İlgili Kategoriler Üzerine

Zeynep Bican

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2007

On The Categories Of İnterest

Zeynep Bican

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

December 2007

İlgili Kategoriler Üzerine

Zeynep Bican

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Ekim 2007

Zeynep BİCAN' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "İlgili Kategoriler Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummuhan EGE

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Ö. Enver USLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

İlgili Kategoriler Üzerine

Zeynep Bican

ÖZET

İlgili Kategoriler üzeri hazırlanan bu yüksek lisans tezi iki bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde, bu çalışmamızda sıkça kullandığımız, Genel Kategori Teorisinin bazı temel kavramlarına yer verilmiştir.

Bununla birlikte ilgili kategoriler kavramı tanıtılıp bu özel yapı için bazı önemli sonuçlar verilmiştir

Anahtar Kelimeler: Kategori, İlgili Kategoriler

On The Categories Of İnterest

Zeynep Bican

SUMMARY

This master thesis on The Categories Of Interest consists of two chapters.
In the first chapter, we recall some basic notions about The Category Theory.
In addition we describe The Categories Of Interest and give some well-known results.

Keywords: Category, Categories Of Interest

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen ve bana danışmanlık yapan değerli hocam sayın

Prof.Dr. Zekeriya ARVASİ'ye,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen hocam sayın

Yrd. Doç. Dr. Ummuhan EGE'ye,

ve desteğini benden esirgemeyen arkadaşım

Serdar HÜRMETLİ'ye

en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2007 Zeynep BİCAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

TABLOLAR DİZİNİ

BÖLÜM 1

KATEGORİ TEORİ

Bu bölümde İlgili Kategoriler için gerekli olan Kategori Teori'deki bazı önemli tanımlar ve örnekler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgiye kaynak olarak kullanılan Prof. Dr. Zekeriya Arvasi'nin ders notlarından ulaşılabilir.

1.1.Kategoriler

Tanım 1.1.1 $\mathcal{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sistemdir.

(i) $Ob(\mathcal{C})$, elemanları obje diyeceğimiz sınıfdır. Bu sınıfın elemanları

$$A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$$

ile gösterilecektir.

(ii) $\mathcal{C}(A, B)$ (veya $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$); elemanlarına morfizm (veya oklar) diyeceğimiz kümedir. Bu kümenin elemanlarını

$$f, g, h, \dots \text{ veya } \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

ile göstereceğiz.

(iii) $Ob(\mathcal{C})$ deki her A,B,C objeleri için

$$\begin{array}{rcl} k^B_{A,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) & \rightarrow & \mathcal{C}(A, C) \\ (f, g) & \mapsto & gf \end{array}$$

fonksiyonuna kompozisyon denir ve

$$k^B_{A,C}(f, g) = gf = g \circ f$$

ile gösterilir ve $Ob(\mathcal{C})$ deki her A objesi için

$$1_A \in \mathcal{C}(A, A)$$

morfizmine birim morfizm denir.

Yukarıda verdiğimiz üç ifadeyi

$$\mathcal{C} = (Ob, \mathcal{C}(-,-),\ k^{-}_{-,-}) \text{ veya } \mathcal{C} = (Ob,\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,-),\ k^{-}_{-,-})$$

ile göstereceğiz. Bu durumda, bu $\mathcal{C}$ yapısı aşağıda vereceğimiz iki özelliği sağlıyor ise $\mathcal{C}$ ye bir **kategori** denir.

(1) Asosyatif Özelliği: $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$ ve $h \in \mathcal{C}(C,D)$ ise

$$h(gf) = (hg)f;$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, "gf"] & D \\
B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "hg"] & C \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.1

(2) Birimlilik: her A objesi için aşağıdaki özelliği sağlayan $1_A : A \to A$ birim morfizmi vardır. Herhangi $f : A \to B$ için

$$f\ 1_A = f = \ 1_B f$$

dir. Yani

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d, "1_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.2

Örnek 1.1.2 Kümeler Kategorisi: $\mathcal{C}$ =**Küme,**

(i) Ob(**Küme**); bütün kümelerin sınıfı;

(ii) Morfizmler; kümeler arasındaki fonksiyonlar kümesidir;

(iii) $k^{-}_{-,-}$; bilinen fonksiyonların bileşke işlemidir.

Aksiyomlar kolayca sağlanır. Burada birim morfizm; birim fonksiyondur. Yani her $a \in A$ için

$$\begin{array}{rccc} 1_A : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \longmapsto & a \end{array}$$

dır.

Örnek 1.1.3 Gruplar kategorisi: $\mathcal{C}$ =**Grp,**

(i) Ob(**Grp**); bütün grupların sınıfı,

(ii) Mor(**Grp**); G ve G' grupları için

$Mor_{Grp}(G, G') = \{f \mid f : G \to G'(\text{grup homomorfizmi})\}$ Yani tüm grup homomorfizmlerinin oluşturduğu kümedir.

(iii) Kompozisyon; bilinen fonksiyonların bileşke işlemidir.

Örnek 1.1.4 Abelyen gruplar kategorisi: $\mathcal{C}$ =**Ab,**

Ob(**Ab**); bütün Abelyen grupların sınıfı;

$Mor_{Ab}(G, G') = Hom_{Ab}(G, G')$

Kompozisyon bilinen bileşke işlemidir.

Örnek 1.1.5 Halkalar kategorisi: $\mathcal{C}$ =**Hlk,**

Ob(**Hlk**); bütün halkaların sınıfı;

Hlk$(-,-)$ = Hom$(-,-)$; halka homomorfizmlerin kümesidir. Benzer şekilde birimli halkalar kategorisi tanımlanır ve $\mathcal{C}$ =$\mathbf{Hlk_1}$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.6 Topolojik uzaylar kategorisi: $\mathcal{C}$ = **Top**,

Ob(**Top**); bütün topolojik uzayların sınıfı;

$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}}(-,-) = S.Fonk(-,-)$; sürekli fonksiyonların kümesi;

$k = \circ$; bilinen bileşke işlemi.

Örnek 1.1.7 F cisim olmak üzere $\mathcal{C}$ = $\mathbf{Vekt}_F$, vektör uzaylar kategorisi;

$Ob(\mathbf{Vekt}_F)$; bütün vektör uzayların sınıfı;

Mor$(-,-)$ =Lin$D(-,-)$; lineer dönüşümler kümesi.

Örnek 1.1.8 R değişmeli halka olsun. Modüller kategorisi $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}_R$;

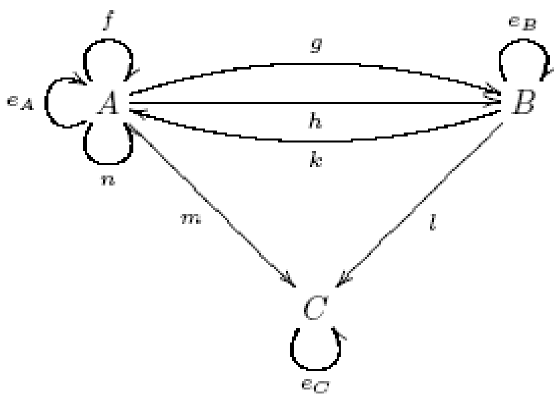
$Ob(\mathbf{Mod})$; bütün R-modüllerin sınıfı;

Mor$(-,-)$ =Hom$(-,-)$˜ modül homomorfizmler kümesi.

1.2 Diyagramlar

Tanım 1.2.1 Yönlendirilmiş kenarların ve noktaların bir kolleksiyonu olarak oluşturulmuş kategoriye **diyagram kategorisi** denir. Diğer bir deyişle bu diyagramın kenarları olarak isimlendirilenler kategorinin morfizmleridir.

Örnek 1.2.2



Şekil 1.3

Bir kategoride temel işlem, kompozisyondur. Buradan örneğin

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{l} C$$

verilen morfizmler için,

$$A \xrightarrow{l \circ g} C$$

kompozisyonu oluşturulur. Dolayısıyla yukarıdaki diyagramın bir kategori olması için

$$l \circ g = m$$

olmak zorundadır. Yani m, A dan C ye giden tek morfizmdir. Bir kategoride en önemli aksiyom asosyatif özelliğidir.

1.3 Değişmeli Diyagramlar

Tanım 1.3.1 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Kalkış objeden varış objeye giden bütün morfizmlerin kompozisyonları eşit ise objelerin ve morfizmlerin diyagramı değişmelidir denir.

Örnek 1.3.2

$$g \circ f = h$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
& \bullet
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.4

$$\beta \circ \alpha = g \circ f$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
\bullet \arrow[r, "\beta"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.5

Önerme 1.3.3

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "g"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.6

diyagramındaki iç kare değişmeli ise dış kare değişmelidir.

İspat

$$\begin{aligned}(g' \circ g) \circ \alpha &= g' \circ (g \circ \alpha) \\ &= g' \circ (\beta \circ f) \\ &= (g' \circ \beta) \circ f \\ &= (\gamma \circ f') \circ f \\ &= \gamma \circ (f' \circ f)\end{aligned}$$

Buraya kadar objeleri; bazı ek yapılar ile birlikte kümeler ve morfizmler bilinen bileşke işlemiyle birlikte dönüşümler olarak bu örnekler üzerinde durduk. Fakat kategori kavramı bunun daha da ötesindedir. Şimdi vereceğimiz örnek biraz anlaşılmaz gelse de bir kategori oluşturmaktadır.

Tanım 1.3.4 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $Ob(\mathcal{C})$ bir küme ise $\mathcal{C}$ ye **küçük kategori** denir.

Örnek 1.3.5 Grubun kendisi bir küçük kategoridir.

$\mathcal{C} = G$ grup

$(G, \circ)$ bir grup olsun.

(**i**)Obje; tek objeli, $Ob(\mathcal{C}) = \{*\}$

(**ii**)Morfizmler; $Mor(*, *) = G$

Yani grubun bütün elemanları morfizmler ve grubun 1_G birim elemanı kategorinin birim morfizmidir.

(**iii**)Kompozisyon; $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}\circ : \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \circ g_2\end{aligned}$$

grup işlemi kategorinin kompozisyonunu oluşturmaktadır.

Var olması gereken objeler, morfizmler ve kompozisyon vardır. (**1**) ve (**2**) aksiyomlarını da sağlarsa G grubunun kendisi bir küçük kategoridir. (**1**) aksiyomu (**G1**) tarafından; (**2**) aksiyomu (**G2**) tarafından sağlanır.

Çünkü;

(G1) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ için

$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ ...(**1**) ve

(**G2**) $\forall g \in G$ için

$g \circ 1_G = g = 1_G \circ g$ dir ...(**2**)

O halde sağlanması gereken (**1**) ve (**2**) aksiyomları da sağlandığından G grubunun kendisi bir küçük kategoridir.

$1_G : * \longrightarrow *$

Örneğin ; $G = \mathbb{Z}$ için $...* \xrightarrow{0} * \xrightarrow{1} * \xrightarrow{2} *...$

Örnek 1.3.6 Monoid de bir tek objeli bir kategoridir. M monoid olsun.

(i) Obje; tek objeli küme

(ii) Morfizmler, M nin elemanları

(iii) Kompozisyon;

$$\begin{array}{rcl} M \times M & \longrightarrow & M \\ (m_1, m_2) & \longmapsto & m_1 \circ m_2 = m_1 \cdot m_2 \end{array}$$

ikili işlemidir. Kompozisyon işlemi, asosyatif ve birim aksiyomlarını sağlar. Fakat ters eleman aksiyomu sağlanmaz.

Örnek 1.3.7 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}^2$ ile göstereceğimiz yeni bir kategori oluşturalım. Bu kategorinin objeleri; $\mathcal{C}$ nin morfizmleri olsun.

Morfizmlerin kümesi, $A \xrightarrow{f} B$ den $C \xrightarrow{g} D$ ye giden morfizmleri olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

Şekil 1.7

diyagramı değişmelidir. Bu morfizmlerin kompozisyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B' \arrow[d, "\beta'"] \\ C' \arrow[r, "g'"'] & D' \end{tikzcd}$$

Şekil 1.8

Diyagramların kompozisyonu var olabilmesi için gerek ve yeter şart $B = A'$ & $D = C'$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f' \circ f"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "g' \circ g"'] & D' \end{tikzcd}$$

Şekil 1.9

diyagramının değişmeli olmasıdır. Diğer bir deyişle kompoziyon

$$(f, g) * (f', g') = (f' \circ f, g' \circ g)$$

dir. $\mathcal{C}^2$ kategorisine $\mathcal{C}$ üzerindeki **Ok kategori** denir.

Örnek 1.3.8 $\mathcal{C}$ bir kategori ve A, $Ob(\mathcal{C})$ de sabit bir obje olsun. $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ ile göstereceğimiz bir kategori oluşturacağız. $Ob(\mathcal{A}^{\rightarrow})$ sınıfın elemanları $\mathcal{C}$ nin $A \xrightarrow{f} X$ şeklindeki morfizmlerin kümesi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Şekil 1.10

şeklindeki değişmeli diyagramları alalım. Yani,

$$Mor_{\mathcal{A}^{\rightarrow}}(\ , \ ) = \{ \ h \mid h : (A \xrightarrow{f} X) \longrightarrow (A \xrightarrow{g} Y), \ hf = g\}$$

Benzer şekilde $^{\rightarrow}\mathcal{A}$ kategorisini oluşturabiliriz.

$Ob(\mathcal{C}\ )$; elemanları $\mathcal{C}$ nin $X \xrightarrow{f} A$ şeklinde morfizmleri olarak alalım. Morfizmlerin kümesi $X \xrightarrow{f} A$ den $Y \xrightarrow{g} A$ ya giden h morfizmi olurlar. Burada

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

Şekil 1.11

diyagramı değişmelidir. Bu kategorilere **virgül kategori** denir.

1.4 Verilen Kategoriden Yeni Kategori Elde Etmek

1.4.1 Altkategoriler

Tanım 1.4.1.1 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{B}$, aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{C}$ nin **alt kategorisi** denir.

(1) $Ob(\mathcal{B}) \subset Ob(\mathcal{C})$ veya $Ob(\mathcal{B})$ objelerin sınıfı $Ob(\mathcal{C})$ nin alt sınıfıdır;

(2) Mor($\mathcal{B}$) $\subset$Mor($\mathcal{C}$) veya $Ob(\mathcal{B})$ deki her $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ objeler için $\mathcal{B}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ dır.

(3) $\mathcal{B}$ nin kompozisyon fonksiyonları, $\mathcal{C}$ nin karşı gelen fonksiyonlarının kısıtlanmışlarıdır. Yani $\mathcal{B}$ deki iki morfizmin kompozisyonu, $\mathcal{C}$ deki kompozisyonu ile aynıdır.

$Ob(\mathcal{B})$ deki her A, B, C objeleri için

$$\begin{array}{ccc} Mor(A,B) \times Mor(B,C) & \longrightarrow & Mor(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ_{\mathcal{B}} f = g \circ_{\mathcal{C}} f \end{array}$$

(4) $\mathcal{B}$ nin birim morfizmi, $\mathcal{C}$ nin birim morfizmidir.

Bununla birlikte $\mathcal{B}$ deki her A, B objesi için

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) = Mor_{\mathcal{B}}(A,B)$$

veya her B, B' objesi için $\mathcal{B}(B,B') = \mathcal{C}(B,B')$ ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{C}$ nin **dolu alt kategorisi** denir.

Örnek 1.4.1.2 Her kategori, kendisinin bir dolu alt kategorisidir.

Örnek 1.4.1.3 SKüme, sonlu kümeler kategorisi, **Küme**, kümeler kategorisinin dolu alt kategorisidir.

Örnek 1.4.1.4 Objeleri kümeler ve morfizmleri birebir (sırasıyla, örten, birebir ve örten) fonksiyonlar olan kategori, **Küme** nin alt kategorisidir. Fakat dolu kategorisi değildir.

Örnek 1.4.1.5 Kümeler ve bağıntılar kategorisi, (objeleri; kümeler sınıfı ve morfizmleri; A dan B ye bütün bağıntıların kümesi) **Küme**, kategorisinin alt kategorisi değildir. Çünkü

$$Mor_{Alt}(,) \subset Mor(,)$$

sağlanmaz.

Örnek 1.4.1.6 (**AbGrp**) Abelyen gruplar kategorisi, (**Grp**) gruplar kategorisinin dolu alt kategorisidir.

Örnek 1.4.1.7 Grp, **Top**, kategorileri **Küme** kategorisinin alt kategorileri değildir.

Örnek 1.4.1.8 Hlk$_1$, kategorisi **Hlk** nın bir dolu olmayan bir alt kategorisidir. Örneğin **Hlk**$_1$ daki her örten morfizm birimi taşır iken **Hlk** kategorisinde yalnız sıfır elemanları taşır.

1.4.2 Çarpım Kategorisi

Tanım 1.4.2.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ şeklinde yeni bir kategori tanımlayacağız. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorilerinin **çarpım kategorisi** denir.

Objeler: $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ nin objeleri,

$$Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{D})$$

alınarak oluşturulur. Bu sınıfın elemanları C, D sırasıyla $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ nin objeleri olmak üzere

$$(C, D)$$

şeklinde ikililerden oluşmaktadır.

Morfizmler: (C, D) ve (C', D') ; $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ nin objeleri ise,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \times \mathcal{D}((C, D), (C', D')) &= \mathcal{C}(C, C') \times \mathcal{D}(D, D') \\
&= \{(f, g) \mid f : C \to C' \text{ ve } g : D \to D' \text{ sırasıyla} \\
&\quad \mathcal{C} \text{ ve } \mathcal{D} \text{ nin morfizmleri}\}
\end{aligned}$$

Kompozisyon:

$$(f, g) \circ_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} (f', g') = (f \circ_{\mathcal{C}} f', g \circ_{\mathcal{D}} g')$$

(1) ve **(2)** aksiyomlarının sağlandığını gösterelim

(1) Her $(f_1, g_1) \in Mor((A_1, B_1), (C_1, D_1)), (f_2, g_2) \in Mor((A_2, B_2), (C_2, D_2))$ ve $(f_3, g_3) \in Mor((A_3, B_3), (C_3, D_3))$ için

$(f_1, g_1) \circ [(f_2, g_2) \circ (f_3, g_3)] \stackrel{?}{=} [(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2)] \circ (f_3, g_3)$

$$\begin{aligned}
(f_1, g_1) \circ_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} [(f_2, g_2) \circ_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} (f_3, g_3)] &= (f_1, g_1) \circ (f_3 \circ_{\mathcal{C}} f_2, g_3 \circ_{\mathcal{D}} g_2) \\
&= [(f_3 \circ f_2) \circ f_1, (g_3 \circ g_2) \circ g_1] \\
&= [f_3 \circ (f_2 \circ f_1), g_3 \circ (g_2 \circ g_1)] \\
&= (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) \circ (f_3 \circ g_3) \\
&= [(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2)] \circ (f_3, g_3)
\end{aligned}$$

(2) $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ deki her (A, B) objesi için

$(1_A, 1_B) = 1_{(A,B)} : (A, B) \to (A, B)$

şeklinde birim morfizm var olup

$(f, g) \in Mor((A, B), (C, D))$ için

$$\begin{aligned}
1_{(A,B)} \circ (f, g) &= (1_A, 1_B) \circ (f, g) \\
&= (f \circ 1_A, g \circ 1_B) \\
&= (f, g)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f,g)\circ 1_{(C,D)} &= (f,g)\circ(1_C,1_D)\\ &= (1_C\circ f, 1_D\circ g)\\ &= (f,g)\end{aligned}$$

$\Rightarrow 1_{(A,B)}\circ(f,g) = (f,g) = (f,g)\circ 1_{(C,D)}$

olduğundan $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ bir kategoridir.

1.4.3 Bölüm Kategorileri

Tanım 1.4.3.1 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $\sim$, $Mor(\mathcal{C})$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

(i) Her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ için

$$[f]_\sim = \{g \mid f\sim g\}\subset Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$$

(ii) $[f]_\sim = [f']_\sim$ ve $[g]_\sim = [g']_\sim$ olmak üzere

$$[f]_\sim\circ[g]_\sim = [f']_\sim\circ[g']_\sim \Leftrightarrow g\circ f\sim g'\circ f'$$

ise $\sim$ ya, $\mathcal{C}$ nin bir **kongüransı** denir.

Tanım 1.4.3.2 $\sim$, $\mathcal{C}$ nin bir **kongüransı** olsun. $\mathcal{D} = \mathcal{C}/_\sim$ ile göstereceğimiz kategoriye **bölüm kategorisi** denir.

Objeler: $Ob(\mathcal{C}/_\sim) = Ob(\mathcal{C})$

Morfizmler: $Mor(\mathcal{C}/_\sim) = \{[f]_\sim : f\in Mor(\mathcal{C})\}$

Kompozisyon: $[f]_\sim\circ[g]_\sim = [f\circ g]_\sim$

(1) ve **(2)** aksiyomlarının sağlandığını gösterelim

(1) Her $[f]_\sim, [g]_\sim, [h]_\sim \in Mor(\mathcal{C}/_\sim)$ için

$([f]_\sim\circ[g]_\sim)\circ[h]_\sim \stackrel{?}{=} [f]_\sim\circ([g]_\sim\circ[h]_\sim)$

$$\begin{aligned}([f]_\sim\circ[g]_\sim)\circ[h]_\sim &= [g\circ f]_\sim\circ[h]_\sim\\ &= [h\circ(g\circ f)]_\sim\\ &= [(h\circ g)\circ f]_\sim\\ &= [f]_\sim\circ[h\circ g]_\sim\\ &= [f]_\sim\circ([g]_\sim\circ[h]_\sim)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ($[f]_\sim \circ [g]_\sim) \circ [h]_\sim = [f]_\sim \circ ([g]_\sim \circ [h]_\sim)$ dir.

(2) $Ob(\mathcal{C}/_\sim)$ daki her A objesi için

$1_A = [1_A]_\sim : A \to A$ şeklinde birim morfizm var olup $f \in Mor_\mathcal{C}(A,B)$ olmak üzere

$[f]_\sim \in Mor(\mathcal{C}/_\sim)$ için

$$\begin{aligned} [1_A]_\sim \circ_{\mathcal{C}/\sim} [f]_\sim &= [f \circ_\mathcal{C} 1_A]_\sim \\ &= [f]_\sim \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [f]_\sim \circ_{\mathcal{C}/\sim} [1_B]_\sim &= [1_B \circ_\mathcal{C} f]_\sim \\ &= [f]_\sim \end{aligned}$$

olup $\mathcal{D} = \mathcal{C}/_\sim$ bir kategoridir.

$\mathcal{D} = \mathcal{C}/_\sim$ kategorisine $\mathcal{C}$ nin bölüm kategorisi denir.

Örnek 1.4.3.3 $\mathcal{C}$ =**Grp** alalım. $Ob(\mathcal{C})$ deki A, B objeleri ve f,g $\in$Mor$_\mathcal{C}(A,B)$ için

$$f \backsim g \Leftrightarrow \text{her } a \in A \text{ için } f(a) = bg(a)b^{-1}$$

olacak şekilde $b \in B$ vardır. (Hatırlatma: G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $b = gag^{-1}$ olacak şekilde $g \in G$ varsa a, b ile eşleniktir denir.)

$\backsim$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olup aynı zamanda bir kongüranstır. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

Yansıma: $f \backsim f \Leftrightarrow \forall a \in G$ için $f(a) = bf(a)b^{-1}$ olacak şekilde $b \in H$ vardır.

$\forall a \in G$ için $b = f(a)$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a)f(a)f^{-1}(a) \\ &= f(a)1_H \\ &= f(a) \end{aligned}$$

olup $f \backsim f$ dir.

Simetri: $f \backsim g \Rightarrow \forall a \in G$ için $f(a) = bg(a)b^{-1}$olacak şekilde $b \in H$ var olduğunu biliyoruz. $\forall a \in G$ için $d = b^{-1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(a) = bg(a)b^{-1} &\Rightarrow b^{-1}f(a)b = g(a) \\ &\Rightarrow df(a)d^{-1} = g(a) \end{aligned}$$

O halde $\forall a \in G$ için $g(a) = df(a)d^{-1}$ olacak şekilde $d = b^{-1} \in H$ vardır. Yani $g \backsim f$ dir.

Geçişkenlik:$f \backsim g$ ve $g \backsim h$ olduğundan $\forall a \in G$ için $f(a) = b_1g(a)b_1^{-1}$ ve $g(a) = b_2h(a)b_2^{-1}$ olacak şekilde $b_1, b_2 \in H$ vardır.

$$\begin{aligned} f(a) &= b_1g(a)b_1^{-1} \\ &= b_1(b_2h(a)b_2^{-1})b_1^{-1} \\ &= b_1b_2h(a)b_2^{-1}b_1^{-1} \\ &= (b_1b_2)h(a)(b_1b_2)^{-1} \end{aligned}$$

olup $f(a) = bh(a)b^{-1}$ olacak şekilde $b = b_1b_2 \in H$ vardır. Yani $f \backsim h$ dır.

Eşlenik bağıntısının bir kongürans olduğunu gösterelim.

(i) $Ob(\mathbf{Grp})$ daki her G, H grupları için

$f : G \to H \in Mor_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ olmak üzere

$[f]_{\sim} = \{g \in Hom(G, H) \mid f \backsim g\} \subseteq Hom(G, H) = Mor(G, H)$

(ii) $[f] = [f']$ ve $[g] = [g']$ ise $[f][g] \stackrel{?}{=} [f'][g']$ yani $[g \circ f] \stackrel{?}{=} [g' \circ f'] \Leftrightarrow g \circ f \stackrel{?}{\backsim} g' \circ f'$

$f \backsim f'$ ve $g \backsim g'$ olduğundan $\forall a \in G$ için $f(a) = b_1g(a)b_1^{-1}$ ve $g(a) = b_2h(a)b_2^{-1}$ olacak şekilde $b_1, b_2 \in H$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \forall a \in G \text{ için } (g \circ f)(a) &= g(f(a)) \\ &= g(b_1f'(a)b_1^{-1}) \\ &= b_1g(f'(a))b_1^{-1} \\ &= b_1b_2g'(f''(a))b_2^{-1}b_1^{-1} \\ &= (b_1b_2)(g' \circ f')(a)(b_1b_2)^{-1} \end{aligned}$$

olup $\forall a \in G$ için $(g \circ f)(a) = d(g' \circ f')(a)d^{-1}$ olacak şekilde $d = b_1, b_2 \in H$ vardır. Yani $g \circ f \backsim g' \circ f'$ elde edilir. Dolayısıyla $[f][f'] = [g][g']$ dür.

(i) ve **(ii)** şartları sağlandığından $\backsim$ eşlenik bağıntısı $Mor(\mathbf{Grp})$ üzerinde bir kongüransdır. $\mathbf{Grp}/_{\sim}$ bölüm kategorisidir.

Bu durumda kategorinin;

Objeleri: $Ob(\mathbf{Grp}/\backsim) = Ob(\mathbf{Grp})$ dur.

Morfizmleri: $Mor(\mathbf{Grp}/_\sim) = Hom(\mathbf{Grp}/_\sim) = \{[f]_\sim \mid \backsim$ eşlenik bağıntısı)

$[f]_\sim = \{g \mid f \backsim g \Leftrightarrow \forall a \in A$ için $f(a) = bg(a)b^{-1}$ olacak şekilde $b \in H$ vardır.$\}$

$$Mor_{\mathbf{Grp}/\backsim}(A,B) = \{[f]_\backsim \mid f \backsim g\}$$

kümesi eşlenik morfizmlerin denklik sınıfıdır.

Kompozisyonu:

$$[f]_\backsim \circ_{\mathbf{Grp}/\sim} [g]_\backsim = [g \circ_{\mathbf{Grp}} f]_\backsim$$

şeklinde tanımlanır.**(i)** ve **(ii)** nin sağlandığını gösterelim

(i)$\forall f \in Hom(G_1, G_2),\ g \in Hom(G_2, G_3)$ ve $h \in Hom(G_3, G_4)$ için

$(\ [f] \circ [g]) \circ [h] \stackrel{?}{=} [f] \circ ([g] \circ [h])$

$$\begin{aligned}([f] \circ [g]) \circ [h] &= [g \circ f] \circ [h] \\ &= [h \circ (g \circ f)] \\ &= [(h \circ g) \circ f] \\ &= [f] \circ [h \circ g] \\ &= [f] \circ ([g] \circ [h])\end{aligned}$$

(ii)$Ob(\mathbf{Grp}/\backsim)$ daki her G objesi için

$1_G = [1_G] : G \to G$ birim morfizmi var olup $f \in Hom(G_1, G_2)$ olmak üzere $[f]_\sim \in Mor(\mathbf{Grp}/_\sim)$ için

$$\begin{aligned}[1_{G_1}]_\sim \circ_{\mathbf{Grp}/\sim} [f]_\sim &= [f \circ_{\mathbf{Grp}} 1_{G_1}]_\sim \\ &= [f]_\sim\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}[f]_\sim \circ_{\mathbf{Grp}/\sim} [1_{G_2}]_\sim &= [1_{G_2} \circ_{\mathbf{Grp}} f]_\sim \\ &= [f]_\sim\end{aligned}$$

yani $[1_{G_1}]_\sim \circ_{\mathbf{Grp}/\sim} [f]_\sim = [f]_\sim = [f]_\sim \circ_{\mathbf{Grp}/\sim} [1_{G_2}]_\sim$ dır.

O halde $\mathbf{Grp}/\backsim$ bölüm kategorisidir.

1.4.4 Dual (Opposite) Kategori

$\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}),\text{Mor}(A,B), \circ)$ herhangi bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ nin dual kategorisi

$$\mathcal{C}^{op} = (Ob(\mathcal{C}), \text{Mor}(B,A), *)$$

olup $*$ kompozisyonu

$$f * g = g \circ f$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{C}^{op}$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle $\mathcal{C}^{op}$ nin objeleri $\mathcal{C}$ nin objeleri ile aynı ve her A, B objeleri için

$$Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(B,A)$$

dir. Morfizmlerin kompozisyonu sırasının değişimidir.

Önerme 1.4.4.1 Herhangi bir kategorinin duali yine bir kategoridir.

Örnek 1.4.4.2 $Vekt$ nin duali yine $Vekt$ dir.

Önerme 1.4.4.3 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ise

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$$

dir.

1.5 Özel Objeler ve Özel Morfizmler

Kümeler kategorisinde aşağıdaki özel tip fonksiyonlar önemli rol oynamaktadır.

Birim fonksiyonlar

Bire-bir Fonksiyonlar

Örten Fonksiyonlar

Bire-bir ve Örten Fonksiyonlar

Sabit Fonksiyonlar

Herhangi bir kategorideki birim morfizm, **Küme** deki birim fonksiyonların bir benzeridir. Diğer fonksiyonların, kategorisel karşılığını tanımlayacağız.

Hatırlatma 1.5.1 (Monikler) Grup teoride, monomorfizm terimi, "1-1" sinonomi ile veya sıfır çekirdeğe sahip olma özelliği ile verilir. Bu her iki durum elemanların kullanılmasıyla olur. Herhangi bir kategoriden objelerin "elemanları" olmayabilir. O halde kavram biraz farklı olmalıdır.

Tanım 1.5.2 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ deki bir $f : A \to B$ morfizmi sol sadeleşebilir ise f ye **monomorfizim** (veya **monik**) denir.

Örnek 1.5.3 Küme, **Grp**, **Ab,** R**-Mod, Halka** ve **Top** kategorilerindeki her bire-bir morfizm bir moniktir.

Tanım 1.5.4 Objeleri bazı ek yapılar ile birlikte kümeler, ve morfizmleri bu yapıları koruyan oklar olan kategorilere **somut** (concrete) **kategori** denir. Örneğin; **Küme**, **Grp** , **Top** kategorileri somut kategorilerdir.

Her somut kategoride her bire-bir morfizm moniktir, fakat tersi doğru değildir. Bu durumu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Tanım 1.5.5 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ deki $f : A \to B$ morfizmi sağ sadeleşebilir, yani

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$$

ise f ye **epimorfizm** (veya kısaca **epik**) denir.

Sonuç 1.5.6 Monik ve Epik dual kavramlardır.

Tanım 1.5.7 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : A \to B$, $\mathcal{C}$ de bir morfizm olsun.

$$g \circ f = 1_A$$

olacak şekilde $g : B \to A$ var ise f ye bir **kesit** (veya **seksiyon**) denir.

Hatırlatma 1.5.8 Her kesit moniktir, fakat tersi doğru değildir.

İspat Her kesit moniktir.

f kesit olsun. Yani $gf = 1_B$ olacak şekilde g var olsun.

$$A \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} B \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} C$$

$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 \overset{?}{=} g_2$$

$$\begin{array}{rrl} \forall a \in A \text{ için} & & (fg_1)(a) = (fg_2)(a) \\ & \Rightarrow & g(fg_1(a)) = g(fg_2)(a) \\ & \Rightarrow & (gf)(g_1(a)) = (gf)(g_2(a)) \\ & \Rightarrow & 1_B(g_1(a)) = 1_B(g_2(a)) \\ & \Rightarrow & g_1(a) = g_2(a) \\ & \Rightarrow & g_1 = g_2 \\ & \Rightarrow & f \text{ moniktir.} \end{array}$$

Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin; $\mathbb{Z}$-**Mod** da,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

tanımlayalım. f bire-bir olduğundan f moniktir. Fakat f bir kesit değildir. Eğer olsaydı her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{array}{rcl} 2g(n) & = & g(2n) \\ & = & g(f(n)) \\ & = & (g \circ f)(n) \\ & = & 1_{\mathbb{Z}}(n) = n \end{array}$$

olup $2g(n) = n$ olurdu. Özel olarak $2g(1) = 1$ dir. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü $2x = 1$ denklemin $\mathbb{Z}$ de çözümü yoktur. Böylece f bir kesit değildir.

Kesitin dual kavramı retraksiyondur.

Tanım 1.5.9 $\mathcal{C}$ bir kategori $f : A \to B$, $\mathcal{C}$ de bir morfizm olsun.

$$f \circ g = 1_B$$

olacak şekilde $g : B \to A$ var ise f ye bir **retraksiyon** denir.

Her retraksiyon epiktir, fakat tersi doğru değildir.

Örnek 1.5.10 $\mathbb{Z}$**-Mod**, kategorisinde p asal olmak üzere

$$\mathbb{Q}_p = \left\{x \in \mathbb{Q} : x = kp^{-n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

tanımlayalım. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}_p \leq \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \\ x + \mathbb{Z} & \longmapsto & px + \mathbb{Z} \end{array}$$

tanımlayım. f bir $\mathbb{Z}$-modül homomorfizmi olduğu açıktır.

(i)$\forall x_1 + \mathbb{Z}, x_2 + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f(x_1 + \mathbb{Z} + x_2 + \mathbb{Z}) &= f(x_1 + x_2 + \mathbb{Z}) \\ &= p(x_1 + x_2) + \mathbb{Z} \\ &= px_1 + px_2 + \mathbb{Z} \\ &= px_1 + \mathbb{Z} + px_2 + \mathbb{Z} \\ &= f(x_1 + \mathbb{Z}) + f(x_2 + \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(ii)$\forall r \in \mathbb{Z}$ ve$\forall x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f(r(x + \mathbb{Z})) &= f(rx + \mathbb{Z}) \\ &= p(rx) + \mathbb{Z} \\ &= (pr)x + \mathbb{Z} \\ &= (rp)x + \mathbb{Z} \\ &= r(px) + \mathbb{Z} \\ &= r(px + \mathbb{Z}) \\ &= rf(x + \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

olup $f,\ \mathbb{Z} -$ modül homomorfizmidir.

f nin epik fakat retraksiyon olmadığını gösterelim. f nin örten olduğunu göstermemiz epiklik için yeterlidir. Çünkü **AbGrp** da "f homomorfizmi örtendir $\Leftrightarrow$ f epiktir" olduğunu ispatlamıştık.

f in örten olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned} f(x+\mathbb{Z}) &= f(kp^{-n}+\mathbb{Z}) \\ &= f(p(kp^{-n-1}+\mathbb{Z})) \\ &= fp(kp^{-n-1}+\mathbb{Z}) \\ &= p(pkp^{-n-1}+\mathbb{Z}) \\ &= p(kp^{-n}+\mathbb{Z}) \\ &= p(x+\mathbb{Z}) \\ &= px+\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olup f örtendir. O halde f epiktir. Fakat f retraksiyon değildir. Olsaydı

$fg = 1_B$ olacak şekilde $g : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ morfizmi var olmalıdır.

$$\begin{aligned} p^{-1}+\mathbb{Z} &= f(g(p^{-1}+\mathbb{Z})) \\ &= pg(p^{-1}+\mathbb{Z}) \\ &= g(pp^{-1}+\mathbb{Z}) \\ &= g(1+\mathbb{Z}) \\ &= g(0+\mathbb{Z}) \\ &= 0+\mathbb{Z}=\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olurdu. Fakat $p^{-1} \notin \mathbb{Z}$ dir. O halde f bir retraksiyon değildir.

1.6 Bimorfizm ve İzomorfizm

Şimdi yukarıda verdiğimiz kavramları birleştirelim

Tanım 1.6.1 Bir morfizm monik ve epik ise bu morfizme **bimorfizm** denir.

Tanım 1.6.2 $\mathcal{C}$ kategorisinde A ve B objeleri verilsin. $f : A \to B$ morfizmi kesit ve retraksiyon ise f ye **izomorfizm** denir. Yani

$$f : A \to B \text{ izomorfizm } \Leftrightarrow f \circ g = 1_B \text{ ve } g \circ f = 1_A$$

olacak şekilde bir tek $g : B \to A$ morfizmi vardır. Bu durumda A objesi B objesine izomorftur denir ve $A \cong B$ ile gösterilir. Buradaki g morfizmine **ters morfizm** denir.

g nin tekliği; g' aynı özelliğe sahip diğer bir morfizm olsun.

$fg' = 1_B$ ve $g'f = 1_A$

$$\begin{aligned} g &= 1_A g \\ &= (g'f)g \\ &= g'(fg) \\ &= g'1_B \\ &= g' \end{aligned}$$

$\Rightarrow g = g'$ burdan da g tektir.

Hatırlatma 1.6.3 Her somut kategorideki izomorfizm birebir ve örten olup monik ve epiktir. Dolayısıyla izomorfizm bimorfizmdir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin;

$\mathcal{C} = B\ddot{o}lAb$

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ morfizmi moniktir. Ayrıca örten olup epiktir. Böylece bimorfizmdir. Fakat birebir olmadığından izomorfizm değildir.

Örnek 1.6.4 Herhangi kategorideki her birim morfizm izomorfizmdir.

Tanım 1.6.5 Bir kategorideki her bimorfizm bir izomorfizm ise bu kategoriye **dengelenmiş** (balanced) **kategori** denir.

1.7 İlk, Son ve Sıfır Objeler

1.7.1 İlk (initial) objeler

Tanım 1.7.1.1 $\mathcal{C}$ kategorisindeki her X objesi için

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I, X) \text{ yani } |\mathcal{C}(I, X)| = 1$$

kümesinin bir tek elemanı var ise I ya $\mathcal{C}$ nin **ilk objesi** denir.

Örnek 1.7.1.2 **Küme**, **Grp**, **Top** kategorilerindeki ilk objeleri sırasıyla

$$\text{boş küme}, \{e\}, \text{boş uzay}$$

dır.

Örnek 1.7.1.3 $\{0\}$, **Halka** ve R-**Mod** kategorilerinde ilk objedir.

Örnek 1.7.1.4 **Cisim**, kategorisinin ilk objesi yoktur.

Önerme 1.7.1.5 I_1ve I_2 ; $\mathcal{C}$ kategorisinin ilk objeleri ise

$$I_1 \to I_2$$

izomorfizmdir. Yani ilk obje izomorfizm farkıyla tektir.

İspat I_1, ilk obje ise $\mathrm{Mor}(I_1, I_2) = \{f\}$ ve I_2, ilk obje ise $\mathrm{Mor}(I_2, I_1) = \{g\}$ dir. Teklikten (yani I_1 den ve I_2 den morfizmler biriciktir.

$$\left(I_1 \overset{g\circ f}{\to} I_1\right) = \left(I_1 \overset{1_{I_1}}{\to} I_1\right) \text{ ve } \left(I_2 \overset{f\circ g}{\to} I_2\right) = \left(I_2 \overset{1_{I_2}}{\to} I_2\right)$$

olup

$$g \circ f = 1_{I_1} \text{ ve } f \circ g = 1_{I_2}$$

elde edilir. O halde $I_1 \cong I_2$ dir.

1.7.2 Son objeler

Bir kategoride objelerin veya morfizmlerin bir çok genel tanım çeşitlerinin dualleri alınmaktadır. İlk objenin duali olan son objeyi tanımlayalım.

Tanım 1.7.2.1 Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde her X objesi

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, S)$$

kümesi tek morfizmden oluşmakta ise $\mathcal{C}$ nin S objesine **son obje** denir. Yani $X \to S$ bir tek morfizm var olmasıdır.

Örnek 1.7.2.2 **Küme**, **Grp**, **Top**, kategorilerindeki son objeler, sırasıyla

$$\{x\}(\text{veya } \ \{\emptyset\}), \{1\}, X = \{x\} \text{ topolojik uzay}$$

Örnek 1.7.2.3 $\{0\}$, **Halka** ve R-**Mod** kategorilerinin son objesidir.

Örnek 1.7.2.4 Halka$_1$; birimli halkalar kategorisinin son objesi yoktur. Çünkü birimli halkalar denince $1 \neq 0$ olduğu kabul edilmektedir. Aksi taktirde halka sıfırdan oluşur.

Örnek 1.7.2.5 Cisim, kategorisinin son objesi yoktur.

Önerme 1.7.2.6 İlk obje ve son obje dual kavramlardır.

Önerme 1.7.2.7 S_1 ve S_2, $\mathcal{C}$ kategorisinde son objeler ise $S_1 \cong S_2$ dir.

İspat S_2,son obje ise $S_1 \xrightarrow{f} S_2$ tek morfizm var ve S_1,son obje ise $S_2 \xrightarrow{g} S_1$ tek morfizm vardır. Teklikten;

$$\begin{aligned} S_1 \xrightarrow{f} S_2 \xrightarrow{g} S_1 \ ; \ g \circ f &= 1_{S_1} \\ S_2 \xrightarrow{g} S_1 \xrightarrow{f} S_2 \ ; \ f \circ g &= 1_{S_2} \end{aligned}$$

olup

$$S_1 \cong S_2$$

dir. Yani son obje izomorfizm farkıyla tektir.

1.7.3 Sıfır objeler

Tanım 1.7.3.1 $\mathcal{C}$ kategorisindeki Z objesi hem ilk hem de son obje ise Z ye $\mathcal{C}$ nin **sıfır objesi** denir.

Örnek 1.7.3.2 Grp, **Halka**, $\mathbf{Mod_R}$ kategorilerinde $\{1\}$, $\{0\}$ objeleri hem ilk hem de son obje olup sıfır objelerdir.

Örnek 1.7.3.3 Küme, **Top**, **Halka**$_1$ kategorilerinin sıfır objeleri yoktur. Çünkü ilk ve son objeleri birbirinden farklıdır.

Önerme 1.7.3.4 İki sıfır obje birbirine izomorftur. Z, $\mathcal{C}$ kategorisinin sıfır objesi olsun. $\mathcal{C}$ nin A, B objeleri için

$$0_{AZ} : A \to Z \text{ ve } 0_{ZB} : Z \to B$$

şeklinde bir tek morfizm vardır. Bu morfizmlerin kompozisyonunu göz önüne alalım.

$$0_{ZB} = 0_{AZ} : A \to B$$

Bu morfizm yalnız A ve B objelerine bağlı olup Z ye bağlı değildir.

Teorem 1.7.3.5 $\mathcal{C}$ kategorisinin bir sıfır morfizmi var ise $\mathcal{C}$ nin her f morfizmi için

$$0 \circ f = 0 \text{ ve } f \circ 0 = 0$$

dir.

Bir kategorinin ilk ve son objesi olup sıfır objesi olmayabilir. Örneğin **Küme** kategorisinin son objesi yoktur.

Tanım 1.7.3.6 $\mathcal{C}$ kategorisinin her A, B objeleri için

$$\mathrm{Mor}(A, B) \neq \emptyset$$

ise $\mathcal{C}$ ye bağlantılı kategori denir.

1.8 Funktorlar

Bir kategoriden diğer bir kategoriye giden morfizm kavramını tanımlayacağız.

Tanım 1.8.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun.

$$F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$$

fonksiyonu;

(Birimlerin koruması) $\mathcal{C}$ nin her A objesi için

$$F(1_A) = 1_{F(A)};$$

(Kompozisyonların korunması) $f \circ g$, $\mathcal{C}$ nin bir kompozisyonu ise

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g);$$

özelliklerini sağlıyor ise F ye $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir funktor denir ve ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) ile gösterilir.

Hatırlatma 1.8.2 ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) üçlüsünü genel olarak

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \text{ veya } \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

ile göstereceğiz.

Herhangi bir kategoride, objeler ile birimler arasında

$$A \longleftrightarrow 1_A$$

şeklinde birebir karşılık olduğundan funktorlar birimleri korumalıdır.

$\mathcal{C}$ nin A ve B objeleri için

$$F(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)) \subset \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

dir. $A \xrightarrow{f} B$ için $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$; $F(f) \in$Mor$(F(A), F(B))$ dir. Çünkü F; $\mathcal{C}$ nin her A, B objelerini $\mathcal{D}$ nin $F(A), F(B)$ objelerine götürmektedir. Daha açık olarak $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ herhangi funktoru "obje- fonksiyon" dur. Diğer bir deyişle

$$F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

dir.

Örnek 1.8.3 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

$$1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

birim funktor vardır. Burada $\mathcal{C}$ nin her A objesi için

$$1_{\mathcal{C}}(A) = A$$

$\mathcal{C}$ nin her f morfizmi için

$$1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

Örnek 1.8.4 $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ nin bir alt kategorisi olsun.

$$I : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$$

(I :$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ $\hookrightarrow$Mor($\mathcal{D}$) gömme fonk.) gömme funktor tanımlanabilir.

$\mathcal{C}$ nin her A objesi için

$$I(A) = A$$

$\mathcal{C}$ nin her f morfizmi için

$$I(f) = f.$$

Örnek 1.8.5 $\mathcal{C}/_{\sim}$,$\mathcal{C}$ nin bölüm kategorisi olsun.

$$Q : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C}/_{\sim})$$

bölüm fonksiyonu olmak üzere Q, $\mathcal{C}$ nin her bir f morfizmini, f nin $[f]$ denklik sınıfına götürür.

Bu durumda

$$Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/_{\sim}$$

fonkturuna **bölüm funktoru** denir.

Örnek 1.8.6 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ iki kategori ve B, $\mathcal{D}$ nin sabit bir objesi olsun. $\mathcal{C}$ nin herhangi bir A objesi için $F(A) = B$ ve $f : A_1 \rightarrow A_2$ morfizmi için

$$\begin{array}{cccc} F(f) & : F(A_1) & \rightarrow & F(A_2) \\ \| & \| & & \| \\ 1_B & : \quad B & \rightarrow & B \end{array}$$

şeklinde birim morfizmdir. Yani $\mathcal{D}$ nin bütün morfizmleri birim morfizmdir. Diğer bir deyişle

$$\begin{array}{rccc} F: & \text{Mor}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \text{Mor}(\mathcal{D}) \\ & f & \longmapsto & 1_* \end{array}$$

sabit fonksiyon ise bu durumda

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

funtoruna **sabit funktor** denir.

Örnek 1.8.7 ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) bir funktor ise ($\mathcal{C}^{op}$,F^{op},$\mathcal{D}^{op}$) dual funktor oluşturulabilir. Böylece F ve F^{op} nin morfizm kümeleri aynı

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op})$$

Fakat

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

iken

$$F^{op} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

dir.

Örnek 1.8.8 $\mathcal{C}$ herhangi somut bir kategori olsun.

$$U : \mathcal{C} \to \mathbf{K\ddot{u}me}$$

şeklinde bir funktor vardır. $\mathcal{C}$ nin her A objesini, $F(A)$ kümesine ve herhangi fonksiyonu, kümeler üzerinde fonksiyonlara taşımaktadır. Bu funktora **unutulabilir (forgetful) funktor** denir. Örneğin;

$$\begin{aligned} U &: \mathbf{Grp} \to \mathbf{K\ddot{u}me} \ \ \text{(Grup yapısı unutuluyor)} \\ U &: \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Ab} \ \ \text{(Çarpım yapısı unutuluyor)} \\ U &: \mathbf{Halka}_1 \to \mathbf{Ab} \ \ \text{(Çarpım yapısı unutuluyor)} \end{aligned}$$

unutulabilir funktorlardır.

Örnek 1.8.9 G bir grup ve G', G nin komütator normal altgrubu olsun. Her $f : G \to H$ grup homomorfizmini

$$F(f)\mid_{G'} : G' \to H'$$

grup morfizmine indirgemektedir. Bu durumda

$$F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$$

funktoru

$$F(G) = G' \text{ ve } F(f) = g$$

şeklinde tanımlanır. Bu funktora **komütatör funktor** denir.

Örnek 1.8.10 (Abelyenleşme funktoru)

$$F : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

funktorunu tanımlayalım. G bir grup olsun.

$$F(G) = G/G'$$

tanımlayalım. Burada G', komütatör altgrup olup

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \ (x, y \in G)$$

şeklinde elemanlar tarafından üretilen bir altgruptur. Bununla birlikte G' ayrıca bir normal altgruptur. O halde

$$F(G) = G/G'$$

bölüm grubunu oluşturabiliriz. Bu yapı verilen bir grubun abelyenleştirilmesidir.

$f : G \to H$ grup homomorfizmi ise

$$\begin{array}{rccc} F(f): & F(G) & \longrightarrow & F(H) \\ & \| & & \| \\ & G/G' & \longrightarrow & H/H' \\ & G'g & \longmapsto & H'f(g) \end{array}$$

grup homomorfizmi olup $F(f)$ homomorfizmi iyi tanımlıdır. Şöyleki;

$$\begin{aligned} G'g_1 = G'g_2 &\Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in G' \\ &\Rightarrow f(g_1 g_2^{-1}) \in H' \\ &\Rightarrow f(g_1) f(g_2)^{-1} \in H' \\ &\Leftrightarrow f(g_1) \in H' f(g_2) \\ &\Leftrightarrow H' f(g_1) = H' f(g_2) \end{aligned}$$

dir. Bununla birlikte

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q_G"] \arrow[d, "f"'] & G/G' \arrow[d, "F(f)"] \\ H \arrow[r, "q_H"'] & H/H' \end{tikzcd}$$

Şekil 1.12

diyagramı değişmelidir. Bu funktora **Abelyenleşme funktoru** denir.

Önerme 1.8.11 $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ve $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ iki funktor ise $G \circ F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ bir funktordur.

Hatırlatma 1.8.12 Bir kategorinin funktor altındaki görüntüsü bir kategori değildir.

$$\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C} = \{1,2,3,4\}), Mor(\mathcal{C}) = \{(2,1) : 1 \rightarrow 2, (4,3) : 3 \rightarrow 4\})$$
$$\mathcal{D} = (Ob(\mathcal{D} = \{5,6,7\}), Mor(\mathcal{D}) = \{(6,5) : 5 \rightarrow 6, (7,6) : 6 \rightarrow 7\}$$
$$Kompozisyon : (7,6) \circ (6,5) : 5 \rightarrow 7)$$

Burada birim morfizmler belirtilmemiştir.

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

funktoru

$$F(1) = 5,\ F(2) = 6 \quad , \quad F(3) = 6,\ F(4) = 7$$
$$F(2,1) = (6,5) \quad , \quad F(4,3) = (7,6)$$

tanımlayalım.

$$F(4,3) \circ F(2,1) = (7,6) \circ (6,5) = (7,5)$$

morfizmi F nin görüntüsünde değildir.

Burada F nin görüntüsü olan

$$F(\mathcal{C}) = \ \overset{5}{\bullet} \longrightarrow \overset{6}{\bullet} \longrightarrow \overset{7}{\bullet}$$

diyagramı bir kategori değildir.

Buradan $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ herhangi bir kategori için F nin görüntüsü iki durumda alt kategori olabilir.

(1) F, objeler üzerinde bire-bir

(2) F tam funktor (yani $Mor(\mathcal{D}) = Mor(F(\mathcal{C}))$)

bu durumda görüntü alt kategorisi

$$F(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$$

ile göstereceğiz.

Tanım 1.8.13 ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}$) funktoruna kontravaryant funktor $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{C}^{op}$,F,$\mathcal{D}$) bir funktor (veya denk olan ($\mathcal{C}$,F,$\mathcal{D}^{op}$) bir funktor). Diğer bir deyişle; $\mathcal{C}$ nin her A objesi için $F(A)$, $\mathcal{D}$ nin bir objesi $f : A \rightarrow B$, $\mathcal{C}$ nin morfizmi ise $Ff : FB \rightarrow FA$ öyleki

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \text{ ve } F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Örnek 1.8.14 F : **Ab** $\rightarrow$ **Küme** bir kontravaryant funktordur.

B, **Ab** nin sabit bir objesi olmak üzere

$$F(A) = \mathrm{Hom}(A, B)$$

tanımlayalım.

$f : A_1 \rightarrow A_2$ homomorfizmi için

$$\begin{array}{cccc} F(f): & F(A_2) & \longrightarrow & F(A_1) \\ & \| & & \| \\ & \mathrm{Hom}(A_2, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A_1, B) \\ & Q & \longmapsto & F(f)(Q) = Qf \end{array}$$

tanımlayalım. Şöyleki

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Qf"'] & & A_2 \arrow[dl, "Q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.13

diyagramı değişmelidir. Bu durumda

$$F(fg) = F(g)F(f)$$

olduğunu gösterelim. $Q \in$Hom(A_2, B) için

$$\begin{aligned} F(fg)(Q) &= Q(fg) \\ &= (Qf)g \\ &= F(g)(Qf) \text{ (tanımdan)} \\ &= F(g)F(f)(Q) \end{aligned}$$

Tanım 1.8.15 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ kategori olsun.

$$F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

funktoru **iki değişmeli** (bifunktor, veya ikili) **funktor** denir.

1.9 Doğal Transformasyon

Tanım 1.9.1 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ iki funktor olsun.

$$\eta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$$

fonksiyonu;

(i) $\mathcal{C}$ nin her A objesi için

$$\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

morfizmi $\mathcal{D}$ nin morfizmi;

(ii) $\mathcal{C}$ nin her $f : A_1 \to A_2$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "f"'] & F(A_1) \arrow[r, "\eta_{A_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A_1) \arrow[d, "G(f)"] \\ A_2 & F(A_2) \arrow[r, "\eta_{A_2}"'] & G(A_2) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.14

diyagramı değişmeli; şartları sağlanıyorsa (F, η, G) (veya $\eta : F \to G$) üçlüsüne **doğal transformasyon** denir.

Bu son şarta "doğallık şartı" denir. Yani $\eta_A; \mathcal{C}$ kategorisinin morfizmleri üzerinde F ve G nin etkisiyle $F(A)$ dan $G(A)$ ya giden bir yoldur.

Örnek 1.9.2 $I : F \to G$ birim doğal transformasyondur. Diğer bir deyişle

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Örnek 1.9.3 A herhangi bir küme ve

$$F = A \times - : \textbf{Küme} \to \textbf{Küme} \text{ ve } G = - \times A : \textbf{Küme} \to \textbf{Küme}$$

sağ ve sol birleştirilmiş funktorlar olsun. Bu durumda

$$\eta : A \times - \longrightarrow - \times A$$

bir doğal transformasyondur.

i) Herhangi X kümesi için $\eta_X : F(X) \to G(X)$ fonksiyonu;

$$\begin{array}{rccc} \eta_X : & A \times X & \longrightarrow & X \times A \\ & (a, x) & \longmapsto & (x, a) \end{array}$$

şeklinde olup **Küme** de bir morfizm (yani fonksiyon) dir.

ii) $f : X_1 \to X_2$ fonksiyonu için

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "f"'] & A \times X_1 \arrow[r, "\eta_{X_1}"] \arrow[d, "1_A \times f"'] & X_1 \times A \arrow[d, "f \times 1_A"] \\ X_2 & A \times X_2 \arrow[r, "\eta_{X_2}"'] & X_2 \times A \end{tikzcd}$$

Şekil 1.15

diyagramı değişmelidir. Diğer bir deyişle

$$\begin{tikzcd} (a, x_1) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x_1, a) \arrow[d, mapsto] \\ (a, x_2) \arrow[r, mapsto] & (x_2, a) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.16

dir.

Tanım 1.9.4 $\eta : F \to G$ doğal transformasyon olsun. Her A objesi için

$$\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

izomorfizm ise η ye **doğal izomorfizm** denir. Bu durumda

$$\eta_A^{-1} : G(A) \longrightarrow F(A)$$

ters izomorfizmi var olup $\eta^{-1} : G \to F$ doğal transformasyonu tanımlanır ve

$$\eta : F \cong G$$

ile gösterilir.

Örnek 1.9.5

$$\eta : F \longrightarrow I$$

doğal transformasyonu verilsin. Her $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$ için

$$\begin{array}{rccc} \eta_M : & F(M) & \longrightarrow & I(M) \\ & \| & & \| \\ & \mathrm{Hom}(R,M) & \longrightarrow & M \\ & Q & \longmapsto & Q(1) \end{array}$$

tanımlayalım. Bu durumda η_M bir doğal izomorfizmdir.

$\eta^{-1} : I \to F$ funktorunu tanımlayalım. Her M, R-modülü için

$$\begin{array}{rccc} \eta_M^{-1} : & I(M) & \longrightarrow & F(M) \\ & \| & & \| \\ & M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,M) \\ & m & \longmapsto & Q \end{array}$$

dir.

$$\eta\eta^{-1} = I_M \text{ ve } \eta^{-1}\eta = I_{F(M)}$$

olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için

$$\eta\eta^{-1}(m) = \eta(\eta^{-1}(m)) = \eta(Q(r)m) = Q(1)m = 1 \cdot m = m$$

olup $\eta\eta^{-1} = I_M$ dir. Benzer şekilde

$$\eta^{-1}\eta(Q) = \eta^{-1}(\eta(Q)) = \eta^{-1}(rQ(1)) = \eta^{-1}(Q(r \cdot 1)) = \eta^{-1}(Q(r)) = Q$$

olup $\eta\eta^{-1} = I_{F(M)}$ dir.

Hatırlatma 1.9.6 İzomorfik kategoriler, doğal izomorfiktir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin

$$\mathcal{C} = \{A, B; f : A \to B, g : B \to A; I_A, I_B\}$$

ve

$$\mathcal{C}' = \{C, I_C\}$$

kategorilerini alalım. $gf = I_A$ ve $fg = I_B$ olduğundan $A \cong B$ dir.

$$GF \cong I_{\mathcal{C}} \text{ ve } FG \cong I_{\mathcal{C}'}$$

olacak şekilde F ve G funktorlarının var olduğunu gösterelim. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funktoru

$$F(A) = F(B) = C$$

ve

$$F(I_A) = I_C, F(I_B) = I_C, F(f) = F(g) = I_C$$

şeklinde tanımlansın. $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ funktorunu $G(C) = A$ ve $G(I_C) = I_A$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ bileşke funktoru;

$$GF(A) = GF(B) = A \text{ ve } GF(I_A) = GF(I_B) = GF(f) = GF(g) = I_A$$

olur. $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ birim funktor olmak üzere

$$\eta : GF \longrightarrow I$$

doğal transformasyonunu tanımlayalım. Her A, B objeleri için

$$\begin{array}{cccc} \eta_A : & GF(A) & \longrightarrow & I(A) \\ & \| & & \| \\ & A & \longrightarrow & A \end{array} \qquad \text{ve} \qquad \begin{array}{cccc} \eta_B : & GF(B) & \longrightarrow & I(B) \\ & \| & & \| \\ & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

olup $\eta_A = I_A$ ve $\eta_B = f$ dir. Böylece η_A ve η_B birer izomorfizmdir. Çünkü I_A ve f izomorfizmdir. Böylece $GF \cong I_{\mathcal{C}}$ dir. Ayrıca $FG : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$, $FG(C)=C, FG(I_C)=I_C$ olup $FG \cong I_{\mathcal{C}'}$ dir. O halde C ve C' kategorileri doğal bir izomorfizmdir. Fakat $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ izomorfik değildir. Çünkü $\mathcal{C}$ nin iki ve $\mathcal{C}'$ nün bir objesi vardır.

1.10 Adjoint Funktor

F sabit bir cisim olsun.

$$\text{Küme} \underset{U}{\overset{V}{\rightleftarrows}} Vekt_F$$

funktorlarını alalım. W vektör uzayı ise $U(W)$ bütün vektörlerin kümesi olup U forgetful funktordur. X herhangi bir küme ise $V(X)$, X tarafından üretilen vektör uzayıdır. Yani, $V(X)$ in herhangi elemanı $k_i \in F$ ve $x_i \in X$ olmak üzere $\sum k_i x_i$ şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow U(W) \\ x_i &\mapsto g(x_i) \end{aligned}$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned} f : V(X) &\rightarrow W \\ \sum r_i x_i &\mapsto \sum r_i g(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V(X) \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

Şekil 1.17

şeklinde biricik lineer dönüşüme genişletilebilir. Bu durum

$$\varphi : (V(X), W) \cong \text{ Küme}(X, U(W))$$

şeklinde izomorfizme dönüşür. Yani,

$$\psi : \text{Fonk}(X, U(W)) \rightarrow \text{ LinDön}(V(X), W)$$

fonksiyonu

$$\psi(g) = f : V(X) \rightarrow W$$

olup

$$f(\sum r_i x_i) = \sum r_i(g_i(x_i))$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun tersi

$$\begin{aligned} \varphi : \text{LinDön}(V(X), W) &\rightarrow \text{Fonk}(X, U(W)) \\ f &\mapsto f\,|_X \end{aligned}$$

olup

$$\varphi(f) = f\,|_X$$

f nin X e kısıtlanışıdır. Bu bijeksiyon her X ve W için şeklinde $\varphi = \varphi_{X,W}$ tanımlanır. Bunun anlamı,

$$\varphi : Vekt(V(-), -) \rightarrow Fonk(-, U(-))$$

funktorların bir doğal transformasyonun bir parçası $\varphi_{X,W}$ olmaktadır. Bu yüzden X ve W için ayrı ayrı doğallık şartı sağlanmalıdır.

X için doğallık; her $h : X' \rightarrow X$ fonksiyonu için

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "g"'] & U(X) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.18

diyagramının değişmeli olmasıdır. Buradan $gh = gh^*$ dir. W için doğallık şartı benzer şekilde verilir.

Tanım 1.10.1 $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ iki kategori ve

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{C}_2 \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

funktorlar olsun. Her $A \in Ob\mathcal{C}_1$ ve $B \in Ob\mathcal{C}_2$ objeleri için

$$\varphi = \varphi_{A,B} : Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \cong Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B))$$

şeklinde bijeksiyon vardır öyle ki A ve B de doğal ise (G, F) ikilisine adjoint ikili denir.

Burada

$$Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B)$$

kümesi ikili funktor olarak gözönüne alınabilir. Şöyle ki

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^{op} \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2^{op} \times \mathcal{C}_2 &\to \text{Küme} \\ (A, B) \mapsto (F \times 1)(A, B) &\mapsto Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir. Benzer şekilde,

$$Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B))$$

kümesi

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2^{op} \to \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1^{op} &\to \text{Küme} \\ (A, B) \mapsto (1 \times G)(A, B) &\mapsto Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece φ bijectionının doğallığının anlamı:

$\forall k : B \to B' \in Mor(\mathcal{C}_2)$ için

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "Mor(F(A),k)=k*"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)) \arrow[d, "(Gk)_*"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g \arrow[d, mapsto] \\ Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B')) & k \circ f \arrow[r, mapsto] & G(k) \circ g \end{tikzcd}$$

Şekil 1.19

$f : F(A) \to B$ ve $g : A \to G(B)$, $G(k) : G(B) \to G(B')$

$\forall h : A' \to A \in Mor_{\mathcal{C}_1}$ için

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A), B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "(Fh)^*"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A, G(B)) \arrow[d, "h^*=Mor_{\mathcal{C}_1}(k,GB)"] \\ Mor_{\mathcal{C}_2}(F(A'), B) \arrow[r, "\varphi_{A',B}"'] & Mor_{\mathcal{C}_1}(A', G(B)) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.20

diyagramı değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g \arrow[d, mapsto] \\ f \circ F(h) \arrow[r, mapsto] & g \circ h \end{tikzcd}$$

Şekil 1.21

$F(h) : F(A') \to F(A)$

Hatırlatma 1.10.2 Adjointness:

$$\mathcal{C}_2(F(A), B) \cong \mathcal{C}_1(A, G(B))$$

doğal izomorfizm, diğer bir deyişle $F(A)$ dan B ye giden oklar ile A dan $G(B)$ ye giden oklar arasında tam birebir eşleme varolmasıdır.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d] & F(A) \arrow[d] \\ G(B) & B \arrow[l, "G"] \end{tikzcd}$$

Şekil 1.22

Örnek 1.10.3 $\mathcal{C}_1$ =Küme ve $Ab = \mathcal{C}_2$ kategorileri

$$\begin{tikzcd} \text{Küme} \arrow[r, shift left, "F"] & Ab \arrow[l, shift left, "G=U"] \end{tikzcd}$$

$X \in Ob$(Küme) herhangi bir küme olmak üzere $F(X)$ serbest Abelyen grup yani $F(X)$ nin herhangi bir elemanı

$$x = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{x \in X} n_i x \qquad (n_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X)$$

şeklinde elemanlardan oluşmaktadır.

$f : X \to X$ herhangi bir fonksiyon ise

$$\begin{array}{rcl} F(f) : F(X) & \to & F(X') \\ x & \mapsto & F(f)(x) = f(x) = \sum n_i f(x_i) \end{array}$$

dir.

G, forgetful funktordur. Yani Ab grup yapısı ihmal edilmektedir. Bu durumda $A \in Ob(Ab)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \varphi_{X,A} : Fonk(X, F(A)) & \to & Hom(F(X), A) \\ \parallel & & \parallel \\ Fonk(X, A) & \to & Hom(F(X), A) \\ f & \mapsto & (\varphi f) : F(X) \to A \\ & & \quad x \mapsto (\varphi f)(x) = f(x) = \sum n_i f(x_i) \end{array}$$

$h : X' \to X$ fonksiyonu için

$$\begin{tikzcd} Fonk(X,A) \arrow[r, "\varphi_{X,A}"] \arrow[d, "h^*"'] & Hom(F(X),A) \arrow[d, "(Fh)^*"] \\ Fonk(X',A) \arrow[r, "\varphi_{X',A}"'] & Hom(F(X'),A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & A \\ X' \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g \circ h"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.23

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "g_1"] & A \\ F(X') \arrow[u, "F(h)"] \arrow[ur, "g_1 \circ F(h)"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.24

olup

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g_1 \arrow[d, mapsto] \\ g \circ h \arrow[r, mapsto] & g_1 \circ F(h) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.25

diyagramı değişmelidir. Benzer şekilde $k : A \to A'$ homomorfizmi için gösterilir.

$$\begin{tikzcd} Fonk(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(F(X),A) \arrow[d] & g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g_1 \arrow[d, mapsto] \\ Fonk(X,A') \arrow[r] & Hom(F(X),A') & g \circ k \arrow[r, mapsto] & k \circ g_1 \end{tikzcd}$$

Şekil 1.26

1.11 Toplamsal Kategori

Bazı kategorilerde, örneğin **Ab** Abelian grupların kategorisinde, her $Ab(A,B)$ morfizmler (yani homomorfizmler) kümesi, bir Abelian grup yapısına sahiptir. Bu yapı

$$\begin{aligned} Ab(A,B) \times Ab(A,B) &\to Ab(A,C) \\ (f,g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

işlemi ile verilir. Bu çarpım bilinendir. Yani,

$$\begin{aligned} g \circ (f_1 + f_2) &= g \circ f_1 + g \circ f_2 \\ (g_1 + g_2) \circ f &= g_1 \circ f + g_2 \circ f \end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.11.1 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

(1) $\mathcal{C}(A,B)$; Abelian grup

(2) Her kompozisyon bi-lineer ise $\mathcal{C}$ ye *Ab-kategori* veya *öntoplamsal kategori* denir.

Örnek 1.11.2 $\mathcal{C} = Ab,\ 0 \sim$ sıfır obje ve $\mathcal{C}(A, B) = Hom(A, B)$

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

işlemiyle bir Abelian grup yani

$$\begin{aligned}
[g(f_1 + f_2)](a) &= g(f_1 a + f_2 a) \\
&= (gf_1)a + gf_2(a) \\
&= (gf_1 + gf_2)(a) \\
\Rightarrow g(f_1 + f_2) &= gf_1 + gf_2
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.11.3 $\mathcal{C}$ öntoplamsal kategori olsun.

(1) $\mathcal{C}$ nin bir sıfır objesi var

(2) $\mathcal{C}$ nin herhangi iki objesinin bir çarpımı var

ise $\mathcal{C}$ ye *toplamsal kategori* denir. Diğer bir deyişle;

$\mathcal{C}$ nin bir A objesi için bir tek

$$0 \to A$$

ve bir tek

$$A \to 0$$

morfizmi var ise 0 ilk ve son obje olup 0 sıfır objedir. Böylece $\mathcal{C}(A, B)$ de

$$A \to 0 \to B$$

kompozisyonu $\mathcal{C}(A, B)$ üzerinde Abelian grup yapısı için bir sıfır morfizmdir.

Hatırlatma 1.11.4 Herhangi A objesi için

$$A \sqcup 0 \cong A \quad \text{ve} \quad A \times 0 \cong A$$

dır.

$A \sqcup B$ (co-product)

$$A \underset{\rightarrow}{i_A} A \sqcup \underset{\leftarrow}{i_B}$$

ile var ise

$$A \sqcup B \to A \sqcup 0 \cong A$$

birim morfizmi vardır.

1.12 Toplamsal Funktor

Tanım 1.12.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki toplamsal kategori olsun.

$$H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

toplamsal funktor;

$\mathcal{C}$ nin her $A,\ B$ objesi için

$$H_{A;B} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(H(A), H(B))$$

fonksiyonu, Abelian gruplar homomorfizmi yani $\mathcal{C}$ de $f, g : A \to B$ için

$$H(f + g) = H(f) + H(g) : H(A) \to H(B)$$

homomorfizmi $\mathcal{D}$ dedir. Ayrıca

$$H(0) = 0 \quad \text{ve} \quad H(A \sqcup B) \cong H(A) \sqcup H(B)$$

dir.

Önerme 1.12.2 Toplamsal kategorideki herhangi iki obje bir co-product a sahiptir. Yani, A ve B nin herhangi çarpımı ayrıca co-productdır.

1.13 Abelian Kategori

Tanım 1.13.1 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

(1) $\mathcal{C}$ toplamsal kategori,

(2) $\mathcal{C}$ de her $f : A \to B$ nin bir kernel ve co-kernel ı var,

(3) $f : A \to B$ monomorfizm ise f nin co-kernel ı kernel dır (yani her monomorfizm bir morfizmin kernel ıdır).

(4) f epimorfizm ise f nin kernel ı co-kernel dır (yani her epimorfizm co-kernel dır).

(5) Her $f : A \to B$ için

$$f = \mu\epsilon$$

olacak şekilde μ; monomorfizmi ve ϵ; epimorfizmi var ise $\mathcal{C}$ ye Abelian Kategori denir.

1.14 Monomorfizmler ve Epimorfizmler

$A,\ B$ abelyen grup ve $f \in Hom(A, B)$ için f bire-bir homomorfizm ise f ye monomorfizm, f örten homomorfizm ise f ye epimorfizm, f bire-bir örten homomorfizm ise f ye izomorfizm denir.

Teorem 1.14.1

(i) $A,\ B$ Abelyen grup ve $f \in Hom(A, B)$ olsun.

$$f \text{ monomorfizm } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall C \text{ Abelyen grup ve } \alpha, \beta \in Hom(C, A) \text{ için} \\ C \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \\ f\alpha = f\beta \Rightarrow \alpha = \beta \text{ sol sadeleşme} \end{cases}$$

(ii)

$$f \text{ epimorfizm } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall C \text{ Abelyen grup ve } \alpha, \beta \in Hom(B, C) \text{ için} \\ A \xrightarrow{f} B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} C \\ \alpha f = \beta f \Rightarrow \alpha = \beta \text{ sağ sadeleşme} \end{cases}$$

Tanım 1.14.2 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ ve $f \in Mor(A, B)$ olsun.

(i) Her $C \in Ob(\mathcal{C})$ ve her

$$C \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$$

morfizmleri için

$$\text{"}f\alpha = f\beta \Rightarrow \alpha = \beta\text{"} \quad \text{(sol sadeleşme)}$$

ise f ye monomorfizm denir.

(ii) Her $C \in Ob(\mathcal{C})$ ve her

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

morfizmleri için

$$\text{"}\alpha f = \beta f \Rightarrow \alpha = \beta\text{"} \quad \text{(sağ sadeleşme)}$$

ise f ye epimorfizm denir.

Teorem 1.14.3 f izomorfizm ise f monik ve epiktir.Bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 1.14.4 $\mathcal{C} = \{Ob(\mathcal{C}) = \{A, B\},\ Mor(\mathcal{C}) = \{1_A, 1_B, f\}\}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

Şekil 1.27

1.15 Çarpımlar ve Bileşik Çarpımlar

1.15.1 Çarpımlar

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $X_i,\ (i \in I)$ $\mathcal{C}$ nin objeleri olsun.

Tanım 1.15.1.1 $Y,\ \mathcal{C}$ nin herhangi objesi ve

$$f_i : Y \to X_i$$

herhangi morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} \Pi(X_i) = X \arrow[r, "p_i"] & X_i \quad p_i f = f_i \\ Y \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.28

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$f : Y \to X = \Pi(X_i)$$

morfizmi var ise X objesine X_i lerin bir çarpımı denir ve (X, p_i) ile gösterilir.

Önerme 1.15.1.2 (X, p_i) ve (X', p'_i) ikilileri X_i objelerin çarpımları olsun.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "p_i"'] & & X' \arrow[dl, "p'_i"] \\
& X_i &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.29

$\theta p'_i = p_i$ $(\forall i \in I)$ olacak şekilde biricik $\theta : X \to X'$ izomorfizmi vardır.

Örnek 1.15.1.3 $\mathcal{C}$ =Kümeler, X_i, kümeler

$$X = \prod i \in I X_i \ \text{ kartezyen çarpım}$$

$$X = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in X_i\}$$

ve

$$\begin{aligned} p_j : X = \Pi X_i &\to X_i \\ x_i &\mapsto p_j(x_i) = x_j \end{aligned}$$

projeksiyon fonksiyonu yani $I = \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} p_1 : X = X_1 \times X_2 &\to X_1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p_2 : X_1 \times X_2 &\to X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.15.1.4 $\mathcal{C} = Grp,\ G_i$, gruplar

$G = \prod\limits_{i \in I} G_i = \{(g_1, g_2, \cdots) \mid g_i \in G_i\}$ ve

$$\begin{aligned} p_j : G &\rightarrow G_i \\ x_i &\mapsto x_j \end{aligned}$$

dir. Bu çarpıma direkt çarpım denir.

Örnek 1.15.1.5 $\mathcal{C} =_R Mod,\ M_i,\ R-$ modüller

$\prod M_i$ direkt çarpım ve $p_i(m_i) = m_j$ dir.

Örnek 1.15.1.6 $\mathcal{C} = Ab,\ A_i$, Abelyen gruplar

$A = \prod A_i = \{(a_i) \mid a_i \in A_i\}$ kartezyen çarpım ve $p_i(a_i) = a_j$ dir.

Örnek 1.15.1.7 $\mathcal{C} = Top,\ X_i$, topolojik uzaylar

$\prod X_i$ topolojik uzayların kartezyen çarpımı

$$p_i : \prod X_i \rightarrow X_i$$

dir.

Örnek 1.15.1.8 Çarpım her zaman mevcut değildir. $\mathcal{C}$ iki elemanlı bütün kümeler olsun. Bu kümeler arasındaki fonksiyonları alalım. Yani

$$X_1 = \{a_1, a_2\} \quad X_2 = \{b_1, b_2\} \text{ve} \quad X = \{c_1, c_2\}$$

$$p_1 : X \rightarrow X_1 \quad \text{ve} \quad p_2 : X \rightarrow X_2$$

ve X_2 nin çarpımı olduğunu kabul edelim. $Y = \{d_1, d_2\}$ ve

$$f_1 : Y \rightarrow X_1 \quad \text{ve} \quad f_2 : Y \rightarrow X_2$$

olsun. Yani

$$\begin{tikzcd} & & X_1 \\ Y \arrow[urr, "f_1"] \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[drr, "f_2"'] & X \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & & X_2 \end{tikzcd}$$

Şekil 1.30

Buradan

$$p_1 f = f_1 \quad \text{ve} \quad p_2 f = f_2$$

dir. f ve f_2 fonksiyonlarını bire-bir ve örten olarak alalım. O halde p_1 ve p_2 fonksiyonları bire-bir ve örten olup

$$\begin{aligned} p_1(c_1) &= a_1 \quad p_1(c_2) = a_2 \\ p_2(c_1) &= b_1 \quad p_2(c_2) = b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 : Y &\rightarrow X_1 \\ d_1 &\mapsto a_1 \\ d_2 &\mapsto a_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_2 : Y &\rightarrow X_2 \\ d_1 &\mapsto b_2 \\ d_2 &\mapsto b_1 \end{aligned}$$

buradan $f_1 = p_1 f \Rightarrow f_1(d_1) = p_1 f(d_1) = p_1(a_1)$ dir.

1.15.2 Bileşik çarpımlar

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve X_i $(i \in I)$, $\mathcal{C}$ nin objeleri olsun.

Tanım 1.15.2.1 Y, $\mathcal{C}$ nin herhangi objesi ve

$$f_i : X_i \rightarrow Y$$

herhangi bir morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "f_i"'] & X \arrow[l, "q_i"'] \arrow[dl, dashed, "f"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.31

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$f : X \to Y$$

morfizmi var ise X e X_i lerin bileşik çarpımı denir ve (X, q_i) ile gösterilir.

Örnerme 1.15.2.2 (X, q_i) ve (X', q'_i), X_i objelerin bileşik çarpımları olsun.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\theta"] & & X' \\
& X_i \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "q'_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.32

$\theta q_i = q'_i$ $(\forall i \in I)$ olacak şekilde biricik $\theta : X \to X'$ izomorfizmi vardır.

Örnek 1.15.2.3 $\mathcal{C}$ =Kümeler, X_i, kümeler ve bu X_i kümeleri ayrık ise $(X_1 \cap X_2 \cap \cdots = \varnothing)$

$$X = \coprod X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots$$

ayrık birleşimlerdir.

Örnek 1.15.2.4 $\mathcal{C} = Ab$, A_i, Abelyen gruplar

$$A = \coprod_{i \in I} A_i = \oplus_{i \in I} A_i = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, 0 \cdots) \mid a_i \in A\}$$

$$A_i \cap (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap A_n) = 0$$

ve

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

ve

$$\begin{array}{rcl} q_i : A_i & \to & A \\ a_i & \mapsto & (0, \cdots, 0, a_i, 0, \cdots, 0) = a \end{array}$$

dır.

Örnek 1.15.2.5 $\mathcal{C} =_R Mod,\ M_i,\ R-$ modüller

$$M = \coprod_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} M_i = \{(m_i) \mid m_i \in M\} = \{(m_1, m_2, \cdots, m_n, 0\cdots) \mid m_i \in M\}$$

ve

$$\begin{aligned} q_i : M_i &\rightarrow M \\ m_i &\mapsto (0, \cdots, 0, m_i, 0, \cdots, 0) \end{aligned}$$

dır.

Örnek 1.15.2.6 $\mathcal{C} = Grp,\ G_i$, gruplar

$\coprod_{i\in I} G_i$lerin serbest çarpımı

$$q_i : G_i \rightarrow \coprod G_i = \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid x_i \in G\}$$

dır.

Örnek 1.15.2.7 $\mathcal{C} = Top,\ X_i$, topolojik uzaylar, X_i ayrık uzay $\coprod_{i\in I} X_i$, $X_i$lerin ayrık birleşimi

$$U \in \coprod X_i \ \text{ açık } \ U \cap X_i \ \text{ açık}$$

dır.

1.16 Pullbackler (Geri Çekmeler) ve Pushoutlar (İleri İtmeler)

1.16.1 Pullbackler

Tanım 1.16.1.1 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $A,\ B,\ X,\ \mathcal{C}$ nin objeleri ve

$$\theta : A \rightarrow X \ \text{ ve } \ \phi : B \rightarrow X$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : Y \rightarrow A \ \text{ ve } \ \beta : Y \rightarrow B$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\theta\alpha = \phi\beta$

(ii) Herhangi $g : Z \to B$ ve $f : Z \to A$ morfizmleri için $\phi f = \theta g$ olmak üzere

$$\alpha\varepsilon = f \quad \text{ve} \quad \beta\varepsilon = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Z \to Y$ morfizmi var.

Bu iki özellik sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin pullback i denir.

Bu tanımı

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Şekil 1.33

değişmeli diyagramlarıyla üretebiliriz. Yani,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\theta"'] \\ & B \arrow[r, "\phi"] & X \end{tikzcd}$$

Şekil 1.34

Teorem 1.16.1.2 (α, β) ve (α', β'), (θ, ϕ) ikilisinin pullbackı olsun. Bu durumda $\varphi : Y \to Y'$ biricik izomorfizmi vardır. Öyle ki

$$\alpha'\varphi = \alpha \quad \text{ve} \quad \beta'\varphi = \beta$$

elde edilir.

Örnek 1.16.1.3 $\mathcal{C} = Grp,\ A,\ B,\ X$ *gruplar*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a,b) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \arrow[d, mapsto] \\ b \arrow[r, mapsto] & \phi(b) = \theta(a) \end{tikzcd}$$

Şekil 1.35

$$Y = \{(a,b) \in A \times B \mid \theta(a) = \phi(b)\} \leq A \times B$$

$$\alpha : (a,b) \mapsto a \quad \text{ve} \quad \beta : (a,b) \mapsto b$$

tanımlayalım. Bu durumda Y pullbacktir.

Örnek 1.16.1.4 $\mathcal{C}_R Mod$, A, B, X ler $R-$modüller ise her $(\theta{:}A \to X, \phi{:}B \to X)$ ikilisinin bir geri çekmesi vardır.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\
B \arrow[r, "\phi"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \arrow[d, mapsto] \\
b \arrow[r, mapsto] & \phi(b) = \theta(a)
\end{tikzcd}$$

$$Y = \{(a,b) \in A \oplus B \mid \theta(a) = \phi(b)\}$$

Şekil 1.36

tanımlayalım.

$$\alpha : (a,b) \mapsto a \quad \text{ve} \quad \beta : (a,b) \mapsto b$$

Bu durumda Y, $A \oplus B$ nin alt modülüdür ve θ, ϕ $R-$modül homomorfizmidir. Çünkü

$$\phi(rb) = \theta(ra) = r\theta(a) = r\phi(b)$$

dır. Ayrıca

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\
B \arrow[r, "\phi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.37

Herhangi $x \in Z$ için

$$(\phi f)(x) = (\theta g)(x)$$

dır. Buradan

$$\phi(f(x)) = \theta(g(x))$$

olup

$$\begin{aligned} \varepsilon : Z &\rightarrow Y \\ x &\mapsto \varepsilon(x) = (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

tanımlayabiliriz ve

$$\beta\varepsilon = f \ \text{ ve } \ \alpha\varepsilon = g$$

dir. Çünkü $\forall x \in Z$ için

$$\begin{aligned} (\beta\varepsilon)(x) &= \beta(\varepsilon(x)) = \beta(f(x), g(x)) = f(x) \\ (\alpha\varepsilon)(x) &= \alpha(\varepsilon(x)) = \alpha(f(x), g(x)) = g(x) \end{aligned}$$

dir.

$$\mu : Z \rightarrow Y$$

diğer morfizm ve

$$\beta\mu = f \ \text{ ve } \ \alpha\mu = g$$

olsun. Fakat

$$\begin{aligned} \mu(x) &= (\beta\mu(x), \alpha\mu(x)) = (f(x), g(x)) = \varepsilon(x) \\ &\Rightarrow \mu = \varepsilon \end{aligned}$$

olup biriciktir.

1.16.2 Pushoutlar

Tanım 1.16.2.1 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $A,\ B,\ X,\ \mathcal{C}$ nin objeleri ve

$$\theta : X \rightarrow A \ \text{ ve } \ \phi : X \rightarrow B$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : A \rightarrow Y \ \text{ ve } \ \beta : B \rightarrow Y$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\alpha\theta = \beta\phi$

(ii) Herhangi $g : B \to Z$ ve $f : A \to Z$ morfizmleri için $f\phi = g\theta$ olmak üzere

$$\varepsilon\alpha = f \quad \text{ve} \quad \varepsilon\beta = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Y \to Z$ morfizmi var.

Bu iki özellik sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin pushoutu denir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Şekil 1.38

Teorem 1.16.2.2 (α, β) ve (α', β'), (θ, ϕ) ikilisinin pushoutu olsun. Bu durumda $\varphi : Y \to Y'$ biricik izomorfizmi vardır. Öyleki

$$\varphi\alpha = \alpha' \quad \text{ve} \quad \varphi\beta = \beta'$$

dır.

Örnek 1.16.2.3 $\mathcal{C} = Grp$, A, B, X gruplar $A \times B$ serbest çarpım

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Şekil 1.39

$$\theta(X) \leq A \quad \text{ve} \quad \phi(X) \leq B$$

BÖLÜM 2

İLGİLİ KATEGORİLER

2.1 İlgili Kategoriler

$\mathcal{C}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir kategori olsun.

(1) S (kümeler kategorisi) üzerinde $T(\varnothing) = \{p\}$ (tek elemanlı küme) olacak şekilde bir $\mathbf{T} = (T, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu})$ monadı vardır ve $\mathcal{C}, S^T$ ye denktir.($\mathbf{S}^T$ nin objeleri (A, α) ikilileridir. Burada A bir küme ve $\alpha : TA \longrightarrow A$ dır.)

(2) $U : \mathcal{C} \rightarrow S_*$, gruplar kategorisini çarpanlarına ayırır.

(3) $\mathcal{C}$ deki tüm işlemler sonludur.

(4) $\mathcal{C}$ deki işlemler için bir Ω üreteçler kümesi vardır ve $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ dır. Ω nın grup yapısıyla ilişkili olarak (grup yapısına benzer olarak) birimlilik, ters ve $+$ işlemlerine sahip olduğunu kabul edebiliriz.

$\Omega_2' = \Omega_2 \backslash \{+\}$

$\Omega_1' = \Omega_1 \backslash \{-\}$

olsun ve kabul edelim ki $\ast \in \Omega_2'$ ise $x \ast^\circ y = y \ast x$ ile tanımlanan $\ast^\circ$ da Ω_2' dadır.

(5) $\ast \in \Omega_2'$ ise $a \ast (b + c) = a \ast b + a \ast c$ dir.

(6) $w \in \Omega_1'$ ise $w, +$ işlemini koruyan bir homomorfizmdir ve $\ast \in \Omega_2'$ ise $w(a \ast b) = w(a) \ast b$ dir.

(7) Ω_2' deki her bir $\ast$ için $x_1 + (x_2 \ast x_3) = (x_2 \ast x_3) + x_1$ dir.

(8) Her bir $(\bullet, \ast) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için

$$(x_1 \bullet x_2) \ast x_3 = w(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1, (x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

özelliğinde bir w kelimesi vardır. Buradaki her sıralama Ω_2' deki bir işlemi temsil etmektedir.

Bu sekiz aksiyomu sağlayan bir $\mathcal{C}$ kategorisine bir *İlgili Kategori* denir. İlgili kategorilerin bu sekiz aksiyomunu açıklayalım;

(1) S (kümeler kategorisi) üzerinde $T(\varnothing) = \{p\}$ (tek elemanlı küme) olacak şekilde bir $T = (T, \eta, \mu)$ monadı vardır ve C, S^T ye denktir.($\mathbf{S}^T$ nin objeleri (A, α) ikilileridir. Burada A bir küme ve $\alpha : TA \longrightarrow A$ dır.)

2.2 Monadlar

Tanım 2.2.1 Bir C kategorisi üzeirndeki bir $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ monadı aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekildeki

$$\eta : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow T$$

$$\mu : TT \longrightarrow T$$

doğal transformasyonları ile birlikte bir

$$T : C \longrightarrow C$$

endofunktorudur.

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "="'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "="] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 2.1

Bu diyagramlarda T^n, T nin n kere tekrarlanması anlamındadır. X objesinin μT deki görüntüsü TX in μ deki görüntüsüdür, benzer şekilde X objesinin $T\mu$ deki görüntüsü $T(\mu X)$ dir, benzer ifadeler η için de geçerlidir.

Monad, triad, standart yapı ve temel yapı ifadelerinin hepsi aynı şeyi ifade etmektedir.

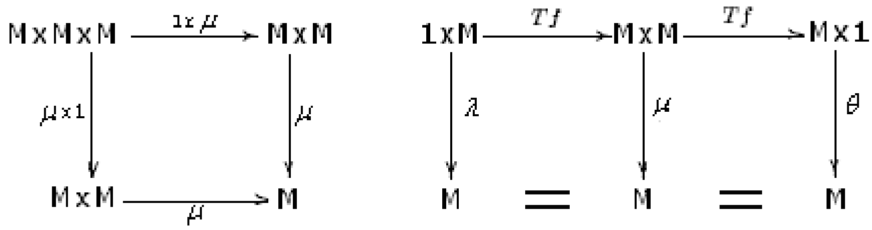
Monadın bir diğer tanımını monaid yardımıyla yapabiliriz, bunun için de önce monaidin tanımını yapalım;

Tanım 2.2.2 Bir M monaidi aşağıdaki özellikleri sağlayan bir M kümesi ve iki fonksiyonla tanımlanabilir.

Fonksiyonlar

$$\mu : M \times M \longrightarrow M$$
$$\eta : 1 \longrightarrow M$$

olmak üzere aşağıdaki iki diyagram değişmelidir.



Şekil 2.2

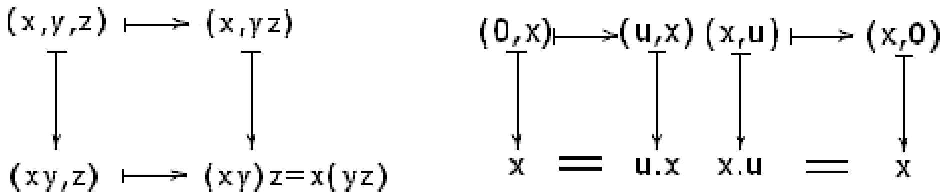
Burada $1 \times \mu$ deki $1 : M \longrightarrow M$ birim fonksiyonu ve $1 \times M$ deki 1 , tek elemanlı $1 = \{0\}$ kümesidir. Ayrıca λ ve θ da

$$1 \times X \xrightarrow{\lambda} X \xleftarrow{\theta} X \times 1 \ni \lambda(0,x) = x$$

$\theta(x,0) = x$ ile verilen birebir, örten fonksiyonlardır. Bu diyagramların değişmeli olması aşağıdaki bileşkelerin eşit olduğu anlamındadır.

$$\mu \circ (1 \times \mu) = \mu \circ (\mu \times 1), \mu \circ (\eta \times 1) = \lambda, \mu \circ (1 \times \eta) = \theta$$

μ fonksiyonunu $x,\ y \epsilon M$ için $\mu(x,y) = x.y$ çarpımı olarak, η fonksiyonunu da tek elemanlı $1 = \{0\}$ kümesini $\eta(0) = u \epsilon M$ olacak şekildeki sabit fonksiyon olarak alalım. Böylece diyagramları elemanlar cinsinden şu şekilde ifade ederiz:



Şekil 2.3

Bunlar aslında tamamen monaiddeki çarpımın birleşmeli olması ve bir u, sağ ve sol birim elemanına sahip olması aksiyomlarına benzemektedir. Bu; cebirsel özelliklerin değişmeli diyagramlarla nasıl ifade edilebileceğine karşılık gelmektedir. Aynı süreç diğer özelliklere de uygulanabilir. Mesela bir grubu bir M monaidine aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde bir

$$\psi : \underset{x}{M} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{x^{-1}}{M}$$

fonksiyonunu ekleyerek tanımlayabiliriz.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & M \times M \arrow[r, "1 \times \psi"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\ 1 \arrow[rr] & & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,x) \arrow[r, mapsto] & (x,x^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\ 0 \arrow[r, mapsto] & u = & xx^{-1} \end{tikzcd}$$

Şekil 2.4

Burada $\delta : M \longrightarrow M \times M$ her $x\epsilon M$ için $x \rightarrowtail (x,x)$ şeklinde tanımlı diagonal fonksiyondur. İsimlendirilmemiş düşey ok $M \longrightarrow 1 = \{0\}$, M den tek elemanlı kümeye giden aşikar (ve tek) fonksiyondur. Sağ tarafta belirtildiği gibi bu diyagram, ψ nin her bir $x\epsilon M$ elemanını x in sağ tersi olan x^{-1} e götürdüğünü göstermektedir.

Tanım 2.2.3 Bir X kategorisindeki bir $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ monadı bir $T : X \longrightarrow X$ funktoru ve aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde

1. $\eta : I_x \longrightarrow T$, $\mu : T^2 \longrightarrow T$ doğal transformasyonlarından oluşmaktadır.

2.

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} IT \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & TI \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[d, equal] \\ T & T & T \end{tikzcd}$$

Şekil 2.5

Monad tanımı kümelerdeki bir M monoidinin tanımına benzemektedir. Tanımda monoidin elemanlarının kümesi M ile $T : X \longrightarrow X$ endofunktoru,iki kümenin kartezyen çarpımı "$\times$" ile iki funktorun bileşkesi, $\mu : M \times M \longrightarrow M$ çarpım ikili işlemi ile $\mu : T^2 \longrightarrow T$ transformasyonu ve $\eta : 1 \longrightarrow M$ birim elemanı ile de $\eta : I_x \longrightarrow T$ yer değiştirilir. Bu yüzden η ye $\mathbf{T}$ monadının birimi ve μ ye de $\mathbf{T}$ monadının çarpımı deriz. (2) deki birinci değişmeli diyagram monadın birleşme kuralını, ikinci ve üçüncü diyagramlar da sırasıyla sol ve sağ birim kuralını ifade etmektedir.

Tüm bunların ışığında X deki bir monad, endofunktorlar kategorisindeki "$\times$" çarpımı ile endofunktorların bileşkesi ve birim küme ile birim funktor yer değiştirilerek elde edilen bir monoiddir.

Bu (X, T, η, μ) yapısına bir monad denir.

Tanım 2.2.4 A ve B kategorileri, G ve F funktorları ve η ve ε doğal transformasyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorlar ise buna bir adjunction ya da adjoint situation denir ve $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : (A, B)$ veya $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G$ veya daha kısa olarak $F \dashv G$ şeklinde gösterilir.

(i) $G : A \longrightarrow B$ ve $F : B \longrightarrow A$

(ii) $\eta : 1_B \longrightarrow G \circ F$ ve $\varepsilon : F \circ G \longrightarrow 1_A$

(iii) $G \xrightarrow{\eta * G} G \circ F \circ G \xrightarrow{G * \varepsilon} G = G \xrightarrow{1_G} G$ ve $F \xrightarrow{F * \eta} F \circ G \circ F \xrightarrow{\varepsilon * F} F = F \xrightarrow{1_F} F$

Her $(F, G, \eta, \varepsilon) : X \longrightarrow A$ adjunctionı X kategorisinde bir monad oluşturur. Hatta $F : X \longrightarrow A$ ve $G : A \longrightarrow X$ funktorlarının bileşkesi $T = GF$ endofunktorudur. Adjunctionın uniti bir $\eta : I \longrightarrow T$ bir doğal transformasyondur ve adjunctionın couniti olan $\varepsilon : FG \longrightarrow I_A$ bir doğal transformasyon olan $\mu : G\varepsilon F : GFGF \longrightarrow GF = T$ bileşkesi tarafından oluşturulur. (2) deki birleşme özelliği buradaki μ için aşağıdaki diyagramların değişmeliliğini oluşturur.

$$\begin{tikzcd}
GFGFGF \arrow[r, "GFG\varepsilon F"] \arrow[d, "G\varepsilon FGF"'] & GFGF \arrow[d, "G\varepsilon F"] \\
GFGF \arrow[r, "G\varepsilon F"'] & GF
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FGFG \arrow[r, "FG\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon FG"'] & FG \arrow[d, "\varepsilon"] \\
FG \arrow[r, "\varepsilon"'] & I_A
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.6

Böylece monadı tanımlamış olduk. Şimdi monadla ilgili birkaç örnek verelim.

Örnek 2.2.5 M bir monoid, $T : k\ddot{u}me \longrightarrow k\ddot{u}me$, $TX = M \times X$ şeklinde tanımlansın. $\eta X : \underset{x}{\overset{Id_C X}{\overset{\shortparallel}{X}}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{(1_M, X)}{\overset{TX}{\overset{\shortparallel}{M \times X}}}$ ve $\mu\alpha : \underset{(m,n,x)}{\overset{TTX}{\overset{\shortparallel}{M \times M \times X}}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{(mn,x)}{\overset{TX}{\overset{\shortparallel}{M \times X}}}$ bu durumda T funktorunun birleşme ve birim özellikleri M nin monoidliğinden dolayı sağlanır.

Şimdi diyagramların değişmeli olduklarını gösterelim.

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T^3X = M \times M \times M \times X \arrow[r, "1 \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1"'] & M \times M \times X = T^2X \arrow[d, "\mu"] \\ T^2X = M \times M \times X \arrow[r, "\mu"'] & M \times X = TX \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (k,m,n,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (k,mn,x) \arrow[d, mapsto] \\ (km,n,x) \arrow[r, mapsto] & (kmn,x) \end{tikzcd}$$

Şekil 2.7

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "="'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "="] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T\mathrm{X} = \mathrm{M} \times \mathrm{X} \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "="'] & \mathrm{M} \times \mathrm{M} \times \mathrm{X} = T^2\mathrm{X} \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{M} \times \mathrm{X} = T\mathrm{X} \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "="] \\
 & T = \mathrm{M} \times \mathrm{M} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(m,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \begin{array}{c}(m,1_m,x)\\(1_m,m,x)\end{array} \arrow[d, mapsto] & (m,x) \arrow[l, mapsto] \arrow[dl, mapsto] \\
 & \begin{array}{c}(m.1_m = 1_m.m,x)\\ \shortparallel \\ (m,x)\end{array} &
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.8

$$T\eta X\colon\, T\left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & M \times X \\ {\scriptstyle x} & {\scriptstyle \longmapsto} & {\scriptstyle (1_m,x)} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{ccc} TX & \longrightarrow & T\,(M \times X) \\ {\scriptstyle T(x)} & {\scriptstyle \longmapsto} & {\scriptstyle T(1_m,x)} \\ {\scriptstyle \shortparallel} & {\scriptstyle \longmapsto} & {\scriptstyle \shortparallel} \\ {\scriptstyle (m,x)} & & {\scriptstyle (m,1_m,x)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} TX & \longrightarrow & T\,(M \times X) \\ T\,(x) & \longmapsto & T\,(1_m, x) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (m,x) & \longmapsto & (m, 1_m, x) \end{array}$$

Tanım 2.2.6 $T = (T, \eta, \mu)$ X de bir monad ise bir (x, h) T-cebiri x, X in bir objesi $(x \epsilon X)$ ve $h : Tx \longrightarrow x$,X in bir oku (buna cebirin structure oku denir)olmak üzere aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde ikilidir.

$$
\begin{tikzcd}
Tx \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu x"'] & T \arrow[d, "h"] \\
Tx \arrow[r, "h"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta x"] \arrow[dr, "1"'] & Tx \arrow[d, "h"] \\
 & x
\end{tikzcd}
$$

Şekil 2.9

Buradaki ilk diyagram birleşme ve ikinci diyagram da birim özelliğini göstermektedir.

T-cebirlerin bir $f : (x, h) \longrightarrow (x', h')$ morfizmi X in

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & Tx \arrow[l, "Th"'] \arrow[d, "Tf"] \\
x' & Tx' \arrow[l, "h'"]
\end{tikzcd}
$$

Şekil 2.10

diyagramını değişmeli yapan $f : x \longrightarrow x'$ okudur.

Teorem 2.2.7 $T = (T, \eta, \mu)$, X de bir monad ise bütün T-cebirlerin kümesi ve morfizimleri bir X^T kategorisini oluşturur. Bu durumda G^T ve F^T sırasıyla aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekildeki funktorlar olmak üzere bir $\left(F^T, G^T; \eta^T, \varepsilon^T\right) :$ $X \longrightarrow X^T$ adjuntionı vardır.

$$
G^T:\;
\begin{tikzcd}
(x,h) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "f"] & x \arrow[d, mapsto, "f"] \\
(x',h') \arrow[r, mapsto] & x'
\end{tikzcd}
\qquad
F^T:\;
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "f"] & (Tx, \mu x) \arrow[d, mapsto, "Tf"] \\
x' \arrow[r, mapsto] & (Tx', \mu x')
\end{tikzcd}
$$

Şekil 2.11

Ayrıca her bir (x, h) T-cebiri için $\eta^T = \eta$ ve $\varepsilon^T(x, h) = h$ dır. X de bu adjunctionla tanımlanan monad, verilen $T = (T, \eta, \mu)$ monadıdır.

Yani her monad kendi T-cebirleriyle tanımlıdır.

2.3 Nokta Tabanlı Kümeler

Hatırlatma 2.3.1 (1). aksiyomu sağlayan bir kategori tam, kotam, noktalı ve $S_\star$ (burada $S_\star$, **taban noktalarını** koruyan oklarla birlikte noktalı kümelerin kategorisidir) üzerinde monadlanabilirdir.

Tanım 2.3.2 Bir, noktalı küme ile seçilmiş bir elemanıyla birlikte boştan farklı bir P kümesi kastedilir. Bu seçilmiş eleman $*$ veya $*_P$ ile gösterilir ve P nin "taban noktası" denir. Noktalı kümelerin bir $f : P \longrightarrow Q$ dönüşümü $f(*_P) = *_Q$ olacak şekilde P den Q ya taban noktasını taban noktasına taşıyan bir fonksiyondur. Bu dönüşümleri morfizm olarak kabul ederek noktalı kümeler $Set_*(S_*)$ kategorisini oluşturur. S_* kategorisinin objeleri; A bir küme ve $a\epsilon A$ olmak üzere (A, a) şeklinde ikililerdir. $\hom((A,a),(B,b)) = \{f \mid f : A \longrightarrow B$ ve $f(a) = b\}$ dir.

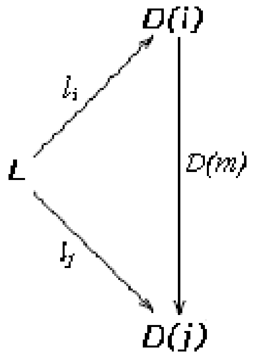
E. Manes'in A Triple Misellany sinde gösterildiği gibi kümeler üzerinde monadlanabilen kategorilerin $\underrightarrow{\lim}$ leri ve coequalizerları vardır. Linton, K coproductlarla tanımlanmış herhangi bir kategori olmak üzere K^T de yansımalı ikililerin (reflexive pairs) coequalizerları varsa K^T nin $\underrightarrow{\lim}$ leri var olduğunu göstermişti. Böylece S üzerinde monadlanabilen kategoriler tam ve kotamdır.

2.4 Tamlık Ve Kotamlık

Tanım 2.4.1 C de bir source $(X, (f_i)_I)$ ikilisidir öyle ki X, C nin X domainli morfizmlerin bir ailesidir. Bu durumda X e sourceun domaini ve $(X_i)_I$ ailesine de sourceun codomaini denir.

Tanım 2.4.2 I ve C kategori ve $D : I \longrightarrow C$ bir funktor olsun. Bu durumda D nin doğal source u her bir $i\epsilon Ob(I)$, $l_i : L \longrightarrow D(i)$ ve I daki her $m : i \longrightarrow j$

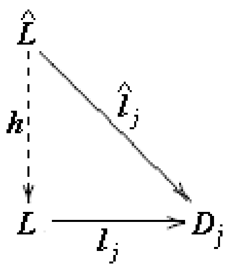
morfizmleri için



Şekil 2.12

üçgeni değişmeli olacak şekildeki C deki $\left(L, (l_i)_{i \epsilon Ob(I)}\right)$ source udur. Diğer bir deyişle $L : I \longrightarrow C$ ye her bir objesinin görüntüsü L ve her bir morfizminin görüntüsü 1_L olan sabir funktor ve $\left(L, (l_i)_{i \epsilon Ob(I)}\right)$ C de bir source ise $\left(L, (l_i)_{i \epsilon Ob(I)}\right)$ D nin bir doğal source udur ancak ve ancak $(l_i)_{i \epsilon Ob(I)} : L \rightarrow D$ doğal transformasyondur.

Tanım 2.4.3 $D : I \longrightarrow C$ bir funktor ise D nin (L, l_i) doğal sourceuna D nin bir limiti denir, öyle ki $\left(\hat{L}, \overset{\wedge}{l_i}\right)$ D nin herhangi bir doğal source u ise her bir $j \epsilon Ob\,(I)$ için



Şekil 2.13

üçgeni değişmeli olacak şekilde bir tek $h : \hat{L} \longrightarrow L$ morfizmi vardır.

Tanım 2.4.4

(1) I bir kategori olsun, her $D : I \longrightarrow C$ funktorunun bir limiti varsa C kategorisi I-tam (ya da I limitleri vardır) denir.

(2) C her bir I small kategorisi için I-tam ise C ye tamdır denir.

(3) C her bir sonlu I kategorisi için I-tam ise C ye sonlu tam (ya da sonlu limitleri vardır) denir.

Dual gösterimler**:** I^{op}-kotam (ya da I^{op}-kolimitleri vardır), kotam, sonlu kotam

Örnek 2.4.5

I	$\mathcal{C}$ nin I-tam olması $\mathcal{C}$ nin;	$\mathcal{C}$ nin I^{op}-kotam olması C nin;
$\varnothing$	bir son objesi olmasıdır	bir ilk objesi olmasıdır
$\bullet \rightrightarrows \bullet$	equalizerları olmasıdır	koequalizerları olmasıdır
$\bullet \qquad \bullet$	çiftlerin çarpımlarının olmasıdır	çiftlerin koçarpımlarının olmasıdır
$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$	pullbacklerinin olmasıdır	pushoutlarının olmasıdır

Tablo 2.1

T' S_* üzerinde bir monad ve C $S_*^{T'}$ ye denk olsun.

Hatırlatma 2.4.6 T' noktalı bir monaddır. Yani $T'(\langle\{p\},p\rangle) = \langle\{p\},p\rangle$ dir.

(2) $U : C \longrightarrow S_*$ **gruplar kategorisiyle ayrılır.**

Yani

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "U"] \arrow[dr, "F"'] & & S_* \\ & Grp \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} \qquad \Longrightarrow U = G \circ F$$

Şekil 2.14

olacak şekilde G ve F funktorları vardır.

(3) C **deki bütün işlemler sonludur.**

(2) aksiyomu C nin objelerini ek yapılara sahip olan gruplar olarak gösterebilmemizi sağlar. Grup işlemini $+$ ile göstereceğiz, burada işlemin abelyan olmasına gerek yoktur.

(2) aksiyomu ve Beck'in daha önce bahsettiğimiz teoremi sayesinde $\mathcal{C}$ nin G (gruplar kategorisi) üzerinde monadlanabilir olduğunu söyleyebiliriz ve $\mathcal{C} = G^{\hat{T}}$ yazabiliriz.

Barr'ın bir teoremi (2,Teorem 3.3) (1)-(3) ü sağlayan bir kategorideki her bir objenin özel özelliklerini sağlayan bir alt objesi vardır ve bu alt objeye o objenin **merkezi** denir. A, $\mathcal{C}$ de bir obje ise ZA, A nın merkezini ifade eder. Merkezi tanımlayalım;

2.5 Merkez

1. de temel bilgiler verilecek. Konunun devamında hangi durumlar altında X kategorisinin her objesinin bir merkezi olduğunu bulma yollarıyla ilgileneceğiz. 2. de genel durumlar verilecektir. 3. te de bunları denklik kategorilerine uygulayacağız.

Tanım 2.5.1 (1. Temel Tanım) X bir grup olsun. $Z \subset X$ merkezi, X in aşağıdaki gibi bir grup homomorfizmi bulunan en büyük alt grubudur.

$$Z \times X \longrightarrow X$$

Bu morfizmin Z ye kısıtlanmışı $(Z \times X \longrightarrow Z)$ içine ve X e kısıtlanmışı $(Z \times X \longrightarrow X)$ birimdir. Açıkça bu özellik Z yi tanımlar. Tabii ki benzer bir tanımı soyut bir kategori için yapabilmemiz için kategorinin noktalı olması gerekir. Yoksa çarpımı koordinatlarına götüren dönüşümü kısıtlamaktan söz edemeyiz. Buradan;

Tanım 2.5.2 X sonlu çarpımlarla tanımlı bir noktalı kategori ve $X \in X$ olsun. $Z \subset X$ alt objesi için; Z ye kısıtlanmışı içine ve X e kısıtlanmışı da birim olacak şekilde bir

$$Z \times X \longrightarrow X$$

morfizmi varsa Z ye merkezsel denir. Eğer Z, X de merkezsel ve X in tüm merkezsel alt objelerini içeriyor ise Z ye X in merkezi denir.

Tabii bu tanım her kategori için merkezin var olup olmadığı sorusunu yanıtsız bırakmaktadır.

Teorem 2.5.3 (Ana Teorem)X kategorisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X e bir $Z-$ kategori denir.

Tanım 2.5.4

Z.1. X noktalıdır.

Z.2. X in sonlu projektif limitleri vardır.

Z.3. Herhangi $X_1, X_2 \in X$ için $X_1 \longrightarrow X_1 \times X_2 \longleftarrow X_2$ koordinat eksenlerinin hepsi epi dir.

Z.4. Herhangi $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi X i; $X \longrightarrow Y_0$ bir koequalizer ve $Y_0 \longrightarrow Y$ monik olmak üzere $X \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y$ olarak ayırır.

Z.5. $X \in X$ ve$\{X_i\}$ X in alt objelerinin directed ailesi ise X_i nin $\operatorname{col} im$ i vardır ve X in bir alt objesidir.

Z.6. Herhangi $X' \in X$ objesi için $X' \times -$ funktoru **Z.4**. ve **Z.5**. te belirtilen inductive limitlerle (colimitlerle) ilişkilidir. Bunun anlamı da; $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi yukarıda gösterildiği gibi X i $X \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y$ şeklinde ayıran bir morfizm ise $X' \times X \longrightarrow X' \times Y_0$ da bir koequalizer dır. (ve $X' \times X \longrightarrow X' \times Y$ de moniktir.)

Benzer olarak $\{X_i\}$ X in alt objelerinin bir koleksiyonu ise

$$\operatorname{col} im(X' \times X_i) \longrightarrow X' \times \operatorname{col} imX_i$$

doğal dönüşüm yardımıyla bir izomorfizmdir.

Bu hipotez için oldukça kısıtlanmış bir küme olmaktadır. Ancak bizi ilgilendiren birçok cebirsel kategori bunları sağlamamaktadır.

$$X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Yn \in X$$

ve

$$f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \longrightarrow Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Yn$$

bir morfizm ise f nin

$$\| f \| = \left\| \begin{matrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{matrix} \right\|$$

matrisi vardır. Burada f_{ij} ler

$$X_i \longrightarrow X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \longrightarrow Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Yn \longrightarrow Y_j$$

kompozisyonudur. $f \longrightarrow \| f \|$ eşlemesi toplamsal kategoride olduğu gibi bir izomorfizm değildir. Fakat **Z.3**. çarpımların bilinen özellikleriyle birlikte bu eşlemenin içine olmasını garantiler.Eğer

$$X \longrightarrow X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \longrightarrow X'$$

dönüşümünün $\|f_1,f_2,\ldots,f_n\|$ ve $\left\|\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{array}\right\|$ matrisleri varsa $g_1f_1 + g_2f_2 + \ldots + g_nf_n$ i gf ile göstereceğiz. "$+$" burada gerçek anlamıyla kullanılmamıştır. Sadece çarpımlar arasındaki dönüşümler kompozisyonun bilinen matris çarpımıyla gösterilmesini sağlayacaktır. Detaylar benzerdir ve yok sayılacaktır. Şimdi bir morfizm tanımlamak için bir matris yazacağız, fakat her matrisin bir morfizm belirtmediği unutulmamalıdır. Ancak, herbir satırında en fazla bir tane sıfırdan farklı dönüşüm bulunan bir matris her zaman bir morfizm belirtir. Örneğin;

$$\|0,0,\ldots,0,f_i,0,0,\ldots,0\| : X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \longrightarrow X$$

dönüşümü,

$$X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \underset{projection}{\overset{iz\ düsüm}{\longrightarrow}} X_i \overset{f_i}{\longrightarrow} X$$

morfizmini belirtir.

Şimdi asıl sonucu vermeye hazırız.

Teorem 2.5.5 X bir $Z-$ kategori olsun. Bu durumda X in her objesinin merkezi vardır.

İspat .$X \in X$ ve $Z = \{Z_i\}$ X in merkezsel alt objelerinin sınıfı olsun. Z nin en geniş elemanı olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle sıralı olduğunu gösterelim. $Z_1, Z_2 \in Z$ ve $\alpha_i : Z_i \longrightarrow X \quad (i = 1,2)$ içine ise

$$\|\alpha_i, X\| : Z_i \times X \longrightarrow X$$

matrisli dönüşümü vardır.

(Tabii ki bu matrisi her zaman yazabiliriz; fakat Z_i merkezseldir ancak ve ancak bu matris bir dönüşüm belirtir.)

$$\|\alpha_1, \alpha_2\| : Z_1 \times Z_2 \longrightarrow X$$

dönüşümü ayrılabildiğinden (örneğin $\|\alpha_1, X\| \left\|\begin{array}{cc} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{array}\right\|$ şeklinde ayrılabilir.) bir morfizmdir. $P \overset{d^0}{\underset{d^1}{\rightrightarrows}} Z_1 \times Z_2 veZ_1 \times Z_2 \overset{d}{\longrightarrow} Z_1Z_2$ ve $\|\alpha_1, \alpha_2\|$ nin çekirdek çifti ve sırasıyla d^0 ve d^1 in koequalizer ı olsun.

$$d^i = \left\| \begin{matrix} \partial_{1i} \\ \partial_{2i} \end{matrix} \right\| \quad (i = 1, 2)$$

ve

$$d = \|\beta_1, \beta_2\|$$

olsun.

Z.4.den dolayı indirgenmiş $\alpha : Z_1 Z_2 \longrightarrow X$ dönüşümü bir alt objedir ve tabii ki $\alpha\beta_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ dir. Hatta $\beta_1 \partial_{10} + \beta_2 \partial_{20}$ ve $\beta_1 \partial_{11} + \beta_2 \partial_{21}$ tanımlıdır ve denktirler.

Ayrıca **Z.6**.dan $P \times X \underset{d^1 \times X}{\overset{d^0 \times X}{\rightrightarrows}} Z_1 \times Z_2 \times X \xrightarrow{d \times X} Z_1 Z_2 \times X$ da koequalizer dır.

$$\|\alpha_1, X\| \left(Z_1 \times \|\alpha_2, X\|\right) = \|\alpha_1, X\| \left\| \begin{matrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & X \end{matrix} \right\| = \|\alpha_1, \alpha_2, X\|$$

matrisli dönüşümü $d^0 \times X$ ve $d^1 \times X$ i koequalize eder. Gerçekten de

$$\|\alpha_1, \alpha_2, X\| \left\| \begin{matrix} \partial_{10} & 0 \\ \partial_{20} & 0 \\ 0 & X \end{matrix} \right\| = \|\alpha_1, \partial_{10} + \alpha_2 \partial_{20}, X\| = \|\alpha_1 \partial_{11} + \alpha_{21} \partial_{21}, X\| = \|\alpha_1, \alpha_2, X\| = \left\| \begin{matrix} \partial_{10} & 0 \\ \partial_{20} & 0 \\ 0 & X \end{matrix} \right\|$$

Böylece

$$\|\gamma_1, \gamma_2\| . (d \times X) = \|\alpha_1, \alpha_2, X\| = \|\alpha\beta_1, \alpha\beta_2, X\| = \|\gamma_1, \gamma_2\| \left\| \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & X \end{matrix} \right\| = \|\gamma_1 \beta_1, \gamma_2 \beta_2, X\|$$

özelliğini sağlayan $\|\gamma_1, \gamma_2\| : Z_1 Z_2 \times X \longrightarrow X$ indirgenmiş dönüşümü vardır.

Buradan $\gamma_2 = X$ ve $\|\alpha\beta_1, \alpha\beta_2\| = \|\gamma_1 \beta_1, \gamma_2 \beta_2\|$dir ya da $\alpha d = \gamma_1 d$ dir. d bir koequalizer olduğundan epimorfizmdir. Buradan da $\alpha = \gamma_1$ ve $Z_1 Z_2$ merkezseldir. $Z_j \longrightarrow X$ indirgenmiş dönüşümü epiktir. Z, X in alt objelerinin sıralı bir ailesi olduğu için **Z.5**. den dolayı bir Z kolimiti vardır ve bu bir alt objedir. $(\alpha : Z \longrightarrow X)$

$\beta_i : Z_i \longrightarrow Z$ kolimite dönüşüm ise β_i ler de monodur ve $\alpha\beta_i = \alpha_i$ dir. **Z.6**. dan $Z \times X = \operatorname{col} im Z_i \times X$ ve herbir i için bir $\|\alpha_i, X\| : Z_i \times X \longrightarrow X$ dönüşümü var olduğundan herbir i için $\|\gamma, \gamma'\| . (\beta_i \times X) = \|\alpha_i, X\|$ olacak şekilde bir $\|\gamma, \gamma'\| = Z \times X \longrightarrow X$ indirgenmiş dönüşümü vardır. Buradan da her i için $\|\alpha\beta, \gamma' X\| = \|\alpha_i, X\|$ ya da $\gamma' = X$, $\alpha\beta_i = \alpha_i$ dir.Ayrıca $\alpha\beta_i = \alpha_i$ olduğundan dönüşüm uzantılarının tekliği $\alpha = \beta$ olmasını garantiler. Böylece $\|\alpha, X\|$ bir dönüşümdür. Buradan da Z merkezseldir ve açıkça tüm merkezsel alt objeleri içerir.

2.6 Denk Kategoriler

Tanım 2.6.1 Bir denk kategori ile bir $U : X \longrightarrow Kme$ cebirsel funktoru olan X kategorisi kastedilir.

Yani; F kodomaini X *ve* $S = \lim F$ olacak şekildeki funktorsa $X = \lim F$ ve $UX = \lim UF$ olacak şekilde bir tek (izomorfizm farkıyla) $X \in X$ vardır. Dahası $UX \subset UY \times UY$ bir denklik bağıntısı olacak şekilde $X \subset Y \times Y$ varsa $X \rightrightarrows Y$ nin bir $Y \longrightarrow Z$ koequalizer ı vardır ve $UX \rightrightarrows UY \longrightarrow UZ$ bir koequalizer dır.

n (muhtemelen sonsuz) bir küme olmak üzere $n-$ li işlem $U^n \longrightarrow U$ nun bir doğal transformasyonudur. U nun bir F sol adjointi vardır ancak ve ancak her bir n kümesi için $U^n \longrightarrow U$ doğal transformasyonlarının kümesi bir proper kümedir. (Ve böylece $UF_n = Nat.Trans.(U^n, U)$ dur.)

Bir sıfırlı işlem (constand ya da sabitte denir), $U^0 = 1 \longrightarrow U$ nun bir doğal transformasyonudur. Bir $U^n \longrightarrow U^m$ doğal transformasyonuna $f : m \longrightarrow n$ bir fonsiyon olmak üzere U^f formunda ise bir projeksiyon denir. Herhangi bir n - li $U^n \longrightarrow U$ işlemi, ilk dönüşüm bir projeksiyon ve n^0 sonlu bir küme olmak üzere $U^n \longrightarrow U^{n_0} \longrightarrow U$ şeklinde ayrılabiliyorsa "tüm işlemler sonludur" denir.

Teorem 2.6.2 X bir denk kategori olsun. Bu durumda;

1. *X,* **Z.1** i sağlar ancak ve ancak sadece bir tek sıfırlı işlem vardır.

2. *X,* **Z.1** yi sağlar.

3. Her $X \in X$ için 0 taban noktası (base point) olmak üzere X+0=0+X özelliğini sağlayan bir " + " ikili işlemi varsa *X,* **Z.3**. ü sağlar(X noktalı iken). Monadlanabilen bir X kategorisi **Z.3**. ü sağlar;

$X * Y \longrightarrow X \times Y$ onto dur ancak ve ancak az önce söylendiği gibi bir " + " vardır. (Burada $*$ koproduct tır.)

4. *X,* **Z.4**. ü sağlar.

5. Bütün işlemler sonlu ise *X,* **Z.5**. i sağlar. Eğer X monadlanabilir ise tersi de doğrudur.

6. X, **Z.6**. yı sağlar.

2.7 Equalizerlar Ve Coequalizerlar

Yardımcı Teorem 2.7.1 $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ A dan B ye fonksiyon çifti olsun. $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ kümesinin A ya gömülmesi olan e aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $e : E \longrightarrow A$ bir fonksiyondur,

2. $f \circ e = g \circ e$;

3. $f \circ e' = g \circ e'$ olacak şekildeki herhangi $e' : E' \longrightarrow A$ fonksiyonu için aşağıdaki üçgeni değişmeli yapan bir tek $\bar{e} : E' \longrightarrow E$ fonksiyonu vardır.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & \\
E \arrow[r, "e"'] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.15

Tanım 2.7.2 $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ $\mathcal{C}$ - morfizm çifti olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan (E, e) çiftine f ve g nin equalizer ı denir.

1. $e : E \longrightarrow A$ bir C - morfizmdir,

2. $f \circ e = g \circ e$;

3. $f \circ e' = g \circ e'$ olacak şekildeki herhangi $e' : E' \longrightarrow A$ $\mathcal{C}$ - morfizmi için aşağıdaki üçgeni değişmeli yapan bir tek $\bar{e} : E' \longrightarrow E$ $\mathcal{C}$ - morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & \\
E \arrow[r, "e"'] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.16

Dual olarak $c : B \longrightarrow C$ için (c, C) ye $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ çiftinin $\mathcal{C}$ deki coequalizer ıdır ancak ve ancak $c \circ f = c \circ g$ ve $c' \circ f = c' \circ g$ özelliğini sağlayan her bir c' morfizmi c ile bir tek şekilde ayrılır.

Örnek 2.7.3 C, Küme, Grp, R - Mod ya da Top kategorilerinden biri ve $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ C - morfizmler olsun.$\{a \in A \text{ I } f(a) = g(a)\}$ şeklinde tanımlanan E kümesi A nın bir alt kümesi (veya sırasıyla, alt grup, alt modül, alt uzay) ve $e : E \longrightarrow A$ içine dönüşüm olarak düşünülürse (E, e) çifti f ve g nin equalizer ıdır.

Örnek 2.7.4 $\mathcal{C}$, Küme ya da Top (benzer şekilde Grp ya da R - Mod)kategorilerinden biri ve $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ $\mathcal{C}$ - morfizmler olsun. Q, B üzerindeki $a \in A$ için tüm $(f(a), g(a))$ çiftlerini içeren en küçük denklik bağıntısı (benzer şekilde denklik sınıfı), C uygun indirgenmiş yapı ile B/Q ve $c : B \longrightarrow C$ indirgenmiş bölüm dönüşümü olsun. Bu durumda $(c.C)$ ikilisi f ve g nin bir coequalizer ıdır.

Tanım 2.7.5 Bir $B \in Ob(\mathcal{C})$ objesinin alt objesi $A \xrightarrow{f} B$ bir morfizm olmak üzere (A, f) çiftidir.

Önerme 2.7.6 (E, e), $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ nin equalizer ı ise (E, e) A nın bir alt objesidir.

İspat Yukarıdaki tanım gereğince e nin bir morfizm olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. $e \circ r = e \circ s$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f \circ (e \circ r) = g \circ (e \circ r)$ dır. Böylece equalizer ın tanımından $e \circ t = e \circ r$ olacak şekilde bir tek t morfizmi vardır. Fakat her bir s ve r bu tarz bir morfizmdir, böylece $s = r$ dir. Buradan e bir morfizmdir.

2.8 Noktalı Kategoriler

Tanım 2.8.1 Aşağıdaki denk koşullardan birini sağlayan bir $\mathcal{C}$ kategorisine noktalı kategori denir.

1. Her A, $B \in Ob(\mathcal{C})$ için $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sadece bir sıfır morfizmi içerir.

2. Her A, $B \in Ob(\mathcal{C})$ için $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sadece bir tane sıfır morfizm içerir.

3. Her A, $B \in Ob(\mathcal{C})$ için $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sadece bir tane constant morfizm içerir.

4. Her A, $B \in Ob(\mathcal{C})$ için $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ sadece bir tane coconstant morfizm içerir.

5. Her A, $B \in Ob(\mathcal{C})$ için $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ en az bir tane constant morfizm ve en az bir tane coconstant morfizm içerir.

6. Her bir $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ kümesinden sadece bir tek eleman seçen ve bu seçilmiş morfizmle herhangi bir morfizmin kompozisyonu da (eğer tanımlıysa soldan ya da sağdan olabilir) yine bir seçilmiş morfizmdir.

Tanım 2.8.2 $\mathcal{C}$ bir noktalı kategori olsun.

1. $A \xrightarrow{f} B$ bir $\mathcal{C}$ - morfizm olsun ve 0_{AB} A dan B ye (varsa) tek sıfır morfizm ise $Equ(f, 0_{AB})$ ye f nin çekirdeği denir. $Çek(f)$ ile gösterilir.

2. $\mathcal{C}$ nin her bir $f \in Mor(\mathcal{C})$ morfizmi için $Çek(f)$ varsa çekirdekleri vardır denir.

Tanım 2.8.3 (Sıfır Morfizm**)** Bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki sıfır morfizm (ya da bir $\mathcal{C}$ - sıfır morfizmi) hem bir $\mathcal{C}$ - constant morfizmi hem de bir $\mathcal{C}$ - coconstant morfizmidir.

Tanım 2.8.4 Bir $A \xrightarrow{f} B$ $\mathcal{C}$ - morfizmi

1. Her bir $C \in Ob(\mathcal{C})$ ve her $r, s \in \hom_{\mathcal{C}}(C, A)$için $f \circ r = f \circ s$ özelliğini sağlıyorsa $\mathcal{C}$ de bir constant morfizmdir.

2. f, $\mathcal{C}^{op}$ da bir constant morfizm ise f ye $\mathcal{C}$ de bir coconstant morfizm denir. (Yani "constant" ve "coconstant" lık dual gösterimlerdir.)

2.9 Limitler Ve Colimitler

D bir small kategori ve I=D_0 da onun objelerini kümesini göstermek üzere;

Tanım 2.9.1 $F : D \to \mathcal{C}$ bir funktor olsun. F üzerindeki bir koni aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $(C, (p_i)_{i \in I})$ çiftidir.

1. $C \in \mathcal{C}_0$

2. Her bir $i \in I$ objesi için $p_i : C \to F(i)$

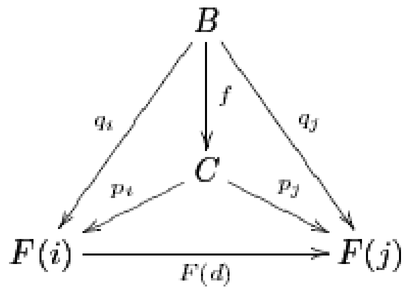
3. D deki her $d : i \to j$ morfizmi için $p_j = F(d)p_i$ dir.

Ayrıca $(C, (p_i)_{i \in I})$ çifti F üzerinde bir konidir ancak ve ancak $\triangle_C : D \to \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ üzerinde belli bir funktor olmak üzere

$$p = (p_i)_{i \in I} : \triangle_C \implies F$$

dir. Yani F üzerindeki koniler belli funktorlardan F ye doğal transformasyonlardır.

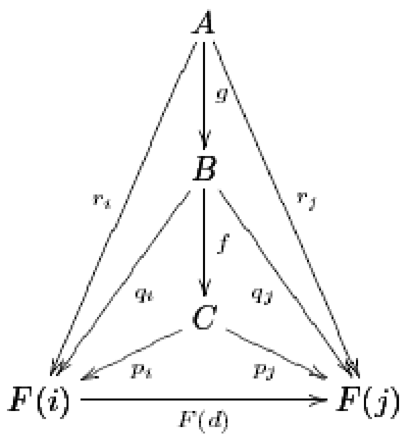
Tanım 2.9.2 $F : D \to \mathcal{C}$ bir funktor ve $(B, (q_i)_{i\in I})$, $(C, (p_i)_{i\in I})$ F üzerinde iki koni olsun. $\mathcal{C}$ nin bir $f : B \to C$ morfizmine $(B, (q_i)_{i\in I})$ konisinden $(C, (p_i)_{i\in I})$ konisine bir morfizm denir. Her $i \in I$ için $p_i f = q_i$ ise



Şekil 2.17

Önerme 2.9.3 Sabit bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktor ise F üzerindeki koniler ve morfizmler bir kategori oluşturur.

İspat Bu yeni kategorinin morfizmleri $\mathcal{C}$ deki gibi oluşturulacaktır.



Şekil 2.18

$f : (B, (q_i)) \to (C, (p_i))$ ve $g : (A, (r_i)) \to (B, (q_i))$ F üzerindeki iki morfizm olsun. Böylece $p_i(fg) = (p_i f)g = q_i g = r_i$ dir. Buradan da $fg : (A, (r_i)) \to (C, (p_i))$ gerçekten konilerin bir morfizmidir. Bir $(C, (p_i))$ konisinin birim morfizmi $1_{\mathcal{C}}$ dir. Kompozisyonların birleşme özelliği $\mathcal{C}$ nin ilgili özelliğinden sağlanır. Yukarıdaki önermede oluşturulan kategori $cone(F)$ ile gösterilir ve F üzerindeki konilerin kategorisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.9.4 Bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktorunun Limiti, F üzerindeki konilerin $cone(F)$ kategorisinin son objesidir. Böylece F üzerindeki her $(Q,\ (q_i)_{i\in I})$ objesi için, her $i \in I$ objesi için $q_i = p_i m$ olacak şekilde bir tek $m : Q \to L$ morfizmi varsa F üzerindeki $(L, (p_i)_{i\in I})$ konisi F in limitidir. Genel olarak $(L, (p_i)_{i\in I}) = \lim F$ ya da $L = \lim F$ olarak gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] \arrow[d, dashed, "m"] & \\
& L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.19

Tanım 2.9.5 $F : D \to \mathcal{C}$ bir funktor olsun.F üzerindeki bir cokoni aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $(C, (u_i)_{i\in I})$ çiftidir.

1. $C \in \mathcal{C}_0$

2. Herbir $i \in I$ objesi için $u_i : F(i) \to C$

3. D deki her $d : j \to i$ morfizmi için $u_j = u_i F(d)$ dir.

Bir F funktoru üzerindeki cokonilerin $cocoe(F)$ kategorisi konilerdekinin duali olarak tanımlanabilir.

Tanım 2.9.6 Bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktorunun Colimiti, F üzerindeki cokonilerin $cocone(F)$ kategorisinin ilk objesidir. Böylece F üzerindeki her $(Q, (v_i)_{i\in I})$ objesi için, her $i \in I$ objesi için $v_i = m u_i$ olacak şekilde bir tek $m : L \to Q$ morfizmi varsa F üzerindeki $(L, (u_i)_{i\in I})$ konisi F nin colimitidir. Genel olarak $(L, (u_i)_{i\in I}) = co\lim F$

olarak gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
& Q & \\
& L \arrow[u, dashed, "m"'] & \\
F(i) \arrow[uur, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"] & & F(j) \arrow[uul, "v_j"'] \arrow[ul, "u_j"'] \arrow[ll, "F(d)"]
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.20

Örnek 2.9.7 İki objesi olan bir D somut kategorisini ele alalım. $D_0 = \{1, 2\}$ olsun. Bir $F : D \to \mathcal{C}$ bir funktoru C nin objelerinin $(F(1), F(2))$ çifti ile tanımlanır. F üzerindeki bir koni

$$F(1) \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} F(2)$$

diyagramıdır ve F üzerindeki bir kokoni de

$$F(1) \xrightarrow{u_1} P \xleftarrow{u_2} F(2)$$

diyagramıdır. Burada (P, p_1, p_2), F nin bir limitidir ancak ve ancak $F(1)$ ve $F(2)$ nin çarpımıdır ve (P, u_1, u_2), F nin kolimitidir ancak ve ancak $F(1)$ ve $F(2)$ nin çarpımıdır.

Örnek 2.9.8 $D = 0$ bir boş kategori olsun. Bu durumda bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktoru üzerindeki bir koni ya da kokoni $\mathcal{C}$ nin sadece bir objesidir. Dolayısıyla $\mathcal{C}$, F nin limitidir (ya da kolimitidir) ancak ve ancak $\mathcal{C}$ nin bir son (ya da ilk) objesidir.

Örnek 2.9.9 I bir küme ve D, $D_0 = I$ olacak şekilde bir somut kategori olsun. Böylece $F : D \to \mathcal{C}$ funktoru $\mathcal{C}$ nin objelerinin $(F(i))_{i \in I}$ ailesi ile tanımlıdır. F üzerindeki bir koni $p_i = \mathcal{C} \to F(i)$ olmak üzere bir $(C, (p_i)_{i \in I})$ çiftidir. Bu koni F nin limitidir ancak ve ancak $(F(i))_{i \in I}$ ailesinin bir çarpımıdır. Dual olarak F nin bir kolimiti $(F(i))_{i \in I}$ ailesinin bir koçarpımıdır.

Örnek 2.9.10 $D_0 = \{1, 0\}$ ve birim morfizmden farklı $d_1, d_2 : 1 \to 0$ morfizmleriyle D kategorisini alalım. Bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktoru $\mathcal{C}$ deki paralel okların bir

$f_1, f_2 : F(1) \to F(2)$ çiftiyle tanımlanır. F deki bir koni;

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e_1"'] \arrow[rr, bend left, "e_0"] & F(1) \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & F(0) \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramıdır ve F deki bir kokoni de;

$$\begin{tikzcd} F(1) \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[rr, bend left, "c_1"] & F(0) \arrow[r, "c_0"'] & C \end{tikzcd}$$

diyagramıdır.Dolayısıyla (E, e_0, e_1), F nin bir limitidir ancak ve ancak (E, e_1), f_1 ve f_2 nin bir equalizeridir ayrıca (C, c_0, c_1), F nin bir kolimitidir ancak ve ancak (C, c_0), f_1 ve f_2 nin bir coequalizeridir.

Örnek 2.9.11 $D_0 = \{0, 1, 2\}$ ve birim morfizmden farklı

$$d_1 : 1 \to 0, d_2 : 2 \to 0$$

morfizmleriyle D kategorisini ele alalım. Bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktoru $\mathcal{C}$ nin morfizmlerinin $f_1 : F(1) \to F(0), f_2 : F(2) \to F(0)$ çiftiyle tanımlıdır. F üzerindeki bir koni

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "p_0"] & F(2) \arrow[d, "f_2"] \\ F(1) \arrow[r, "f_1"'] & F(0) \end{tikzcd} .$$

Şekil 2.21

değişmeli diyagramıdır. Dolayısıyla (P, p_1, p_2, p_3), F nin bir limitidir ancak ve ancak (P, p_1, p_2), F nin bir pullback idir.

Örnek 2.9.12 $D_0 = J \cup \{0\}$ ve birim morfizmden farklı $d_j : j \to 0,\ j \in J$ morfizmler olmak üzere D bir kategori olsun. Bir $F : D \to \mathcal{C}$ funktoru $\mathcal{C}$ nin morfizmlerinin bir $f_j : F(j) \to F(0)$ ailesiyle tanımlıdır. F üzerindeki bir değişmeli

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "p_j"'] \arrow[dr, "p_0"] & \\
F(j) \arrow[r, "f_j"'] & F(0)
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.22

diyagramıdır. Buradan $(P, (p_i)_{i \in J \cup \{0\}}), F$ nin bir limitidir ancak ve ancak $(P, (p_j)_{j \in J})$, f_j, $j \in J$ nin bir multiple pullback idir.

2.10 Çekirdek

Önerme 2.10.1 $u : (A_1, \alpha_1) \to (A_2, \alpha_2)$, $\mathcal{C}$ de bir morfizm ve örtense

$K = \{a \in A_1 \mid A_2 \text{ de } u(a) = 0 \text{ dır.}\}$ $\mathcal{C}$ de bir objedir ve $v : K \to A_1$, u nun bir çekirdeği ve u, v nin koçekirdeğidir.

İspat $U^{\hat{T}} : \mathcal{C} \to G$ lim leri oluşturur. Böylece K ,$\mathcal{C}$ de bir objedir ve $v : K \to (A_1, \alpha_1)$, u nun bir çekirdeğidir.

$uv = 0$ ve $u' : (A_1, \alpha_1) \to (A_3, \alpha_3)$ $uv' = 0$ olduğunu kabul edersek $u = \textit{koçek}v$ dir.

G de u örten olduğundan $u = \textit{koçek}v$ dir ve böylece $wu = u'$ olacak şekilde bir tek $w : A_2 \to A_3$ grup homomorfizmi vardır. w nin de bu özelliği sağlayan tek $T'-$ morfizm olduğu açıktır.

Tanım 2.10.2 R ve A, $\mathcal{C}$ nin objeleri olsun.R nin A tarafından uzantısı

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} R \to 0$$

dizisidir.Burada p örten ve i, p nin çekirdeğidir.

Tanım 2.10.3 T, $\mathcal{C}$ nin bir objesi olsun. T nun bir A alt objesine eğer bir morfizmin çekirdeği ise İdeal denir. Bu durum $A < T$ ile gösterilir.

Bir alt objenin ideal olma şartını oluşturmak için $\mathcal{C}$ deki işlemlerin bazı özellikleri sağlayan bir Ω kümesi tarafından üretildiğini varsayarız.

Ω_i ,Ω daki $i-li$ işlemlerin kümesi olsun. **(1)-(2)-(3)** e ek olarak $\mathcal{C}$ nin sağlaması gereken özellikler;

(4) C **deki işlemlerin bir** Ω **üreteç kümesi vardır** ve

$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ dir.

Ω nın grup yapısıyla birlikte birim, ters ve $+$ işlemlerini içerdiği düşünülebilir.

$\Omega_2' = \Omega_2 \backslash \{+\}$

$\Omega_1' = \Omega_1 \backslash \{-\}$ olsun.

$* \in \Omega_2'$ ise $*^0$,

$x *^0 y = y * x$ şeklinde tanımlıdır ve ayrıca Ω_2' dedir.

Hatırlatma 2.10.4 $\mathcal{C}$ deki sıfırlı işlem $T(\varnothing) = \{p\}$ ye karşılık geldiği için Ω_0 sadece bir tek birim eleman içerir. O da grubun birimidir.

(5) $* \in \Omega_2'$ **ise** $a * (b + c) = a * b + a * c$ **dir.**

(6) $w \in \Omega_1'$ **ise** $w, +$ **işlemini koruyan bir homomorfizmdir ve** $* \in \Omega_2'$ **ise** $w(a * b) = w(a) * b$ **dir.**

Teorem 2.11 A, B nin bir altobjesi olsun. Bu durumda

$A < B$ dir ancak ve ancak

i) A, B nin normal alt grubudur.

ii) Her $a \in A$, $b \in B$ ve $* \in \Omega_2'$ için $a * b \in A$ dır.

İspat $A < B$ olduğundan **i)** ve **ii)** sağlanır.

$w \in \Omega_1'$ için $w(b_1 + A) = w(b_1) * A$**,**

$* \in \Omega_2'$ için $(b_1 + A) * (b_2 + A) = b_1 * b_2 + A$ tanımlayalım.

Bunların iyi tanımlı olduğu ve gruplar için kanonik dönüşümlerle korunduğu açıktır.

Tanım 2.12 $\mathcal{C}$ nin bir A objesi abelyan grup ve her $* \in \Omega_2'$ için $A * A = 0$ ise singülerdir.

Teorem 2.13 $\mathcal{C}$, **(1)-(6)** özelliklerini sağlayan bir kategori ve A, $\mathcal{C}$ nin bir objesi olsun. Bu durumda

$ZA = \{z \in A \mid \text{Her } a \in A \text{ ve } * \in \Omega_2' \text{ için } a + z = z + a \text{ ve } \; a * Z = 0\}$ dır.

Dahası ZA singülerdir ve $ZA < A$ dır.

Tanım 2.14 $A < B$ ise

$Z(\mathbf{B}, A) = \{b \in \mathbf{B} \mid \text{Her } a \in A \text{ ve } * \in \Omega_2' \text{ için } a + b = b + a \text{ ve } \; a * Z = 0\}$ ye A nın B deki merkezleyicisi denir.

$Z(\mathbf{B}$,$A)$, $\mathbf{B}$ nin bir alt kümesi olmasına rağmen $Z(\mathbf{B}, A) < \mathbf{B}$ olması zorunlu değildir.

Örnek 2.14.1 $\mathcal{C}$ Reel Jordan Cebirlerinin kategorisi olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$, **(1)-(6)** özelliklerini sağlar.

B, 2×2 tipindeki üst üçgensel reel matrislerin bir cebiri olsun. Yan yana ifadeler bilinen matris çarpımını göstersin, bilinen matris yardımıyla

$X * Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ olarak tanımlanan $*$ ile birlikte $\mathbf{B}$ bir Jordan Cebiridir. Bununla birlikte

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \text{ bir reel sayıdır.} \right\}$$

$\mathbf{B}$ de bir idealdir. Ancak

$$Z(\mathbf{B}, A) = \left\{ \begin{pmatrix} u & y \\ 0 & -u \end{pmatrix} \mid u,\ y \text{ birer reel sayıdır.} \right\}$$

bir ideal değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $Z(\mathbf{B} \backslash A)$ da değildir.

Örnek 2.14.2 $\mathcal{C}$, $\Omega_1' = \varnothing$ ve $\Omega_2' = \{*, *^0\}$ olacak şekilde **(1)-(6)** özelliklerini sağlayan bir kategori olsun. B,X_1, X_2, X_3 ve X_4 üreteçleri üzerinde bir serbest grup olsun. B üzerindeki $*$ işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın.

$*$	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0
X_3	0	0	X_3	X_4
X_4	0	0	X_4	X_4

Tablo 2.2

ve dağılma özelliğini de sağlar, ayrıca $*$ iyi tanımlı ve birleşimlidir.

A, X_1 tarafından üretilen normal altgrup olsun. A nın $*$ a göre kapalı olduğu açıktır ve $A * B = 0$ dır. Böylece $A < B$ dir. Ancak $Z(B, A) \nless B$ dir çünkü $X_3, Z(B, A)$ dadır fakat

$X_1 + (X_3 * X_4) = X_1 + X_4 \neq X_4 + X_1 = (X_3 * X_4) + X_1$ olduğundan

$X_3 * X_4 \notin Z(B, A)$ dır.

Şimdi $A < B$ nin $Z(B, A) < B$ yi gerektirmesine ihtiyacımız var. Bunu sağlamak için iki aksiyom daha formüle edeceğiz. $\mathcal{C}$, **(1)-(6)** özelliklerini sağlayan bir kategori olsun. $X, \mathcal{C}$ nin bir objesi ve $x_1, x_2, x_3 \in X$ olmak üzere

(7) Ω_2' deki her bir $*$ için $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.

(8) Her bir $(\bullet, *) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için

$$(x_1 \bullet x_2) * x_3 = w(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1, (x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

özelliğinde bir w kelimesi vardır. Buradaki her sıralama Ω_2' deki bir işlemi temsil etmektedir.

Hatırlatma 2.15 $w(0,0,0,0,0,0,0,0) \in \Omega_0$ olduğu için $w(0,0,0,0,0,0,0,0) = 0$ dır.

Jordan cebiri $+$ değişmeli olduğundan **(7)** yi sağlar fakat (**8**) i sağlamaz Örnek **2.17.2** deki B objesi $*$ birleşmeli olduğu için (**8**) i sağlar fakat **(7)** B için sağlanmaz.

Tanım 2.16 **(1)-(8)** aksiyomlarını sağlayan $\mathcal{C}$ kategorisine bir İlgili Kategori denir.

Teorem 2.17 B bir ilgili kategorinin objesi ve $A < B$ ise $Z(B, A) < B$ dir.

Kaynaklar Dizini

Barr, M., 1969, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1-11

Barr, M, 1970, Coequalizers and free triples, Math., Z., 116 307-332.

Horst, H., George, E. S., 1973, Category Theory, Allyn and Bacon Inc., .

Mac Lane, S., 1971, Categories for working mathematician, Springer-Verlag.

Manes, E.,1967, A triple miscellany, Dissertation, Wesleyan Univ., Middletown, Conn., .

Orzech, G., 1972, Obstruction theory in algebraic categories I, Journal of Pure and Applied Algebra 2, , 287-314 ve 315-340.