

Ters Gauss Dağılımının Ölçek Parametrelerinin Homojenliği için Wald-Skor İstatistiklerine
Dayalı Alternatif Testler

Gamze Güven

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Şubat 2020

Alternative Tests Based on Wald-Score Statistics for the Homogeneity of Scale Parameters
of Inverse Gaussian Distribution

Gamze Güven

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Statistics

February 2020

Ters Gauss Dağılımının Ölçek Parametrelerinin Homojenliği için Wald-Skor İstatistiklerine
Dayalı Alternatif Testler

Gamze Güven

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İstatistik Anabilim Dalı
Uygulamalı İstatistik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Hatice ŞAMKAR

Şubat 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Hatice ŞAMKAR danışmanlığında hazırlamış olduğum “Ters Gauss Dağılımının Ölçek Parametrelerinin Homojenliği için Wald-Skor İstatistiklerine Dayalı Alternatif Testler” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 20/02/2020

Gamze GÜVEN

ÖZET

Bu çalışmada k tane Inverse Gauss dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için Wald ve skor istatistiklerine dayalı hesaplamalı yaklaşım testi, Bartlett düzeltilmiş Wald ve skor testi ve standartlaştırılmış Wald ve skor testi önerilmiştir. Wald ve skor test istatistiklerinin dağılımı büyük örnek çaplarında $k - 1$ serbestlik dereceli ki kare dağılımına yakınsamaktadır. Ancak küçük örnek çaplarında bu yakınsama istenilen düzeyde olmaz. Dolayısıyla, bu çalışmada, ilk başta Wald ve skor test istatistikleri elde edilmiştir. Bu test istatistikleri teorik olarak aynı sonucu verdiği için bu istatistik WS olarak gösterilmiştir. İkinci olarak, WS istatistiği hesaplamalı yaklaşım testine adapte edilmiştir. Üçüncü olarak WS istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulanmıştır ve son olarak WS istatistiği standartlaştırılmıştır. Önerilen testlerin performansları literatürde var olan testlerle geniş bir Monte Carlo simülasyonu aracılığıyla karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışmasının sonucuna göre tüm durumlarda, özellikle de örnek çapları küçük ve farklı iken, önerilen testlerin literatürde var olan testlere göre oldukça güçlü olduğu görülmüştür. Ayrıca çalışmada kullanılan testler gerçek bir veri seti üzerine uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Invers Gauss Dağılımı, Ölçek Parametrelerinin Homojenliği, Wald ve Skor İstatistikleri, Hesaplamalı Yaklaşım Testi, Bartlett Düzeltilmiş Wald ve Skor Testi, Standartlaştırılmış Wald ve Skor Testi

SUMMARY

In this study, we propose computational approach test based on Wald and score statistics, Bartlett corrected Wald and score test and standardized Wald and score test for the homogeneity of k inverse Gaussian scale parameters. The distribution of Wald and score test statistics is approximated as chi-square distribution with degrees of freedom $k - 1$ for large sample sizes. However, in small sample sizes it results in an unsatisfactory convergence. Therefore, in this study, firstly Wald and score test statistics are obtained. Since these test statistics are theoretically same for this problem, this statistic is shown as WS . Secondly, WS statistic is adapted into computational approach test. Thirdly, Bartlett correction is applied to WS statistic and finally WS statistic is been standardized. The performances of the proposed tests are compared with the existing tests via extensive Monte Carlo simulations. According to the results of the simulation study, it is seen that the proposed tests outperform the existing tests in all settings especially when sample sizes are small and unequal. In addition, the tests used in this study are applied to real data set.

Keywords : Invers Gaussian Distribution, Homogeneity of Scale Parameters, Wald and Score Statistics, Computational Approach Test, Bartlett Corrected Wald and Score Test, Standardized Wald and Score Test

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca bütün çalışmalarında bilgisiyle bana destek olup her talep ettiğimde benimle çalışan, benim her konuda gelişmem için önümü açan, sadece çalışmalarında değil özel hayatımda da desteğini esirgemeyip gözlerim her dolduğunda benimle gözleri dolan, her sevdiğimde de sevincimi paylaşan, beni her konuda motive eden canım danışmanım Prof. Dr. Hatice ŞAMKAR'a tüm içtenliğimle teşekkür ediyorum. Doktora tezim boyunca zorlandığım her noktada bütün sorularına bunalmadan cevap verip bana yapabileceğimi hissettiren, eşi Esra hocamla birlikte bana ailesindenmişim gibi davranan, her çalışmamızdan sonra bilgisine ve zekasına hayran olduğum, canım eş danışmanım Prof. Dr. Fikri GÖKPINAR'a da sonsuz teşekkür ediyorum. TİK üyeleri hocalarım Prof. Dr. Özlem ALPU ve Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU'na bu teze olan değerli katkılarından ve motivelerinden dolayı teşekkür ediyorum. Ayrıca Prof. Dr. Özlem ALPU hocama bölüm başkanı olarak da çalışmalarında beni desteklemesinden, benim başarılı olacağıma güvenmesinden ve tüm bu süreçteki anlayışından dolayı ayrıca teşekkür ediyorum. En son, hem anne hem baba görevi yapıp beni maddi manevi hiçbir konuda eksik bırakmayan, bütün eğitim hayatım boyunca derslerimle ve benimle ilgilenip güç veren, bütün hayatını bana adayıp bu durumdan hiç bunalmayan fedakar anneme de sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	9
3. IG DAĞILIMI	15
3.1 IG Dağılımının Özellikleri	19
3.2 IG ve Normal Dağılımın Özellikleri Arasındaki Benzerlikler	23
4. YÖNTEM	25
4.1 Temel Notasyonlar	25
4.2 Olabilirlik Oran Testi	25
4.3 Uyarlanmış Olabilirlik Oran Testi.....	26
4.4 Kesin Olabilirlik Oran Testi	27
4.5 Genelleştirilmiş Olabilirlik Oran Testi.....	27
4.6 Saddlepoint Yaklaşımı	29
5. IG DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN TAHMİN EDİCİLERİ VE ÖNERİLEN TESTLER	32
5.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri	32
5.2 Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri	33
5.3 Wald Test İstatistiği	35
5.4 Skor Test İstatistiği.....	39
5.5 Olabilirlik Oran Test İstatistiği.....	43

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.6 Hesaplamalı Yaklaşım Testi.....	45
5.7 WS İstatistiğine dayalı CAT.....	48
5.8 Bartlett Düzeltilmiş WS Testi	49
5.9 Standartlaştırılmış WS Testi.....	53
6. BULGULAR VE TARTIŞMA	58
7. UYGULAMA.....	67
8. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	72
ÖZGEÇMİŞ.....	81

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 IG dağılımının farklı λ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği .	17
3.2 IG dağılımının farklı λ değerleri için dağılım fonksiyonunun grafiği	18
3.3 IG dağılımının farklı μ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği .	18
3.4 IG dağılımının farklı μ değerleri için dağılım fonksiyonunun grafiği	18
3.5 $\phi = 2$ ve $\mu = 1, \mu = 2$ ve $\mu = 2,5$ değerleri için mod değerine karşılık gelen IG dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerlerini gösteren grafik	20

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	ANOVA Tablosu.	4
1.2	ANORE Tablosu.	6
3.1	IG dağılımının farklı λ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri.	19
3.2	IG dağılımının farklı μ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri.	19
6.1	$k = 3$ için testlerin I. Tip hataları	59
6.2	$k = 4$ için testlerin I. Tip hataları	59
6.3	$k = 5$ için testlerin I. Tip hataları	60
6.4	$k = 7$ için testlerin I. Tip hataları	60
6.5	$k = 3$ için testlerin güç değerleri	61
6.6	$k = 4$ için testlerin güç değerleri	62
6.7	$k = 5$ için testlerin güç değerleri	63
6.8	$k = 7$ için testlerin güç değerleri	64
7.1	Beş farklı bileşenden oluşan 10 adet yüksek hızlı türbin motoru yatağının milyonlarca devir birimindeki yorgunluk süreleri	67
7.2	Grupların (bileşenlerin) her biri için test istatistiği değerleri ve p değerleri . . .	68
7.3	Gruplara (bileşenler) ilişkin ortalamalar ve ölçek parametrelerinin tahminleri .	68
7.4	Testlerin p değerleri	69

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Araştırmacılar hangi bilim dalında çalışıyor olurlarsa olsunlar bir takım verilerin modellenmesi ve analizi problemi ile ilgilenirler. Açıktır ki, verilerin modellenmesi ve analizinde istatistiksel yöntemlerden yararlanırlar. İstatistiksel yöntemler genel olarak parametrik ve parametrik olmayan olmak üzere iki gruba ayrılır. Parametrik istatistiksel yöntemler kullanılırken öncelikle veri setinin dağılımının belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Geleneksel olarak veri setinin dağılımının normal olduğu varsayılır. İstatistiksel analizlerde temel varsayım olan normallik varsayımı kullanılarak model parametrelerinin tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere dayalı olarak hipotez testleri elde edilir. Ancak gerçek hayat problemlerinde normal olmayan simetrik ve çarpık dağılımlar normal dağılıma göre daha yaygındır. Bu nedenle normal olmayan dağılımlar kullanılarak yapılan istatistiksel sonuç çıkarımları uygulamada ve teoride önemli bir yer tutar. Bu çalışmada, literatürde yaygın olarak kullanılan ve çarpık bir dağılım olan ters Gauss (Inverse Gaussian-IG) dağılım kullanılmaktadır. IG dağılımı her ne kadar çarpık bir dağılım olsa da birçok özellik bakımından normal dağılım ile benzerlik gösterir. Örnek olarak normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerin toplamının normal dağılıma sahip olmasına benzer olarak IG dağılımına sahip rasgele değişkenlerin toplamının IG dağılması, normal dağılımda olduğu gibi IG dağılımında da konum ve ölçek parametrelerine ilişkin tahmin edicilerin bağımsız olması vb. verilebilir. Bu özellikler ve benzer nitelikteki diğer özelliklerinden dolayı, IG dağılımı istatistiksel çıkarımlarda matematiksel kolaylıklar sağlar.

İstatistiksel yöntemlerde, özellikle normal dağılıma sahip k tane grubun ortalamasının eşitliği testlerinde, yaygın olarak kullanılan bir diğer temel varsayım da varyansların homojenliğidir. Benzer şekilde, IG dağılımına sahip k tane grubun ortalamasının eşitliği testlerinde ise temel varsayım ölçek parametrelerinin homojenliğidir. Bu çalışmada, popüler bir problem olan IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin eşitliği için yeni testler önerilmesi ve önerilen testlerin küçük örnek çaplarında dahi var olan testlerden daha güçlü ve kolay uygulanabilir olması amaçlanmaktadır. Bunun için öncelikle ölçek parametrelerinin homojenliği varsayımına dayanan, gözlemlerin ve gözlemlere ilişkin ortalamaların tersini dikkate alan ANORE (Analysis of Reciprocals) yönteminden bahsedilecektir. Bu yöntemin istatistiksel temelini oluşturmak ve konuyu daha iyi anlamak amacıyla ilk olarak ANORE ile çarpıcı bir benzerliğe sahip olan ANOVA (Analysis of Variance) yönteminin detaylı olarak incelenmesi uygun görülmüştür.

ANOVA, k tane grup ortalamasının eşitliğini test etmek için kullanılan bir yöntemdir. Yukarıda da bahsedildiği gibi ANOVA yönteminde

- Hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu ve
- Hata terimlerinin varyanslarının homojen olduğu

varsayımlarının sağlanması gerekir. Bir diğer önemli varsayım ise hata terimlerinin bağımsızlığıdır.

$\{Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}\}$, ($i = 1, 2, \dots, k$), ortalaması μ_i , varyansı σ^2 olan normal dağılımdan rassal bir örneklem olsun. Burada, k tane grup ortalamasının eşitliğini test etmek için kullanılan sıfır hipotezi,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (1.1)$$

biçimindedir.

Normal dağılım varsayımı altında parametrelerin tahmin edicileri elde edilirken genellikle en küçük kareler (Least Squares-LS) yöntemi kullanılır. Çünkü veri setinin dağılımı normal olduğunda LS tahmin edicileri en etkin tahmin edicilerdir. Bu tahmin edicilere dayanan testlerin gücü de dolayısıyla yüksek olur.

Bahsedilen varsayımların sağlanması koşuluyla (1.1) hipotezini test etmek için kullanılan ve LS tahmin edicilerine dayanan ANOVA F testi; genel kareler toplamının (Sum of Squares Total- SST), gruplar arası kareler toplamı (Sum of Squares Between- SSB) ve gruplar içi kareler toplamı (Sum of Squares Within- SSW) olarak bileşenlerine ayrılması yoluyla elde edilir. Bu bileşenlerine ayrılma

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (1.2)$$

şeklindedir. Eşitlik (1.2) de gösterilen bileşenler

$$\begin{aligned}
SST &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2, \\
SSB &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2, \\
&= \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \\
SSW &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2
\end{aligned} \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanırsa Eşitlik (1.2)

$$SST = SSB + SSW$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_i &= \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} / n_i, \\
\bar{Y} &= (\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}) / n
\end{aligned}$$

dir. Burada $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Böylelikle (1.1) hipotezini sınamak için kullanılan ANOVA F testi aşağıda gösterildiği gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{SSB/(k-1)}{SSW/(n-k)} \\
&= MSB/MSW.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Burada MSB ve MSW sırasıyla, SSB ve SSW 'nin ilgili serbestlik derecelerine bölünmesiyle elde edilir.

SSB ve SSW birbirinden bağımsız ve sırasıyla $(k-1)$ ve $(n-k)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. SSB ve SSW 'nin birbirinden bağımsız olduğu Cochran Teoremi yardımıyla kanıtlanır. Daha ayrıntılı bilgi için bkz. Şenoğlu ve Acıtaş (2010).

Ki-kare dağılımına sahip bağımsız iki rasgele değişkenin serbestlik dereceleriyle birbirine oranının dağılımının F olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla H_0 altında F test istatistiği $(k - 1)$ ve $(n - k)$ serbestlik dereceli merkezi F dağılımına sahiptir (Şenoğlu ve Acıtaş, 2010). Eğer hesaplanan F test istatistiğinin değeri, α anlamlılık düzeyinde $(k - 1)$ ve $(n - k)$ serbestlik derecesine karşılık gelen F tablo değerinden büyükse (1.1) hipotezi reddedilir. Diğer bir ifadeyle, normal dağılıma sahip k tane grubun ortalaması arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olduğu yorumu yapılır. Bütün bu anlatılanların ışığında ANOVA tablosu Çizelge 1.1'deki gibi oluşturulur:

Çizelge 1.1: ANOVA Tablosu.

Kaynak	df	SS	MS	F_{hesap}
Gruplar arası	$k - 1$	SSB	MSB	MSB/MSW
Gruplar içi	$n - k$	SSW	MSW	
Toplam	$n - 1$	SST		

ANOVA yöntemine benzer olarak IG dağılımına sahip k tane grubun ortalamasının eşitliğini test eden yöntem ANORE dir. ANORE yönteminin kullanılması için

- Hata terimlerinin IG dağılımına sahip olduğu ve
- Hata terimlerinin ölçek parametrelerinin homojen olduğu

varsayımları kullanılır. Bir diğer önemli varsayım ise hata terimlerinin bağımsızlığıdır.

$\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}\}$, ($i = 1, \dots, k$), ortalaması μ_i , ölçek parametresi λ olan IG dağılımından rassal bir örneklem olsun. Burada, k tane grup ortalamasının eşitliğini test etmek için kullanılan sıfır hipotezi,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (1.5)$$

biçimindedir.

Normal olmayan dağılımlar için LS tahmin edicilerinin etkinlikleri ve bu tahmin edicilere dayanan testlerin güçleri son derece düşük olur. Bu nedenle en çok olabilirlik (maximum likelihood-ML) tahmin edicileri kullanılır. Çünkü ML tahmin edicileri bazı düzgünlük koşulları sağlandığında en etkin tahmin edicilerdir.

Bahsedilen varsayımların sağlanması koşuluyla (1.5) hipotezini test etmek için kullanılan ve ML tahmin edicilerine dayanan ANORE F testi; gözlemlerin terslerine ilişkin genel toplamın (Sum of Reciprocals Total- SRT) gözlemlerin terslerine ilişkin gruplar arası

toplam (Sum of Reciprocals Between-*SRB*) ve gözlemlerin terslerine ilişkin gruplar içi toplam (Sum of Reciprocals Between-*SRW*) olarak bileşenlerine ayrılması yoluyla elde edilir. Bu bileşenlerine ayrılma

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} ((1/X_{ij}) - (1/\bar{X})) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} ((1/X_{ij}) - (1/\bar{X}_i)) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} ((1/\bar{X}_i) - (1/\bar{X})) \quad (1.6)$$

şeklindedir. Eşitlik (1.6) da gösterilen bileşenler

$$\begin{aligned} SRT &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} ((1/X_{ij}) - (1/\bar{X})) \\ SRB &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} ((1/\bar{X}_i) - (1/\bar{X})) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i ((1/\bar{X}_i) - (1/\bar{X})) \\ SRW &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} ((1/X_{ij}) - (1/\bar{X}_i)) \end{aligned} \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanırsa Eşitlik (1.6)

$$SRT = SRB + SRW$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i, \\ \bar{X} &= (\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij})/n \end{aligned}$$

dir. Burada $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Böylelikle (1.5) hipotezini sınamak için kullanılan ANORE F testi aşağıda gösterildiği gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} F &= \frac{SRB/(k-1)}{SRW/(n-k)} \\ &= MRB/MRW. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Burada MRB ve MRW sırasıyla SRB ve SRW 'nin ilgili serbestlik derecelerine bölünmesiyle elde edilir.

SRB ve SRW birbirinden bağımsız ve sırasıyla $(k - 1)$ ve $(n - k)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. SRB ve SRW 'nin birbirinden bağımsız olduğu Tweedie (1957a) tarafından kanıtlanmıştır. Dolayısıyla H_0 altında F test istatistiği $(k - 1)$ ve $(n - k)$ serbestlik dereceli merkezi F dağılımına sahiptir. Eğer hesaplanan F test istatistiğinin değeri, α anlamlılık düzeyinde $(k - 1)$ ve $(n - k)$ serbestlik derecesine karşılık gelen F tablo değerinden büyükse (1.5) hipotezi reddedilir. Diğer bir ifadeyle, IG dağılımına sahip k tane grubun ortalaması arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olduğu yorumu yapılır. Bütün bu anlatılanların ışığında ANORE tablosu Çizelge 1.2'deki gibi oluşturulur:

Çizelge 1.2: ANORE Tablosu.

Kaynak	df	SR	MR	F_{hesap}
Gruplar arası	$k - 1$	SRB	MRB	MRB/MRW
Gruplar içi	$n - k$	SRW	MRW	
Toplam	$n - 1$	SRT		

Daha önce de bahsedildiği gibi ANORE F testi ölçek parametrelerinin homojenliği varsayımına dayanmaktadır. Ancak gerçek yaşama dair uygulamalarda bu varsayımın sağlanması oldukça zordur. Dolayısıyla, ANORE F testini kullanmadan önce IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin homojen olup olmadığının incelenmesi gerekir. Bu amaçla aşağıdaki hipotezler kurulur:

$$\begin{aligned}
 H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k \\
 H_1 : \exists \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

(1.9) hipotezinin sınanmasında, Chhikara ve Folks (1989) olabilirlik oran testi ve modifiye edilmiş olabilirlik oran testlerini geliştirmiştir. Bu testler büyük örnek çaplarında iyi sonuç verirken küçük örnek çaplarında güçleri düşüktür. Bu nedenle, Chang vd. (2012), Sadooghi-Alvandi ve Malekzadeh (2013), Liu and He (2013) ve Wong (2016) tarafından küçük örnek çaplarında da etkin sonuçlar veren alternatif yaklaşımlara dayanan testler önerilmiştir.

Bu çalışmada da IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin homojenliğini test etmek için, diğer bir ifadeyle (1.9) hipotezini sınamak için, olabilirlik

tabanlı Wald ve skor test istatistiklerine dayalı yeni testler önerilmiştir. Wald ve skor test istatistikleri, olabilirlik oran test istatistiği gibi, parametrik modellerde hipotez testlerini sınırlan yaygın olarak kullanılır.

Wald ve skor test istatistikleri asimtotik olarak olabilirlik oran test istatistiğine denktir. Bir başka deyişle, örnek çapı sonsuza gittikçe Wald ve skor test istatistiklerinin değeri olabilirlik oran test istatistiğinin değerine hızla yaklaşır. Ancak küçük örnek çaplarında bu test istatistikleri birbirinden farklılık göstermektedir. Wald ve skor test istatistikleri H_0 'ın doğruluğu altında asimtotik ki-kare dağılımına sahiptir. Ancak küçük örnek çaplarında Wald ve skor test istatistiklerinin gerçek dağılımı bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu çalışmada, Wald ve skor istatistiklerinin gücünü küçük örnek çaplarında arttırmak amacıyla, yeni testler önerilmiştir.

İlk olarak, Wald ve skor istatistikleri hesaplamalı yaklaşım testine (Computational Approach Test-CAT) adapte edilmiştir. CAT, test istatistiğinin dağılımı teorik olarak bulunmadığında veya test istatistiğini elde etmenin oldukça karmaşık olduğu durumlarda, istatistiğin dağılımını yapay olarak oluşturup p değerini tahmin eden bir yöntemdir.

İkinci olarak Wald ve skor istatistiklerine Bartlett düzeltmesi uygulanmıştır. Bartlett düzeltmesi, test istatistiklerinin dağılımının ki-kare dağılımına yakınsamasını iyileştirmek amacıyla yapılan bir düzeltmedir.

Üçüncü olarak Wald ve skor istatistiklerinin kesin beklenen değerine ve varyansına dayalı bir standartlaştırma uygulanmıştır. Bu standartlaştırma da test istatistiklerinin dağılımının ki-kare dağılımına yakınsamasını iyileştirmek amacıyla yapılan bir standartlaştırmadır.

Tezin ilerleyen bölümleri aşağıda açıklandığı gibi düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, IG dağılımı ile ilgili, IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin homojenliği ile ilgili, Wald ve skor test istatistikleriyle ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir. Ayrıca CAT, Bartlett düzeltmesi ve standartlaştırmaya ilişkin literatürde var olan önemli çalışmalara da değinilmiştir. Üçüncü bölümde, IG dağılımı ayrıntılı bir biçimde ele alınmış ve IG dağılımı ile normal dağılım arasındaki benzerlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin eşitliği için literatürde var olan test istatistikleri detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Beşinci bölümde, IG dağılımının ML tahmin edicileri ve kısıtlı ML (restricted maximum likelihood–RML) tahmin edicileri elde edilmiş ve IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için testler önerilmiştir. Çalışmanın altıncı bölümünde, literatürde var olan testler ile önerilen

testler I.tip hata ve testin gücü bakımından geniş bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapılarak karşılaştırılmıştır. Yedinci bölümde, gerçek bir veri seti üzerinde, bu çalışmada önerilen ve literatürde yer alan testlerin uygulaması yapılmıştır. Sekizinci ve son bölümde, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde IG dağılımı ile ilgili literatürde yer alan uygulamalı ve teorik çalışmalardan, IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin homojenliği ile ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir. Ayrıca bu çalışmada elde edilen Wald ve skor test istatistikleriyle ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir. Yine bu bölümde CAT yöntemi, Bartlett düzeltmesi ve standartlaştırmaya ilişkin literatürde var olan önemli çalışmalardan da bahsedilmiştir.

IG dağılımı ilk olarak Schrödinger ve Smoluchowski (1915) tarafından pozitif sürüklenmeye sahip Brown hareketinin ilk geçiş zamanının olasılık dağılımı olarak tanıtılmıştır. Daha sonra bu dağılım ile ilgili birçok araştırmacı tarafından teorik çalışma yapılmıştır. Bu araştırmacıların en önemlilerinden bir tanesi Tweedie'dir. Tweedie (1957a, 1957b) öncelikle IG dağılımının farklı formlarda yazılışını göstermiştir. Ayrıca IG dağılımının modu, kümülanları ve sıfır etrafındaki momentleri gibi çeşitli özelliklere değinmiştir. IG dağılımının konum parametresinin ML tahmin edicisinin dağılımı ve ölçek parametresinin tersinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun Laplace dönüşümünü elde etmiştir. İç içe sınıflama için varyans analizine benzer bir yöntem elde etmiştir. Bütün bunlara ek olarak IG dağılımına sahip bir rassal değişkenin tersinin belli özelliklerini incelemiş ve bu değişkenin dağılımını elde etmiştir. Shuster (1968) IG dağılımının dağılım fonksiyonu ile ilgilenmiştir. Standart normal dağılım ile IG dağılımının dağılım fonksiyonu arasında nasıl bir ilişki olduğunu göstermiştir. Konum parametresinin değerinden daha büyük ve konum parametresinin değerinden daha küçük bir sabit değerde dağılım fonksiyonunun değerinin nasıl elde edileceğini kanıtlamıştır. Chhikara ve Folks (1974) ölçek parametresinin bilindiği durum için, konum parametresinin bilindiği durum için ve her ikisinin de bilinmediği durum için IG dağılım fonksiyonunun en küçük varyanslı yansız tahminlerini elde etmiştir. Normal dağılımın ve IG dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonları arasında doğrudan bir ilişki bulmuştur. Bu da IG dağılımının belirgin özelliklerini ve istatistiksel çıkarımdaki uygulamalarını aydınlatmaya yardımcı olmuştur. Folks ve Chhikara (1978) IG dağılımının ve bu dağılıma dayanan istatistiksel yöntemlerin gelişimini incelemiştir. Ayrıca bu dağılıma dayalı hipotez testleri, tahmin, güven aralıkları, regresyon ve varyans analizini de çalışmasında anlatmıştır. Cheng ve Amin (1981) iteratif bir yöntem önererek üç parametrelili IG dağılımının parametrelerini tahmin etmiş ve tahmin edicilerin dağılımsal özelliklerini incelemiştir. Cohen ve Whitten (1985) üç parametrelili IG dağılımının ortalama, varyans ve şekil parametreleri için uyarlanmış moment tahmin edicilerini bulmuştur. Doksum ve Hbyland (1992) Brown hareketi olarak da adlandırılan

Wiener sürecine ve IG dağılımına dayanan hızlandırılmış yaşam testlerini incelemiştir. Sato ve Inoue (1994) IG dağılımının kökeni olan Brown hareketinin ilk geçiş zamanını, IG dağılımının dağılım özelliklerini ve genelleştirilmiş IG dağılımını incelenmiş, bunlara ilişkin uygulama yapmıştır. Jain (1996) IG ve Weibull dağılımlarını kullanarak güvenilirlik fonksiyonu üzerinde erken bozulmaların etkisini araştırmıştır. Mudholkar ve Natarajan (2002) normal dağılım ve IG dağılımı arasındaki benzerlikleri kullanarak IG-simetri (IG-symmetry) kavramını geliştirmiştir. Nadarajah (2009) Bessel fonksiyonları bakımından yeni bir alternatif IG dağılımı tanımlamıştır. Basak ve Balakrishnan (2012) ilerletilmiş tip II sansürleme durumunda üç parametrelili IG dağılımının parametre tahmini için tahmin yöntemleri geliştirmiştir. Punzo (2019) uygun bir mod tabanlı parametrelendirme yaparak yani IG dağılımını yeniden parametrelendirerek bir dağılım önermiştir. Ayrıca sağlık sigortası verileri ve İtalyan hanehalkı geliri ile ilgili iki veri seti üzerinde uygulama yapmıştır.

Literatürde teorik çalışmaların yanı sıra IG dağılımına ilişkin çok sayıda uygulamalı çalışmaya da rastlanmaktadır. Bunların bir kısmı aşağıda verilmiştir.

Whitmore ve Neufeldt (1970) ayakta tedavi gören ve yatılı durumdaki psikiyatri hastalarının yatış süresini modellemek için IG dağılımını kullanmıştır. Lancaster (1972) Birleşik Krallıkta istihdam dairesi tarafından kayıt altına alınan grev sürelerinin modellenmesinde IG dağılımının kullanılmasını önermiştir. Whitmore (1975) belirli tip hastalıklar için hastanede kalma süresinin uzunluğunu modellemede, özellikle de akıl hastanelerinde kalma süresinin modellenmesinde IG dağılımının kullanılmasını önermiştir. Wise (1975) kardiyolojide kandaki partiküllerin devir süresinin dağılımı ve madde partiküllerinin kanda kalış süresinin olasılık dağılımı için IG dağılımını kullanmıştır. Whitmore (1976) IG dağılımının belli başlı istatistiksel özelliklerini incelemiş ve yönetim bilimi ve diğer alanlarda literatürde bulunan uygulamaları ele almıştır. Banerjee ve Bhattacharyya (1976) satın alma sıklığında söz konusu alım zamanlarının tahmin edilmesinde IG dağılımını kullanmıştır. Chhikara ve Folks (1977) endüstriyel bir ürünün kullanım ömrünü modellemek için IG dağılımının kullanımını önermiştir ve bu dağılımın farklı güvenilirlik özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, IG dağılımının log-normal dağılımın kullanımına göre avantajlarını incelemiştir. Whitmore (1979) çalışanların hizmet süresi, çalışanların işe bağlılığı ve işçi devir oranı ile ilgili olguları modellemek için IG dağılımını kullanmıştır. Bardsley (1980) üç parametrelili Weibull dağılımına uyan verilerin modellenmesinde alternatif olarak IG dağılımının kullanılabileceğini göstermiş ve üç parametrelili Weibull ile modellenen gerçek bir rüzgar hızı verisini IG dağılımı ile modellemiştir. Edgeman (1989) kalite kontrol grafikleri üzerine çalışmıştır. Üretim işlemini takiben elde edilen çıktıların IG dağılımına sahip olması durumunda kontrol grafiklerini tanıtmıştır. Edgeman (1990) belli sıcaklıklarda izolasyonlu yeni numunelerin tahmini

ortalama bozulma sürelerini IG dağılımı ile modellemiş ve ortalama bozulma süreleri arasında istatistiksel olarak anlamlı farklılık olup olmadığını ANORE F testi ile sınımıştır. Takagi vd. (1997) IG dağılımı ile log-normal dağılımı karşılaştırmış, mesleki etkilenme (occupational exposure) verisine IG dağılımı uygulamıştır. Durham ve Padgett (1997) bir sistemin arızalanma olasılığını tanımlamak ve birikimli zarara dayanan yeni bir yöntem geliştirmek için IG dağılımını kullanmıştır. Onar and Padgett (2000) birikimli zarara dayanan sistemlerin gücü için birkaç modeli içeren üç parametrelili IG dağılım ailesini incelemiştir. Mudholkar ve Tian (2002) çalışmasında IG dağılımın entropi karakterizasyonunu incelemiş ve bunu uyum iyiliği testi geliştirmek için kullanmıştır. Ayrıca orta büyüklükteki örnek çaplarında entropinin güç fonksiyonunu anlamak için Monte Carlo simülasyon çalışması yapmıştır. Fahidy (2012) iki ayrı kimyasal reaktörde belirli bir zaman diliminden sonra beklenen onarım sürelerinin ve öngörülen bir büyüklükten sonra enerji salınımının olasılığını tahmin etmek için IG dağılımının güvenilirlik fonksiyonlarından yararlanmıştır. Balakrishnan ve Rahul (2014) finansta koşullu süreleri modellemek için IG dağılımını kullanmıştır. Dolayısıyla finansal zaman serilerinde işlem sürelerini analiz etmek için IG dağılımı bir seçenek olmuştur.

Buradan sonraki kısımda IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için son yıllarda geliştirilen testlerden bahsedilmiştir.

Chhikara ve Folks (1989) olabilirlik oran testi ve modifiye edilmiş olabilirlik oran testini geliştirmiştir. Sadooghi-Alvandi and Malekzadeh (2013) standart yöntemleri kullanarak kesin olabilirlik oran testini türetmiştir. Bu yöntem için her ne kadar kesin denilse de yine simülasyona dayalı bir yöntemdir. Liu and He (2013) Weerahandi (1995) tarafından önerilen genelleştirilmiş p değeri yaklaşımını kullanarak yeni bir kesin genelleştirilmiş olabilirlik oran testi geliştirmiştir. Wong (2016), Chang vd. (2012)'nin önerdiği test istatistiğinin kümülan üretken fonksiyonunu elde etmiş ve bu fonksiyona dayanarak test istatistiğinin dağılım fonksiyonunu elde etmek için iki saddlepoint yaklaşımı önermiştir.

Buradan sonraki bölümde CAT, Wald ve skor test istatistikleri, Bartlett düzeltmesi ve bu çalışmada önerilen standartlaştırmaya ilişkin çalışmalara değinilmiştir.

İlk olarak Pal vd. (2007) CAT yöntemini önermiş ve Gamma ve Weibull dağılımları için hipotez testi ve güven aralıklarını incelemiştir. Chang ve Pal (2008), varyansların bilinmediği durumda iki normal dağılımın ortalamalarının eşitliğinin testi için CAT yöntemine dayalı bir test istatistiği önermiştir. Chang vd. (2010), iki ve daha fazla Poison dağılımına sahip grup ortalamalarının eşitliği testi için CAT yöntemine dayalı bir test istatistiği önermiştir. Ayrıca Chang vd. (2011), CAT yöntemini iki ve daha fazla Gamma

dağılımının ortalamalarının testine uygulamıştır. Daha sonra Gökpınar ve Gökpınar (2012), Chang ve Pal'ın (2008) çalışmasını genelleştirerek ikiden fazla normal dağılıma sahip grubun ortalamalarının eşitliği testi için CAT yöntemine dayalı bir test istatistiği oluşturmuştur. Yaptığı bu çalışmada mevcut yöntemlerden oldukça iyi testin gücü ve birinci tip hata değerleri elde etmiştir. Gökpınar vd. (2013) ölçek parametrelerinin heterojenliği altında iki ve daha fazla IG dağılımına sahip grup ortalamalarının eşitliği testi için CAT yöntemine dayalı bir test istatistiği oluşturmuştur. Gökpınar ve Gökpınar (2015) tarafından normal dağılım varsayımı altında iki ve daha fazla grubun değişim katsayısının eşitliği ve varyansların homojenliği testi için uygulanmıştır. Ayrıca Gökpınar ve Gökpınar (2017), iki ve daha fazla log-normal dağılıma sahip grubun ortalamalarının eşitliği için CAT yöntemine dayalı bir test istatistiği önermiştir. Burada ifade edilen tüm çalışmalarda CAT yöntemine dayalı testlerin birinci tip hatalarının nominal değer civarında olduğu gözlemlenmiş ve testlerin gücü ise birçok durumda diğer yöntemlerden oldukça yüksek sonuçlar vermiştir.

CAT yönteminde en önemli noktalardan bir tanesi test istatistiğinin doğru seçimidir. Davison ve Hinkley (1997) olabilirlik tabanlı istatistiklerin CAT yöntemi için en uygun test istatistikleri olduğunu belirtmiştir. Ele alınan problem için olabilirlik oran test istatistiği Chhikara ve Folks (1989) tarafından elde edildiğinden dolayı, bu çalışmada Wald ve skor test istatistiklerine odaklanılmıştır. Bu sebeple aşağıda Wald ve skor test istatistiklerine dair literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

Wald test istatistiği ilk olarak Wald (1943) tarafından, skor test istatistiği ilk olarak Rao (1948) tarafından önerilmiştir. Sutradhar ve Bartlett (1993a) basit ve bileşik hipotezleri test etmek için Wald, skor ve olabilirlik oran testinin performansını kıyaslamıştır. Sutradhar ve Bartlett (1993b) hata terimleri arasında otokorelasyon olan doğrusal regresyon modelini test etmek için Wald, skor ve olabilirlik oran testini kullanmış ve bu testlerin küçük ve büyük örnek çaplarında performansını kıyaslamıştır. Agostinelli ve Markatou (2001) parametrik çıkarım için Wald, skor ve olabilirlik oran testlerinin ağırlıklandırılmış versiyonlarını önermiştir. Li (2001) Wald, skor ve olabilirlik oran testinin ilgilenilmeyen parametreye (nuisance parameters) karşı duyarlılığını (sensitivity) karşılaştırmıştır. Molenberghs ve Verbeke (2007) parametre uzayı kısıtlı olduğunda ve sıfır hipotezi bu kısıtlı parametre uzayında tanımlı olduğunda, hipotezi test etmek için Wald, skor ve olabilirlik oran testini kullanmıştır. Huang ve Tamura (2010) psikiyatrideki klinik deneylerin etkinliğini arttırmak için ardışık paralel tasarım (sequential parallel design) önermiştir. Bu tasarımda hastaları üç deneme grubuna ayırmıştır. Her bir deneme grubunun da iki aşaması vardır. İki aşamada deneme etkisinin farklı olduğu durumda ve deneme etkisinin iki aşamada aynı olduğu özel bir durum için Wald, skor ve olabilirlik oran testini önermiştir. Caroni (2010) sağdan sansürlü veri durumunda Weibull ve üstel dağılımların temel ve genişletilmiş versiyonlarını ayıran parametreye ilişkin sınama yapmak için Wald, skor ve

olabilirlik oran testini önermiştir. Bu testleri simülasyon çalışması ile karşılaştırmıştır. Yi ve Wang (2011) skor testini yanıt uyarlamalı tasarımlara (response adaptive designs) genelleştirmiştir. Ayrıca Wald, skor, genelleştirilmiş skor ve olabilirlik oran testlerinin güçlerini karşılaştırmıştır. Küçük ve orta büyüklükteki örnek çaplarında Wald testinin diğerlerinden daha güçlü olduğu, örnek çapları büyükken bütün testlerin hemen hemen benzer güçlere sahip olduğu sonucuna varmıştır. Dobek vd. (2015) iki yönlü olumsuzluk tablolarında dağılımların bağımsızlığı ile ilgili hipotezi test etmek için Wald, skor ve olabilirlik oran testini geliştirmiştir. Bu testleri I. tip hata ve güç bakımından karşılaştırmıştır. Krit vd. (2016) farklı tahmin yöntemleri ile üç parametrelili Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmiştir. Daha sonra Weibull dağılımı için Wald, skor ve olabilirlik oran testine dayalı uyum iyiliği testleri geliştirmiştir.

Olabilirlik tabanlı test istatistiklerinin dağılımları asimtotik olarak $k - 1$ serbestlik dereceli ki kare dağılımına yakınsamaktadır. Ancak bu yakınsamanın küçük örnek çaplarında yeterli düzeyde olmadığı bilindiği için Bartlett düzeltmesi ve standartlaştırma gibi çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir. Aşağıda Bartlett düzeltmesi ve standartlaştırmaya ilişkin literatürde yer alan çalışmalara yer verilmiştir.

Bartlett düzeltmesi ilk olarak Bartlett (1937) tarafından önerilmiştir. Wang (1994) k tane normal dağılıma sahip grubun varyanslarının eşitliğinin testi için önerilen olabilirlik oran test istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulamıştır. Cribari-Neto ve Ferrari (1995) regresyonda hata terimlerinin varyanslarının homojenliğini test etmek amacıyla skor istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulayarak Bartlett düzeltilmiş skor testini önermiştir. Simülasyon çalışması ile Bartlett düzeltilmiş olan testle düzeltme yapmadan önceki testi kıyaslamış ve Bartlett düzeltmesi yapılmış testin I. tip hatasının nominal seviyeye daha yakın olduğu sonucuna varmıştır. Barroso vd. (1998) von Mises regresyon modellerinde olabilirlik oran testlerini iyileştirmek için Bartlett düzeltmesi uygulamıştır. Jacobson ve Larsson (1999) iki koentegrasyon (cointegration) test istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulayarak yeni testler önermiştir. Önerilen testlerin etkinliklerini Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırmıştır. Cordeiro ve Montenegro (2001) doğrusal olmayan regresyon modellerinde parametre vektörüne ilişkin hipotezi sınamak için önerilen olabilirlik oran test istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulayarak daha etkin bir test önermiştir. Omtzigt ve Fachin (2006) koentegrasyon vektörlerine ilişkin hipotezlerin sınanmasında Bartlett düzeltilmiş testler önermiştir. Li vd. (2008) Cox regresyon modelinde regresyon katsayıları vektörünün anlamlılık testi için Bartlett düzeltilmiş Wald testini önermiştir. Lösemi üzerine yapılan klinik deneyden alınan veriye bu testi uygulamıştır. Ayrıca Bartlett düzeltilmiş Wald testinin I. tip hatası ve gücünü değerlendirmek amacıyla Monte Carlo simülasyon çalışması yapmıştır. Lemonte ve Ferrari (2010) Birnbaum-Saunders regresyon modelinde parametre vektörüne ilişkin hipotezleri sınamak

için skor istatistiği önermiş ve bu istatistiğe Bartlett düzeltmesi uygulamıştır. Ayrıca Monte Carlo simülasyon çalışması ile skor testi, Bartlett düzeltilmiş skor testi, olabilirlik oran testi ve Bartlett düzeltilmiş olabilirlik oran testini karşılaştırmıştır. Cordeiro ve Lins (2010) von Mises dağılımında konum ve yoğunlaşma (concentration) parametresinin testi için olabilirlik oran istatistiği ve skor istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulamıştır. Bayer ve Cribari-Neto (2013) beta regresyon modellerinde olabilirlik oran testine Bartlett düzeltmesi uygulamıştır.

Gökpınar (2017) normal dağılıma sahip k tane grubun varyanslarının eşitliğini test etmek için standartlaştırılmış olabilirlik oran testini önermiştir. Önerdiği testi Bartlett (1937) testi, Bhandary ve Dai (2008) testi, Liu ve Xu (2010) tarafından önerilen geliştirilmiş p değeri yaklaşımı ve Gökpınar ve Gökpınar (2017) tarafından önerilen CAT yöntemi ile kıyaslamıştır. Krishnamoorthy ve Oral (2017) log-normal dağılıma sahip k tane grubun ortalamasının eşitliğini test etmek için standartlaştırılmış olabilirlik oran testini önermiştir. Gökpınar (2019) IG dağılımına sahip k tane grubun ölçek parametrelerinin eşitliğini test etmek için standartlaştırılmış olabilirlik oran testini geliştirmiş ve Chang vd. (2012) tarafından önerilen geliştirilmiş p değeri yaklaşımı, Liu ve He (2013) tarafından önerilen kesin geliştirilmiş olabilirlik oran testi, Sadooghi-Alvandi and Malekzadeh (2013) tarafından geliştirilen kesin olabilirlik oran testi ve Wong (2016) tarafından önerilen saddlepoint yaklaşımlarıyla karşılaştırmıştır.

3. IG DAĞILIMI

IG dağılımı ilk olarak Schrödinger ve Smoluchowski (1915) tarafından pozitif sürüklenmeye sahip Brown hareketinin ilk geçiş zamanının olasılık dağılımı olarak tanıtılmıştır. Brown hareketi İskoç botanikçi Robert Brown'ın (1773-1858) çalışmalarından öğrenilmiş bir olgudur. 1827 yılında Robert Brown mikroskop altında sulu bir ortam içindeki polenleri incelerken, polenlerden ayrılan bir takım küçük parçacıkların sürekli bir şekilde hareket ettiğini fark etmiştir. İlk zamanlarda bu hareketin yaşamsal bir kaynağı olduğundan kuşkulunmuş ancak organik olmayan malzemelerden elde edilen parçacıkların da aynı hareketi yaptığını görünce olayın biyolojik olmadığını anlamıştır. Bachelier (1900) doktora tezinde serbest sürüklenmeye sahip Brown hareketinden bahsetmiştir. 1905 yılında Einstein, Brown hareketini normal dağılım ile modellemiştir ve Brown hareketinin teorisini ortaya koymuştur. Daha sonraki yıllarda Brown hareketi ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır ve yukarıda da belirtildiği gibi 1915 yılında Schrödinger ve Smoluchowski Brown hareketinin ilk geçiş zamanının olasılık dağılımını IG olarak tanıtmıştır (Seshadri, 2012; Chhikara ve Folks, 1989).

IG dağılımı ile ilgili son yıllarda yapılan çalışmalarda “Brown hareketi” yerine “Wiener süreci” de kullanılmıştır. Ayrıca stokastik süreçler ve olasılık üzerine yazılan birçok kitapta da bu dağılıma yer verilmiştir (Folks ve Chhikara, 1978). Stokastik süreç ν pozitif sürekleme değerine ve σ^2 varyansa sahip bir boyutlu Wiener süreci olarak varsayıldığında, Brown hareketinin ilk geçiş zamanının dağılımı yani IG dağılımı elde edilebilmektedir. Böylelikle Brown hareketi bir Wiener süreci olarak modellenir.

Sonlu boyutlu dağılımları normal olan bir Markov sürecine Wiener süreci denir. Diğer bir ifadeyle, Wiener süreci ortalaması sıfır ve varyansı bir olan Markov stokastik sürecinin özel bir durumudur ve fizikte çok sayıda moleküler şoklara maruz kalan parçacıkların hareketlerini açıklamada kullanılır. Dolayısıyla Wiener süreci Robert Brown'un yaptığı fizik deneylerinden kaynaklı olarak Brown hareketi olarak da anılır (Önalın, 2007).

IG dağılımı ile ilgili çalışmalar Tweedie (1941) ve Wald (1944) tarafından da sürdürülmüştür. Tweedie (1945), Schrödinger ve Smoluchowski'nin (1915) sonuçlarını geliştirerek birim uzaklığı kapsayan zamanın kümülan üretken fonksiyonu ile birim zamanda kapsanan uzaklığın kümülan üretken fonksiyonu arasında ters ilişki olduğunu fark etmiştir. Tweedie (1945) böyle bir ilişkinin binom ile negatif binom arasında ve Poisson ile

üstel dağılım arasında da olduğunu belirtmiştir. Bu sebepten dolayı bu değişkenlerin ters istatistiksel değişkenler olarak adlandırılmasını önermiştir. Daha sonra, Brown hareketinin ilk geçiş zamanının kümülan üreten fonksiyonu ile normal dağılımın kümülan üreten fonksiyonu arasında ters ilişki olduğundan dolayı Tweedie (1957) Brown hareketinin ilk geçiş zamanının dağılımı için IG adını kullanmış ve bu dağılımın önemli istatistiksel özelliklerinin çoğunu incelediği detaylı bir çalışma yapmıştır. Folks ve Chhikara (1978), Tweedie'nin (1957) çalışmasının öneminden dolayı bu dağılıma Tweedie dağılımı denilmesinin daha uygun olacağını belirtmiştir.

IG dağılımının özel bir hali de Wald (1947) tarafından verilmiş ve ardışık olasılık oran testinde örnek çapının dağılımı için bir limit formu olarak türetilmiştir. Bundan dolayı özellikle Rus literatüründe IG dağılımı Wald dağılımı olarak da bilinmektedir. Ardışık olasılık oran testi Wald (1947) tarafından geliştirilen oldukça yüksek etkinliğe sahip istatistiksel bir testtir. Bu testte örnek çapı daha önceden belirlenmemiş olup rassal bir değişkendir (Folks ve Chhikara 1978; Chhikara ve Folks, 1989).

IG dağılımı için kullanılan diğer adlar; Gauss ilk geçiş zamanı dağılımı (Moran, 1968) ve pozitif sürüklenmeye sahip ilk geçiş zamanının dağılımı şeklindedir (Wasan ve Roy, 1969).

IG dağılımı sağa çarpık veri setlerini modellemede popüler bir dağılımdır. Özellikle, aktüerya bilimi, demografi, histomorfometri, kardiyoloji, dil bilimi, elektrik ağları, yönetim bilimi ve yaşam süresi testleri gibi uygulamalı alanlarda çok sık kullanılmaktadır. IG dağılımının son yıllarda dikkat çekmesinin sebeplerinden birisi, bu dağılımın oldukça çarpık bir dağılımdan normal dağılıma kadar birçok şekli almasıdır. Diğer sebebi ise diğer sağa çarpık dağılımlara (Weibull, Gamma, Log-normal vb.) göre birçok özellik bakımından normal dağılıma benzemesidir.

IG dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f(x, \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2x^3\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2x}\right) \quad x > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0 \quad (3.1)$$

ve

$$F(x, \mu, \lambda) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + e^{2\lambda/\mu}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right) \quad (3.2)$$

Burada μ ortalama, λ ölçek parametresi, $\Phi(\cdot)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonudur.

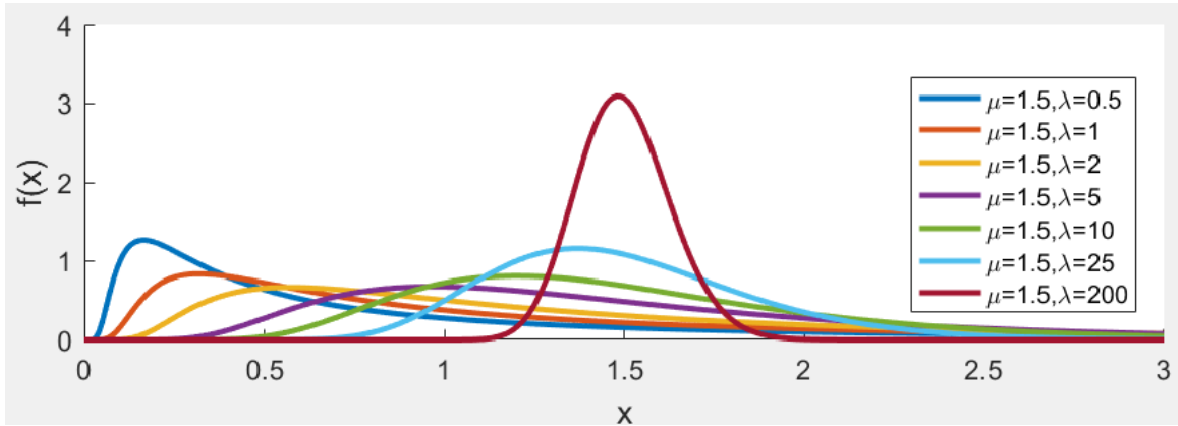
Eşitlik (3.1)'deki IG dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $\phi = \lambda/\mu$ olarak tanımlandığında aşağıdaki biçimlerde de yazılabilir:

$$f(x, \mu, \phi) = \sqrt{\frac{\mu\phi}{2x^3\pi}} \exp\left(-\frac{\phi x}{2\mu} + \phi - \frac{\mu\phi}{2x}\right) \quad (3.3)$$

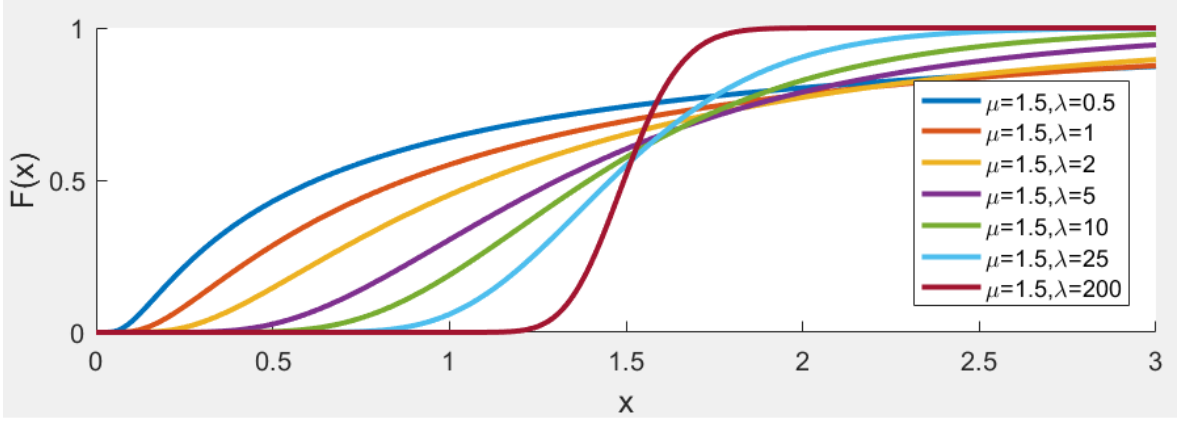
$$f(x, \phi, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2x^3\pi}} \exp\left(-\frac{\phi^2 x}{2\lambda} + \phi - \frac{\lambda}{2x}\right) \quad (3.4)$$

IG dağılımı tek modlu ve sağa çarpıktır. Dağılım fonksiyonundan görülmektedir ki μ ve λ bilindiğinde, IG dağılımının dağılım fonksiyonunun değeri normal dağılım tablosu kullanılarak hesaplanabilir.

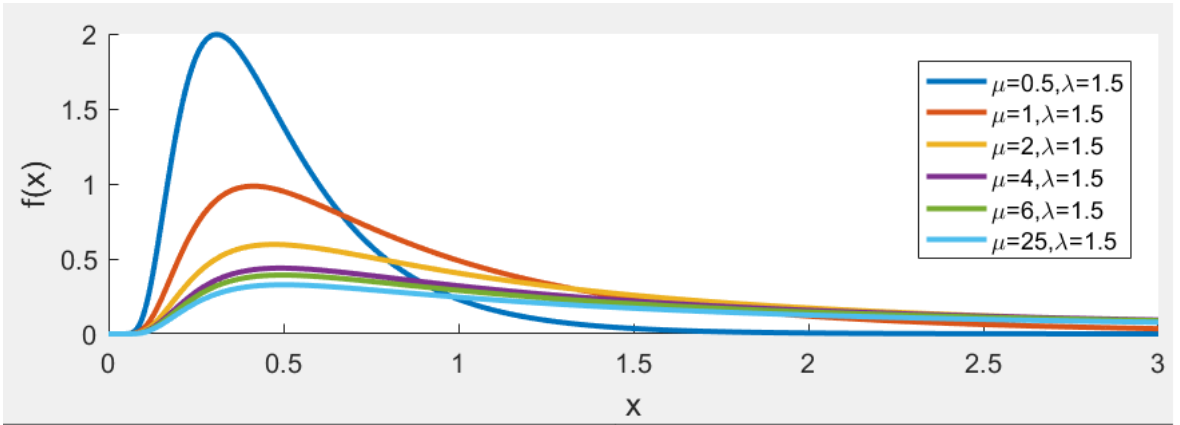
IG dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun ve dağılım fonksiyonunun şeklini daha iyi anlamak için Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de μ değeri sabit tutulup farklı λ değerleri için ve Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de λ değeri sabit tutulup farklı μ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu grafikleri verilmiştir.



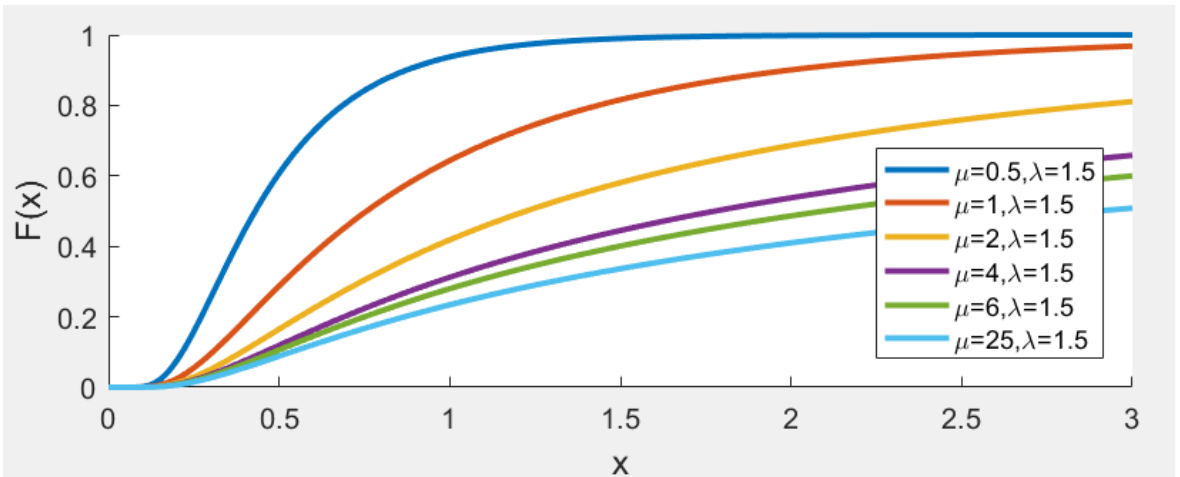
Şekil 3.1: IG dağılımının farklı λ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.2: IG dağılımının farklı λ değerleri için dağılım fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.3: IG dağılımının farklı μ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.4: IG dağılımının farklı μ değerleri için dağılım fonksiyonunun grafiği

Bu bölümün geri kalan kısmında IG dağılımının özellikleri ve bu dağılımın özelliklerinin normal dağılımın özellikleri ile olan benzerliği ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

3.1 IG Dağılımının Özellikleri

IG dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(x) = \mu \quad \text{ve} \quad V(x) = \frac{\mu^3}{\lambda} \quad (3.5)$$

şeklindedir. IG dağılımının çarpıklık ve basıklık değerleri sırasıyla

$$\gamma_1 = 3\sqrt{\mu/\lambda} \quad \text{ve} \quad \gamma_2 = 3 + \frac{15\mu}{\lambda} \quad (3.6)$$

şeklindedir (Chhikara ve Folks, 1977; Chhikara ve Folks, 1974; Sato ve Inoue, 1994).

Aşağıdaki Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2’de μ değeri sabit tutulup farklı λ değerleri için ve λ değeri sabit tutulup farklı μ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.1: IG dağılımının farklı λ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri.

$\mu = 1, 5$							
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 25$	$\lambda = 200$
Çarpıklık (γ_1)	5,197	3,674	2,598	1,643	1,162	0,735	0,26
Basıklık (γ_2)	48	25,5	14,25	7,5	5,25	3,9	3,113

Çizelge 3.2: IG dağılımının farklı μ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri.

$\lambda = 1, 5$							
	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,5$	$\mu = 2$	$\mu = 4$	$\mu = 10$	$\mu = 6$	$\mu = 25$
Çarpıklık (γ_1)	0,077	1,732	2,445	3,464	4,899	6	10
Basıklık (γ_2)	3,010	8	13	23	43	63	253

Yukarıda Şekil 3.1 ve Çizelge 3.1’den görüldüğü üzere μ değeri sabit tutulduğunda farklı λ değerlerinde IG dağılımı oldukça sağa çarpık dağılımdan normal dağılıma kadar bir çok şekli almaktadır. μ değeri sabitken λ değeri büyümeye başladığında IG dağılımı normal dağılıma benzemeye başlar. Çünkü IG dağılımı için λ/μ oranı sonsuza gittikçe IG dağılımı

da normal dağılıma yakınsar. Diğer bir ifadeyle,

$$X \sim IG(\mu, \lambda) \quad \text{ve} \quad \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \infty \Rightarrow X \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\mu^3}{\lambda}\right)$$

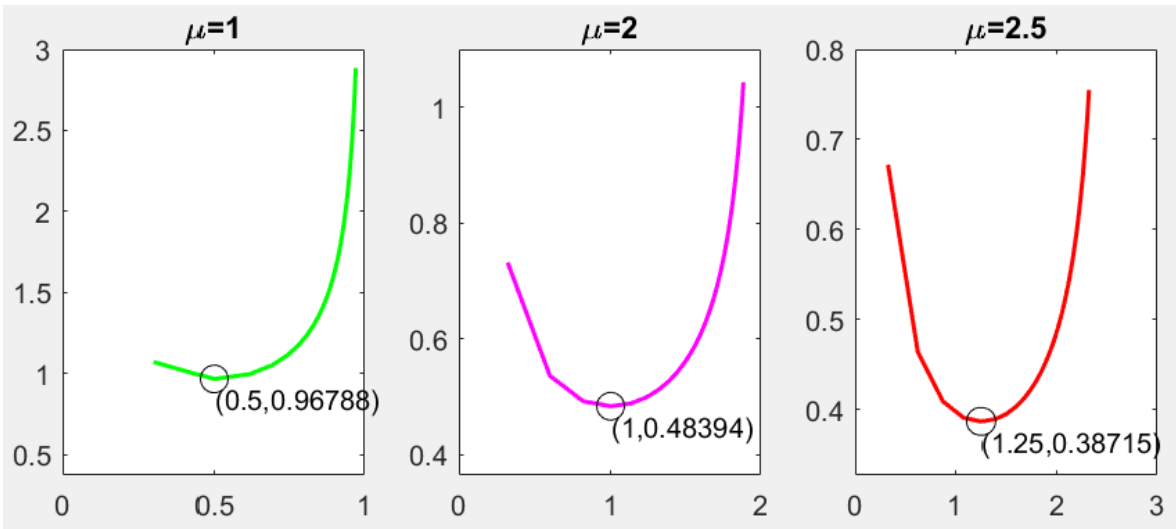
Diğer taraftan, λ değeri sabit tutulup μ değeri arttıkça, Şekil 3.3 ve Çizelge 3.2'den görüldüğü üzere basıklık ve çarpıklığın da arttığı görülmektedir. λ değeri sabit tutulup μ değerinin oldukça düşük olduğu durumda ise IG dağılımı normal dağılıma yakınsar.

IG dağılımının modu;

$$X_{mod} = \mu \left(\sqrt{1 + \frac{9}{4\phi^2}} - \frac{3}{2\phi} \right) \quad (3.7)$$

dir. Burada $\phi = \lambda/\mu$ dir.

Eşitlik (3.7)'den görüldüğü üzere ϕ sonsuza gittikçe X_{mod}/μ oranı 1'e yaklaşır. ϕ sifıra gittikçe X_{mod}/λ oranı $1/3$ 'e yaklaşır. μ sabit ve $\phi = 2$ iken mod noktasında olasılık yoğunluk fonksiyonunun aldığı değer, diğer mod noktalarında olasılık yoğunluk fonksiyonunun alabileceği değerler arasında en düşüğüne ulaşır. Yani μ sabit ve $\phi = 2$ ise mod $\mu/2$; fonksiyonun bu noktadaki değeri $(8/\pi\mu^2e)^{1/2} = 0.96788\mu^{-1}$ dir. Örneğin $\mu = 1$ iken modun değeri 0.5, fonksiyonun alacağı değer 0.96788 dir. $\mu = 2$ iken modun değeri 1, fonksiyonun alacağı değer 0.48394 tür. Şekil 3.5'de $\phi = 2$ ve sabit μ değerleri için modun aldığı değerler ve mod noktasında fonksiyonun aldığı değerler gösterilmiştir.



Şekil 3.5: $\phi = 2$ ve $\mu = 1$, $\mu = 2$ ve $\mu = 2,5$ değerleri için mod değerine karşılık gelen IG dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerlerini gösteren grafik

Şekil 3.5'den görüldüğü gibi $\phi = 2$ ve μ 'lerin sabit olduğu mod noktasında fonksiyonun aldığı değerler, fonksiyonun diğer mod noktalarında aldığı değerlerin en düşüğüne ulaşmıştır.

IG dağılımının diğer bir özelliği de aşağıdaki formda yazılmasından dolayı üstel aileye ait olmasıdır:

$$\begin{aligned}
f(x, \mu, \lambda) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{\lambda}{2\mu^2 x} (x - \mu)^2 \right) \\
&= \exp \left(\frac{-\lambda (x^2 - 2\mu x + \mu^2)}{2\mu^2 x} + \frac{1}{2} \ln(\lambda) - \frac{1}{2} \ln(2\pi x^3) \right) \\
&= \exp \left(\frac{-\lambda x}{2\mu^2} - \frac{\lambda}{2x} + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \ln(\lambda) - \frac{1}{2} \ln(2\pi x^3) \right) \\
&= \exp(T(x)P(\mu, \lambda) + W(\mu, \lambda) + R(x)).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Burada,

$$T(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1/x \end{bmatrix}, \quad P(\mu, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda}{2\mu^2} & -\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}$$

$$W(\mu, \lambda) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \ln(\lambda), \quad R(x) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi x^3)$$

dir.

IG dağılımının moment üreten fonksiyonu ve karakteristik fonksiyonu sırasıyla

$$M_X(t) = \exp \left(\frac{\lambda}{\mu} \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)} \right\} \right) \quad t < \frac{\lambda}{2} \tag{3.9}$$

ve

$$\varphi_X(t) = \exp \left(\frac{\lambda}{\mu} \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{2i\mu^2 t}{\lambda} \right)} \right\} \right) \quad t < \frac{\lambda}{2} \tag{3.10}$$

şeklindedir.

Karakteristik fonksiyonu sayesinde de tüm pozitif ve negatif momentlerinin var olduğu gösterilebilir. Pozitif momentler Eşitlik (3.10)'daki karakteristik fonksiyonun türevini alarak, negatif momentler ise integralini alarak elde edilebilir (Cressie vd., 1981).

Karakteristik fonksiyon ile momentler arasında $E(X^r) = i^r \varphi_X^r(0)$ şeklinde bir ilişki olduğundan $\varphi_X(t)$ 'nin r -inci türevi alınıp t yerine 0 konulursa

$$E(X^r) = \mu^r \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r-1+s)!}{s!(r-1-s)!} \left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)^{-s} \quad (3.11)$$

elde edilir. Dolayısıyla, IG dağılımının sıfır etrafındaki ilk dört momenti

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ E(X^2) &= \mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda} \\ E(X^3) &= \mu^3 + 3\frac{\mu^4}{\lambda} + 3\frac{\mu^5}{\lambda^2} \\ E(X^4) &= \mu^4 + 6\frac{\mu^5}{\lambda} + 15\frac{\mu^6}{\lambda^2} + 15\frac{\mu^7}{\lambda^3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

IG dağılımının merkezi momentleri de Eşitlik (3.11) ve (3.12) yardımıyla ya da kümülan üretken fonksiyonun güç serisi açılımından yararlanılarak elde edilir.

IG dağılımının kümülan üretken fonksiyonu

$$K_X(t) = \ln E(e^{tx}) = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)} \right), \quad t < \frac{\lambda}{2\mu^2} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

Merkezi momentler için kümülan üretken fonksiyonun açılımında r -inci kümülanı elde etmek gerekir. r -inci kümülan, kümülan üretken fonksiyonun açılımında $(t^r/r!)$ 'in katsayısıdır. Diğer bir ifadeyle

$$K_X(t) = \sum \kappa_r \frac{t^r}{r!}$$

eşitliğindeki $\kappa_r = K_X^{(r)}(0)$ merkezi momentleri göstermektedir. Dolayısıyla Eşitlik (3.13)'deki kümülan üretken fonksiyonun t ye göre türevi alınıp $t = 0$ alınırsa $(t^r/r!)$ 'in katsayısı olan κ_r kümülanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mu, \\ \kappa_r &= (1)(3)(5) \dots (2r-3) \mu^{(2r-1)} \lambda^{(1-r)} \quad r \geq 2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Eşitlik (3.14) sayesinde ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= V(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}, \\ \kappa_3 &= E((X - \mu)^3) = 3\frac{\mu^5}{\lambda^2}, \\ \kappa_4 &= E((X - \mu)^4) = 15\frac{\mu^7}{\lambda^3} + 3\frac{\mu^6}{\lambda^2}\end{aligned}\quad (3.15)$$

olarak elde edilir.

IG dağılımının sıfır etrafındaki pozitif ve negatif momentleri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$E(X^{-r}) = \frac{E(X^{r+1})}{\mu^{2r+1}} \quad (3.16)$$

Eşitlik (3.12) ve (3.16) kullanılarak $E\left(\frac{1}{X}\right)$ ve $V\left(\frac{1}{X}\right)$ kolaylıkla aşağıdaki gibi elde edilir:

$r = 1$ iken $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{E(X^2)}{\mu^3}$ dir. $E(X^2) = \frac{\mu^3}{\lambda} + \mu^2$ olduğundan $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\frac{\mu^3}{\lambda} + \mu^2}{\mu^3} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$ olarak elde edilir.

$r = 2$ iken $E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \frac{E(X^3)}{\mu^5}$ dir. $E(X^3) = \mu^3 + 3\frac{\mu^4}{\lambda} + 3\frac{\mu^5}{\lambda^2}$ olduğundan $E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \frac{1}{\mu^2} + \frac{3}{\lambda\mu} + \frac{3}{\lambda^2}$ olarak elde edilir.

Dolayısıyla, $V\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{1}{X^2}\right) - \left(E\left(\frac{1}{X}\right)\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu\lambda}$ olarak bulunur.

3.2 IG ve Normal Dağılımın Özellikleri Arasındaki Benzerlikler

Bu bölümde IG ve normal dağılımın özellikleri arasındaki benzerlikler ve istatistiksel çıkarım açısından benzerlikler verilmiştir.

$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \stackrel{i.i.d}{\sim} IG(\mu, \lambda)$ olmak üzere

$$(i) \sum X_i \sim N(\sum \mu, \sum \sigma^2),$$

$$\sum Y_i \sim IG(\sum \mu, \xi(\sum \mu)^2), \xi = \frac{\lambda}{\mu^2} \text{ dir.}$$

(ii) Normal dağılım için $E(X) = \mu$; μ 'nün ML tahmin edicisi $\hat{\mu} = \bar{X}$

IG dağılımı için $E(Y) = \mu$; μ 'nün ML tahmin edicisi $\hat{\mu} = \bar{Y}$ dir.

(iii) Normal dağılım için varyans σ^2 ; σ^2 'nin ML tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2 = s^2 = n^{-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$,

IG dağılımı için ölçek parametresi λ ; λ 'nın ML tahmin edicisi $\hat{\lambda}^{-1} = V = n^{-1} \sum_i (Y_i^{-1} - \bar{Y}^{-1})$ dir.

(iv) Normal dağılımda $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ve $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

IG dağılımında $\bar{Y} \sim IG(\mu, n\lambda)$ ve $n\lambda V \sim \chi_{n-1}^2$ dir.

(v) Normal dağılımda \bar{X} ve s^2 bağımsız,

IG dağılımında \bar{Y} ve V bağımsızdır.

(vi) Normal dağılımda (\bar{X}, s^2) , (μ, σ^2) için tam yeterli istatistik,

IG dağılımında (\bar{Y}, V) , (μ, λ) için tam yeterli istatistiktir.

(vii) Normal dağılımda $\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$,

IG dağılımında $\frac{\lambda(Y-\mu)^2}{\mu^2 Y} \sim \chi_1^2$ dir.

(viii) Normal dağılımda $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezini test etmek için düzgün en güçlü test t testi,

IG dağılımında $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezini test etmek için düzgün en güçlü test t testidir.

(ix) k tane normal dağılıma sahip grubun ortalamasının eşitliğini sınamak için (varyansların homojenliği varsayımı altında) ANOVA F testi kullanılırken k tane IG dağılımına sahip grubun ortalamasının eşitliğini sınamak için (ölçek parametrelerinin homojenliği varsayımı altında) ANORE F testi kullanılır (Mudholkar ve Natarajan, 2002).

4. YÖNTEM

Bu çalışmada, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliği problemi ele alınmıştır. Diğer bir ifadeyle birinci bölümde (1.9) eşitliği ile belirtilen aşağıdaki hipotez ile ilgilenilmiştir:

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$$

$$H_1 : \exists \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j.$$

Bu hipotezin sınanması için literatürde çeşitli testler önerilmiştir. Bahsedilen bu testlerin teorik ayrıntıları, bu bölümde ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Ancak öncelikle test istatistikleri için gerekli olan bazı temel notasyonlar verilmiştir.

4.1 Temel Notasyonlar

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ ortalaması μ_i , ölçek parametresi λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) olan IG dağılımından rassal bir örneklem olsun. Temel notasyonlar aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} / n_i$$

$$V_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^{-1} - \bar{X}_i^{-1}) \quad V = \sum_{i=1}^k V_i$$

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad N = n - k.$$

Bu bölümün geri kalanında Eşitlik (1.9) da verilen hipotezi test etmek için literatürde var olan ve bu tez çalışmasında da karşılaştırma yapmak için kullanılan test istatistikleri hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir.

4.2 Olabilirlik Oran Testi

Chhikara ve Folks (1989) k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliği için aşağıda verilen olabilirlik oran testini (Likelihood Ratio Test – LRT) önermiştir:

$$LRT = \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i n}{V n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}}. \quad (4.1)$$

LRT 'nin logaritmik formu T aşağıdaki gibidir:

$$T = -2\log(LRT) = n\log(V/n) - \sum_{i=1}^k n_i \log(V_i/n_i). \quad (4.2)$$

Büyük örnek çaplarında T istatistiği yaklaşık $(k - 1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

4.3 Uyarlanmış Olabilirlik Oran Testi

Olabilirlik oran testi büyük örnek çaplarında iyi sonuç verdiği için Chhikara ve Folks (1989), Bartlett ve Kendall (1946) tarafından normal teori için önerilen teste benzer olarak elde ettiği uyarlanmış olabilirlik oran testini (Modified Likelihood Ratio Test – $MLRT$) geliştirmiştir.

$$MLRT = M/C$$

şeklinde tanımlanmıştır:

Burada,

$$M = N\log\left(\frac{V}{N}\right) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1)\log\left(\frac{V_i}{(n_i - 1)}\right) \quad (4.3)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - k} \right]$$

dir.

H_0 'ın doğruluğu altında M/C asimtotik olarak $(k - 1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Eğer $M/C > \chi_{k-1;1-\alpha}^2$ ise H_0 hipotezi reddedilir.

4.4 Kesin Olabilirlik Oran Testi

Sadooghi-Alvandi ve Malekzadeh (2013), k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için kesin olabilirlik oran testini (Exact Likelihood Ratio Test – *ELRT*) önermiştir. Bu test istatistiğini T_1 olarak adlandırmıştır. T_1 aşağıda gösterildiği gibidir:

$$T_1 = N \log (W/n) - \sum_{i=1}^k n_i \log (W_i/n_i) \quad (4.4)$$

Burada, $W_i = \lambda_i V_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) ve $W = \sum_{i=1}^k W_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) dir. Ayrıca $W_i, (n_i - 1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

Eğer $T_1 > t_\alpha$ ise H_0 hipotezi reddedilir. Burada t_α, T_1 istatistiğinin H_0 'ın doğruluğu altındaki dağılımının $(1 - \alpha)$ 'nci kantilidir.

Eşitlik (4.4)'ü kullanarak, t_α değeri Monte Carlo yöntemi aracılığıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

Adım 1 W_i değerini $\chi_{n_i-1}^2$ dağılımından üreterek ($i = 1, 2, \dots, k$) Eşitlik (4.4)'ten T_1 istatistiğinin değeri hesaplanır.

Adım 2 Birinci adım çok sayıda yani m kez tekrarlanıp T_1 istatistiğinin değeri elde edilir. Bu m tane elde edilen T_1 'den yararlanılarak T_1 istatistiğinin deneysel dağılımı ve t_α nın tahmini olarak $(1 - \alpha)$ 'nci deneysel kantil değeri hesaplanır.

4.5 Genelleştirilmiş Olabilirlik Oran Testi

Liu and He (2013), Weerahandi'nin 1995 yılında yaptığı genelleştirilmiş çıkarıma dayanarak genelleştirilmiş olabilirlik oran testini (Generalized Likelihood Ratio Test – *GLRT*) geliştirmiştir.

$$\eta = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{ ve } \rho = \lambda_i / \eta \text{ olarak tanımlansın.}$$

(1.9) hipotezi aşağıda Eşitlik (4.5) de gösterildiği gibi yeniden yazılsın

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = \frac{1}{k}. \quad (4.5)$$

Burada,

ρ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ilgilenilen parametre, μ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ve η ilgilenilmeyen parametrelerdir.

Bu durumda *GLRT*

$$\begin{aligned} GLRT(X; \rho) &= \frac{\prod_{i=1}^k \left(\frac{\rho_i \sum_{j=1}^k n_j}{\sum_{j=1}^k \rho_j V_j} \right)^{\frac{n_i}{2}}}{\prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{V_i} \right)^{\frac{n_i}{2}}} \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\frac{\rho_i V_i \sum_{j=1}^k n_j}{n_i \sum_{j=1}^k \rho_j V_j} \right)^{\frac{n_i}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

GLRT'nin p değeri (4.5) hipotezinin doğruluğu altında aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \rho(V_i, v_i) &= P(G(X; \rho) < G(X; \rho) | H_0) \\ &= P \left(\prod_{i=1}^k \left(\lambda_i V_i / \sum_{j=1}^k \lambda_j V_j \right)^{\frac{n_i}{2}} < \prod_{i=1}^k \left(v_i / \sum_{j=1}^k v_j \right)^{\frac{n_i}{2}} \right) \\ &= P \left(\prod_{i=1}^k (Y_i)^{n_i} < \prod_{i=1}^k \left(v_i / \sum_{j=1}^k v_j \right)^{n_i} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \lambda_i V_i &\sim \chi_{(n_i-1)}^2 & \sum_{j=1}^k \lambda_j V_j &\sim \chi_{\left(\sum_{i=1}^k n_i - k\right)}^2 \\ Y_i &= (1 - B_{i-1}) B_i \dots B_{k-1} \quad i = 2, 3, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$Y_1 = B_1 B_2 \dots B_{k-1} \quad Y_k = 1 - B_{k-1}$$

dir.

B_i , ($i = 1, 2, \dots, k-1$) bağımsız beta rassal değişkenleri olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_i = \frac{\sum_{k=1}^i \lambda_k V_k}{\sum_{k=1}^{i+1} \lambda_k V_k} \sim \text{Beta} \left(\sum_{k=1}^i \frac{n_k - 1}{2}, \frac{n_{i+1} - 1}{2} \right) \quad i = 1, 2, \dots, k - 1 \quad (4.8)$$

p değeri oluşturulurken, genelleştirilmiş p değerinin H_0 hipotezinin doğruluğu altında standart düzgün dağılıma sahip olduğu görülür.

Liu and He (2013) Monte Carlo simülasyonu aracılığıyla genelleştirilmiş p değerini aşağıdaki algoritmayı kullanarak hesaplamıştır:

Adım 1 Verilen veri için x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i$), v_i ve t değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_i} ((1/x_{ij}) - (1/\bar{x}_i)), \quad (i = 1, 2, \dots, k) \text{ ve } t = \prod_{i=1}^k \left(v_i / \sum_{j=1}^k v_j \right)^{n_i}.$$

Adım 2 $l = 1$ den m ye kadar Eşitlik (4.7) ve (4.8) kullanılarak Y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sayıları üretilir ve $T_l = \prod_{i=1}^k Y_i^{n_i}$ hesaplanır.

Adım 3 Eğer $T_l < t$ ise $M_l = 1$, değilse $M_l = 0$ alınır.

Adım 4 Genelleştirilmiş p değeri $\hat{p} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m M_l$ şeklinde hesaplanır.

4.6 Saddlepoint Yaklaşımı

Wong (2016), Eşitlik (4.3) de verilen M istatistiğinin moment üreten ve kümülant üreten fonksiyonunundan yararlanarak bu istatistiğin asimtotik dağılım fonksiyonunu iki farklı saddlepoint (SP) yaklaşımıyla elde etmiştir.

Eşitlik (4.3) den görüldüğü üzere

$$\begin{aligned} M &= N \log \left(\frac{V}{N} \right) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log \left(\frac{V_i}{(n_i - 1)} \right) \\ &= M_1 - M_2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada,

$$M_1 = - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log \left(\frac{V_i}{(n_i - 1)} \right)$$

$$M_2 = -N \log \left(\frac{V}{N} \right)$$

dir.

$\lambda_i V_i \sim \chi_{(n_i-1)}^2$ olduğundan, M_1 ve M_2 nin moment üreten fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$m_{M_1}(t) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{2}{(n_i - 1) \lambda} \right)^{-(n_i-1)t} \Gamma \left(\frac{(n_i - 1)}{2} - (n_i - 1)t \right) \left(\Gamma \left(\frac{(n_i - 1)}{2} \right) \right)^{-1},$$

$$m_{M_2}(t) = \left(\frac{2}{N\lambda} \right)^{-Nt} \Gamma \left(\frac{N}{2} - Nt \right) \left(\Gamma \left(\frac{N}{2} \right) \right)^{-1}.$$

M ve M_2 'nin dağılımı birbirinden bağımsız olduğu için

$$m_{M_1}(t) = m_M(t) m_{M_2}(t)$$

dir. Dolayısıyla M 'nin kümülan üreten fonksiyonu

$$K_M(t) = \log(m_{M_1}(t)) - \log(m_{M_2}(t))$$

$$= \sum_{i=1}^k \left\{ (n_i - 1)t \log(n_i - 1) + \log \Gamma \left(\frac{n_i - 1}{2} - (n_i - 1)t \right) - \log \Gamma \left(\frac{n_i - 1}{2} \right) \right\}$$

$$- \left\{ Nt \log N + \log \Gamma \left(\frac{N}{2} - Nt \right) - \log \Gamma \left(\frac{N}{2} \right) \right\}$$

şeklinde hesaplanır.

Kümülan üreten fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$K'_M(t) = \sum_{i=1}^k \left\{ (n_i - 1) \log(n_i - 1) - (n_i - 1) g \left(\frac{n_i - 1}{2} - (n_i - 1)t \right) \right\}$$

$$- \left\{ N \log N - N g \left(\frac{N}{2} - Nt \right) \right\}$$

$$K_M''(t) = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)^2 g' \left(\frac{n_i - 1}{2} - (n_i - 1)t \right) - N^2 g' \left(\frac{N}{2} - Nt \right)$$

dir. Burada, $g(\cdot)$ ve $g'(\cdot)$ digama ve trigama fonksiyonudur.

Wong (2016) M istatistiğinin kümülan üreten fonksiyonunu ve bu fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerini kullanarak, M 'nin asimtotik olasılık fonksiyonunu elde etmiş ve iki tane saddlepoint tabanlı metod kullanarak M 'nin asimtotik dağılım fonksiyonlarını elde etmiştir. Bunlardan ilki Lugannani ve Rice (1980) metodu, ikinci ise Barndorff-Nielsen (1986, 1991) metodudur.

Saddlepoint metodu ile M 'nin asimtotik olasılık fonksiyonu doğrudan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_M(m) = c \left\{ \frac{1}{K_M''(\hat{t})} \right\}^{1/2} \exp \{ (K_M(\hat{t}) - \hat{t}m) \}. \quad (4.9)$$

Eşitlik (4.9) a karşılık gelen Lugannani ve Rice (1980) metodu ile bulunan asimtotik dağılım fonksiyonu

$$F_M(m) = \Phi(r) + \phi(r) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right\}$$

şeklindedir.

Barndorff-Nielsen (1986, 1991) metodu ile bulunan asimtotik dağılım fonksiyonu

$$F_M(m) = \Phi(r) \left\{ r + \frac{1}{r} \ln \frac{q}{r} \right\}$$

şeklindedir. Burada,

$$r = \text{sgn}(\hat{t}) \{ 2 [\hat{t}m - K_M(\hat{t})] \}^{1/2},$$

$$q = \hat{t} \{ K_M''(\hat{t}) \}^{1/2} \text{ ve } K_M'(\hat{t}) = m.$$

$\phi(\cdot)$ ve $\Phi(\cdot)$ ise sırasıyla standart normal dağılımın olasılık ve dağılım fonksiyonlarıdır.

5. IG DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN TAHMİN EDİCİLERİ VE ÖNERİLEN TESTLER

Bu bölümde tez çalışmasında önerilen testlere geçmeden önce k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliği testi için en çok olabilirlik tahmin edicileri ve kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir.

5.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, ($i = 1, 2, \dots, k$) ortalaması μ_i , ölçek parametresi λ_i olan IG dağılımından rassal bir örneklem olsun. μ_i ve λ_i parametrelerinin tahminini bulmak için en çok olabilirlik yöntemi kullanıldığında kısıtsız model altında olabilirlik fonksiyonu,

$$L_1 = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i}{2\pi X_{ij}^3} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\lambda_i}{2\mu_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \mu_i)^2 \right) \quad (5.1)$$

şeklindedir. Log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\ln L_1 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} (\ln \lambda_i - \ln 2\pi) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{3}{2} \ln X_{ij} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_i (X_{ij} - \mu_i)^2}{2\mu_i^2 X_{ij}} \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilir.

Buna göre, log-olabilirlik fonksiyonunun μ_i and λ_i parametrelerine göre türevinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_1}{\partial \mu_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_i (X_{ij} - \mu_i)}{\mu_i^2 X_{ij}} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_i (X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^3 X_{ij}} \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i^2} + \frac{\lambda_i X_{ij}}{\mu_i^3} - \frac{2\lambda_i}{\mu_i^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_i (X_{ij} - \mu_i)}{\mu_i^3} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_1}{\partial \lambda_i} &= \frac{n_i}{2\lambda_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\mu_i^2 X_{ij}} \\
&= \frac{n_i}{2\lambda_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}^2 - 2X_{ij}\mu_i + \mu_i^2}{2\mu_i^2 X_{ij}} \\
&= \frac{n_i}{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{X_{ij}} - \frac{1}{\bar{X}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

olabilirlik denklemleri elde edilir.

(5.3) ve (5.4) olabilirlik denklemlerinin çözümünden μ_i ve λ_i parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{5.5}$$

$$\hat{\lambda}_i = \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^{-1} - \bar{X}_i^{-1}) \right)^{-1} = \left(\overline{X_i^{-1}} - \bar{X}_i^{-1} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{5.6}$$

Burada $\overline{X_i^{-1}} = (1/n_i) \sum_{j=1}^{n_i} (1/X_{ij})$, $V_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^{-1} - \bar{X}_i^{-1})$ dir.

5.2 Kısıtlı En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, ($i = 1, 2, \dots, k$) ortalaması μ_i ölçek parametresi λ olan IG dağılımından rassal bir örneklem olsun. μ_i ve λ parametrelerinin tahminini bulmak için kısıtlı en çok olabilirlik yöntemi kullanıldığında kısıtlı model altında olabilirlik fonksiyonu

$$L_0 = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda}{2\pi X_{ij}^3} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\lambda}{2\mu_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \mu_i)^2 \right) \tag{5.7}$$

şekindedir. Log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\ln L_0 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} (\ln \lambda - \ln 2\pi) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{3}{2} \ln X_{ij} - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{X_{ij}} \tag{5.8}$$

şeklinde elde edilir.

Buna göre, log-olabilirlik fonksiyonunun μ_i ve λ parametrelerine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L_0}{\partial \mu_i} &= \frac{\lambda}{\mu_i^2} \left(\frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{X_{ij}} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)}{X_{ij}} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu_i^2} \left(\frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} + \frac{\mu_i^2}{X_{ij}} - 2\mu_i \right) + \sum_{j=1}^{n_i} \left(1 - \frac{\mu_i}{X_{ij}} \right) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu_i^2} \left(\frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - n_i \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L_0}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^k n_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{X_{ij}} \\ &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu_i^2} \left(n_i \bar{X}_i + \mu_i^2 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{X_{ij}} - 2n_i \mu_i \right) \\ &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{\bar{X}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{X_{ij}} - \frac{2n_i}{\bar{X}_i} \right) \\ &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{X_{ij}} - \frac{n_i}{\bar{X}_i} \right) = 0\end{aligned}\quad (5.10)$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Burada $n = \sum_{i=1}^k n_i$ dir.

(5.9) ve (5.10) olabilirlik denklemlerinin çözümünden $\tilde{\mu}_i$ ve $\tilde{\lambda}$ parametrelerinin kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileri

$$\tilde{\mu}_i = \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (5.11)$$

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{X_{ij}} - \frac{1}{\bar{X}_i} \right) \right)^{-1} = \frac{n}{V} \quad (5.12)$$

olarak elde edilir. Burada $V = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^{-1} - \bar{X}_i^{-1})$ dir.

Çalışmanın buradan sonraki kısmında önerilen testlere geçilecektir. Ancak önerilen testlere geçmeden önce k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için Wald ve skor istatistiklerinin elde edilişi ayrıntılı biçimde verilmiştir. Bu çalışmada, elde edilen Wald ve skor istatistikleri teorik olarak aynı bulunduğu için, ilerleyen bölümlerde bu test istatistiği Wald ve skor'un baş harfleri olan WS ile gösterilmiştir. WS istatistiğinin elde edilmesinden sonra, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek

parametrelerinin homojenliğini sınamak için WS test istatistiğine dayalı CAT, Bartlett düzeltilmiş WS testi ve Standartlaştırılmış WS testi olmak üzere üç test önerilmiştir.

5.3 Wald Test İstatistiği

Wald istatistiği ilk olarak Wald (1943) tarafından önerilmiştir.

$\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T$; p boyutlu bilinmeyen parametre vektörü ve $\ln L(\theta)$ log-olabilirlik fonksiyonu olsun. θ_1 ; q boyutlu ilgilenilen parametre vektörü ve θ_2 ; $p - q$ boyutlu ilgilenilmeyen parametre vektörüdür.

$H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ bileşik hipotezi test edilsin.

$U_\theta = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}$ skor fonksiyonu yani log-olabilirlik fonksiyonunun parametre vektörüne göre birinci türevi ve $I_\theta = E(U_\theta U_\theta^T)$ ise Fisher bilgi matrisidir.

$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1^T, \hat{\theta}_2^T)^T$ ve $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1^T, \tilde{\theta}_2^T)^T$ ise sırasıyla $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T$ parametre vektörünün en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileridir.

Bu durumda Wald istatistiğinin genel formu

$$T_W = (\hat{\theta}_1 - \tilde{\theta}_{10})^T \{ \hat{I}^{11} \}^{-1} (\hat{\theta}_1 - \tilde{\theta}_{10}) \quad (5.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\hat{\theta}_1$; θ_1 parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisi, $\tilde{\theta}_{10}$; θ_{10} parametresinin kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicisi ve \hat{I}^{11} ise Fisher bilgi matrisi I_θ nin tersinin sol üst bloğunda θ parametre vektörü yerine, θ parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}$ nın yazılmasıyla elde edilen matristir.

Burada, Fisher bilgi matrisi,

$$I_\theta = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

ve Fisher bilgi matrisinin tersi

$$I_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

şeklindedir ve $\hat{I}^{11} = I^{11}(\hat{\theta}) = \left(\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12}(\hat{I}_{22})^{-1} \hat{I}_{21} \right)^{-1}$ olarak bulunur.

Dolayısıyla $H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ bileşik hipotezini test etmek için Wald istatistiği

$$T_W = \left(\hat{\theta}_1 - \tilde{\theta}_{10} \right)^T \left(\hat{I}_{11} - \hat{I}_{12} \left(\hat{I}_{22} \right)^{-1} \hat{I}_{21} \right) \left(\hat{\theta}_1 - \tilde{\theta}_{10} \right)$$

olarak elde edilir. Burada $\hat{I}_{11} = I_{11} \left(\hat{\theta} \right)$, $\hat{I}_{12} = I_{12} \left(\hat{\theta} \right)$ ve $\hat{I}_{22} = I_{22} \left(\hat{\theta} \right)$ şeklinde elde edilir.

Bu bilgilerden yararlanılarak, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği probleminde Wald istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$W = \left(\hat{\lambda} - \tilde{\lambda} \right)^T \left(I^{\lambda, \lambda} \left(\hat{\mu}, \hat{\lambda} \right) \right)^{-1} \left(\hat{\lambda} - \tilde{\lambda} \right) \quad (5.16)$$

Burada, $\hat{\lambda}$ ve $\tilde{\lambda}$ sırasıyla ölçek parametre vektörü $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 'nin en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileri ve $\left(\hat{\lambda} - \tilde{\lambda} \right)^T = \left(\hat{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_k \right)$ dir.

Ayrıca,

$$I^{\lambda, \lambda} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) = \left(I_{\lambda, \lambda} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) - I_{\lambda, \underline{\mu}} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}^{-1} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) I_{\underline{\mu}, \lambda} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) \right)^{-1} \quad (5.17)$$

dir.

Eşitlik (5.16)'daki Wald istatistiğini elde etmek için öncelikle bilgi matrisinin elde edilmesi gerekmektedir. Bilgi matrisi, log-olabilirlik fonksiyonunun parametre vektörüne göre ikinci kısmi türevlerinin negatif beklenen değerleridir ve aşağıdaki gibi bulunur:

$$I = \begin{bmatrix} I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) & I_{\underline{\mu}, \lambda} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) \\ I_{\lambda, \underline{\mu}} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) & I_{\lambda, \lambda} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Burada

$$I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}} \left(\underline{\mu}, \underline{\lambda} \right) = \begin{bmatrix} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_1 \mu_1} \right) & \dots & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_1 \mu_k} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_k \mu_1} \right) & \dots & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_k \mu_k} \right) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n_1 \lambda_1}{\mu_1^3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n_2 \lambda_2}{\mu_2^3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n_k \lambda_k}{\mu_k^3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
I_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) &= \begin{bmatrix} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_1 \partial \lambda_1} \right) & \cdots & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_1 \partial \lambda_k} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_k \partial \lambda_1} \right) & \cdots & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_k \partial \lambda_k} \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_{\underline{\lambda}, \underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) &= \begin{bmatrix} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_1} \right) & \cdots & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_k} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_k \partial \lambda_1} \right) & \cdots & -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_k \partial \lambda_k} \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{2\lambda_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n_k}{2\lambda_k^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

olarak elde edilir. $I_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ matrisi Eşitlik (5.20)'de verilen $I_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ matrisi ile aynıdır.

Eşitlik (5.19), (5.20) ve (5.21)'de $(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) = (\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ vektöründeki parametreler yerine en çok olabilirlik tahmin edicileri $(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_k, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k)$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) &= \begin{bmatrix} \frac{n_1 \hat{\lambda}_1}{\hat{\mu}_1^3} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_k \hat{\lambda}_k}{\hat{\mu}_k^3} \end{bmatrix}, \\
I_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

ve

$$I_{\underline{\lambda}, \underline{\lambda}}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\hat{\lambda}_1^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_k}{2\hat{\lambda}_k^2} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$I^{\lambda, \lambda}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}})$ ise Eşitlik (5.17)'de $(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ vektörü yerine $(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}})$ vektörünün yazılmasıyla elde edilir. $I_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
 I^{\lambda, \lambda}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) &= \left(I_{\lambda, \lambda}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) - I_{\lambda, \underline{\mu}}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}^{-1}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) I_{\underline{\mu}, \lambda}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) \right)^{-1} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\hat{\lambda}_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{2\hat{\lambda}_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n_k}{2\hat{\lambda}_k^2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{2\hat{\lambda}_1^2}{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2\hat{\lambda}_2^2}{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2\hat{\lambda}_k^2}{n_k} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(I^{\lambda, \lambda}(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\underline{\lambda}}) \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\hat{\lambda}_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{2\hat{\lambda}_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n_k}{2\hat{\lambda}_k^2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Bütün bu tanımları kullanarak, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için Wald test istatistiği

$$\begin{aligned}
WTS &= (\hat{\lambda} - \tilde{\lambda})^T \left(I^{\lambda, \lambda}(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) \right)^{-1} (\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}) \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}, & \dots, & \hat{\lambda}_k - \tilde{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\hat{\lambda}_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{2\hat{\lambda}_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n_k}{2\hat{\lambda}_k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 - \tilde{\lambda} \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_k - \tilde{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2\hat{\lambda}_i^2} (\hat{\lambda}_i - \tilde{\lambda})^2
\end{aligned} \tag{5.23}$$

olarak elde edilir.

5.4 Skor Test İstatistiği

Skor test istatistiği ilk olarak Rao (1948) tarafından önerilmiştir.

$H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ bileşik hipotezi test edilsin. Burada θ_1 ilgilenilen parametre vektörü, θ_2 ilgilenilmeyen parametre vektörüdür.

$U_\theta = (U_{\theta_1}^T, U_{\theta_2}^T)^T$ skor fonksiyonu, log-olabilirlik fonksiyonunun ilgilenilen parametreye göre birinci türevi olan $U_{\theta_1}^T$ ve ilgilenilmeyen parametreye göre birinci türevi olan $U_{\theta_2}^T$ 'den oluşsun.

Bu durumda skor istatistiğinin genel formu

$$T_S = \tilde{U}_{\theta_1}^T \tilde{I}^{11} \tilde{U}_{\theta_1} \tag{5.24}$$

şeklinde elde edilir.

Burada $\tilde{U}_{\theta_1}^T$; U_θ skor fonksiyonunun $U_{\theta_1}^T$ parçasında θ parametre vektörü yerine, bu parametre vektörünün kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicisi $\tilde{\theta}$ nın yazılmasıyla elde edilir.

\tilde{I}^{11} ise Eşitlik (5.15) de I^{11} bloğunda θ parametre vektörü yerine, θ parametre vektörünün kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicisi $\tilde{\theta}$ nın yazılmasıyla elde edilen matristir.

Dolayısıyla $H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ bileşik hipotezini test etmek için skor istatistiği

$$T_S = \tilde{U}_{\theta_1}^T \left(\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{12} \left(\tilde{I}_{22} \right)^{-1} \tilde{I}_{21} \right)^{-1} \tilde{U}_{\theta_1}$$

olarak elde edilir.

Burada

$$\tilde{I}_{11} = I_{11}(\tilde{\theta}), \tilde{I}_{12} = I_{12}(\tilde{\theta}), \tilde{I}_{22} = I_{22}(\tilde{\theta}), \tilde{I}_{21} = I_{21}(\tilde{\theta})$$

şeklinde elde edilir.

Bu bilgilerden yararlanılarak, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliği için skor istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$STS = U_{\underline{\lambda}}^T(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \left(I^{\lambda, \lambda}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \right) U_{\underline{\lambda}}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \quad (5.25)$$

$U(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) = (U_{\underline{\mu}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda}), U_{\underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda})) = (U_{\mu_1}, \dots, U_{\mu_k}, U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_l})^T$ skor fonksiyonu ve bu skor fonksiyonunun her bir elemanı ise log olabilirlik fonksiyonunun $(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ parametre vektörüne göre birinci türevinin alınmasıyla elde edilir. $U_{\underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ fonksiyonu log-olabilirlik fonksiyonunun $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ ölçek parametre vektörüne göre birinci türevinin alınmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{\underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L_1}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L_1}{\partial \lambda_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{\bar{X}_1}{\mu_1^2} + \frac{2}{\mu_1} - \bar{X}_1^{-1} \right) \\ \vdots \\ \frac{n_k}{2} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{\bar{X}_k}{\mu_k^2} + \frac{2}{\mu_k} - \bar{X}_k^{-1} \right) \end{bmatrix}$$

$U_{\underline{\lambda}}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}})$ ise $U_{\underline{\lambda}}(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ fonksiyonunda $(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ nın yerine $(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_k, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}, \dots, \tilde{\lambda})$ yazılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{\underline{\lambda}}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \bar{X}_1^{-1} - \bar{X}_1^{-1} \right) \\ \vdots \\ \frac{n_k}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \bar{X}_k^{-1} - \bar{X}_k^{-1} \right) \end{bmatrix}$$

$\hat{\lambda}_i = (\bar{X}_i^{-1} - \bar{X}_i^{-1})^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$ olduğundan

$$U_{\underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}}) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{n_k}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_k} \right) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (5.19), (5.20) ve (5.21)'de $(\underline{\mu}, \underline{\lambda}) = (\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ vektöründeki parametreler yerine kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileri $(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}}) = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k, \tilde{\lambda}, \dots, \tilde{\lambda}_k)$ yazıldığında

$$I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}}) = \begin{bmatrix} \frac{n_1 \tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}_1^3} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_k \tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}_k^3} \end{bmatrix},$$

$$I_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$I_{\underline{\lambda}, \underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}}) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\tilde{\lambda}^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_k}{2\tilde{\lambda}^2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $I^{\Delta, \Delta}(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}})$ ise Eşitlik (5.17)'de $(\underline{\mu}, \underline{\lambda})$ vektörü yerine $(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}})$ vektörünün yazılmasıyla elde edilir.

$$I_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(\underline{\tilde{\mu}}, \underline{\tilde{\lambda}}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
I^{\lambda, \lambda}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) &= \left(I_{\lambda, \lambda}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) - I_{\lambda, \underline{\mu}}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) I_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}^{-1}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) I_{\underline{\mu}, \lambda}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \right)^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \frac{n_1}{2\tilde{\lambda}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{2\tilde{\lambda}_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n_k}{2\tilde{\lambda}^2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2\tilde{\lambda}^2}{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2\tilde{\lambda}^2}{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2\tilde{\lambda}^2}{n_k} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

olarak elde edilir.

Böylece k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için skor istatistiği aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
STS &= U_{\tilde{\underline{\lambda}}}^T(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \left(I^{\lambda, \lambda}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \right) U_{\tilde{\underline{\lambda}}}(\tilde{\underline{\mu}}, \tilde{\underline{\lambda}}) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \right) & \cdots & \frac{n_k}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_k} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\tilde{\lambda}^2}{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2\tilde{\lambda}^2}{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2\tilde{\lambda}^2}{n_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{n_k}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_k} \right) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2\tilde{\lambda}_i^2} (\hat{\lambda}_i - \tilde{\lambda})^2.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için Eşitlik (5.27) de elde edilen skor istatistiğinin Eşitlik (5.23)'de elde edilen Wald istatistiği ile aynı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla WS istatistiği

$$WS = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2\tilde{\lambda}_i^2} (\hat{\lambda}_i - \tilde{\lambda})^2$$

şeklinde bulunur.

5.5 Olabilirlik Oran Test İstatistiği

Olabilirlik oran istatistiği ilk olarak Neyman ve Pearson (1928a, 1928b, 1933) tarafından önerilmiştir.

$H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ bileşik hipotezi test edilsin. Burada θ_1 ilgilenilen parametre vektörü, θ_2 ilgilenilmeyen parametre vektörüdür.

Bu durumda olabilirlik oran istatistiğinin genel formu

$$T_{LRT} = \frac{L(\tilde{\theta} | X)}{L(\hat{\theta} | X)}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{\theta}$ ve $\hat{\theta}$, θ parametre vektörünün sırasıyla kısıtlı en çok olabilirlik ve en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Olabilirlik oran istatistiğinin logaritmik formu ise

$$T_{LLRT} = -2 \left\{ \ln(\tilde{\theta} | X) - \ln(\hat{\theta} | X) \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliğini test etmek için olabilirlik oran istatistiği

$$LRS = \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{2\pi X_{ij}^3} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{2\tilde{\mu}_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \tilde{\mu}_i)^2\right)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2\pi X_{ij}^3} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hat{\lambda}_i}{2\hat{\mu}_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \hat{\mu}_i)^2\right)} \quad (5.28)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{2\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{2\tilde{\mu}_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \tilde{\mu}_i)^2\right)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hat{\lambda}_i}{2\hat{\mu}_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \hat{\mu}_i)^2\right)}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_i &= \bar{X}_i, \quad \hat{\mu}_i = \bar{X}_i, \\
\tilde{\lambda} &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{X_{ij}} - \frac{1}{\bar{X}_i} \right) \right)^{-1} = \frac{n}{V} \\
\hat{\lambda}_i &= \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^{-1} - \bar{X}_i^{-1}) \right)^{-1} = (\bar{X}_i^{-1} - \bar{X}_i^{-1})^{-1} = \frac{n_i}{V_i} \quad (1, 2, \dots, k)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

olduğundan Eşitlik (5.29) da verilen tahmin ediciler Eşitlik (5.28) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
LRS &= \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\left(\frac{n}{2\pi V} \right) \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\tilde{\lambda}}{2\bar{X}_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right) \exp \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2\bar{X}_i^2 X_{ij}} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\left(\frac{n_i}{2\pi V_i} \right) \right)^{1/2}} \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\left(\frac{n}{2\pi V} \right) \right)^{1/2}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left(\left(\frac{n_i}{2\pi V_i} \right) \right)^{1/2}} \left(\exp \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right) \left(\frac{(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{\bar{X}_i^2 X_{ij}} \right) \right) \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}} \exp \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right) \left(\frac{(X_{ij}^2 + \bar{X}_i^2 - 2X_{ij}\bar{X}_i)}{\bar{X}_i^2 X_{ij}} \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}} \exp \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right) \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{(X_{ij}^2 + \bar{X}_i^2 - 2X_{ij}\bar{X}_i)}{\bar{X}_i^2 X_{ij}} \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}} \exp \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right) \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{X_{ij}} - \frac{1}{\bar{X}_i} \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}} \exp \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{\hat{\lambda}_i}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \right) \frac{n_i}{\hat{\lambda}_i} \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}} \exp \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i}{2} - \frac{\tilde{\lambda} n_i}{\hat{\lambda}_i} \right) \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}} \exp \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2V} \sum_{i=1}^k V_i \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\sum_{i=1}^k V_i = V$ olduğundan dolayı

$$LRS = \prod_{i=1}^k \left(\frac{V_i}{V} \frac{n}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}}$$

şeklinde elde edilir. LRS nin logaritmik formu

$$LLRS = -2 \log(LRT) = n \log(V/n) - \sum_{i=1}^k n_i \log(V_i/n_i)$$

şeklinde bulunur.

k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliği probleminde olabilirlik oran testi ve olabilirlik oran testinin logaritmik formu Chhikara ve Folks (1989) tarafından bulunduğu ancak elde edilişi verilmediği için bu tez çalışmasında ayrıntılı biçimde elde edilmesine yer verilmiştir. Ayrıca simülasyon bölümünde olabilirlik oran testinin CAT'e adapte edilmiş sonuçları yer almaktadır. Ancak k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliğinin testi için olabilirlik oran testi ile modifiye olabilirlik oran testi gibi testler önerildiği için bu tez çalışmasında Wald ve skor test istatistiklerine odaklanılmıştır.

Not:

Burada belirtmek gerekir ki Eşitlik (1.9) daki hipotezin doğruluğu altında Wald, skor ve olabilirlik oran istatistikleri asimtotik olarak $k - 1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Bu tez çalışmasında ele alınan problem için elde edilen Eşitlik (5.23) deki Wald ve Eşitlik (5.27) deki skor istatistiği teorik olarak aynı çıktığından dolayı, buradan sonraki bölümlerde tek bir istatistik ele alınmış ve bu istatistik de Wald ve skor'un baş harfleri olan WS ile gösterilmiştir.

5.6 Hesaplamalı Yaklaşım Testi

Bu bölümde öncelikle Parametrik Bootstrap'ın (PB) özel bir hali olan CAT'den ayrıntılı bir şekilde bahsedilmiş ve daha sonraki bölümde WS istatistiğinin CAT yöntemine adapte edilmesi anlatılmıştır.

Literatürde PB yöntemi özellikle hipotez testlerinde asimtotik yöntemlerin yeterli olmadığı durumlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemle ilişkin testin gücü değerinin bazı problemlerde diğer yöntemlere göre düşük olduğu bilinmektedir. Ayrıca PB yönteminin oluşturulması bazı problemler için oldukça zordur. Bu sebepten dolayı Pal vd. (2007) tarafından PB yönteminin bir türevi olan CAT önerilmiştir.

CAT yönteminin birçok avantajı vardır. Bu yöntemin en önemli avantajlarından bir tanesi, test istatistiğinin dağılımı teorik olarak bulunamadığında veya test istatistiğini elde etmenin oldukça karmaşık olduğu durumlarda, istatistiğin dağılımını yapay olarak

oluşturup p değerini tahmin etmektir. Yani araştırmacı test istatistiğinin kesin (exact) örnekleme dağılımını bilmek zorunda değildir. Ayrıca tahmin edicilerin örnekleme dağılımını ve kritik değeri de teorik olarak bulmak zorunda değildir. CAT çok karmaşık parametrik modeller için de kullanılabilir. Bu yöntem uygulamalı araştırmacılara istatistiksel bir çıkarımda bulunmak için Monte Carlo simülasyonu ve nümerik hesaplamalara dayalı algoritmik bir çerçeve sunar (Pal vd., 2007). Birçok parametrik modelde klasik istatistikler net, açık bir çözüm sağlamadığından dolayı asimtotik teoriye dayanır. Asimtotik teoriye dayandığı için de küçük veya orta büyüklükteki örnek çaplarında çok etkin değildir. Daha önce de belirtildiği gibi, veri için uygun bir parametrik model belirlendiği zaman, araştırmacı hesaplamalı adımlar sayesinde test istatistiğinin muhtemelen karmaşık örnekleme dağılımını, yeterli istatistiği, test istatistiğinin örnekleme dağılımını ve test istatistiğinin kritik değerini nasıl elde edeceğini bilmek zorunda kalmaz. CAT yöntemine ilişkin algoritma bunları otomatik olarak yapar (Chang vd., 2010a). Bu durum özellikle örnek maliyetinin yüksek veya her bir örneğin seçiminin uzun zaman aldığı çeşitli uygulamalarda, uygulamacıya daha az maliyet ve daha kısa zamanda diğer yöntemlerle aynı işi yapma imkanı sağlamaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan birisi test istatistiğinin seçimidir. Çünkü seçilecek test istatistiği CAT'in başarısını etkilemektedir. Bu sebepten dolayı literatürde CAT algoritmasında kullanılacak farklı test istatistikleri incelenmiş ve olabirliğe dayalı istatistiklerin (Wald, skor ve olabirlik oran vb.) PB için, dolayısıyla da CAT için uygun olduğu görülmüştür (Davidson ve Hinkley, 1997). Aşağıdaki kısımda CAT yönteminin hipotez testlerindeki kullanımına genel bir bakış kazandırabilmek için Pal vd.'nin (2007) çalışmasında açıkladığı CAT yöntemine dayalı hipotez testinden bahsedilmiştir.

Hesaplamalı Yaklaşım Testine Dayalı Hipotez Testi

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim f(y, \theta), \theta \in \Theta$ dağılımından bağımsız aynı dağılımlı rassal bir örneklem olsun. Burada ilgilenilmeyen parametrenin olduğu ve olmadığı iki durum ele alınmıştır:

Durum 1: θ skaler değerli olsun ve ele alınan durumda ilgilenilmeyen parametre (nuisance parameter) olmasın. Bu durumda $H_0 : \theta = \theta_0$ hipotezi alternatif $H_A (\theta < \theta_0$ veya $\theta > \theta_0$ veya $\theta \neq \theta_0)$ hipotezine karşı α anlam düzeyinde test edilmek istensin.

Adım 1 θ nın en çok olabirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{ML}$ elde edilir.

Adım 2 $\theta = \theta_0$ alınarak $f(x|\theta_0)$ dağılımından çok sayıda (M kez) n birimlik yapay örnek $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ oluşturulur. Her bir örnek için θ 'nın en çok olabirlik tahmin edicisi yeniden hesaplanır. l -inci örnek $X^{(l)} = (X_1^{(l)}, X_2^{(l)}, \dots, X_n^{(l)})^T$ için θ 'nın hesaplanmış

en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{0l}$ bulunur ($l = 1, 2, \dots, M$). Daha sonra bu değerler $\hat{\theta}_{0(1)} \leq \hat{\theta}_{0(2)} \leq \dots \leq \hat{\theta}_{0(M)}$ şeklinde sıralanır.

Adım 3 Burada 3 durum söz konusudur

- (i) H_0 'ın alternatif hipotez olan $H_A : \theta < \theta_0$ 'ya karşı test edilmesinde $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_{0(\alpha M)}$ olarak tanımlansın. Eğer $\hat{\theta}_{ML} < \hat{\theta}_L$ ise H_0 hipotezi reddedilir. p değeri de $\# \left(\hat{\theta}_{0(l)} < \hat{\theta}_{ML} \right) / M$ olarak hesaplanır.
- (ii) H_0 'ın alternatif hipotez olan $H_A : \theta > \theta_0$ 'ya karşı test edilmesinde $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_{0((1-\alpha)M)}$ olarak tanımlansın. Eğer $\hat{\theta}_{ML} > \hat{\theta}_U$ ise H_0 hipotezi reddedilir. p değeri de $\# \left(\hat{\theta}_{0(l)} > \hat{\theta}_{ML} \right) / M$ olarak hesaplanır.
- (iii) H_0 'ın alternatif hipotez olan $H_A : \theta \neq \theta_0$ ya karşı test edilmesinde $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_{0((1-\alpha/2)M)}$ ve $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_{0(\alpha/2M)}$ olarak tanımlansın. $\hat{\theta}_{ML} > \hat{\theta}_U$ veya $\hat{\theta}_{ML} < \hat{\theta}_L$ ise H_0 hipotezi reddedilir. p değeri de $2 \min(p_1, p_2)$ şeklinde hesaplanır. Burada p_1 değeri $\# \left(\hat{\theta}_{0(l)} > \hat{\theta}_{ML} \right) / M$ ve p_2 değeri de $\# \left(\hat{\theta}_{0(l)} < \hat{\theta}_{ML} \right) / M$ şeklinde hesaplanır.

Durum 2: $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \Theta$ olsun. Burada $\theta^{(1)}$ skaler değerli ilgilenilen parametre, $\theta^{(2)}$ ise vektör değerli ilgilenilmeyen parametre olsun. Bu durumda $H_0 : \theta^{(1)} = \theta_0^{(1)}$ hipotezi alternatif H_A ($\theta^{(1)} < \theta_0^{(1)}$ veya $\theta^{(1)} > \theta_0^{(1)}$ veya $\theta^{(1)} \neq \theta_0^{(1)}$) hipotezine karşı α anlam düzeyinde test edilmek istensin.

Adım 1 θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{ML} = \left(\hat{\theta}_{ML}^{(1)}, \hat{\theta}_{ML}^{(2)} \right)$ elde edilir.

Adım 2 Burada 3 adım söz konusudur.

- (i) $\theta^{(1)} = \theta_0^{(1)}$ alınarak, orijinal veriden $\theta^{(2)}$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunur. Bu tahmin edici H_0 'ın doğruluğu altında bulunduğundan dolayı $\theta^{(2)}$ 'nin kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicisi olarak adlandırılır ve $\hat{\theta}_{RML}^{(2)}$ ile gösterilir.
- (ii) $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) f \left(x \mid \theta_0^{(1)}, \hat{\theta}_{RML}^{(2)} \right)$ dağılımından çok sayıda (M kez) n birimlik bağımsız aynı dağılımlı yapay örnek oluşturulur. Her bir örnek için $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi yeniden hesaplanır ve yalnızca $\theta^{(1)}$ ile ilgili tahminler dikkate alınır. l -inci örnek için $\theta^{(1)}$ 'nin hesaplanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{0l}^{(1)}$ değerleri bulunur ($l = 1, 2, \dots, M$).
- (iii) Daha sonra bu değerler $\hat{\theta}_{0(1)}^{(1)} \leq \hat{\theta}_{0(2)}^{(1)} \leq \dots \leq \hat{\theta}_{0(M)}^{(1)}$

Adım 3 Burada 3 durum söz konusudur.

- (i) H_0 'ın alternatif hipotez olan $H_A : \theta^{(1)} < \theta_0^{(1)}$ 'ya karşı test edilmesinde $\hat{\theta}_L^{(1)} = \hat{\theta}_{0(\alpha M)}^{(1)}$ olarak tanımlansın. Eğer $\hat{\theta}_{ML}^{(1)} < \hat{\theta}_L^{(1)}$ ise H_0 hipotezi reddedilir. p değeri de $\# \left(\hat{\theta}_{0l}^{(1)} < \hat{\theta}_{ML}^{(1)} \right) / M$ olarak hesaplanır.

- (ii) H_0 'ın alternatif hipotez olan $H_A : \theta^{(1)} > \theta_0^{(1)}$ ya karşı test edilmesinde $\hat{\theta}_U^{(1)} = \hat{\theta}_{0((1-\alpha)M)}^{(1)}$ olarak tanımlansın. Eğer $\hat{\theta}_{ML}^{(1)} > \hat{\theta}_U^{(1)}$ ise H_0 hipotezi reddedilir. p değeri de $\# \left(\hat{\theta}_{0l}^{(1)} > \hat{\theta}_{ML}^{(1)} \right) / M$ olarak hesaplanır.
- (iii) H_0 'ın alternatif hipotez olan $H_A : \theta^{(1)} \neq \theta_0^{(1)}$ ya karşı test edilmesinde $\hat{\theta}_U^{(1)} = \hat{\theta}_{0((1-\alpha/2)M)}^{(1)}$ ve $\hat{\theta}_L^{(1)} = \hat{\theta}_{0((\alpha/2)M)}^{(1)}$ olarak tanımlansın. Eğer $\hat{\theta}_{ML}^{(1)} > \hat{\theta}_U^{(1)}$ veya $\hat{\theta}_{ML}^{(1)} < \hat{\theta}_L^{(1)}$ ise H_0 hipotezi reddedilir. p değeri de $2 \min(p_1, p_2)$ şeklinde hesaplanır. Burada p_1 değeri $\# \left(\hat{\theta}_{0(l)}^{(1)} > \hat{\theta}_{ML}^{(1)} \right) / M$ ve p_2 değeri de $\# \left(\hat{\theta}_{0(l)}^{(1)} < \hat{\theta}_{ML}^{(1)} \right) / M$ şeklinde hesaplanır.

Buradan sonraki kısımda k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliğini sınamak amacıyla çalışmada önerdiğimiz WS istatistiğinin CAT'e adapte edilmiş algoritması üzerinde durulmuştur.

5.7 WS İstatistiğine dayalı CAT

Bu bölümde önerilen WS istatistiğine dayalı CAT algoritması aşağıdaki gibidir:

Adım 1 WS test istatistiğinin değeri, \widehat{WS} , örnekteki veri için hesaplanır.

Adım 2 Eşitlik (1.9) daki H_0 'ın doğruluğu altında parametrelerin kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileri $\tilde{\mu}_i, \tilde{\lambda}$ elde edilir.

Adım 3 $X_{i1}^*, X_{i2}^*, \dots, X_{in_i}^*$ ($i = 1, 2, \dots, k$) yapay örneği $IG(\tilde{\mu}_i, \tilde{\lambda})$ dağılımından üretilir.

Adım 4 Bu yapay örnekteki sayılar için test istatistiğinin değeri, $\widehat{WS}^{*(j)}$ hesaplanır.

Adım 5 3-4 adımları çok sayıda (m kez) tekrar edilerek $\widehat{WS}^{*(1)}, \widehat{WS}^{*(2)}, \dots, \widehat{WS}^{*(m)}$ elde edilir.

Adım 6 Bu değerlerden faydalanarak p değeri $\hat{p}^* = \# \left(\widehat{WS}^{*(j)} > \widehat{WS} \right) / m$ şeklinde tahmin edilir.

Adım 7 Eğer $\hat{p}^* < \alpha$ ise H_0 reddedilir.

5.8 Bartlett Düzeltilmiş WS Testi

Bu bölümde, WS istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulanarak k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliğinin testi için "Bartlett düzeltilmiş WS testi" önerilmiştir. Örnek çapı arttıkça WS istatistiğinin dağılımının ki-kareye yakınsadığı ancak özellikle küçük örnek çaplarında bu yakınsamanın iyi çalışmadığı bilinmektedir. Küçük örnek çaplarında WS istatistiğinin dağılımı ki-kareye yakınsamadığı gibi beklenen değeri

de ki-kare dağılımının beklenen değerine yakınsamamaktadır. Bartlett (1937) tarafından yapılan çalışmada olabirlik tabanlı istatistiklerin, beklenen değer tabanlı bir düzeltmesi verilmektedir. Dolayısıyla, bu düzeltmeye genel olarak Bartlett düzeltmesi ismi verilir.

WS istatistiğine Bartlett düzeltmesini uygulayabilmek için WS istatistiğinin beklenen değerine ihtiyaç vardır. Dolayısıyla bu çalışmada ilk olarak WS istatistiğinin beklenen değeri elde edilmiş daha sonra bu istatistiğe Bartlett düzeltmesi adapte edilmiştir.

Bu düzeltmede örnek çapı arttıkça negatif olmayan bir T istatistiğinin asimtotik olarak χ_f^2 dağılımına sahip olduğu varsayılınsın. T istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki formatta olur:

$$E(T) = C * f \neq f; \quad C \neq 1.$$

Buradan Bartlett düzeltmesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{T} = T/C.$$

Dolayısıyla \tilde{T} istatistiğinin beklenen değeri f olur. Bartlett düzeltmesi yapabilmek için öngörülen istatistiğin beklenen değerini bu formatta elde etmek gerekir:

Teorem 1

Bartlett düzeltilmiş WS istatistiği (BWS)

$$BWS = WS/C$$

şeklindedir ve C aşağıdaki gibidir:

$$C = \left\{ \frac{n^2}{2(n-k)(n-k+2)} (n - n^{(1)}) - \frac{n}{2} \right\} / (k-1)$$

burada $n^{(1)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$ dir.

İspat

İlk olarak $\hat{\lambda}_i$ ve $\tilde{\lambda}$ temel notasyonlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{\lambda}_i = \left(\frac{V_i}{n_i} \right)^{-1} = \frac{n_i}{V_i}$$

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{V}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{V}.$$

WS istatistiği aşağıdaki gibi düzenlensin:

$$\begin{aligned} WS &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2\hat{\lambda}_i^2} (\hat{\lambda}_i - \tilde{\lambda})^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\hat{\lambda}_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \left(1 - \frac{V_i n}{V n_i} \right)^2. \end{aligned}$$

$\lambda_i V_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ olduğundan dolayı $V_i \sim \frac{\chi_{n_i-1}^2}{\lambda_i} = \frac{U_i}{\lambda_i}$ şeklinde ifade edilir.

H_0 'ın doğruluğu altında ($\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$)

$$\frac{V_i}{V} = \frac{U_i/\lambda}{\sum_{i=1}^k U_i/\lambda} = \frac{U_i}{\sum_{i=1}^k U_i}$$

şeklindedir.

Not:

Burada belirtilmesi gereken temel bilgiler aşağıda gösterilmiştir:

- $X \sim \chi_{\nu}^2$ ise $X \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, 2\right)$
- $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ ve $Y \sim \Gamma(\beta, 1)$ ise $Z = \frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$
- $Z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ise $E(Z) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ve $V(Z) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Bu sebeple;

- $U_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ ise $U_i \sim \Gamma\left(\frac{n_i-1}{2}, 2\right)$

- $\sum_{i=1}^k U_i \sim \chi_{n-k}^2$ ise $\sum_{i=1}^k U_i \sim \Gamma\left(\frac{n-k}{2}, 2\right)$ dir.

$Y_i = \frac{U_i}{\sum_{i=1}^k U_i}$ olmak üzere; U_i ve $\sum_{i=1}^k U_i$ sırasıyla $(n_i - 1)$ ve $(n - k)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip iki değişkendir. Ancak U_i ve $\sum_{i=1}^k U_i$ birbirinden bağımsız iki değişken olmadığından dolayı, oranı olarak tanımlanan Y_i değişkeni F dağılımına değil, beta dağılımına sahiptir. Diğer bir ifadeyle

$$Y_i \sim \text{Beta}\left(\frac{n_i - 1}{2}, \frac{n - k - n_i + 1}{2}\right)$$

dir. Bu bilgiler ışığında WS istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E(WS) &= E\left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \left(1 - \frac{n}{n_i} Y_i\right)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \left(1 + \frac{n^2}{n_i^2} Y_i^2 - 2\frac{n}{n_i} Y_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{n^2}{2n_i} E(Y_i^2) - \sum_{i=1}^k n E(Y_i) \\ &= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{E(Y_i^2)}{n_i} - n \sum_{i=1}^k E(Y_i) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$Y_i \sim \text{Beta}\left(\frac{n_i-1}{2}, \frac{n-k-n_i+1}{2}\right)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= \frac{(n_i - 1)/2}{(n_i - 1 + n - k - n_i + 1)/2} \\ &= (n_i - 1)/(n - k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y_i) &= \frac{((n_i - 1)/2)((n - k - n_i + 1)/2)}{((n - k)/2)^2((n - k + 2)/2)} \\ &= \frac{2(n_i - 1)(n - k - n_i + 1)}{(n - k)^2(n - k + 2)} \end{aligned}$$

dir. $V(Y_i) = E(Y_i^2) - (E(Y_i))^2$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
E(Y_i^2) &= V(Y_i) + (E(Y_i))^2 \\
&= \frac{2(n_i - 1)(n - k - n_i + 1)}{(n - k)^2(n - k + 2)} + \frac{(n_i - 1)^2}{(n - k)^2} \\
&= \frac{2(n_i - 1)(n - k - (n_i - 1)) + (n_i - 1)^2(n - k + 2)}{(n - k)^2(n - k + 2)} \\
&= \frac{2(n_i - 1)(n - k) - 2(n_i - 1)^2 + (n_i - 1)^2(n - k) + 2(n_i - 1)^2}{(n - k)^2(n - k + 2)} \\
&= \frac{(n_i - 1)(n - k)(2 + n_i - 1)}{(n - k)^2(n - k + 2)} \\
&= \frac{(n_i - 1)(n_i + 1)}{(n - k)(n - k + 2)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $E(Y_i)$ ve $E(Y_i^2)$, Eşitlik (5.30) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E(W_S) &= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{E(Y_i^2)}{n_i} - n \sum_{i=1}^k E(Y_i) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - 1)(n_i + 1)}{(n - k)(n - k + 2)n_i} - n \sum_{i=1}^k \frac{n_i - 1}{n - k} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2(n - k)(n - k + 2)} \sum_{i=1}^k \frac{(n_i^2 - 1)}{n_i} - \frac{n}{n - k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2(n - k)(n - k + 2)} \sum_{i=1}^k \left(n_i - \frac{1}{n_i} \right) - \frac{n(n - k)}{n - k} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2(n - k)(n - k + 2)} (n - n^{(1)}) - n \\
&= \frac{n^2}{2(n - k)(n - k + 2)} (n - n^{(1)}) - \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n^{(1)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$ ve $n = \sum_{i=1}^k n_i$ dir.

$E(W_S) = (k - 1)C$ dir. Dolayısıyla

$$C = \left\{ \frac{n^2}{2(n - k)(n - k + 2)} (n - n^{(1)}) - \frac{n}{2} \right\} / (k - 1)$$

olarak elde edilir.

Tüm bilgilerin ışığında, Bartlett düzeltilmiş WS istatistiği BWS aşağıdaki gibi elde edilir:

$$BWS = WS / \left(\left\{ \frac{n^2}{2(n-k)(n-k+2)} (n - n^{(1)}) - \frac{n}{2} \right\} / (k-1) \right).$$

5.9 Standartlaştırılmış WS Testi

Bu bölümde k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliğini test etmek için standartlaştırılmış WS testi önerilmiştir. Standartlaştırılmış WS testini elde etmek için WS test istatistiğinin kesin ortalama ve varyansı bulunmuş, daha sonra standartlaştırma yapılmıştır. Böyle bir standartlaştırma literatürde ilk olarak olabilirlik oran testine uygulanmıştır ve DiCiccio vd. (2001) bu standartlaştırmanın üçüncü mertebeden doğruluğa sahip olduğunu ve ki kare dağılımına olabilirlik oran testinden daha hızlı yakınsadığını belirtmiştir.

Daha önce de belirtildiği gibi standartlaştırılmış WS istatistiğini elde etmek için WS istatistiğinin beklenen değeri ve varyansına ihtiyaç duyulmaktadır. WS istatistiğinin beklenen değeri Bartlett düzeltilmiş WS testi açıklanırken elde edilmişti. Burada önerilen standartlaştırılmış WS test istatistiği ve bu test istatistiğinin hesaplanmasında ihtiyaç duyulan WS istatistiğinin varyansı aşağıdaki teoremden elde edilmiştir.

Teorem 2

$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ hipotezinin doğruluğu altında standartlaştırılmış WS istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$SWS = \sqrt{2(k-1)} \left(\frac{WS - E(WS)}{\sqrt{V(WS)}} \right) + (k-1)$$

WS istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} V(WS) &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \left[\frac{n - n^{(1)}}{(n-k)(n-k+2)} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{n^4(n_i+5)(n_i+3)(n_i+1)(n_i-1)}{4n_i^2(n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{n^4(n_i+1)(n_i-1)}{4n_i(n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} (n - n_i - (n^{(1)} - (1/n_i))) \\ &- \left\{ \frac{n^2}{2(n-k)(n-k+2)} (n - n^{(1)}) - \frac{n}{2} \right\}^2 \end{aligned}$$

İspat

WS test istatistiğinin varyansı $V(WS) = E((WS)^2) - (E(WS))^2$ olduğundan dolayı öncelikle WS^2 ve $E((WS)^2)$ bulunur:

$$\begin{aligned} (WS)^2 &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \left(1 - Y_i \frac{n}{n_i} \right)^2 \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \left(1 + \frac{n^2}{n_i^2} Y_i^2 - 2 \frac{n}{n_i} Y_i \right) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{n^2}{2n_i} Y_i^2 - \sum_{i=1}^k n Y_i \right)^2 \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^k Y_i = \sum_{i=1}^k \frac{U_i}{U} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} (WS)^2 &= \left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} - n \right)^2 \\ &= \left(\frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} - \frac{n}{2} \right)^2 \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} + \frac{n^4}{4} \left(\sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} \right)^2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} E((WS)^2) &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} E \left(\sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} \right) + \frac{n^4}{4} E \left(\left(\sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} \right)^2 \right) \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \left[\frac{1}{n_1} E(Y_1^2) + \dots + \frac{1}{n_k} E(Y_k^2) \right] \\ &\quad + \frac{n^4}{4} E \left(\left(\frac{Y_1^2}{n_1} + \frac{Y_2^2}{n_1} + \dots + \frac{Y_k^2}{n_k} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

dir. $E(Y_i^2) = ((n_i - 1)(n_i + 1)) / ((n - k)(n - k + 2))$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} E((WS)^2) &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \left[\frac{1}{n_1} \left(\frac{n_1^2 - 1}{(n - k)(n - k + 2)} \right) + \dots + \frac{1}{n_k} \left(\frac{n_k^2 - 1}{(n - k)(n - k + 2)} \right) \right] \\ &\quad + \frac{n^4}{4} E \left(\left(\frac{Y_1^2}{n_1} + \frac{Y_2^2}{n_1} + \dots + \frac{Y_k^2}{n_k} \right)^2 \right) \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \left[\frac{n - n^{(1)}}{(n - k)(n - k + 2)} \right] + \frac{n^4}{4} E \left(\underbrace{\left(\frac{Y_1^2}{n_1} + \frac{Y_2^2}{n_1} + \dots + \frac{Y_k^2}{n_k} \right)^2}_{**} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İlk önce (**) eşitliği (***) ve (****) şeklinde iki parçaya ayrılısın

$$E \left(\left(\frac{Y_1^2}{n_1} + \frac{Y_2^2}{n_1} + \dots + \frac{Y_k^2}{n_k} \right)^2 \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^2} E(Y_i^4)}_{***} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_i n_j} E(Y_i^2 Y_j^2)}_{****}$$

Not:

$$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, b) \text{ ise } (p_1, \dots, p_k) = \frac{(X_1, X_2, \dots, X_k)}{\sum_{i=1}^k X_i} \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

$\zeta_i \in N$ $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere

$$E(p_1^{\zeta_1}, \dots, p_k^{\zeta_k}) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \Gamma(\alpha_1 + \zeta_1) \cdots \Gamma(\alpha_k + \zeta_k)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_k) \Gamma\left(\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \sum_{i=1}^k \zeta_i\right)}$$

dir (Ng vd., 2011).

$$U_i \sim \Gamma\left(\frac{n_i-1}{2}, 2\right) \text{ ve } \sum_{i=1}^k U_i \sim \Gamma\left(\frac{n-k}{2}, 2\right) \text{ olduğundan } Y_i = \frac{U_i}{\sum_{i=1}^k U_i} \text{ şeklinde}$$

tanımlanmıştır.

Bu durumda $U_i \sim \Gamma\left(\frac{n_i-1}{2}, 2\right)$ ise

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \frac{(U_1, U_2, \dots, U_k)}{\sum_{i=1}^k U_i} \sim \text{Dirichlet}\left(\frac{n_1-1}{2}, \frac{n_2-1}{2}, \dots, \frac{n_k-1}{2}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

dir.

Dolayısıyla $E(Y_i^4)$ ve $E(Y_i^2 Y_j^2)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E(Y_i^4) &= \frac{(\Gamma((n-k)/2)) (\Gamma((n_i-1)/2) + 4)}{(\Gamma((n-k)/2) + 4) (\Gamma((n_i-1)/2))} \\ &= \frac{(n_i+5)(n_i+3)(n_i+1)(n_i-1)}{(n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} \end{aligned}$$

$$E(Y_i^2 Y_j^2) = \frac{(\Gamma((n-k)/2)) (\Gamma((n_i-1)/2) + 2) (\Gamma((n_j-1)/2) + 2)}{(\Gamma((n_i-1)/2)) (\Gamma((n_j-1)/2)) (\Gamma((n-k)/2) + 4)} \quad i \neq j$$

$$= \frac{(n_i+1)(n_i-1)(n_j+1)(n_j-1)}{(n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)}$$

Bu bilgiler ışığında (***) eşitliği

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i^2} E(Y_i^4) = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i+5)(n_i+3)(n_i+1)(n_i-1)}{n_i^2 (n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)}$$

ve

(****) eşitliği

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_i n_j} E(Y_i^2 Y_j^2) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_i n_j} \frac{(n_i+1)(n_i-1)(n_j+1)(n_j-1)}{(n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} \quad i \neq j$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{(n_i+1)(n_i-1)}{n_i (n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} \sum_{j=1}^k \frac{(n_j+1)(n_j-1)}{n_j}$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{(n_i+1)(n_i-1)}{n_i (n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} \left(n - n_i - \left(n^{(1)} - \frac{1}{n_i} \right) \right)$$

şeklinde elde edilir.

Dolayısıyla

$$E((WS)^2) = \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \left[\frac{n - n^{(1)}}{(n-k)(n-k+2)} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^k \frac{n^4 (n_i+5)(n_i+3)(n_i+1)(n_i-1)}{4n_i^2 (n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)}$$

$$+ \sum_{i=1}^k \frac{n^4 (n_i+1)(n_i-1)}{4n_i (n-k+6)(n-k+4)(n-k+2)(n-k)} \left(n - n_i - (n^{(1)} - (1/n_i)) \right)$$

olarak bulunur.

En son yapılan düzenlemelerden sonra $V(W S)$

$$\begin{aligned}
 V(W S) &= \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{2} \left[\frac{n - n^{(1)}}{(n - k)(n - k + 2)} \right] \\
 &+ \sum_{i=1}^k \frac{n^4(n_i + 5)(n_i + 3)(n_i + 1)(n_i - 1)}{4n_i^2(n - k + 6)(n - k + 4)(n - k + 2)(n - k)} \\
 &+ \sum_{i=1}^k \frac{n^4(n_i + 1)(n_i - 1)}{4n_i(n - k + 6)(n - k + 4)(n - k + 2)(n - k)} (n - n_i - (n^{(1)} - (1/n_i))) \\
 &- \left\{ \frac{n^2}{2(n - k)(n - k + 2)} (n - n^{(1)}) - \frac{n}{2} \right\}^2
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Standartlaştırılmış WS istatistiği SWS Teorem 1 ve Teorem 2 de elde edilen beklenen değer ve varyans kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir (Krishnamoorthy ve Oral 2017; Gökpınar 2017; Gökpınar 2019).

$$SWS = \sqrt{2(k - 1)} \left(\frac{WS - E(WS)}{\sqrt{V(WS)}} \right) + (k - 1)$$

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez çalışmasında önerdiğimiz test istatistikleri WS , CAT_{WS} , BWS , SWS ile literatürde var olan test istatistikleri $GLRT$, $ELRT$, $MLRT$, SP ve de CAT 'e adapte edilmiş LRT istatistiği (CAT_{LRT}), I. Tip hata ve testin gücü bakımından Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır. Tüm testler I. Tip hata bakımından karşılaştırılırken eşit ve farklı örnek çapları dikkate alınmış ve grup sayıları $k = 3, 4, 5$ ve 7 olarak belirlenmiştir. Ayrıca testin gücü bakımından karşılaştırma yapılırken de farklı ölçek parametre değerleri ele alınmıştır. Bu çalışmada farklı ölçek parametre değerlerinin ele alınmasının sebebi heterojenliğin olduğu durumlarda testlerin gücünü kıyaslayabilmektir.

Bu çalışma için belirlenen nominal α değeri $0,05$ dir. CAT_{LRT} , CAT_{WS} , $GLRT$ ve $ELRT$ testlerinin p değerleri hesaplanırken m değeri 5000 alınmıştır. Ayrıca tüm testlerin I. Tip hata ve güç değerleri karşılaştırılırken de iterasyon sayısı 5000 olarak belirlenmiş ve genelliği kaybetmeden $\mu_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$) alınmıştır.

Burada belirtmek gerekir ki CAT_{LRT} , Chhikara ve Folks (1989) tarafından önerilen ve bu çalışmada ayrıntılı bir şekilde elde edilen olabilirlik oran test istatistiğinin CAT 'e adapte edilmiş halidir. WS bu tez çalışmasında elde edilen Wald ve skor istatistiğine dayalı asimtotik bir testtir. SP de Wong'un (2016) çalışmasında önerdiği iki yaklaşımdan biridir. Wong (2016) yaptığı çalışmada, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin eşitliği problemi için iki tane SP yaklaşımı önermiştir ancak iki yaklaşıma dayalı testlerin güç değerleri incelendiğinde, her ikisinin de aynı olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu çalışmanın simülasyon bölümünde iki yaklaşımdan sadece birisi ele alınmıştır.

Tüm hesaplamalar MATLAB 2016b programında yapılmıştır. I. Tip hata ve güç değerleri sırasıyla Çizelge 6.1-6.4 ve Çizelge 6.5-6.8 de verilmiştir. I. Tip hatası $0,06$ 'dan büyük olan testlerin güç değerleri Çizelge 6.5-6.8'de “***” ile gösterilmiştir.

Çizelge 6.1: $k = 3$ için testlerin I. Tip hataları

n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6)	0,050	0,050	0,052	0,051	0,051	0,051	0,050	0,039	0,042
(10 10 10)	0,051	0,051	0,051	0,050	0,048	0,050	0,049	0,041	0,052
(15 15 15)	0,051	0,051	0,050	0,052	0,048	0,054	0,049	0,045	0,048
(20 20 20)	0,047	0,048	0,048	0,048	0,048	0,048	0,051	0,047	0,048
(25 25 25)	0,047	0,048	0,047	0,048	0,049	0,047	0,049	0,045	0,043
(4 6 8)	0,049	0,048	0,049	0,049	0,053	0,047	0,046	0,037	0,053
(3 6 9)	0,057	0,054	0,056	0,056	0,051	0,053	0,046	0,038	0,042
(7 10 13)	0,051	0,049	0,051	0,051	0,054	0,051	0,049	0,043	0,048
(5 10 15)	0,051	0,051	0,050	0,050	0,049	0,054	0,045	0,042	0,045
(10 15 20)	0,048	0,049	0,049	0,049	0,051	0,051	0,047	0,044	0,049
(5 15 25)	0,050	0,051	0,050	0,051	0,048	0,054	0,043	0,043	0,045
(15 20 25)	0,048	0,049	0,049	0,048	0,054	0,049	0,046	0,043	0,045
(10 20 30)	0,055	0,054	0,054	0,054	0,049	0,052	0,045	0,042	0,053
(20 25 30)	0,054	0,054	0,053	0,053	0,052	0,055	0,051	0,048	0,049
(15 25 35)	0,055	0,057	0,056	0,056	0,055	0,053	0,048	0,046	0,040
(25 30 35)	0,051	0,051	0,051	0,050	0,051	0,050	0,050	0,049	0,048

Çizelge 6.2: $k = 4$ için testlerin I. Tip hataları

n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6 6)	0,046	0,047	0,047	0,047	0,050	0,049	0,048	0,043	0,054
(10 10 10 10)	0,051	0,052	0,052	0,052	0,049	0,051	0,047	0,043	0,056
(15 15 15 15)	0,047	0,048	0,047	0,046	0,054	0,046	0,047	0,045	0,050
(20 20 20 20)	0,052	0,051	0,051	0,052	0,047	0,049	0,048	0,047	0,046
(25 25 25 25)	0,049	0,048	0,047	0,048	0,052	0,051	0,051	0,050	0,049
(4 6 6 8)	0,053	0,052	0,052	0,052	0,054	0,051	0,048	0,043	0,055
(3 6 6 9)	0,048	0,048	0,048	0,048	0,046	0,055	0,045	0,042	0,053
(7 10 10 13)	0,052	0,050	0,052	0,052	0,051	0,050	0,046	0,045	0,053
(5 10 10 15)	0,054	0,054	0,055	0,053	0,047	0,056	0,048	0,047	0,046
(10 15 15 20)	0,045	0,046	0,046	0,046	0,052	0,045	0,048	0,047	0,053
(5 15 15 25)	0,052	0,051	0,052	0,051	0,049	0,049	0,045	0,046	0,048
(15 20 20 25)	0,049	0,048	0,049	0,048	0,049	0,050	0,048	0,048	0,049
(10 20 20 30)	0,051	0,051	0,052	0,051	0,051	0,047	0,047	0,047	0,048
(20 25 25 30)	0,053	0,052	0,053	0,052	0,048	0,049	0,050	0,050	0,048
(15 25 25 35)	0,048	0,049	0,048	0,048	0,049	0,048	0,048	0,047	0,051
(25 30 30 35)	0,049	0,049	0,051	0,050	0,048	0,051	0,049	0,048	0,050

Çizelge 6.3: $k = 5$ için testlerin I. Tip hataları

n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6 6 6)	0,050	0,049	0,051	0,050	0,049	0,051	0,046	0,044	0,071
(10 10 10 10 10)	0,048	0,049	0,050	0,049	0,048	0,049	0,050	0,050	0,064
(15 15 15 15 15)	0,048	0,048	0,049	0,049	0,049	0,047	0,048	0,048	0,055
(20 20 20 20 20)	0,054	0,054	0,053	0,055	0,053	0,054	0,047	0,047	0,053
(25 25 25 25 25)	0,051	0,051	0,050	0,052	0,050	0,051	0,048	0,048	0,052
(4 4 6 8 8)	0,049	0,047	0,048	0,048	0,048	0,048	0,045	0,045	0,067
(3 3 6 9 9)	0,046	0,045	0,046	0,048	0,046	0,045	0,047	0,049	0,062
(7 7 10 13 13)	0,051	0,053	0,052	0,052	0,049	0,053	0,045	0,046	0,053
(5 5 10 15 15)	0,048	0,048	0,049	0,050	0,051	0,054	0,045	0,047	0,053
(10 10 15 20 20)	0,050	0,052	0,050	0,051	0,054	0,050	0,047	0,047	0,049
(5 5 15 25 25)	0,054	0,054	0,053	0,053	0,049	0,052	0,046	0,050	0,053
(15 15 20 25 25)	0,050	0,048	0,049	0,049	0,045	0,053	0,047	0,047	0,052
(10 10 20 30 30)	0,055	0,052	0,056	0,056	0,051	0,048	0,048	0,051	0,053
(20 20 25 30 30)	0,047	0,049	0,048	0,049	0,048	0,049	0,049	0,049	0,052
(15 15 25 35 35)	0,047	0,047	0,046	0,046	0,047	0,046	0,050	0,051	0,054
(25 25 30 35 35)	0,047	0,047	0,047	0,047	0,047	0,053	0,049	0,049	0,052

Çizelge 6.4: $k = 7$ için testlerin I. Tip hataları

n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6 6 6 6 6)	0,047	0,047	0,048	0,047	0,049	0,051	0,049	0,052	0,087
(10 10 10 10 10 10 10)	0,051	0,051	0,050	0,051	0,047	0,046	0,051	0,053	0,071
(15 15 15 15 15 15 15)	0,048	0,049	0,048	0,049	0,054	0,053	0,049	0,051	0,067
(20 20 20 20 20 20 20)	0,051	0,051	0,051	0,051	0,054	0,050	0,048	0,050	0,055
(25 25 25 25 25 25 25)	0,045	0,045	0,045	0,045	0,049	0,041	0,050	0,051	0,056
(4 4 6 6 6 8 8)	0,058	0,057	0,058	0,058	0,051	0,054	0,048	0,054	0,083
(3 3 6 6 6 9 9)	0,042	0,043	0,042	0,043	0,048	0,050	0,048	0,053	0,074
(7 7 10 10 10 13 13)	0,054	0,051	0,053	0,054	0,050	0,054	0,048	0,050	0,063
(5 5 10 10 10 15 15)	0,049	0,047	0,049	0,048	0,049	0,049	0,052	0,055	0,070
(10 10 15 15 15 20 20)	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,055	0,045	0,047	0,063
(5 5 15 15 15 25 25)	0,047	0,049	0,047	0,046	0,048	0,049	0,049	0,052	0,057
(15 15 20 20 20 25 25)	0,050	0,048	0,049	0,051	0,052	0,046	0,048	0,050	0,048
(10 10 20 20 20 30 30)	0,055	0,052	0,055	0,054	0,048	0,052	0,045	0,048	0,057
(20 20 25 25 25 30 30)	0,047	0,049	0,050	0,050	0,050	0,049	0,052	0,053	0,061
(15 15 25 25 25 35 35)	0,047	0,047	0,048	0,047	0,054	0,051	0,050	0,051	0,049
(25 25 30 30 30 35 35)	0,047	0,047	0,046	0,047	0,045	0,048	0,049	0,050	0,056

Çizelge 6.5: $k = 3$ için testlerin güç değerleri

$\lambda = (0, 4, 0, 8, 1, 2)$									
n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6)	0,158	0,158	0,159	0,160	0,162	0,182	0,172	0,146	0,171
(10 10 10)	0,278	0,279	0,279	0,280	0,272	0,304	0,293	0,273	0,292
(15 15 15)	0,431	0,428	0,429	0,430	0,427	0,450	0,430	0,414	0,429
(20 20 20)	0,572	0,573	0,574	0,573	0,559	0,588	0,564	0,553	0,560
(25 25 25)	0,661	0,661	0,660	0,660	0,662	0,672	0,682	0,674	0,674
(4 6 8)	0,113	0,144	0,111	0,113	0,155	0,210	0,201	0,181	0,192
(3 6 9)	0,070	0,118	0,070	0,071	0,148	0,204	0,193	0,179	0,179
(7 10 13)	0,218	0,251	0,217	0,220	0,251	0,318	0,318	0,301	0,299
(5 10 15)	0,161	0,219	0,161	0,160	0,221	0,302	0,292	0,283	0,281
(10 15 20)	0,364	0,402	0,363	0,363	0,388	0,467	0,444	0,434	0,437
(5 15 25)	0,185	0,265	0,185	0,183	0,257	0,352	0,341	0,341	0,348
(15 20 25)	0,505	0,526	0,504	0,506	0,526	0,566	0,573	0,563	0,565
(10 20 30)	0,390	0,440	0,389	0,389	0,447	0,512	0,517	0,512	0,509
(20 25 30)	0,629	0,646	0,631	0,632	0,644	0,671	0,665	0,658	0,670
(15 25 35)	0,570	0,604	0,569	0,570	0,588	0,648	0,634	0,629	0,639
(25 30 35)	0,732	0,739	0,730	0,731	0,742	0,764	0,757	0,751	0,758
$\lambda = (0, 4, 1, 2, 2, 0)$									
(6 6 6)	0,318	0,317	0,321	0,317	0,312	0,352	0,354	0,318	0,349
(10 10 10)	0,561	0,562	0,562	0,561	0,555	0,586	0,590	0,568	0,574
(15 15 15)	0,771	0,770	0,769	0,767	0,777	0,789	0,790	0,779	0,785
(20 20 20)	0,900	0,898	0,898	0,899	0,900	0,905	0,897	0,892	0,899
(25 25 25)	0,956	0,956	0,957	0,956	0,949	0,956	0,952	0,950	0,952
(4 6 8)	0,219	0,277	0,217	0,220	0,287	0,378	0,363	0,338	0,365
(3 6 9)	0,149	0,226	0,149	0,150	0,249	0,344	0,331	0,315	0,326
(7 10 13)	0,473	0,519	0,475	0,476	0,506	0,585	0,574	0,559	0,570
(5 10 15)	0,363	0,444	0,364	0,362	0,439	0,542	0,515	0,507	0,516
(10 15 20)	0,681	0,710	0,679	0,679	0,699	0,759	0,749	0,742	0,753
(5 15 25)	0,400	0,495	0,399	0,399	0,504	0,594	0,573	0,573	0,575
(15 20 25)	0,839	0,852	0,839	0,840	0,863	0,878	0,878	0,874	0,870
(10 20 30)	0,718	0,757	0,717	0,719	0,765	0,808	0,807	0,804	0,814
(20 25 30)	0,930	0,934	0,929	0,929	0,934	0,943	0,941	0,938	0,940
(15 25 35)	0,880	0,898	0,880	0,878	0,898	0,916	0,917	0,914	0,918
(25 30 35)	0,972	0,973	0,971	0,971	0,971	0,977	0,978	0,977	0,973

Çizelge 6.6: $k = 4$ için testlerin güç değerleri

$\lambda = (0, 4 \ 0, 8 \ 0, 8 \ 1, 2)$									
n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6 6)	0,138	0,137	0,139	0,138	0,139	0,168	0,166	0,155	0,178
(10 10 10 10)	0,251	0,251	0,251	0,253	0,236	0,280	0,275	0,268	0,281
(15 15 15 15)	0,382	0,382	0,383	0,383	0,369	0,415	0,411	0,406	0,416
(20 20 20 20)	0,512	0,511	0,508	0,511	0,516	0,539	0,528	0,524	0,533
(25 25 25 25)	0,624	0,626	0,626	0,628	0,609	0,647	0,634	0,630	0,639
(4 6 6 8)	0,100	0,124	0,097	0,098	0,110	0,175	0,179	0,171	0,190
(3 6 6 9)	0,085	0,117	0,085	0,086	0,111	0,179	0,175	0,169	0,188
(7 10 10 13)	0,193	0,223	0,195	0,193	0,218	0,275	0,273	0,268	0,278
(5 10 10 15)	0,155	0,205	0,150	0,152	0,204	0,284	0,255	0,252	0,262
(10 15 15 20)	0,323	0,356	0,321	0,324	0,360	0,406	0,393	0,389	0,403
(5 15 15 25)	0,180	0,239	0,180	0,181	0,231	0,322	0,309	0,312	0,313
(15 20 20 25)	0,440	0,464	0,442	0,444	0,461	0,506	0,517	0,514	0,524
(10 20 20 30)	0,343	0,395	0,343	0,342	0,400	0,453	0,457	0,456	0,453
(20 25 25 30)	0,599	0,616	0,596	0,599	0,611	0,649	0,618	0,615	0,638
(15 25 25 35)	0,518	0,551	0,523	0,518	0,561	0,607	0,573	0,572	0,588
(25 30 30 35)	0,680	0,691	0,682	0,683	0,691	0,713	0,707	0,706	0,699
$\lambda = (0, 4 \ 1, 2 \ 1, 2 \ 2, 0)$									
(6 6 6 6)	0,306	0,303	0,304	0,306	0,311	0,363	0,351	0,336	0,372
(10 10 10 10)	0,527	0,525	0,525	0,526	0,518	0,584	0,570	0,561	0,584
(15 15 15 15)	0,757	0,757	0,757	0,756	0,750	0,782	0,763	0,760	0,774
(20 20 20 20)	0,873	0,873	0,873	0,872	0,868	0,882	0,882	0,880	0,882
(25 25 25 25)	0,935	0,935	0,936	0,935	0,930	0,944	0,943	0,942	0,948
(4 6 6 8)	0,200	0,248	0,200	0,198	0,250	0,342	0,329	0,321	0,352
(3 6 6 9)	0,135	0,202	0,136	0,135	0,211	0,302	0,307	0,302	0,304
(7 10 10 13)	0,419	0,457	0,420	0,420	0,449	0,532	0,538	0,529	0,538
(5 10 10 15)	0,311	0,384	0,311	0,312	0,390	0,476	0,461	0,458	0,475
(10 15 15 20)	0,638	0,667	0,639	0,638	0,657	0,723	0,709	0,705	0,714
(5 15 15 25)	0,364	0,462	0,363	0,364	0,458	0,552	0,527	0,529	0,542
(15 20 20 25)	0,807	0,820	0,806	0,805	0,824	0,844	0,850	0,848	0,849
(10 20 20 30)	0,687	0,731	0,688	0,688	0,740	0,776	0,761	0,760	0,776
(20 25 25 30)	0,898	0,904	0,900	0,899	0,908	0,923	0,928	0,926	0,930
(15 25 25 35)	0,847	0,867	0,848	0,846	0,861	0,887	0,890	0,889	0,879
(25 30 30 35)	0,958	0,960	0,957	0,957	0,921	0,967	0,964	0,964	0,967

Çizelge 6.7: $k = 5$ için testlerin güç değerleri

$\lambda = (0,4 \ 0,4 \ 0,8 \ 1,2 \ 1,2)$									
n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6 6 6)	0,209	0,208	0,210	0,212	0,207	0,228	0,234	0,230	***
(10 10 10 10 10)	0,397	0,399	0,398	0,401	0,388	0,410	0,410	0,409	***
(15 15 15 15 15)	0,632	0,632	0,634	0,635	0,631	0,633	0,619	0,617	0,637
(20 20 20 20 20)	0,779	0,780	0,779	0,780	0,780	0,781	0,775	0,775	0,783
(25 25 25 25 25)	0,869	0,870	0,869	0,870	0,869	0,867	0,868	0,868	0,869
(4 4 6 8 8)	0,148	0,202	0,149	0,149	0,198	0,304	0,283	0,284	***
(3 3 6 9 9)	0,097	0,174	0,097	0,096	0,172	0,296	0,276	0,282	***
(7 7 10 13 13)	0,323	0,372	0,323	0,323	0,370	0,462	0,458	0,459	0,478
(5 5 10 15 15)	0,226	0,317	0,228	0,226	0,321	0,435	0,433	0,439	0,454
(10 10 15 20 20)	0,523	0,574	0,520	0,521	0,580	0,639	0,644	0,645	0,646
(5 5 15 25 25)	0,263	0,395	0,266	0,265	0,400	0,521	0,511	0,519	0,527
(15 15 20 25 25)	0,709	0,737	0,711	0,710	0,741	0,774	0,781	0,782	0,780
(10 10 20 30 30)	0,589	0,653	0,589	0,588	0,661	0,734	0,733	0,735	0,724
(20 20 25 30 30)	0,841	0,857	0,842	0,841	0,861	0,877	0,872	0,872	0,879
(15 15 25 35 35)	0,780	0,811	0,780	0,779	0,818	0,849	0,844	0,845	0,849
(25 25 30 35 35)	0,925	0,930	0,925	0,924	0,935	0,939	0,930	0,930	0,939
$\lambda = (0,4 \ 0,4 \ 1,2 \ 1,2 \ 2,0)$									
(6 6 6 6 6)	0,452	0,449	0,452	0,453	0,450	0,459	0,466	0,462	***
(10 10 10 10 10)	0,772	0,771	0,772	0,773	0,770	0,770	0,769	0,767	***
(15 15 15 15 15)	0,938	0,940	0,940	0,940	0,937	0,938	0,939	0,938	0,940
(20 20 20 20 20)	0,987	0,986	0,987	0,986	0,981	0,985	0,987	0,987	0,988
(25 25 25 25 25)	0,998	0,997	0,998	0,997	0,991	0,998	0,997	0,997	0,998
(4 4 6 8 8)	0,335	0,418	0,335	0,337	0,421	0,545	0,529	0,529	***
(3 3 6 9 9)	0,209	0,334	0,208	0,207	0,326	0,503	0,481	0,489	***
(7 7 10 13 13)	0,682	0,728	0,683	0,682	0,728	0,793	0,787	0,787	0,803
(5 5 10 15 15)	0,522	0,631	0,522	0,522	0,640	0,736	0,726	0,731	0,741
(10 10 15 20 20)	0,883	0,908	0,885	0,884	0,899	0,931	0,924	0,925	0,931
(5 5 15 25 25)	0,595	0,716	0,597	0,596	0,715	0,814	0,796	0,802	0,808
(15 15 20 25 25)	0,973	0,977	0,973	0,973	0,977	0,983	0,981	0,981	0,983
(10 10 20 30 30)	0,922	0,942	0,921	0,923	0,941	0,961	0,958	0,959	0,960
(20 20 25 30 30)	0,995	0,996	0,995	0,995	0,991	0,997	0,996	0,996	0,998
(15 15 25 35 35)	0,984	0,987	0,983	0,984	0,985	0,994	0,992	0,992	0,990
(25 25 30 35 35)	0,998	0,998	0,998	0,998	0,991	0,999	0,999	0,999	0,999

Çizelge 6.8: $k = 7$ için testlerin güç değerleri

$\lambda = (0,4 \ 0,4 \ 1,8 \ 0,8 \ 0,8 \ 1,2 \ 1,2)$									
n	$GLRT$	$MLRT$	CAT_{LRT}	$ELRT$	SP	CAT_{WS}	SWS	BWS	WS
(6 6 6 6 6 6 6)	0,198	0,195	0,196	0,197	0,191	0,232	0,239	0,248	***
(10 10 10 10 10 10 10)	0,370	0,370	0,370	0,371	0,380	0,408	0,390	0,397	***
(15 15 15 15 15 15 15)	0,566	0,566	0,568	0,569	0,559	0,594	0,592	0,598	***
(20 20 20 20 20 20 20)	0,711	0,713	0,712	0,713	0,720	0,730	0,744	0,747	0,754
(25 25 25 25 25 25 25)	0,835	0,836	0,834	0,836	0,829	0,850	0,839	0,841	0,862
(4 4 6 6 6 8 8)	0,130	0,171	0,129	0,129	0,169	0,256	0,258	0,270	***
(3 3 6 6 6 9 9)	0,087	0,140	0,087	0,088	0,138	0,244	0,241	0,254	***
(7 7 10 10 10 13 13)	0,287	0,333	0,287	0,288	0,340	0,412	0,413	0,425	***
(5 5 10 10 10 15 15)	0,199	0,277	0,199	0,199	0,280	0,382	0,378	0,389	***
(10 10 15 15 15 20 20)	0,450	0,501	0,451	0,448	0,501	0,575	0,579	0,585	***
(5 5 15 15 15 25 25)	0,243	0,345	0,241	0,245	0,351	0,468	0,461	0,475	0,474
(15 15 20 20 20 25 25)	0,661	0,683	0,661	0,661	0,672	0,726	0,720	0,724	0,754
(10 10 20 20 20 30 30)	0,523	0,589	0,522	0,522	0,590	0,668	0,661	0,668	0,678
(20 20 25 25 25 30 30)	0,791	0,806	0,790	0,791	0,811	0,833	0,829	0,831	0,847
(15 15 25 25 25 35 35)	0,716	0,756	0,717	0,718	0,766	0,800	0,797	0,800	0,815
(25 25 30 30 30 35 35)	0,880	0,888	0,881	0,880	0,879	0,902	0,906	0,908	0,910
$\lambda = (0,4 \ 0,4 \ 1,2 \ 1,2 \ 1,2 \ 2,0 \ 2,0)$									
(6 6 6 6 6 6 6)	0,434	0,434	0,433	0,434	0,431	0,484	0,480	0,492	***
(10 10 10 10 10 10 10)	0,737	0,735	0,735	0,736	0,728	0,763	0,772	0,778	***
(15 15 15 15 15 15 15)	0,928	0,929	0,930	0,928	0,911	0,935	0,931	0,933	***
(20 20 20 20 20 20 20)	0,983	0,982	0,983	0,984	0,977	0,985	0,983	0,984	0,985
(25 25 25 25 25 25 25)	0,996	0,997	0,996	0,996	0,990	0,996	0,996	0,996	0,996
(4 4 6 6 6 8 8)	0,302	0,374	0,303	0,302	0,380	0,493	0,486	0,498	***
(3 3 6 6 6 9 9)	0,201	0,308	0,200	0,202	0,310	0,451	0,442	0,458	***
(7 7 10 10 10 13 13)	0,629	0,676	0,628	0,628	0,669	0,746	0,741	0,748	***
(5 5 10 10 10 15 15)	0,466	0,557	0,464	0,464	0,560	0,675	0,676	0,687	***
(10 10 15 15 15 20 20)	0,842	0,868	0,841	0,843	0,857	0,902	0,898	0,900	***
(5 5 15 15 15 25 25)	0,556	0,664	0,554	0,557	0,671	0,751	0,758	0,767	0,766
(15 15 20 20 20 25 25)	0,960	0,965	0,959	0,959	0,965	0,974	0,970	0,971	0,974
(10 10 20 20 20 30 30)	0,886	0,914	0,886	0,887	0,921	0,941	0,939	0,942	0,944
(20 20 25 25 25 30 30)	0,992	0,993	0,992	0,992	0,990	0,996	0,994	0,995	0,994
(15 15 25 25 25 35 35)	0,978	0,982	0,978	0,978	0,978	0,986	0,986	0,987	0,988
(25 25 30 30 30 35 35)	0,997	0,998	0,997	0,997	0,991	0,998	0,999	0,999	0,999

Çizelge 6.1-6.2'deki sonuçlardan görüldüğü gibi grup sayısı $k = 3$ ve $k = 4$ iken örnek çaplarının küçük olduğu tüm durumlarda BWS testinin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerinden düşüktür. BWS hariç diğer tüm testlerin I. Tip hataları her durumda nominal $\alpha = 0,05$ değerine oldukça yakındır. Örnek çaplarının büyük olduğu tüm durumlarda ise bütün testlerin I. Tip hataları nominal $\alpha = 0,05$ değerine yakındır.

Çizelge 6.3 incelendiğinde grup sayısı $k = 5$ iken küçük örnek çaplarında WS testinin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerinden oldukça yüksektir. WS hariç diğer tüm testlerin I. Tip hataları her durumda nominal $0,05$ değerine oldukça yakındır.

Çizelge 6.4'de grup sayısı $k = 7$ iken küçük ve orta büyüklükteki örnek çaplarında WS testinin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerinden oldukça yüksektir. $k = 5$, $k = 7$ ve örnek çapları büyükken WS testi de dahil tüm testlerin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerine yakındır.

Çizelge 6.5'de $k = 3$ ve $\lambda = (0,4 \ 0,8 \ 1,2)$ olduğu durumda örnek çapları küçük ve eşitken CAT_{WS} testinin gücü diğer testlerden daha yüksektir. SWS ve WS testlerinin gücü CAT_{WS} testinden, diğer testlerin gücü ise SWS ve WS testlerinden daha düşüktür. Örnek çapları orta büyüklükte ve eşitken CAT_{WS} testinin gücü diğer testlere göre biraz yüksek, diğer testlerin gücü ise birbirleriyle hemen hemen aynıdır. Örnek çapı eşit ve büyükken ise SWS testinin gücü CAT_{WS} , BWS ve WS testinin gücünden yüksektir. Diğer testlerin gücü ise CAT_{WS} , SWS , WS ve BWS testlerine göre biraz daha düşüktür. Örnek çapları farklı olduğu durumda CAT_{WS} testinin gücü SWS , BWS ve WS testlerine göre yüksekken, diğer tüm testlere göre oldukça yüksektir.

Ölçek parametrelerinin heterojenliği arttıkça yani $\lambda = (0,4 \ 1,2 \ 2,0)$ olduğu durumda örnek çapları küçük ve eşitken CAT_{WS} , SWS , WS testlerinin gücü hemen hemen aynı ve diğer testlerden yüksektir. Örnek çapları büyük ve eşitken bütün testlerin gücü birbirine yakın ve yüksektir. Örnek çapları farklı iken, özellikle küçük örnek çaplarında CAT_{WS} testinin gücü en yüksek, SWS , BWS ve WS testlerinin gücü ise CAT_{WS} testinin gücüne yakındır. Ancak diğer testlerin gücü, CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinden oldukça düşüktür. Örnek çapları büyüdükçe güç değerleri birbirine yakın ve yüksektir.

Çizelge 6.6 incelendiğinde $k = 4$ ve $\lambda = (0,4 \ 0,8 \ 0,8 \ 1,2)$ olduğu durumda örnek çapları eşitken CAT_{WS} , SWS , WS testlerinin güçleri birbiri ile hemen hemen aynı, BWS testinin gücü ise bu testlere yakındır. Diğer testlerin güçleri CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinden daha düşüktür. Örnek çapları farklı iken CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinin gücü birbirine yakın, ancak diğer testlerden oldukça yüksektir.

Ölçek parametrelerinin heterojenliği arttıkça, $\lambda = (0,4 \ 1,2 \ 1,2 \ 2,0)$ olduğu durumda örnek çapları eşitken CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinin gücü birbirine yakın ancak BWS testinin gücü küçük örnek çaplarında CAT_{WS} , SWS , WS testlerinden biraz daha düşüktür. Örnek çaplarının farklı olduğu tüm durumlarda CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinin gücü birbirine çok yakın ve diğer testlerle kıyaslandığında oldukça yüksektir.

Çizelge 6.7'den görüldüğü gibi $k = 5$ ve $\lambda = (0,4 \ 0,4 \ 0,8 \ 1,2 \ 1,2)$ olduğu durumda örnek çapları küçük ve eşit iken CAT_{WS} , SWS ve BWS testlerinin gücü hemen hemen aynı ve diğer testlerden biraz yüksektir. Örnek çapları artmaya başladıkça tüm testlerin güç değerleri birbirine oldukça yakındır. Örnek çapları farklı ve küçükken CAT_{WS} , SWS ve BWS testlerinin gücü birbirine çok yakın ancak diğer testlerden oldukça yüksektir. Örnek çapları farklı ancak orta büyüklükte iken CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinin güçleri birbirine yakın olmakla birlikte diğer testlerle kıyaslandığında oldukça yüksek olduğu görülmektedir.

$k = 5$ ve $\lambda = (0,4 \ 0,4 \ 1,2 \ 2,0 \ 2,0)$ olduğu durumda örnek çapları eşitken tüm testlerin gücü birbirine yakındır. Örnek çaplarının farklı ve küçük olduğu durumda CAT_{WS} testinin gücü en yüksek ancak SWS , BWS testlerinin güçleri CAT_{WS} testinin gücüne yakındır. Bu testlerin gücü diğer testlerden oldukça yüksektir. Örnek çapları farklı ancak orta büyüklükte iken testlerin CAT_{WS} , SWS , BWS , WS testlerinin güçleri birbirine yakın ve diğer testlere göre oldukça yüksektir.

Çizelge 6.8 incelendiğinde ise $k = 7$ iken WS testinin “****” ile gösterildiği tüm durumlarda CAT_{WS} , SWS , BWS testlerinin gücü diğer testlerden yüksek, WS testinin “****” ile gösterilmediği durumlarda ise CAT_{WS} , SWS , BWS ve WS testinin gücü diğer testlerden yüksektir.

7. UYGULAMA

Bu bölümde önerilen testlerin ve literatürde var olan testlerin nasıl kullanılacağını göstermek için gerçek bir veri seti üzerinde uygulama yapılmıştır.

Bu tez çalışmasındaki gerçek veri seti Alam ve Sudhir'in (2015) çalışmasından alınmış ancak ilk olarak McCool'un 1979 yılında yaptığı çalışmada gösterilmiştir. McCool (1979) Wright-Patterson Hava Kuvvetleri Üssü'nde gerçekleştirilen bir deneyin sonucu olan ve Brown ve Potts'un (1977) yayınladığı teknik bir raporda yer alan verileri kullanmıştır.

Deneyin amacı, yüksek hızlı türbin motoru rulman uygulamaları için söz konusu malzeme / işleme yöntemi kombinasyonlarının yuvarlanma temas yorgunluğundaki karşılaştırmalı performansını değerlendirmektir. Bunun için beş farklı bileşenden (I, II, III, IV, V) oluşan 10 adet yüksek hızlı türbin motoru yatağının milyonlarca devir biriminde yorgunluk süresini ele alan gerçek bir veri seti kullanılmıştır. Bu veri seti aşağıda Çizelge 7.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 7.1: Beş farklı bileşenden oluşan 10 adet yüksek hızlı türbin motoru yatağının milyonlarca devir birimindeki yorgunluk süreleri

Bileşen Çeşitleri				
I	II	III	IV	V
3,03	3,19	3,46	5,88	6,43
5,53	4,26	5,22	6,74	9,97
5,60	4,47	5,69	6,90	10,39
9,30	4,53	6,54	6,98	13,55
9,92	4,67	9,16	7,21	14,45
12,51	4,69	9,40	8,14	14,72
12,95	5,78	10,19	8,59	16,81
15,21	6,78	10,71	9,80	18,39
16,04	9,37	12,58	12,28	20,84
16,84	12,75	13,41	25,46	21,51

Öncelikle bu veri setindeki beş farklı bileşenden oluşan türbin yatağı motorlarının yorgunluk süreleriyle ilgili verilerin IG dağılımına uyup uymadığı Lilliefors testi ile test edilmiştir. IG dağılımı için Lilliefors testine ilişkin sıfır hipotezi ve alternatif hipotez

aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{Veri IG dağılımından gelmiştir.} \\ H_1 &: \text{Veri IG dağılımından gelmemiştir.} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Lilliefors testi ile verinin IG dağılımından gelip gelmediğini kontrol etmek için her bir grubun p -değeri hesaplanmıştır ve nominal $\alpha = 0,05$ 'dan küçük veya büyük olup olmadığı kontrol edilmiştir. Aşağıda her bir gruba ait p -değerleri verilmiştir:

Çizelge 7.2: Grupların (bileşenlerin) her biri için test istatistiği değerleri ve p değerleri

	I	II	III	IV	V
Lilliefors test istatistiğinin değeri	0,1363	0,2717	0,1359	0,2430	0,1079
p değeri	0,8444	0,2390	0,8475	0,3370	0,9451

Çizelge 7.2 incelendiğinde p değerlerinin nominal $\alpha = 0,05$ değerinden büyük olduğu görülmüştür. Dolayısıyla (7.1) hipotezi reddedilemez, yani veri IG dağılımından gelmiştir.

Parametrelerin en çok olabilirlik ve kısıtlı en çok olabilirlik tahminleri aşağıda verilmiştir:

Çizelge 7.3: Gruplara (bileşenler) ilişkin ortalamalar ve ölçek parametrelerinin tahminleri

	I	II	III	IV	V
$\hat{\mu}_i = \tilde{\mu}_i$	10,6930	6,0500	8,6360	9,7980	14,7060
$\hat{\lambda}_i$	32,5513	36,6858	47,0768	53,5545	109,4645
$\tilde{\lambda}$	46,7162				

Çizelge 7.3'deki parametre tahminleri

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \tilde{\mu}_i = \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \\ \hat{\lambda}_i &= \left(\overline{X_i^{-1}} - \bar{X}_i^{-1} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \\ \tilde{\lambda} &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{X_{ij}} - \frac{1}{\bar{X}_i} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

formülleri yardımıyla hesaplanmıştır.

Beş gruba ilişkin ölçek parametrelerinin homojenliğini sınamak için bu çalışmada önerilen ve literatürde var olan testlerin p değerleri aşağıdaki Çizelge 7.4 deki gibi elde

edilir:

Çizelge 7.4: Testlerin p değerleri

Testler	p-değerleri
<i>GLRT</i>	0,4953
<i>MLRT</i>	0,4956
<i>CAT_{LRT}</i>	0,5040
<i>ELRT</i>	0,4977
<i>SP</i>	0,3652
<i>CAT_{WS}</i>	0,5813
<i>SWS</i>	0,5820
<i>BWS</i>	0,5811
<i>WS</i>	0,5503

Çizelge 7.4'deki *MLRT*, *SWS*, *BWS* ve *WS* testlerinin p değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanırken, diğer testlerin p değerleri bu testlere ilişkin algoritmaları kullanarak MATLAB 2016b programında hesaplanmıştır.

MLRT test istatistiğinin değeri 3,385 olduğundan dolayı *MLRT* testine ilişkin p değeri

$$p = 1 - P(\chi^2 < 3,385) = 0,4956,$$

SWS test istatistiğinin 2,8571 olduğundan dolayı *BWS* testine ilişkin p değeri

$$p = 1 - P(\chi^2 < 2,8571) = 0,5820,$$

BWS test istatistiğinin 2,8627 olduğundan dolayı *BWS* testine ilişkin p değeri

$$p = 1 - P(\chi^2 < 2,8627) = 0,5811,$$

WS test istatistiğinin 3,0454 olduğundan dolayı *WS* testine ilişkin p değeri

$$p = 1 - P(\chi^2 < 3,0454) = 0,5503$$

şeklindedir.

Çizelge 7.4 incelendiğinde tüm testlerin p değerleri nominal $\alpha = 0,05$ değerinden oldukça büyük olduğu için gruplara ilişkin ölçek parametrelerinin eşit olduğunu ifade eden sıfır hipotezi reddedilemez. Diğer bir ifadeyle, beş bileşene ilişkin ölçek parametreleri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık söz konusu değildir. Bu da grupların homojen olduğunu gösterir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, son zamanlarda oldukça popüler olan, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği problemi ele alınmıştır. Bunun için literatürde var olan testlerden daha güçlü bir test elde edilmesi amaçlanmıştır.

İlk olarak k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliği için olabilirlik tabanlı Wald ve skor istatistikleri elde edilmiştir. Ancak elde edilen istatistikler teorik olarak aynı sonucu verdiğinden dolayı bu istatistik için Wald ve skorun baş harflerinden oluşan WS kullanılmıştır. Daha sonraki aşamalarda bu istatistiğe dayalı olarak üç yeni test önerilmiştir. Bunlardan ilki WS istatistiğine dayalı CAT dir. CAT, test istatistiğinin dağılımı teorik olarak bulunamadığında veya test istatistiğini elde etmenin oldukça karmaşık olduğu durumlarda, istatistiğin dağılımını yapay olarak oluşturup p değerini tahmin eden bir yöntemdir. Ayrıca uygulamalı araştırmacılara istatistiksel çıkarımda bulunmak için Monte Carlo simülasyonu aracılığıyla ve nümerik hesaplamalara dayalı olarak algoritmik bir çerçeveye sunmaktadır.

Çalışmada ikinci olarak WS istatistiğine Bartlett düzeltmesi yapılması önerilmiştir. WS istatistiğinin asimtotik olarak ki kare dağıldığı bilinmekte ancak küçük örnek çaplarında bu istatistiğin dağılımı elde edilememektedir. Dolayısıyla, WS istatistiğine Bartlett düzeltmesi uygulayarak, istatistiğin dağılımının ki kareye yakınsamasını iyileştirmek amaçlanmıştır. Bu düzeltmenin yapılabilmesi için WS istatistiğinin beklenen değerine ihtiyaç duyulduğundan, beta dağılımının özelliklerinden yararlanılarak WS istatistiğinin kesin beklenen değeri elde edilmiştir.

Üçüncü olarak standartlaştırılmış WS testi önerilmiştir. Bu standartlaştırmanın yapılabilmesi için WS istatistiğinin beklenen değerine ve varyansına ihtiyaç duyulmaktadır. WS istatistiğinin kesin beklenen değeri Bartlett düzeltmesinde elde edildiğinden, standartlaştırılmış WS testi için varyansın bulunması gerekmektedir. Dirichlet dağılımı ve bu dağılımın momentlerinden yararlanılarak WS istatistiğinin kesin varyansı da bulunmuştur. Elde edilen beklenen değer ve varyansa dayanarak standartlaştırma yapılmıştır. Bu standartlaştırmanın yapılmasındaki amaç da istatistiğin dağılımının ki-kare dağılımına yakınsamasını iyileştirmektir.

Önerilen bu testler literatürde var olan testlerle I. Tip hata ve testin gücü bakımından geniş bir Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma

sonucunda grup sayısı $k = 3$ ve $k = 4$ iken örnek çaplarının küçük olduğu durumlarda *BWS* testinin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerinden düşüktür. Grup sayısı artmaya başladıkça küçük ve bazı orta büyüklükteki örnek çaplarında *WS* testinin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerinden oldukça yüksektir. Bu belirtilen durumların haricinde tüm testlerin I. Tip hatası nominal $\alpha = 0,05$ değerine oldukça yakındır. Testin gücü genel olarak incelendiğinde ise örnek çaplarının eşit olduğu çoğu durumda önerilen testler *CAT_{WS}*, *SWS*, *BWS*, *WS*'nin gücü diğer testlerden yüksek ancak bu fark çok fazla değildir. Ancak örnek çaplarının farklı olduğu tüm durumlarda önerilen testler *CAT_{WS}*, *SWS*, *BWS*, *WS*'nin gücü diğer tüm testlerden oldukça yüksektir.

Ayrıca bu çalışmada önerilen testler ve literatürde var olan testlerin kullanımı gerçek bir veri seti üzerinde gösterilmiştir. Gerçek hayata dair uygulamalarda, genel olarak normal dağılıma sahip olmayan verilere oldukça sık rastlanmaktadır. Ayrıca yine uygulamalarda örnek çapları eşit olmayan heterojen yapıdaki veriler çıkmaktadır. Dolayısıyla, bu çalışmada amaçlanan hedefe ulaşılmış ve özellikle de küçük örnek çaplarında, literatürde var olan testlerden daha güçlü testler önerilmiştir. Böylelikle, k tane IG dağılımına sahip grubun ölçek parametrelerinin homojenliğine ilişkin teorik açıdan literatüre katkı sağlanmıştır.

Bundan sonraki çalışmalarda *WS* istatistiğine ilişkin elde edilen kesin beklenen değer ve varyanstan yararlanıp DiCiccio vd.'nin (2001) çalışmasında belirttiği çeşitli yaklaşımlar *WS* istatistiğine uygulanarak literatürde bu konuyla ilgili yeni çalışmalar yapılması hedeflenmektedir. Ayrıca ölçek parametrelerinin kıyaslanması aşamasından sonra, k tane IG dağılımına sahip grubun ortalamasının eşitliği için Wald, skor, olabilirlik oran istatistiklerinin elde edilmesi ve yeni test istatistiklerinin önerilmesi de ilerleyen çalışmalarda ele alınacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Agostinelli, C., Markatou, M., 2001, Test of hypotheses based on the weighted likelihood Methodology, *Statistica Sinica*, 499-514.
- Alam, K., Paul, S., 2015, Testing equality of scale parameters of two Weibull distributions in the presence of unequal shape parameters. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 19, 1, 11-26.
- Bachelier, L., 1900, Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 17, 3, 21-86.
- Balakrishnan, N., Rahul, T., 2014, Inverse Gaussian distribution for modeling conditional durations in finance, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 43, 3, 476-486.
- Bhandary, M., Dai, H., 2008, An alternative test for the equality of variances for several populations when the underlying distributions are normal, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 38, 1, 109-117.
- Banerjee, A. K., Bhattacharyya, G., 1976, A purchase incidence model with inverse Gaussian interpurchase times, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 356, 823-829.
- Bardsley, W. E., 1980, Note on the use of the inverse Gaussian distribution for wind energy applications, *Journal of Applied Meteorology*, 19, 9, 1126-1130.
- Barndorff-Nielsen, O. E., 1986, Inference on full or partial parameters based on the standardized signed log likelihood ratio, *Biometrika*, 73, 2, 307-322.
- Barndorff-Nielsen, O. E., 1991, Modified signed log likelihood ratio, *Biometrika*, 78, 3, 557-563.
- Barroso, L. U. C. P., Cordeiro, G. M., Vasconcellos, K. L., 1998, Corrected likelihood ratio tests for von Mises regression models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 61, 3, 237-258.
- Bartlett, M. S., 1937, Properties of sufficiency and statistical tests, *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 160, 901, 268-282.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Bartlett, M. S., Kendall, D. G., 1946, The statistical analysis of variance-heterogeneity and the logarithmic transformation, Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society, 8, 1, 128-138.
- Basak, P., Balakrishnan, N., 2012, Estimation for the three-parameter inverse Gaussian distribution under progressive Type-II censoring. Journal of Statistical Computation and Simulation, 82, 7, 1055-1072.
- Bayer, F. M., Cribari-Neto, F., 2013, Bartlett corrections in beta regression models, Journal of Statistical Planning and Inference, 143, 3, 531-547.
- Brown, P.F., Potts, J.R., 1977, Evaluation of powder processed turbine engine ball bearings. Air Force Aero-Propulsion Laboratory, Technical Report No. AFAPL-TR-77-26.
- Caroni, C., 2010, Testing for the Marshall–Olkin extended form of the Weibull distributions, Statistical Papers, 51, 2, 325-336.
- Chang, C. H., Pal, N., 2008, A revisit to the Behrens–Fisher problem: comparison of five test methods, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 37, 6, 1064-1085.
- Chang, C. H., Pal, N., Lim, W. K., Lin, J. J., 2010a, Comparing several population means: a parametric bootstrap method, and its comparison with usual ANOVA F test as well as ANOM, Computational Statistics, 25, 1, 71-95.
- Chang, C. H., Pal, N., Lin, J. J., 2010b, A note on comparing several poisson means, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 39, 8, 1605-1627.
- Chang, C. H., Lin, J. J., Pal, N., 2011, Testing the equality of several gamma means: a parametric bootstrap method with applications, Computational Statistics, 26, 1, 55-76.
- Chang, M., You, X., & Wen, M. (2012). Testing the homogeneity of inverse Gaussian scale-like parameters. Statistics & Probability Letters, 82(10), 1755-1760.
- Cheng, R. C. H., Amin, N. A. K., 1981, Maximum likelihood estimation of parameters in the inverse Gaussian distribution, with unknown origin, Technometrics, 23, 3, 257-263.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Chhikara, R. S., Folks, J. L., 1974, Estimation of the inverse Gaussian distribution function, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 345, 250-254.
- Chhikara, R. S., Folks, J. L., 1977, The inverse Gaussian distribution as a lifetime model, *Technometrics*, 19, 4, 461-468.
- Chhikara, R. S., Folks, J. L., 1989, *The inverse Gaussian distribution: Theory, Methodology and Applications*, Marcel Dekker, New York.
- Cohen, A. C., Whitten, B. J., 1985, Modified moment estimation for the three-parameter inverse Gaussian distributions, *Journal of quality technology*, 17, 3, 147-154.
- Cordeiro, G. M., Lins, S. L., 2010, New results on the likelihood ratio and score tests for the von Mises distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80, 8, 915-926.
- Cordeiro, G. M., Montenegro, L. C. C., 2001, Bartlett corrected likelihood ratio tests in location-scale nonlinear models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 30, 7, 1353-1372.
- Cressie, N., Davis, A. S., Folks, J. L., Folks, J. L., 1981, The moment-generating function and negative integer moments, *The American Statistician*, 35, 3, 148-150.
- Cribari-Neto, F., Ferrari, S. L., 1995, An improved Lagrange multiplier test for heteroskedasticity, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 24, 1, 31-44.
- Davison, A. C., Hinkley, D. V., 1997, *Bootstrap methods and their application* (Vol. 1), Cambridge university press.
- Diciccio, T. J., Martin, M. A., Stern, S. E., 2001, Simple and accurate one-sided inference from signed roots of likelihood ratios, *Canadian Journal of Statistics*, 29, 1, 67-76.
- Dobek, A., Moliński, K., Skotarczak, E., 2015, Power comparison of Rao's score test, the Wald test and the likelihood ratio test in (2xc) contingency Tables, *Biometrical Letters*, 52, 2, 95-104.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Doksum, K. A., Hbyland, A., 1992, Models for variable-stress accelerated life testing experiments based on wener processes and the inverse gaussian distributions, *Technometrics*, 34, 1, 74-82.
- Durham, S. D., Padgett, W. J., 1997, Cumulative damage models for system failure with application to carbon fibers and composites. *Technometrics*, 39, 1, 34-44.
- Edgeman, R. L., 1989, Inverse Gaussian control charts, *Australian Journal of Statistics*, 31, 1, 78-84.
- Edgeman, R. L., 1990, An alternative to the analysis of variance for reliability data, *Quality and reliability engineering international*, 6, 3, 203-207.
- Fahidy, T. Z., 2012, Applying the inverse Gaussian distribution to the assessment of chemical reactor performance, *International Journal of Chemistry*, 4, 2, 26-33.
- Folks, J. L., Chhikara, R. S., 1978, The inverse Gaussian distribution and its statistical application-a review, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 40, 3, 263-275.
- Gökpınar, E., 2017, Standardized Likelihood Ratio Test for Homogeneity of Variance Based on Likelihood Ratio Under Normality, *Gazi University Journal of Science*, 30, 3, 223-235.
- Gökpınar, E., 2019, Standardized Log-Likelihood Ratio Test for the Equality of Inverse Gaussian Scale Parameters, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43, 4,, 1705-1711.
- Gökpınar, E., Gökpınar, F., 2012, A test based on the computational approach for equality of means under the unequal variance assumption, *Hacettepe journal of Mathematics and Statistics*, 41, 4, 605-613.
- Gökpınar, E., Polat, E., Gökpınar, F., Günay, S., 2013, A new computational approach for testing equality of inverse Gaussian means under heterogeneity, *Hacettepe journal of Mathematics and Statistics*, 42, 5, 581-590.
- Gökpınar, F., Gökpınar, E., 2015, A computational approach for testing equality of coefficients of variation in k normal populations, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44, 5, 1197-1213.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Gökpınar, F., Gökpınar, E., 2017, Testing the equality of several log-normal means based on a computational approach, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46, 3, 1998-2010.
- Gökpınar, E., Gökpınar, F., 2017, Testing equality of variances for several normal populations, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46, 1, 38-52.
- Huang, X., Tamura, R. N., 2010, Comparison of test statistics for the sequential parallel design, *Statistics in Biopharmaceutical Research*, 2, 1, 42-50.
- Jacobson, T., Larsson, R., 1999, Bartlett corrections in cointegration testing, *Computational statistics and data analysis*, 31, 2, 203-225.
- Jain, R. K., Jain, S., 1996, Inverse Gaussian distribution and its application to reliability, *Microelectronics Reliability*, 36, 10, 1323-1335.
- Krishnamoorthy, K., Oral, E., 2017, Standardized likelihood ratio test for comparing several log-normal means and confidence interval for the common mean, *Statistical methods in medical research*, 26, 6, 2919-2937.
- Krit, M., Gaudoin, O., Xie, M., Remy, E., 2016, Simplified likelihood based goodness-of-fit tests for the Weibull distributions, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 45, 3, 920-951.
- Lancaster, T., 1972, A stochastic model for the duration of a strike, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, 135, 2, 257-271.
- Lemonte, A. J., Ferrari, S. L., 2010, Small-sample corrections for score tests in Birnbaum-Saunders regressions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 40, 2, 232-243.
- Li, B., 2001, Sensitivity of Rao's score test, the Wald test and the likelihood ratio test to nuisance parameters, *Journal of statistical planning and inference*, 97(1), 57-66.
- Li, X., Wu, Y., Tu, D., 2008, A Bartlett type correction for Wald test in Cox regression model, *Statistics and probability letters*, 78, 16, 2614-2622.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Liu, X., & He, D., 2013, Testing homogeneity of inverse Gaussian scale parameters based on generalized likelihood ratio. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 42, 2, 382-392.
- Liu, X., Xu, X., 2010, A new generalized p-value approach for testing the homogeneity of variances, *Statistics and probability letters*, 80, 19, 1486-1491.
- Lugannani, R., Rice, S., 1980, Saddle point approximation for the distribution of the sum of independent random variables, *Advances in applied probability*, 12, 2, 475-490.
- McCool, J. I., 1979, Analysis of single classification experiments based on censored samples from the two-parameter Weibull distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 3, 1, 39-68.
- Molenberghs, G., Verbeke, G., 2007, Likelihood ratio, score, and Wald tests in a constrained parameter space, *The American Statistician*, 61, 1, 22-27.
- Moran, P. A. P., 1968, *An Introduction to Probability Theory*, Clarendon.
- Mudholkar, G. S., Natarajan, R., 2002, The inverse Gaussian models: analogues of symmetry, skewness and kurtosis, *Annals of the Institute of statistical Mathematics*, 54, 1, 138-154.
- Mudholkar, G. S., Tian, L., 2002, An entropy characterization of the inverse Gaussian distribution and related goodness-of-fit test, *Journal of statistical planning and inference*, 102, 2, 211-221.
- Nadarajah, S., 2009, An alternative inverse Gaussian distribution. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 5, 1721-1729.
- Neyman, J., Pearson, E. S., 1928a, On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference: Part I, *Biometrika*, 175-240.
- Neyman, J., Pearson, E. S., 1928b, On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference: Part II, *Biometrika*, 263-294.
- Onar, A., Padgett, W. J., 2000, Accelerated test models with the inverse Gaussian distributions, *Journal of statistical planning and inference*, 89, 1-2, 119-133.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Omtzigt, P., Fachin, S., 2006, The size and power of bootstrap and Bartlett-corrected tests of hypotheses on the cointegrating vectors, *Econometric Reviews*, 25, 1, 41-60.
- Önalın, Ö., 2007, Finansal Zaman Serileri İçin Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Modeli. *Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 22, 1, 201-224.
- Pal, N., Lim, W. K., Ling, C. H., 2007, A computational approach to statistical inferences, *Journal of Applied Probability and Statistics*, 2, 1, 13-35.
- Punzo, A., 2019, A new look at the inverse Gaussian distribution with applications to insurance and economic data, *Journal of Applied Statistics*, 46, 7, 1260-1287.
- Rao, C. R., 1948, Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44, 1, 50-57.
- Sadooghi-Alvandi, S. M., Malekzadeh, A., 2013, A note on testing homogeneity of the scale parameters of several inverse Gaussian distributions, *Statistics and Probability Letters*, 83, 8, 1844-1848.
- Sato, S., Inoue, J., 1994, Inverse Gaussian distribution and its application. *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science)*, 77, 1, 32-42.
- Schrödinger, E., 1915, Zur theorie der fall-und steigversuche an teilchen mit brownscher bewegung, *Physikalische Zeitschrift*, 16, 289-295.
- Seshadri, V., 2012, *The inverse Gaussian distribution: statistical theory and applications (Vol. 137)*, Springer Science and Business Media.
- Shuster, J., 1968, On the inverse Gaussian distribution function, *Journal of the American Statistical Association*, 63, 324, 1514-1516.
- Smoluchowski, M. V., 1915, Notiz uiber die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung, *Physikalische Zeitschrift*, 16, 318-321.
- Sutradhar, B. C., Bartlett, R. F., 1993a, Monte carlo comparison of wald's, likelihood ratio and rao's tests, *Journal of statistical computation and simulation*, 46, 1-2, 23-33.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Sutradhar, B. C., Bartlett, R. F., 1993b, A small and large sample comparison of Wald's likelihood ratio and Rao's tests for testing linear regression with autocorrelated errors. *Sankhyā, The Indian Journal of Statistics, Series B*, 55, 186-198.
- Şenoğlu, B., Acıtaş, Ş., 2010, İstatistiksel deney tasarımı. Sabit Etkili Modeller, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Takagi, K., Kumagai, S., Matsunaga, I., Kusaka, Y., 1997, Application of inverse Gaussian distribution to occupational exposure data, *The Annals of Occupational Hygiene*, 41, 5, 505-514.
- Tweedie, M. C. K., 1941, A mathematical investigation of some electrophoretic measurements on colloids, Unpublished M.Sc. Thesis, University of Reading, England.
- Tweedie, M. C., 1945, Inverse statistical variates. *Nature*, 155, 3937, 453.
- Tweedie, M. C, 1957a, Statistical properties of inverse Gaussian distributions. I, *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 2, 362-377.
- Tweedie, M. C., 1957b, Statistical properties of inverse Gaussian distributions. II, *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 3, 696-705.
- Wald, A., 1943, Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large, *Transactions of the American Mathematical society*, 54, 3, 426-482.
- Wald, A., 1944, On cumulative sums of random variables, *The Annals of Mathematical Statistics*, 15, 3, 283-296.
- Wald, A., 1947, *Sequential Analysis*. Wiley, New York.
- Wang, Y., 1994, A Bartlett-type adjustment for the likelihood ratio statistic with an ordered alternative, *Statistics and Probability Letters* , 20, 347-352.
- Wasan, M. T., Roy, L. K., 1969, Tables of inverse Gaussian percentage points, *Technometrics*, 11, 3, 591-604.
- Weerahandi, S., 1995, ANOVA under unequal error variances, *Biometrics*, 589-599.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Whitmore, G. A., 1975, The inverse Gaussian distribution as a model of hospital stay, *Health services research*, 10, 3, 297.
- Whitmore, G. A., 1976, Management applications of the inverse Gaussian distributions, *Omega*, 4, 2, 215-223.
- Whitmore, G. A., 1979, An inverse Gaussian model for labour turnover, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, 142, 4, 468-478.
- Whitmore, G. A., Neufeldt, A. H., 1970, An application of statistical models in mental health research, *The bulletin of mathematical biophysics*, 32, 4, 563-579.
- Wise, M. E., 1975, Skew distributions in biomedicine including some with negative powers of time, In *A modern course on statistical distributions in scientific work*, 241-262. Springer, Dordrecht.
- Wong, A. C. M., 2016, Testing homogeneity of inverse Gaussian scale-like parameters: a saddlepoint approach, *Statistical Papers*, 57, 2, 319-327.
- Yi, Y., Wang, X., 2011, Comparison of Wald, score, and likelihood ratio tests for response adaptive designs, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 10, 4, 553-569.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gamze GÜVEN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 06.03.1989

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Mehmet Emin Resulzade Anadolu Lisesi, 2003-2007

Lisans : Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 2008-2012

Yüksek Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 2014-2016

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 27.11.2013-devam

Yayınlar

Samkar, H., **Güven, G.**, 2016, Comparison of PLSR and PCR techniques in terms of dimension reduction: An application on internal migration data in Turkey, International Journal of Advanced and Applied Sciences, 3, 7-13. (ESCI)

Mutlu, H. T., Gökpınar, F., Gökpınar, E., Gül, H. H., **Güven, G.**, 2017, A new computational approach test for one-way ANOVA under heteroscedasticity, Communications in Statistics-Theory and Methods, 46, 16, 8236-8256. (SCI)

Yayınlar (devam)

Güven, G., 2018, A Comparison of Five Tests for the Equality of Inverse Gaussian Means under Heteroscedasticity of Scale parameters. Gazi University Journal of Science, 31, 2, 628-641. (ESCI)

Güven, G., Şamkar, H., 2019, Examination of Dimension Reduction Performances of PLSR and PCR Techniques in Data with Multicollinearity, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 43, 3, 969-978. (SCI)

Güven, G., Gürer, Ö., Şamkar, H., Şenoğlu, B., 2019, A fiducial-based approach to the one-way ANOVA in the presence of nonnormality and heterogeneous error variances, Journal of Statistical Computation and Simulation, 89, 9, 1715-1729. (SCI)

Samkar, H., **Güven, G.**, 2019, Özel Markalı Ürünleri Satın Alma Sıklığının Sıralı Lojistik Regresyon Analizi İle İncelenmesi, Kırklareli Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 8, 1, 79-96.

Uluslararası Bildiriler

Şamkar, H., **Güven, G.**, 2015, Özel Markalı Ürünlere Olan Tüketici Talebinin Sıralı Lojistik Regresyon Analizi ile İncelenmesi, 9. Uluslararası İstatistik Kongresi, Antalya. (Özet)

Güven, G., Şamkar, H., 2015, Kısmi En Küçük Kareler Regresyonu ve Temel Bileşenler Regresyon Tekniklerinin RMSECV Kriteri Açısından Karşılaştırılması ve Gerçek Veri Seti Üzerine Bir Uygulama, 9. Uluslararası İstatistik Kongresi, Antalya. (Özet)

Alpu, Ö., **Güven, G.**, 2015, Sağlam Faktör Analizi ve Bir Uygulama, 9. Uluslararası İstatistik Kongresi, Antalya. (Özet)

Uluslararası Bildiriler (devam)

Güven, G., Gökpınar, F., Gökpınar, E., 2016, Testing the Equality of Several Normal Means under Heteroscedasticity, 2nd International Researchers-Statisticians and Young Statisticians Congress, Ankara (Özet)

Güven, G., Gökpınar, F., Gökpınar, E., 2016, Likelihood Ratio Based Test for the Homogeneity of Variances, 2nd International Researchers-Statisticians and Young Statisticians Congress, Ankara. (Özet)

Güven, G., Gökpınar, E., Gökpınar, F., 2017, On the Testing Homogeneity of Inverse Gaussian Scale Parameters, 10th International Statistics Congress, Ankara. (Özet)

Şamkar, H., **Güven, G.,** 2017, PLSR and PCR under Multicollinearity, 10th International Statistics Congress, Ankara. (Özet)

Şamkar, H., **Güven, G.,** 2017, Usage of Partial Robust M Regression Method on a Real Data, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya. (Özet)

Gökpınar, E., **Güven, G.,** Gökpınar, F., 2017, A Test for the Equality of Means based on Wald statistic under Inverse Gaussian Distributions, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya. (Özet)

Şamkar, H., **Güven, G.,** 2017, An Application of Robust Principal Component Regression Method, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, İstanbul. (Özet)

Uluslararası Bildiriler (devam)

Gökpınar, E., **Güven, G.**, Gökpınar, F., 2017, A new Test for Homogeneity of Inverse Gaussian Scale Parameters, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, İstanbul. (Özet)

Şamkar, H., **Güven, G.**, 2017, İki Yanlı Tahmin Tekniğinin Karşılaştırılmasına İlişkin Gerçek Bir VeriSeti Üzerinde Uygulama, 18. Uluslararası Ekonometri Yöneylem Araştırması ve İstatistik Sempozyumu, Trabzon. (Özet)

Güven, G., Şamkar, H., 2017, Sağlam Kısmi En Küçük Kareler Regresyon Tekniğinin Kullanımı Üzerine Bir Uygulama, 18. Uluslararası Ekonometri Yöneylem Araştırması ve İstatistik Sempozyumu, Trabzon. (Özet)

Gökpınar, E., **Güven, G.**, Gökpınar, F., 2018, Comparison of Tests for the Homogeneity of Inverse Gaussian Scale Parameters, International Conference on Applied Mathematics in Engineering, Balıkesir. (Özet)

Güven, G., Gürer, Ö., Şamkar, H., Şenoğlu, B., 2018, Hypothesis testing in one way ANOVA based on fiducial approach when the error terms have Weibull distribution and heterogeneous variances, International Conference on Applied Mathematics in Engineering, Balıkesir. (Özet)

Gökpınar, E., **Güven, G.**, Gökpınar, F., 2018, Score Test For Homogeneity Of Inverse Gaussian Scale Parameters, 4th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, İzmir. (Özet)

Uluslararası Bildiriler (devam)

Güven, G., Gürer, Ö., Şamkar, H., Şenoğlu, B., 2018, Fiducial Based Approach for Testing the Equality of the Treatment Means in One Way ANOVA When the Usual Normality and Homogeneity of Variances Assumptions are not Met, 4th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, İzmir. (Özet)

Yalçınkaya, A., **Güven, G.**, Şamkar, H., Şenoğlu, B., 2019, An Alternative Method to the Newton Raphson Genetic Algorithm. Presented at the International Symposium on Academic Studies in Science Engineering and Architecture Studies, Ankara. (Tam metin)

Güven, G., Şamkar, H., Gökpınar, F., 2019, Bartlett Corrected Score Test for the Homogeneity of Inverse Gaussian Scale Parameters, International Symposium on Academic Studies in Science Engineering and Architecture Studies, Ankara. (Özet)