İlgili Kategori Olarak
Çaprazlanmış Modüller Ve
Aktör Çaprazlanmış Modüller Üzerine

Serdar Hürmetli

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2007

On The Crossed Modules And
Actor Crossed Modules
As Categories Of İnterest

Serdar Hürmetli

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

December 2007

İlgili Kategori Olarak
Çaprazlanmış Modüller Ve
Aktör Çaprazlanmış Modüller Üzerine

Serdar Hürmetli

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Ekim 2007

Serdar HÜRMETLİ’ nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “İlgili Kategori Olarak Çaprazlanmış Modüller Ve Aktör Çaprazlanmış Modüller Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummuhan EGE

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Ö. Enver USLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

İlgili Kategori Olarak Çaprazlanmış Modüller Ve
Aktör Çaprazlanmış Modüller Üzerine

Serdar Hürmetli

ÖZET

Çaprazlanmış Modüllerin İlgili Kategori Belirtmeleri üzerine hazırlanan bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde, bu çalışmamızda sıkça kullandığımız, İlgili Kategorilerin bazı temel kavramlarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak, bazı örnekleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ilgili kategorilerin tanımı verilerek çaprazlanmış modüllerin bir ilgili kategori örneği oluşturduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, çarpım cebri ile yakından ilgili olan, değişmeli cebirler için aktör çaprazlanmış modül kavramı tanımlanarak aktör çaprazlanmış modül örnekleri verilmiştir.

Son bölümde ise ilgili kategoriler için aktör kavramı tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kategori, İlgili Kategoriler, Çaprazlanmış Modüller, Aktör Çaprazlanmış Modüller

On The Crossed Modules And Actor Crossed Modules
As Categories Of İnterest

Serdar Hürmetli

SUMMARY

This master thesis on Crossed Modules As Category Of Interest consists of four chapters.

In the first chapter, we recall some basic notions about The Category Theory.

In the second chapter we describe Crossed Modules and give some examples.

In the third chapter we describe The Categories Of Interest and show that crossed modules is an example of the categories of interest.

In the forth chapter we describe Actor Crossed Modules for Commutative Algebras and give some actor crossed modules examples.

The last chapter is dedicated to the question of the existence and construction of actors for the objects in categories of interest

Keywords: Category, Categories Of Interest, Crossed Modules, Actor Crossed Modules

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen ve bana danışmanlık yapan değerli hocam sayın

Prof.Dr. Zekeriya ARVASİ'ye,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen hocam sayın

Yrd. Doç. Dr. Ummuhan EGE'ye,

ve desteğini benden esirgemeyen arkadaşım

Zeynep BİCAN'a

en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2007 Serdar HÜRMETLİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

BÖLÜM 1

KATEGORİ TEORİ

Bu bölümde kategori teorideki bazı temel kavram ve örnekleri vereceğiz. Ayrıntılı bilgiye Prof. Dr. Zekeriya Arvasi'nin ders notlarından ulaşılabilir.

1 Kategorinin Temel Kavramları

Tanım 1.1 $\mathcal{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sistemdir.

(i) $Ob(\mathcal{C})$, elemanları obje diyeceğimiz sınıfdır. Bu sınıfın elemanları

$$A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$$

ile gösterilecektir.

(ii) $\mathcal{C}(A, B)$ (veya $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$); elemanlarına morfizm (veya oklar) diyeceğimiz kümedir. Bu kümenin elemanlarını

$$f, g, h, \ldots \text{veya } \alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

ile göstereceğiz.

(iii) $Ob(\mathcal{C})$ deki her A,B,C objeleri için

$$\begin{array}{rcl} k^B_{A,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) & \to & \mathcal{C}(A, C) \\ (f, g) & \mapsto & gf \end{array}$$

fonksiyonuna kompozisyon denir ve

$$k^B_{A,C}(f, g) = gf = g \circ f$$

ile gösterilir ve $Ob(\mathcal{C})$ deki her A objesi için

$$1_A \in \mathcal{C}(A, A)$$

morfizmine birim morfizm denir.

Yukarıda verdiğimiz üç ifadeyi

$$\mathcal{C} = (Ob, \mathcal{C}(-, -), k^{-}_{-,-}) \ \ veya \ \ \mathcal{C} = (Ob, Mor_{\mathcal{C}}(-, -), k^{-}_{-,-})$$

ile göstereceğiz. Bu durumda, Bu $\mathcal{C}$ yapısı aşağıda vereceğimiz iki özelliği sağlıyor ise bir **kategori** denir.

(1) Asosyatif Özelliği: $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ ve $h \in \mathcal{C}(C, D)$ ise

$$h(gf) = (hg)f;$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, "gf"] & D \\
B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "hg"'] & C \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.1

(2) Birimlilik: her A objesi için aşağıdaki özelliği sağlayan $1_A : A \to A$ birim morfizmi vardır. Herhangi $f : A \to B$ için

$$f1_A = f = 1_Bf$$

dir. Yani

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d, "1_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.2

Örnek 1.2 R değişmeli halka olsun. Modüller kategorisi $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}_R$;

$Ob(\mathbf{Mod})$; bütün R-modüller sınıfı;

Mor$(-,-)$ =Hom$(-,-)$˜ modül homomorfizmler kümesi.

Tanım 1.3 Yönlendirilmiş kenarların ve noktaların bir kolleksiyonu olarak oluşturulmuş kategoriye **diyagram kategorisi** denir. Diğer bir deyişle bu diyagramın kenarları olarak isimlendirilenler kategorinin morfizmleridir.

Tanım 1.4 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Kalkış objeden varış objeye giden bütün morfizmlerin kompozisyonları eşit ise objelerin ve morfizmlerin **diyagramı değişmelidir** denir.

Tanım 1.5 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $Ob(\mathcal{C})$ bir küme ise $\mathcal{C}$ ye **küçük kategori** denir.

Tanım 1.6 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}^2$ ile göstereceğimiz yeni bir kategori oluşturalım. Bu kategorinin objeleri; $\mathcal{C}$ nin morfizmleri olsun. Morfizmlerin kümesi, $A \xrightarrow{f} B$ den $C \xrightarrow{g} D$ ye giden morfizmler olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

Şekil 1.3

diyagramı değişmelidir. Bu morfizmlerin kompozisyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B' \arrow[d, "\beta'"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D & C' \arrow[r, "g'"'] & D' \end{tikzcd}$$

Şekil 1.4

Diyagramların kompozisyonu var olabilmesi için gerek ve yeter şart $B = A'$ & $D = C'$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f' \circ f"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "g' \circ g"'] & D' \end{tikzcd}$$

Şekil 1.5

diyagramının değişmeli olmasıdır. Diğer bir deyişle kompoziyon

$$(f, g) * (f', g') = (f' \circ f, g' \circ g)$$

dir. $\mathcal{C}^2$ kategorisine $\mathcal{C}$ üzerindeki **Ok kategori** denir.

Tanım 1.7 $\mathcal{C}$ bir kategori ve A, $Ob(\mathcal{C})$ de sabit bir obje olsun. $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ ile göstereceğimiz bir kategori oluşturacağız. $Ob(\mathcal{A}^{\rightarrow})$ sınıfın elemanları $\mathcal{C}$ nin $A \xrightarrow{f} X$ şeklindeki morfizmlerin kümesi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Şekil 1.6

şeklindeki değişmeli diyagramları alalım. Yani,

$$Mor_{\mathcal{A}^{\rightarrow}}(,) = \{h \mid h : (A \xrightarrow{f} X) \longrightarrow (A \xrightarrow{g} Y),\ hf = g\}$$

Benzer şekilde ${}^{\rightarrow}\mathcal{A}$ kategorisini oluşturabiliriz.

$Ob(\mathcal{C}\ )$; elemanları $\mathcal{C}$ nin $X \xrightarrow{f} A$ şeklinde morfizmleri olarak alalım. Morfizmlerin kümesi $X \xrightarrow{f} A$ den $Y \xrightarrow{g} A$ ya giden h morfizmi olurlar. Burada

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

Şekil 1.7

diyagramı değişmelidir. Bu kategorilere **virgül kategori** denir.

Tanım 1.8 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{B}$, aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{C}$ nin **alt kategorisi** denir.

(1) $Ob(\mathcal{B}) \subset Ob(\mathcal{C})$ veya $Ob(\mathcal{B})$ objelerin sınıfı $Ob(\mathcal{C})$ nin alt sınıfıdır;

(2) Mor($\mathcal{B}$) $\subset$Mor($\mathcal{C}$) veya $Ob(\mathcal{B})$ deki her $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ objeler için $\mathcal{B}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B})$

(3) $\mathcal{B}$ nin kompozisyon fonksiyonları, $\mathcal{C}$ nin karşı gelen fonksiyonlarının kısıtlanmışlarıdır. Yani $\mathcal{B}$ deki iki morfizmin kompozisyonu, $\mathcal{C}$ deki kompozisyonu ile aynıdır.

$Ob(\mathcal{B})$ deki her A, B, C objeleri için

$$\begin{array}{ccc} Mor(A,B) \times Mor(B,C) & \longrightarrow & Mor(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ_{\mathcal{B}} f = g \circ_{\mathcal{C}} f \end{array}$$

(4) $\mathcal{B}$ nin birim morfizmi, $\mathcal{C}$ nin birim morfizmidir.

Bununla birlikte $\mathcal{B}$ deki her A, B objesi için

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) = Mor_{\mathcal{B}}(A,B)$$

veya her B, B' objesi için $\mathcal{B}(B,B') = \mathcal{C}(B,B')$ ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{C}$ nin **dolu alt kategorisi** denir.

Tanım 1.9 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ şeklinde yeni bir kategori tanımlayacağız. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorilerinin **çarpım kategorisi** denir.

Objeler: $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ nin objeleri,

$$Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$$

alınarak oluşturulur. Bu sınıfın elemanları $C,\ D$ sırasıyla $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ nin objeleri olmak üzere

$$(C,D)$$

şeklinde ikililerden oluşmaktadır.

Morfizmler: (C,D) ve (C',D') ; $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ nin objeleri ise,

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \times \mathcal{D}((C,D),(C',D')) &= \mathcal{C}(C,C') \times \mathcal{D}(D,D') \\ &= \{(f,g) \mid f : C \to C' \text{ ve } g : D \to D' \text{ sırasıyla} \\ &\quad\ \mathcal{C} \text{ ve } \mathcal{D} \text{ nin morfizmleri}\}\end{aligned}$$

Kompozisyon:

$$(f,g) \circ_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}} (f',g') = (f \circ_{\mathcal{C}} f', g \circ_{\mathcal{D}} g')$$

(1) ve **(2)** aksiyomlarının sağlandığını gösterelim

(1) Her $(f_1,g_1) \in Mor((A_1,B_1),(C_1,D_1)), (f_2,g_2) \in Mor((A_2,B_2),(C_2,D_2))$ ve $(f_3,g_3) \in Mor((A_3,B_3),(C_3,D_3))$ için

$$(f_1,g_1) \circ [(f_2,g_2) \circ (f_3,g_3)] \stackrel{?}{=} [(f_1,g_1) \circ (f_2,g_2)] \circ (f_3,g_3)$$

$$\begin{aligned}
(f_1, g_1) \circ_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}} [(f_2, g_2) \circ_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}} (f_3, g_3)] &= (f_1, g_1) \circ (f_3 \circ_{\mathcal{C}} f_2, g_3 \circ_{\mathcal{D}} g_2) \\
&= [(f_3 \circ f_2) \circ f_1, (g_3 \circ g_2) \circ g_1] \\
&= [f_3 \circ (f_2 \circ f_1), g_3 \circ (g_2 \circ g_1)] \\
&= (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) \circ (f_3 \circ g_3) \\
&= [(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2)] \circ (f_3, g_3)
\end{aligned}$$

(2)$Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ deki her (A, B) objesi için

$(1_A, 1_B) = 1_{(A,B)} : (A, B) \to (A, B)$ şeklinde birim morfizm var olup $(f, g) \in Mor((A, B), (C, D))$ için

$$\begin{aligned}
1_{(A,B)} \circ (f, g) &= (1_A, 1_B) \circ (f, g) \\
&= (f \circ 1_A, g \circ 1_B) \\
&= (f, g)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f, g) \circ 1_{(C,D)} &= (f, g) \circ (1_C, 1_D) \\
&= (1_C \circ f, 1_D \circ g) \\
&= (f, g)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 1_{(A,B)} \circ (f, g) = (f, g) = (f, g) \circ 1_{(C,D)}$ olduğundan $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ bir kategoridir.

Tanım 1.10 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $\sim$, $Mor(\mathcal{C})$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

(i) Her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ için

$$[f]_\sim = \{g \mid f \sim g\} \subset Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(ii) $[f]_\sim = [f']_\sim$ ve $[g]_\sim = [g']_\sim$ olmak üzere

$$[f]_\sim \circ [g]_\sim = [f']_\sim \circ [g']_\sim \Leftrightarrow g \circ f \sim g' \circ f'$$

ise $\sim$ ya, $\mathcal{C}$ nin bir **kongüransı** denir.

Tanım 1.11 $\sim$, $\mathcal{C}$ nin bir **kongüransı** olsun. $\mathcal{D} = \mathcal{C}/_{\sim}$ ile göstereceğimiz kategoriye **bölüm kategorisi** denir.

Objeler: $Ob(\mathcal{C}/_{\sim}) = Ob(\mathcal{C})$

Morfizmler: $Mor(\mathcal{C}/_{\sim}) = \{[f]_{\sim} : f \in Mor(\mathcal{C})\}$

Kompozisyon: $[f]_{\sim} \circ [g]_{\sim} = [f \circ g]_{\sim}$

(1) ve **(2)** aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

(1) Her $[f]_{\sim}, [g]_{\sim}, [h]_{\sim} \in Mor(\mathcal{C}/_{\sim})$ için

$([f]_{\sim} \circ [g]_{\sim}) \circ [h]_{\sim} \stackrel{?}{=} [f]_{\sim} \circ ([g]_{\sim} \circ [h]_{\sim})$

$$\begin{aligned}
([f]_{\sim} \circ [g]_{\sim}) \circ [h]_{\sim} &= [g \circ f]_{\sim} \circ [h]_{\sim} \\
&= [h \circ (g \circ f)]_{\sim} \\
&= [(h \circ g) \circ f]_{\sim} \\
&= [f]_{\sim} \circ [h \circ g]_{\sim} \\
&= [f]_{\sim} \circ ([g]_{\sim} \circ [h]_{\sim})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow ([f]_{\sim} \circ [g]_{\sim}) \circ [h]_{\sim} = [f]_{\sim} \circ ([g]_{\sim} \circ [h]_{\sim})$ dir.

(2)$Ob(\mathcal{C}/_{\sim})$ daki her A objesi için

$1_A = [1_A]_{\sim} : A \to A$ şeklinde birim morfizm var olup $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ olmak üzere

$[f]_{\sim} \in Mor(\mathcal{C}/_{\sim})$ için

$$\begin{aligned}
[1_A]_{\sim} \circ_{\mathcal{C}/_{\sim}} [f]_{\sim} &= [f \circ_{\mathcal{C}} 1_A]_{\sim} \\
&= [f]_{\sim}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[f]_{\sim} \circ_{\mathcal{C}/_{\sim}} [1_B]_{\sim} &= [1_B \circ_{\mathcal{C}} f]_{\sim} \\
&= [f]_{\sim}
\end{aligned}$$

olup $\mathcal{D} = \mathcal{C}/_{\sim}$ bir kategoridir.

$\mathcal{D} = \mathcal{C}/_{\sim}$ kategorisine $\mathcal{C}$ nin bölüm kategorisi denir.

Tanım 1.12 $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}),\text{Mor}(A,B),\circ)$ herhangi bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ nin **dual kategorisi**

$$\mathcal{C}^{op} = (Ob(\mathcal{C}), Mor(B,A), *)$$

olup $*$ kompozisyonu

$$f * g = g \circ f$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{C}^{op}$ ile göstereceğiz. Diğer bir deyişle $\mathcal{C}^{op}$ nin objeleri $\mathcal{C}$ nin objeleri ile aynı ve her A, B objeleri için

$$Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$$

dir. Morfizmlerin kompozisyonu sırasının değişimidir.

Kümeler kategorisinde aşağıdaki özel tip fonksiyonlar önemli rol oynamaktadır.

Birim fonksiyonlar

Bire-bir Fonksiyonlar

Örten Fonksiyonlar

Bire-bir ve Örten Fonksiyonlar

Sabit Fonksiyonlar

Herhangi bir kategorideki birim morfizm, **Küme** deki birim fonksiyonların bir benzeridir. Diğer fonksiyonların, kategorisel karşılığını tanımlayacağız.

Tanım 1.13 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ deki bir $f : A \to B$ morfizmi sol sadeleşebilir ise f ye **monomorfizim** (veya **monik**) denir.

Örnek 1.14 **Küme**, **Grp**, **Ab,** R**-Mod, Halka** ve **Top** kategorilerindeki her bire-bir morfizm bir moniktir.

Tanım 1.15 Objeler, bazı ek yapı ile birlikte kümeler ve morfizmler, bu yapıları koruyan oklar olan kategorilere **somut** (concrete) **kategori** denir. Örneğin; **Küme**, **Grp** , **Top** kategorileri somut kategorilerdir.

Tanım 1.16 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ deki $f : A \to B$ morfizmi sağ sadeleşebilir. Yani

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$$

ise f ye **epimorfizm** (veya kısaca **epik**) denir.

Tanım 1.17 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : A \to B$, $\mathcal{C}$ de bir morfizm olsun.

$$g \circ f = 1_A$$

olacak şekilde $g : B \to A$ var ise f ye bir **kesit** (veya **seksiyon**) denir.

Hatırlatma 1.18 Her kesit moniktir, fakat tersi doğru değildir.

İspat Her kesit moniktir.

f kesit olsun. Yani $gf = 1_B$ olacak şekilde g var olsun.

$$A \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} B \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} C$$

$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 \overset{?}{=} g_2$$

$$\begin{array}{lll} \forall a \in A \text{ için} & & (fg_1)(a) = (fg_2)(a) \\ & \Rightarrow & g(fg_1(a)) = g(fg_2)(a) \\ & \Rightarrow & (gf)(g_1(a)) = (gf)(g_2(a)) \\ & \Rightarrow & 1_B(g_1(a)) = 1_B(g_2(a)) \\ & \Rightarrow & g_1(a) = g_2(a) \\ & \Rightarrow & g_1 = g_2 \\ & \Rightarrow & f \text{ moniktir.} \end{array}$$

Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin; $\mathbb{Z}$-**Mod** da,

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

tanımlayalım. f bire-bir olduğundan f moniktir. Fakat f bir kesit değildir. Eğer olsaydı her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} 2g(n) &= g(2n) \\ &= g(f(n)) \\ &= (g \circ f)(n) \\ &= 1_{\mathbb{Z}}(n) = n \end{aligned}$$

olup $2g(n) = n$ olurdu. Özel olarak $2g(1) = 1$ dir. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü $2x = 1$ denklemin $\mathbb{Z}$ de çözümü yoktur. Böylece f bir kesit değildir.

Kesitin dual kavramı retraksiyondur.

Tanım 1.19 $\mathcal{C}$ bir kategori $f : A \to B$, $\mathcal{C}$ de bir morfizm olsun.

$$f \circ g = 1_B$$

olacak şekilde $g : B \to A$ var ise f ye bir **retraksiyon** denir.

Her retraksiyon epiktir, fakat tersi doğru değildir.

Örnek 1.20 $\mathbb{Z}$-**Mod**, kategorisinde p asal olmak üzere

$$\mathbb{Q}_p = \left\{x \in \mathbb{Q} : x = kp^{-n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

tanımlayalım. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}_p \leq \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \\ x + \mathbb{Z} &\longmapsto px + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

tanımlayım. f bir $\mathbb{Z}$-modül homomorfizmi olduğu açıktır.

(i)$\forall x_1 + \mathbb{Z}, x_2 + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f(x_1 + \mathbb{Z} + x_2 + \mathbb{Z}) &= f(x_1 + x_2 + \mathbb{Z}) \\ &= p(x_1 + x_2) + \mathbb{Z} \\ &= px_1 + px_2 + \mathbb{Z} \\ &= px_1 + \mathbb{Z} + px_2 + \mathbb{Z} \\ &= f(x_1 + \mathbb{Z}) + f(x_2 + \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(ii)$\forall r \in \mathbb{Z}$ ve$\forall x+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f(r(x+\mathbb{Z})) &= f(rx+\mathbb{Z}) \\ &= p(rx)+\mathbb{Z} \\ &= (pr)x+\mathbb{Z} \\ &= (rp)x+\mathbb{Z} \\ &= r(px)+\mathbb{Z} \\ &= r(px+\mathbb{Z}) \\ &= rf(x+\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

olup $f,\ \mathbb{Z}-$ modül homomorfizmidir.

f nin epik fakat retraksiyon olmadığını gösterelim. f nin örten olduğunu göstermemiz epiklik için yeterlidir. Çünkü **AbGrp** da "f homomorfizmi örtendir $\Leftrightarrow$ f epiktir" olduğunu ispatlamıştık.

f in örten olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned} f(x+\mathbb{Z}) &= f(kp^{-n}+\mathbb{Z}) \\ &= f(p(kp^{-n-1}+\mathbb{Z})) \\ &= fp(kp^{-n-1}+\mathbb{Z}) \\ &= p(pkp^{-n-1}+\mathbb{Z}) \\ &= p(kp^{-n}+\mathbb{Z}) \\ &= p(x+\mathbb{Z}) \\ &= px+\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olup f örtendir. O halde f epiktir. Fakat f retraksiyon değildir. Olsaydı

$$fg = 1_B$$

olacak şekilde

$$g : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$$

morfizmi var olmalıdır.

$$\begin{aligned} p^{-1}+\mathbb{Z} &= f(g(p^{-1}+\mathbb{Z})) \\ &= pg(p^{-1}+\mathbb{Z}) \\ &= g(pp^{-1}+\mathbb{Z}) \\ &= g(1+\mathbb{Z}) \\ &= g(0+\mathbb{Z}) \\ &= 0+\mathbb{Z}=\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olurdu. Fakat $p^{-1} \notin \mathbb{Z}$ dir. O halde f bir retraksiyon değildir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz kavramları birleştirelim.

Tanım 1.21 Bir morfizm monik ve epik ise bu morfizme **bimorfizm** denir.

Tanım 1.22 $\mathcal{C}$ kategorisinde A ve B objeleri verilsin. $f : A \to B$ morfizmi kesit ve retraksiyon ise f ye **izomorfizm** denir. Yani

$$f : A \to B \text{ izomorfizm } \Leftrightarrow \; f \circ g = 1_B \text{ ve } g \circ f = 1_A$$

olacak şekilde bir tek $g : B \to A$ morfizmi vardır. Bu durumda A objesi B objesine izomorftur denir ve $A \cong B$ ile gösterilir. Buradaki g morfizmine **ters morfizm** denir.

Hatırlatma 1.23 Her somut kategorideki izomorfizm birebir ve örten olup monik ve epiktir. Dolayısıyla izomorfizm bimorfizmdir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin;

$$\mathcal{C} = B\ddot{o}lAb \text{ de}$$

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

morfizmi moniktir. Ayrıca örten olup epiktir. Böylece bimorfizmdir. Fakat birebir olmadığından izomorfizm değildir.

Tanım 1.24 Bir kategorideki her bimorfizm bir izomorfizm ise bu kategoriye **dengelenmiş** (balanced) **kategori** denir.

Tanım 1.25 $\mathcal{C}$ kategorisindeki her X objesi için

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I, X) \ \text{ yani } \ |\mathcal{C}(I, X)| = 1$$

kümesinin bir tek elemanı var ise I ya $\mathcal{C}$ nin **ilk objesi** denir.

Örnek 1.26 $\{0\}$, **Halka** ve R-**Mod** kategorilerinde ilk objedir.

Bir kategoride objelerin veya morfizmlerin bir çok genel tanım çeşitlerinin dualleri alınmaktadır. İlk objenin duali ise son objedir, şimdi son objeyi tanımlayalım.

Tanım 1.27 Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde her X objesi

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, S)$$

kümesi tek morfizmden oluşmakta ise $\mathcal{C}$ nin S objesine **son obje** denir. Yani $X \to S$ bir tek morfizm var olmalıdır.

Örnek 1.28 $\{0\}$, **Halka** ve R-**Mod** kategorilerinin son objesidir.

Tanım 1.29 $\mathcal{C}$ kategorisindeki Z objesi hem ilk hemde son obje ise Z ye $\mathcal{C}$ nin **sıfır objesi** denir.

Örnek 1.30 Grp, **Halka**, $\mathbf{Mod_R}$ kategorilerinde $\{1\}$, $\{0\}$ objeleri hem ilk hemde son obje olup sıfır objelerdir.

Tanım 1.31 $\mathcal{C}$ kategorisini her A, B objeleri için

$$\mathrm{Mor}(A, B) \neq \emptyset$$

ise $\mathcal{C}$ ye **bağlantılı kategori** denir.

Bir kategoriden diğer bir kategoriye giden morfizm kavramını tanımlayacağız.

Tanım 1.32 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun.

$$F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$$

fonksiyonu;

(Birimlerin koruması) $\mathcal{C}$ nin her A objesi için

$$F(1_A) = 1_{F(A)};$$

(Kompozisyonların korunması) $f \circ g$, $\mathcal{C}$ nin bir kompozisyonu ise

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

özelliklerini sağlıyor ise F ye $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir **funktor** denir ve ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) ile gösterilir.

Tanım 1.33 $\mathcal{C}/_\sim$,$\mathcal{C}$ nin bölüm kategorisi olsun.

$$Q : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}/_\sim\ )$$

bölüm fonksiyonu olmak üzere Q, $\mathcal{C}$ nin her bir f morfizmini, f nin $[f]$ denklik sınıfına götürür.

Bu durumda

$$Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/_\sim$$

fonkturuna **bölüm funktoru** denir.

Tanım 1.34 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ iki kategori ve B, $\mathcal{D}$ nin sabit bir objesi olsun. $\mathcal{C}$ nin herhangi bir A objesi için $F(A) = B$ ve $f : A_1 \to A_2$ morfizmi için

$$\begin{array}{cccc} F(f) & : F(A_1) & \to & F(A_2) \\ \| & \| & & \| \\ 1_B & : \ B & \to & B \end{array}$$

şeklinde birim morfizmdir. Yani $\mathcal{D}$ nin bütün morfizmleri birim morfizmdir. Diğer bir deyişle

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \\ & f & \longmapsto & 1_* \end{array}$$

sabit fonksiyon ise bu durumda

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

funtoruna **sabit funktor** denir.

Tanım 1.35 ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) bir funktor ise ($\mathcal{C}^{op}$,F^{op},$\mathcal{D}^{op}$) **dual funktor** oluşturulabilir. Böylece F ve F^{op} nin morfizm kümeleri aynı

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op})$$

Fakat

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

iken

$$F^{op} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

dir.

Tanım 1.36 $\mathcal{C}$ herhangi somut bir kategori olsun.

$$U : \mathcal{C} \to \mathbf{K\ddot{u}me}$$

şeklinde bir funktor vardır. $\mathcal{C}$ nin her A objesini, $F(A)$ kümesine ve herhangi fonksiyonu, kümeler üzerinde fonksiyonlara taşımaktadır. Bu funktora **unutulabilir (forgetful) funktor** denir. Örneğin;

$$\begin{array}{rcl} U & : & \mathbf{Grp} \to \mathbf{K\ddot{u}me} \;\; \text{(Grup yapısı unutuluyor)} \\ U & : & \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Ab} \;\; \text{(Çarpım yapısı unutuluyor)} \\ U & : & \mathbf{Halka}_1 \to \mathbf{Ab} \;\; \text{(Çarpım yapısı unutuluyor)} \end{array}$$

unutulabilir funktorlardır.

Tanım 1.37 G bir grup ve G', G nin komütator normal altgrubu olsun.

Her $f : G \to H$ grup homomorfizmini

$$F(f)\mid_{G'} : G' \to H'$$

grup morfizmine indirgemektedir. Bu durumda

$$F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$$

funktoru

$$F(G) = G' \text{ ve } F(f) = g$$

şeklinde tanımlanır. Bu funktora **komütatör funktor** denir.

Tanım 1.38

$$F : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

funktorunu tanımlayalım. G bir grup olsun.

$$F(G) = G/G'$$

tanımlayalım. Burada G', komütatör altgrup olup

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \ (x, y \in G)$$

şeklinde elemanlar tarafından üretilen bir altgruptur. Bununla birlikte G' ayrıca bir normal altgruptur. O halde

$$F(G) = G/G'$$

bölüm grubunu oluşturabiliriz. Bu yapı verilen bir grubun abelyenleştirilmesidir.

$f : G \to H$ grup homomorfizmi ise

$$\begin{array}{rccc} F(f): & F(G) & \longrightarrow & F(H) \\ & \| & & \| \\ & G/G' & \longrightarrow & H/H' \\ & G'g & \longmapsto & H'f(g) \end{array}$$

grup homomorfizmi olup $F(f)$ homomorfizmi iyi tanımlıdır. Şöyleki;

$$\begin{aligned} G'g_1 = G'g_2 &\Rightarrow g_1g_2^{-1} \in G' \\ &\Rightarrow f(g_1g_2^{-1}) \in H' \\ &\Rightarrow f(g_1)f(g_2)^{-1} \in H' \\ &\Leftrightarrow f(g_1) \in H'f(g_2) \\ &\Leftrightarrow H'f(g_1) = H'f(g_2) \end{aligned}$$

dir. Bununla birlikte

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q_G"] \arrow[d, "f"'] & G/G' \arrow[d, "F(f)"] \\ H \arrow[r, "q_H"'] & H/H' \end{tikzcd}$$

Şekil 1.8

diyagramı değişmelidir. Bu funktora **Abelyenleşme funktoru** denir.

Tanım 1.39 ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) funktoruna **Kontravaryant funktordur** $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{C}^{op}$,F,$\mathcal{D}$) bir funktordur (veya denk olan ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}^{op}$) bir funktor). Diğer bir deyişle; $\mathcal{C}$ nin her A objesi için $F(A)$, $\mathcal{D}$ nin bir objesi $f : A \to B$, $\mathcal{C}$ nin morfizmi ise $Ff : FB \to FA$ öyleki

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \text{ ve } F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Tanım 1.40 A, B, C kategori olsun.

$$F : A \times B \to C$$

funktoru **iki değişmeli** (bifunktor, veya ikili) **funktor** denir.

Tanım 1.41 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ iki funktor olsun.

$$\eta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$$

fonksiyonu;

(i) $\mathcal{C}$ nin her A objesi için

$$\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

morfizmi $\mathcal{D}$ nin morfizmi;

(ii) $\mathcal{C}$ nin her $f : A_1 \to A_2$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "f"'] & F(A_1) \arrow[r, "\eta_{A_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A_1) \arrow[d, "G(f)"] \\ A_2 & F(A_2) \arrow[r, "\eta_{A_2}"'] & G(A_2) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.9

diyagramı değişmeli; şartları sağlanıyorsa (F, η, G) (veya $\eta : F \to G$) üçlüsüne **doğal transformasyon** denir.

Bu son şart "doğallık şartı" denir. Yani η_A; $\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmleri üzerinde F ve G nin etkisiyle $F(A)$ dan $G(A)$ ya giden bir yoldur.

Tanım 1.42 $\eta : F \to G$ doğal transformasyon olsun. Her A objesi için

$$\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

izomorfizm ise η ye **doğal izomorfizm** denir. Bu durumda

$$\eta_A^{-1} : G(A) \longrightarrow F(A)$$

ters izomorfizmi var olup $\eta^{-1} : G \to F$ doğal transformasyonu tanımlanır ve

$$\eta : F \cong G$$

ile gösterilir.

Örnek 1.43

$$\eta : F \longrightarrow I$$

doğal transformasyonu verilsin. Her $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$ için

$$\begin{array}{cccc} \eta_M : & F(M) & \longrightarrow & I(M) \\ & \| & & \| \\ & \mathrm{Hom}(R, M) & \longrightarrow & M \\ & Q & \longmapsto & Q(1) \end{array}$$

tanımlayalım. Bu durumda η_M bir doğal izomorfizmdir.

$\eta^{-1} : I \to F$ funktorunu tanımlayalım. Her M, R-modülü için

$$\begin{array}{cccc} \eta_M^{-1} : & I(M) & \longrightarrow & F(M) \\ & \| & & \| \\ & M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R, M) \\ & m & \longmapsto & Q \end{array}$$

dir.

$$\eta\eta^{-1} = I_M \text{ ve } \eta^{-1}\eta = I_{F(M)}$$

olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için

$$\eta\eta^{-1}(m) = \eta(\eta^{-1}(m)) = \eta(Q(r)m) = Q(1)m = 1 \cdot m = m$$

olup $\eta\eta^{-1} = I_M$ dir.

Benzer şekilde

$$\eta^{-1}\eta(Q) = \eta^{-1}(\eta(Q)) = \eta^{-1}(rQ(1)) = \eta^{-1}(Q(r \cdot 1)) = \eta^{-1}(Q(r)) = Q$$

olup $\eta\eta^{-1} = I_{F(M)}$ dir.

Tanım 1.44 (Adjoint Funktor)

F sabit bir cisim olsun.

$$\text{Küme} \underset{U}{\overset{V}{\rightleftarrows}} Vekt_F$$

funktorlarını alalım. W vektör uzayı ise $U(W)$ bütün vektörlerin kümesi olup U forgetful funktordur. X herhangi bir küme ise $V(X)$, X tarafından üretilen vektör uzayıdır. Yani, $V(X)$ in herhangi elemanı $k_i \in F$ ve $x_i \in X$ olmak üzere $\sum k_i x_i$ şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} g : X & \rightarrow & U(W) \\ x_i & \mapsto & g(x_i) \end{array}$$

fonksiyonu

$$\begin{array}{rcl} f : V(X) & \rightarrow & W \\ \sum r_i x_i & \mapsto & \sum r_i g(x_i) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V(X) \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

Şekil 1.10

şeklinde biricik lineer dönüşüme genişletilebilir. Bu durum

$$\varphi : (V(X), W) \cong \text{ Küme}(X, U(W))$$

şeklinde izomorfizme dönüşür.

Yani,

$$\psi : \text{Fonk}(X, U(W)) \rightarrow \text{LinDön}(V(X), W)$$

fonksiyonu

$$\psi(g) = f : V(X) \rightarrow W$$

olup

$$f(\sum r_i x_i) = \sum r_i(g_i(x_i))$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun tersi

$$\begin{aligned} \varphi : \text{LinDön}(V(X), W) \quad &\rightarrow \quad \text{Fonk}(X, U(W)) \\ f \quad &\mapsto \quad f\mid_X \end{aligned}$$

olup

$$\varphi(f) = f\mid_X$$

f nin X e kısıtlanışıdır. Bu bijeksiyon $\varphi = \varphi_{X,W}$ her X ve W için tanımlanır. Bunun anlamı,

$$\varphi : Vekt(V(-), -) \rightarrow Fonk(-, U(-))$$

funktorların bir doğal transformasyonunun bir parçası $\varphi_{X,W}$ olmaktadır. Bu yüzden X ve W için ayrı ayrı doğallık şartı sağlanmalıdır.

X için doğallık; her $h : X' \rightarrow X$ fonksiyonu için

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "g"'] & U(X) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.11

diyagram değişmeli olmasıdır. Buradan $gh = gh^*$ dir. W için doğallık şartı benzer şekilde verilir.

Tanım 1.45 $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ iki kategori ve

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{C}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

funktorlar olsun. Her $A \in Ob\mathcal{C}_1$ ve $B \in Ob\mathcal{C}_2$ objeleri için

$$\varphi = \varphi_{A,B} : Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \cong Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B))$$

şeklinde bijeksiyon vardır öyle ki A ve B de doğal ise (G, F) ikilisine **adjoint ikili** denir. Burada

$$Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B)$$

kümesi ikili funktor olarak gözönüne alınabilir. Şöyle ki

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_1^{op} \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2^{op} \times \mathcal{C}_2 & \to & \text{Küme} \\ (A, B) \mapsto (F \times 1)(A, B) & \mapsto & Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Benzer şekilde,

$$Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B))$$

kümesi

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2^{op} \to \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1^{op} & \to & \text{Küme} \\ (A, B) \mapsto (1 \times G)(A, B) & \mapsto & Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece φ bijectionının doğallığının anlamı:

$\forall k : B \to B' \in Mor(\mathcal{C}_2)$ için

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "Mor(F(A){,}k)=k*"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)) \arrow[d, "(Gk)_*"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g \arrow[d, mapsto] \\ Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B')) & k \circ f \arrow[r, mapsto] & G(k) \circ g \end{tikzcd}$$

Şekil 1.12

$f : F(A) \to B$ ve $g : A \to G(B)$, $G(k) : G(B) \to G(B')$

$\forall h : A' \to A \in Mor_{\mathcal{C}_1}$ için

$$\begin{tikzcd}
Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A),B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "(Fh)^*"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A,G(B)) \arrow[d, "h^*=Mor_{\mathcal{C}_1}(k,GB)"] \\
Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A'),B) \arrow[r, "\varphi_{A',B}"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A',G(B))
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.13

diyagramı değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g \arrow[d, mapsto] \\
f \circ F(h) \arrow[r, mapsto] & g \circ h
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.14

$F(h) : F(A') \to F(A)$ dır.

Hatırlatma 1.46 Bazı kategorilerde, örneğin **Ab** Abelian grupların kategorisinde, her $Ab(A,B)$ morfizmlerin (yani homomorfizmlerin) kümesi, bir Abelian grup yapısına sahiptir. Bu yapı

$$\begin{aligned}
Ab(A,B) \times Ab(A,B) &\to Ab(A,C) \\
(f,g) &\mapsto g \circ f
\end{aligned}$$

işlemi ile verilir. Bu çarpım bilinendir. Yani,

$$\begin{aligned}
g \circ (f_1 + f_2) &= g \circ f_1 + g \circ f_2 \\
(g_1 + g_2) \circ f &= g_1 \circ f + g_2 \circ f
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.47 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

(1) $\mathcal{C}(A,B)$; Abelian grup

(2) Her kompozisyon bi-lineer ise $\mathcal{C}$ ye **Ab-kategori** veya **Öntoplamsal kategori** denir.

Tanım 1.48 $\mathcal{C}$ öntoplamsal kategori olsun.

(1) $\mathcal{C}$ nin bir sıfır objesi var

(2) $\mathcal{C}$ nin herhangi iki objesinin bir çarpımı var

ise $\mathcal{C}$ ye **toplamsal kategori** denir. Diğer bir deyişle;

$\mathcal{C}$ nin bir A objesi için bir tek

$$0 \to A$$

ve bir tek

$$A \to 0$$

morfizmi var ise 0 ilk ve son obje olup 0 sıfır objedir. Böylece $\mathcal{C}(A, B)$ de

$$A \to 0 \to B$$

kompozisyonu $\mathcal{C}(A, B)$ üzerinde Abelian grup yapısı için bir sıfır morfizmdir.

Tanım 1.49 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki toplamsal kategori olsun.

$$H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

toplamsal funktor; $\mathcal{C}$ nin her $A,\ B$ objesi için

$$H_{A;B} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(H(A), H(B))$$

fonksiyonu, Abelian gruplar homomorfizmi yani $\mathcal{C}$ de $f, g : A \to B$ için

$$H(f + g) = H(f) + H(g) : H(A) \to H(B)$$

homomorfizmi $\mathcal{D}$ dedir. Ayrıca

$$H(0) = 0 \quad \text{ve} \quad H(A \sqcup B) \cong H(A) \sqcup H(B)$$

dir.

Tanım 1.50 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

(1) $\mathcal{C}$ toplamsal kategori,

(2) $\mathcal{C}$ de her $f : A \to B$ nin bir kernel ve co-kernel ı var,

(3) $f : A \to B$ monomorfizm ise f nin co-kernel ı kernel dır (yani her monomorfizm bir morfizmin kernel ıdır).

(4) f epimorfizm ise f nin kernel ı co-kernel dır (yani her epimorfizm co-kernel dır).

(5) Her $f : A \to B$ için

$$f = \mu\epsilon$$

olacak şekilde μ; monomorfizmi ve ϵ; epimorfizmi var ise $\mathcal{C}$ ye **Abelian Kategori** denir.

Tanım 1.51 $A,\ B$ Abelyen grup ve $f \in Hom(A, B)$ için f bire-bir homomorfizm ise f ye **monomorfizm**, f örten homomorfizm ise f ye **epimorfizm**, f bire-bir örten homomorfizm ise f ye **izomorfizm** denir.

Tanım 1.52 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ ve $f \in Mor(A, B)$ olsun.

(i) Her $C \in Ob(\mathcal{C})$ ve her

$$C \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$$

morfizmleri için

$$\text{"}f\alpha = f\beta \Rightarrow \alpha = \beta\text{"} \quad \text{(sol sadeleşme)}$$

ise f ye **monomorfizm** denir.

(ii) Her $C \in Ob(\mathcal{C})$ ve her

$$B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} C$$

morfizmleri için

$$\text{"}\alpha f = \beta f \Rightarrow \alpha = \beta\text{"} \quad \text{(sağ sadeleşme)}$$

ise f ye **epimorfizm** denir.

Tanım 1.53 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $X_i,\ (i \in I)$ $\mathcal{C}$ nin objeleri olsun $Y,\ \mathcal{C}$ nin herhangi objesi ve

$$f_i : Y \to X_i$$

herhangi morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} \Pi(X_i) = X \arrow[r, "p_i"] & X_i \quad p_i f = f_i \\ Y \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.15

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$f : Y \to X = \Pi(X_i)$$

morfizmi var ise X objesine X_i lerin bir **çarpımı** denir ve (X, p_i) ile gösterilir.

Örnek 1.54 $\mathcal{C} =_R Mod,\ M_i,\ R-$ modüller
$\prod M_i$ direkt çarpım ve $p_i(m_i) = m_j$ dir.

Tanım 1.55 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $X_i\ (i \in I),\ \mathcal{C}$ nin objeleri olsun. $Y,\ \mathcal{C}$ nin herhangi objesi ve

$$f_i : X_i \to Y$$

herhangi bir morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "f_i"'] & X \arrow[l, "q_i"'] \arrow[dl, dashed, "f"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.16

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$f : X \to Y$$

morfizmi var ise X e X_i lerin **Bileşik Çarpımı** denir ve (X, q_i) ile gösterilir.

Örnek 1.56 $\mathcal{C} =_R Mod,\ M_i,\ R-$ modüller

$$M = \coprod_{i \in I} M_i = \oplus_{i \in I} M_i = \{(m_i) \mid m_i \in M\} = \{(m_1, m_2, \cdots, m_n, 0 \cdots) \mid m_i \in M\}$$

ve

$$\begin{aligned} q_i : M_i &\rightarrow M \\ m_i &\mapsto (0, \cdots, 0, m_i, 0, \cdots, 0) \end{aligned}$$

dır.

Tanım 1.57 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $A,\ B,\ X,\ \mathcal{C}$ nin objeleri ve

$$\theta : A \rightarrow X \text{ ve } \phi : B \rightarrow X$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : Y \rightarrow A \text{ ve } \beta : Y \rightarrow B$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\theta\alpha = \phi\beta$

(ii) Herhangi $g : Z \rightarrow B$ ve $f : Z \rightarrow A$ morfizmleri için $\phi f = \theta g$ olmak üzere

$$\alpha\varepsilon = f \text{ ve } \beta\varepsilon = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Z \rightarrow Y$ morfizmi var.

Bu iki özellik sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin **Pullback** i denir.

Bu tanımı

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Şekil 1.17

değişmeli diyagramlarıyla üretebiliriz. Yani,

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\theta"'] \\
& B \arrow[r, "\phi"] & X
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.18

Örnek 1.58 $\mathcal{C}_R Mod$, A, B, X ler $R-$modüller ise her $(\theta : A \to X, \phi : B \to X)$ ikilisinin bir geri çekmesi vardır.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\
B \arrow[r, "\phi"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \arrow[d, mapsto] \\
b \arrow[r, mapsto] & \phi(b) = \theta(a)
\end{tikzcd}$$

$$Y = \{(a,b) \in A \oplus B \mid \theta(a) = \phi(b)\}$$

Şekil 1.19

tanımlayalım.

$$\alpha : (a,b) \mapsto a \quad \text{ve} \quad \beta : (a,b) \mapsto b$$

Bu durumda Y, $A \oplus B$ nin alt modülüdür ve θ, ϕ $R-$modül homomorfizmidir. Çünkü

$$\phi(rb) = \theta(ra) = r\theta(a) = r\phi(b)$$

Ayrıca

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\
B \arrow[r, "\phi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.20

Herhangi $x \in Z$ için

$$(\phi f)(x) = (\theta g)(x)$$

dir. Buradan

$$\phi(f(x)) = \theta(g(x))$$

olup

$$\begin{aligned} \varepsilon : Z &\rightarrow Y \\ x &\mapsto \varepsilon(x) = (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

tanımlayabiliriz ve

$$\beta\varepsilon = f \quad \text{ve} \quad \alpha\varepsilon = g$$

dir. Çünkü $\forall x \in Z$ için

$$\begin{aligned} (\beta\varepsilon)(x) &= \beta(\varepsilon(x)) = \beta(f(x), g(x)) = f(x) \\ (\alpha\varepsilon)(x) &= \alpha(\varepsilon(x)) = \alpha(f(x), g(x)) = g(x) \end{aligned}$$

dir.

$$\mu : Z \rightarrow Y$$

diğer morfizm ve

$$\beta\mu = f \quad \text{ve} \quad \alpha\mu = g$$

olsun. Fakat

$$\begin{aligned} \mu(x) &= (\beta\mu(x), \alpha\mu(x)) = (f(x), g(x)) = \varepsilon(x) \\ &\Rightarrow \mu = \varepsilon \end{aligned}$$

olup biriciktir.

Tanım 1.59 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $A,\ B,\ X,\ \mathcal{C}$ nin objeleri ve

$$\theta : X \rightarrow A \ \ ve \ \ \phi : X \rightarrow B$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : A \rightarrow Y \ \ ve \ \ \beta : B \rightarrow Y$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\alpha\theta = \beta\phi$

(ii) Herhangi $g : B \to Z$ ve $f : A \to Z$ morfizmleri için $f\phi = g\theta$ olmak üzere

$$\varepsilon\alpha = f \quad ve \quad \varepsilon\beta = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Y \to Z$ morfizmi var.

Bu iki özellik sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin **Pushout** u denir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Şekil 1.21

BÖLÜM 2

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

2 Çaprazlanmış Modül Kavramı

Giriş

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, J.H.L.Whitehead tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, bu yapıyı homotopi grupları ile ilgili çalışmasında incelemiştir. Bu bölümde, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak, bazı örnekleri inceleyeceğiz. Daha sonra, bazı temel özelliklere yer vereceğiz.Daha ayrıntılı bilgiye kaynak olarak kullanılan Yrd. Doç. Dr. Ummuhan Ege'nin *Çaprazlanmış Modüller* konulu master tezinden ulaşılabilir.

2.1 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modül Kavramı

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ifade ederek, grup teorisinden bildiğimiz normal alt grup, iç otomorfizmler grubu, grup genişlemesi, tensör çarpım gibi kavramlar üzerinde çaprazlanmış modül örneklerini inceleyelim.

Tanım 2.1.1

$$\partial : C \longrightarrow G$$

grup homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times C &\longrightarrow C \\ (g, c) &\longmapsto {}^{g}c \end{aligned}$$

G nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \partial({}^{g}c) & = & g\partial(c)g^{-1} \\ \text{ÇM2)} & {}^{\partial c}c' & = & cc'c^{-1} \end{array}$$

şartları sağlanıyor ise C ye bir çaprazlanmış modül denir ve (C, G, ∂) ile gösterilir.

Şimdi, herhangi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını verelim.

Tanım 2.1.2 (C, G, ∂) ve (C', G', ∂') iki çaprazlanmış modül olsun. Her $c \in C$ ve $g \in G$ için

$$\varphi({}^{g}c) = {}^{\psi(g)}\varphi(c)$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1

diyagramı komütatif, yani

$$\psi(\partial(c) = \partial'(\varphi(c))$$

olacak şekilde φ: $C \to C'$, $\psi : G \to G'$ homomorfizmleri varsa

$$(\varphi, \psi) : (C, G, \partial) \longrightarrow (C', G', \partial')$$

morfizmine **çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm** denir.

Örnek 2.1.3 N, G grubunun normal altgrubu olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial : N &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto n \end{aligned}$$

içine (inclusion) homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times N &\longrightarrow N \\ (g, n) &\longmapsto {}^{g}n = gng^{-1} \end{aligned}$$

şeklindeki G nin N üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\text{ÇM1)} \qquad \begin{aligned} \partial({}^{g}n) &= \partial(gng^{-1}) \\ &= \partial(g)\partial(n)\partial(g^{-1}) \\ &= g\partial(n)g^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{ÇM2)} \qquad \begin{aligned} {}^{\partial n}n' &= {}^{n}n' \\ &= nn'n^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.1.4 M, bir $\mathbb{Z}G$-modül olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial = 1 : \quad M &\longrightarrow G \\ m &\longmapsto 1_G \end{aligned}$$

aşikar (trivial) homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\longmapsto {}^{g}m = gm \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \qquad \partial({}^{g}m) &= \partial(gm) \\ &= 1 \\ &= g1g^{-1} \\ &= g\partial(m)g^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \qquad {}^{\partial m}m' &= {}^{1}m' \\ &= 1m' \\ &= m'mm^{-1} \\ &= mm'm^{-1} \qquad (M \text{ abelyan grup}) \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.1.5 K, bir grup ve

$$G = \{f_k : \ f_k : K \longrightarrow K\, ;\ f_k(k^{'}) = kk'k^{-1}\}$$

kümesi K nın iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \partial : \quad K &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto f_k \end{aligned}$$

homomorfizmi

$$\begin{aligned} G \times K &\longrightarrow K \\ (f_k, k') &\longmapsto {}^{(f_k)}k' = kk'k^{-1} \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$
\begin{array}{llcl}
\text{ÇM1)} & \partial((f_k)_{k'}) & = & \partial(kk'k^{-1}) \\
 & & = & \partial(k)\partial(k')\partial(k^{-1}) \\
 & & = & f_k\partial(k')\partial(k)^{-1} \\
 & & = & f_k\partial(k')f_k^{-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
\text{ÇM2)} & \partial k_{k'} & = & (f_k)_{k'} \\
 & & = & kk'k^{-1}
\end{array}
$$

eşitlikleri sağlanır.

2.2 Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Özellikleri

$\partial : C \to G$ herhangi bir çaprazlanmış modül olmak üzere, çaprazlanmış modül kavramının temel bir sonucu olarak aşağıdaki önermeleri verebiliriz.

Önerme2.2.1

$$
\begin{array}{rl}
\partial : & C \longrightarrow G \\
 & c \longmapsto \partial c = g
\end{array}
$$

grupların bir çaprazlanmış modülü olsun.

i) ∂ nin çekirdeği, C nin merkezinin bir alt grubudur.

ii) ∂C, G nin normal alt grubudur.

İspat: i) G nin C üzerine etki fonksiyonu

$$
\begin{array}{rl}
G \times C & \longrightarrow C \\
(g, c) & \longmapsto g_c = gc
\end{array}
$$

ve

$$\text{Çek } \partial = \{a \in C \ \mid \partial(a) = 1_G\}$$

$$Z(C) = \{x \in C \ \mid \ hery \in Cicin, xy = yx \ \}$$

olmak üzere, $a \in$ Çek ∂, $y \in C$ için

$$\begin{aligned} ay &= aya^{-1}a \\ &= (\partial(a)_y)a \quad ((C, G, \partial), \text{ çaprazlanmış modül}) \\ &= 1_y a \quad (a \in \text{Çek } \partial) \\ &= 1ya \\ &= ya \end{aligned}$$

olduğundan Çek $\partial \subset Z(C)$ sağlanır. Ayrıca, $a_1, a_2 \in$Çek∂ için,

$$\partial(a_1 a_2^{-1}) = \partial(a_1)\partial(a_2^{-1}) = \partial(a_1)\partial(a_2)^{-1} = 1$$

olduğundan $a_1 a_2^{-1} \in$Çek ∂ dir. Dolayısıyla, Çek $\partial < Z(C)$ elde edilir.

ii) (C, G, ∂) çaprazlanmış modül olduğundan

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(g_c)$$

eşitliği geçerlidir ve G nin C üzerine etkisinden dolayı $g_c \in C$ dir. Dolayısıyla,

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(g_c) \in \partial(C)$$

elde edilir.

Önerme 2.2.2 $\partial : C \to G$ çaprazlanmış modül ve $\pi_1(\partial) = G/\partial(C)$ olmak üzere, Çek ∂ bir $\pi_1(\partial)$-modül yapısı oluşturur.

İspat: İspat için, $\partial(C)$ nin Çek ∂ üzerine birim (trivially) etki ettiğini göstermek yeterlidir.

Şimdi, $\partial(C)$ nin Çek ∂ üzerine birim etki ettiğini göstermek için, $n \in \partial(C)$, $a \in$Çek ∂ alalım. Bu durumda $n = \partial c$ olacak şekilde en az bir $c \in C$ vardır. Böylece bir önceki önermenin (i) şıkkı gereğince $a \in$ Çek $\partial \subset Z(C)$ olduğundan

$$n_a = \partial c_a = cac^{-1} = a$$

elde ederiz. Dolayısıyla ∂C, Çek ∂ üzerine sıfır etki yapar.

Önerme 2.2 3 $\partial : C \to G$ bir çaprazlanmış modül olsun. C nin abelyanasyonu bir $G/\partial C$-modül yapısına sahiptir.

İspat: İlk olarak abelyanasyonun tanımını hatırlatalım.

$$[C, C] = \left\{cc'c^{-1}(c')^{-1} : \ c, c' \in C\right\}$$

kümesi C nin bir normal alt gurubudur. Dolayısıyla

$$C^{Ab} = C/\left[C, C\right]$$

bölüm grubu oluşturulur. Aynı zamanda, abelyan olan bu bölüm grubuna C *nin abelyanasyonu* denir.

İspat için, bir önceki önermedeki gibi, ∂C nin C^{Ab} üzerine birim etki yaptığını göstermek yeterlidir. $n \in \partial(C)$ ve $\partial c = n$ olmak üzere, herhangi $c' \in C$ için, ∂ çaprazlanmış modül olduğundan

$$n_{c'} = \partial c_{c'} = cc'c^{-1}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla

$$n_{c'(c')^{-1}} \in [C, C]$$

veya bu ifadeye denk olarak

$$n_{(c'[C,C])=c'[C,C]}$$

dir. Böylece ∂C, C^{Ab} üzerine birim etki eder.

Sonuç: $\partial C^{Ab} = \partial C/\left[\partial C, \partial C\right]$ abelyan grubu $G/\partial C$-modül yapısına sahiptir.

2.3 Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Giriş

Bu bölümde, öncelikle cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin tanımı verilerek çeşitli örnekler incelenmiştir. Burada cebirlerin komütatif olması gerekmediğini de belirtelim. Daha sonra bu tanım yardımıyla bazı temel özellikler incelenmiştir.

2.3.1 Çaprazlanmış modül kavramı

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Şimdi, k daha önce söz ettiğimiz, sıfırdan farklı birimi olan komütatif halka olmak üzere k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramının tanımını verelim. Daha sonra ise çeşitli cebirsel yapılar üzerindeki örnekleri inceleyelim.

Tanım 2.3.1.1 R, birimli bir k-cebir olsun.

$$\partial : C \longrightarrow R$$

bir R-cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{lll} R \times C & \longrightarrow C \\ (r,c) & \longmapsto r \cdot c \end{array} \quad ve \quad \begin{array}{lll} C \times R & \longrightarrow C \\ (c,r) & \longmapsto c \cdot r \end{array}$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

$$\begin{array}{llcl} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot c) & = & r\partial(c) \\ & \partial(c \cdot r) & = & \partial(c)r \\ \text{ÇM2)} & \partial c \cdot c' & = & cc' \\ & c \cdot \partial c' & = & cc' \end{array}$$

şartları sağlanıyor ise R üzerinde C cebirine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir.

Şimdi, çaprazlanmış modül kavramını ifade ettikten sonra, iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.3.1.2 (C, R, ∂) ve (C', R', ∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{aligned} \theta(r \cdot c) &= \psi(r) \cdot \theta(c) \\ \theta(c \cdot r) &= \theta(c) \cdot \psi(r) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\psi"'] & R' \end{tikzcd}$$

Şekil 2.2

diyagramı komütatif, yani

$$\partial'\theta(c) = \psi\partial(c)$$

olacak şekilde $\theta : C \to C'$, $\psi : R \to R'$ k-cebir morfizmleri varsa

$$(\theta, \psi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.

O halde, $R = R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, θ bir R-cebir morfizmi olduğundan

$$\theta(r \cdot c) = r\theta(c)$$

dir ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ R & \end{tikzcd}$$

Şekil 2.3

diyagramı komütatif olduğundan, yani

$$\partial'\theta(c) = \partial(c)$$

sağlandığından, θ bir çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

Örnek 2.3.1.3 R bir k-cebiri ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{aligned} \text{iç} : \ I &\longrightarrow R \\ i &\longmapsto i \end{aligned}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{aligned} R \times I &\longrightarrow I \\ (r, i) &\longmapsto r \cdot i = ri \end{aligned}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i) \\ \text{ÇM2)} & \partial i \cdot i' = i \cdot i' = ii' \end{array}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla, $(I, R,$ iç$)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tersine, herhangi bir $\partial : C \rightarrow R$ çaprazlanmış R-modül verildiğinde, $\partial C = I$ nın R de ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 2.3.1.4 M, herhangi bir R-bimodül olsun.

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2) &\longmapsto m_1 m_2 = 0 \end{aligned}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 : M &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto 0(x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi,

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m = rm \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1)} & 0(r \cdot m) = 0(rm) = 0 = r0 = r0(m) \\ \text{ÇM2)} & 0m \cdot m' = 0 \cdot m' = 0m' = 0 = mm' \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Tersine, $\partial : C \rightarrow R$ herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde, Çek ∂ bir $R/\partial C$-modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.3.1.5 K bir k-cebir ve her $k, k' \in K$ için

$$R = \{f_k;\ f_k : K \longrightarrow K\ \ f_k(k^{'}) = kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial :\ & K \longrightarrow R \\ & k \longmapsto f_k \end{aligned}$$

cebir homomorfizmi,

$$\begin{aligned} R \times K &\longrightarrow K \\ (f_k, k') &\longmapsto (f_k) \cdot k' = kk' \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\text{ÇM1)} \qquad \begin{aligned} \partial((f_k) \cdot k') &= \partial(kk') \\ &= \partial(k)\partial(k') \\ &= f_k\partial(k') \end{aligned}$$

$$\text{ÇM2)} \qquad \begin{aligned} \partial k \cdot k' &= (f_k) \cdot k' \\ &= kk' \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

2.4 Çaprazlanmış Modüllerin Tazı Temel Cebirsel Özellikleri

Herhangi bir $\partial : C \rightarrow R$ çaprazlanmış R-modülün tanımını verdikten sonra ∂ nin çekirdeği ve görüntüsü ile ilgili bazı temel özellikleri inceleyelim. Bunlardan yararlanarak oluşturulan modül yapılarını ve bazı cebirsel sonuçları inceleyelim.

Önerme 2.4.1 (C, R, ∂) bir çaprazlanmış R-modül olmak üzere,

i) Çek ∂, C nin bir merkez idealidir ve R üzerinde bir modüldür.

ii) $\partial(C)$, R de bir idealdir. Ayrıca, R nin bu ideali, Çek ∂ üzerine sıfır olarak (trivially) etki eder ve Çek ∂ bir $R/\partial(C)$-modül yapısı oluşturur.

iii) C/C^2 ve $\partial C/\partial C^2$, birer $R/\partial C$-modül yapısı oluştururlar.

İspat: i) Çek ∂ nin C nin ideali olduğu kolayca görülür. Şöyleki; $a \in$Çek ∂ ve $c \in C$ için

$$\partial(ca) = \partial(c)\partial(a) = \partial(c)0 = 0$$

ve

$$\partial(ac) = \partial(a)\partial(c) = 0\partial(c) = 0$$

olduğundan $ca,\ ac \in$Çek ∂ elde edilir. Ayrıca,

$$ac = \partial a \cdot c = 0c = 0 = c0 = c \cdot \partial a = ca$$

olduğundan Çek ∂, C nin merkezindedir.

Şimdi, Çek ∂ nin bir R-modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} R \times \text{Çek } \partial &\longrightarrow \text{Çek } \partial \\ (r, a) &\longmapsto r \cdot a \end{aligned}$$

dönüşümü, R nin C üzerine etki fonksiyonu olan

$$\begin{aligned} R \times C &\longrightarrow C \\ (r, c) &\longmapsto r \cdot c \end{aligned}$$

ile uyumlu olmak üzere, birinci bölümde verdiğimiz etki şartları, her $a \in$Çek$\partial \subset C$ için de geçerli olacağından, Çek ∂ bir R-modül yapısı oluşturur.

ii) $\partial(C)$ nin, R de bir ideal olduğunu göstermek için, $\partial(C)$ nın, R ile çarpım altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(C, R, ∂) çaprazlanmış modül olduğundan,

$$\begin{aligned} R \times C &\longrightarrow C \\ (r, c) &\longmapsto r \cdot c \end{aligned}$$

etki fonksiyonu gereğince, $r \cdot c \in C$ ve $\partial(r \cdot c) \in \partial(C)$ dir. Ayrıca, $\partial c \in \partial(C)$ ve $r \in R$ için,

$$r\partial c = \partial(r \cdot c) \in \partial(C)$$

eşitliği geçerlidir.

Benzer olarak

$$\partial(c)r = \partial(c \cdot r) \in \partial(C)$$

bulunur. Dolayısıyla, $\partial(C)$, R de bir idealdir.

$\partial(C)$ nin Çek ∂ üzerine sıfır etkisi, $a \in$Çek ∂, $\partial c \in \partial C$ için

$$\partial c a = ca = c\partial(a) = c0 = 0$$

ve benzer olarak

$$a\partial c = ac = \partial(a)c = 0c = 0$$

şeklinde görülür. Böylece

$$\begin{aligned} R/\partial C \times \text{Çek } \partial &\longrightarrow \text{Çek } \partial \\ (r+\partial c, a) &\longmapsto (r+\partial c)\cdot a = ra \end{aligned}$$

fonksiyonu yardımıyla Çek ∂ nin bir $R/\partial C$-modül yapısı oluşturduğu görülür. Şöyleki; etki fonksiyonunun tanımı ve Çek ∂ nin bir R-modül olması kullanılarak

$i)$
$$\begin{aligned} (r+\partial c)(a_1+a_2) &= r(a_1+a_2) \\ &= ra_1 + ra_2 \end{aligned}$$

$ii)$
$$\begin{aligned} ((r_1+\partial c)+(r_2+\partial c))a &= ((r_1+r_2)+\partial c)a \\ &= (r_1+r_2)a \\ &= r_1a + r_2a \end{aligned}$$

$iii)$
$$\begin{aligned} ((r_1+\partial c)(r_2+\partial c))a &= (r_1r_2+\partial c)a \\ &= (r_1r_2)a \\ &= (r_1+\partial c)r_2a \\ &= (r_1+\partial c)((r_2+\partial c)a) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

iii) ∂C nin C/C^2 üzerine etkisini inceleyelim. $b, c \in C$ ve $c + C^2 \in C/C^2$, için $x = \partial b \in \partial C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(c+C^2) &= xc + C^2 \\ &= \partial bc + C^2 \\ &= bc + C^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $bc \in C^2$ ve $C^2/C^2 \cong \{\bar{0}\}$ olduğundan bu ifade sıfırı verir. Dolayısıyla,

∂C nin C/C^2 üzerine etkisi sıfırdır. Böylece

$$\begin{aligned} R/\partial C \times C/C^2 &\longrightarrow C/C^2 \\ (r+\partial c, c+C^2) &\longmapsto (r+\partial c)\cdot(c+C^2) = rc+C^2 \end{aligned}$$

fonksiyonu ile

$$\begin{aligned} i)\quad (r+\partial c)(c_1+C^2+c_2+C^2) &= (r+\partial c)((c_1+c_2)+C^2) \\ &= r(c_1+c_2)+C^2 \\ &= (rc_1+rc_2)+C^2 \\ &= rc_1+C^2+rc_2+C^2 \\ &= (r+\partial c)(c_1+C^2)+(r+\partial c)(c_2+C^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\quad ((r_1+\partial c)+(r_2+\partial c))(c+C^2) &= ((r_1+r_2)+\partial c)(c+C^2) \\ &= (r_1+r_2)c+C^2 \\ &= (r_1c+r_2c)+C^2 \\ &= r_1c+C^2+r_2c+C^2 \\ &= (r_1+\partial c)(c+C^2)+(r_2+\partial c)(c+C^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii)\quad ((r_1+\partial c)(r_2+\partial c))(c+C^2) &= ((r_1r_2)+\partial c)(c+C^2) \\ &= (r_1r_2)c+C^2 \\ &= r_1(r_2c)+C^2 \\ &= (r_1+\partial c)(r_2c+C^2) \\ &= (r_1+\partial c)((r_2+\partial c)(c+C^2)) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından, ∂C bir $R/\partial C$-modüldür.

Benzer düşünce ile $\partial C/\partial C^2$ nin $R/\partial C$-modül olduğu gösterilir.

BÖLÜM 3

İLGİLİ KATEGORİ OLARAK ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde ilgili kategorilerin tanımı verilerek çaprazlanmış modüllerin bir ilgili kategori örneği oluşturduğu gösterilecektir.

3.1 İlgili Kategoriler

Tanım 3.1.1 C aşağıdaki şartları sağlayan bir kategori olsun.

1. S (kümeler kategorisi) üzerinde $T(\varnothing) = \{p\}$ (tek elemanlı küme) olacak şekilde bir $\mathbf{T} = (T, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu})$ monadı vardır ve C, S^T ye denktir.($\mathbf{S}^T$ nin objeleri (A, α) ikilileridir. Burada A bir küme ve $\alpha : TA \longrightarrow A$ dır.)

2. $U : C \to S_*$, gruplar kategorisini çarpanlarına ayırır.

3. C deki tüm işlemler sonludur.

4. C deki işlemler için bir Ω üreteçler kümesi vardır ve $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ dır. Ω nın grup yapısıyla ilişkili olarak (grup yapısına benzer olarak) birimlilik, ters ve $+$ işlemlerine sahip olduğunu kabul edebiliriz.

$\Omega_2' = \Omega_2 \backslash \{+\}$

$\Omega_1' = \Omega_1 \backslash \{-\}$

olsun ve kabul edelim ki

$* \in \Omega_2'$ ise $x *^\circ y = y * x$ ile tanımlanan $*^\circ$ da Ω_2' dadır.

5 $* \in \Omega_2'$ ise $a * (b + c) = a * b + a * c$ dir.

6. $w \in \Omega_1'$ ise $w, +$ işlemini koruyan bir homomorfizmdir ve $* \in \Omega_2'$ ise $w(a * b) = w(a) * b$ dir.

7. Ω_2' deki her bir $*$ için $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.

8. Her bir $(\bullet, *) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için

$$(x_1 \bullet x_2) * x_3 = w(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1, (x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

özelliğinde bir w kelimesi vardır. Buradaki her sıralama Ω_2' deki bir işlemi temsil etmektedir.

3.2 İlgili Kategori Olarak Çaprazlanmış Modüller

Gruplardaki çaprazlanmış modüllerin kategorisi olan **CM** nin objeleri (T, G, μ) üçlüleridir. Burada $\mu : T \to G$ bir grup homomorfizmidir ve her $t, t' \in T$ ve $g \in G$ için G, T ye

$$\mu({}^{g}t) = g\mu(t)g^{-1}, {}^{\mu(t)}t' = tt't^{-1}$$

olacak şekilde etki eder.

Çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi, $t \in T, g \in G$ ve $\mu' f = h\mu$ ve $f({}^{g}t) = {}^{h(g)} f(t)$ olmak üzere

$$(f, h) : (T, G, \mu) \to (T', G', \mu')$$

şeklindeki grup homomorfizmlerinin çiftidir. **CM** kategorisi cat^1-gruplarının kategorisi C^1G kategorisine denktir. C^1G nin objeleri (G, d_0, d_1) üçlüleridir. Burada $d_0, d_1 : G \to G$ grup homomorfizmleridir ve

$$d_0d_1 = d_1, d_1d_0 = d_0, [\text{çek}d_0, \text{çek}d_1] = 1 \qquad (1)$$

dir.

cat^1-gruplarının bir morfzmi olan

$$f : (G, d_0, d_1) \to (G', d_0', d_1'), i = 0, 1$$

için $fd_i = d_i'f$ olacak şekilde bir $f : G \to G'$ grup homomorfizmidir.
$\text{çek}d_i = \{d_i(x)x^{-1} : x \in G\}, i = 0, 1$ oluğundan (1) deki özellikler

$$d_0d_1 = d_1, d_1d_0 = d_0, d_0(x)x^{-1}d_1(y)y^{-1} = d_1(y)y^{-1}d_0(x)x^{-1}, x, y \in G$$

ile denktir. Böylece C^1G universal cebirlerin bir kategorisidir. İşlemlerin üreteç kümesi

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \Omega_0 &= \{0\} \\ \Omega_1 &= \{-\} \cup \{d_0, d_1\} \\ \Omega_2 &= \{+\} \end{aligned}$$

dır. Burada $0, -, +$ sırasıyla grubun birimini,tersini ve çarpımını gösterir ve her $x, y \in G$ için aşağıdaki özellikleri sağlar;

$$\begin{aligned} d_o(x+y) &= d_0(x)+d_0(y), d_1(x+y)=d_1(x)+d_1(y), \\ d_0d_1(x) &= d_1(x), d_1d_0(x)=d_0(x), d_0(x)x^{-1}d_1(y)y^{-1}=d_1(y)y^{-1}d_0(x)x^{-1}. \end{aligned}$$

Burada $U : C^1G \rightarrow$*Küme* forgetful funktorunun bir sol adjonti olduğu sonucu elde edilir.

Yukarıdaki C^1G in tanımı bu kategoriyi bir "İlgili Kategori" yapar. **CM**, C^1G ye denk olduğundan **CM** de bir ilgili kategori olduğu bulunur.

BÖLÜM 4

DEĞİŞMELİ CEBİRLER İÇİN AKTÖR ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

4.1 Bir Çaprazlanmış Modülün Aktörü

Bu bölümde, çarpım cebri ile yakından ilgili olan, değişmeli cebirler için aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlayacağız. Daha ayrıntılı bilgiye kaynak olarak kullanılan Yrd. Doç. Dr. Ummuhan Ege'nin *Çarpım Cebri ve Çaprazlanmış Modüller* konulu doktora tezinden ulaşılabilir.

Tanım 4.1.1 (C, R, μ), bir çaprazlanmış modül olsun. Her $r \in R$ ve $c \in C$ için,

i) $f \in \mathcal{M}(C)$ ve $\phi \in \mathcal{M}(R)$

ii)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "\phi"] \\ C \arrow[r, "\mu"'] & R \end{tikzcd}$$

Şekil 4.1

diyagramı değişmeli yani, $\phi\mu = \mu f$ ve

iii) $f(r \cdot c) = r \cdot f(c) = \phi(r) \cdot c$

şartları sağlanıyorsa,

$$(f, \phi) : (C, R, \mu) \longrightarrow (C, R, \mu)$$

dönüşümüne, (C, R, μ) **çaprazlanmış modülün çarpanı** denir ve bu özellikteki (f, ϕ) ikililerinin oluşturduğu küme $\mathcal{M}(C, R, \mu)$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.2 $\mathcal{M}(C, R, \mu)$ kümesi, aşağıda tanımlanan işlemlerle birlikte bir **k**-cebir yapısı oluşturur.

$+)$ $(f_1, \phi_1) + (f_2, \phi_2) = (f_1 + f_2, \phi_1 + \phi_2)$

$\cdot)$ $k(f, \phi) = (kf, k\phi)$

$\circ)$ $(f_1, \phi_1) \circ (f_2, \phi_2) = (f_1 \circ f_2, \phi_1 \circ \phi_2) = (f_1 f_2, \phi_1 \phi_2)$

İspat: $(f,\phi),(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2)\in\mathcal{M}(C,R,\mu)$ ve $k\in\mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{k}\times\mathcal{M}(C,R,\mu) & \longrightarrow & \mathcal{M}(C,R,\mu)\\ (k,(f,\phi)) & \longmapsto & k\cdot(f,\phi)=k(f,\phi)\end{array}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} i)\quad k((f_1,\phi_1)+(f_2,\phi_2)) &= k(f_1+f_2,\phi_1+\phi_2)\\ &= (k(f_1+f_2),k(\phi_1+\phi_2))\\ &= (kf_1+kf_2,k\phi_1+k\phi_2)\\ &= k(f_1,\phi_1)+k(f_2,\phi_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\quad (k_1+k_2)(f,\phi) &= ((k_1+k_2)f,(k_1+k_2)\phi)\\ &= (k_1f+k_2f,k_1\phi+k_2\phi)\\ &= (k_1f,k_1\phi)+(k_2f,k_2\phi)\\ &= k_1(f,\phi)+k_2(f,\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii)\quad (k_1k_2)(f,\phi) &= (k_1k_2f,k_1k_2\phi)\\ &= k_1(k_2f,k_2\phi)\\ &= k_1(k_2(f,\phi))\end{aligned}$$

olduğundan $(\mathcal{M}(C,R,\mu),+,\cdot,(\circ))$ dörtlüsü bir $\mathbf{k}$-modül yapısı oluşturur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} iv)\quad k((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)) &= k(f_1f_2,\phi_1\phi_2)\\ &= (k(f_1f_2),k(\phi_1\phi_2))\\ &= ((kf_1)f_2,(k\phi_1)\phi_2)\\ &= (kf_1,k\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)\\ &= (k(f_1,\phi_1))\circ(f_2,\phi_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f_1,\phi_1)\circ(k(f_2,\phi_2)) &= (f_1,\phi_1)\circ(kf_2,k\phi_2)\\ &= (f_1(kf_2),\phi_1(k\phi_2))\\ &= (k\left(f_1f_2\right),k\left(\phi_1\phi_2\right))\\ &= k\left(f_1f_2,\phi_1\phi_2\right)\\ &= k\left((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)\right)\end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{M}(C,R,\mu)$, bir $\mathbf{k}$-cebirdir.

(T,G,∂) gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül olmak üzere, $\chi:G\longrightarrow T$ fonksiyonu $\chi(g_1g_2)=\chi(g_1)g_1\cdot\chi(g_2)$ eşitliğini sağlıyorsa χ ye derivasyon denir. Bütün derivasyonların kümesi $Der(G,T)$ ile gösterilir. Herbir χ derivasyonu için

$$\begin{array}{rlcrl} \sigma : G \longrightarrow & G & \qquad & \theta : T \longrightarrow & T \\ g \longmapsto & \partial\chi(g)g & & t \longmapsto & \chi\partial(t)t \end{array}$$

endomorfizmleri tanımlıdır. $(\chi_1 + \chi_2)(g) = \chi_1\sigma_{\chi_2}(g)\chi_2(g)$ şeklinde tanımlı işlemle birlikte $Der(G,T)$ bir yarı grup oluşturur. Whitehead bu grubun birimlerinin kümesiyle bir grup tanımlamıştır. Bu gruba Whitehead grubu denir. Bu grup yardımıyla Norrie de aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Cebir üzerinde aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlamada ise aşağıdaki küme önemli yer tutar.

Tanım 4.1.3 (C, R, μ) bir çaprazlanmış modül olmak üzere, her $r_1, r_2 \in R$ için

$$d(r_1r_2) = r_1 \cdot d(r_2) = r_2 \cdot d\,(r_1)$$

şartını sağlayan $d : R \longrightarrow C$, **k**-lineer dönüşümlerinin kümesi $\mathcal{U}(R, C)$ ile gösterilir. Bu küme üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlıdır.

$+)\quad (d_1 + d_2)(r) = d_1(r) + d_2(r)$

$\cdot)\quad (kd)(r) = k\,(d(r))$

$\circ)\quad (d_1 \circ d_2)(r) = d_1\mu d_2(r)$

Önerme 4.1.4 $\sigma(= \sigma_d) : R \longrightarrow R$ ve $\theta(= \theta_d) : C \longrightarrow C$ olmak üzere, herbir $d \in \mathcal{U}(R, C)$ dönüşümü ile tanımlı

$$\sigma(r) = \mu d(r) \qquad \text{ve} \qquad \theta(c) = d\mu(c)$$

dönüşümleri sırasıyla R ve C nin çarpanlarıdır.

İspat $r_1, r_2 \in R$ ve $c_1, c_2 \in C$ için,

$$\begin{aligned} \sigma(r_1r_2) &= \mu d(r_1r_2) \\ &= \mu(r_1 \cdot d(r_2)) \\ &= r_1\mu(d(r_2)) \\ &= r_1\sigma(r_2) \\ &= r_1 \cdot \sigma(r_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(c_1c_2) &= d\mu(c_1c_2) \\
&= d(\mu(c_1)\mu(c_2)) \\
&= \mu(c_1)\cdot d\mu(c_2) \\
&= c_1 d\mu(c_2) \\
&= c_1\theta(c_2) \\
&= c_1\cdot\theta(c_2)
\end{aligned}$$

Önerme 4.1.5 σ_d ve θ_d dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlar.

i)$\theta_d d = d\sigma_d$

ii)

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta_d"'] & R \arrow[d, "\sigma_d"] \\
C \arrow[r, "\mu"'] & R
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.2

diyagramı değişmeli yani,

$$\sigma_d\mu = \mu\theta_d$$

iii) $(\theta_d, \sigma_d) \in \mathcal{M}(C, R, \mu)$

İspat Her $r \in R$ ve $c \in C$ için,

i) $\theta_d d(r) = (d\mu)d(r) = d(\mu d(r)) = d\sigma_d(r)$

ii) $\sigma_d\mu(c) = (\mu d)\mu(c) = \mu(d\mu(c)) = \mu\theta_d(c)$

iii)
$$\begin{aligned}
\theta_d(r\cdot c) &= d\mu(r\cdot c) \\
&= d(r\mu(c)) \\
&= r\cdot d\mu(c) \\
&= r\cdot\theta_d(c)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından $(\theta_d, \sigma_d) \in \mathcal{M}(C, R, \mu)$ olur.

Önerme 4.1.6 $d_i \in \mathcal{U}(R, C), \sigma_{d_i} \in \mathcal{M}(R)$ ve $\theta_{d_i} \in \mathcal{M}(C)$ $(i = 1, 2)$ ise

i) $d = d_1 + d_2$ ise $\sigma_d = \sigma_{d_1} + \sigma_{d_2}$ ve $\theta_d = \theta_{d_1} + \theta_{d_2}$,

ii) $d = kd_1$ ise $\sigma_d = k\sigma_{d_1}$ ve $\theta_d = k\theta_{d_1}$,

iii) $d = (d_1 \circ d_2)$ ise $\sigma_d = (\sigma_{d_1} \circ \sigma_{d_2})$ ve $\theta_d = (\theta_{d_1} \circ \theta_{d_2})$

dir.

İspat

i) $d = d_1 + d_2$ ise,

$$\begin{aligned}
\sigma_d(r) &= \mu(d_1 + d_2)(r) \\
&= \mu(d_1(r) + d_2(r)) \\
&= \mu(d_1(r)) + \mu(d_2(r)) \\
&= \sigma_{d_1}(r) + \sigma_{d_2}(r)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\theta_d(c) = \theta_{d_1}(c) + \theta_{d_2}(c)$ olur.

ii) $d = kd_1$ ise,

$$\begin{aligned}
\sigma_d(r) &= \sigma_{kd_1}(r) \\
&= \mu(kd_1)(r) \\
&= \mu(k(d_1(r)) \\
&= k\mu(d_1(r)) \\
&= k\sigma_{d_1}(r)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\theta_d(c) = k\theta_{d_1}(c)$ olur.

iii) $d = (d_1 \circ d_2)$ ise,

$$\begin{aligned}
\sigma_d(r) &= \sigma_{(d_1 \circ d_2)}(r) \\
&= \mu(d_1 \circ d_2)(r) \\
&= \mu(d_1 \mu d_2)(r) \\
&= \mu d_1(\mu d_2(r)) \\
&= \sigma_{d_1}(\mu d_2(r)) \\
&= \sigma_{d_1}(\sigma_{d_2}(r)) \\
&= (\sigma_{d_1} \circ \sigma_{d_2})(r)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\theta_d(c) = (\theta_{d_1} \circ \theta_{d_2})(c)$ olur.

Önerme 4.1.7 $\mathcal{U}(R, C)$ kümesi,

$+)$ $(d_1 + d_2)(r) = d_1(r) + d_2(r)$

$\cdot)$ $(kd)(r) = kd(r)$

$\circ)$ $(d_1 \circ d_2)(r) = d_1 \mu d_2(r) = d_1 \sigma_{d_2}(r) = \theta_{d_1} d_2(r)$

işlemleriyle birlikte bir **k**-cebir yapısı oluşturur.

İspat $d_1, d_2 \in \mathcal{U}(R,C)$ için,

$$\begin{aligned}(d_1 \circ d_2)(r_1 r_2) &= d_1 \mu d_2(r_1 r_2)\\ &= d_1 \mu(r_1 \cdot d_2(r_2))\\ &= d_1(r_1 \mu d_2(r_2))\\ &= r_1 \cdot (d_1 \mu d_2(r_2))\\ &= r_1 \cdot (d_1 \circ d_2)(r_2)\end{aligned}$$

olduğundan $(d_1 \circ d_2) \in \mathcal{U}(R,C)$ elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{k} \times \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{U}(R,C)\\ (k,d) & \longmapsto & kd\end{array}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} i)\quad k(d_1+d_2)(r) &= k(d_1(r)+d_2(r))\\ &= (kd_1)(r) + (kd_2)(r)\\ &= (kd_1+kd_2)(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\quad (k_1+k_2)d(r) &= k_1 d(r) + k_2 d(r)\\ iii)\quad (k_1 k_2)d(r) &= k_1(k_2 d)(r)\\ iv)\quad k(d_1 \circ d_2)(r) &= k(d_1 \mu d_2)(r)\\ &= kd_1(\mu d_2)(r)\\ &= ((kd_1)\circ d_2)(r)\\ &= d_1 \circ (kd_2)(r)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 4.1.8

$$\begin{array}{rccc}\Gamma: & \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{M}(R)\\ & d & \longmapsto & \sigma_d = \mu d\end{array} \qquad \text{ve} \qquad \begin{array}{rccc}\Phi: & \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{M}(C)\\ & d & \longmapsto & \theta_d = d\mu\end{array}$$

dönüşümleri cebir homomorfizmleridir.

Yardımcı Teorem 4.1.9

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}(C,R,\mu) \times \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{U}(R,C)\\ ((\alpha,\phi),d) & \longmapsto & \alpha d\end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, $\mathcal{M}(C,R,\mu)$ nin $\mathcal{U}(R,C)$ kümesi üzerine etkisidir.

İspat Tanımda belirtilen etki aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \alpha d(r_1 r_2) &= \alpha(r_1 \cdot d(r_2)) \\ &= d_1\mu(r_1 \cdot d(r_2)) \\ &= d_1(r_1 \mu d(r_2)) \\ &= r_1 \cdot d_1 \mu d(r_2) \\ &= r_1 \cdot \alpha d(r_2) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha d \in \mathcal{U}(R,C)$ olur.

$i)$ $$\begin{aligned} k((\alpha,\phi)\cdot d) &= k(\alpha d) \\ &= (k\alpha)d \\ &= (k\alpha, k\phi)\cdot d \\ &= (k(\alpha,\phi))\cdot d \end{aligned}$$

$ii)$ $$\begin{aligned} (\alpha,\phi)\cdot(d_1+d_2) &= \alpha(d_1+d_2) \\ &= \alpha d_1 + \alpha d_2 \\ &= (\alpha,\phi)\cdot d_1 + (\alpha,\phi)\cdot d_2 \end{aligned}$$

$iii)$ $$\begin{aligned} ((\alpha,\phi)+(\alpha^{'},\phi^{'}))\cdot d &= (\alpha+\alpha^{'},\phi+\phi^{'})\cdot d \\ &= (\alpha+\alpha^{'})d \\ &= \alpha d + \alpha^{'} d \\ &= (\alpha,\phi)\cdot d + (\alpha^{'},\phi^{'})\cdot d \end{aligned}$$

$iv)$ $$\begin{aligned} (\alpha,\phi)\cdot(d_1 \circ d_2) &= (\alpha,\phi)\cdot d_1\mu d_2 \\ &= \alpha(d_1 \mu d_2) \\ &= ((\alpha d_1)\circ d_2) \\ &= (((\alpha,\phi)\cdot d_1)\circ d_2) \end{aligned}$$

$v)$ $$\begin{aligned} ((\alpha,\phi)\circ(\alpha^{'},\phi^{'}))\cdot d &= (\alpha\alpha^{'},\phi\phi^{'})\cdot d \\ &= (\alpha\alpha^{'})d \\ &= \alpha(\alpha^{'}d) \\ &= (\alpha,\phi)\cdot(\alpha^{'}d) \\ &= (\alpha,\phi)\cdot((\alpha^{'},\phi^{'})\cdot d) \end{aligned}$$

Teorem 4.1.10

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \ \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{M}(C,R,\mu) \\ d & \longmapsto & (\theta_d, \sigma_d) = (d\mu, \mu d) \end{array}$$

dönüşümü bir **k**-cebir homomorfizmi olup, yukarıdaki etki ile birlikte $(\mathcal{U}(R,C), \mathcal{M}(C,R,\mu), \Delta)$ üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

İspat $(\alpha, \phi) \in \mathcal{M}(C,R,\mu)$, $d \in \mathcal{U}(R,C)$ için,

$$\begin{array}{rrcl} \text{ÇM1)} & \Delta((\alpha,\phi)\cdot d) & = & \Delta(\alpha d) \\ & & = & (\theta_{\alpha d}, \sigma_{\alpha d}) \\ & & = & ((\alpha d)\mu, \mu(\alpha d)) \\ & & = & (\alpha d\mu, \phi\mu d) \\ & & = & (\alpha,\phi)\circ(d\mu,\mu d) \\ & & = & (\alpha,\phi)\circ(\theta_d,\sigma_d) \\ & & = & (\alpha,\phi)\circ\Delta(d) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{ÇM2)} & \Delta(d_1)\cdot d_2 & = & (\theta_{d_1}, \sigma_{d_1})\cdot d_2 \\ & & = & \theta_{d_1} d_2 \\ & & = & d_1\mu d_2 \\ & & = & d_1 \circ d_2 \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Tanım 4.1.11 Teorem 4.2.1.10 da verilen $(\mathcal{U}(R,C), \mathcal{M}(C,R,\mu), \Delta)$ çaprazlanmış modülüne, (C,R,μ) nin **aktör çaprazlanmış modülü** denir ve $\mathcal{A}(C,R,\mu)$ ile gösterilir.

4.2 Aktör Çaprazlanmış Modül Örnekleri

1. I, R de ideal olmak üzere $i : I \longrightarrow R$ içine dönüşümü

$$\begin{array}{rcl} R\times I & \longrightarrow & I \\ (r,i) & \longmapsto & r\cdot i = ri \end{array}$$

etkisi ile birlikte (I,R,i) çaprazlanmış modülünü oluşturur.

$$\chi = \{ f \in \mathcal{M}(R) \mid f\mid_I \in \mathcal{M}(I)\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \Sigma : & \mathcal{M}(I,R,i) & \longrightarrow \chi & \\ & (\alpha,\phi) & \longmapsto \phi & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \Phi : & \chi & \longrightarrow \mathcal{M}(I,R,i) \\ & \phi & \longmapsto (f\mid_I, f) \end{array}$$

homomorfizmleri için

$$\Sigma\Phi = Id_{\chi} \qquad \Phi\Sigma = Id_{\mathcal{M}(I,R,i)}$$

olur. Böylece

$$\mathcal{M}(I,R,i) \cong \chi$$

olur. O halde,

$$\mathcal{A}(I,R,i) = (\mathcal{U}(R,I),\chi,\Delta)$$

elde edilir.

2. Örnek 1'de özel olarak $I = 0$ ise

$$\mathcal{A}(0,R,i) = (\mathcal{U}(R,0),\mathcal{M}(R),\Delta) = (0,\mathcal{M}(R),i)$$

ve

$$I = Rise\mathcal{A}(R,R,Id) = (\mathcal{U}(R,R),\mathcal{M}(R),\Delta) = (\mathcal{M}(R),\mathcal{M}(R),Id)$$

olur.

BÖLÜM 5

İLGİLİ KATEGORİLERDE AKTÖRLER

5.1 İlgili Kategorilerde Aktörler

Tanım 5.1.1 $\mathcal{C}$ işlemlerin kümesi olan Ω ve özelliklerin kümesi olan $\mathbb{E}$ ile birlikte bir **gruplar kategorisi** olsun. Öyle ki $\mathbb{E}$ grup aksiyomlarını ve aşağıdaki özellikleri sağlasın.

Ω_i, Ω daki $i-li$ işlemlerin kümesi olmak üzere;

(a) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$,

(b) Grup işlemleri (toplamsal yazılırsa:$0, -, +$) sırasıyla Ω_0, Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır.

$\Omega_2' = \Omega_2 \backslash \{+\}$, $\Omega_1' = \Omega_1 \backslash \{-\}$ olsun ve $* \in \Omega_2$ ise Ω_2', $x *^0 y = y * x$ ile tanımlı $*^0$ı içerir. Dahası $\Omega_0 = \{0\}$ dır.

(c) Her bir $* \in \Omega_2'$ için $\mathbb{E}$, $x * (y + z) = x * y + x * z$ birimini içerir.

(d) Her bir $w \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2$ için $\mathbb{E}$,

$w(x + y) = w(x) + w(y)$ ve $w(x) * y = w(x * y)$ özelliklerini içerir.

C, $\mathcal{C}$ nin bir objesi ve $x_1, x_2, x_3 \in C$ olsun;

Aksiyom 1 Her bir $* \in \Omega_2'$ için $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.

Aksiyom 2 Her bir $(*, \overline{*}) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için;

$$(x_1 * x_2)\overline{*}x_3 = W(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1, (x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

olacak şekilde bir W kelimesi vardır. Burada her bir çarpım Ω_2' de bir işlemi temsil etmektedir.

Aksiyom2 nin sağ tarafını $W(x_1, x_2; x_3; *, \overline{*})$ olarak yazabiliriz. Aksiyom1 ve Aksiyom 2 yi sağlayan işlemlerle birlikte gruplar kategorisine Orzech tarafından ilgili kategori adı verilmiştir.

Her $* \in \Omega_2'$, $x, y, x, t \in C$, $C \in \mathcal{C}$ için

$$\begin{aligned}(x+y)*(z+t) &= x*z+x*t+y*z+y*t \\ &= x*z+y*z+x*t+y*t\end{aligned}$$

eşitliklerinden $x*t+y*z = y*z+x*t$ elde edilir.

$\mathbb{E}_G$, $\mathbb{E}$ nin **(c)**, **(d)** özelliklerini ve grup aksiyomlarını sağlayan (özelliklerin) alt kümesi olsun. $\mathcal{C}_G$ ile ise bahhsedilen işlemli grupların kategorisi gösterilecektir. Buradan $\mathbb{E}_G \hookrightarrow \mathbb{E}$, $\mathcal{C} = (\Omega, \mathbb{E})$, $\mathcal{C}_G = (\Omega, \mathbb{E}_G)$ ve $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_G$ tam içine funktoru vardır.

Çarpımın $*$ işlemiyle gösterildiği birleşimli cebirlerde $\Omega_2' = \{*, *^0\}$ dır.

Lie Cebirler için $\Omega_2' = ([\,], [\,]^0)$ olarak alınır. (Burada $[a,b]^0 = [b,a] = -[a,b]$ dir.) Bu cebirin ilgili kategori olduğunu göstermek kolaydır. Gruplar örneğinde $\Omega_2' = \varnothing$ dir. Orzech'in belirttiği gibi Jordan Cebirleri Aksiyom 2 yi sağlamaz.

Tanım 5.1.2 $C \in \mathcal{C}$ olsun. C nin bir alt objesi bir morfizmin çekirdeği ise ideal olarak isimlendirilir.

Teorem 5.1.3 A, $\mathcal{C}$ de B nin bir alt objesi olsun. Bu durumda A, B nin bir idealidir ancak ve ancak;

(i) A, B nin bir normal altgrubudur.

(ii) Her $a \in A$, $b \in B$ ve $* \in \Omega_2'$ için $a * b \in A$ dır.

Tanım 5.1.4 A, $B \in \mathcal{C}$ olsun. B nin A tarafından genişlemesi p örten ve i, p nin çekirdeği olmak üzere

$$\textbf{(1)}\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

dizisidir.

Genişleme, $ps = 1_B$ olacak şekilde bir $s : B \to E$ varsa *splittir.*

Tanım 5.1.5 B nin A tarafından split genişlemesine A üzerinde bir $B-$*structure* denir.

A, $B \in \mathcal{C}$ ve her bir $* \in \Omega_2$ için $f_* : B \times A \to A$ dönüşümlerinin kümesi varsa "A nın üzerinde B nin etkilerinin kümesi vardır" denir.

$B - structure, B$ nin A üzerine etkilerinin kümesini verir. Bu etkiler $\mathcal{C}$ de işlemlere karşılık gelmektedir.

(1) bir split genişleme ise $b \in B,\ a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$\textbf{(2)}\ b.a = s(b) + a - s(b),$$
$$\textbf{(3)}\ b * a = s(b) * a \quad \text{olur.}$$

(2) ve **(3)** e B nin A üzerinde üretilmiş etkileri denir.

A bir singüler obje olduğunda kabulümüz gereği etkiler split olmaya genişlemelerden de üretilebilirler.

A üzerinde verilen B nin etkilerinin bir kümesi (Ω_2 deki herbir işlem için bir tane) için $B \ltimes A$ ilgili kümesi $B \times A$ ve işlemleri

$$\begin{aligned} (b', a') + (b, a) &= (b' + b, a' + b'.a) \\ (b', a') * (b, a) &= (b' * b, a' * a + a' * b + b' * a) \end{aligned}$$

olan bir evrensel cebirdir.

Teorem 5.1.6. B nin A üzerinde etkilerinin kümesi, üretilmiş etkilerinin kümesidir ancak ve ancak $B \ltimes A,\ \mathcal{C}$ nin bir objesidir.

Yukarıdaki teoremde verilen üretilmiş etkiler kümesinin tanımının yanında $A, B \in \mathcal{C}_G$ olması durumunda da üretilmiş etkilerin kümesini sağlayacağı ve etkilerin kümesinin $\mathcal{C}_G$ de üretilmiş etkilerin kümesi olduğunu garanti eden özelliklere ihtiyacımız var.

Önerme 5.1.7 $\mathcal{C}_G$ de işlemlerin kümesi üretilmiş işlemlerin kümesidir ancak ve ancak;

her $w \in \Omega_1',\ * \in \Omega_2',\ -b, b_1, b \in B,\ a_1, a_2, a_3 \in A$ ve her $x, y, z, t \in A \cup B$ iken

1. $0 \cdot a = a,$

2. $b \cdot (a_1 + a_2) = b \cdot a_1 W + b \cdot a_2,$

3. $(b_1 + b_2) \cdot a = b_1 \cdot (b_2 \cdot a),$

4. $b * (a_1 + a_2) = b * a_1 + b * a_2,$

5. $(b_1 + b_2) * a = b_1 * a + b_2 * a,$

6. $(b_1 * b_2) \cdot (a_1 * a_2) = b * a_1 + b * a_2,$

7. $(b_1 * b_2) \cdot (a * b) = a * b,$

8. $a_1 * (b \cdot a_2) = a_1 * a_2,$

9. $b * (b_1 \cdot a) = b * a,$

10. $w(b \cdot a) = w(b) * w(a,)$

11. $w(b * a) = w(a) * b = a * w(b),$

12. $x * y + z * t = z * t + x * y$

özellikleri sağlanır.

İşlemli gruplar kategorisinin özelliklerinin kümesi sadece $\mathbb{E}_G$ nin özelliklerini içermektedir, fakat burada belirtilmemiştir. Bu durumda özelliklerin kümesi olan $\mathbb{E}$ ile birlikte bir C kategorisi için yukarıdaki teoremdeki **(1) - (12)** koşulları zorunlu koşullardır. Tabii ki $\mathbb{E}$ ye dahil edilen diğer işlemlerle birlikte üretilmiş etkiler kümesi için, herhangi etkiler kümesinin üretilmiş etkiler kümesi olması için gerekliliği ve yeterliliği sağlayacak uygun koşulların yazılması mümkündür (Örneğin $B \ltimes A \in C$). Tüm bu özellikleri sırasıyla $\widetilde{\mathbb{E}_G}$ ve $\widetilde{\mathbb{E}}$ ile gösterecegiz. C deki toplam değişmeli ise bu durumda $A \cup B$ kümesinin elemanları için yazılan her özellik anlamlı ise $\widetilde{\mathbb{E}}$, $\mathbb{E}$ deki aynı tür elemanlardan oluşmaktadır (aynı durum $\widetilde{\mathbb{E}_G}$ ve $\mathbb{E}_G$ için de geçerlidir). *Aksiyom* 2 ye uygun olarak, C deki etki için özellikleri $\widetilde{Aksiyom}$ 2 ile göstereceğiz. Gruplar kategorisinde üretilmiş etkilere kısaca "etkiler" diyeceğiz. Bu söylemimizi; C deki bir üretilmiş etki için "C de bir etki", C deki üretilmiş etkilerin kümesi olmayan bir etki için de "C deki etkilerin kümesi C de bir etki değildir" şeklinde kullanacağız.

B grubunun A üzerine bir sol etkisi $\varepsilon(b, a) = b \cdot a$ olarak tanımlanan ve

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2) \cdot a &= b_1 \cdot (b_2 \cdot a), \\ 0 \cdot a &= a, \\ b \cdot (a_1 + a_2) &= b \cdot a_1 + b \cdot a_2, \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan bir $\varepsilon : B \times A \to A$ dönüşümüdür. Sağ etkide benzer şekilde tanımlanabilir.

Aşağıdaki tüm cebirler birimli değişmeli bir k halkası üzerinde tanımlanmıştır

Cebirlerin birleşimli olması durumunda B nin A üzerine etkisi,

$\begin{array}{ccc} B\times A & \to & A \\ (b,a) & \mapsto & b*a \end{array}$, $\begin{array}{ccc} A\times B & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a*b \end{array}$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir bilineer dönüşüm çiftidir.

$$\begin{aligned}
(b_1 * b_2) * a &= b_1 * (b_2 * a), \\
a * (b_1 * b_2) &= (a * b_1) * b_2, \\
(b_1 * a) * b_2 &= b_1 * (a * b_2), \\
(b * a_1) * a_2 &= b * (a_1 * a_2), \\
(a_1 * a_2) * b &= a_1 * (a_2 * b), \\
(a_1 * b) * a_2 &= a_1 * (b * a_2),
\end{aligned}$$

burada birleşimli cebir işlemi $*$ (örneğin $a_1 * a_2$) ile ve karşılık gelen etki de aynı $*$ işaretiyle (örneğin $b * a$) gösterilmiştir.

Birleşimli bir A, k cebirinin $Bim(A)$ sını tanımlayalım. $Bim(A)$ nın bir elemanı A dan A ya aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f = (f*, *f)$ k lineer dönüşüm çiftidir.

$$\begin{aligned}
(f * a) * a' &= f * (a * a') \\
(a * a') * f &= a * (a' * f) \\
(a * f) * a' &= a * (f * a')
\end{aligned}$$

Burada $f*^0$ yerine $*f$ gösterimini kullanacağız. $f * (a)$ değerini $f * a$ olarak göstereceğiz (Benzer şekilde $a * f$ değeri de $*f(a)$ ile gösterilecektir). $Bim(A)$ nın bir k - modül olduğu açıktır. $Bim(A)$ nın işlemi,

$f * f' = (f * f'*, *f * f')$ olarak tanımlandığından $Bim(A)$ aynı zamanda bir k cebiri belirtir. Burada yukarıda olduğu gibi $*$ değişmeli cebirlerde bir işlemi ve $f + f'+, +f + f'$ de okların kompozisyonunu göstermektedir. Böylece

$$\begin{aligned}
(f * f'*)(a) &= f * (f' * a) \\
(*f * f')(a) &= (a * f) * f' \text{ dır.}
\end{aligned}$$

Toplam için,

$f + f' = f(*) + f'*, *f + (*f')$

$$\begin{aligned}
((f*) + f'*)(a) &= f * a + f' * a \\
(*f + (*f'))(a) &= a * f + a * f' \text{ dür.}
\end{aligned}$$

$Bim(A)$ nın A üzerine etkisi bir üretilmiş etki değildir, çünkü;

$(f * a) * a' = f * (a * f')$ koşulu sağlanmaz. Eğer herhangi iki çarpanı tam dolu olan bir A birleşimli cebiri alırsak A üzerine $Bim(A)$ nın yukarıda tanımlanan etkisi A üzerinde üretilmiş etkilerin bir kümesidir.

Bir F cismi üzerindeki A alternatif cebiri, her $x, y \in A$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir cebirdir.

$x^2y = x(xy)$

ve

$yx^2 = (yx)x$

Bu özellikler sırasıyla sol ve sağ alternatif kurallar olarak adlandırılır. Alternatif cebir kategorisi Alt ile gosterilir. Birleşimli herhangi bir cebirin alternatif olduğu açıktır. 8 - boyutlu Cayley Cebirlerin ailesi birleşimli olmayan alternatif cebirlerin ailesine önemli bir örnektir.

Alternatif cebirler için yukarıda verilen aksiyomlar

$$x(yz) = (xy)z + (yx)z - y(xz)$$

ve

$$(xy)z = x(yz) - (xz)y + x(zy)$$

ye denktir.

Bu özellikleri $Aksiyom$ 2 olarak kabul edeceğiz ve böylece alternatif cebirler ilgili kategori olarak ifade edilebilir.

Bir F cismi üzerindeki alternatif cebirler için B nin A üzerine etkisi

$\begin{array}{ccc} B \times A & \to & A \\ (b, a) & \mapsto & b * a \end{array}$, $\begin{array}{ccc} A \times B & \to & A \\ (a, b) & \mapsto & a * b \end{array}$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bilineer dönüşüm çiftidir.

$$
\begin{aligned}
b(a_1a_2) &= (ba_1)a_2 + (a_1b)a_2 - a_1(ba_2), \\
(a_1a_2)b &= a_1(a_2b) - (a_1b)a_2 + a_1(ba_2), \\
(ba_1)a_2 &= b(a_1a_2) - (ba_2)a_1 + b(a_2a_1), \\
a_1(a_2b) &= (a_1a_2)b + (a_2a_1)b - a_2(a_1b), \\
(b_1b_2)a &= (ab_1)b_2 - (b_1a)b_2 + b_1(ab_2), \\
a(b_1b_2) &= (ab_1)b_2 + (b_1a)b_2 - b_1(ab_2), \\
(ab_1)b_2 &= a(b_1b_2) - (ab_2)b_1 + a(b_2b_1), \\
b_1(b_2a) &= (b_1b_2)a + (b_2b_1)a - b_2(b_1a).
\end{aligned}
$$

C de bir çaprazlanmış modül, bir (C_0, C_1, ∂) üçlüsüdür. Burada $C_0, C_1 \in C$ dir ve C_0, C_1 e etki eder (Yani C de bir üretilmiş etkidir) ve $\partial : C_0 \to C_1$, C de aşağıdaki özellikleri sağlayan bir morfizmdir;

Her $r \in C_0$; $c, c' \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

(i) $\partial\ (r \cdot c) = r + \partial\ (c) - r$;

(ii) $\partial\ (c) \cdot c' = c * c' - c$;

(iii) $\partial\ (c) * c' = c * c'$;

(iv) $\partial\ (r * c) = r * \partial\ (c), \partial\ (c * r) = \partial\ (c) * r$.

İki çaprazlanmış modül arasındaki bir $(C_0, C_1, \partial) \to (C_0', C_1', \partial')$ morfizmi C de bir (T_0, T_1) morfizm çiftidir, öyle ki $T_0 : C_0 \to C_0'$, $T_1 : C_1 \to C_1'$, her $r \in C_0$, $c \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için,

$$
\begin{aligned}
T_0\partial\ (c) &= \partial' T_1(c), \\
T_1(r \cdot c) &= T_0(r) \cdot T_1(c), \\
T_1(r * c) &= T_0(r) * T_1(c) \quad \text{dir.}
\end{aligned}
$$

Tanım 5.1.8 C deki herhangi bir A objesi için A nın bir aktörü bir

$$\partial : A \to Akt\ddot{o}r(A)$$

çaprazlanmış modülüdür, öyle ki C nin herhangi bir C objesi ve C nin A üzerine bir etkisi için her $* \in \Omega_2'$, $a \in A$ ve $c \in C$ için $c \cdot a = \varphi(c) \cdot a$, $c * a = \varphi(c) * a$ olacak şekilde bir tek $\varphi : C \to Akt\ddot{o}r(A)$ morfizmi vardır.

Bu tanımdan $A \in C$ objesi için bir *Aktör* (A) aktör objesinin bu özelliklerle birlikte C de izomorfizm farkıyla bir tek obje olduğu sonucuna varılır.

Bir aktör objenin universal özelliklere göre $\cdot$, $*$ etkileri ve her $* \in \Omega_2'$, $a \in A$ için $x * y = y * a$ ve $w_1 \cdots w_n \in \Omega_1$için $(w_1 \cdots w_n x) \cdot a = (w_1 \cdots w_n y) \cdot a$ olacak şekildeki *Aktör* (A) daki herhangi x, y elemanları için $x = y$ elde edilir.

$Akt\ddot{o}r(G) = Oto(G)$ grupları için bahsedilen çaprazlanmış modül $g \in G$ yi G nin g ile tanımlanan inner otomorfizmine götüren $\partial : G \to Oto(G)$ dir

(Yani $\partial(g)g' = g + g' - g$, $g' \in G$ dir.)

Gruplar için N, G nin bir normal alt grubu ve $\tau : N \to Inn(N)$ herhangi bir n elemanını inner otomorfizmine götürüyorsa (yani $\tau(n)(n') = n + n' - n$ ise), G, N üzerine etki ettiğinden $\theta(g) \cdot n = g \cdot n$ olacak şekilde bir tek $\theta : G \to Akt\ddot{o}r(N)$ homomorfizmi vardır. $Inn(N)$, $Akt\ddot{o}r(N)$ in bir normal alt grubudur,θ, τ yu genişletir ve

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & G/N \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Inn}(N) \arrow[r] & \mathrm{Akt\ddot{o}r}(N) \arrow[r] & \mathrm{Oto}(N) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Şekil 5.1

değişmeli diyagramı vardır.

Tanım 5.1.9 $A \in C$ için bir $GAkt\ddot{o}r(A)$ genel aktör objesi, C_G nin, A üzerine etkilerin bir kümesi ve C_G de üretilmiş etkilerin bir kümesi bulunan bir objesidir, yani Önerme 5.1.7 deki özellikleri sağlar. C_G de bir çaprazlanmış modül belirten, C_G de bir $d : A \to GAkt\ddot{o}r(A)$ morfizmi vardır ve herhangi $C \in C$ objesi ve C nin A üzerine bir üretilmiş etkisi için C_G de, her $c \in C$, $a \in A$, $* \in \Omega_2'$ için, $c * a = \varphi(c) * a$ olacak şekilde bir tek $\varphi : C \to GAkt\ddot{o}r(A)$ morfizmi vardır.

5.2 Ana Yapı

Bu bölümde C, işlemlerin Ω kümesi ve özelliklerin $\mathbb{E}$ kümesi ile birlikte bir ilgili kategoriyi göstermektedir. C_G işlemli grupların genel kategorisi olsun. İkinci bölümde verilen tanıma göre C dekiyle aynı Ω işlemler kümesi olmak üzere $\mathbb{E}_G$ grup özellikleri ve Tanım 5.1.1 de bulunan **(c)** ve **(d)** özelliklerini içeren C_G bir $\{\Omega, \mathbb{E}_G\}$ - cebiridir. Böylece $\mathbb{E}_G \hookrightarrow \mathbb{E}$ dir. $A \in C$ olsun ve A nın bütün split genişlemelerinin C de olduğunu kabul edelim.

$\mathbb{E}_j : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_j} C_j \longrightarrow B_j \xrightarrow{p_j} 0 \qquad j \in J$ dir.

$J \neq k$ için $B_j = B_k = B$ olabilir, böylece bu genişlemeler, B nin A üzerine farklı etkilerinin varlığını ortaya çıkarır. $\{b_j \cdot, b_j * \mid b_j \in B_j, * \in \Omega_2'\}$ kümesi $j \in J$ için üretilmiş etkilerin belirtilen bir kümesi olsun. Herhangi $b_j \in B_j$ için

$$\mathbf{b}_j = \{b_j \cdot, b_j *, \ * \in \Omega_2'\}$$

tanımlayalım.

$$B = \{\mathbf{b}_j \mid b_j \in B_j, \quad j \in J\}$$

olsun.

Böylece herbir $\mathbf{b}_j \in \mathbb{B}, \quad j \in \mathbb{J}$ *elemanı* $\mathbf{b}_j : \Omega_2 \to Oklar(A \to A)$,

$\mathbf{b}_j(*) = b_j * - : A \to A$ fonksiyonunun özel bir çeşididir.

İlgili kategorilerin tanımındaki *Aksiyom* 2 ye göre $*$ işlemi; $* \in \Omega_2'$ olmak üzere $\mathbb{B}$ nin elemanları için $\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k$ yı

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k)\overline{*}(a) &= W(b_i, b_k; a; *, \overline{*}), \\ (\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_k) \cdot (a) &= a. \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım.

Toplama işlemini de

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_k) \cdot (a) &= b_i \cdot (b_k \cdot a), \\ (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_k) * (a) &= b_i * a + b_k + a. \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım.

$w \in \Omega'_1$ tekli işlemi için,

$$\begin{aligned} w(\mathbf{b}_k) \cdot (a) &= w(b_k) \cdot (a), \\ w(\mathbf{b}_k) * (a) &= w(b_k) * (a), \end{aligned}$$

olarak tanımlarsak

$w(b * b') = w(b) * b'$ ve buradan da $w(b) * b' = b * w(b')$,

$w(b_1 + \cdots + b_n) = w(b_1) + \cdots + w(b_n)$,

$(-\mathbf{b}_k) \cdot (a) = (-b_k) \cdot a$,

$(-b) \cdot (a) = a$

$(-\mathbf{b}_k) * (a) = (-b_k * a)$,

$(-b) * (a) = -(b * (a))$,

$-(b_1 + \cdots + b_n) = -b_1 - \cdots - b_n$, ile tanımlayalım. Burada $b, b', b_{1,\ldots,}b_n$, $\mathbb{B}$ nin elemanları üzerindeki yıldız işleminin (yani $n > 1$ için $\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}$ şeklindeki elemanların) belli kombinasyonlarıdır.

Tanımladığımız yeni fonksiyonların yine $\mathbb{B}$ de olup olmadığını bilmiyoruz.

Önerme 5.2.1 $\mathfrak{B}(A)$, C_G nin bir objesidir.

İspat Özelliklerin incelenmesiyle kolaylıkla ispat edilir.

Yukarıda olduğu gibi kolaylık sağlaması için $b \in \mathfrak{B}(A)$ ve $a \in A$ için $(b(+))(a)$ ve $(b(*))(a)$ yerine $b \cdot (a)$ ve $b * (a)$ yazacağız. $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkilerini kümesini doğal olarak tanımlayalım. $b \in \mathfrak{B}(A)$ için

$$b \cdot a = b \cdot (a)$$

ve $* \in \Omega'_2$ için

$$b * a = b * (a)$$

olarak tanımlayalım. Böylece

$b = \mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}$ ise

$$\begin{aligned} b \overline{*} a &= (\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}) \overline{*}(a), \\ b \cdot a &= a \end{aligned}$$

olur.

Eşitliğin sağ tarafı Aksiyom 2 ye göre genelleştirilerek tanımlanır. $b_k \in B_k$, $k \in \mathbb{J}$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_k * a &= \mathbf{b}_k * (a) = b_k * a,\\ \mathbf{b}_k \cdot a &= \mathbf{b}_k \cdot (a) = b_k \cdot a\end{aligned}$$

dır.

Aynı zamanda $b_i \in \mathfrak{B}(A)$, $i = 1, \ldots, n$ için,

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) * a &= b_1 * (a) + \cdots + b_n * (a),\\ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \cdot a &= b_1 \cdot (b_2 \cdots (b_n \cdot (a)) \cdots)\end{aligned}$$

dır ve $b_i \in \mathfrak{B}(A)$, $i = 1, \ldots, n$, $b = b_1 + *b_2 * \cdots * b_n$ ise $w(b) \cdot a = a$ dır.

$k \in \mathbb{J}$ $b_k \in B_k$ için $w(\mathbf{b}_k) \cdot a = w(b_k) \cdot a$ dır.

Önerme 5.2.2 $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkilerinin kümesi, C_G deki üretilmiş etkilerin bir kümesidir.

ispat $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkilerinin kümesi Önerme 5.1.7 deki koşulları sağlar, bu da C_G deki üretilmiş etkilerin bir kümesi olduğunu gösterir.

$\mathfrak{a} = \{a\cdot, a*, * \in \Omega_2'\}$ olmak üzere $d(a) = \mathfrak{a}$ ile tanımlı $d : A \to \mathfrak{B}(A)$ dönüşümünü tanımlayalım. Böylece tanımdan $\forall a, a' \in A$, $* \in \Omega_2'$ için

$$\begin{aligned}d(a) \cdot a' &= a + a' - a,\\ d(a) * a' &= a * a'\end{aligned}$$

dır.

Yardımcı Teorem 5.2.3 d, C_G de bir morfizmdir.

İspat $\forall w \in \Omega_1'$ için $d(wa) = wd(a)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ise her $w' \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$\begin{aligned}d(wa) \cdot (a') &= (wd(a)) \cdot (a'),\\ w'(d(wa)) \cdot a' &= w'(wd(a)) \cdot a',\\ d(wa) * (a') &= (wd(a)) * (a'),\end{aligned}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Buradan,

$$\begin{aligned} d(wa)\cdot a' &= wa + a' - wa, \\ wd(a)\cdot a' &= w(\mathfrak{a})\cdot a' = wa + a' - wa, \end{aligned}$$

olur.

İkinci eşitlik birincinin sonucu olarak çıkar. Üçüncü eşitlik için

$$\begin{aligned} d(wa) * a' &= (wa) * a', \\ (wd(a)) * a' &= w(\mathfrak{a}) * a' = w(a) * a' \end{aligned}$$

dır.

$w = -$ için $d(-a)\cdot(a') = (-d(a))\cdot(a')$ ve $(d(-a)) * a' = (-d(a)) * a'$ eşitliklerinin doğru olduğu açıktır.

$d(a_1 + a_2) = d(a_1) + d(a_2)$ olduğunu gösterelim. Her $a \in A$ için her iki taraftan işlemi yaparsak;

$$\begin{aligned} d(a_1 + a_2)\cdot(a) &= a_1 + a_2 + a - a_2 - a_1, \\ (d(a_1) + d(a_2))\cdot(a) &= d(a_1)\cdot(d(a_2)\cdot a), \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu da nokta etkisi için istenilen eşitliği sağlar. $w(d(a_1{+}a_2){\cdot}a) = w\,(d(a_1) + d(a_2))\cdot a$ eşitliğinin ispatı, ilk eşitlik, toplamaya karşılık gelen tekli işlemlerin özelliği ve d nin tekli işlemlerle ilgili oluşundan elde edilir.

Her $* \in \Omega_2'$ için $d(a_1 + a_2) * (a) = (d(a_1) + d(a_2)) * (a)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d(a_1 + a_2) * (a) &= (a_1 + a_2) * a = a_1 * a + a_2 * a, \\ (d(a_1) + d(a_2)) * (a) &= d(a_1) * a + d(a_2) * a = a_1 * a + a_2 * a \end{aligned}$$

dır ki bu da istediğimiz eşitliği ispatlar.

İspatlamamız gereken bir diğer eşitlik, $d(a_1 * a_2) = d(a_1) * d(a_2)$ dır. Bunun için $\overline{*} \in \Omega_2'$ için

$$\begin{aligned} d(a_1 * a_2)\cdot(a) &= (d(a_1) * d(a_2))\cdot(a) \\ w(d(a_1 * a_2))\cdot a &= w(d(a_1) * d(a_2))\cdot a \\ d(a_1 * a_2)\overline{*}(a) &= (d(a_1) * d(a_2))\overline{*}(a) \end{aligned}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$A \in C$ olduğundan $d(a_1 * a_2) \cdot a = a_1 * a_2 + a - a_1 * a_2 = a$ olduğunu biliyoruz ve böylece Aksiyom 1 i sağlar.

$\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkilerinin tanımından $(d(a_1 * a_2)) \cdot (a) = a$ dır.

Diğer eşitlik d nin w ile bağlantılı oluşunun ve $w\,(a_1 * a_2) = w(a_1) * a_2$ eşitliğinin uygulanması ile benzer yolla ispatlanır.

$$\begin{aligned} d(a_1 * a_2)\overline{*}(a) &= (a_1 * a_2)\overline{*}(a) = W(a_1, a_2; a; *, \overline{*}), \\ (d(a_1 * a_2))\overline{*}(a) &= W(d(a_1), d(a_2); a; *, \overline{*}) \end{aligned}$$

dır.

Aksiyom 2 deki W kelimesinin tipinden ve d nin tanımından bu iki eşitliğin sağ taraflarındaki ifadeler eşittir.

Önerme 5.2.4 $d : A \to \mathfrak{B}(A)$, C_G de bir çaprazlanmış modüldür.

İspat İspat için bölüm 2 de çaprazlanmış modül tanımındaki **(i) - (ii)** koşullarını sağlatmamız gereklidir.

(i) koşulu, $a \in A$, $b \in \mathfrak{B}(A)$ için $d(b \cdot a) = b + d(a) - b$ olduğunu ifade etmektedir, bu yüzden

$$d(b \cdot a) * a' = (b + da - b) * a'$$

ve

$$w_1 \ldots w_n\,(d(b \cdot a) \cdot a') = w_1 \ldots w_n\,(b + da - b) \cdot a'$$

olduğunu göstermeliyiz. Aşağıda ilk eşitliğin her iki tarafı için nokta etkisi hesaplanmıştır.

$d(b \cdot a) \cdot a' = b \cdot a + a' - b \cdot a,$

$(b + d(a) - b) \cdot a' = b \cdot (d(a) \cdot (-b \cdot a')) = b \cdot (a - b \cdot a' - a) = b \cdot a + a' - b \cdot a.$

İkinci eşitlik benzer şekilde ispatlanır. Şimdi eşitliğin her iki tarafını $*$ etkisi için hesaplayalım. $d(b \cdot a) * a' = (b \cdot a) * a' = a * a'$ Önerme 5.1.7 den;

$$(b + da - b) * a' = b * a' + d(a) * a' - b * a' = b * a' + a * a' - b * a' = a * a'$$

dır, burada Aksiyom 1 i uyguladık, böylece A nın herhangi $\overline{a}$ elemanı için $\overline{a} + a * a' = a * a' + \overline{a}$ elde edilir.

Göstermemiz gereken (ii) $d(a_1) \cdot a_2 = a_1 + a_2 - a_1$, (iii) $d(a_1) * a_2 = a_1 * a_2$ koşullarının her ikisi de d nin tanımı gereğince doğrudur. $a_1 *^\circ a_1 = a_1 * a_2$ olduğunu hatırlayalım.

(iv) nin ilk koşulu her $b \in \mathfrak{B}(A), a \in A, * \in \Omega'$ için $d(b * a) = b * d(a)$ olmasıdır. Böylece göstermemiz gereken

$w \in \Omega_1', \overline{*} \in \Omega_2'$ için $d(b * a)\overline{*}a' = (b * (d(a))\overline{*}a', w(db * a) \cdot a' = w(b * da) \cdot a'$

$$d(b * a)\overline{*}a' = (b * (d(a))\overline{*}a', w(db * a) \cdot a' = w(b * da) \cdot a' \quad (\mathbf{5.1})$$

olduğudur.

(5.1) i ilk olarak nokta işlemi için gösterelim. Nokta işlemi için ikinci eşitlik tekli işlemlerin özelliklerinin benzer şekilde uygulanmasıyla ispatlanır. Bu durumda (5.1) in sağ tarafı a' ne eşittir. Sol tarafı için $d(b * a) \cdot a' = b * a + a' - b * a$ elde edilir.

$b = \mathbf{b}_i$ ise $b * a = b_i * a$ dır ve $B_i \in C$ ve B_i A üzerine etki ettiğinden (etki C dedir), 1. Aksiyomdan B_j nin A üzerine etkisi için $b * a + a' = a' + b * a$ elde ederiz ve böylece $d(b * a) \cdot a' = a'$ dür.

$b = (\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n})$ ise $\mathfrak{B}(A)$ daki $*$ işleminin tanımından $b * a$ belli i_t ve $\overline{a_t} \in A$ elemanı için $b_{it} * \overline{a_t}$ tipindeki elemanların toplamıdır; yine bu çeşit bir eleman A nın herhangi bir elemanı ile değiştirilebilir. Böylece $d(b * a) \cdot a' = a'$ dır. b, $\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}$ tipindeki elemanların toplamı olduğunda da aynı sonucu elde ederiz.

(5.1) i $*$ işlemi için göstermeliyiz. d nin tanımından $d(b * a)\overline{*}a' = (b * a)\overline{*}a'$ elde ederiz.

$i \in J$ için $b = \mathbf{b}_i$ olması durumunda $b * a = \mathbf{b}_i * a = b_i * a$ dır, böylece

$$d(b * a)\overline{*}a' = (b_i * a)\overline{*}a = W(b_i, a; a'; *, \overline{*})$$

elde edilir.

Son eşitliği Aksiyom 2 ile ilişkili olan C deki bir etkinin özelliklerinden elde ederiz. (5.1) in sağ tarafı için $b = \mathbf{b}_i$ olduğunda $(b * d(a))\overline{*}a' = (\mathbf{b}_i * a)\overline{*}a' = W(b_i, a; a'; *, \overline{*})$ dir.

$b = (\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n})$ olduğunu varsayalım, böylece bir önceki ispattakiyle aynı olarak, $b * a$, $b_{it} * \overline{a_t}$ tipindeki elemanların toplamıdır ve $(b * a)\overline{*}a'$, $(b_{it} * \overline{a_t})\overline{*}a'$ tipindeki elemanların toplamıdır. (5.1) in sağ tarafındaki eleman $(b_{it} * \overline{a_t}) * a'$ elemanlarının toplamıyla aynı tipte olacaktır. $\widetilde{Aksiyom}2$ yi $(b_{it} * \overline{a_t}) * a'$ elemanına uygulayarak $\mathfrak{B}(A)$ nın elemanları için ($(b_{it} * \overline{a_t}) * a'$ elemanları için) işlemin tanımından ve $\mathbf{b}_{it} * a = b_{it} * a$, $\overline{\mathfrak{a}_t} * a = \overline{a_t} * a$ olmasından istenilen (5.1) eşitliğini elde ederiz. Benzer yolla (5.1) i, $*$ işlemi için b nin $\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}$ formundaki elemanların toplamı olduğu durum için ispatlayabiliriz. (iv) in ikinci koşulu benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 5.2.5 A nın C de bir aktörü varsa $\mathfrak{B}(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ dır.

İspat $Akt\ddot{o}r(A)$ nın varlığında, $Akt\ddot{o}r(A)$ nın A üzerine etki eden B_i objelerinden biri olduğu elde edilir. $b_i \in B_i$ olmak üzere b_i yi $\mathbf{b}_i$ ye yollayan, C_G de bir

$$e : Akt\ddot{o}r(A) \to \mathfrak{B}(A)$$

doğal homomorfizmi vardır. $Akt\ddot{o}r(A)$ da $b_i \neq b'_i$ ise $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{b}'_i$ dir; böylece C bir içine homomorfizmdir. $j \in \mathbb{J}, a \in A$ olmak üzere

$$\varphi_j : B_j \to Akt\ddot{o}r(A) \ \varphi(b_j) * a = b_j * a$$

olacak şekilde bir tek morfizm olsun. $\mathfrak{B}(A)$ nın $\mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}$ elemanı için $Akt\ddot{o}r(A)$ da

$$e(\varphi_{i_1}(b_{i_1}) *_1 \cdots *_{n-1} \varphi_{i_n}(b_{i_n})) = \mathbf{b}_{i_1} *_1 \cdots *_{n-1} \mathbf{b}_{i_n}$$

olacak şekilde $\varphi_{i_1}(b_{i_1}) *_1 \cdots *_{n-1} \varphi_{i_n}(b_{i_n})$ elemanı bulunduğu için C örten bir homomorfizmdir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.6 C bir ilgili kategori ve $A \in C$ olsun. A nın bir aktörü vardır ancak ve ancak $\mathfrak{B}(A) \ltimes A \in C$ dir. Bu durumda $Akt\ddot{o}r(A) = \mathfrak{B}(A)$ dır.

İspat Önerme 5.2.5 ten A nın bir aktörü varsa $\mathfrak{B}(A) \in C$ dir ve $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerinde üretilmiş bir etkisi vardır. Bu durumda $\mathfrak{B}(A) \ltimes A \in C$ olur. Tersinin ispatı basittir. $\mathfrak{B}(A) \ltimes A \in C$ olduğundan C_G deki

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \mathfrak{B}(A) \ltimes A \longrightarrow \mathfrak{B}(A) \longrightarrow 0$$

split tam dizisinden $\mathfrak{B}(A) = Koçek$ idir ve böylece C nin bir objesidir; buradan $\mathfrak{B}(A)$ nın C de A üzerinde üretilmiş bir etkisi vardır (Bu etki tanımladığımız etkidir). Önerme 5.2.4 ten $d : A \to \mathfrak{B}(A)$, C_G de bir çaprazlanmış modüldür; $\mathfrak{B}(A) \in C$ ve $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerinde etkisi C de üretilmiş bir etki olduğundan $d : A \to \mathfrak{B}(A)$, C_G de bir çaprazlanmış modüldür. Şimdi bu çaprazlanmış modül için evrensel özelliğini göstermeliyiz. $k \in \mathbb{J}$ olmak üzere B_k nın A üzerine herhangi bir etkisi için

$$\varphi_k : B_k \longrightarrow \mathfrak{B}(A)$$

yı $b_k \in B_k, \mathbf{b}_k \in \mathbb{B}$ için $\varphi_k(b_k) = \mathbf{b}_k$ olacak şekilde tanımlayalım. $\mathbb{B}$ nin tanımında $* \in \Omega_2'$ için $\mathbf{b}_k * a = b_k * a$ dır ve φ_k, C de bir homomorfizm olmak üzere $\varphi_k(b_k) * a = b_k * a$ elde ederiz. φ_k' başka bir homomorfizm olsun. Bu durumda herhangi $b_k \in B_k, a \in A, w \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$\varphi_k'(b_k) * a = b_k * a = \varphi_k(b_k) * a,$$

$$w(\varphi_k'(b_k)) \cdot a = \varphi_k'(wb_k) \cdot a = (wb_k) \cdot a = w(\varphi_k(b_k)) \cdot a$$

olur, yani herhangi $b_k \in B_k$ için $\varphi_k(b_k) = \varphi_k'(b_k)$ dır, bu da teoremi ispatlayan $\varphi_k = \varphi_k'$ eşitliğini verir.

Teorem 5.2.7 C bir ilgili kategori olsun. Her $A \in C$ için $\mathfrak{B}(A) = GAktör(A)$ dır.

İspat Önerme 5.2.2, Önerme 5.2.4 ve Yardımcı Teorem 5.2.3 ten C_G de

$$d : A \to \mathfrak{B}(A)$$

çaprazlanmış modülü vardır. A üzerinde üretilmiş etkisi olan herhangi $C \in C$ objesi için C_G de $c * a = \varphi(c) * a$ olacak şekilde $\varphi : C \to \mathfrak{B}(A)$ homomorfizmi ele alınırsa ve Teorem 5.2.6 daki φ_k için yaptığımıza benzer yolla φ nin tek olduğu gösterilir.

Aşağıda C ilgili kategorisinde bir aktörün varlığı için yani herhangi $A \in C$ objesi için gerekli ve yeterli koşulların kategorisel bir tanımını vereceğiz. Yani

$$T : \mathfrak{B}(-) \ltimes (-) : C \longrightarrow C_G$$

funktorunu oluşturacağız. Bu funktor doğal olarak $A \in C$ için $T(A) = \mathfrak{B}(A) \ltimes A$ şeklinde tanımlanmıştır. $\alpha : A \longrightarrow A'$ C de olmak üzere $T(\alpha)$ nın tanımı için genel aktör objenin evrensellik özelliğini aşağıdaki yolla uygulayacağız. C_G deki;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{B}(A) \ltimes A \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathfrak{B}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & C \arrow[r] & \mathfrak{B}(A) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

Şekil 5.2

pushout diyagramında ilk dizinin split olması ikincinin de split olmasını gerektirmektedir. Böylece Teorem 5.1.6 dan $\mathfrak{B}(A)$, C_G deki A üzerine üretilmiş etkilerin bir ailesine sahiptir. $\mathfrak{B}(A')$, C_G deki A için bir genel aktör objedir. Buradan $\varphi(b) * a = b * a$ ve $\varphi(b) \cdot a = b \cdot a$ olacak şekilde bir tek $\varphi : \mathfrak{B}(A) \to \mathfrak{B}(A')$ oku vardır.

$T(\alpha) : \mathfrak{B}(A) \ltimes A \to \mathfrak{B}(A') \ltimes A'$ yı $T(\alpha)(b, a) = (\varphi(b), \varphi(a))$ olarak tanımlayalım. $T(\alpha)$ nın C_G de bir homomorfizm olduğu açıktır.

Teorem 5.2.6' C bir ilgili kategori olsun. Bu durumda her $A \in C$ için bir $Akt\ddot{o}r(A)$ vardır ancak ve ancak $\mathbb{E}$ doğal içine funktoru göstermek üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"'] & \mathsf{C} \arrow[d, "Q"] \\
\mathsf{C} & \mathsf{C} \arrow[l, "E"]
\end{tikzcd}$$

Şekil 5.3

I, C nin bir C elemanının bir ideali ve $Akt\ddot{o}r(I)$ var olsun. Böylece

$$d : I \to Akt\ddot{o}r(I)$$

çaprazlanmış modülü vardır. $\operatorname{Im} d = Inn(I)$ ile gösterelim. Böylece,

$$Inn(I) = \{\mathfrak{a} \in Akt\ddot{o}r(I) \mid a \in I\}$$

olur.

d nin tanımından $d(a) = \mathfrak{a}$ olduğunu ve $\mathfrak{a}$ nın

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{a}') &= a + a' - a, \\ \mathfrak{a} * (\mathfrak{a}') &= a * a' \end{aligned}$$

ile tanımlı olduğunu biliyoruz.

$d : I \to Akt\ddot{o}r(I)$ çaprazlanmış modül olduğundan, $Inn(I)$ nın $Akt\ddot{o}r(I)$ nın bir ideali olduğu açıktır. I, C nin bir ideali olduğundan C nin I üzerine $* \in \Omega_2'$ olmak üzere $c \cdot a = c + a - c$, $c * a = a * c$ şeklinde tanımlı bir etkisi vardır. Bu üretilmiş bir etkidir. Böylece $a \in I$, $c \in C$, $* \in \Omega_2'$ için $\theta(c) * a = c * a$ olacak şekilde bir tek $\theta : C \to Akt\ddot{o}r(I)$ homomorfizmi vardır.

$\tau : I \to Inn(I)$, d tarafından tanımlanmış bir homomorfizm olsun, bu durumda θ, gruplar için iyi bilinen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & C/I \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Inn}(I) \arrow[r] & \mathrm{Akt\ddot{o}r}(I) \arrow[r] & \mathrm{Oto}(I) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

Şekil 5.4

değişmeli diyagramını oluşturur.

Herhangi $C \in C$ objesi, $a, a' \in A$, $* \in \Omega_2'$ için A nın kendi üzerinde

$a \cdot a' = a + a' - a$; $a * a' = a * a'$ şeklinde tanımlı bir etkisi vardır. Bu eşitlikte sol taraftaki $*$ etkiyi sağ taraftaki ise A daki işlemi göstermektedir. Bu etkiye konjugasyon (conjugation) denir.

$E_A : 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \ltimes A \leftrightarrows A \longrightarrow 0$, A nın konjugasyonla kendi üzerindeki etkisine karşılık gelen split genişleme olsun. A ile sabitlenmiş bütün spilt genişlemelerin kategorisini ele alalım; böylece objeler

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow C \leftrightarrows C' \longrightarrow 0,$$

ve oklar genişlemeler arasında $(1_A, \gamma, \gamma')$ üçlüleridir.

Önerme 5.2.8 $E_t : 0 \longrightarrow A \longrightarrow C \leftrightarrows C' \longrightarrow 0$, A ile sabitlenmiş split genişlemeler kategorisinde bir son obje ise tek $(1, \gamma, \beta) : E_A \to E_t$ oku, A nın bir aktörü olan bir $\beta : A \to B$ çaprazlanmış modülünü tanımlar.

İspat İspatı Önerme 5.2.4 ün ispatına benzer şekildedir. B nin bir aktörün evrensel özelliğine sahip olduğu açıktır. $\beta : A \to B$ nın bir çaprazlanmış modül olduğunu ispatlamalıyız, bu yüzden her $a \in A$, $b \in B$, $* \in \Omega'_2$ için aşağıdaki özellikleri göstermeliyiz;

$$\begin{aligned} \beta(a) \cdot a' &= a + a' - a \\ \beta(b \cdot a) &= b + \beta(a) - b, \\ \beta(a) * a' &= a * a', \\ \beta(b * a) &= b * \beta(a) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E_A : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \ltimes A \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[l, shift left] \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\ E_t : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C \arrow[r, shift left] & B \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Şekil 5.5

değişmeli diyagramından her a, $a' \in A$, $* \in \Omega'_2$ için $\beta(a) \cdot a' = a + a' - a$, ve $\beta(a) * a' = a * a'$ elde edilir bu da birinci ve üçüncü eşitlikleri ispatlar. E_t bir son genişleme olduğundan şu özellik sağlanır;

$b, b' \in B$, her $a \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi $w_1, \ldots, w_n \in \Omega'_1$ tekli işlemleri için $b * a = b' * a$, $w_1 \cdots w_n(b) * a = w_1 \cdots w_n(b') * a$ ve böylece $b = b'$ dir.

İkinci eşitlik için Önerme 5.1.7 nin 8. koşulundan

$(\beta(b \cdot a)) \cdot a' = b \cdot a + a' - b \cdot a$,

$(b + \beta(a) - b) \cdot a' = b \cdot (\beta(a) \cdot (-b \cdot a')) = b \cdot (a + b \cdot a' - a) = b \cdot a + a' - b \cdot a$

$(\beta(b \cdot a)) * a' = (b \cdot a) * a' = a * a'$

olur.

Dördüncü eşitlik için, Aksiyom 1 in bir sonucu olarak ilgili kategorideki üretilmiş etkilerin özelliğinden,

$$\beta(b * a) * a' = (b * a) * a' = a'$$

dır. Aynı özellikten $(b * \beta(a)) \cdot a' = a'$ olur.

Yıldız işlemi için, $(A \cup B)$ kümesi için $\widetilde{Aksiyom}2$ yi uygular ve

$$\beta(a) * a' = a * a'$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \beta(b*a)*a' &= (b*a)*a' \\ (b*\beta(a))*a' &= (b*a)*a' \end{aligned}$$

elde edilir.

Herhangi $w \in \Omega_1'$, $w(\beta(b\cdot a)) = \beta\left(w(b\cdot a)\right) = \beta\left(w(b)\cdot(a)\right)$ tekli işlemi için Önerme 5.1.7 deki 10. koşulu uygularsak;

$w(b+\beta(a)-b) = w(b) + w\left(\beta(a)\right) - w(b)$ elde edilir.

Yukarıda ispatladığımız gibi bu elemanlar eşittir.

Önerme 5.1.7 nin 11. koşulu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} w(\beta(b*a)) &= \beta(w(b*a)) = \beta(w(b)*a), \\ w\left(b*\beta(a)\right) &= w(b)*w(a) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda gösterdiğimiz gibi bu elemanlar eşittir. $w_1,\ldots,w_n$ için de bahsedilen eşitlikler benzer şekilde elde edilirler.

Önerme 5.2.8 den Tanım 5.1.8 aşağıdaki tanıma denktir.

Tanım 5.2.9. C deki herhangi bir A objesi için A nın bir aktörü C de A üzerine etki eden bir $Akt\ddot{o}r(A)$ objesidir ve C nin herhangi bir C objesi ve A üzerinde C nin bir etkisi için her $* \in \Omega_2'$, $a \in A$, $c \in C$ için $c\cdot a = \varphi(c)\cdot a$, $c*a = \varphi(c)*a$ olacak şekilde bir tek $\varphi : C \to Akt\ddot{o}r(A)$ morfizmi vardır.

$\mathbb{X}Mod(Gr)$ grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbb{G}$ kategorisine denktir. $\mathbb{G}$ nin objeleri $G \in Gr$ olmak üzere

$w_0, w_1 : G \to G$ aşağıdaki grup homomorfizmi koşullarını sağlayan toplamsal tekli işlemlerle birlikte gruplardır.

(1) $w_0w_1 = w_{1,}\ \ w_1w_0 = w_0$

(2) x, $y \in$Çek w_0 için $w_1(x) + y - w_1(x) = x + y - x$.

Bu kategori bir ilgili kategoridir. Bu hesaplamalar ve bu kategorideki etkilerin özellikleri ve de **(1)** ve **(2)** özellikleri $\mathfrak{B}(A)$ nın bir $A \in \mathbb{G}$ elemanının aktörü olduğunu gösterir. Ayrıca aynı durum $\mathbb{X}Mod(\mathbb{G}r)$ çaprazlanmış modüllerin kategorisi içinde geçerlidir.

Önçaprazlanmış modüllerin kategorisi $\overline{\mathbb{G}}$ ilgili kategorisine eşittir. $\overline{\mathbb{G}}$ nin objeleri, w_0, w_1 (1) özelliğini sağlayan grup homomorfizmleri olan toplamsal tekli işlemleriyle gruplardır. Teorem 5.2.7 den her $A \in \overline{\mathbb{G}}$ için $\mathfrak{B}(A) = GAkt\ddot{o}r(A)$ dır. $\mathfrak{B}(A)$ nın (1) özelliğini sağlar ve böylece $\mathfrak{B}(A) \in \overline{\mathbb{G}}$ dır, buradan da $\mathfrak{B}(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ dır. Böylece önçaprazlanmış modüllerin kategorisinde daima bir aktör olduğu sonucuna ulaşırız.

5.3 $\boldsymbol{\Omega_2} = \{+, , *, *^0\}$ Durumu

Ne çeşit bir C ilgili kategorisinin herhangi bir $A \in C$ objesi için ya da belli bir $A \in C$ objesi için hangi uygun koşullarda $Akt\ddot{o}r(A)$ nın var olduğu konusu incelenmesi gereken bir konudur. Gruplarda ($\Omega_2 = \{+\}$), $\mathfrak{B}(A) \in \mathbb{G}r$ olduğu açıktır ve $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerindeki etkisi bir üretilmiş etkidir. Bu aynı zamanda Önerme 5.2.1 ve 5.2.2 den elde edilir, böylece Teorem 5.2.6 dan $\mathfrak{B}(A)$, A nın bir aktörüdür. Bu durum aynı zamanda $Oto(A)$, $\mathbb{G}r$ daki A nın bir aktörü olduğundan Önerme 5.2.5 in bir sonucudur, böylece $\mathfrak{B}(A) \approx Oto(A)$ dır.

1. Koşul $A \in \mathbb{L}eib$; $B, C \in \mathbb{L}eib$ A üzerine etki eden herhangi iki obje ve $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ olmak üzere;

$[c, [a, b]] = -[c, [b, a]]$ dır.

(Burada etkiyle, üretilmiş etki kastedilmektedir.)

Birleşmeli cebirler içinde benzer bir durum söz konusudur. Bu kategoride $\mathbb{B}$ nin elemanları için işlemler,

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_j) * (a) &= b_i * (b_j * a), \\ *(\mathbf{b}_i * \mathbf{b}_j)(a) &= (a * b_i) * b_j, \\ (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j) * (a) &= b_i * a + b_j * a, \\ *(\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j)(a) &= a * b_i + a * b_j. \end{aligned} \qquad \mathbf{(5.2)}$$

şeklinde verilmiştir.

$\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine etkilerinin kümesi (5.2) e göre tanımlanmıştır.

2. Koşul $A \in \mathbb{A}ss$ ve $\mathbb{A}ss$ ın A üzerine üretilmiş etkilerine sahip olan B ve C gibi herhangi iki elemanı için,

$a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ olmak üzere;

$$c * (a * b) = (c * a) * b$$

dir.

Örnek 5.3.1 $Inn(A) = (0)$ veya $A^2 = A$ ise$A$ koşul 2 yi sağlar. Bu tür birleşimli cebirler için $A \to Bim(A)$ nın A altındaki çaprazlanmış modül kategorisinde son obje olduğu açıktır.

Önerme 5.3.2 $A \in \mathbb{A}ss$ olsun bu durumda $\mathfrak{B}(A)$ bir birleşimli cebirdir ve $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine (5.2) deki gibi tanımlanan üretilmiş etkilerinin kümesi $\mathbb{A}ss$ de üretilmiş etkilerin kümesidir ancak ve ancak A koşul 2 yi sağlar. Bu durumda $\mathfrak{B}(A) \approx Bim(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ dır.

Önerme 5.3.3 A; $Ann(A) = 0$ ya da $A^2 = A$ koşuluyla verilen bir birleşimli cebir olsun. Bu durumda $\mathfrak{B}(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ dır.

İspat $Bim(A)$ nın birleşimli cebir olduğunu biliyoruz, $Bim(A)$ nın A üzerine etkisi genellikle bir üretilmiş etki değildir ve $Bim(A)$ dan herhangi $f = (f*, *f)$ ve $f' = (f'*, *f')$ için

$$f * (a * f') = (f * a) * f' \quad \textbf{(5.3)}$$

koşulu sağlanmaz. $Ann(A) = 0$ ya da $A^2 = A$ olması durumunda (5.3) nin etki için sağlanmadığı açıktır. B objesinin A üzerindeki herhangi bir etkisi ve $B \in \mathbb{A}ss$ için $\varphi : B \to Bim(A)$, $\varphi(b) = (b*, *b)$ şeklindeki dönüşümü tanımlayalım. Bu dönüşüm $Bim(A)$ da olduğundan ve $f, f' \in Bim(A)$ için $f = f'$ olup $f* = f'*$, $*f = *f'$ olduğundan $* \in \Omega_2'$ için $\varphi(b) * a = b * a$ özelliğiyle φ tek homomorfizmdir. Böylece $Bim(A)$, $\mathbb{A}ss$ de A nın bir aktörüdür ve Önerme 5.2.5 ten $\mathfrak{B}(A) \approx Bim(A)$ izomorfizmi vardır.

Birleşimli cebirlerde olduğu gibi değişmeli birleşimli cebirlerde de

$$(b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2)$$

etkisi için koşul sağlanmaz. Ayrıca bu kategoride $b \in \mathfrak{B}(A)$ için $ba = ab$ ve $b_1, b_2 \in \mathfrak{B}(A)$ için $b_1 b_2 = b_2 b_1$ dir. Tüm koşulların sağlanması ve değişmeli birleşimli cebirlerde $\mathfrak{B}(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ olması için gerek ve yeter koşul A nın koşul 2 yi sağlamasıdır. $Ann(A) = 0$ ya da $A^2 = A$ ise A koşul 2 yi sağlar. Bu tür değişmeli cebirlerde $M(A)$, A nın çarpımlarının (ya da çarpanlarının) bir kümesi iken $Akt\ddot{o}r(A) = Bim(A) = M(A)$ dır (Örneğin $f : A \to A$, $f(aa') = F(a)a'$ $k-$ lineer dönüşümlerinde olduğu gibi).

Alternatif cebirlerde A için $Akt\ddot{o}r(A)$ yoktur. Önerme 5.3.4 ün aşağıda verilen koşulu tanımlı değildir. B ve C, A üzerinde etkiler olmak üzere; A, $b \in B$, $c \in C$ için $b(ac) = (ba)c$ koşulunu sağlıyor ise $\mathfrak{B}(A)$, A nın bir aktörüdür. Yukarıda verilen koşul A nın bir birleşimli cebir olduğu anlamına gelir. Böylece $\mathbb{A}lt$ kategorisinde bu koşulu sağlayan birleşmeli cebirlerin aktörleri vardır. $x, y, z \in A \cup (\cup B_i)$ için A nın genel birleşmeliliği anlamına gelmeyen $(xy)z - x(yz) = z(yx) - (zy)x$ koşulunu göz önüne alabiliriz. Bu koşul $\cup B_i$ nin elemanları için etki koşullarının sağlanmasında önemlidir.

Şimdi daha genel bir durumu; $(C,\mathbb{E},\Omega)$ nın bir ilgili kategori ve $\Omega_2 = \{+, , *, *^0\}$ olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda $Aksiyom2$ aşağıdaki iki özelliği içerir

$$\begin{aligned}(y * z) * x &= W_1(y, z\,; x; *, *),\\ (y * z) *^0 x &= W_2(z\,, y; x; *, *^0)\end{aligned}$$

Böylece bu bölümde $Aksiyom2$ ile yukarıdaki iki eşitliği kastedeceğiz. $\widetilde{Aksiyom}2$ ile $\widetilde{\mathbb{E}}$ deki uygun özellikler gösterilecektir. $C \in C$ ve $x, y, z \in C$ için

$$T{=}\{(y{*}(x{*}z), z{*}, (x{*}y)), (y{*}(z{*}x), z{*}(y{*}x)), ((y{*}x){*}z, (z{*}x){*}y), ((x{*}y){*}z, (x{*}z){*}y)\}$$

tanımlayalım.

3. Koşul (a) $Aksiyom2$ deki W_1 ve W_2 kelimeleri T kümesinin her çiftinden en az bir eleman içerirler, böylece her biri W_1 veya W_2 tarafından belirtilebilir.

(b) $W_1(y, z\,; x; *, *)$ ve $W_2(z\,, y; x; *, *^0)$ "sıralamaların" değişmeliliği altında aynı kelimelerdir.

Burada "sıralama" ile $W()$ nin $x_1(x_2x_3)$ şeklindeki sekiz elemanından herbiri kastediliyor.

$\widetilde{\text{3. Koşul}}$ 3.Koşula benzerdir ancak belli $A \in C$ nin elemanları ve farklı etkilerinin elemanları için geçerlidir, bir anlamı olduğunda $x, y, z, t \in A \cup (\cup B_i)$ için geçerlidir. (a) ve (b) koşulları tamamlanmış olur. Böylece $\widetilde{\mathbb{E}}$ deki özellikler ve A nın kendisinin özel özellikleri uygulanabilir.

4. Koşul $W(x{*}y, z; t; *, \overline{*})$ ve $W(x, y; z; *, *)\overline{*}t$, $W(x{*}y, z; t; *^\circ, \overline{*})$ ve $W(x, y; z; *, *^\circ)$ kelimelerinin son ayrışmaları $\overline{*} \in \{*.*^\circ\}$ olmak üzere "sıralamaların" değişmeliliğinden aynıdır. Yani W için her durumda geçerlidir.

$\widetilde{\text{4. Kosul}}$ 4.Koşula benzer şekildedir ancak $x, y, z, t \in A \cup (\cup B_i)$ dır ve $\mathbb{E}$ nin özelliklerini ve A nın özelliklerini uygulayarak 4.Koşulda verilen kelime çiftleri arasındaki eşitlikler vardır.

Önerme 5.3.4

(i) $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine üretilmiş etkileri varsa A , $\widetilde{\text{3.Koşul}}$ u sağlar.

(ii)$\mathfrak{B}(A) \in C$ ise A, $\widetilde{\text{4.Koşul}}$ u sağlar.

Teorem 5.3.5 $\Omega_2 = \{+, , *, *^0\}$ ve E=E$_G \cup \{Aksiyom1,\ Aksiyom2\}$ olmak üzere C bir ilgili kategori olsun.

(a) *C,* 3. koşulu sağlıyorsa herhangi $A \in C$ için $\mathfrak{B}(A)$ nın A üzerine bir üretilmiş etkisi vardır.

(b) *C,* 4. koşulu sağlıyorsa herhangi $A \in C$ için $\mathfrak{B}(A) \in C$ dir.

(c) *C,* 3. ve 4. koşulları sağlıyorsa herhangi $A \in C$ için $\mathfrak{B}(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ dır.

Herhangi bir $A \in C$ için 3.ve 4.$\widetilde{\text{koşullar}}$ sağlanıyorsa bu koşullar bütün serbest cebirler için sağlanır, $\widetilde{Aksiyom2}$ nin sonucu olan belli özellikleri içerir. Fakat bu özellik $A \cup \mathfrak{B}(A)$ nın elemanları için doğru olmayabilir. Herhangi A icin 3.ve 4.$\widetilde{\text{Koşullar}}$ ın sağlanışından $Aksiyom2$ nin sonuç özelliği olmadığında da 3. ve 4. koşullar sağlanır. Böylece bu durumda 3.ve 4.$\widetilde{\text{Koşullar}}$ bir aktörün varlığı için uygun koşullardır. $Aksiyom2$ nin sonuç özellikleri olmasa da 3.ve 4.$\widetilde{\text{Koşullar}}$ ın her zaman sağlanmaları önemli bir özelliktir. Aslında bu özel durum için daha basit koşullar elde edebiliriz.

Teorem 5.3.6 $\Omega_2 = \{+, , *, *^0\}$ ve E=E$_G$ $\cup \{Aksiyom1,\ Aksiyom2\}$ olsun ve $Aksiyom2$ yeni özelikler oluşturmasın. Herhangi $A \in C$ için $\mathfrak{B}(A) = Akt\ddot{o}r(A)$ dır ancak ve ancak w_0, w_1, T kümesinin her bir çiftinden en az bir eleman içerir.

Aşağda $*$ ikili işlemi üzerinde toplamsal değişmelilik $(x*y = y*x)$ ya da değişmezlik $(x * y = -y * x)$ koşulları olan cebirleri ele alalım.

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_G \cup \{Aksiyom1,\ Aksiyom2,\ (A)Comm\}$$

yazacağız. Bahsedilen C ilgili kategorisinde $\mathfrak{B}(A)$ yapısı **(a)** değişmelilik koşulunu da sağlamalıdır. Bu kategori için 3. ve 4. koşulların daha basit formlarını uygularız. $*$ işleminin sadece **(a)** değişmelilik özelliğini kullanarak bunların tam dolu olmalarının gerektiğini söyleyebiliriz. Bu durumda $\mathfrak{B}(A)$ daki işleminin değişmelilik özelliği

$$W_2(y, z\,; x; *, *^0) = W_1(z\,, y; x; *, *^0) \quad (\mathbf{5.4})$$

özelliğini garanti eder, ki bu da $*$ işleminin sadece **(a)** değişmelilik özelliğini ve "sıralama" ların değişmelilik özelliğini sağlar. Değişmeli, birleşmeli cebirler için (5.4) yukarıda istenildiği gibi sağlanmaz. Bu durumda istenilen eşitlik için çarpımın sadece değişmelilik özelliğini değil,birleşmelilik özelliğini de uygularız. Bu da bu durum için $Aksiyom2$ dir.

Teorem 5.3.7 C bir ilgili kategori, Ω_2= $\{+, *\}$ ve

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_G \cup \{Aksiyom1,\ Aksiyom2,\ (A)Comm\}$$

olsun. $Aksiyom2$ yeni özelikler oluşturmuyor ve (5.4) sağlanıyorsa herhangi bir $A \in C$ için $\mathfrak{B}(A)$, A nın bir aktörüdür ancak ve ancak $Aksiyom2$ deki $W()$, T kümesinin her bir çiftinden en az bir eleman içerir.

İspat Özelliklerin doğrudan uygulanmasından açıktır.

Örnek 5.3.8 *Aksiyom*2,

$$x(y * z) = -y * (z * x) - z * (x * y) \quad \mathbf{(5.5)}$$

formuna sahipse $\Omega_2 = \{+, *\}$ ve E=$\mathrm{E}_G \cup \{Aksiyom1,\ Aksiyom2,\ (A)Comm\}$ olmak üzere C kategorisi Teorem 5.3.7 nin koşullarını sağlar. Aynı ifade aynı *Aksiyom*2 ve değişmezlik özelliklerine sahip olan C kategorisi için de doğrudur.

(5.5) Jacobi eşitliğine denktir fakat bizim durumumuzda toplam değişmeli değildir.

Kaynaklar Dizini

Barr, M., 1969, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1-11.

Barr, M., 1970, Coequalizers and free triples, Math., Z., 116 307-332.

Ege, U., 1998, Çaprazlanmış Modüller, Master tezi, Matematik Bölümü, Osmangazi Üniversitesi, 13-17, 21-23, 27-31, 34-37.

Ege, U., 2002, Çarpım Cebri ve Çaprazlanmış Modüller, Doktora tezi, Matematik Bölümü, Osmangazi Üniversitesi, 12-23.

Horst, H., George, E. S., 1973, Category Theory, Allyn and Bacon Inc., .

Mac Lane, S., 1971, Categories for working mathematician, Springer-Verlag.

Manes, E., 1967, A triple miscellany, Dissertation, Wesleyan Univ., Middletown, Conn.

Orzech, G., 1972, Obstruction theory in algebraic categories I, Journal of Pure and Applied Algebra 2, , 287-314 ve 315-340.

Casas, M., Datuashvili, T., Ladra, M., Actors in Categories of interest, Dpto, Matematica Aplicada I, Univ. de Vigo.