22}$$

dır. Burada τ, (2.24) bağıntısını sağlamaktadır.

İspat: (5.18) bağıntısından X e göre kovaryant türev alınırsa

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \phi Y &= \nabla_X \phi Y + B(X, \phi Y)N \\ \phi\overline{\nabla}_X Y + \left(\overline{\nabla}_X \phi\right)Y &= \nabla_X fY + B(X, fY)N + u^{n+1}(\overline{\nabla}_X Y)N \\ &\quad + \left(\left(\nabla_X u^{n+1}\right)Y\right)N + u^{n+1}(Y)\overline{\nabla}_X N\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede (2.25) ve (2.26) kullanılır ve (5.13) ayrışımı dikkate alınırsa (5.21) ve (5.22) bağıntıları elde edilmiş olur. □

Teorem 5.2.7 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi ve (M, g) üzerine indirgenmiş koneksiyon $\bigtriangledown$ olsun. (M, g) nin total geodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X f)Y = -\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\overline{g}(\phi X, \phi Y)U_a + u^{\alpha}(Y)\phi^2 X\right), \quad \forall X \in \Gamma(TM),\ Y \in \Gamma(\widetilde{D}) \tag{5.23}$$

ve

$$A_N X = -f(\nabla_X U_{n+1}) + \sum_{\alpha=1}^{n}\overline{g}(X, U_{n+1})U_a - B(X, U_{n+1})U_{n+1} \tag{5.24}$$

olmasıdır.

İspat: $Y \in \Gamma(\widetilde{D})$ için $u^{n+1}(Y) = 0$ ve (M, g) nin total geodezik olması durumunda $B(X, Y) = 0$ olacağından $\forall X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(\widetilde{D})$ için $(\nabla_X f)Y = (\overline{\nabla}_X \phi)Y$ olacağı açıktır. Diğer taraftan (5.21) da Y yerine U_{n+1} alınırsa

$$A_N X = -f(\nabla_X U_{n+1}) + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{g}(X, U_{n+1})U_a - B(X, U_{n+1})U_{n+1} \tag{5.25}$$

bulunur. Böylece (5.24) ifadesi ispatlanmış olur. □

Lemma 5.2.8 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) üzerindeki şekil operatörü A_N ve $S(TM)$ üzerindeki şekil operatörü A_E^* olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ için

i) Eğer U_{n+1} vektör alanı paralel ise

$$A_N X = \sum_{a=1}^{n+1} u^a(A_N X)U_a \tag{5.26}$$

ve

$$\tau(X) = o$$

dır.

ii) Eğer V vektör alanı paralel ise

$$A_E^* X = \sum_{a=1}^{n+1} u^a(A_E^* X)U_a \tag{5.27}$$

ve

$$\tau(X) = 0$$

dır. Burada τ, (2.24) bağıntısını sağlamaktadır.

İspat: i) (5.25) bağıntısına f uygulanırsa,

$$f(A_N X) = -f^2(\nabla_X U_{n+1}) + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{g}(X, U_{n+1}) f U_\alpha - B(X, U_{n+1}) f U_{n+1}$$

olup (5.19) dan

$$f(A_N X) = \nabla_X U_{n+1} + \sum_{a=1}^{n+1} u^a(\nabla_X U_{n+1}) U_a$$

bulunur. U_{n+1} vektör alanı paralel olduğundan bu eşitlik

$$f(A_N X) = 0$$

şeklinde yeniden ifade edilir. (5.18) den

$$\phi(A_N X) = u^{n+1}(A_N X) N$$

dır. Bu eşitliğe ϕ uygulanırsa,

$$\phi^2(A_N X) = -u^{n+1}(A_N X) U_{n+1}$$

ve (2.49) den

$$-A_N X + \sum_{a=1}^{n} u^a(A_N X) U_a + u^{n+1}(A_N X) U_{n+1} = 0 \tag{5.28}$$

elde edilir. Bu son ifadeden de

$$A_N X = \sum_{a=1}^{n+1} u^a(A_N X) U_a$$

olduğu görülür. Ayrıca, (5.22) da $Y = U_{n+1}$ alınırsa

$$(\overline{\nabla}_X u^{n+1}) U_{n+1} = -\tau(X)$$

elde edilir. $(\nabla_X u^{n+1}) U_{n+1} = \nabla_X u^{n+1}(U_{n+1}) - u^{n+1}(\nabla_X U_{n+1}) = 0$ olacağından $\tau(X) = 0$ olur.

ii) (5.21) ifadesinde $Y = E \in \Gamma(TM^{\perp})$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X f)E = & \sum_{a=1}^{n} \big(\overline{g}(\phi X, \phi E)U_a + u^a(E)\phi^2 X\big) \\
& -B(X,E)U_{n+1} + u^{n+1}(E)A_N X = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_X f)E = X(fE) - f(\nabla_X E) = X(\phi E) - f(\nabla_X E) \\
&= -\nabla_X V - f(-A_E^* X - \tau(X)E) \\
&= f(A_E^* X + \tau(X)E) \Rightarrow f(A_E^* X) = \tau(X)V
\end{aligned}
$$

olur. $f(A_E^* X) = \tau(X)V$ eşitliğine f uygulanırsa

$$
f^2(A_E^* X) = \tau(X)E
$$

elde edilir.Bu son bağıntıdan (5.19) yardımı ile

$$
-A_E^* X + \sum_{a=1}^{n+1} u^a(A_E^* X)U_a = \tau(X)E \tag{5.29}
$$

bulunur. Bu bağıntının sol tarafı $\Gamma(S(TM))$ ye ait iken sağ taraf $\Gamma(TM^{\perp})$ in elemanıdır. Dolayısıyla bu eşitlik ancak ve ancak $\tau(X) = 0$ olması ile mümkündür. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 5.2.9 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer (M, g) üzerindeki indirgenmiş koneksiyon ∇ ya göre U ve V vektör alanları paralel iseler herhangi bir $p \in M$ noktasında M nin ve $S(TM)$ nin tip sayıları sırasıyla $t(p) \leq n+1$ ve $t^*(p) \leq n+1$ şeklindedirler.

İspat: Tanım 2.4.17, (5.28) ve (5.29) dan ispat açıktır. □

Lemma 5.2.10 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M total geodezik ise bu durumda

i) $\forall X, Y \in \widetilde{D}$ için

$$f^2 X = -X + \sum_{a=1}^{n} u^a(X) U_a \tag{5.30}$$

ve

$$(\nabla_X f)Y = -\sum_{a=1}^{n} \big(\overline{g}(\phi X, \phi Y) U_a + u^a(Y)\phi^2 X\big) \tag{5.31}$$

dır.

ii) $\widetilde{D}$ dağılımı, $\triangledown$ indirgenmiş koneksiyonuna göre paraleldir.

İspat: i) (5.19) ve (5.21) dan ispat açıktır.

ii) $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall Y \in \Gamma(\widetilde{D})$ için

$$g(\triangledown_X E, \phi E) = -\overline{g}(\overline{\triangledown}_X \phi E, E) = -B(X, \phi E) = 0$$

ve

$$g(\triangledown_X Y, \phi E) = -g(\overline{\triangledown}_X \phi Y, E) = -B(X, \phi Y) = 0$$

dir. Böylece $\widetilde{D}$ dağılımı $\triangledown$ indirgenmiş konneksiyonuna göre paraleldir. $\square$

5.3 Indefinite $S-$Uzay Formların Total Umbilik Lightlike Hiperyüzeyleri

Teorem 5.3.1 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi ve M total umbilik olsun. Bu durumda $c=n$ ve ρ,

$$\rho^2 - E(\rho) - \rho\tau(E) = 0 \tag{5.32}$$

ve

$$PX(\rho) + \rho\tau(PX) = 0, \ \forall X \in \Gamma(TM) \tag{5.33}$$

diferensiyel deklemlerini sağlar. Burada ρ, (2.44) bağıntısını sağlayan bir düzgün fonksiyondur.

İspat: (2.62) bağıntısı kullanılarak, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} g\left(\overline{R}(X,Y)Z,E\right) &= \frac{c+3n}{4}\left[\overline{g}(\phi X,\phi Z)g(\phi^2 Y,E) - \overline{g}(\phi Y,\phi Z)g(\phi^2 X,E)\right] \\ &\quad + \frac{c-n}{4}\left[\overline{g}(X,\phi Z)g(\phi Y,E) - \overline{g}(Y,\phi Z)g(\phi X,E)\right. \\ &\quad \left. + 2\overline{g}(X,\phi Y)g(\phi Z,E)\right] \end{aligned} \tag{5.34}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (2.37) ve (5.34) kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\frac{c+3n}{4}\left[\overline{g}(\phi X,\phi Z)g(\phi^2 Y,E) - \overline{g}(\phi Y,\phi Z)g(\phi^2 X,E)\right] \\ &+ \frac{c-n}{4}\left[\overline{g}(X,\phi Z)g(\phi Y,E) - \overline{g}(Y,\phi Z)g(\phi X,E) + 2\overline{g}(X,\phi Y)g(\phi Z,E)\right] \\ &= \left(\nabla_X B\right)(Y,Z) - \left(\nabla_Y B\right)(X,Z) + \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z) \end{aligned} \tag{5.35}$$

elde edilir. (5.35) de $X = PX, \ Y = E, \ Z = PZ$ alınırsa

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}(c-n)u^{n+1}(PX)u^{n+1}(PZ) &= \left(\nabla_{PX} B\right)(E,PZ) - \left(\nabla_E B\right)(PX,PZ) \\ &\quad + \tau(PX)B(E,PZ) - \tau(E)B(PX,PZ) \end{aligned} \tag{5.36}$$

bulunur. Ayrıca, (5.36) eşitliğinin sağ tarafının hesap edilmesi ile

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_{PX}B)(E,PZ) - (\nabla_E B)(PX,PZ) + \tau(PX)B(E,PZ) - \tau(E)B(PX,PZ) \\
= \; & (\nabla_{PX}\rho g)(E,PZ) - (\nabla_E \rho g)(PX,PZ) - \tau(E)\rho g(PX,PZ) \\
= \; & \rho(\nabla_{PX}g)(E,PZ) - \rho(\nabla_E g)(PX,PZ) - (\nabla_E \rho)g(PX,PZ) - \tau(E)\rho g(PX,PZ) \\
= \; & \rho(\nabla_{PX}g)(E,PZ) + (\nabla_{PX}\rho)g(E,PZ) \\
& -\rho(\nabla_E g)(PX,PZ) - (\nabla_E \rho)g(PX,PZ) - \tau(E)\rho g(PX,PZ) \\
= \; & \left(\rho^2 - E(\rho) - \rho\tau(E)\right)g(PX,PZ)
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla (5.36) bağıntısından

$$
-\frac{3}{4}(c-n)u^{n+1}(PX)u^{n+1}(PZ) = \left(\rho^2 - E(\rho) - \rho\tau(E)\right)g(PX,PZ) \quad (5.37)
$$

elde edilir. (5.37) de $PX = PZ = U_{n+1}$ alınırda $c = n$ bulunur. (5.36) de $X = E,\ Y = PY$, ve $Z = PY$ alınırsa benzer hesaplamalar ile $c = n$ için

$$
\left(\rho^2 - E(\rho) - \rho\tau(E)\right)g(PY,PY) = 0
$$

elde edilir. $g(PY,PY) \neq 0$ olması durumunda bu (5.32) sağlanmış olur. (5.35) de $c = n$ olmak üzere $X = PX,\ Y = PY$, ve $Z = PY$ alınırsa

$$
\{PX(\rho) + \rho\tau(PX)\}\,PY = \{PY(\rho) + \rho\tau(PY)\}\,PX
$$

bulunur. Bu ise (5.33) dır. □

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.3.2 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $c \neq n$ olmak üzere $\overline{M}(c)$ nin total umbilik lightlike hiperyüzeyi yoktur.

Teorem 5.3.3 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $S(TM)$ ekran dağılımı total umbilik olacak şekilde $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $S(TM)$ total geodeziktir, yani; $C(X,PY) = 0$ dır.

İspat: $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)PZ, N) = \overline{g}(R(X,Y)PZ, N)$$

dır. Bu eşitliğin sağ tarafının hesap edilmesi ile

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X,Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) \\ &\quad + \tau(Y)C(X, PZ) - \tau(X)C(Y, PZ) \end{aligned} \tag{5.38}$$

bulunur. Ayrıca

$$(\nabla_X C)(Y, PZ) = X(C(Y, PZ)) - C(\nabla_X Y, PZ) - C(Y, \nabla^*_X PZ) \tag{5.39}$$

dır. (5.38) da $X = E, Y = PZ = U_{n+1}$ alınır ve (2.43), kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(E, U_{n+1})U_{n+1}, N) &= (\nabla_E C)(U_{n+1}, U_{n+1}) - \left(\nabla_{U_{n+1}} C\right)(E, U_{n+1}) \\ &\quad + \tau(U_{n+1})C(E, U_{n+1}) - \tau(E)C(U_{n+1}, U_{n+1}) \\ &= \lambda(\nabla_E g)(U_{n+1}, U_{n+1}) - \lambda\left(\nabla_{U_{n+1}} g\right)(E, U_{n+1}) \\ &= -\lambda\left(\nabla_{U_{n+1}} g\right)(E, U_{n+1}) \\ &= \lambda g\left(\nabla_{U_{n+1}} E, U_{n+1}\right) \\ &= -\lambda \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{U_{n+1}} E, \phi N\right) \end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(E, U_{n+1})U_{n+1}, N) &= -\lambda \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{U_{n+1}} E, \phi N\right) \\ &= \lambda \overline{g}\left(\phi \overline{\nabla}_{U_{n+1}} E, N\right) \\ &= \lambda \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{U_{n+1}} \phi E, N\right) \\ &= -\lambda \overline{g}\left(\phi E, \overline{\nabla}_{U_{n+1}} N\right) = \lambda \overline{g}(\phi E, A_N U_{n+1}) \\ &= \lambda C(U_{n+1}, \phi E) = -\lambda^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.34) den $\overline{g}(\overline{R}(E, U_{n+1})U_{n+1}, N) = 0$ olacağından $S(TM)$ total geodeziktir. □

5.4 Indefinite $S-$Uzay Formların Lightlike Hiperyüzeylerinin Ricci Eğriliği

$\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu bir indefinite $S-$uzay formu ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının $\{V_1, ..., V_{m-1}, \phi V_1, ..., \phi V_{m-1}, E, U_1, ...U_n\}$ olan bazı $\{W_1, W_2, ..., W_{2(m-1)}, E, U_1, ...U_n\}$ ile gösterilsin. Bu durumda M nin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(A_N U_j, U_j) + \overline{g}(A_N E, N) \\ &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(A_N U_j, U_j) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade de (2.34) kullanılarak

$$H = \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i C(W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} C(U_j, U_j)$$

elde edilir. Burada ε_i, W_i lerin timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak ± 1 olarak değişmektedir. Böylece aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

Lemma 5.4.1 $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $S-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin ortalama eğriliği

$$H = \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i C(W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} C(U_j, U_j) \tag{5.40}$$

dır.

Teorem 5.4.2 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliği Ric ve ortalama eğriliği H arasında

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) = & \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \Bigg[(\sum_{\alpha,\beta} -u^{\alpha}(X)u^{\beta}(Y)) \\ & + \frac{c+3n}{4}[-\overline{g}(\phi X, \phi Y) + \overline{g}(W_i, Y)\overline{g}(X, W_i)] \\ & + B(W_i, Y)C(X, W_i)] + \sum_{j=1}^{n} [B(U_j, Y)C(X, U_j))] \\ & - \frac{3(c-n)}{4}\overline{g}(\phi E, Y)\overline{g}(X, \phi E) - n\overline{g}(\phi X, \phi Y) \\ & - HB(X,Y) \end{aligned} \tag{5.41}$$

bağıntısı vardır.

İspat: Lightlike hiperyüzeyin tanımından, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(R(X, W_i)Y, W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(R(X, U_j)Y, U_j) \\ & \quad + \overline{g}(R(X, E)Y, N) \end{aligned} \tag{5.42}$$

yazılabilir. (2.42) bağıntısından

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{R}(X, W_i)Y, W_i\right) &= g(R(X, W_i)Y, W_i) + B(X,Y)C(W_i, W_i) \\ & \quad - B(W_i, Y)C(X, W_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{R}(X, U_j)Y, U_j\right) &= g\left(R(X, U_j)Y, U_j\right) + B(X,Y)C(U_j, U_j) \\ & \quad - B(U_j, Y)C\left(X, U_j\right) \end{aligned}$$

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X, E)Y, N\right) = g\left(R(X, E)Y, N\right)$$

bulunur. Bu değerler (5.42) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i (\overline{g}\left(\overline{R}(X, W_i)Y, W_i\right) - B(X,Y)C(W_i, W_i) \\ & \quad + B(W_i, Y)C(X, W_i) \\ & \quad + \sum_{j=1}^{n} \overline{g}\left(\overline{R}(X, U_j)Y, U_j\right) - B(X,Y)C(U_j, U_j) \\ & \quad + B(U_j, Y)C\left(X, U_j\right)) + \overline{g}(\overline{R}(X, E)Y, N) \end{aligned} \tag{5.43}$$

elde edilir. (2.62) kullanılarak $\overline{g}\left(\overline{R}(X,W_i)Y,W_i\right)$, $\overline{g}\left(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j\right)$ ve $\overline{g}(\overline{R}(X,E)Y,N)$ hesaplanırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{R}(X,W_i)Y,W_i) &= \sum_{\alpha,\beta}\left(-u^{\alpha}(X)u^{\beta}(Y)\right)+\frac{c+3n}{4}\left[-\overline{g}(\phi X,\phi Y)+\overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i)\right]\\ &\quad -\frac{3(c-n)}{4}\overline{g}(\phi W_i,Y)g(X,\phi W_i),\end{aligned}$$

$$g(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j)=\sum_{\alpha,\beta}-\overline{g}(\phi X,\phi Y)u^{\alpha}(U_j)g(U_\beta,U_j)$$

ve

$$g(\overline{R}(X,E)Y,E)=-\frac{3(c-n)}{4}\overline{g}(\phi E,Y)g(X,\phi E)$$

elde edilir. Bu değerler (5.43) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i\Bigg[\Big(\sum_{\alpha,\beta}-u^{\alpha}(X)u^{\beta}(Y)\Big)\\ &\quad +\frac{c+3n}{4}\left[-\overline{g}(\phi X,\phi Y)+\overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i)\right]\\ &\quad -B(X,Y)C(W_i,W_i)+B(W_i,Y)C(X,W_i)\Bigg] \qquad (5.44)\\ &\quad +\sum_{j=1}^{n}\left[B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right))-B(X,Y)C(U_j,U_j)\right]\\ &\quad -\frac{3(c-n)}{4}\overline{g}(\phi E,Y)\overline{g}(X,\phi E)-n\overline{g}(\phi X,\phi Y)\end{aligned}$$

bulunur. (5.40) bağıntısı gözönüne alınırsa (5.43) ifadesi

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i\Bigg[\Big(\sum_{\alpha,\beta}-u^{\alpha}(X)u^{\beta}(Y)\Big)\\ &\quad +\frac{c+3n}{4}\left[-\overline{g}(\phi X,\phi Y)+\overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i)\right]\\ &\quad +B(W_i,Y)C(X,W_i)\Bigg]+\sum_{j=1}^{n}\left[B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right))\right]\\ &\quad -\frac{3(c-n)}{4}\overline{g}(\phi E,Y)\overline{g}(X,\phi E)-n\overline{g}(\phi X,\phi Y)\\ &\quad -HB(X,Y)\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. □

Sonuç 5.4.3 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M total geodezik ise bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliği Ric

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \Bigg[\Big(\sum_{\alpha,\beta} -u^{\alpha}(X)u^{\beta}(Y)\Big) \\ &\quad + \frac{c+3n}{4}\left[-\overline{g}(\phi X,\phi Y) + \overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i)\right]\Bigg] \\ &\quad - \frac{3(c-n)}{4}\overline{g}(\phi E,Y)\overline{g}(X,\phi E) - n\overline{g}(\phi X,\phi Y) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 5.4.4 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul şekil operatörü A_N ikinci temel forma göre simetrik ve ikinci temel formun simetrik olmasıdır.

İspat: (5.41) kullanılarak

$$\begin{aligned} & Ric(X,Y) - Ric(Y,X) = HB(Y,X) - HB(X,Y) \\ & + \left(\sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i B(W_i,Y)C(X,W_i) + \sum_{j=1}^{n} B(U_j,Y)C(X,U_j)\right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i B(W_i,X)C(Y,W_i) + \sum_{j=1}^{n} B(U_j,X)C(Y,U_j)\right) \end{aligned} \tag{5.45}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i B(W_i,Y)C(X,W_i) + \sum_{j=1}^{n} B(U_j,Y)C(X,U_j) \\ = & \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N X,W_i)g(A_E^{*}Y,W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(A_N X,U_j)g(A_E^{*}Y,U_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(A_E^*Y, \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N X, W_i)W_i) + g(A_E^*Y, \sum_{j=1}^{n} g(A_N X, U_j)U_j) \\
&= g(A_E^*Y, \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N X, W_i)W_i + \sum_{j=1}^{n} g(A_N X, U_j)U_j) \\
&= g(A_E^*Y, A_N X) = B(Y, A_N X)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i B(W_i, Y)C(X, W_i) + \sum_{j=1}^{n} B(U_j, Y)C\left(X, U_j\right) = B(Y, A_N X) \quad (5.46)$$

dır. Böylece (5.45) bağıntısı

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) - Ric(Y, X) = H(B(Y, X) - B(X, Y)) \\
+B(Y, A_N X) - B(X, A_N Y)
\end{aligned} \quad (5.47)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

(5.47) eşitliği gözönüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.4.5 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 5.4.6 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul M nin şekil operatörünün ikinci temel forma göre simetrik ve

$$g(Y, V)u^{n+1}(X) = g(X, V)u^{n+1}(Y) \text{ veya } c = n$$

olmasıdır.

İspat: (5.42) bağıntısına I.Bianchi özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ric(X,Y)-Ric(Y,X) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \left(g(R(X,W_i)Y,W_i)-g(R(Y,W_i)X,W_i)\right) \\ &+\sum_{j=1}^{n}\left(g(R(X,U_j)Y,U_j)-g(R(Y,U_j)X,U_j)\right) \\ &+\overline{g}(R(X,E)Y,N)-\overline{g}(R(Y,E)X,N) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} Ric(Y,X)-Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(R(Y,X)W_i,W_i) \\ &+\sum_{j=1}^{n} g(R(Y,X)U_j,U_j) \qquad (5.48) \\ &+\overline{g}(R(Y,X)E,N) \end{aligned}$$

bulunur. (2.42) bağıntısından

$$\overline{g}\left(R(Y,X)W_i,W_i\right)=\overline{g}(\overline{R}(Y,X)W_i,W_i)-B(Y,W_i)\overline{g}\left(A_NX,W_i\right)+B(X,W_i)\overline{g}\left(A_NY,W_i\right)$$

$$\overline{g}\left(R(Y,X)U_j,U_j\right)=\overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)U_j,U_j\right)-B(Y,U_j)\overline{g}\left(A_NX,U_j\right)+B(X,U_j)\overline{g}\left(A_NY,U_j\right)$$

$$\overline{g}\left(R(Y,X)E,N\right)=\overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)E,N\right)$$

yazılabilir. Bu değerler (5.48) da yazılırsa

$$\begin{aligned} Ric(Y,X)-Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \left\{\overline{g}(\overline{R}(Y,X)W_i,W_i)\right. \\ &\left.-B(Y,W_i)\overline{g}\left(A_NX,W_i\right)+B(X,W_i)\overline{g}\left(A_NY,W_i\right)\right\} \\ &+\sum_{j=1}^{n}\left\{\overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)U_j,U_j\right)\right. \qquad (5.49) \\ &\left.-B(Y,U_j)\overline{g}\left(A_NX,U_j\right)+B(X,U_j)\overline{g}\left(A_NY,U_j\right)\right\} \\ &\overline{g}\left(R(Y,X)E,N\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.62) bağıntısı kullanılarak $\overline{g}(\overline{R}(Y,X)W_i,W_i)$, $\overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)U_j,U_j\right)$ ve $\overline{g}\left(R(Y,X)E,N\right)$ hesaplanırsa

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)W_i,W_i\right)=\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)U_j,U_j\right)=0$$

$$\overline{g}\left(R(Y,X)E,N\right) = \frac{c-n}{4}\left[\overline{g}(Y,V)u^{n+1}(X) - \overline{g}(X,V)u^{n+1}(Y)\right]$$

bulunur. Bu değerler (5.49) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ric(Y,X) - Ric(X,Y) \;\; &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \left\{B(X,W_i)C(Y,W_i) - B(Y,W_i)C(X,W_i)\right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left\{B(X,U_j)C(Y,U_j) - B(Y,U_j)C(X,U_j)\right\} \\ &+ \frac{c-n}{4}\left[g(Y,V)u^{n+1}(X) - g(X,V)u^{n+1}(Y)\right] \end{aligned} \tag{5.50}$$

elde edilir. (5.49) bağıntısında (5.46) kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ric(Y,X) - Ric(X,Y) = \;\; & B(X,A_N Y) - B(Y,A_N X) \\ & + \frac{c-n}{4}\left[g(Y,V)u^{n+1}(X) - g(X,V)u^{n+1}(Y)\right] \end{aligned} \tag{5.51}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 5.4.7 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul M total geodezik ve

$$g(Y,V)u^{n+1}(X) = g(X,V)u^{n+1}(Y) \text{ veya } c = n$$

olmasıdır.

Sonuç 5.4.8 $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $S-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$C(X,A_E^*Y) = C(Y,A_E^*X)$$

ve

$$g(Y,V)u^{n+1}(X) = g(X,V)u^{n+1}(Y) \text{ veya } c = n$$

olmasıdır.

KAYNAKLAR

Blair, D. E., 1970, Geometry of manifolds with structural group $U(n)\times O(s)$, J. Diff. Geometry, 4, 155-167.

Blair, D. E., 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry, Lecture Notes in Math., Springer Verlag.

Blair, D. E., 2002, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Math. 203, Birkhauser,. Basel.

Bejancu, A., 1996, Null hypersurfaces of Semi-Euclidean spaces, Saitama Math. J., 14, 25-40.

Brickell F. and Clark, R. S., 1970, Differentiable manifolds, Van Nostrand, London.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1990, The curvature tensor fields on $f-$manifolds with complemented frames, An. şt. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Matematica, 36, 151-162.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1991, A classification of certain submanifolds of an $S-$manifold, Annales Polinici, Mathematici Liv., 2, 117-123.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1993, On normal CR-submanifolds of $S-$manifolds, Colloquium Mathematicum, 64, 203-214.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1993, On certain anti-invariant submanifolds of an $S-$manifold, Portugaliae Mathematica, 50, 103-113.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1993, The curvature of submanifolds of an $S-$space form, Acta Math. Hungar., 62, 373-383.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1996, On pseudo-Einstein hypersurfaces of H^{2n+s}, Indian J. pure appl. Math., 27, 451-462.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1996, On pseudo-umbilical hypersurfaces of $S-$manifolds, Acta Math. Hungar., 70, 121-128.

Chen, B-Y., 1973, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker NY.

Çöken, A. C., 2001, The Euler theorem And Dupin İndicatrix For Parallel Pseudo-Euclidean Hypersurfaces in Pseudo-Euclidean Space E^{n+1} , Hadronic Journal Supplement 16,151-162.

De, U. C. and Guha, N., 1991, On generalized recurrent manifolds, Proc. Math. Soc., 7, 7-11.

De, U. C., Guha, N. and Kamilya, D., 1995, On generalized Ricci recurrent manifolds, Tensor(N.S), 56, No.3, 312-317.

De, U. C., Shaikh, A. A. and Biswas, S., 2003, On $\phi-$recurrent Sasakian manifolds, Novi Sad J. Math., 33, No. 2, 43-48.

De, U. C., Binh, T. Q., and Shaikh, A. A., 2000, On weakly symmetric and weakly Ricci-symmetric K-contact manifolds, Acta Math. Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 16, 65-71.

Dileo, G. and Lotta, A., 2005, On the structure and symmetry properties of almost $S-$manifolds, Geometriae Dedicata, 110, 191-211.

Duggal, K. L.and Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and it's applications, Kluwer Dortrecth.

Duggal, K. L.and Bejancu, A., 1993, Lightlike CR-hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds, Acta Appl. Math., 39, 171-190.

Dubey, R.S.D., 1979, Generalized recurrent spaces, Indian J. Pure and Appl. Math., 10(12), 1508-1512.

Fernandez, L. M. and Hans-Uber M. B., 2005, New relationships involving the mean curvature of slant submanifolds in S-space forms, Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, Sección de Geometría y Topología, n^o 15 (junio-2005) (con M.B. Hans-Uber).

Goldberg, S. I. and Yano, K., 1970. On normal globally framed $f-$manifolds, Tohoku Math. Jour., 22, 362-370.

Görgülü, A., Çöken, A. C., 1993, The Euler Theorem for Parallel Pseudo-Euclidean Hypersurfaces in Pseudo- Euclidean Space, Jour Inst.Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.) Vol.6 No.2, 161-165.

Guha, N., 2000, On generalised Ricci-recurrent Sasakian manifolds, Bull. Calcutta Math. Soc. 92, No.5, 361-364

Güneş, R., Şahin, B., ve Kılıç, E., 2003, On lightlike hypersurfaces of a semi-Riemannian space form, Turk J. Math., 27, 283-297.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Ünv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları, No. 2.

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hicks, N.J., 1974, Notes on differential geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London.

Ishihara, S., 1966, Normal structure f satisfying $f^3 + f = 0$, Kodai Math. Sem. Rep., 18, 36-47.

Ishihara, S. and Yano K., 1964, On integrability conditions of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$, Quart. J. Math. Oxford (2), 15, 217-222

Kang, T. H. , Jung, S. D., Kim, B. H., Pak H. K. and Pak, J. S., 2003, Lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian manifolds, Indian J. pure appl. Math., 34, 1369-1380.

Khan, Q., 2004, On generalized recurrent Sasakian manifolds, Kyumgpook Math. J., 44, no. 2, 167-172.

Kim, J.S., Prasad, R. and Tripathi, M. M., 2002, On generalized Ricci recurrent trans-Sasakian manifolds, J. Korean Math. Soc. 39, No.6, 953-961.

Kobayashi, M. and Tsuchiya, S., 1972., Invariant submanifolds in an $f-$manifold with complemented frames, Kodai Math. Sem. Rep., 24, 430-450.

Kobayashi, M., 1990, Semi-invariant submanifolds in an $f-$manifold with complemented frames, Tensor, 51, 155-178

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1963, Foundations of differential geometry, Vol. I, John Wiley Sons Inc. Lcccn: 63-19209.

Kobayashi, S. and Nomizu, 1969, K., Foundations of differential geometry, Vol. II, John Wiley Sons Inc. Lcccn: 68-19209

Lotta, A. and Pastore, M., 2004, The tanaka-webster connection for almost $S-$manifolds and Cartan geometry, Archivum Mathematicum, 40, 47-61.

Maralabhavi, Y. B., and Rathnamma, M., 1999, Generalized recurrent and concircular recurrent manifolds, Indian J. Pure and Appl. Math., 30, No.1, 1167-1171.

Mihai, I., 1983, CR-submanifolds of a framed $f-$manifold, Stud. Cerc. Math., 35, 127-136.

Montiel, S. and Romero, A., 1983, Complex Einstein hypersurfaces of indefinite complex space forms, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 94, 495-508.

Nakagava, N., 1966, On framed $f-$manifolds, Kodai Math. Sem. Rep., vol. 18, pp, 293-306.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, London.

Ornea, L., 1984, Generic CR-submanifolds of $S-$manifolds, Stud. Cerc. Math., 36, 435-443.

Patterson, E. M., 1952, Some theorems on Ricci-recurrent spaces, J. London Math. Soc. 27, 287-295.

Spivak, M. 1979, Differential Geometry, volume II, III, IV New York, NY: Wiley.

Takahashi, T., 1977, Sasakian $\phi-$symmetric spaces, Tohoku Math. J. 29, 91-113.

Tamassy, L. and Binh, T.Q., 1989, On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds, Coll. Math. Soc. Janos Bolyali 56, 663-670.

Terlizzi, L. D., 2006, On the curvature of a generalization of contact metric manifolds, Acta Math. Hungar., 110, 225-239.

Terlizzi, L. D. and Pastore, A. M., 2002, Some results on $K-$manifolds, Balkan Journal of Geometry ant Its Applications, 7, 43-62.

Tripathi, M. M. and Mihai, I., 2001, Submanifolds of framed metric manifolds and S-manifolds, Note di Matematica, 3, 135-164.

Yano, K., 1963, On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3+f=0$, Tensor, N.S., 14, 99-109.

Yücesan, A., 2004, Indefinite Kaehler manifoldunda hiperyüzeylerin geometrisi üzerine, Doktora Tezi, Isparta.