Grafların Farklı Alanlara Uygulanabilirliği Üzerine

Selin Olguner Bağdat

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2008

Applicability Of The Graphs On Different Fields

Selin Olguner Bağdat

THESIS for MASTER DEGREE

Department of Mathematics

June 2008

Grafların Farklı Alanlara Uygulanabilirliği Üzerine

Selin Olguner Bağdat

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Haziran 2008

Selin Olgüner Bağdat'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Grafların Farklı Alanlara Uygulanabilirliği Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr.Rüstem KAYA

Üye : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye : Yrd.Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Yrd.Doç. Dr. Mizan DOĞAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada [10] Wilson R.J. and Watkins J.J. “Graphs An Introductory Approach” adlı kitabın ilk yedi bölümü incelenmiştir. Özel olarak seçilen şekiller tamamen [10]’dan alınmıştır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış, ikinci bölümde graflara ilişkin temel kavramlar ve grafların bazı uygulama alanları verilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla, yönlü graflar ve uygulamaları, Euler grafları ve uygulamaları, Hamilton grafları ve uygulamaları detaylı olarak incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Graf, Bağlantılı Graf, Yol, Gezi, Çevrim, Yönlü Graf, Euler Grafı, Hamilton Grafı

SUMMARY

In this study, the first seven chapter of the book, Wilson R.J. and Watkins J.J. “Graphs An Introductory Approach” [10] is observed. Chosen shapes taken from [10]. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter definitions of basic concepts are given, with associated graphs. Then, in the third, fourth and fifth chapters, respectively digraphs, Eulerian graphs, Hamiltonian graphs and their applications are examined.

KEY WORDS: Graph, Connected Graph, Path, Trail, Cycle, Digraph, Eulerian Graph, Hamiltonian Graph

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI hocama ve değerli fikirlerine başvurduğum diğer hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR vii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Graflarla İlgili Temel Kavramlar 3

2.2 Grafların Uygulama Alanları 25

2.2.1 Kimya 25

2.2.2 Sosyal Bilimler 30

2.2.3 Ağaçlar 32

2.2.4 Destekleyici Dörtgensel Karkaslar 36

2.2.5 Uyum Grafları 39

2.2.6 Trafik Işıkları 40

2.2.7 Radyo Frekansları 44

2.2.8 Aralık Graflar 45

2.2.9 Arkeoloji 46

2.2.10 Gelişim Psikolojisi 47

2.2.11 Klasik Çalışmalar 47

2.2.12 Ekoloji 48

2.2.13 Dört Küp Problemi 49

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3. YÖNLÜ GRAFLAR VE UYGULAMA ALANLARI 53

3.1 Tanım ve Örnekler 53

3.2 Yönlü Grafların Uygulama Alanları 64

3.2.1 İşaretli Yönlü Graflar 64

3.2.2 Katı Atık İmha Etme 65

3.2.3 Elektrik Enerjisi Talebi 66

3.2.4 Sınırlı Durum Makineleri 68

3.2.5 İşaret-Akış Grafları 75

4. EULER GRAFLARI VE UYGULAMA ALANLARI 84

4.1 Euler Grafları 85

4.2 Euler Graflarının Uygulama Alanları 91

4.2.1 Ayrıt-İzlenebilir Graflar 92

4.2.2 Diyagram-Kopya Bulmacalar 93

4.2.3 Dominolar 94

4.2.4 Labirentler 96

4.2.5 Çinli Postacı Problemi 99

4.3 Euler Yönlü Grafları 100

4.4 Euler Yönlü Graflarının Uygulama Alanları 102

4.2.1 Dönen Davul Problemi 102

5. HAMİLTON GRAFLARI VE UYGULAMA ALANLARI 105

5.1 Hamilton Grafları 105

5.1.1 Hamilton’un Oyunu 106

5.1.2 Atın Tur Problemi 107

5.2 Hamilton Graflarının Uygulama Alanları 111

5.2.1 Satış Temsilcisi Problemi 111

5.2.2 Sıralı İşler Problemi 113

Kaynaklar 115

BÖLÜM 1

GİRİŞ

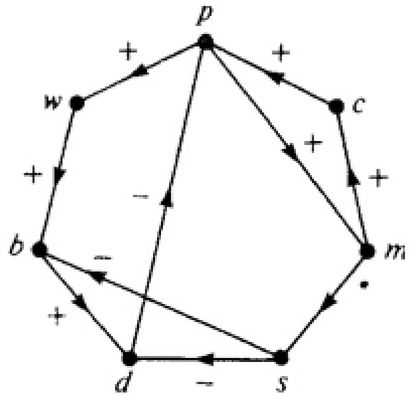
Bir C_6H_{14} formülünde kaç tane molekül vardır?

Satranç oyununda bir at, satranç tahtasının her karesini at hareketlerinin bir dizisi ile ziyaret edip hareketini başladığı karede bitirebilir mi?

Bir postacı mektuplarını, görev bölgesinde bütün caddeler üzerindeki adreslere teslim etmesi gerekiyor. Postacı, en kısa toplam uzaklığı kat edecek şekilde, nasıl bir rota belirlemelidir?

Bu problemler ilk bakışta birbirinden çok farklı gibi görünse de, hepsi belli nesnelerin düzenlenmeleri ve bu nesnelerin aralarındaki ilişkilerle ilgili problemler olarak ifade edilebilir. Bir graf, nesneleri düğümlerle, ilişkileri düğümleri birleştiren ayrıtlarla ifade ederek, belli nesneler arasındaki ilişkileri tam olarak ortaya koyabilir ve resmedebilir. Böylelikle graf teori, bileşenleri düzenleyerek karmaşık sistemlerin inşasını gerektiren çok sayıda problemin çözümü için basit, ulaşılabilir ve güçlü araçlar sunar.

İlk olarak 1736 yılında İsviçreli matematikçi Leonardo Euler (1707-1783) tarafından bir gazetede bahsedilen graf teorinin bilim ve teknolojideki uygulamaları, bilgisayar teknolojisine, kimyaya, ekolojiye, arkeolojiye, sosyal grup yapılanmalarına, oyun ve bulmacalara kadar uzanan geniş bir yelpazeyi kapsamaktadır. Örneğin, işaretli yönlü graflar yardımı ile bir şehrin katı atık imha etme problemi ile ilgili ilişkiler şu şekilde ifade edilebilir:



Şekil 1.1

Yukarıdaki grafta, b = birim alana düşen bakteri miktarı, w = birim alana düşen kirlilik miktarı, s = sağlık hizmetleri, d = hastalık sayısı olmak üzere, atıklardaki artış bakterilerdeki artışa neden olduğundan, w düğümünden b düğümüne olan yay + işaretlidir. Sağlık hizmetlerindeki gelişmeler hastalık sayısında azalışa neden olduğundan, s düğümünden d düğümüne olan yay – işaretlidir. Hastalık sayısındaki artışın, kirlilik miktarı üzerindeki direkt etkisi olmadığından, d düğümünden w düğümüne hiç yay yoktur. Bunun gibi basit bir modele dayanarak bile dikkate değer tahminler yapılabilir.

Burada belirtilmelidir ki, düğümlerin konumlarının ve şekillerinin, ayrıtların uzunluklarının ve şekillerinin hiçbir önemi yoktur. Bu nedenle, bir grafın sonsuz farklı şeklinin çizilebileceği aşikârdır.

BÖLÜM 2

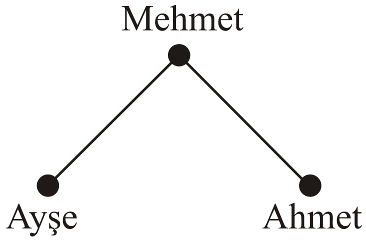
GRAFLARLA İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR VE GRAFLARIN UYGULAMA ALANLARI

2.1 Graflarla İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı temel kavramlar tanımlanarak, kullanılan bazı özellikler verilmektedir. Ayrıca grafların uygulama alanlarından örnekler verilmektedir.

İki nesne arasında daima bir ilişkiden söz etmek mümkündür. Bu ilişki nesnelerin boyları, ağırlıkları, renkleri vs. hakkında olabilir. Söz gelimi kişiler arası tanışıklık ilişkisi ele alınsın. Bu tanışıklık ilişkisinde her kişi bir nokta ile temsil edilir ve eğer herhangi iki kişi birbirini tanıyorsa bu iki kişiyi temsil eden noktalar bir çizgi ile birleştirilir. Yok eğer bu kişiler tanışmıyorlarsa, noktaları öylece bırakılır.

Örneğin; Ayşe, Mehmet ve Ahmet isimli üç öğrenci göz önüne alınsın. Eğer Mehmet; Ayşe ve Ahmet'i tanıyorsa fakat Ayşe ve Ahmet birbirini tanımıyorsa bu ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.1

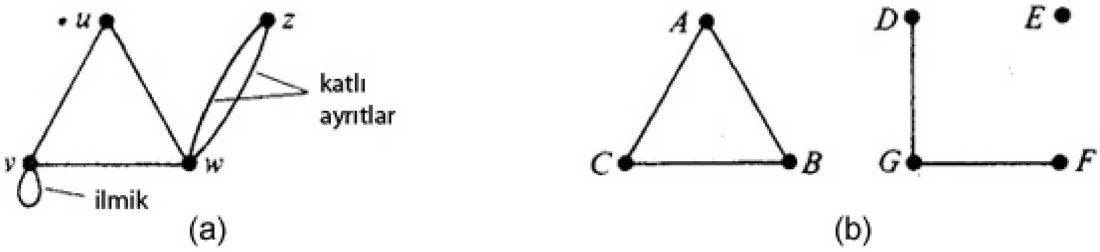
Bir graf, işte yukarıdaki gibi bir şekildir. Nokta sayısı çok çok artabilir, sonsuz bile olabilir. Bazı noktalar, "... ilişkisi var" anlamına gelen bir çizgi ile birleştirilir.

Tanım 2.1.1: D, elemanları düğümler (vertices) olarak adlandırılan boştan farklı bir küme, A da elemanları ayrıtlar (edges) olarak adlandırılan ve D nin bir ya da iki elemanlı alt kümelerinden biri ile eşleştirilebilen bir küme olsun. Bu şekilde tanımlanan $G = (D, A)$ ikilisine **graf** (graph) adı verilir.

Tanım 2.1.2: Düğüm kümesi ve ayrıt kümesi sonlu olan bir graf, **sonlu graf** (finite graph) olarak adlandırılır. Bu durumda $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n\}$ olmak üzere $|D| = n$ sayısına grafın **mertebesi** (order); $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ olmak üzere $|A| = m$ sayısına da grafın **boyutu** (size) denir. n mertebeli ve m boyutlu sonlu graflar kısaca, $G(n, m)$ ile sembolize edilir.

Tanım 2.1.3: Graflar somut olarak gösterilirken, her bir düğüm bir nokta ile temsil edilir. Her bir $\{d_i, d_j\}$ ayrıtı ise d_i ve d_j düğümüne karşılık gelen noktaları birleştiren bir doğru parçası ya da basit bir eğri ile temsil edilir. $\{d_i, d_j\}$ ayrıtında d_i ve d_j ye ayrıtın **uç noktaları** (end points) denir. Tek elemanlı bir $\{d\}$ ayrıtının uç noktaları, aynı ve d dir. Böyle bir ayrıta **ilmik** (loop) adı verilir. Aynı uç noktalar kümesine sahip olan ayrıtlar ise **katlı ayrıtlar** (multiple edges) olarak adlandırılır. Katlı ayrıtlar ya da ilmik bulunduran graflara **pseudo-graf** (pseudograph); yalnız katlı ayrıtlar bulunduran graflara **çoğul-graf** (multigraph); katlı ayrıtlar ve ilmik bulundurmayan graflara ise **yalın graf** (simple graph) adı verilir.

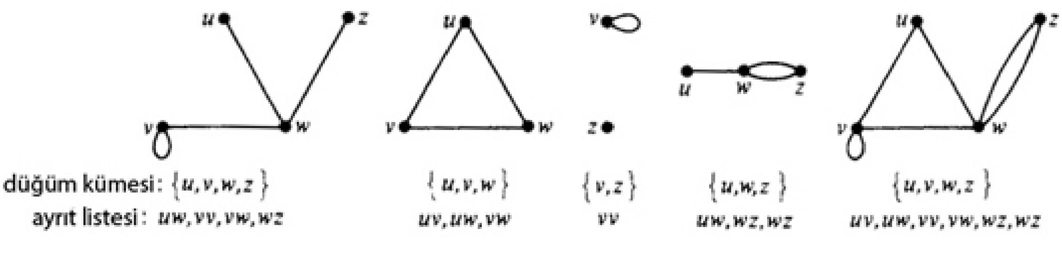
Aşağıda şekil 2.2 (a) da bir pseudo graf örneği verilmiştir ve bu örnek üzerinde katlı ayrıtlar ile ilmik gösterilmiştir. Şekil 2.2.(b) deki graf ise yalın graftır çünkü bu grafta hiç katlı ayrıt ya da ilmik yoktur.



Şekil 2.2

Tanım 2.1.4: Bir $a = \{d_i, d_j\}$ ayrıtında d_i ile d_j düğümleri için **bitişiktir** (adjacent) denir. a ile d_i ya da a ile d_j ye ise **çakışıktır** (incident) denir. Aynı düğüm ile çakışık olan iki ayrıta, **bitişik ayrıtlar** (adjacent edges) denir. Bir ayrıt yukarıda görüldüğü gibi, kullanılışındaki sadelik bakımından a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ile gösterilebilir. Ancak bu gösterim biçiminde ayrıt ile çakışık olan düğümler belli olmadığından bazı durumlarda bir $\{d_i, d_j\}$ ayrıtı basit olarak $d_i d_j$ ya da $d_j d_i$ ile gösterilecektir. Aynı düşünceyle tek elemanlı bir $\{d\}$ ayrıtını da dd ile göstermek uygundur.

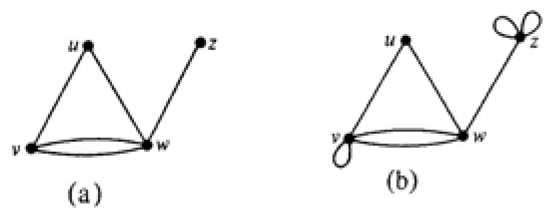
Tanım 2.1.5: $G_1 = (D_1, A_1)$ ve $G_2 = (D_2, A_2)$ grafları verilsin. Eğer $D_1 \subseteq D_2$ ve $A_1 \subseteq A_2$ ise G_1 grafına G_2 grafının bir **altgrafı** (subgraph) denir. Bu durumda G_2 grafına da G_1 grafının bir **süpergrafı** (supergraph) denir. G_1 grafı G_2 grafının altgrafı ise bu $G_1 \subseteq G_2$ ya da $G_2 \supseteq G_1$ ile gösterilir. Şekil 2.3'de ilk dört graf, sonuncu grafın alt graflarıdır.



Şekil 2.3

Tanım 2.1.6: G bir graf, $d \in D$ olsun. d düğümü ile çakışık olan ayrıtların sayısına, d **düğümünün derecesi** (degree) denir ve $\deg_G(d)$ ile ya da çalışılan grafın bilinmesi durumunda $\deg(d)$ ile gösterilir.

Her bir ayrıt bitişik olduğu düğüme tam olarak 1 derece kazandırırken, bir ilmik ise bitişik olduğu düğüme 2 derece birden kazandırır. Derecesi tek sayı olan bir düğüme **tek düğüm** (odd vertex), derecesi çift sayı olan bir düğüme **çift düğüm** (even vertex) adı verilir. 0 dereceli bir düğüm **tekil düğüm** (isolated vertex), 1 dereceli bir düğüm ise uç düğüm (end vertex) olarak adlandırılır. Bir G grafının en az dereceli düğümüne **minimum dereceli** (minimum degree) denir ve değeri $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok dereceli düğümü de benzer şekilde tanımlanır ve değeri de $\Delta(G)$ ile gösterilir. Bir grafın düğümlerinin dereceleri büyükten küçüğe doğru sıralanarak oluşturulan diziye o grafın **derece dizisi** (degree-sequence) denir.



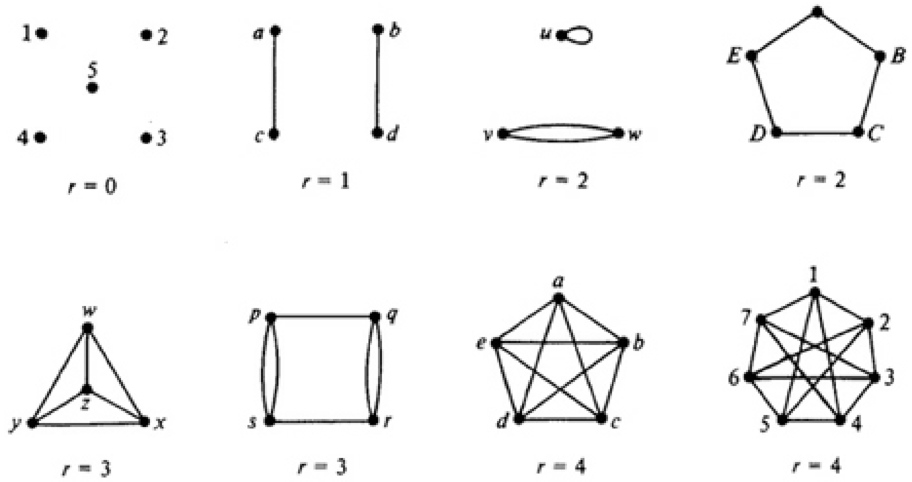
Şekil 2.4

Şekil (a) daki graf için, der(u)=2, der(v)=3, der(w)=4, der(z)=1 dir. Bu grafın derece dizisi; (4,3,2,1) dir.

Şekil (b) deki graf için, der(u)=2, der(v)=5, der(w)=4, der(z)=5 dir. Bu grafın derece dizisi; (5,4,2) dir.

Tanım 2.1.7: G bir graf olsun. G nin her bir düğümü r dereceli ise yani G grafı için $\deg(d_i) = r$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ ise grafa, r-**regüler graf** (r-regular graph) adı verilir.

Şekil 2.5 de r=0, r=1, r=2, r=3 ve r=4 için r-regüler graflar verilmektedir.



Şekil 2.5

Yardımcı Teorem 2.1.1 (The Handshaking Lemma): $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ düğüm kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir $G(n, m)$ grafında,

$$\sum_{i=1}^{n} der(d_i) = 2m$$

dir.

İspat: Her ayrıt 2 düğüm ile çakışık olduğundan, düğümlerin dereceleri toplanırken her bir ayrıt 2 kez sayılır. Bu nedenle düğümlerin dereceleri toplamı ayrıt sayısının 2 katına eşittir.

Bu teorem, bir partideki insanların düğümleri, insanlar arasındaki tokalaşmalarında ayrıtları temsil ettiği düşünüldüğünde 'tokalaşma teoremi' olarak isimlendirilir.

Sonuç 2.1.1: Bir grafta, bütün düğümlerin dereceleri toplamı çift sayıdır.

İspat: G bir graf olsun. G nin bütün düğümlerinin dereceleri toplamı ayrıt sayısının iki katıdır. Bu da çift sayıdır.

Sonuç 2.1.2: Tek düğümlerin sayısı çifttir.

İspat:: G nin tek düğümlerinin kümesi U ile, çift düğümlerinin kümesi W ile gösterilsin. Yardımcı Teorem 1.1.1 den,

$$\sum_{d\in U} \deg(d) + \sum_{d\in W} \deg(d) = \sum_{d\in D} \deg(d) = 2m$$

dir. Demek ki,

$$\sum_{d\in U} \deg(d) + \sum_{d\in W} \deg(d)$$

çift bir sayıdır. $\sum_{d\in W} \deg(d)$ toplamındaki terimler çift olduğundan toplam da çifttir. O halde $\sum_{d\in U} \deg(d)$ toplamı çift olmalıdır. Bu toplamdaki terimlerin her biri tek sayı olduğundan toplamın çift olması için çift sayıda terim toplanmalıdır. O halde $|U|$ çifttir.

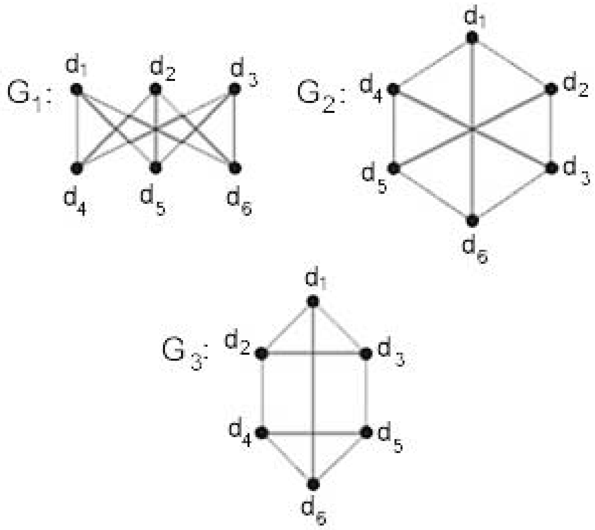
Sonuç 2.1.3 : G grafının n tane düğümü olsun ve her düğümün derecesi r olsun. G nin nr/2 tane ayrıtı vardır.

İspat: G nin bütün düğümlerinin dereceleri toplamı nr dir ve m ayrıt sayısı olmak üzere nr=2m dir. O halde ayrıt sayısı m=nr/2 dir.

Tanım 2.1.8: $G_1 = (D_1, A_1)$ ile $G_2 = (D_2, A_2)$ grafları verilsin. Eğer D_1 den D_2 ye, bitişikliği koruyan, bire-bir örten bir ϕ dönüşümü varsa, yani; $uv \in A_1 \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in A_2$ oluyorsa, G_1grafı G_2 grafına **izomorftur** (isomorphic) denir ve $G_1 \cong G_2$ yazılır. Buradaki ϕ dönüşümüne ise **izomorfizm** (isomorphism) adı verilir.

İzomorf olma, graflar üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Onun için bu bağıntı, bütün grafları denklik sınıflarına ayırır. İzomorf olmayan iki graf, farklı denklik sınıflarına aittir.

Eğer $G_1 \cong G_2$ ise, tanımdan dolayı bir $\phi : D_1 \to D_2$ dönüşümü vardır. ϕ dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan G_1 ile G_2 nin mertebeleri aynıdır. G_1 deki bitişik düğümler, G_2 deki bitişik düğümlere; G_1 deki bitişik olmayan düğümler, G_2 deki bitişik olmayan düğümlere gönderildiğinden G_1 ile G_2 nin boyutları da aynıdır. Ayrıca G_1 deki her bir v düğümünün derecesi ile onun G_2 deki görüntüsü olan $\phi(v)$ düğümünün derecesinin aynı olması gerekir. Bu nedenle G_1 in düğümlerinin dereceleri ile G_2 nin düğümlerinin dereceleri aynıdır. Tüm bu koşullar G_1 ile G_2 nin izomorf olması için gereklidir fakat yeterli değildir.



Şekil 2.6

Örneğin Şekil 2.6 daki G_1, G_2 ve G_3 grafları göz önüne alınırsa, bu graflar birer (6,9) grafıdır ve her birinin derecesi 3 tür. Burada $G_1 \cong G_2$ dir. Mesela, $\phi(d_1) = d_1$, $\phi(d_2) = d_3$, $\phi(d_3) = d_5$, $\phi(d_4) = d_2$, $\phi(d_5) = d_4$, $\phi(d_6) = d_6$ biçiminde tanımlanan $\phi : D_1 \rightarrow D_2$ dönüşümü bir izomorfizmdir. G_3 grafı ikişer ikişer bitişik üç düğüm (üçgen) içerirken G_1 için böyle bir durum söz konusu değildir. Bu nedenle G_1 den G_3 e bir izomorfizm yoktur. O halde G_1 grafı ile G_3 grafı izomorf değildir. Aynı düşünceyle G_2 grafı ile G_3 grafı izomorf değildir.

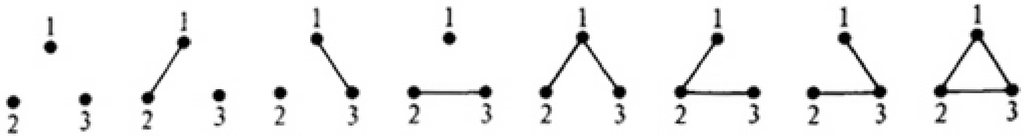
Sayılabilir Graflar (Counting Graphs)

C_8H_{18} formülüne sahip kaç tane molekül vardır? Dört kanal ile beş yerleşme birimini birleştiren kaç tane sulama kanal sistemi vardır? Mimaride verilen belli özellikleri sağlayan kaç tane yer planı vardır?

Bu tür problemler graflara uyarlanarak çözülebilir.

Etiketli Grafların Sayılması

n düğümlü etiketli yalın grafların sayısını belirlemek problemi kolaydır. Yardımcı Teorem 1.1.1' in 3. sonucundan $\frac{n(n-1)}{2}$ sayıda ayrıt vardır. Ayrıtların her biri için iki seçim mümkündür. Mevcuttur ya da değildir. O halde etiketli grafların sayısı $2^{n(n-1)/2}$ dir.



Şekil 2.7

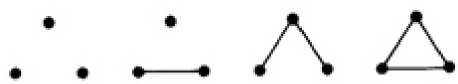
Aşağıdaki tablo n düğümlü ($n \prec 8$ için) etiketli grafların sayısını vermektedir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
etiketli graflar	1	2	8	64	1024	32768	2097152	268435456

Tablo 2.1

Etiketli Olmayan Grafların Sayılması

Aşağıdaki şekilde 3 düğümlü etiketli olmayan ve izomorf olmayan graflar verilmektedir.



Şekil 2.8

Aşağıdaki tablo, n düğümlü ($n \prec 8$ için) etiketli olmayan grafların sayısını vermektedir. Bu tabladaki değerler bilgisayarla hesaplanmıştır. Bir formülü yoktur.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
graflar	1	2	4	11	34	156	1044	12346
bağlantılı graflar	1	1	2	6	21	112	853	11117
regüler graflar	1	2	2	4	3	8	6	20

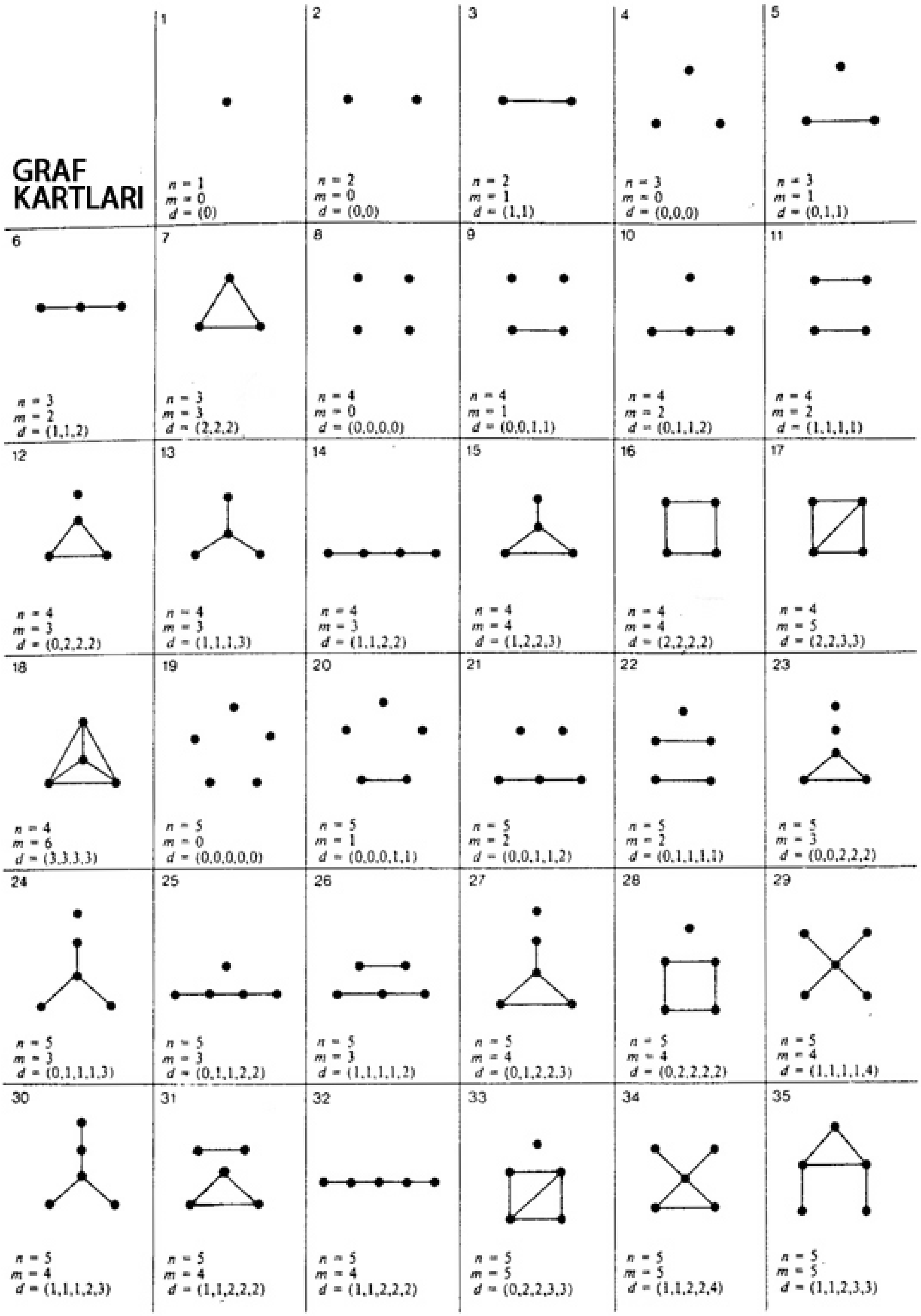
Tablo 2.2

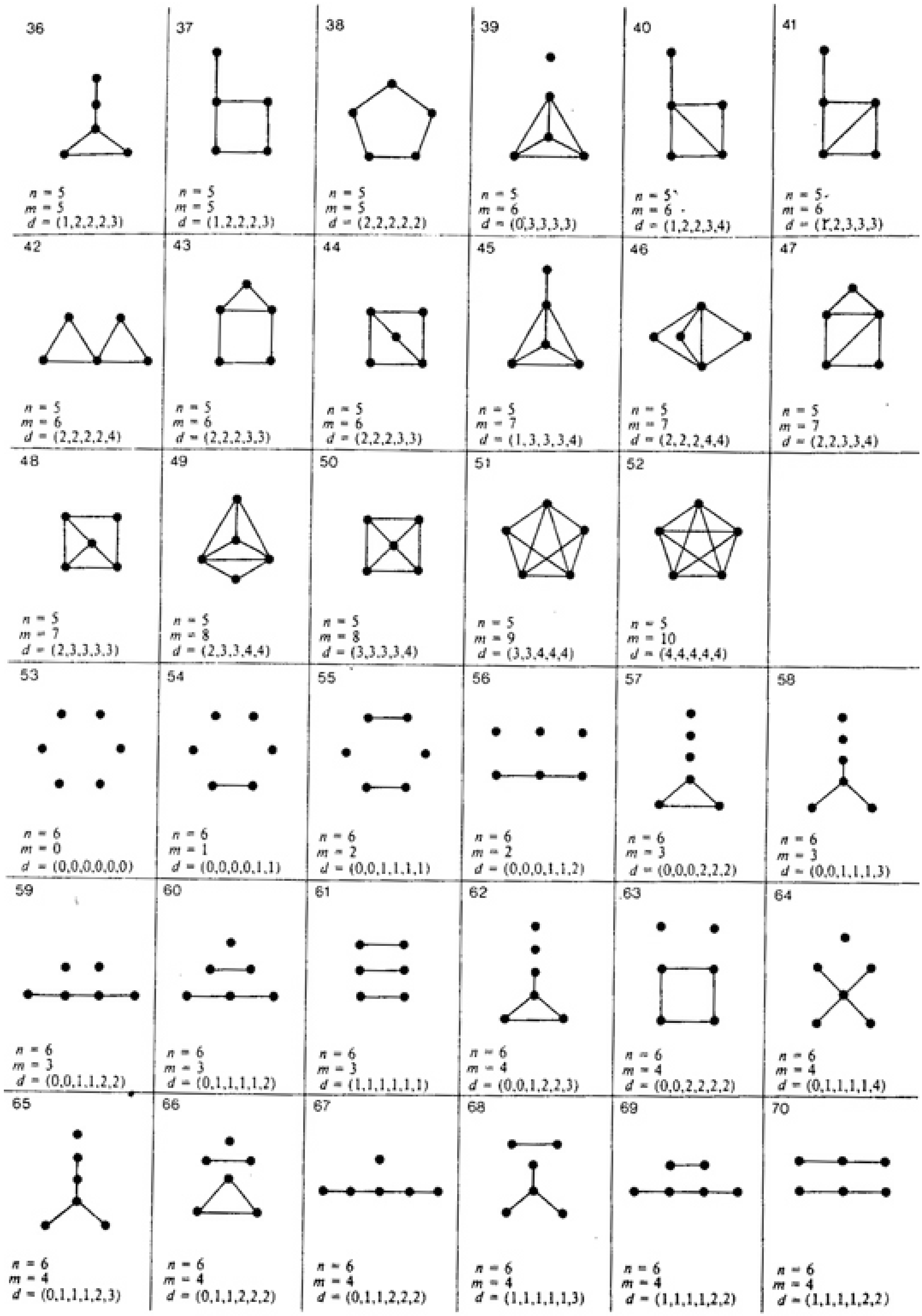
Graf Kartları

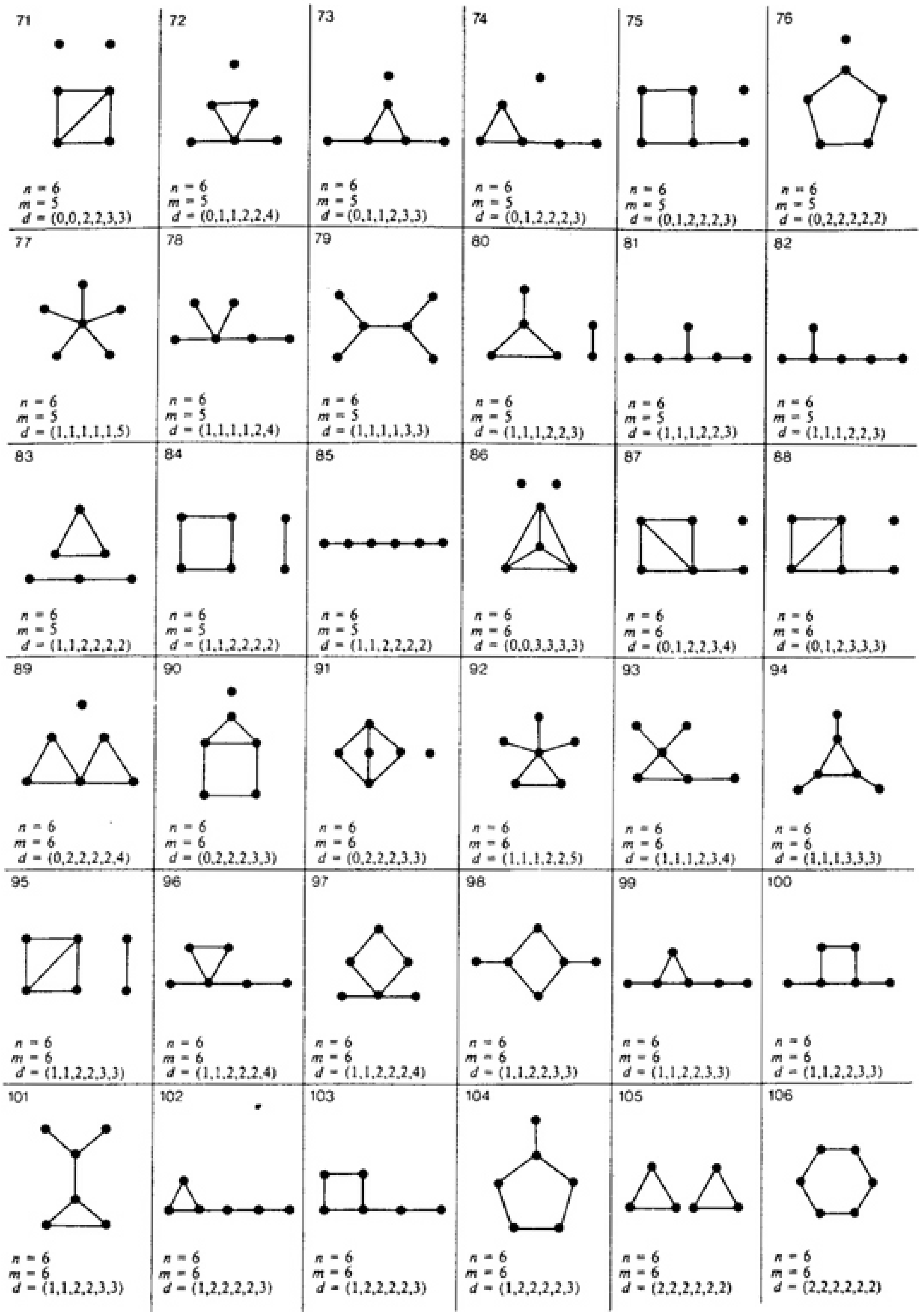
Aşağıda en fazla 6 düğümlü graflardan oluşan graf kartları verilmektedir.

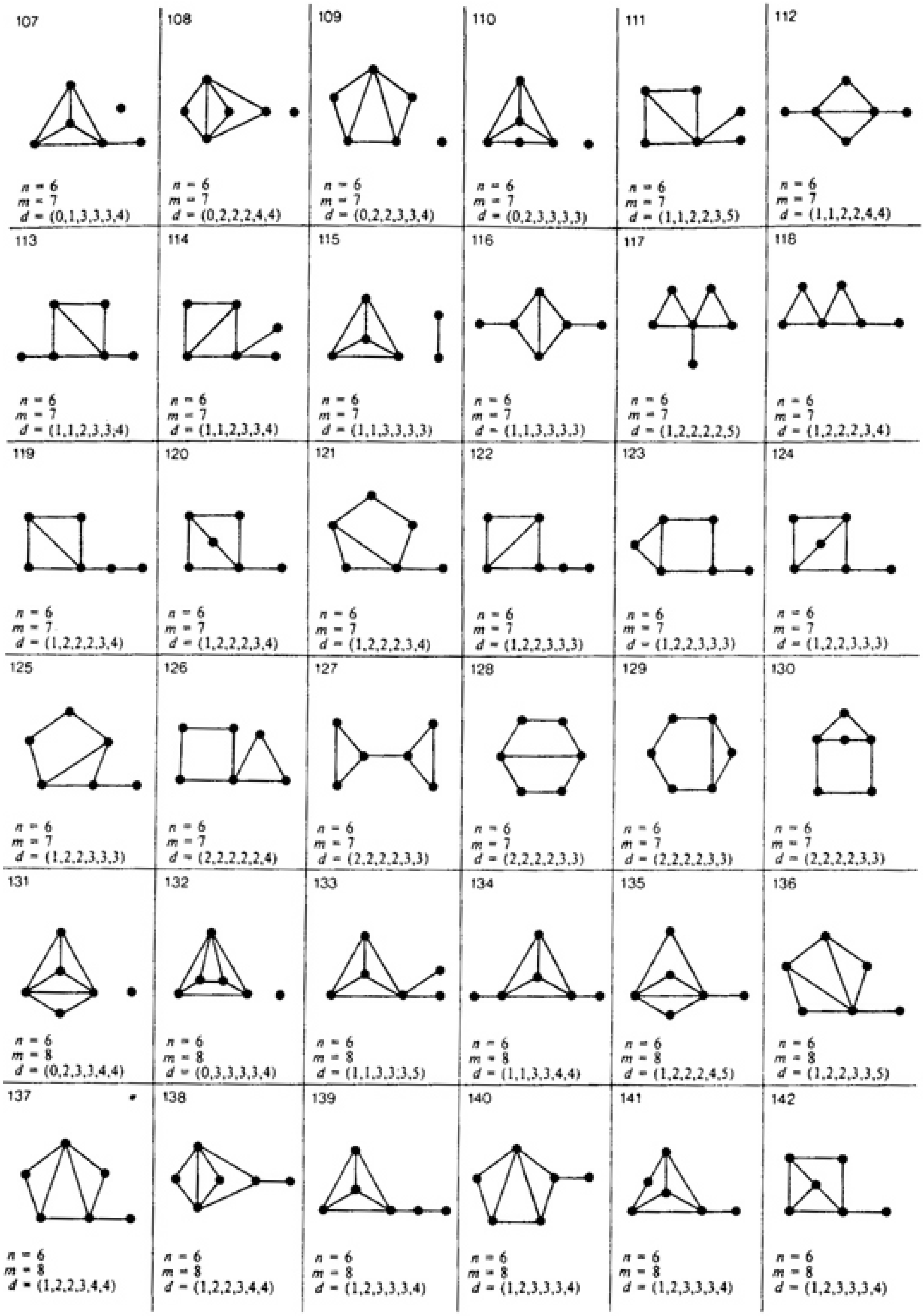
Buradaki her kartın bir numarası vardır ve toplam 208 tane kart vardır. Her kartta bir grafın düğüm sayısı; n, ayrıt sayısı; m, derece dizisi ve grafın çizilişi verilmektedir.

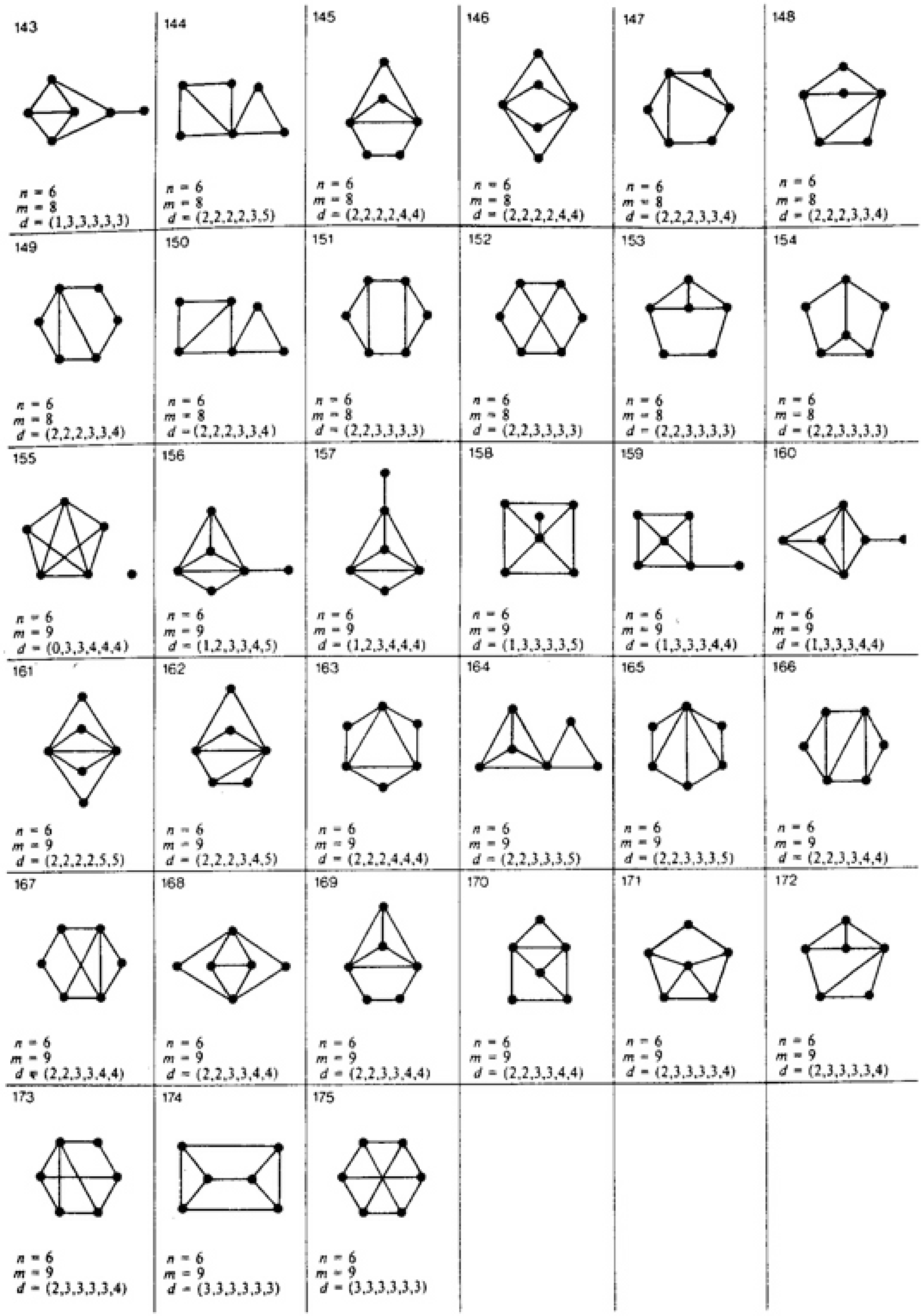
Kartlar grafların düğüm sayılarına, daha sonra ayrıt sayılarına (eğer düğüm sayıları aynı ise), daha sonra da derece dizilerine (eğer düğüm ve ayrıt sayıları aynı ise) göre artan sırada hazırlanmıştır.


GRAF KARTLARI
1 n = 1 m = 0 d = (0)
2 n = 2 m = 0 d = (0,0)
3 n = 2 m = 1 d = (1,1)
4 n = 3 m = 0 d = (0,0,0)
5 n = 3 m = 1 d = (0,1,1)
6 n = 3 m = 2 d = (1,1,2)
7 n = 3 m = 3 d = (2,2,2)
8 n = 4 m = 0 d = (0,0,0,0)
9 n = 4 m = 1 d = (0,0,1,1)
10 n = 4 m = 2 d = (0,1,1,2)
11 n = 4 m = 2 d = (1,1,1,1)
12 n = 4 m = 3 d = (0,2,2,2)
13 n = 4 m = 3 d = (1,1,1,3)
14 n = 4 m = 3 d = (1,1,2,2)
15 n = 4 m = 4 d = (1,2,2,3)
16 n = 4 m = 4 d = (2,2,2,2)
17 n = 4 m = 5 d = (2,2,3,3)
18 n = 4 m = 6 d = (3,3,3,3)
19 n = 5 m = 0 d = (0,0,0,0,0)
20 n = 5 m = 1 d = (0,0,0,1,1)
21 n = 5 m = 2 d = (0,0,1,1,2)
22 n = 5 m = 2 d = (0,1,1,1,1)
23 n = 5 m = 3 d = (0,0,2,2,2)
24 n = 5 m = 3 d = (0,1,1,1,3)
25 n = 5 m = 3 d = (0,1,1,2,2)
26 n = 5 m = 3 d = (1,1,1,1,2)
27 n = 5 m = 4 d = (0,1,2,2,3)
28 n = 5 m = 4 d = (0,2,2,2,2)
29 n = 5 m = 4 d = (1,1,1,1,4)
30 n = 5 m = 4 d = (1,1,1,2,3)
31 n = 5 m = 4 d = (1,1,2,2,2)
32 n = 5 m = 4 d = (1,1,2,2,2)
33 n = 5 m = 5 d = (0,2,2,3,3)
34 n = 5 m = 5 d = (1,1,2,2,4)
35 n = 5 m = 5 d = (1,1,2,3,3)


36
n = 5
m = 5
d = (1,2,2,2,3)
37
n = 5
m = 5
d = (1,2,2,2,3)
38
n = 5
m = 5
d = (2,2,2,2,2)
39
n = 5
m = 6
d = (0,3,3,3,3)
40
n = 5
m = 6
d = (1,2,2,3,4)
41
n = 5
m = 6
d = (1,2,3,3,3)
42
n = 5
m = 6
d = (2,2,2,2,4)
43
n = 5
m = 6
d = (2,2,2,3,3)
44
n = 5
m = 6
d = (2,2,2,3,3)
45
n = 5
m = 7
d = (1,3,3,3,4)
46
n = 5
m = 7
d = (2,2,2,4,4)
47
n = 5
m = 7
d = (2,2,3,3,4)
48
n = 5
m = 7
d = (2,3,3,3,3)
49
n = 5
m = 8
d = (2,3,3,4,4)
50
n = 5
m = 8
d = (3,3,3,3,4)
51
n = 5
m = 9
d = (3,3,4,4,4)
52
n = 5
m = 10
d = (4,4,4,4,4)
53
n = 6
m = 0
d = (0,0,0,0,0,0)
54
n = 6
m = 1
d = (0,0,0,0,1,1)
55
n = 6
m = 2
d = (0,0,1,1,1,1)
56
n = 6
m = 2
d = (0,0,0,1,1,2)
57
n = 6
m = 3
d = (0,0,0,2,2,2)
58
n = 6
m = 3
d = (0,0,1,1,1,3)
59
n = 6
m = 3
d = (0,0,1,1,2,2)
60
n = 6
m = 3
d = (0,1,1,1,1,2)
61
n = 6
m = 3
d = (1,1,1,1,1,1)
62
n = 6
m = 4
d = (0,0,1,2,2,3)
63
n = 6
m = 4
d = (0,0,2,2,2,2)
64
n = 6
m = 4
d = (0,1,1,1,1,4)
65
n = 6
m = 4
d = (0,1,1,1,2,3)
66
n = 6
m = 4
d = (0,1,1,2,2,2)
67
n = 6
m = 4
d = (0,1,1,2,2,2)
68
n = 6
m = 4
d = (1,1,1,1,1,3)
69
n = 6
m = 4
d = (1,1,1,1,2,2)
70
n = 6
m = 4
d = (1,1,1,1,2,2)

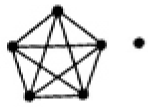

71
n = 6
m = 5
d = (0,0,2,2,3,3)
72
n = 6
m = 5
d = (0,1,1,2,2,4)
73
n = 6
m = 5
d = (0,1,1,2,3,3)
74
n = 6
m = 5
d = (0,1,2,2,2,3)
75
n = 6
m = 5
d = (0,1,2,2,2,3)
76
n = 6
m = 5
d = (0,2,2,2,2,2)
77
n = 6
m = 5
d = (1,1,1,1,1,5)
78
n = 6
m = 5
d = (1,1,1,1,2,4)
79
n = 6
m = 5
d = (1,1,1,1,3,3)
80
n = 6
m = 5
d = (1,1,1,2,2,3)
81
n = 6
m = 5
d = (1,1,1,2,2,3)
82
n = 6
m = 5
d = (1,1,1,2,2,3)
83
n = 6
m = 5
d = (1,1,2,2,2,2)
84
n = 6
m = 5
d = (1,1,2,2,2,2)
85
n = 6
m = 5
d = (1,1,2,2,2,2)
86
n = 6
m = 6
d = (0,0,3,3,3,3)
87
n = 6
m = 6
d = (0,1,2,2,3,4)
88
n = 6
m = 6
d = (0,1,2,3,3,3)
89
n = 6
m = 6
d = (0,2,2,2,2,4)
90
n = 6
m = 6
d = (0,2,2,2,3,3)
91
n = 6
m = 6
d = (0,2,2,2,3,3)
92
n = 6
m = 6
d = (1,1,1,2,2,5)
93
n = 6
m = 6
d = (1,1,1,2,3,4)
94
n = 6
m = 6
d = (1,1,1,3,3,3)
95
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,3,3)
96
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,2,4)
97
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,2,4)
98
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,3,3)
99
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,3,3)
100
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,3,3)
101
n = 6
m = 6
d = (1,1,2,2,3,3)
102
n = 6
m = 6
d = (1,2,2,2,2,3)
103
n = 6
m = 6
d = (1,2,2,2,2,3)
104
n = 6
m = 6
d = (1,2,2,2,2,3)
105
n = 6
m = 6
d = (2,2,2,2,2,2)
106
n = 6
m = 6
d = (2,2,2,2,2,2)


107
n = 6
m = 7
d = (0,1,3,3,3,4)
108
n = 6
m = 7
d = (0,2,2,2,4,4)
109
n = 6
m = 7
d = (0,2,2,3,3,4)
110
n = 6
m = 7
d = (0,2,3,3,3,3)
111
n = 6
m = 7
d = (1,1,2,2,3,5)
112
n = 6
m = 7
d = (1,1,2,2,4,4)
113
n = 6
m = 7
d = (1,1,2,3,3;4)
114
n = 6
m = 7
d = (1,1,2,3,3,4)
115
n = 6
m = 7
d = (1,1,3,3,3,3)
116
n = 6
m = 7
d = (1,1,3,3,3,3)
117
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,2,2,5)
118
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,2,3,4)
119
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,2,3,4)
120
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,2,3,4)
121
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,2,3,4)
122
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,3,3,3)
123
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,3,3,3)
124
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,3,3,3)
125
n = 6
m = 7
d = (1,2,2,3,3,3)
126
n = 6
m = 7
d = (2,2,2,2,2,4)
127
n = 6
m = 7
d = (2,2,2,2,3,3)
128
n = 6
m = 7
d = (2,2,2,2,3,3)
129
n = 6
m = 7
d = (2,2,2,2,3,3)
130
n = 6
m = 7
d = (2,2,2,2,3,3)
131
n = 6
m = 8
d = (0,2,3,3,4,4)
132
n = 6
m = 8
d = (0,3,3,3,3,4)
133
n = 6
m = 8
d = (1,1,3,3;3,5)
134
n = 6
m = 8
d = (1,1,3,3,4,4)
135
n = 6
m = 8
d = (1,2,2,2,4,5)
136
n = 6
m = 8
d = (1,2,2,3,3,5)
137
n = 6
m = 8
d = (1,2,2,3,4,4)
138
n = 6
m = 8
d = (1,2,2,3,4,4)
139
n = 6
m = 8
d = (1,2,3,3,3,4)
140
n = 6
m = 8
d = (1,2,3,3,3,4)
141
n = 6
m = 8
d = (1,2,3,3,3,4)
142
n = 6
m = 8
d = (1,2,3,3,3,4)



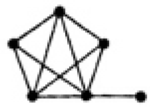
143
n = 6
m = 8
d = (1,3,3,3,3,3)
144
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,2,3,5)
145
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,2,4,4)
146
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,2,4,4)
147
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,3,3,4)
148
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,3,3,4)
149
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,3,3,4)
150
n = 6
m = 8
d = (2,2,2,3,3,4)
151
n = 6
m = 8
d = (2,2,3,3,3,3)
152
n = 6
m = 8
d = (2,2,3,3,3,3)
153
n = 6
m = 8
d = (2,2,3,3,3,3)
154
n = 6
m = 8
d = (2,2,3,3,3,3)
155
n = 6
m = 9
d = (0,3,3,4,4,4)
156
n = 6
m = 9
d = (1,2,3,3,4,5)
157
n = 6
m = 9
d = (1,2,3,4,4,4)
158
n = 6
m = 9
d = (1,3,3,3,3,5)
159
n = 6
m = 9
d = (1,3,3,3,4,4)
160
n = 6
m = 9
d = (1,3,3,3,4,4)
161
n = 6
m = 9
d = (2,2,2,2,5,5)
162
n = 6
m = 9
d = (2,2,2,3,4,5)
163
n = 6
m = 9
d = (2,2,2,4,4,4)
164
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,3,5)
165
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,3,5)
166
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,4,4)
167
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,4,4)
168
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,4,4)
169
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,4,4)
170
n = 6
m = 9
d = (2,2,3,3,4,4)
171
n = 6
m = 9
d = (2,3,3,3,3,4)
172
n = 6
m = 9
d = (2,3,3,3,3,4)
173
n = 6
m = 9
d = (2,3,3,3,3,4)
174
n = 6
m = 9
d = (3,3,3,3,3,3)
175
n = 6
m = 9
d = (3,3,3,3,3,3)

176



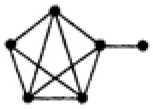
$n = 6$
$m = 10$
$d = (0,4,4,4,4,4)$

177



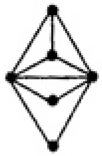
$n = 6$
$m = 10$
$d = (1,3,3,4,4,5)$

178



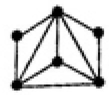
$n = 6$
$m = 10$
$d = (1,3,4,4,4,4)$

179



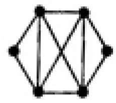
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,2,3,3,5,5)$

180



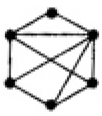
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,2,3,4,4,5)$

181



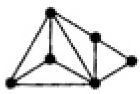
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,2,4,4,4,4)$

182



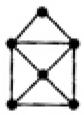
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,3,3,3,4,5)$

183



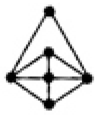
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,3,3,3,4,5)$

184



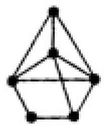
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,3,3,4,4,4)$

185



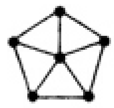
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,3,3,4,4,4)$

186



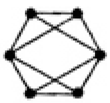
$n = 6$
$m = 10$
$d = (2,3,3,4,4,4)$

187



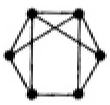
$n = 6$
$m = 10$
$d = (3,3,3,3,3,5)$

188



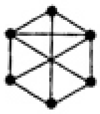
$n = 6$
$m = 10$
$d = (3,3,3,3,4,4)$

189



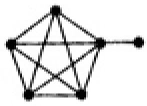
$n = 6$
$m = 10$
$d = (3,3,3,3,4,4)$

190



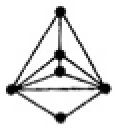
$n = 6$
$m = 10$
$d = (3,3,3,3,4,4)$

191



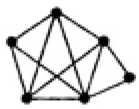
$n = 6$
$m = 11$
$d = (1,4,4,4,4,5)$

192



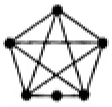
$n = 6$
$m = 11$
$d = (2,3,3,4,5,5)$

193



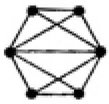
$n = 6$
$m = 11$
$d = (2,3,4,4,4,5)$

194



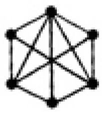
$n = 6$
$m = 11$
$d = (2,4,4,4,4,4)$

195



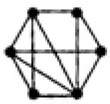
$n = 6$
$m = 11$
$d = (3,3,3,3,5,5)$

196



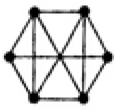
$n = 6$
$m = 11$
$d = (3,3,3,4,4,5)$

197



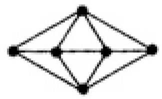
$n = 6$
$m = 11$
$d = (3,3,3,4,4,5)$

198



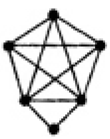
$n = 6$
$m = 11$
$d = (3,3,4,4,4,4)$

199



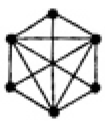
$n = 6$
$m = 11$
$d = (3,3,4,4,4,4)$

200



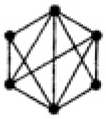
$n = 6$
$m = 12$
$d = (2,4,4,4,5,5)$

201



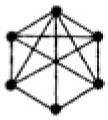
$n = 6$
$m = 12$
$d = (3,3,3,5,5,5)$

202



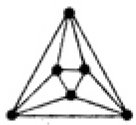
$n = 6$
$m = 12$
$d = (3,3,4,4,5,5)$

203



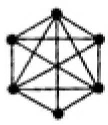
$n = 6$
$m = 12$
$d = (3,4,4,4,4,5)$

204



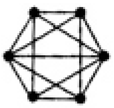
$n = 6$
$m = 12$
$d = (4,4,4,4,4,4)$

205



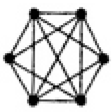
$n = 6$
$m = 13$
$d = (3,4,4,5,5,5)$

206



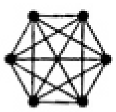
$n = 6$
$m = 13$
$d = (4,4,4,4,5,5)$

207



$n = 6$
$m = 14$
$d = (4,4,5,5,5,5)$

208



$n = 6$
$m = 15$
$d = (5,5,5,5,5,5)$

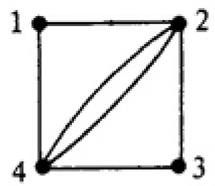
Tanım 2.1.9: $G(n,m)$ aşikâr olmayan bir graf, $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ olsun. k, d_i ve d_j düğümleri arasındaki ayrıt sayısı olsun.

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & d_i \text{ ile } d_j \text{ düğümleri bitişik ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisine **G nin bitişiklik matrisi** (adjacency matrix) denir

Bir grafın bitişiklik matrisi oluşturulurken matrisin satır ve sütun başlıklarına grafın düğümleri yazılır. Bitişiklik matrisi, birinci köşegen üzerindeki tüm girdileri sıfır olan bir matristir.

Aşağıdaki şekilde bir graf ve bu grafın bitişiklik matrisi verilmektedir.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \text{sütun } 1 & \text{sütun } 2 & \text{sütun } 3 & \text{sütun } 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{satır } 1 \rightarrow \\ \text{satır } 2 \rightarrow \\ \text{satır } 3 \rightarrow \\ \text{satır } 4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 2.9

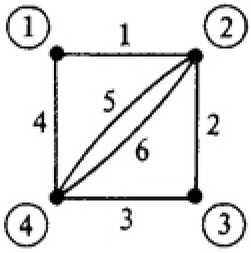
Tanım 2.1.10: $G(n,m)$ aşikâr olmayan bir graf, $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ olsun.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & d_i \text{ düğümü ile } a_j \text{ ayrıtı çakışık ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{B} = [b_{ij}]_{n \times m}$ matrisine **G nin çakışım matrisi** (incidence matrix) denir.

Çakışım matrisinde genelde matrisin satır başlıklarına grafın düğümleri ve sütun başlıklarına grafın ayrıtları yazılır.

Aşağıdaki şekilde bir graf ve bu grafın çakışım matrisi verilmektedir.



$$\begin{array}{c|cccccc} & \text{sütun } 1 & \text{sütun } 2 & \text{sütun } 3 & \text{sütun } 4 & \text{sütun } 5 & \text{sütun } 6 \\ \hline \text{satır } 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{satır } 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{satır } 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{satır } 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Şekil 2..10

Tanım 2.1.11: u ve z, bir G grafının herhangi iki düğümü olsunlar. G nin u düğümü ile başlayıp z düğümü ile biten (u,uv,v,vw,...,y,yz,z) şeklindeki sonlu dizisine **u-v dolaşısı** denir.

Dolaşıdaki ayrıt sayısı olan k ya **dolaşının uzunluğu** denir. Bir dolaşıda her ayrıtın ikinci düğümü, bir sonraki ayrıtın ilk düğümüdür.

Örneğin, u_v_w_x_y_w_v_z_z_y; u ile y arasında 9 uzunluğunda bir dolaşıdır. Bu dolaşı, vw ayrıtını iki kere içerir. v,w,y ve z düğümlerini de iki kere içerir.

Tanım 2.1.12: Eğer bir dolaşının bütün ayrıtları farklı ise, bu dolaşı **gezi** (**trail**) olarak adlandırılır. Burada bütün düğümlerin farklı olması zorunlu değildir. Bütün düğümlerde farklı ise bu geziye **yol** (**path**) denir.

Örneğin, v_z_z_y_w_x_y dolaşısı bir gezidir. Ancak yol değildir. Çünkü y ve z düğümleri iki kere tekrarlanmıştır. v_w_x_y_z dolaşısında hiç düğüm tekrar etmez, bu bir yoldur.

Tanım 2.1.13: Aynı düğümle başlayıp aynı düğümle biten dolaşıya **kapalı dolaşı** denir. Bütün ayrıtlar farklı ise, dolaşı **kapalı gezi** olarak adlandırılır. Hem bütün ayrıtlar, hem de bütün düğümler farklı ise bu gezi bir **çevrim** (**cycle**) olarak adlandırılır.

Örneğin, u_v,v_w,w_x,…,y_z,z_u dolaşısı kapalı dolaşıdır. u_v_w_y_v_z_u bir kapalı dolaşıdır ve bir kapalı gezidir ancak çevrim değildir, çünkü v düğümü iki kere tekrarlanır. z_z, v_w_x_y_v, v_w_x_y_z_v dolaşıları birer çevrimdir.

Üç uzunluğunda bir çevrim; örneğin, v_w_y_v veya w_x_y_w bir üçgen olarak adlandırılır.

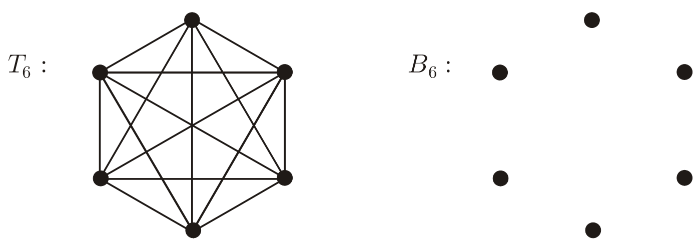
Kapalı dolaşılar tanımlarken herhangi bir düğüm başlangıç düğümü olarak alınabilir. Örneğin; bir v_w_y_v_ üçgen, w_y_v_w ya da y_v_w_y harfleriyle de tanımlanabilir (çünkü yön önemsizdir).

Tanım 2.1.14: G bir graf olsun. G nin verilen herhangi iki düğüm çifti arasında bir yol varsa G **bağlantılıdır** denir. Eğer G nin verilen iki düğüm çifti arasında bir yol yoksa G ye **bağlantısız graf** denir. Her bağlantısız graf, bağlantılı alt graflara ayrılabilir. Bunlara **bileşenler** denir.

Tanım 2.1.15: Düğümlerinin her ikisi bitişik olan grafa **tam graf** (complete graph) denir. n mertebeli bir tam graf, T_n ile gösterilir.

Bir tam graf, düğüm kümesi üzerinde tanımlanabilecek bütün ayrıtları bulundurur. Bu nedenle n mertebeli ve m boyutlu bir tam graf için $m = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$ eşitliği geçerlidir. Bir tam grafın her bir düğümü $n-1$ dereceli olup bu yüzden regüler bir graftır. Hiç ayrıt bulundurmayan graf da **boş graf** (null graph) olarak adlandırılır. n mertebeli bir boş graf B_n ile gösterilir.

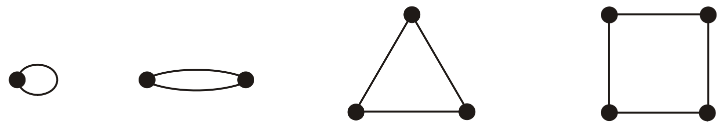
Aşağıdaki şekilde sırasıyla T_6 tam grafı ve B_6 boş grafı gösterilmiştir.



Şekil 2.11

Tanım 2.1.16: Bir tek çevrimden oluşan grafa **çevrim graf** (**cycle graph**) denir. n düğümlü çevrim graf C_n ile gösterilir. C_n ; n ayrıtlı, derecesi 2 olan regüler grafltır.

Aşağıdaki şekilde mertebesi 4 ve 4 ten az olan çevrim graflar verilmektedir.



C_1 C_2 C_3 C_4

Şekil 2.12

Tanım 2.1.17: Bir tek yoldan oluşan grafa **yol graf** (**path graph**) denir. n düğümlü bir yol graf P_n ile gösterilir.

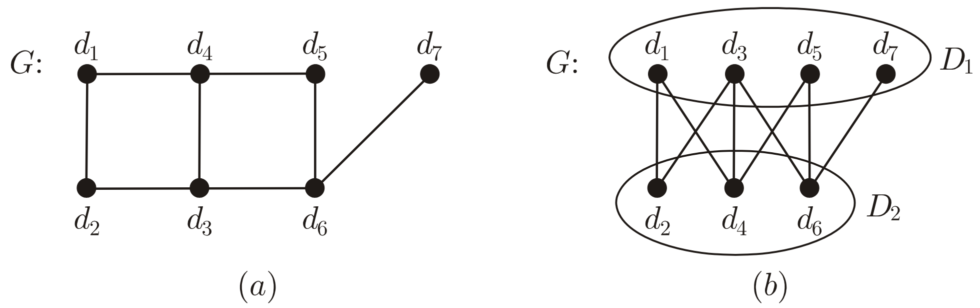
Aşağıdaki şekilde mertebesi 4 ve 4 ten az olan yol graflar verilmektedir.

P_1 P_2 P_3 P_4

Şekil 2.13

Tanım 2.1.19: Bir $G = (D,A)$ grafı verilsin. Eğer G nin düğümlerini $k \geq 1$tane, maksimum mertebeli hiç ayrıt kapsamayan ve ayrık kümeye ayırmak mümkünse G ye **k-kümeli graf** (k- partite graph) denir. k=2 ise özel olarak G ye **iki-kümeli graf** (bipartite graph) adı verilir.

İki-kümeli graflar, grafların önemli türlerindendir ve sık karşılaşılır. Kümeleri D_1 ve D_2 olan iki kümeli graflar, $|D_1| = r$ ve $|D_2| = s$ olmak üzere $I_{r,s}$ ile gösterilir. Aşağıdaki şekil (a) da iki-kümeli bir graf verilmiş ve bu grafın iki-kümeli oluşunun kolayca görülebilmesi için (b) de yeniden düzenlenmiştir. Verilen grafın kümeleri $D_1 = \{d_1, d_3, d_5, d_7\}$ ve $D_2 = \{d_2, d_4, d_6\}$dır. O halde $|D_1| = 4$ ve $|D_2| = 3$ olduğundan G grafı bir $I_{4,3}$ grafıdır.



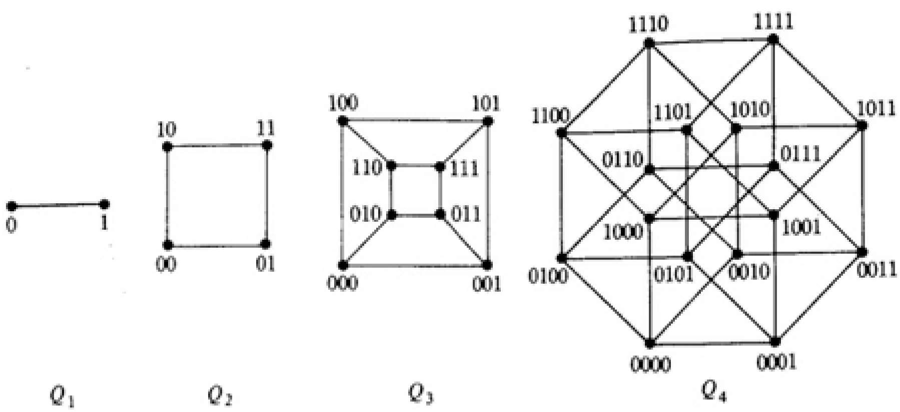
Şekil 2.14

$G = (D,A)$, kümeleri $D_1, D_2, \ldots, D_k$ olan k-kümeli bir graf olsun. Eğer $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\ldots,k)$ olmak üzere $u \in D_i$ ve $v \in D_j$ için $uv \in A$ oluyorsa G ye k-**kümeli tam graf** adı verilir. $|D_i| = n_i$ için bu graf $I_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ ile gösterilir.

Kümeleri D_1 ve D_2 olan iki-kümeli tam graf, $|D_1| = r$ ve $|D_2| = s$ olmak üzere $I_{r,s}$ ile gösterilir. $I_{1,5}$ grafı **yıldız** (star) olarak adlandırılır.

Eğer bir G grafı birkaç $k \geqslant 3$ değeri için k-kümeli tam graf oluyorsa G ye, **çok-kümeli graf** (multipartite graph) adı verilir.

Tanım 2.1.20: Düğümleri bütün çift kelimelerden seçilerek oluşturulan k uzunluğundaki grafa **k- küp** (**k- cube**) **graf** denir ve Q_k ile gösterilir. $Q_k = Q_{k-1} * T_2$, $k \geqslant 2$, $Q_1 = T_2$ şeklinde tanımlanabilir. Bu grafların kod teoride önemli uygulamaları vardır. Aşağıdaki şekilde küp graf örnekleri verilmektedir.



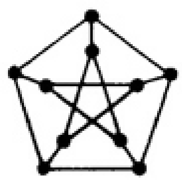
Şekil 2.15

Q_k nın 2k tane düğümü vardır ve düğümlerin dereceleri k dır. (Yardımcı teorem 1.1.1 sonuç 3 ten Q_k nın $k \times 2^{k-1}$ tane ayrıtı vardır.)

Tanım 2.1.21: Bir G grafı verilsin. G nin her bir düğümünün derecesi 3 ise yani G grafı için $deg(d_i) = 3,\ (i = 1,2,\ldots,n)$ ise grafa, **3-regüler graf** denir.

3-regüler graflar **kübik graf** olarak adlandırılırlar. Aşağıdaki şekilde verilen petersen grafı kübik grafa örnek olarak gösterilebilir.

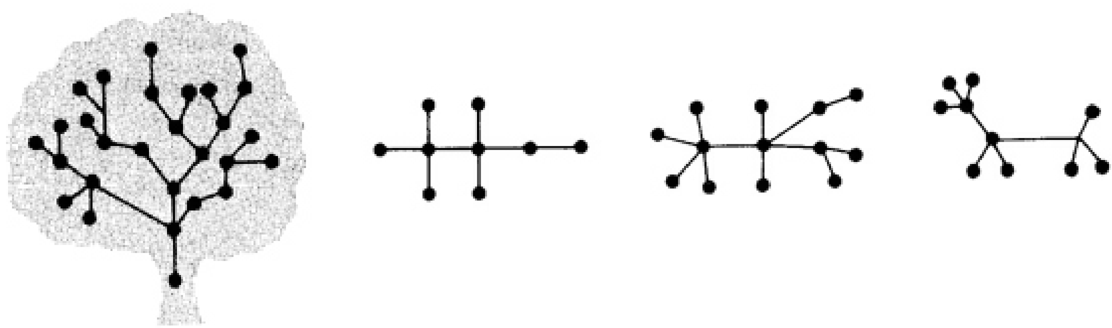
Petersen graflar Julius Petersan (1839-1910) tarafından bulunmuştur.



Şekil 2.16

Tanım2.1.22: Hiç çevrim içermeyen bağlantılı graflara **ağaç** denir.

Aşağıdaki şekilde ağaç örnekleri verilmektedir.



Şekil 2.17

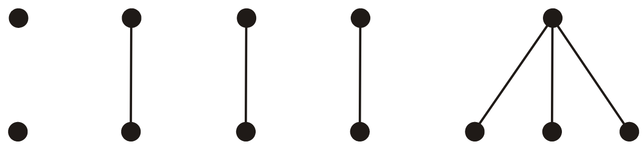
Tanım 2.1.23: G bir yalın graf olsun. G nin düğüm kümesi göz önüne alınıp, G de bitişik olmayan iki düğüm bir ayrıt ile birleştirilerek ve G nin ayrıtları atılarak oluşturulan grafa **G nin tamlayanı** denir. G de bitişik olan düğümler G nin tamlayanında bitişik değildir. G nin tamlayanında bitişik olmayan düğümler G de bitişiktir.

Örneğin; aşağıdaki şekilde bir graf ve bu grafın tamlayanı verilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi birinci grafta bitişik olan düğümler ikinci grafta bitişik değildirler.

Şekil 2.18

Tanım 2.1.24: $G_1 = (D_1, A_1)$ ve $G_2 = (D_2, A_2)$ olmak üzere $G_1 \cup G_2$ birleşim işlemi, düğüm kümesi $D_1 \cup D_2$ ve ayrıt kümesi $A_1 \cup A_2$ olan graf olarak tanımlanır. Bir G grafı H grafının $k \geq 2$ tane kopyasından oluşuyorsa $G = kH$ yazılır.

Aşağıdaki şekilde $2T_1 \cup 3T_2 \cup T_{1,3}$ grafı gösterilmiştir.



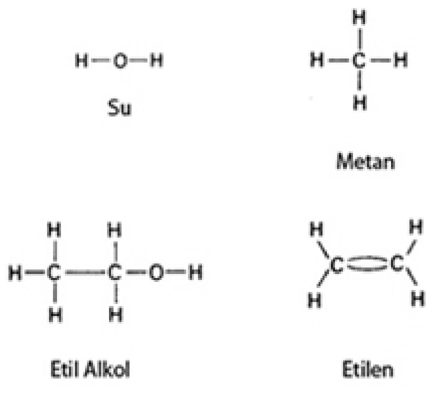
Şekil 2.19

2.2 Grafların Uygulama Alanları

Bu bölümde grafların kullanıldığı bazı alanlar hakkında bilgi verilmektedir. Grafların, kimya, sosyal bilimler, ağaçlar, destekleyici dörtgensel karkaslar gibi alanlarda nasıl uygulanabildiğinden bahsedilmektedir. Ayrıca uyumlu graflar ile aralık grafların kullanım alanlarından söz edilmektedir. Buradaki örnekler; trafik lambaları, radyo frekansları, arkeoloji, psikoloji, klasik çalışmalar, genetik ve ekolojidir. Bu bölümde dört küp problemine de yer verilmiştir.

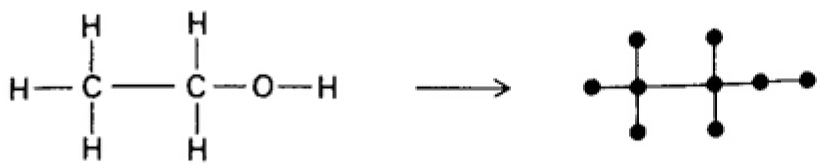
2.2.1 Kimya

Bir kimyasal molekül, kimyasal bağlarla bağlanan bir dizi atomlardan oluşur. Örneğin, bir H_2O (su) molekülü, bir oksijen atomu ile bağlı iki hidrojen atomundan oluşur. Bir kimyasal moleküldeki atomlar bir grafın düğümleri, bu atomları birbirine bağlayan kimyasal bağlar da bir grafın ayrıtları olarak düşünülebilir. Böylece kimyasal moleküller graflarla temsil edilebilir. Aşağıdaki şekilde su, metil alkol, etil alkol ve etilen moleküllerinin graflarla nasıl ifade edilebileceği gösterilmiştir.



Şekil 2.20

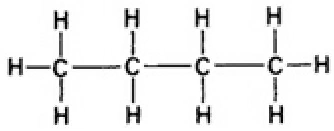
Şekil 2.20 de bir kimyasal molekülün bir grafla nasıl temsil edilebileceği gösterilmektedir. Bu örnekte; kimyasal molekülün atomları düğümlerle, bu atomları birleştiren kimyasal bağlar da ayrıtlarla ifade edilmiştir. Örneğin ; C_2H_5OH (etil alkol) molekülü aşağıdaki gibi bir grafla ifade edilebilir.



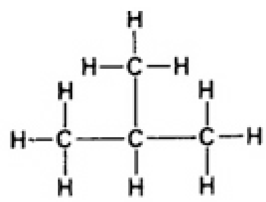
Şekil 2.21

Bu şekilde oluşturulan bir grafta, her düğümün derecesi; grafın temsil ettiği kimyasal moleküldeki atomun değerliğine karşılık gelmektedir. Örneğin; etil alkol molekülünde karbon düğümlerinin her birinin derecesi 4, oksijen düğümünün derecesi 2 ve hidrojen düğümlerinin her birinin derecesi 1 dir.

Yukarıdaki tarz diyagramlar ilk olarak 1864 yılında bir moleküldeki atomların düzenini göstermek için kullanılmıştır. Bunlar Alexander Crum Brown (1838-1922) tarafından bulunmuştur. Alexander Crum Brown ilk olarak *izomer* kavramını tanımlamıştır. *İzomer;* aynı kimyasal formüle sahip olan fakat farklı kimyasal özellikler gösteren molekül anlamına gelmektedir. Örneğin; n-bütan ve 2-metil propan moleküllerinin her ikisinin de kimyasal molekülü C_4H_{10} dur. Bu moleküller; bütan ve izobütan olarak adlandırılır.



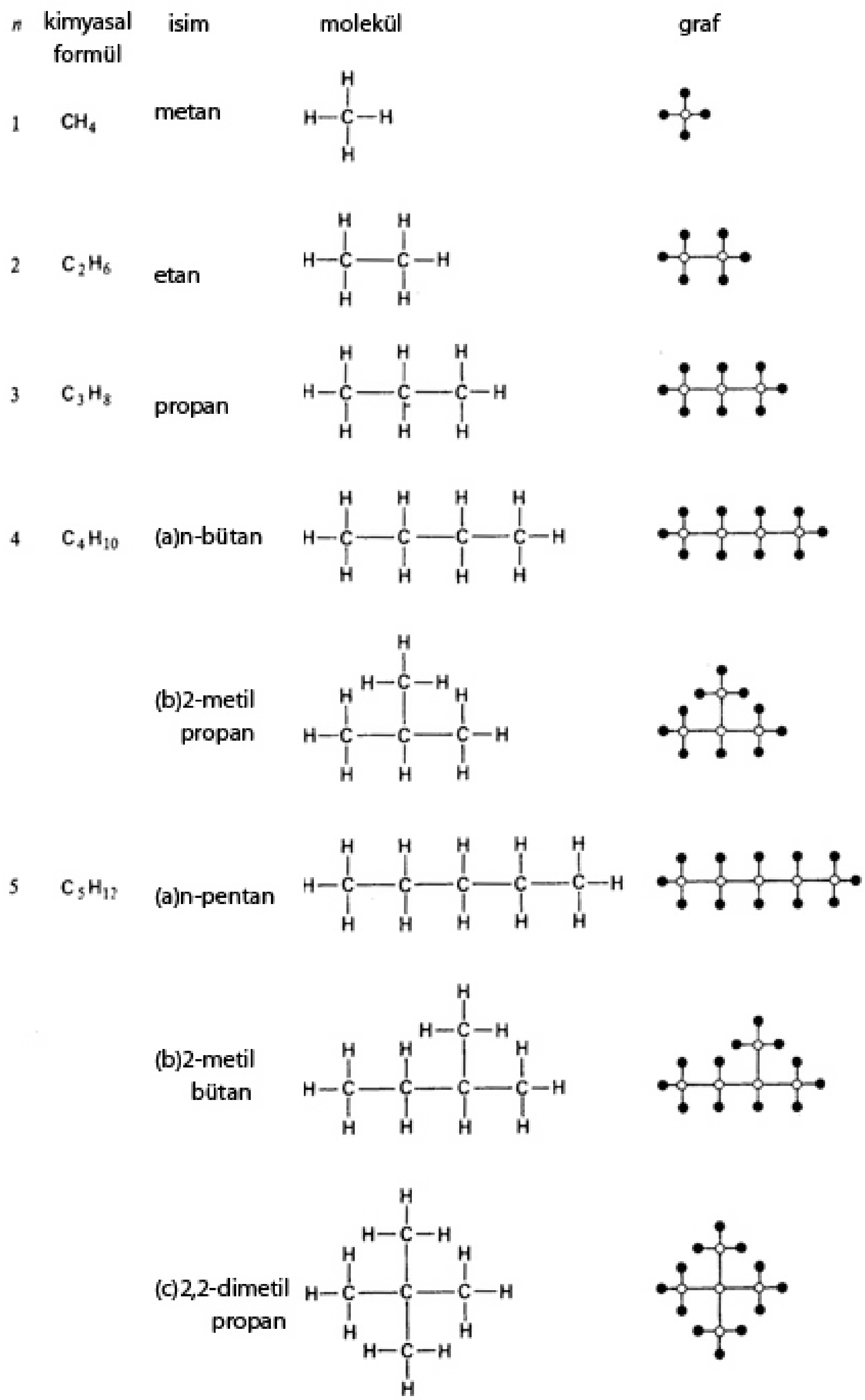
n-bütan



2-metil propan

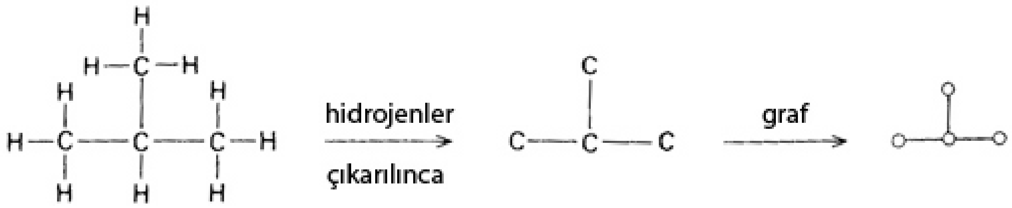
Şekil 2.22

C_4H_{10} formülüne sahip başka moleküller var mıdır? diye sormak çok doğaldır. Söz konusu problem; verilen bir kimyasal formüle sahip farklı moleküllerin sayısının belirlenmesi problemidir. Bu tarzdaki en ünlü problem, C_nH_{2n+2} formülündeki alkanların (parafinler) sayılmasıdır. Küçük n değerleri için bir tablo oluşturulabilir. Bu tabloda karbon düğümleri küçük yuvarlaklarla hidrojen düğümleri de siyah damlalarla gösterilmiştir. Aşağıda verilen tabloda kartta C_nH_{2n+2} formülüne sahip kimyasal moleküller ve bu molekülleri ifade eden graflar verilmektedir.


n
kimyasal formül
isim
molekül
graf
1
CH_4
metan
2
C_2H_6
etan
3
C_3H_8
propan
4
C_4H_{10}
(a)n-bütan
(b)2-metil propan
5
C_5H_{12}
(a)n-pentan
(b)2-metil bütan
(c)2,2-dimetil propan

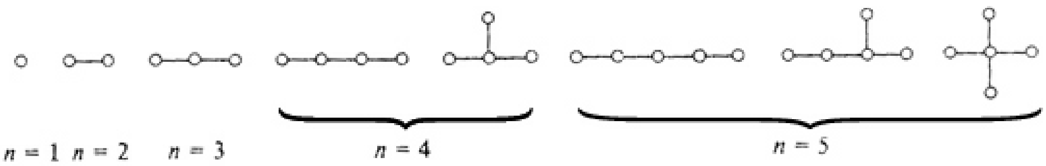
Şekil 2.23

n büyüdükçe bu diyagramlar çok komplike bir hal alacaktır. Hidrojen atomları kaldırılarak bu diyagramlar basitleştirilebilir.



Şekil 2.24

Şekil 2.25 te n=1, n=2, n=3, n=4 ve n=5 düğümlü karbon grafları verilmektedir.



Şekil 2.25

Bu karbon graflarının her biri; her düğümünün derecesi 4 ya da daha az olan ağaçlardır. Bu özelliğe sahip verilen herhangi bir ağaca her karbon atomunun derecesini 4'ün üzerine çıkaracak şekilde hidrojen atomları ekleyerek bir alkan oluşturulabilir.

Aşağıdaki tabloda en fazla 15 karbon atomuna sahip alkanların sayısı verilmektedir.

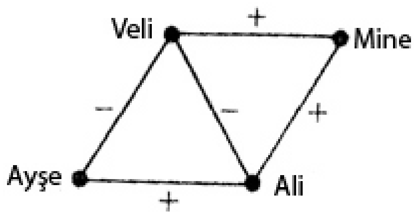
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
alkanlar C_nH_{2n+2}	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355	802	1858	4347

Tablo 2.3

2.2.2 Sosyal Bilimler

Graflar sosyal bilimlerde kişisel ilişkileri göstermek için kullanılır. Düğümler bir grup ya da toplumdaki kişileri ifade eder, ayrıtlarda birbiri ile ilişkili kişileri birleştirir. Örneğin; eğer x ve y'nin ilişkileri iyiyse veya kötüyse, x ile y aynı fikirdeyse, x, y'den çekiniyorsa, x ile y iletişim kuruyorsa x ile y birleştirilir. Bu bölümde ilişkilerin simetrik olduğunu kabul edeceğiz (x ve y'nin ilişkileri iyiyse, y ve x'in ilişkileri de iyidir gibi). Simetrik olmayan ilişkiler daha sonra ele alınacaktır.

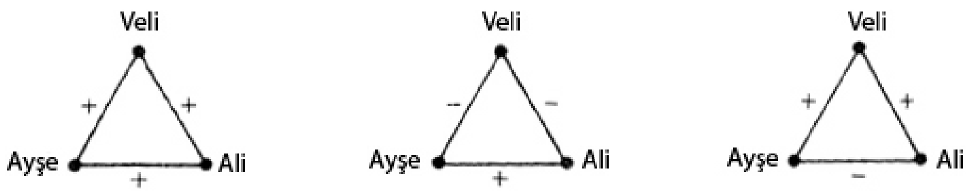
Graflar; ulusal ilişkileri göstermek için politik bilimciler tarafından kullanılmıştır. Bu durumda; düğümler milletleri ya da millet gruplarını ifade eder. Ayrıtlarda müttefik olan, diplomatik ilişkiler kuran ya da özel stratejiler üzerinde anlaşan milletleri birleştirir. İşaretli graf konseptini kullanarak bazı durumlarda olabilecek mümkün gerilimler analiz edilebilir. Pozitif ilişkileri (iyi ilişkiler kurmak, aynı fikirde olmak v.b) ifade etmek için ayrıtların üzerine + işareti konur. Negatif ilişkileri (iyi anlaşmamak, aynı fikirde olmamak v.b) ifade etmek için ise ayrıtların üzerinde - işareti kullanılır. Örneğin; aşağıdaki işaretli grafta; Ayşe, Ali ile iyi anlaşır ama Veli ile anlaşamaz. Ali, Ayşe ve Mine ile iyi anlaşır. Veli ile anlaşamaz. Ayşe ve Mine'nin karşılıklı güçlü bir ilişkileri yoktur. Ayşe ve Mine graf temsilinde bir düğüm olarak düşünüldüğünde ilişkileri olmadığı için bir ayrıtla bitişik değildirler.



Şekil 2.26

Bir iş yerindeki ilişkileri incelemek ve çalışanların arasındaki gerilimi göz önüne alarak en uygun çalışma ortamını hazırlamak için graflardan yararlanılabilir.

Aşağıdaki diyagramlar incelenirse;



Şekil 2.27

Birinci durumda; bir iş yerinde çalışan üç kişinin de ilişkileri iyidir ve bu nedenle hiç gerilim yoktur.

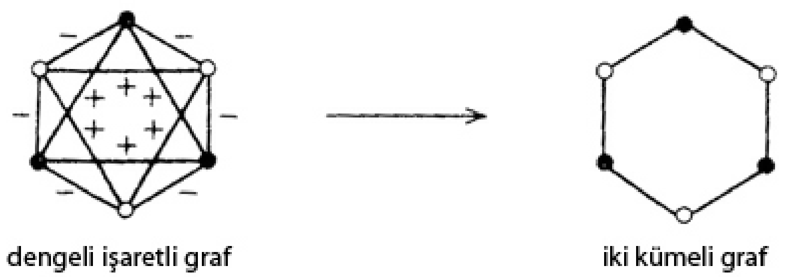
İkinci durumda; Ayşe ve Ali birbirleri ile iyi anlaşır ama ikisi de Veli' ile anlaşamaz. Buradan çıkacak sonuç; Veli kendi başına çalışmalıdır. Bu durumda bir gerilim oluşmaz.

Üçüncü durumda ise; Veli, Ayşe ve Ali'nin her ikisi ile de anlaşır ve onlarla çalışmak ister, ancak Ayşe ve Ali birbirleriyle iyi anlaşamazlar ve birlikte çalışmak istemezler. Bu durumda uygun bir çalışma ortamı bulunamaz. Gerilim ortadan kaldırılamaz.

Burada, ilk iki durumun dengeli durumlar olduğu söylenebilir. Üçüncü durum ise dengeli olmayan durum olarak ifade edilebilir.

Bir işaretli grafın düğümleri siyah ya da beyaz ile renklendirildiğinde pozitif ayrıtlar aynı renkle sonlanıyorsa ve negatif ayrıtların bir siyah bir de beyaz sonu oluyorsa, negatif ayrıtları birleştiren iki düğüm farklı renkli ise bu işaretli graf dengelidir. Yukarıdaki diyagramlardan ilk ikisi bu şekilde renklendirilerek ifade edilebilir ama üçüncüsü bu şekilde renklendirilemez.

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bir dengeli graftan bütün pozitif ayrıtlar çıkarılarak iki kümeli bir graf elde edilebilir.



Şekil 2.28

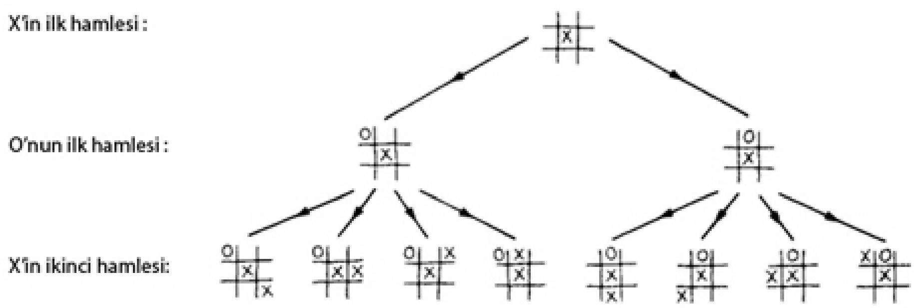
2.2.3 Ağaçlar

Ağaç kavramına ilk olarak 1840'larda G.Kirchoff'un elektriksel şebeke çalışmalarında rastlanılmıştır. 1870'lerde Cayley'in kimyasal moleküllerin sayılması çalışmalarında ağaç kavramıyla karşılaşılmıştır. Daha sonra ağaçlar birçok alanda kullanılmıştır. Şimdi bu kullanım alanlarından bazıları tanımlanmaktadır. Ağaçlar çoğu zaman bir fiziksel yapıyla nitelendirilmektedir. Bu yapı doğal ya da el yapımıdır. Doğal ağaç örnekleri, gövde, beden, ana dallar, dallar ve yapraklar gibi bitkisel çeşitlilikler içerir. C_nH_{2n+2} (alkanlar) gibi kimyasal moleküllerin kimyasal yapısı da bir ağaç örneği olarak düşünülebilir.

Bir başka ağaç örneği de hayat ağacıdır. Bu ağaçlar hayvan veya bitki türleri arasındaki evrimsel ilişkileri gösterir. Aile ağaçları bir kişinin soyundan gelen kişileri resmeder. Akraba ilişkilerinin yasaklanması durumunda bir aile ağacı saf ağaç türlerindendir.

Ağaç yapılarının bilgisayar bilimi ve yapay zeka çalışmalarında da hatırı sayılır bir yeri vardır. Bilgisayarın hafızasına veri girilirken ya da sisteme giren bilgi akışı düzenlenirken bu tür yapılarla karşılaşılır. Birçok bilgisayar işletim sistemleri ağaç yapılarında dizayn edilmiştir. Çünkü ağacın farklı basamaklarından kopyalayarak bilgiye ve dosyalara erişmede kullanıcı kolaylık sağlamaktadır.

Büyük bilgisayar programları ağaç yapısında organize edilmiştir. Böylece programın çalıştırılmasında kullanılan karar alıp uygulama stratejileri basitleştirilmektedir. Bu tür ağaçlara oyun teorisinde rastlanılmaktadır. Aşağıdaki ağaç bir oyun ağacının bölümüdür.



Şekil 2.29

Diğer bir önemli ağaç türü sınıflandırma ağacıdır. Bu ağaç tipi seçimleri sıralamak için kullanılır. Sıralanan seçimlerin her biri bir öncekine bağlıdır. Örneğin; bir kütüphanedeki kitapları kategorize etmek için Dewey'in ondalık sınıflandırma sistemi düşünülebilir. Bu sistem nesnelerin kaba sınıflandırılmasıyla on alana ayrılır.

0-099- Genel Bilgiler

100-199- Psikoloji

200-299- Din

300-399- sosyal bilimler

400-499- Filoloji

500-599- Müspet bilimler

600-699- Uygulamalı bilimler

700-799-Güzel sanatlar

800-899- Edebiyat

900-999- Tarih

Bu alanların her biri de kendi aralarında on alt alana ayrılır. Örneğin, müspet bilimlerdeki 510-519 aralığı matematiğe ayrılsın. Bu bölümde kendi arasında on alana daha ayrılacaktır.

510- Genel matematik bilgileri

511- Matematiksel esaslar

512- Cebir

513- Aritmetik

514- Topoloji

515- Analiz

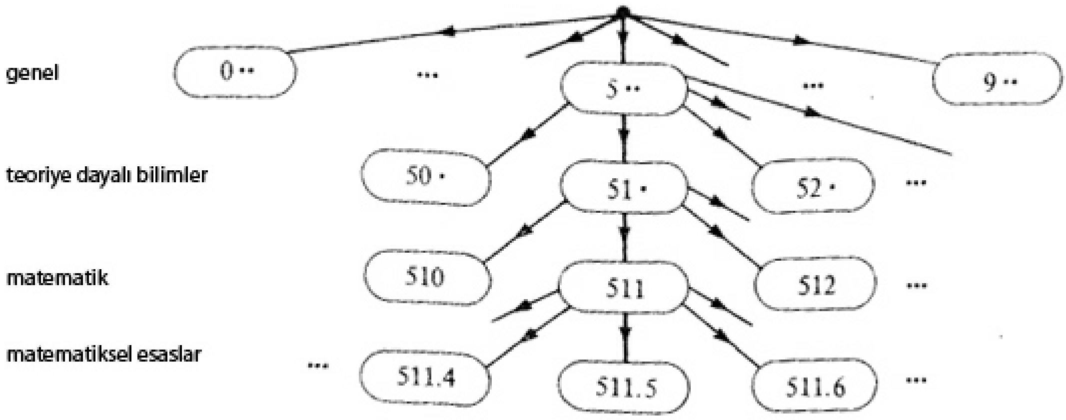
516- Geometri

517- Olasılık

518- Değer atanmamış

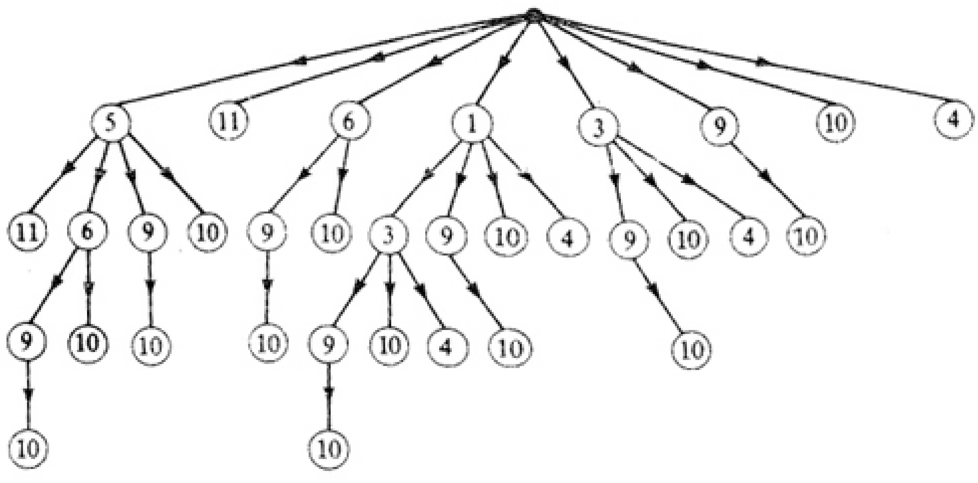
519- Değer atanmamış

Ondalık kesirlerden yararlanılarak daha fazla sınıflandırma yapılabilir. Örneğin; Graf Teori 511.5 ile sınıflandırılmıştır. Kombinatorial Analiz ise 511.6 ile sınıflandırılmıştır. Aşağıdaki sınıflandırma ağacı bunlara örnek olarak gösterilebilir.



Şekil 2.30

Liste şeklinde verilen terimlerden oluşacak en uzun artan diziyi bulmak için yine karar ağaçlarından yararlanılabilir. Örneğin verilen 5, 11,6,1,3,9,10,4 sayılarından oluşacak en uzun dizileri bulmak için her sayı daha sonraki sayılara birbirini geçen sıra içinde birleştirilir. Bu verilen sayılar için ağaç aşağıdaki şekilde görülmektedir.

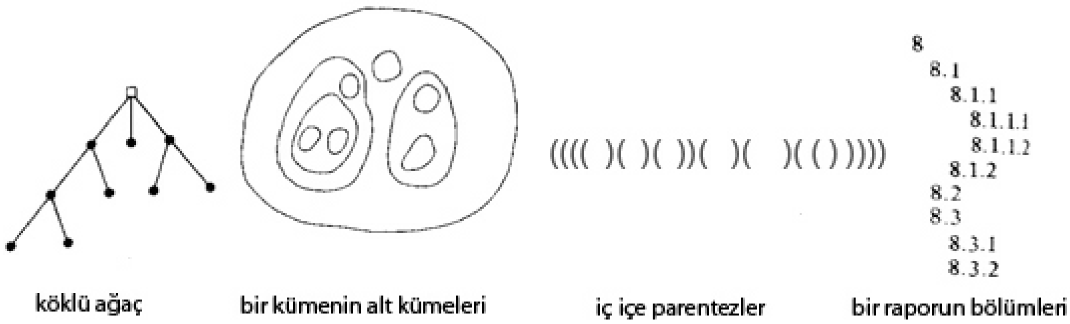


Şekil 2.31

Buradan; en uzun iki artan dizinin 5,6,9,10 ve 1,3,9,10 olduğu sonucu çıkar.

Aşağıdaki ağaç yapısı örneklerinde bir düğüm başlangıç noktası olarak seçilir ve bu düğümden dallar çıkar. Böyle ağaçlara köklü ağaçlar denir. Bu ağaçların başlangıç düğümü de kök düğümü olarak adlandırılır. Köklü ağaçlar önemli ve yaygındır.

Aşağıdaki diyagramda aynı köklü ağacı göstermenin dört farklı yolu verilmektedir.

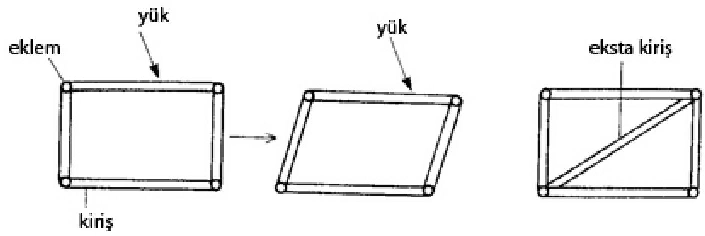


Şekil 2.32

İlk diyagram, bir ağacın geleneksel görüntüsüdür. İkinci diyagram, bir kümenin alt kümelerinin sistemidir. Bu diyagramın birinci diyagram ile aynı ağaç yapısı vardır, ama bu durumda farklı seviyeler tanımlanmıştır. Üçüncü gösterim iç içe parantezlerin sistemidir. Dördüncü gösterim ise bir raporun bölümleridir.

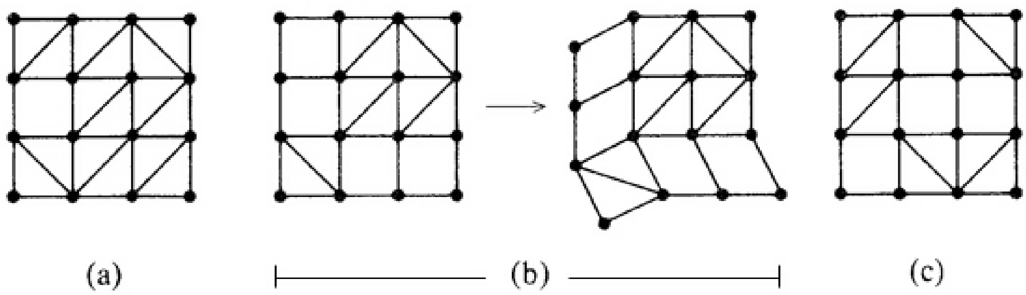
2.2.4 Destekleyici Dörtgensel Karkaslar

Yapı mühendisliğindeki problemleri çözmek için iki kümeli grafların özellikleri kullanılabilir. Çoğu binalar, putrel ışınlarının, putrel yapılmış veya perçinlenmiş raptiyelerin dikdörtgen biçiminde yerleştirilmesinden meydana gelen çelik karkaslar tarafından desteklenmektedir. Bu durum yapıların yüksek binalar ya da gökdelenler şeklinde dizayn edilmelerine bağlı özel bir durumdur. En basit tip, 4 kiriş ve 4 bağlantı yerinden meydana gelen dikdörtgen karkaslardır.



Şekil 2.33

Eşkenar dörtgen veya paralelkenara yeterli derecede ağır yükler konulması durumunda yapının dengesinin ve biçiminin bozulacağı açıktır. Bu yapının dengesinin bozulmaması için ekstra bir köşegensel kiriş eklenmelidir. Bu kiriş karşılıklı köşeleri birleştirmektedir. Dikdörtgen hücreler içeren daha büyük yapılar için eğilmezliği garantilemek için her hücreyi desteklemek gerekli değildir. Açılmayı engellemek için gerekli olan desteklerin en küçük sayısını belirlemek için bir metot verilebilir ve uygun bir düzenleme yapılabilir. Yapıyı desteklemek için gerekli olan en küçük sayıdan daha fazla destek konuluyorsa, emniyet faktörleri gelişir ama gereksiz ücret ortaya çıkar.



Şekil 2.34

Şekildeki karkaslar için;

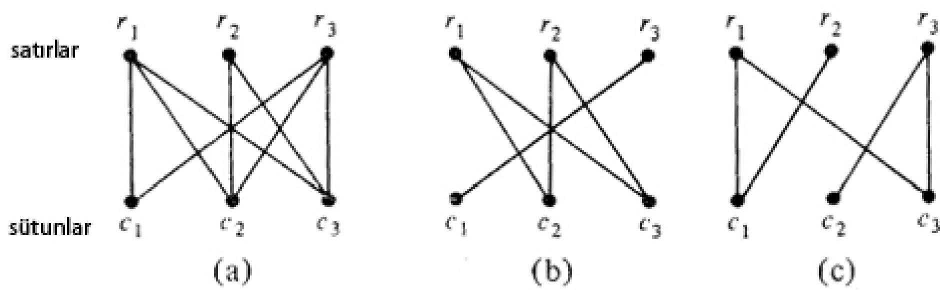
(a) Eğilmezdir ama çok fazla desteklenmiştir.

(b) Eğilmez değildir, çünkü şekilde görüldüğü gibi deforme olabilir.

(c) Bu şekildeki bir yapının eğilmez olup olmadığına karar vermek için ya da yapıdan hangi desteklerin kaldırılabileceğine karar vermek için basit bir metot verilebilir.

Bu metot şu şekildedir: Düğüm kümelerinden biri karkasın satırlarını, diğeri de karkasın sütunlarını ifade eden ve ayrıtları da satır-düğümlerle, sütun-düğümleri birleştiren iki kümeli bir graf çizilir.

(a), (b) ve (c) deki karkaslara tekabül eden iki kümeli graflar aşağıdaki şekilde verilmektedir.



Şekil 2.35

Bu iki kümeli graflara bakıldığında, (a) daki eğilmez karkasların bir bağlantılı graf ortaya çıkardığı, (b) deki karkasların ise bağlantılı olmayan bir graf ortaya çıkardığı görülür. Bunlar aşağıda verilecek genel bir kuralın örnekleridir. Bu kural (c) deki karkasların eğilmez olduğunu gösterir çünkü bu bağlantılı iki kümeli bir grafa tekabül eder.

Eğilmez karkaslar, bağlantılı iki kümeli graflarla ifade edilebilirken, eğilmez olmayan karkaslar, bağlantılı olmayan iki kümeli graflarla ifade edilebilir.

(a) daki karkası ifade eden grafta, $r_2c_2r_1c_3r_3c_1$ yolu 6 tane düğüm içerir. Satır 1, sütun 2 ile dikeydir. Sütun 2, satır 2 ile dikeydir. Satır 2, sütun 3 ile dikeydir ve böyle devam eder. Her satır bir sütun ile dikeydir ve karkas çarpıtılamaz. (b) deki karkasa ait grafta r_3 ve c_1 düğümlerinden biriyle r_1, r_2, c_2 veya c_3 düğümleri arasında bağlantı kuran bir yol yoktur ve karkas şekilde görüldüğü gibi çarpıtılmıştır.

Bir desteklenmiş karkas en az destekle dengede tutulurken hangi desteklerin kaldırılabileceğini belirlemek amacıyla iki kümeli graflar kullanılabilir. (c)'deki karkasa ait grafta hiç çevrim yoktur ve böylece herhangi bir ayrıtın kaldırılması grafı bağlantısız yapar. Herhangi bir desteğin kaldırılması eğilmez olmayan bir karkas oluşturur. (a)'daki karkasa ait grafta birçok çevrimler vardır ve bu nedenle karkasın eğilmezliğini etkilemeyecek şekilde kaldırılabilecek birçok destek vardır. Örneğin, $r_1c_1r_3c_3r_1$ bir çevrimdir ve böylece r_1c_1, r_1c_3, r_3c_1, r_3c_3 hücrelerinin herhangi birinden bir desteğin kaldırılması eğilmezliği etkilemez. Bu örnekte, seçilen üç adet uygun destek (Mesela; r_1c_1, r_1c_3 ve r_3c_3) kaldırılabilir ve hala eğilmez bir karkas vardır.

Böylece her aşamada iki kümeli bir graftan herhangi bir çevrimi ayrılmış oluyor ve grafın ayrıtlarından herhangi biri kalkıyor. Buradan çıkan sonuç; en az destekleme, hiç çevrim içermeyen iki kümeli grafa tekabül eder.

2.2.5 Uyum Grafları

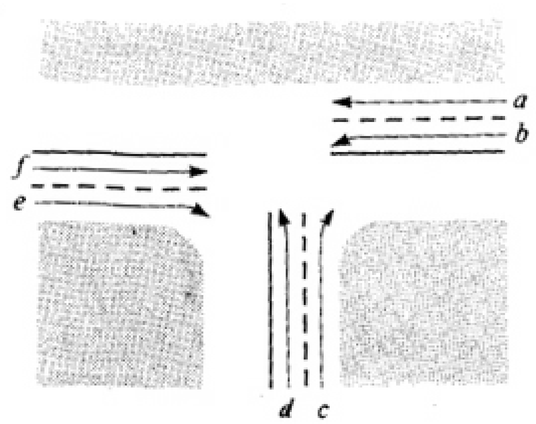
Uyum grafları, bir bilginin özel (örneğin kronolojik) sırada düzenlenmesini içeren problemler için kullanılır. Bu graflarda, objelere düğümler tekabül eder, ayrıtlar ise herhangi bir şekilde uyumlu olan, bağdaşan obje çiftlerini birleştirir. Uyum graflara ilk olarak genetik biliminde rastlanmıştır. Ayrıca arkeoloji, psikoloji gibi bilimlerde de uyum graflar kullanılmaktadır.

Buradaki amaç; uyum graflarının uygulamalarını betimlemek ve herhangi bir durumda yararlı bir bilginin uyum grafıyla nasıl ifade edilebileceğini göstermektir.

2.2.6 Trafik Işıkları

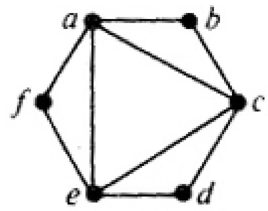
Burada trafik ışıklarının ve ışıkların değişim zamanlarının ayarlanmasında uyum grafından nasıl yararlanılabileceği ele alınmaktadır.

Aşağıdaki gibi bir kavşak düşünülecek olursa,



Şekil 2.36

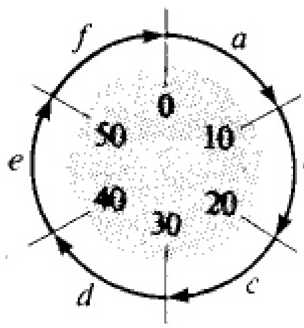
Bu kavşakta bazı trafik akışları uyumludur yani aynı anda hareket etmelerinin sakıncalı sonuçları yoktur. Örneğin, a; b, c, e ve f ile uyumludur, ama d ile uyumlu değildir. f; a ve e ile uyumlu iken, b, c ve d ile uyumlu değildir. Bu şekildeki uyumluluklar bir uyum grafıyla gösterilebilir. Bu grafta trafik akışları düğümlerle ifade edilir, uyumlu olan trafik akışları da ayrıtlarla birleştirilir. Yukarıda verilen trafik akışının uyum grafı aşağıdaki şekildeki gibidir.



Şekil 2.37

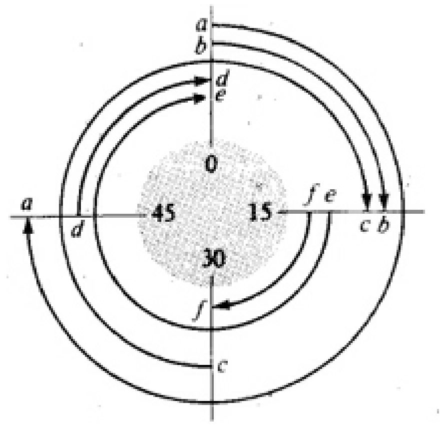
Bir kavşakta trafik ışıkları yardımıyla trafiği kontrol etmek isteyen bir trafik mühendisi düşünülecek olursa, bu mühendis uyumlu olmayan trafik akışlarının eş zamanlı meydana gelmemesi için trafik ışıklarını nasıl evrelere ayırmalıdır?

Trafik ışıkları 60 saniye devirle çalışırsa, her akış için 10 saniye ayırarak bir çözüm bulunabilir. Bu çözüm saat diyagramı kullanılarak gösterilebilir.



Şekil 2.38

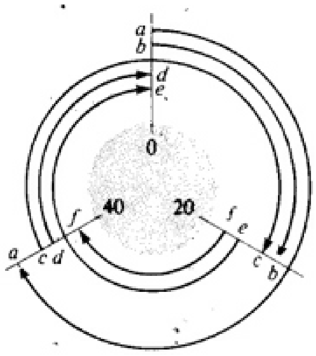
Bu diyagramda her akışın hareketi bir okla gösterilebilir. Ancak bu özel düzenleme yetersizdir. Toplam bekleme süresini azaltmak için uyumlu trafik akışlarının eş zamanlı olarak ilerleyeceği bir çözüm bulunmalıdır. Bu mümkün düzenleme aşağıdaki gibi yeni bir saat diyagramı ile gösterilebilir. Bu diyagramda üç uygun trafik akışı herhangi bir zamanda ilerlemektedir.



Şekil 2.39

0-15 saniyeler arasında, a, b ve c akışları ilerlemektedir. 15-30 saniyeler arasında , a, e ve f akışları ilerlemektedir. 30-45 saniyeler arasında, a, c ve e akışları ilerlemektedir. 45-60 saniyeler arasında, c, d ve e akışları ilerlemektedir. Bunun anlamı; her 60 saniyelik periyotta a, c ve e akışları 45 saniye süreyle ilerler. b, d ve f akışları 15 saniye süre için ilerler. Toplam bekleme süresi; $(3 \times 15) + (3 \times 45) = 180$ saniyedir. Daha önceki durumda toplam süre; $(6 \times 50) = 300$ saniye idi. Bu demektir ki, bekleme süresinde 120 saniye yani %40 azalma vardır.

Bir başka çözüm ise 60 saniyelik devrenin uyumlu trafik akışları için 20 saniyelik bölümlere ayrılmasıdır.



Şekil 2.40

0-20 saniyeler arası, a, b ve c akışları ilerler. 20-40 saniyeler arası, a, e ve f akışları ilerler. 40-60 saniyeler arasında da, c, d ve e akışları ilerler. Her 60 saniyelik periyotta a, c ve e trafik akışları 40 saniyelik süreyle ilerlerken, b, d ve f trafik akışları ise 20 saniyelik süreyle ilerler. Bu durumda da yine toplam bekleme süresi 180 saniyedir.

Bu çözümler uyum grafına bakılarak bulunabilir. Burada amaç aynı anda ilerleyen maksimum sayıda trafik akışlarının sayısını bulmak olduğu için, bu gereksinimleri sağlayacak uygun grafın alt grafları bulunmalıdır. Karşılıklı uyumlu akışlara tekabül eden tam alt graflar aranmaktadır. Bu şekildeki tam altgraf örnekleri abc, aef, ace ve ya cde gibi üçgenlerdir.

Bu fikir daha genel hatlarla aşağıdaki adımlar izlenerek uygulanabilir.

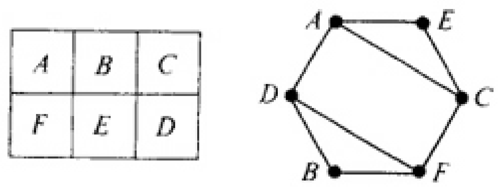
(1) Uyum grafı çizilir.

(2) Uyum grafının her düğümünü için, bu grafı içeren en büyük alt graf bulunur.

(3) Adım (2) deki tam alt grafların yardımıyla zaman uygun olarak bölünür ve bir tam alt graf zaman periyoduna ayrılır.

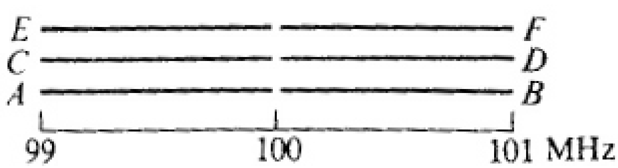
2.2.7 Radyo Frekansları

Radyo frekanslarını düzenleme probleminde; izin verilebilir frekansların (99-101 MHZ) alanı tahsis edilir ve her yere makul genişlikte bir frekans bandı verecek şekilde frekansların dizilişi bulunur. Bu problem uyum grafı çizilerek ve her düğümü içeren uygun bir tam alt graf bulunarak çözülebilir. Bu uyum grafında; düğümler mevkilere karşılık gelir. Ayrıtlar komşu olmayan mevkileri birleştirir.



Şekil 2.41

Daha sonra bu grafın tam alt graflarının her birine bir frekans bandı atanır. Bu bantlar gösterilirken bir devredeki oklar yerine bir doğru üzerindeki açık aralıklar kullanılır. Mesela; yukarıdaki tam graf, ACE ve BDF tam alt aralıklarına ayrılabilir. Burada; ACE alt grafına 99-100 MHZ frekans bandı ve BDF alt grafına da 100-101 MHZ frekans bandı atanabilir.



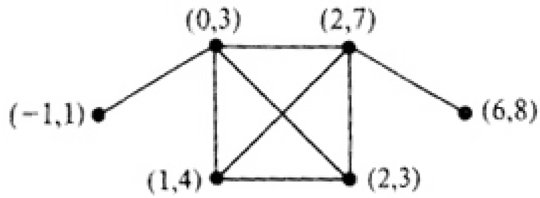
Şekil 2.42

2.2.8 Aralık Graflar (interval Graphs)

Frekans tahsisatı problemi bir doğru üzerindeki açık aralıklar yardıyla ifade edilebilemektedir. Açık aralıkların kümesi bir grafla ilişkilendirilerek bu fikir sürdürülebilir. Örneğin; (0,3), (2,7), (-1,1), (2,3), (1,4) ve (6,8) açık aralıkları aşağıdaki gösterilebilir.

Şekil 2.43

Açık aralıkları düğümler olarak kabul edilip, en az bir ortak noktası bulunan aralıklara tekabül eden düğümler ayrıtlarla birleştirilerek bir graf oluşturulabilir.



Şekil 2.44

Bu şekilde elde edilen graflara aralık graflar denir. Her aralık grafı bir uyum grafıdır ama her uyum grafı bir aralık grafı değildir. Bunun nedeni; çakışmayan aralıklar bazen bir uyum grafındaki bitişik düğümlere yol açar, oysa ki, bir aralık graftaki çakışmayan aralıklar her zaman bitişik olmayan düğümlere sebep olur.

2.2.9 Arkeoloji

Son yüzyılın bitiminde arkeologlar çanak, çömlekçiliğin muhtelif tipleriyle ve mısır piramitlerindeki birçok mezarlarda bulunmuş olan ilk insanların yaptığı sanat eserleriyle ilgilenmişlerdir. Özel olarak; Sir Flinders Petrie mezarları kronolojik olarak düzenlemeye ve bunların içinde bulunan ilk insanlar tarafından yapılan sanat eserleri için bir zaman periyodu tayin etmeye çalışmıştır. Bunun için Nagada, Ballas, Abadiyeh ve Hu'daki mezarlıklardaki 900 mezardaki bilgiyi kullanmışlardır.

Bu yöntem dizi tarihlendirme olarak adlandırılır. Arkeologlar, mezarları tarihlendirirken ilk insanların yaptığı sanat eserlerinden farklı iki tanesi aynı mezarda birlikte bulunuyorsa bunların zaman periyotlarının çakıştığını varsaymışlardır.

Arkeolojideki tarihlendirme problemlerinin çözümünde en umut verici yaklaşım tarzlarından biri, bilginin bir uyum grafıyla gösterilmesidir. Bu grafta düğümler ilk insanların yaptığı sanat eserlerine karşılık gelir. Ayrıtlar ise aynı mezarda görülen sanat eserlerine karşılık gelen düğümleri birleştirir.

Bu durum bir aralık grafla da ifade edilebilir. Aralıklar, ilk insanlar tarafından yapılan sanat eserlerinin kullanıldığı zaman periyoduna karşılık gelir, çakışan aralıklar da aynı mezarda birlikte bulunan eserlere tekabül eder.

Bu problem uygulamada bu kadar kolay değildir. Örneğin; uyum grafa karşılık gelen aralıkların birkaç farklı düzenlenişi bulunabilir, ya da doğru aralık grafı seçilemeyebilir.

Bu sorunlara rağmen aralık grafı yaklaşımının muhteşem başarıları vardır ve birçok tarihlendirme problemine çözüm olur. Orta Avrupa'daki bronz-yaş materyalinin kronolojik sıralaması, Romanya'daki Histra Yunan Kitabeleri buna örnek olarak gösterilebilir.

2.2.10 Gelişim Psikolojisi

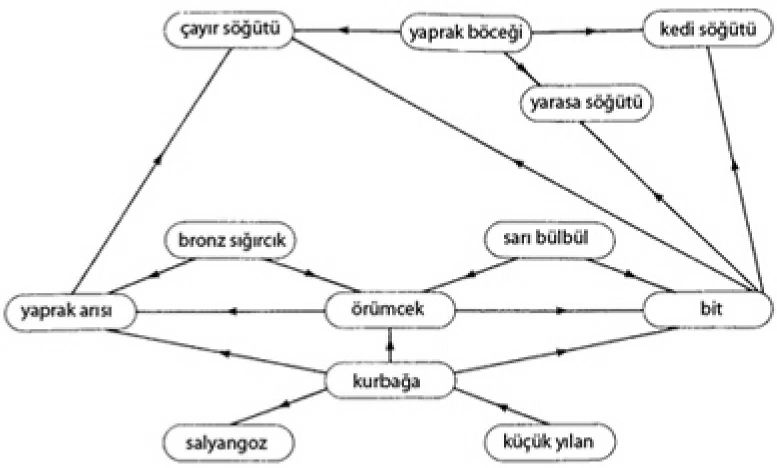
Büyümekte olan çocukların çeşitli özellikleri veya karakterleri belli bir zaman periyodunda ortaya çıkar ve sonra kaybolur. Buradaki problem, çeşitli karakteristik özelliklerin kronolojik sırada görüldüğü bir zaman ölçeği inşa etmektir. Bu problem belli sayıdaki çocuklar üzerinde çalışılarak ve iki değişik özelliğin ne zaman aynı çocukta görüldüğü araştırılarak çözülebilir. Buradaki durum arkeoloji örneği ile aynıdır. İlk insanlar tarafından yapılan sanat eserleri yerine karakteristik özellikler, mezar yerine de çocuk kelimesi gelmiştir. Uyum grafı yardımıyla çözülebilir. Düğümler karakteristik özelliklere karşılık gelir, ayrıtlarda aynı çocukta görülen özellikleri birleştirir. Farklı özellikler kronolojik sıraya konularak aralık grafı yardımıyla da çözülebilir.

2.2.11 Klasik Çalışmalar

Tarihlendirmenin kullanıldığı bir diğer çalışma; Yunan ve Latin literatürünü kronolojik sıraya koymaktır. Bu problem için en umut verici yaklaşım tarzı, bir yazarın düzyazıyı kullanış biçimini inceleyerek yazarın stilindeki, değişimi analiz etmektir. Plato’nun yaklaşımında dikkat cümlecikler üzerinde toplanmıştır. Çünkü cümlecikler, cümlenin en önemli bölümüdür. Her cümlecik, kısa ve ya uzun en son beş heceden meydana gelir. Bu bilgi graf formunda gösterilebilir ve karşılık gelen uyum grafı çizilebilir. Kronolojik sıraya konularak aralık grafı yardımıyla da çözülebilir.

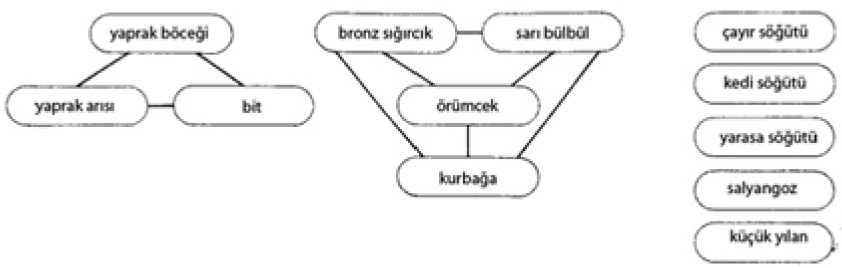
2.2.12 Ekoloji

Doğada bütün canlıların yaşamını sürdürebilmesi için bir denge vardır. Yılanlar, kurbağaları yer. Kuşlar örümcekleri yer. Kuşlar ve örümcekler ikisi birlikte böcekleri yer. Kurbağalar, salyangozları, böcekleri ve örümcekleri yer. Doğada avcı ve avlayan arasında verilen karşılıklı ilişkileri inceleyen bir ekolojist bu ilişkileri nasıl sınıflandırabilir? Bitkiler, hayvanlar ve çevre arasındaki karşılıklı ilişkileri çalışan bir ekolojist bu ilişkileri sınıflandırmak için bir graf kullanabilir. Besin zinciri olarak bilinen bu grafta yönlü ayrıtlar kullanılır. Besin zincirinde A türü, B türünü avlıyorsa A türünden B türüne bir yönlü ayrıt vardır. Besin zincirine örnek olarak Kanada söğüt ormanındaki organizmalar arasındaki karşılıklı ilişkileri gösteren aşağıdaki diyagram düşünülebilir.



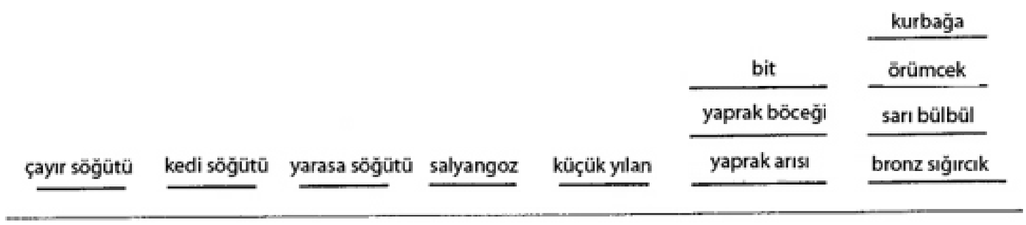
Şekil 2.45

Ekolojistler besin zincirinde hangi türlerin besin için yarıştığını belirten bir graf kullanırlar. Bu grafta ayrıtlar, ortak avı paylaşan türleri birleştirir. Örneğin; aşağıdaki besin zincirinde bronz sığırcık ve sarı bülbülün ikisi de örümcekleri yer bu nedenle, bu canlılara karşılık gelen düğümler bir ayrıtla bitişiktirler.



Şekil 2.46

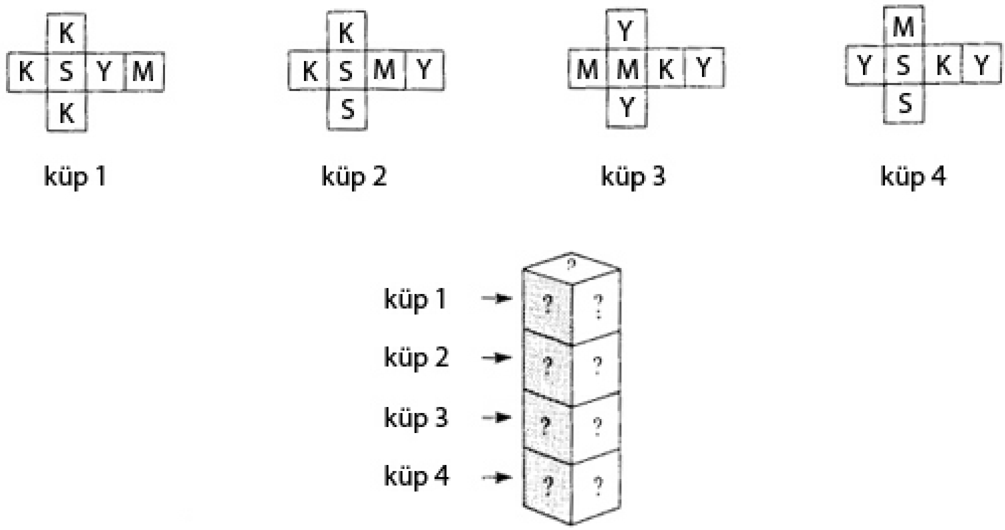
Yukarıdaki şekil aralıklarla ifade edilebilir.



Şekil 2.47

2.2.13 Dört küp problemi

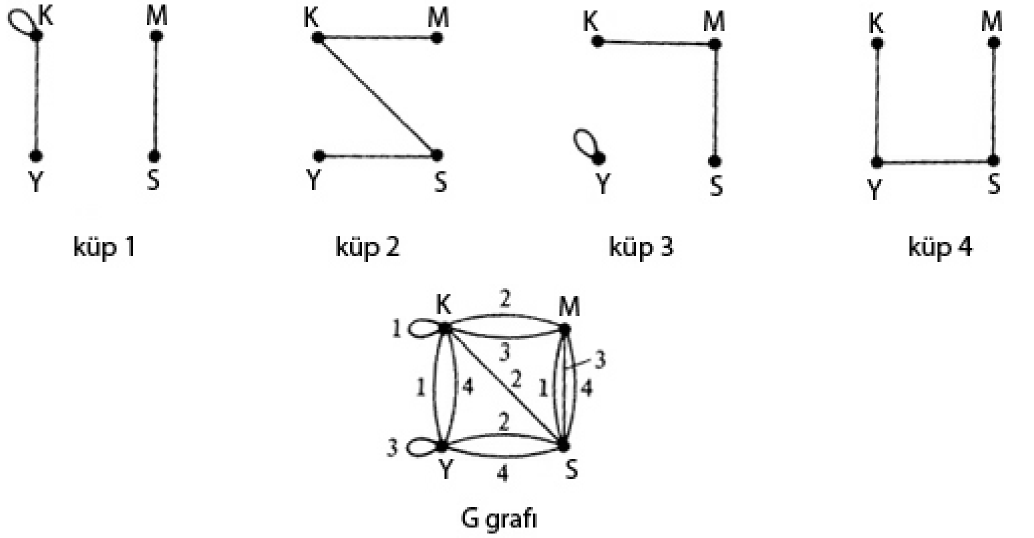
Acele delilik oyunu adıyla pazarlanan ilgi çekici bir puzzle; yüzleri kırmızı, mavi, yeşil ve sarı (ve ya bazen beyaz) ile boyanmış en az bir yüzü aynı renk olan 4 küple ilgilidir. Bu küplerin açık şekli aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.48

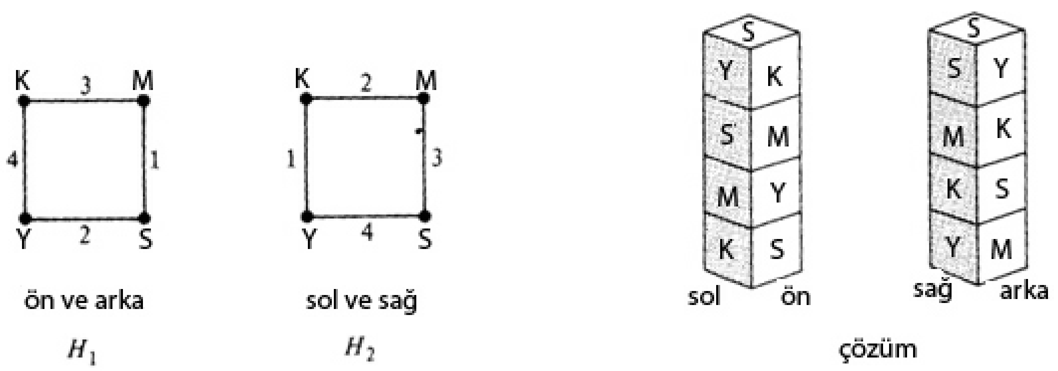
Buradaki problem; sonuçta dört renkte görüleceği şekilde küpleri üst üste yerleştirmektir.

Bu problemin çözümü için graflardan yararlanılabilir. Her küp; kırmızı, mavi, yeşil ve sarı renklere tekabül eden dört düğümden oluşan bir grafla gösterilebilir. Bu grafta ayrıtlar, zıt yüzlerdeki renklere karşılık gelen düğümleri birleştirir. Örneğin; birinci küpte mavi ve sarı zıt yüzlerde yer alır. Bu nedenle birinci küpün grafında M ve S düğümleri bitişiktir. Aşağıda, dört küp için de graflar çizilmiştir ve bu graflardan yeni G grafı elde edilmiştir.



Şekil 2.49

Yukarıda resmedilen G grafının, H_1 ve H_2 gibi iki alt grafı düşünülecek olursa, H_1 alt grafı her küpün ön ve arka yüzündeki renkleri gösterir. H_2 alt grafı da, her küpün sağ ve sol yüzlerindeki renkleri gösterir. Bu alt graflardan yararlanılarak sonuca ulaşılır.



Şekil 2.50

Bu H_1 ve H_2 alt grafları neye göre seçilmiştir? Farklı alt graflar seçilerek aynı sonuç elde edilebilir mi?

H_1 ve H_2 alt grafları aşağıdaki üç özelliği sağlayacak şekilde seçilmelidir.

1) Her bir alt graf, bir küpten bir ayrıt içerir.

2) Her bir alt graf, 2-regülerdir.

3) Bu alt grafların hiç ortak ayrıtı yoktur.

BÖLÜM 3

YÖNLÜ GRAFLAR VE UYGULAMA ALANLARI

3.1 Tanım ve Örnekler

Şimdiye kadarki bölümlerde graflarla ilgili temel kavramlar ve grafların uygulama alanları incelendi. Grafların; kimyasal moleküller, sosyal ilişkiler, ekoloji, arkeoloji ve bunun gibi bir çok alanda nasıl uygulanabildiği üzerinde duruldu. Graflarla ifade edilebilen durumlarda nesnelere düğüm adı verildi ve bu nesneler arasındaki ilişkiler de ayrıtlarla gösterildi. Buraya kadar üzerinde çalışılan bütün örneklerde ortak nokta şu idi: Graflar, bir düğümün diğerine olan baskınlığını değil, hangi düğüm çiftlerinin birleştiğini gösteriyordu. Bu bölümde ise graflarda bir düğümün diğerine olan baskınlığı incelenmekte ve bu baskınlık düğümleri birleştiren ayrıtlar arasına oklar konularak ifade edilmektedir.

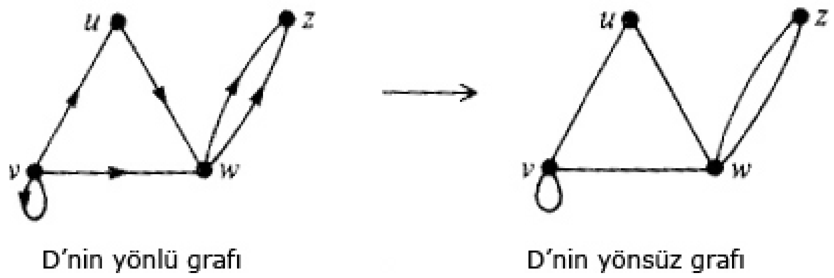
Bir yönlü grafta noktalar düğüm, noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren yönlü doğrular ya da oklar da yay diye adlandırılır.

Tanım 3.1.1: Bir D yönlü grafı, düğümler adı verilen elemanlar kümesi ile bu elemanların yay (arc) diye adlandırılan sıralı çiftlerinin listesini içerir. Noktalar düğüm diye adlandırılır. Yönlü doğrulara da **yay** denir. Düğümlerin kümesi düğüm kümesi diye adlandırılır ve $V(D)$ ile gösterilir. Yayların listesi D yönlü grafının yay listesi olarak adlandırılır ve $A(D)$ ile gösterilir.

v ve w, D' nin düğümleri ise, vw yayı v den w ya yönlendirilmiştir ya da v yi w ya birleştirir.

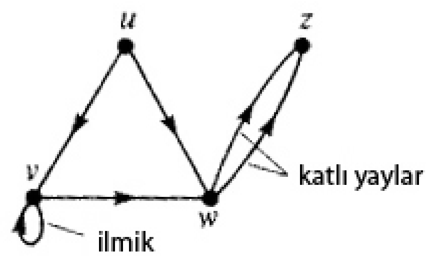
Tanım 3.1.2: D bir yönlü graf olsun. D nin her yayını yönlü olmayan bir ayrıtla birebir yer değiştirerek oluşturulan grafa **D nin yönsüz grafı** denir. Basitçe;

yaylardaki oklar kaldırılarak oluşturulur.



Şekil 3.1

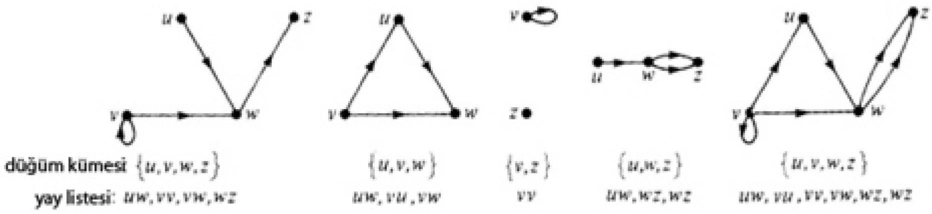
Tanım 3.1.3: Aynı düğümleri aynı yönde birleştiren iki ya da daha fazla yay, **katlı yaylar** (**multiple arcs**) olarak adlandırılır. Bir düğümü kendisine birleştiren yay, **ilmik** (**loop**) olarak adlandırılır. Hiç ilmik ya da katlı yay içermeyen yönlü grafa **yalın yönlü graf** denir.



Şekil 3.2

Tanım 3.1.4: D düğüm kümesi $V(D)$ ve yay listesi $A(D)$ olan bir yönlü graf olsun. Düğüm kümesi $V(D)$ nin alt kümesi ve yay listesi $A(D)$ nin alt kümesi olan yönlü grafa, D **nin alt yönlü grafı** denir.

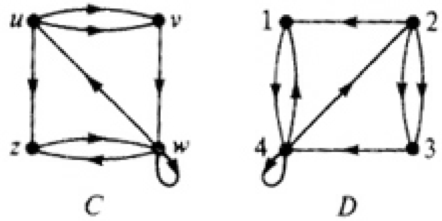
Örnek 3.1.1 D düğüm kümesi $V(D) = \{u, v, w, z\}$ ve yay listesi $A(D) = \{uw, vu, vv, vw, wz, wz\}$ olan bir yönlü graf olsun. D'nin bütün alt yönlü grafları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.3

Tanım 3.1.5: *D* yönlü grafı, *C* yönlü grafının düğümlerinin bir daha adlandırılmasıyla oluşturulabiliyorsa *C* ve *D* izomorfik yönlü graflardır. *C* ve *D* nin düğümleri arasında bire-bir eşleme vardır. *C* deki herhangi düğüm ikilisini birleştiren yay sayısı ile *D*'deki herhangi iki düğümü birleştiren aynı yönlü yay sayısı eşittir.

Aşağıdaki C ve D yönlü grafları izomorftur.

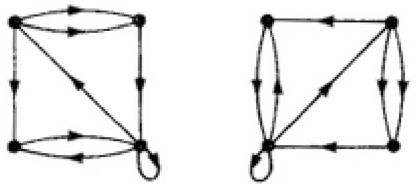


Şekil 3.4

C ve D yönlü grafları arasında aşağıdaki gibi bir birebir eşleme vardır.

$$\begin{array}{ccccc} C: & u & v & w & z \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ D: & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

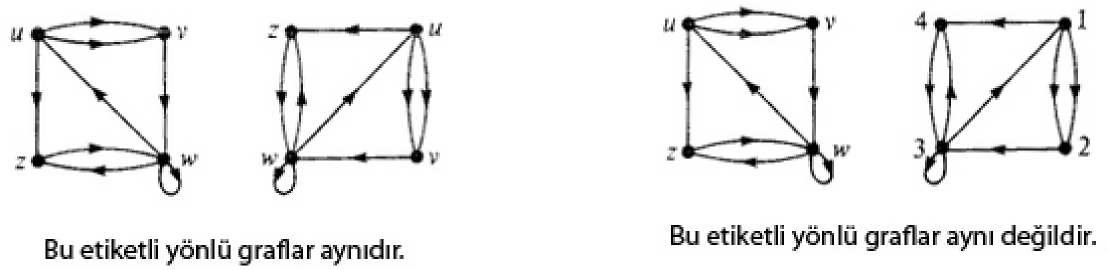
İki yönlü grafın izomorfik olup olmadığı kontrol edilirken düğümleri etiketlendirmek için kullanılan gerçek semboller önemsenmeyebilir, eğer gerekliyse düğümler tekrar etiketlendirilebilir.



Şekil 3.5

Yukarıdaki ifadeler aşağıdaki şekillerle özetlenebilir.

Etiketli (Labeled) Yönlü Graflar



Şekil 3.6

Etiketli Olmayan (Unlabeled) Yönlü Graflar

Şekil 3.7

Tanım 3.1.6: v ve w bir yönlü grafın düğümleri olsun. v ve w, bir e yayıyla birleştirilmişse v ve w **bitişiktir**, e yayı v den w ya yönlendirilmiş ise, e yayı v düğümü ile çakışıktır, e yayı w yayı ile **çakışıktır** denir.

Şekil 3.8

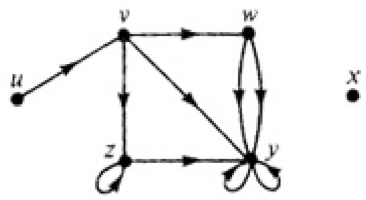
Şekil 3.8 de v ile w bitişiktir. e, v ile çakışıktır.e, w ile çakışıktır.

Tanım 3.1.7: D bir yönlü graf ve v, D'nin bir düğümü olsun. Başlangıç düğümü v olan bütün yayların sayısına **v nin dış derecesi** denir ve $d_{dıs}(v)$ ile gösterilir. Uç düğümü v olan tüm yayların sayısına **v nin iç derecesi** denir ve $d_{iç}(v)$ ile gösterilir.

D yönlü grafının dış derece dizisi, dış derecelerin küçükten büyüğe sıralanmasıyla oluşturulan dizidir. D'nin iç derece dizisi iç derecelerin küçükten büyüğe sıralanmasıyla oluşturulur.

Bir yönlü graf ilmik içeriyorsa, her ilmik bağlı olduğu düğümün dış derecesine 1 derece kazandırır. Aynı şekilde her ilmik bağlı olduğu düğümün iç derecesine de 1 derece kazandırır.

Örnek 3.1.2



Şekil 3.9

$d_{dıs}(u)$=1 , $d_{dıs}(v)$=3, $d_{dıs}(w)$= 2, $d_{dıs}(x)$=0, $d_{dıs}(y)$=2, $d_{dıs}(z)$=2

$d_{iç}(u)$=0, $d_{iç}(v)$=1, $d_{iç}(w)$= 1, $d_{iç}(x)$=0, $d_{iç}(y)$=6, $d_{iç}(z)$=2

Dış derece dizisi; (0,1,2,2,2,3)

İç derece dizisi;(0,0,1,1,2,6)

Dış dereceler toplamı; 10. İç dereceler toplamı; 10 dur. Bu dizinin 10 tane yayı vardır.

Teorem 3.1.1 El Sıkışma Teoremi (The Handshaking Dı-Lemma)

Herhangi bir yönlü grafta bütün dış derecelerin toplamı ve bütün iç derecelerin toplamı yayların sayısına eşittir.

İspat: Her yayın iki ucu olduğundan, her yay dış derecelere 1 derece kazandırır ve aynı şekilde iç derecelere de 1 derece kazandırır. Böylece dış dereceler toplamı yay sayısına eşittir. Aynı şekilde iç dereceler toplamı da yay sayısına eşit olur.

2.Bölümde bir grafı temsil etmek için, bitişiklik matrisi ve çakışım matrisi gibi iki gösterim yolu verilmişti. Şimdi bu matrislerin yönlü graflardaki kullanımı veriliyor. Bu gösterim şekilleri, bilgisayarda büyük yönlü graflar oluşturulurken kullanılır.

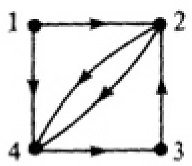
Tanım 3.1.8: D ilmik içermeyen bir yönlü graf olsun. $V(D) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ olsun.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & d_i \text{ ile } d_j \text{ düğümleri bitişik ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $A = [aij]_{n\times n}$ matrisine **D nin bitişiklik matrisi** denir.

Bir grafın bitişiklik matrisi oluşturulurken satır ve sütun başlarına grafın düğümleri yazılır.

Aşağıda bir yönlü graf ve bu yönlü grafın bitişiklik matrisi verilmektedir.



$$\begin{array}{c} \\ \text{satır } 1 \rightarrow \\ \text{satır } 2 \rightarrow \\ \text{satır } 3 \rightarrow \\ \text{satır } 4 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{sütun } 1 \downarrow & \text{sütun } 2 \downarrow & \text{sütun } 3 \downarrow & \text{sütun } 4 \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 3.10

4 tane düğüm var, o yüzden 4×4 tipinde matris olmalıdır.

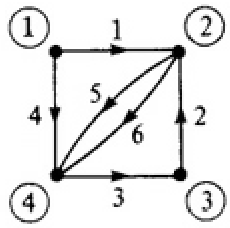
Matristeki satır ve sütunların kesiştiği yere karşılık gelen rakamlar, satır ve sütunların başlarında yazılı olan düğümleri birleştiren yay sayısını verir.

Tanım 3.1.9: D ilmik içermeyen bir yönlü graf olsun. $V(D) = d_1, d_2, \ldots d_n$ ve $A(D) = a_1, a_2, \ldots a_m$ olsun.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & d_i \text{ düğümü ile } a_j \text{ ayrıtı çakışık ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $B = [bij]_{n \times m}$ matrisine **D nin çakışım matrisi** denir.

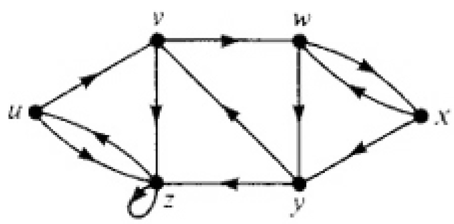
Aşağıda bir yönlü graf ve bu yönlü grafın çakışım matrisi verilmektedir.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \text{sütun 1} & \text{sütun 2} & \text{sütun 3} & \text{sütun 4} & \text{sütun 5} & \text{sütun 6} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{satır } 1 \rightarrow \\ \text{satır } 2 \rightarrow \\ \text{satır } 3 \rightarrow \\ \text{satır } 4 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 3.11

Tanım 3.1.10: u ve z bir D yönlü grafının herhangi iki düğümü olsunlar. D nin u düğümü ile başlayıp z düğümü ile biten (u_v,v_w,w_x,…,y_z) şeklindeki sonlu dizisine **u-v dolaşısı** denir. Dolaşıdaki yay sayısı olan k ’ya **dolaşının uzunluğu** denir.



Şekil 3.12

Şekil 3.12 de v_w_x_y_v_w_y_z_z_u v den u ya 9 uzunluğunda bir dolaşıdır. v_ w yayı iki kere tekrar eder. v, w, y ve z düğümleri de iki kere tekrar eder.

Tanım 3.1.11: Bir dolaşının bütün yayları farklı ise, bu dolaşı **gezi** (**trail**) olarak adlandırılır. Burada bütün düğümlerin farklı olması zorunlu değildir. Bütün düğümlerde farklı ise bu geziye **yol** (**path**) denir.

Örneğin, u_v_w_y_v_z dolaşısı bir gezidir. Ancak yol değildir. Çünkü v düğümü iki kere tekrarlanmıştır.

v_w_x_y_z dolaşısında hiç düğüm tekrar etmez, bu bir yoldur.

Tanım 3.1.12: Aynı düğümle başlayıp aynı düğümle biten dolaşıya **kapalı dolaşı** denir. Örneğin, u_v,v_w,w_x,…,y_z,z_u dolaşısı bir kapalı dolaşıdır.

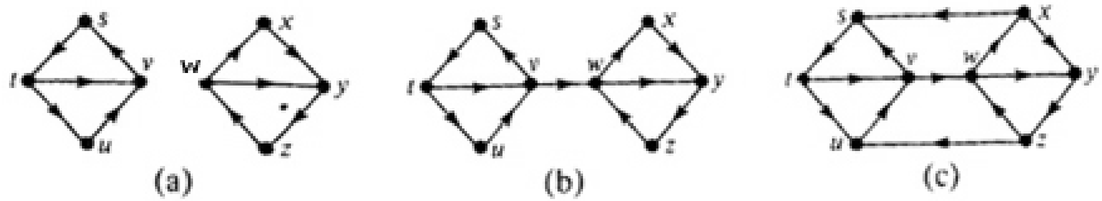
Tanım 3.1.13: Bir dolaşıdaki bütün yaylar farklı ise bu dolaşıya **kapalı gezi** denir. Hem bütün yaylar, hem de bütün düğümler farklı ise bu geziye **çevrim** (**cycle**) denir. Örneğin; u_v_w_y_v_z_u bir kapalı dolaşıdır ve bir kapalı gezidir ancak çevrim değildir, çünkü v düğümü iki kere tekrar edilmiştir.

z_z, w_x_w, v_w_x_y_v,u_v_w_x_y_z_u kapalı gezilerinin hepsi çevrimdir.

Kapalı dolaşılar tanımlanırken herhangi bir düğüm başlangıç düğümü olarak alınabilir. Örneğin; bir v_w_y_v_ üçgeni, w_y_v_w ya da y_v_w_y harfleriyle de tanımlanabilir.

Tanım 3.1.14: Bir D yönlü grafının yönsüz grafı bağlantılı ise D grafı **bağlantılı**, değilse D grafı bağlantılı değildir denir. Bir D yönlü grafının bir düğümünden diğerine bir yol varsa bu graf **güçlü bağlantılıdır** denir.

Örnek 3.1.3



Şekil 3.13

Şekil (a) daki yönlü graf, bağlantılı değildir çünkü yönsüz grafı bağlantısızdır.

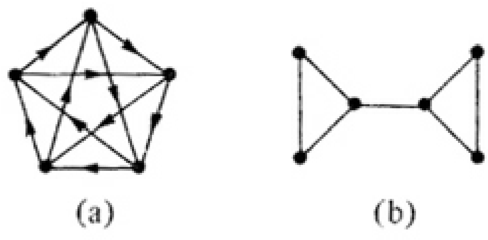
Şekil (b) deki yönlü graf, bağlantılıdır ama güçlü bağlantılı değildir. Çünkü w dan v ye bir yol yoktur.

Şekil (c) deki yönlü graf, güçlü bağlantılıdır çünkü bütün düğüm çiftlerini birleştiren yollar vardır.

Tanım 3.1.15:Bağlantılı bir grafta bulunan ve kaldırılması grafı bağlantısız kılan ayrıta **köprü** denir.

Her güçlü bağlantılı graf bağlantılıdır ancak her bağlantılı graf güçlü bağlantılı değildir. Örneğin, bir şehirdeki tek yönlü sistem etrafında sürücülük yapıldığı düşünülürse, şehir güçlü bağlantılı ise gidilen yoldaki caddelerin yönleri takip edilerek şehrin bir noktasından diğerine gidilebilir. Şehir sadece bağlantılı ise şehrin bir noktasından diğerine gidilebilir ama tek yönlü caddelerin yönlerine dikkat edilmelidir.

Aşağıdaki şekilde (a) diyagramında K_5 tam grafının ayrıtlarının yönlü olabileceği görülmektedir. Böyle bir durumda yönlü graf güçlü bağlantılıdır. Diğer taraftan, (b) diyagramında, ayrıtlara yön vermek mümkün değildir. Sonuçta, graf güçlü bağlantılıdır çünkü köprü herhangi bir yola yönlendirilmiştir.



Şekil 3.14

Tanım 3.1.16: Bir graf güçlü bağlantılı bir yönlü grafın yönsüz grafı ise bu grafa **yönlendirilebilir graf** denir.

Bir grafın ayrıtlarını yönlendirmek mümkünse, ayrıtları yönlendirilen graf güçlü bağlantılıdır.

Teorem 3.1.2: G'nin bir güçlü bağlantılı yönlendirilebilir graf olması için gerek ve yeter koşul G'nin köprüsünün bulunmamasıdır.

İspat: Bir yönlendirilebilir grafın köprü içerip içermediğini araştırılmalıdır.

$\Rightarrow$G yönlendirilebilir olsun. G bağlantılı grafının hiç köprüsü olmadığı ve G'nin yönlendirilebilir olduğu gösterilmelidir.

$\Leftarrow$G nin hiç köprüsü olmasın. G'nin ayrıtlarını yönlendirmekle oluşan yönlü grafın güçlü bağlantılı olduğu gösterilmelidir.

Hiç köprü olmadığından, her ayrıt bazı çevrimlerin içindedir. G de herhangi bir C_1 çevrimi alınarak başlansın ve bu çevrimin ayrıtları yönlü çevrim oluşturacak şekilde yönlendirilsin. Yayların yönünü takip edilerek C_1 in herhangi bir düğümünden diğerine ulaşılabilir. Daha sonra, C_1 de olmayan herhangi bir ayrıt alınsın. Bu ayrıt C_1in bir düğümü ile çakışıktır ve G'nin bazı C_2 çevrimlerindedir. C_2 nin ayrıtlarını periyodik olarak yönlendirilsin. C_1'in herhangi yönlendirilmiş ayrıtları dışında yayların yönünü takip ederek C_1 ya da C_2'nin herhangi bir düğümüne ulaşılabilir. G bağlantılı olduğundan, G'nin bütün ayrıtları yönlendirilmiş olana kadar bu yolla devam edilebilir. Sonuçta bir güçlü bağlantılı yönlü graf elde edilir.

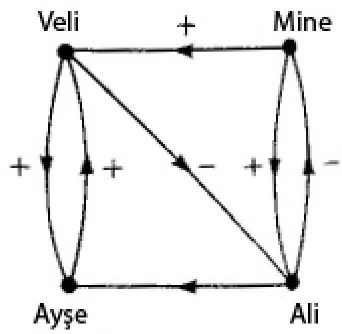
3.2 Yönlü Grafların Uygulama Alanları

2. Bölümde grafların uygulanabildiği alanlardan bahsedilmişti. Bu bölümde de yönlü grafların uygulama alanlarından bahsedilmiktedir.

Yönlü grafların önemli uygulamaları; sınırlı bir ağdaki maksimum akışın hesaplanışı, elektriksel ağlarda akım ve voltaj hesabı gibidir.

3.2.1. İşaretli Yönlü Graflar

2. Bölümde, simetrik ilişkilerde (x, y ile iyi anlaşır, ancak ve ancak y, x ile iyi anlaşırsa) grafların kullanımından bahsedildi. İlişkiler simetrik değilse (x, y ile iyi anlaşır ama y, x ile iyi anlaşamaz) işaretlenmiş yönlü graflar kullanılır. Pozitif ilişkiler için + yay, negatif ilişkiler için - yay kullanılır.



Şekil 3.15

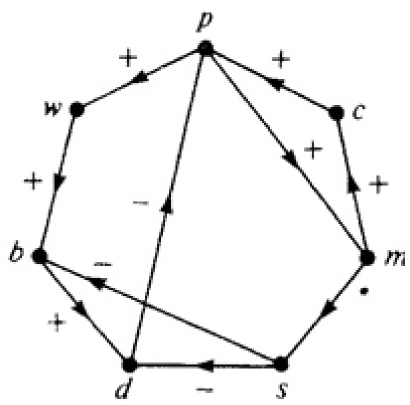
Yukarıdaki şekildeki yönlü grafta; Ayşe ve Veli iyi anlaşırlar. Mine, Ali ile iyi anlaşır ama Ali, Mine ile anlaşamaz. Veli, Ali ile anlaşamaz. Ali'nin Veli ile anlaşıp anlaşamadığı hakkında bir fikir edinilemez.

Yönlü grafın başarıyla uygulandığı problemlerden bazıları; atıklardan kurtulma, enerji planlaması, fon sağlama araştırması, çevresel kirlenme, medikal kaynakların ayrılması gibidir.

3.2.2 Katı Atık İmha Etme

Aşağıdaki işaretli yönlü graf bir şehrin katı artık imha etme problemiyle ilgili ilişkileri açıklayan örneklerden biridir.

Bu grafta w'dan b'ye yay + işaretlidir. Çünkü atıklardaki artış bakterilerde de artışa neden olur. s den d ye olan yay - işaretlidir çünkü sağlık hizmetlerindeki gelişmeler hastalık sayısında azalışa neden olur. d'den w'ya hiç yay yoktur. Çünkü hastalık sayısındaki artışın, kirlilik miktarı üzerindeki direkt etkisi çok azdır.



Şekil 3.16

b=birim alana düşen bakteri miktarı

c=şehre göç miktarı

d=hastalık sayısı

m=modernleşme miktarı

p=nüfus genişliği

s=sağlık hizmetleri

w=birim alana düşen kirlilik miktarı

Yönlü graflarla ilgili bir başka özel ilgi alanı da çevrimlerdir.

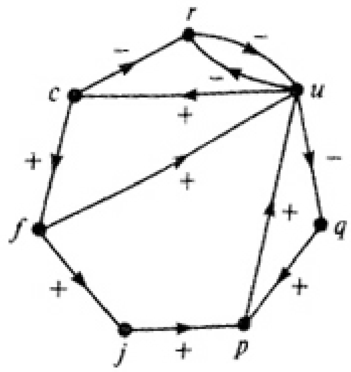
Bir populasyondaki artış (p), kirlilikte artışa (w) neden olur ve bu da bakteri sayısında artışa (b) ve hastalıklara (d) sebep olur. Bu şekildeki bir çevrim, değişkenlerin birindeki (p) artış aynı değişkende düşüşe sebep oluyorsa buna negatif geri bildirim (feedback) çevrimi denir.

Diğer taraftan; populasyondaki (p) bir artış, modernleşme miktarında (m) artışa sebep olur, bu da sağlık hizmetlerinde (s) artışa, bu ise hastalık miktarında (d) düşüşe neden olur ve bu da yine populasyonda (p) artışa neden olur. Bu şekildeki bir çevrimde; değişkenlerin birindeki artış, yine aynı değişkende artışa neden oluyorsa, buna pozitif geri bildirim çevrimi denir.

Negatif ve pozitif geri bildirim çevrimleri bazen sırasıyla, sapmada artış ya da azalmaya karşı koyma(deviation-counteracting) ve sapmayı kuvvetlendirme (deviation-amplifying) çevrimlerine işaret eder. Verilen bir çevrimin pozitif veya negatif geri bildirim çevrimi olduğunu görmek kolaydır, her pozitif geri bildirim çevriminde çift sayıda yay vardır. Her negatif geri bildirim çevriminde ise tek sayıda yay vardır. Bunun nedeni; bir artış ya da azalıştaki sapma pozitif geri bildirim çevriminde karşı koymadır. Karşı koymaya bir sonraki negatif yay tarafından karşı konur. Bir negatif geri bildirim çevriminde en son karşı koymaya karşı konulamaz.

3.2.3 Elektrik Enerjisi Talebi

Aşağıdaki işaretli yönlü graf, enerji kullanımındaki değişimlerin eş zamanlı basitleştirilmiş bir sunumunu verir. p'den u'ya olan yay + işaretlenmiştir. Çünkü populasyon miktarında artış olduğu gibi enerji kullanım miktarında da artış vardır. u'dan r'ye olan yay - işaretlenmiştir çünkü kullanılan enerji miktarı arttıkça kilowat saat başına düşen elektrik maliyeti azalır. j'den r'ye bir yay yoktur çünkü işlerin sayısındaki artışın, elektrik maliyeti üzerinde çok az bir direkt etkisi vardır.



Şekil 3.17

c=enerji kapasitesi

f=alandaki fabrika sayısı

j=işlerin sayısı

p=populasyon sayısı

q=çevre kalitesi

r=kilowat saat başına düşen elektrik maliyeti

u=kullanılan enerji miktarı

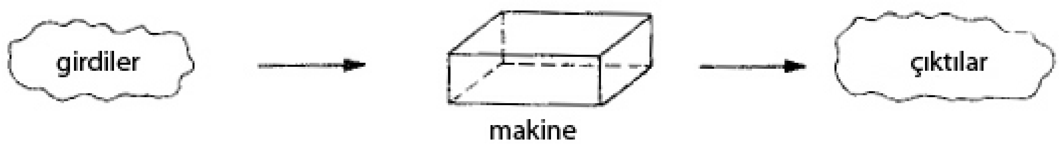
Her bir çevrimdeki negatif yaylar sayılarak ve son örnekteki durum kriteri kullanılarak şunlar söylenebilir; uqpu çevrimi bir negatif geri bildirim çevrimidir. Bununla birlikte cruc, cfuc, rur ve cfjpuc çevrimlerinin tümü pozitif geri bildirim çevrimidir.

Aslında, var olan tüm pozitif geribildirim çevrimlerinin c düğümünü içermesi enerji kapasitesi sistemlerinin neden kullanışsız olduğunu açıklar. Başlangıçtaki kapasite artışları er ya da geç aynı türdeki diğer artışlara neden olur.

Çevreciler tarafından deneysel olarak elde edilmiş olsa da, işaretli yönlü graf sunumu yapısal bir bakış açısından tam olarak nasıl meydana geldiğini açıklar. Değişkenlerin bazılarının (çevre kalitesi gibi) ölçülmesinin zor ya da imkansız olmasına rağmen, çizilebilecek sonuçları etkilemez. Bunun gibi basit bir modele dayanarak bile dikkate değer tahminlerde bulunulabilir.

3.2.4 Sınırlı Durum Makineleri

Yönlü graflar makineleri göstermek için de kullanılabilir. Buradaki konu sınırlı durum makineleriyle (sonlu otomat, dijital sistemler veya farklı sistemler) ilgilidir. Burada yapılan her şey; bir elektrik lambası için basit açma-kapama düğmesine ya da modern dijital bir bilgisayarın çeşitli karmaşıklıklarına uygulanabilir. Basit formuyla bir makine girdi ve çıktı kanallarıyla ’siyah kutu’ diye dikkate alınır. Makineye bir girdi verdiğimizde, makine onun üzerinde çeşitli işlemler yapar, bu işlemler sonucunda elde ettiği çıktıyı dışarı verir.



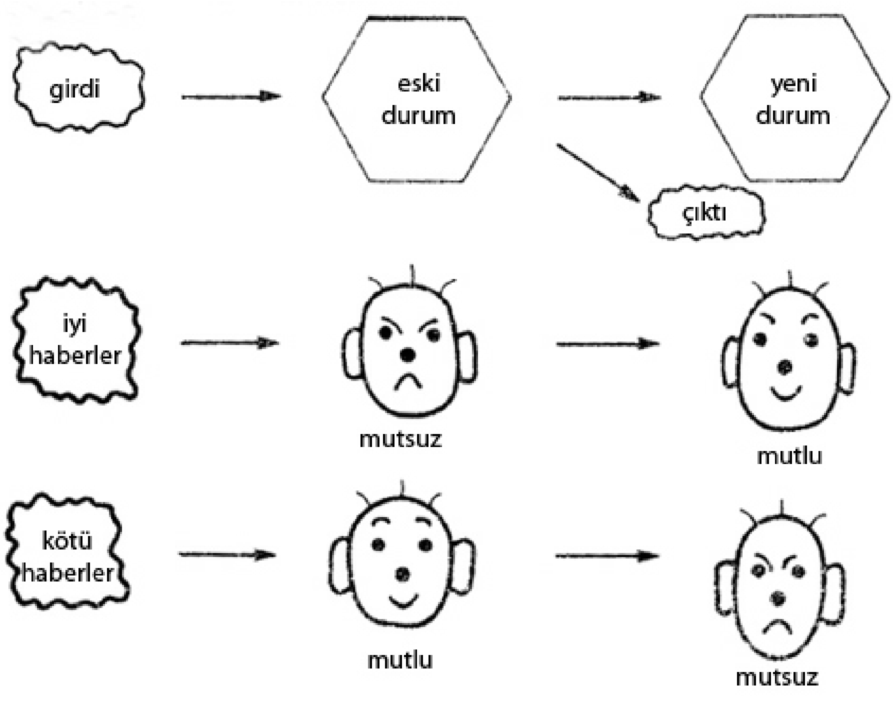
Şekil 3.18

Örneğin; biçerdöver bir makinedir, bunun girdileri tarladaki mısır saplarıdır, çıktıları da balyalardır. Kodlama makinesi bir makinedir, girdileri kodlanması istenen kelimelerdir, çıktıları da kodlanmış kelimelerdir. Arabanın gaz pedalı bir makine olarak düşünülebilir, girdiler ayakla uygulana basınç, çıktı ise hızın artışıdır. Makineleri kullanabilmik için onların çalışma sistemlerini bilmeye ihtiyaç yoktur.

Örneğin; şanzıman sisteminin nasıl çalıştığı bilinmeden araba kullanılabilir, ya da sindirim sisteminin nasıl çalıştığı bilinmeden yemek yenebilir. Bu şekilde girdi ve çıktılara bakarak makineler çalıştırılabilir.

Bu bahsedilenler sınırlı durum makinelerine de uygulanabilir. Adlarından da belli olduğu gibi, sınırlı durum makineleri, herhangi bir zamanın her dakikasında sonlu sayıda durumla ifade edilebilen makinelerdir. Bu makinelere bir girdi uygulanması durumu değiştirmeye neden olur ve sonuç çıktısı üretilir. Burada ’durum’ kelimesi günlük anlamıyla kullanılmaktadır. Örneğin; günlük hayatta ’mutlu’ veya ’mutsuz’ olmak gibi iki durumdan söz edilebilir, böyle bir duruma girdi uygulanmasıyla (iyi ya da kötü bir haber gibi) bu girdi durumda değişiklik üretir.

Aşağıdaki diyagram bunu göstermektedir.



Şekil 3.19

Böylece bir sınırlı durum makinesi; girdi setleri, çıktı setleri ve çeşitli girdi sinyallerinin etkisini tanımlayan sınırlı bir durum setinden meydana gelir.

Aşağıda bazı örnekler vardır.

İpli elektrik lambası: Bir ip tarafından yönetilen bir elektrik lambası düşünülecek olursa, ip birkaç kez çekildiğinde lamba tekrar tekrar açılıp kapanacaktır. Işık düğmesine bir makine gibi bakılırsa, onun girdileri ipin çekilmesidir. Durumlar, açılma ve kapanmadır. Çıktıları da ışık veren ya da ışık vermeyen ampüldür.

Şekil 3.20

Toplama makinesi: 100 milyona kadar olan sayıları toplayan bir toplama makinesi olsun. Numaraları vererek normal yoldan bir toplama gerçekleştirilip sonuç elde edilebilir. Örneğin; 63.360'a 8.128'i ve 33.550.336'yı verip uygulanırsa

girdi→ 63. 360 ve çıktı 63. 360

girdi→ 8. 128 ve çıktı 71. 488

girdi→ 33. 550. 336 ve çıktı 33. 621. 824 tür.

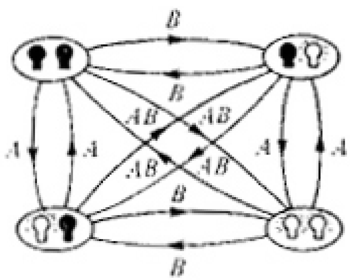
Makinenin çalışmasındaki mantık; yukarıdaki açma kapama düğmesi mantığıyla aynıdır.

Bunlara değişik hesaplamalar yapabilen çok daha kompleks makineler (digital bilgisayarlar gibi) eklenebilir.

Sonlu durum makineleri bir yönlü grafla gösterilebilir. Bu yönlü grafın düğümleri çeşitli durumları ifade eder, yayları ise bir durumdan diğerine geçişi gösterir. Örneğin; iki yönlü bir anahtar bir yönlü grafla gösterilebilir. Bu yönlü grafın düğümleri açma ve kapamadır. İki yay da ipin çekilmesini ifade eder.

Şekil 3.21

A ve B gibi iki anahtar varsa ve girdiler anahtarlardan birinden veya ikisinden oluşuyorsa sonuç yönlü grafı aşağıdaki gibidir:

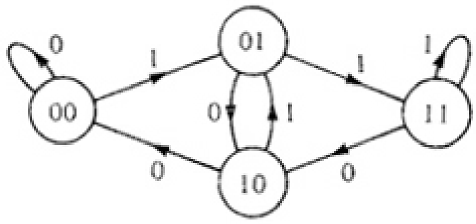


Şekil 3.22

Diğer örnek, aşağıdaki yönlü grafta gösterilen iki dakika gecikmeli makinedir. Dört durum vardır.

Durumlar 00, 01, 10 ve 11 dir. 0 ve 1 olmak üzere iki girdi olması mümkündür. Eğer 00 durumundan başlarsak ve girdi olarak 0 ı uygularsak aynı durumda kalırız.

Diğer taraftan, 00 durumunda girdi olarak 1 i uygularsak 01 durumuna ulaşırız.

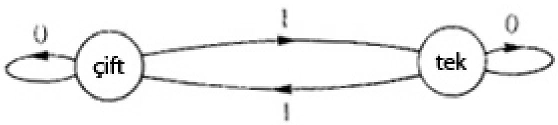


Şekil 3.23

Herhangi bir durumla (örneğin 10 başlanıp) ve 1 girdileri uygulanırsa 11 durumuna ulaşılır. Burada hangi durumla başlandığı sonucu değiştirmez. Herhangi bir durumla başlanır, 0 ve 1 girdileri uygulanırsa 01 durumuna ulaşılır. Her durumda; iki girdiden hangisi girilirse girilsin, sonuç yine 0 dır. Yani 1 ve 1 girdilerini girildiyse ulaşılan durum 11 dir. 0 ve 1 girdileri girilsin, sonuçta elde edilen durum 01 dir.

İki dakika gecikmeli makine devamlı iki önceki girdiyi hatırlatır.

Bir diğer makine tipi; eşitlik makinesidir. 1'lerin toplam sayısı tek ya da çifttir. Çift ile başlanarak ve 00,110,0101,011010 ve 011010011 gibi girdilerin çeşitli dizileri denenerek devam edilir.



Şekil 3.24

Çift durumu ile başlansın. Çift sayıda 1 içeren herhangi bir dizi uygulandığında, çift durumuyla sonlanır. Örneğin; 0101 girdisini uygulansın (çift sayıda 1 içerir). Çift ile başlanıyor, 0 uygulanırsa çift, 1 uygulanırsa tek. 0 uygulanırsa tek, 1 uygulanırsa çift elde edilir.

Yine çift durumuyla başlansın. Tek sayıda 1 içeren herhangi bir dizi uygulandığında tek durumuna ulaşılır. Örneğin; 011010 girdisi uygulansın.(tek sayıda 1 içerir.)

Çift ile başlanıyor

→ 0 →çift→ 1 →tek→ 1 →çift→ 0 →çift→ 1 →tek→ 0 →tek (tek durumuyla sonlanır)

Birbirini takip eden değişimlerin her zaman çift ile başlamasında ve bitmesinde direnilirse, sadece kabul edilebilir diziler çift sayıda 1 içerir. Başlama ve final durumlarının bu seçimiyle makine sadece bu dizileri tanır ve kabul eder.

Eğer birbirini takip eden değişimlerin çift ile başlayıp, tek ile bitmesinde ısrar edilirse, kabul edilebilir diziler tek sayıda 1 içerir.

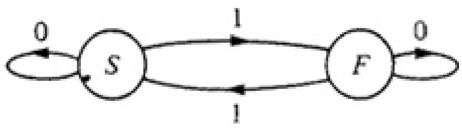
Makineler ve diller arasında ilişkiler düşünülürse; dil (a,b,c,...) ya da (0,1,...) gibi verilen alfabelerden oluşan kelimelerin bir koleksiyonudur.

Örneğin; alfabe a ve b gibi iki harften oluşacak şekilde alınırsa, beş harfli b, aba, aabaa, aabbaa, aababaabba şeklinde 5 kelimeli bir dil düşünülebilir, ya da alfabe 0 ve 1 numaralarından oluşacak şekilde alınırsa, kelimeleri tek sayıda 1'lerin dizisinden oluşan bir dil düşünülebilir.

Bu şekildeki bir dilin kullanılabilir olması için; bu dilin bütün kelimelerini kabul eden ama sembollerin kombinasyonunu içermeyen bir makine inşa edilmelidir.

Bu şöyle yapılabilir; bir duruma başlangıç durumu (S) ve bir diğer duruma bitiş durumu (F) denilsin ve kabul edilebilir bir kelime isimlendirilsin. Kabul edilebilir kelimeler; S ile başlandığında, F çıktısını veren girdilerin dizisidir.

Örnek 3.2.1

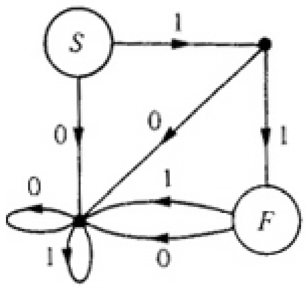


Alfabe: 0, 1

Şekil 3.25

Burada, sadece kabul edilebilir kelimeler tek sayıda 1 içerir, çünkü S ile başlandığında F'ye ulaşmayı sağlayan sadece bu kelimelerdir.

Örnek 3.2.2

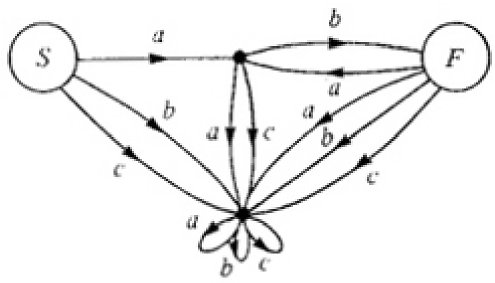


Alfabe: 0, 1

Şekil 3.26

Burada S'den F sadece 1 ve 1 girdileriyle elde edilebilir. Bu makine sadece 11 kelimesini tanır, başka hiçbir kelimeyi kabul etmez.

Örnek 3.2.3



Alfabe: a, b, c

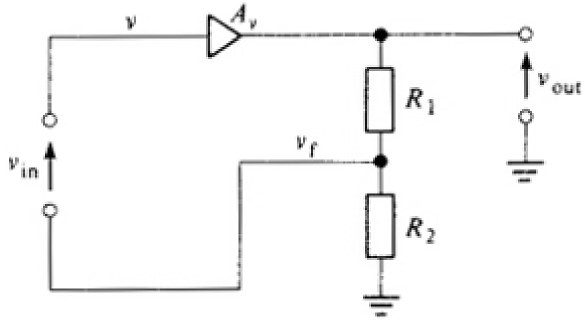
Şekil 3.27

Burada S’den F ab, abab, ababab... dizileriyle elde edilebilir. Bunlardan başka S’den F elde edebilecek dizi yoktur. Makine sadece bu kelimeleri kabul eder, başka kelime tanımaz.

Daha gelişmiş bir aşamada yönlü graflarla ilgili genel sonuçlar sonlu durum makineleriyle ilgili sonuçları çıkarmak için kullanılabilir. Burada yönlü grafları kullanmanın temel avantajları tanıtılmıştır.

3.2.5 İşaret- Akış Grafları

Aşağıdaki diyagramda gösterilen devre; Av voltaj kazanımı ile bir amplifikatör (yükselteç) kullanır.



Şekil 3.28

V_{in}=giren voltaj

V_{out}=çıkan voltaj

V=işlemsel amplifikatördeki giren voltaj

V_f=geribildirim voltajı

R_1 ve R_2= rezistanslar

Voltajlar aşağıdaki eşitliklerle ilişkilendirilebilir.

$$V = V_{in} + V_f \,, \quad V_f = kV_{out} \quad V_{out} = A_v V$$

Burada; $k = \frac{R_2}{R_1+R_2}$

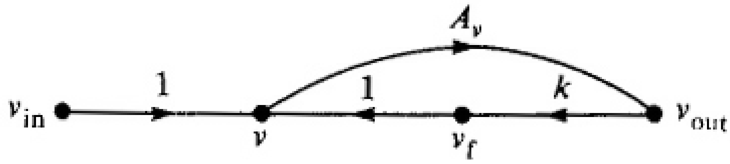
Bu eşitliklerden; Vve V_f yi yerine yazılarak V_{out}, V_{in} cinsinden yazılabilir.

$V_{out} = \frac{A_v}{1-kA_v} V_{in}$ elde edilebilir.

$$V_{out} = A_v V$$
$$V_{out} = A_v(V_{in} + V_f)$$
$$V_{out} = A_v(V_{in} + kV_{out})$$
$$V_{out} = A_v V_{in} + A_v k V_{out}$$
$$V_{out} - A_v k V_{out} = A_v V_{in}$$
$$V_{out}(1 - A_v k) = A_v V_{in}$$
$$V_{out} = \frac{A_v}{1-kA_v} V_{in}$$

Şimdi bir ifade elde etmek için alternatif bir metot veriliyor.

Bu metot kontrol mühendisliğinde kullanılır ve işaret akış grafı adı verilen bir yönlü grafla gösterilebilir. Bazen sadece akış grafı da denilebilir. Örnekte, işaret-akış grafının V_{in}, V_{out}, V_f ve V'ye tekabül eden dört düğümü vardır.



Şekil 3.29

Yayların üzerindeki sayılarla yukarıdaki eşitlikler arasındaki ilişkiye dikkat ediniz. V düğümüne giren iki tane yay vardır. Biri etiket1 ile V_{in}, diğeri etiket2 ile V_f dir. Bu aşağıdaki eşitlikle ifade edilebilir.

$$V = 1V_{in} + 1V_f \qquad \#$$

V_f düğümüne giren bir tane yay vardır. Bu etiket k ile V_{out} düğümüdür. Bu da $V_f = kV_{out}$ eşitliği ile ifade edilebilir.

Genel olarak; $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_kx_k$ eşitliği k tane yayla birlikte x düğümüyle gösterilebilir ($a_1$ile x_1 yayı, $a_2$ile x_2 yayı... bu şekilde devam eder).

Bu örnekte, lineer eşitliklerin kümesiyle ilişkili değişkenler vardır. Bu örnekler çözülerek, verilen herhangi değişken çiftleri arasındaki ilişki bulunabilir. Bir işaret-akış grafı inşa edilip, bu graf bir yayla birleştirilmiş iki düğüm içeren bir yönlü grafa indirgenebilir. Bu eşitlikleri çözmek kolaydır. İstenen ilişki yönlü graftan direkt okunabilir. Örneğin; şekildeki yönlü graftan aşağıdaki ilişkiler kolaylıkla anlaşılabilir.

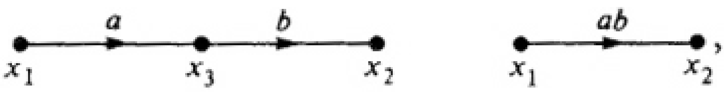
Şekil 3.30

1) Katlı ayrıtlar elenirse;

Şekil 3.31

$x_2 = ax_1 + bx_1$ ise, buradan $x_2 = (a+b)x_1$ elde edilir.

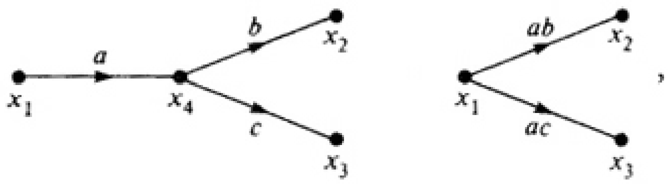
2) Bir yoldaki düğümler elenirse;



Şekil 3.32

$x_3 = ax_1$ ve $x_2 = bx_3$ buradan $x_2 = (ab)x_1$ dir.

3) Y nin öğeleri elenirse;



Şekil 3.33

$$x_4 = ax_1 \;\; , x_2 = bx_4 \;\; \text{ve } x_3 = cx_4$$

$$x_2 = (ab)x_1 \text{ ve } x_3 = (ac)x_1$$

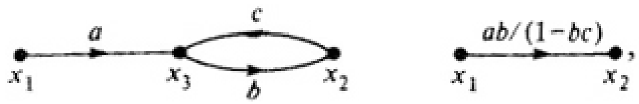
4) Bir ilmik elenirse;

Şekil 3.34

Buradan;

$$x_2 = ax_1 + bx_2$$
$$x_2 - bx_2 = ax_1$$
$$x_2(1-b) = ax_1$$
$$x_2 = \frac{ax_1}{1-b} \text{ elde edilir.}$$

5) 2 uzunluğunda bir çevrimin elenmesiyle;



Şekil 3.35

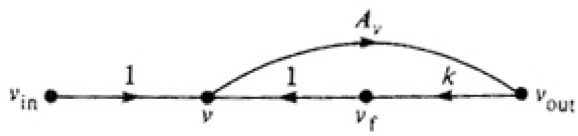
$$x_3 = ax_1 + cx_2 \text{ ve } x_2 = bx_3 \text{ tür.}$$

Buradan;

$$x_2 = b(ax_1 + cx_2)$$
$$x_2 = bax_1 + bcx_2$$
$$x_2 - bcx_2 = bax_1$$
$$x_2(1 - bc) = bax_1$$
$$x_2 = \frac{abx_1}{1-bc} \text{ dir.}$$

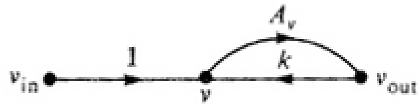
Bu rutinlerin uygulamada nasıl kullanılabileceğini görmek için iki örnek düşünülebilir. Bunlardan biri; amplifikatör devredir.

İşaret-akış grafıyla başlanır.



Şekil 3.36

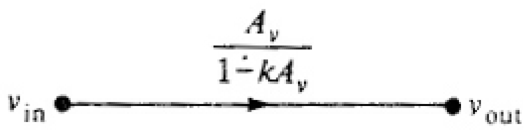
$V_{out}V_fV$ yoluna 2. redaksiyonun uygulanmasıyla V_f düğümünü elenir.



Şekil 3.37

$$V = 1V_{in} + kV_{out}$$
$$V_{out} = VA_v + 1V$$
$$V = 1V_{in} + kV_{out} = A_v V_{out}$$

Redaksiyon 5'in uygulanmasıyla, 2 uzunluğundaki çevrim elenir.

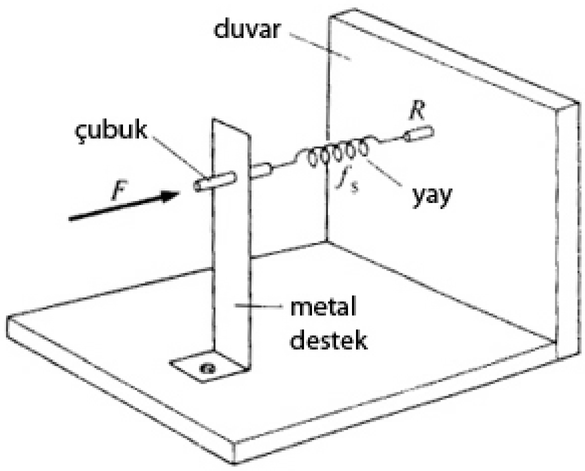


Şekil 3.38

Buradan$V_{out} = \frac{(A_v+1)}{1-kA_v} V_{in}$ eşitliği elde edilir.

$$V_{out} = \frac{(A_v+1)}{1-kA_v} V_{in}$$

İkinci örnek için aşağıdaki şekildeki gibi bir mekanik sistem düşünülebilir.



Şekil 3.39

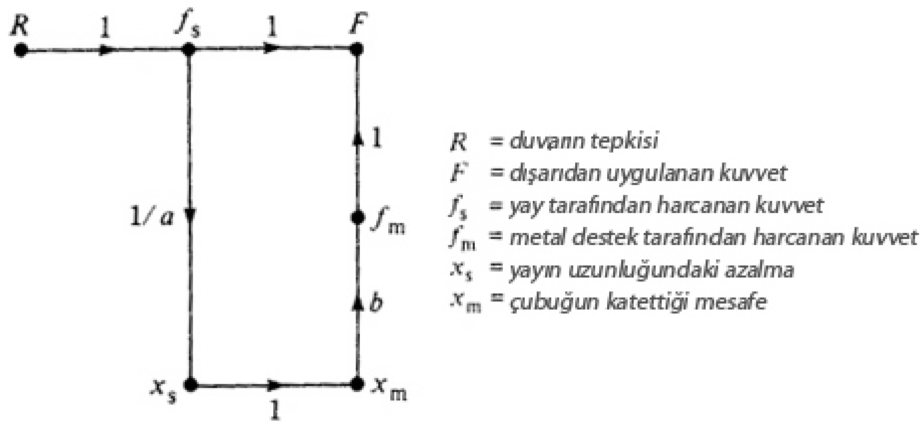
Çubuk, F dış kuvvetinin etkisi altında yatayda hareket eder. Çubuk hareket ettikçe, f_m kuvvetine sahip esnek metal desteği büker ve f_s kuvvetine sahip kaynağı sıkıştırır. R tepkisine sahip kaynak duvara iliştirilmiştir.

Kuvvetler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$f_s = R, \; F = f_s + f_m$$
$$x_s = (1+a)f_s, \; f_m = bx_m$$
$$x_m = x_s$$

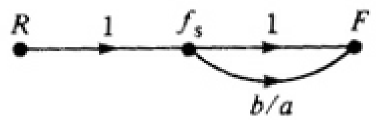
x_s; kaynağın boyundaki azalma x_m; çubuk tarafından hareket ettirilen uzunluktur. a ve b sabitlerdir.

F kuvveti ile R tepkisi arasındaki ilişki bulunmak isteniyor. Bunun için işaret-akış grafı çizilmelidir.



Şekil 3.40

f_m, x_m ve x_s düğümlerini elemek için; $f_s x_s x_m f_m F$ yoluna 2. redaksiyon uygulanır.



Şekil 3.41

$x_s = (\frac{1}{a})f_s$ eşitliğini yazılırsa,

Buradan, $f_s = ax_s$ olur. Böylece bu redaksiyon uygulanabilir. Uygulama ile eşitlikler kolaylıkla indirgenebilecek şekilde yazılabilir.

Redaksiyon 1'in uygulanmasıyla, yaylar elenir.

Şekil 3.42

Redaksiyon 2 uygulanırsa, f_s düğümü elenir.

Şekil 3.43

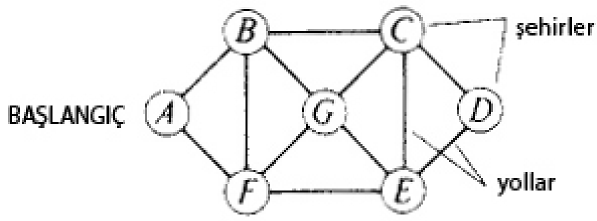
Böylece F ile R arasında $F = (1 + \frac{b}{a})R$ şeklinde bir ilişki elde edilir.

BÖLÜM 4

EULER GRAFLARI VE UYGULAMA ALANLARI

Bu bölümde; Euler grafları tanımlanmakta, bir grafın Euler graf olması için gerekli ve yeterli koşul verilmektedir. Euler grafları arasındaki bağlantılar gösterilmektedir. Euler graflarının uygulama alanlarına örnek olarak; bir şehirdeki kar-temizleme yolları, labirentten çıkış, telekomünikasyon problemleri üzerinde durulmaktadır.

Kaşifin Problemi (**Explorer's Problem**) **:** Bir bölgeyi keşif için dolaşan bir kimse, bölgedeki şehirler arasındaki bütün rotaları dolaşmak ister. Her rotadan sadece bir kere geçecek şekilde bir tur bulunabilir mi?



Şekil 4.1

Kaşif, A'dan başlayan ve her yoldan bir kere geçip tekrar A'da biten bir tur bulmak istiyor. Böyle bir tura örnekler; A_B_C_D_E_F_B_G_C_E_G_F_A ve A_F_G_C_D_E_G_B_C_E_F_B_A dır.

Kaşif, her yoldan sadece bir kere geçer, aynı şehirden birden fazla geçebilir .

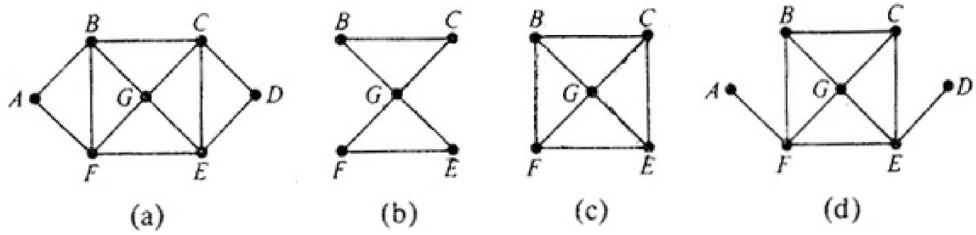
Bu problem bir grafla ifade edilebilir. Bu grafın düğümleri şehirlere, ayrıtları yollara tekabül eder. Kaşifin problemi; grafın her ayrıtını içeren bir kapalı gezi bulma problemidir.

4.1 Euler Grafları

Tanım 4.1.1: Bağlantılı bir G grafının her ayrıtını içeren bir kapalı gezi varsa G grafına **Euler graf** denir. Bu gezi, **Euler gezisi** olarak adlandırılır.

Bağlantılı bir G grafının her düğümünü içeren bir çevrim varsa G grafı Hamiltondır. Buradaki çevrim, Hamilton çevrim olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.1



Şekil 4.2

Graf (a) Eulerdir.

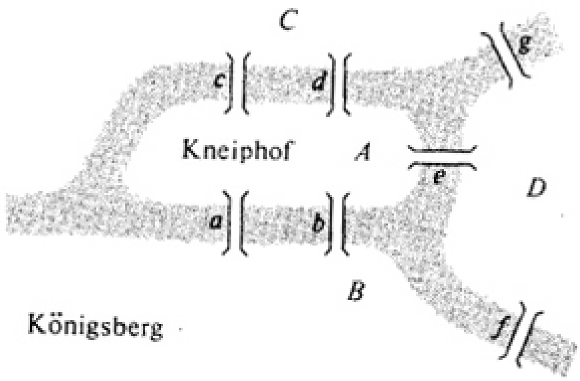
Graf (b) Eulerdir (kapalı gezi vardır). Buradaki Euler gezisi B_C_G_F_E_G_B dir (Düğüm tekrar edebilir ama ayrıt tekrarı yok).

Graf (c) Euler değildir.

Graf (d) Euler değildir.

.

Königsberg şehrinin dört bölümü (A, B, C ve D) ; aşağıda görüldüğü gibi (a, b, c, d, e, f ve g) yedi köprü ile birbirine bağlanmıştır.



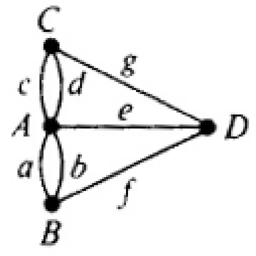
Şekil 4.3

Königsbergli vatandaşlar her köprüden bir kere geçerek başlangıç noktasına geri dönebilecekleri bir rota bulamıyorlar ve bu görevin imkansız olduğunu düşünmeye başlıyorlar.

Leonhard Euler (1707-1783) bu problemi araştırana kadar ispatlamanın imkansız olduğu düşünülmüştür. Eulerin ispatı 1736'daki Solutio problematis ad geometriam situs pertinents adlı kağıdında yer alır. Bu kağıt graf dilinde yazılmamış olmasına rağmen içindeki fikirler özellikle graf-teoratiktir ve bu konu üzerine yazılmış en eski kağıt olarak tanıtılmıştır. Bu kağıt Königsberg köprüleri probleminin çözümüyle direkt olarak ilişkilidir.

Königsberg köprüleri problemi bir grafa uyarlanarak çözülebilir. Bu grafı çizerken dört alan düğümler olarak, yedi köprü de bu düğüm çiftlerini birleştiren ayrıtlar olarak alınıp, aşağıdaki şekildeki gibi bir graf çizilebilir. Her köprüyü bir kez geçerek bir rota bulma problemi bu grafta bir Euler gezisi bulma problemine tekabül eder.

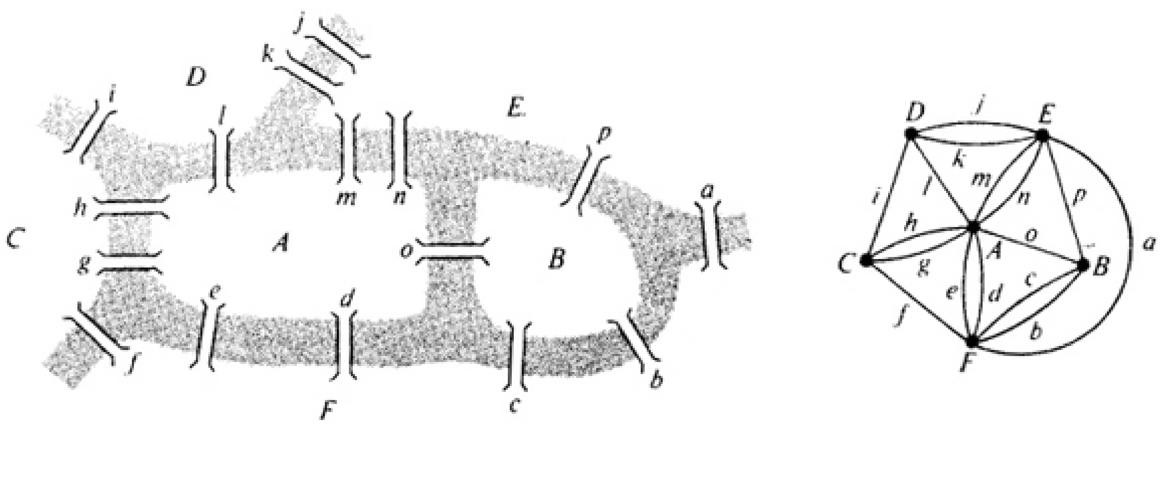
Görüldüğü gibi bu şekilde hiçbir Euler gezisi yoktur. O halde; Königsberg köprülerinin her birini bir kez geçecek şekilde bir rota yoktur.



Şekil 4.4

Euler, köprülerin ve alanların daha genel bir düzenlenişinde bütün köprüleri bir kez geçecek şekilde bir rota bulma problemi düşünmüştür. Böyle bir rota bulmanın ne zaman mümkün olduğu ve bu rotaya tekabül eden grafın ne zaman Euler graf olduğunu açıklayan bir kural vermiştir.

Euler'in kağıdından alınan diyagram aşağıda verilmektedir.

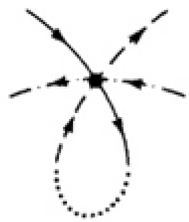


Şekil 4.5

Tekabül eden grafı çizerek ve bu grafın içindeki Euler gezisini bularak, on altı köprünün her birinden bir kez geçecek ve başlangıç noktasına geri dönecek şekilde bir rota bulunabilir. Örneğin; E noktasından başlansın ve köprüleri aşağıdaki sırada geçilsin.

a_b_c_d_e_f_g_h_i_j_k_l_m_n_o_p

Her köprüyü bir kez geçecek şekilde bir rota bulmak için (bu grafın içinde bir Euler gezisi bulmak) gerek ve yeter koşul; şehrin bir bölümüne bir köprü ile geçildiğinde, oradan bir başka köprüyle ayrılmaktır. Bunun anlamı; herhangi bir düğüme gidildiğinde, o düğüm bir başka ayrıtla terk edilmelidir. O zaman bu düğümün derecesi 2 olur. (Bu ilk ve son ayrıtlar içinde geçerlidir. Bu, başlangıç düğümüne 2 derece kazandırır). O halde bir Euler grafta düğüm derecesi 2'lerin toplamıdır. Bu da bir çift sayıdır.



Şekil 4.6

Teorem 4.1.1: G bir bağlantılı graf olsun. G grafının Euler olması için gerek ve yeter koşul her düğümün derecesinin çift olmasıdır.

İspat:

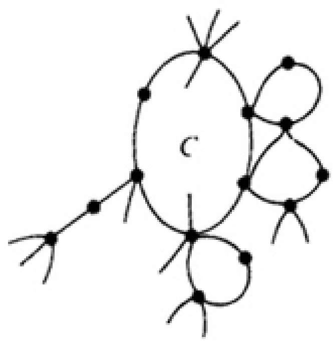
⇒ Eğer G'de bir Euler gezisi varsa, her ayrıt bir kez kullanılarak ve başlangıç noktasına dönerek bu gezi boyunca dolaşılabilir. G'nin bir düğümünden geçilince bu düğüm 2 derece kazanır, birinci düğüm dahil, çünkü burada bitiyor. G'nin herbir ayrıtı sadece bir kere kullanıldığı için, her düğümün derecesi 2'lerin toplamı kadardır, yani çift sayıdır.

⇐ G'nin her düğümünün derecesinin çift olsun. G'de bir Euler gezisi bulunabileceği gösterilmelidir. İlk olarak; G'nin bir C çevrimi içerdiği dikkate alınmalıdır

G'deki ayrıt sayısı m olsun.

m=0 için her düğümün derecesi çift olan sadece K_1 bağlantılı grafı vardır ki, bu da Eulerdir.

m'den daha az ayrıtlı herhangi bir bağlantılı G grafı için G nin her düğümünün derecesi çift sayı olsun. m ayrıtlı bir G grafı düşünülecek olursa, G'den C çevriminin ayrıtlarının silinmesiyle oluşan graf H olsun. H grafının m'den daha az ayrıtı vardır ve H'nin her düğümünün derecesi çifttir. H bağlantılı olmamasına rağmen, H'nin her bileşeni bağlantılıdır ve sadece çift dereceli düğümleri vardır. Tümevarım hipotezinden; H'nin her bileşeni Eulerdir.



Şekil 4.7

Şimdi G için bir Euler gezisi bulunmalıdır. C çevrimindeki herhangi bir v düğümüyle başlansın ve H'nin bir bileşenine gelene kadar C'nin ayrıtları dolaşılsın. Bu bileşen için Euler gezisi alınırsa, er geç C çevrimine dönülür. C boyunca bu şekilde devam edilsin. H'nin bileşenlerinin Euler gezilerini alınarak, bunlara gelinsin. G'nin her ayrıtını bir kere dolaşmış olarak, er geç başlangıç düğümü v'ye dönülsün. Böylece bir Euler gezisi elde edilmiş olur.

Yukarıdaki teoremin dezavantajı yapısal değildir. Verilen bir grafta bir Euler gezisinin nasıl inşa edileceğini göstermez. Bir Euler gezisi inşa etmenin bir yolu; aşağıdaki algoritmayı takip etmek ya da ispatsız olarak verilecek prosedürdür.

Fleury'nin Algoritması

Eğer G bir Euler grafıysa, aşağıdaki adımlar her zaman geçerlidir ve G'de bir Euler gezisi üretir.

ADIM 1: Bir u başlangıç düğümü seçin.

ADIM 2: Her bölümde herhangi bir uygun ayrıtı çapraz geçin, eğer başka alternatif yoksa sadece bir köprü seçin.

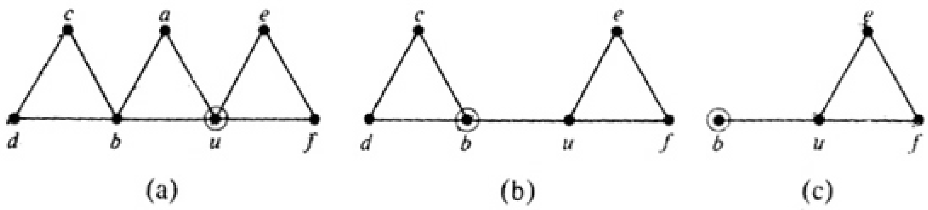
ADIM 3: Her ayrıtı çapraz geçtikten sonra, onu silin(Derecesi 0 olan herhangi bir düğümün silinmesi sonucu verir) ve başka bir uygun ayrıt seçin.

ADIM 4: Daha fazla ayrıt yoksa durun.

Bu algoritmanın uygulanması çok kolaydır. Her bölümde sadece son uğrak olarak bir köprü seçiliyor. Bu özellik gereklidir çünkü bir köprü bir defa çapraz geçildiğinde bırakılan bir bölüme tekrar dönülemez.

Örnek 4.1.2

Aşağıdaki graf(a)'ya Fleury Algoritması uygulanırsa,



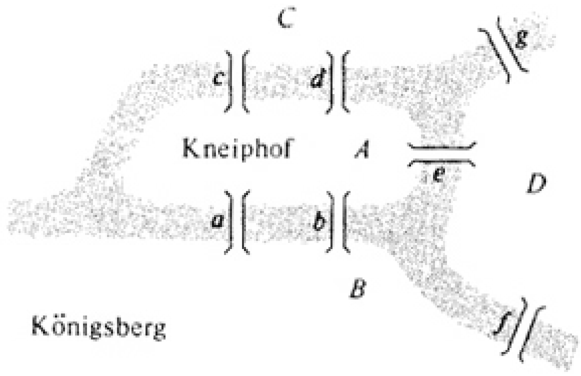
Şekil 4.8

u düğümüyle başlanır, u_a ayrıtı seçilebilir ve a_b ile devam edilebilir. Bu ayrıtlar silinerek (ve a düğümünü) b grafı elde edilir. b_u ayrıtı seçilemez çünkü bu bir köprüdür. Böylece b_c ayrıtı seçilir. c_d ve d_b ile devam edilebilir. Bu ayrıtlar silinsin (c ve d düğümleri de siliniyor) ve böylece c grafı elde edilir.

Şimdi başka alternatif yoktur. b_u köprüsünü çapraz geçilmek zorundadır. u_e_f_u çevrimi çapraz dolaşılarak Euler gezisi tamamlanır. Bu gezi u_a_b_c_d_b_u_e_f_u dur.

4.2 Euler Graflarının Uygulama Alanları

4.2.1 Ayrıt-İzlenebilir Graflar: Königsberg'li vatandaşların yedi köprünün her birinden bir kere geçmek istedikleri ama dolaşılarına farklı yerlerde başlayıp dolaşılarını farklı yerlerde bitirmek istedikleri varsayılırsa, bu sınırlayıcı koşullar altında böyle bir dolaşı mümkün müdür?



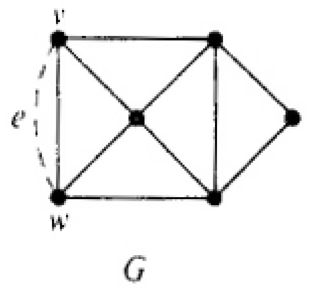
Şekil 4.9

Yukarıdaki diyagramla yapılacak küçük bir deney, durumlara yapılan değişikliğe rağmen böyle bir dolaşının mümkün olmadığı konusunda ikna edicidir.

Tanım 4.2.1: G bağlantılı bir graf olsun. G nin her ayrıtını içeren bir açık gezi varsa G ye **ayrıt-izlenebilir graf** denir.

Teorem 4.2.1: G bir bağlantılı graf olsun. G nin ayrıt-izlenebilir olması için gerek ve yeter koşul G nin iki tane tek dereceli düğümünün olmasıdır.

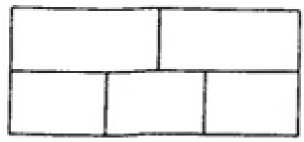
İspat: G bir ayrıt-izlenebilir graf olsun. v ve w, açık gezinin başlangıç ve bitiş düğümleri olsun. v ve w düğümlerini birleştiren bir e ayrıtı eklenirse Euler grafı elde edilir. Teorem 4.1.1 den bu grafın her düğümünün derecesi çift olmalıdır. e ayrıtı kaldırılarak G yeniden elde edilebilirse sadece v ve w tek dereceli düğümler olur.



Şekil 4.10

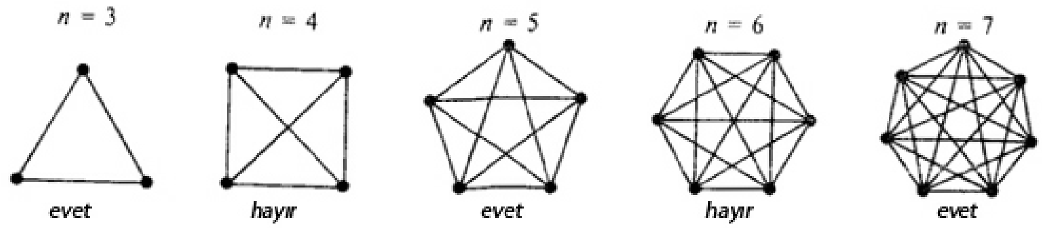
G’nin iki tane düğümü v ve w tek dereceli olsun. Eğer v ve w düğümlerini birleştirecek bir e ayrıtı eklenirse her düğümü çift dereceli olan bir bağlantılı graf elde edilir. Teorem 4.1.1’den bu graf Euler grafı olmalıdır ve bir Euler gezisi içermelidir. Bu geziden e ayrıtının kaldırılmasıyla G’nin her ayrıtını içeren bir açık gezi elde edilir. Böylece tanımdan G’nin ayrıt-izlenebilir olduğu söylenebilir. Bu ispattan tek dereceli iki düğümün, G’nin her ayrıtını içeren bir açık gezinin başlangıç ve bitiş düğümleri olduğu anlaşılır.

4.2.2 Diyagram-Kopya Bulmacalar: Eğlenceli bulmacalar kitaplarındaki ortak problem tipi; verilen bir diyagramı mümkün olduğu kadar az, aralıksız kalem darbesiyle ve diyagramın herhangi bir bölümünden iki defa geçmeden çizmektir. Örneğin aşağıdaki diyagramı dört aralıksız darbeyle çizmek kolaydır. Ama üç tane kalem darbesiyle yapılabilir mi?



Şekil 4.11

1809'da L.Poinsot, eğer n tek sayı ise birbirine bağlantılı n tane nokta içeren diyagramların bir aralıksız darbe ile çizileceğini göstermiştir. Eğer n çift sayı ise bu mümkün olmaz.



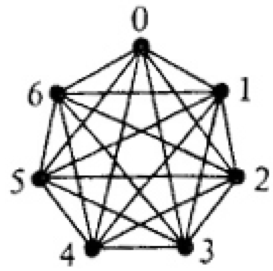
Şekil 4.12

Graf Teorinin terminolojisinde, bu sadece n'in tek değerleri için K_n grafının Euler olduğunu söylemekle eş anlamlıdır. Poinsot'un ifadesinde dikkate değer olan; Poinsot n tek olduğunda bir Euler gezisi bulmak için usta işi bir yapı vermiştir.

1847'de J.B. Listing; bu diyagram-kopya bulmacalarının bir tartışmasını içeren Vor studien zur Topologie (Topoloji'deki Giriş Çalışmaları) başlıklı önemli bir bilimsel inceleme yayınlamıştır. J.B. Listing yukarıda verilen bulmacadaki diyagramın tek dereceli 8 düğümünün var olduğunu söylemiştir. Böylece dörtten daha az sayıda aralıksız darbeyle çizilemeyeceğini söylemiştir. Ayrıca aşağıdaki diyagramın bir baştan başlanıp diğerinde bitirecek şekilde bir aralıksız darbeyle çizilebileceğini belirtmiştir. Çünkü bunlar sadece tek dereceli düğümlere karşılık gelen noktalardır.

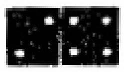
4.2.3 Dominolar: K_7 tam grafı Eulerdir. Çünkü bunun düğümlerinin her birinin derecesi altıdır. Eğer bu düğümler 0, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 diye adlandırılırsa Euler gezisi aşağıdaki gibi ayrıtları sıralanarak oluşturulabilir.

01, 12, 23, 34, 45, 56, 60, 02, 24, 46, 61, 13, 35, 50, 03, 36, 62, 25, 51, 14 ve 40



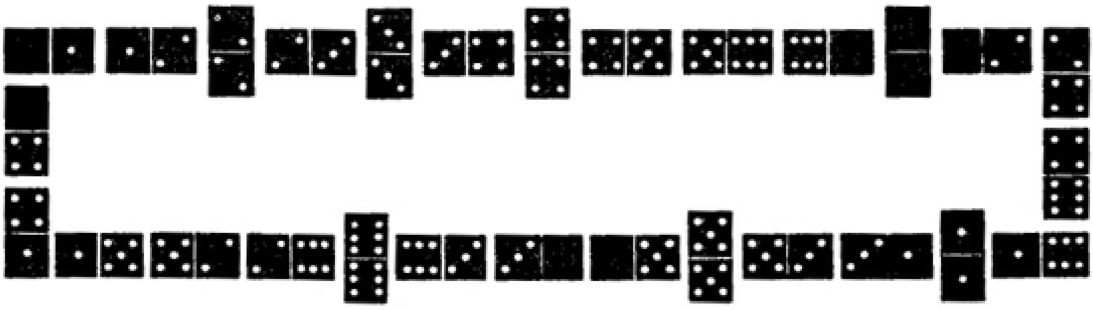
Şekil 4.13

Bu ayrıtların her biri bir dominoya tekabül eder. Örneğin ayrıt 24 aşağıdaki dominodur.



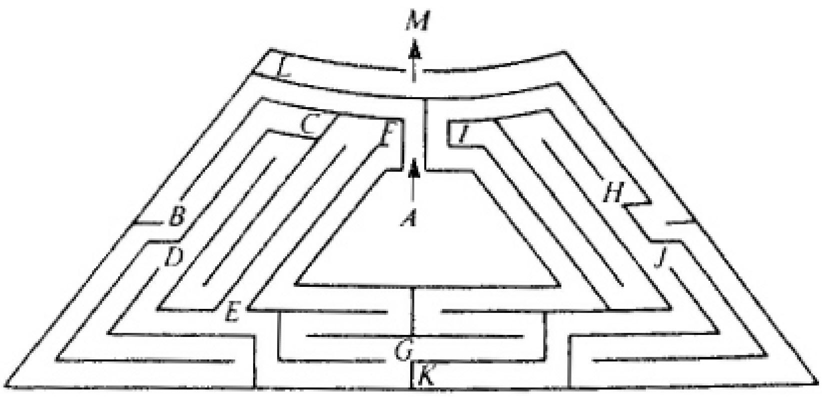
Şekil 4.14

Yukarıdaki Euler gezisi normal kümenin bütün dominolarının aralıksız bir sırada dizilişine tekabül eder (0-0,1-1,...,6-6 gibi çiftler dışında). Bu basit dizi bulunduktan sonra çiftler uygun olacak şekilde aralara konur. Bu şekilde dominoların bilgisayar oyununu göstermek mümkündür. Aşağıda görülen dominolar halkası yukarıdaki Euler gezisine karşılık gelir.



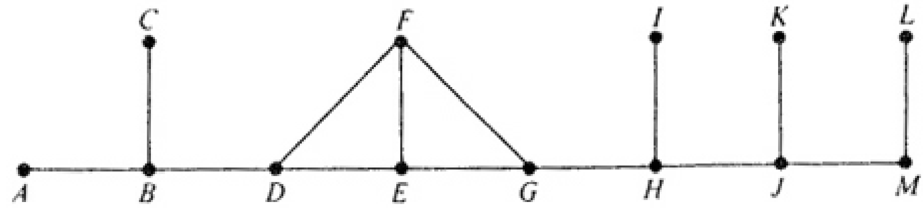
Şekil 4.15

4.2.4 Labirentler: 19. yüzyılın sonunda bir labirentten çıkma problemine olan ilgi çok artmıştır. Bu durum Euler graflarına uygulanabilir. Bunun için özel bir labirent seçilmelidir. Mesela; Hampton Court Labirentlerinden biri.



Şekil 4.16

Bir labirentin haritası her kavşakta uygun seçimlere işaret eden bir graf ile ifade edilebilir. Örneğin, Hampton Court Labirentinde B noktasına gelindiğinde iki seçimle karşılaşılır; bunlardan biri C'ye gitmektir, diğeri de D'ye gitmek. Bu labirent aşağıdaki graf ile gösterilebilir.



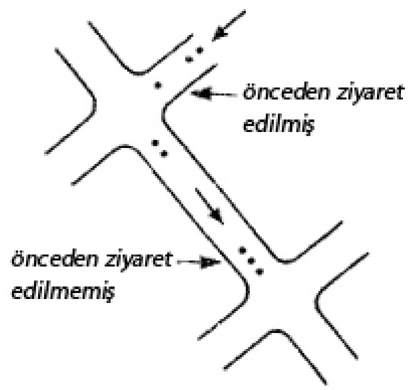
Şekil 4.17

Labirentin merkezi (A)'dan başlanıp, A_B_D_E_G_H_J_M yolu takip edilerek labirentin çıkışı (M)'ye ulaşılabilir, burada diğer bütün geçitler görmezden gelinmektedir. Şimdi keyfi bir labirentin merkezinden başlayıp çıkışında biten bir yol aranmaktadır. Aslında daha az kesin olunmalı ve grafın her ayrıtını içeren bir dolaşı aranmalıdır. Çünkü böyle bir dolaşıda merkezden geçilmeli ve bazı bölümlerde çıkılmalıdır. Grafın bağlantılı olması koşuluyla her zaman böyle bir dolaşı bulunabilir. Bunu görmek için her ayrıt bir katlı ayrıt çiftiyle değiştirilmelidir. Sonuçta her düğümü çift dereceli yeni bir graf elde edilir ve bu graf bir Euler gezisi içerir (Teorem 4.1.1'den). O halde, orijinal graftaki her ayrıtı iki kere içeren bir dolaşı vardır.

Maalesef bu varoluşçu bir tartışmadır ve labirentten çıkmak için hiç bir metot sağlamaz. Labirentin haritası varsa Fleury'un algoritmasıyla Euler gezisi oluşturulabilir ve problem çözülür. Ama bu, labirentin merkezinde olan ve elinde labirentin haritası olmayan biri için hiç bir fayda sağlamaz. En iyi labirent çıkış algoritması 1895'de Gaston Tarry tarafından yayınlanmıştır. Bu metot şu kurala dayanır: Başka alternatifiniz olmadıkça sizi ilk defa kavşağa yönlendiren hiç bir geçitten geri dönmeyin. Labirentte dolaşarak her kavşakta bu kurala uyarak, herhangi bir bağlantılı labirentte her geçitten (her yönde bir kere) en çok iki kere geçerek labirentten çıkılabilir. Sadece bir zorluk vardır; kavşaklara yönlendiren geçitlerin hangisinin kavşağa ilk defa yönlendirdiğinin farkına varmaktır. Tarry, bunu anlamak için bazı kurallar vermiştir.

a) Bir geçitten ilk defa geçerken girişe iki işaret bırakın ve kavşağın daha önce ziyaret edilip edilmediğine dayanarak bir ya da üç işaret bırakın.

b) Bir geçite tek bir işaretle girerken aynı yere ikinci işareti bırakın.



Şekil 4.18

Bu kurallar kullanılarak, verilen bir geçitten daha önce geçilip geçilmediğine karar verilebilir.

İşaret yoksa; geçit hiç bir yönde geçilmemiştir.

Bir işaret; geçit kavşak yönünde geçilmiştir. Şimdi bunun dışında bir yönde kullanılabilir.

İki işaret; geçit kavşağın dışında bir yöne geçilmiştir. Bu nedenle bu yöne bir daha kullanılmayabilir.

Üç işaret; bu kavşağa doğru geçilen ilk geçittir. 0 ya da 1 işaretli geçitler olmadıkça alınmayabilir.

Tarry'nin kuralları uygulanarak, hiç bir geçidi ikiden fazla geçmeden (aynı yöne sadece bir kere) labirentin merkezinden çıkılabilir.

4.2.5 Çinli Postacı Problemi: Çeşitli şekillerde karşılaşılan önemli bir problemdir (Chinese kelimesi problemi ifade eder, postacıyı değil). Bu problem 1962'de Meigu Guan tarafından belirtilmiştir. Problem şu şekildedir: Bir postacı, postaları kendi alanındaki bütün caddeler boyunca dağıtmak ve sonra postaneye dönmek istemektedir. Katedilen toplam yol en az olacak şekilde bir rota nasıl planlamalıdır?

Bu problemin çözümü için, postacının alanının haritası bir Euler graf ile ifade edilebilir, burada postacı bir Euler gezisi seçer (Gerekirse Fleury'nin algoritmasını kullanır) ve böyle bir gezi en küçük toplam uzaklığı içerir.

Uygulamada ortaya çıkabilecek bazı durumlar şunlardır; postacı rotanın bazı bölümlerini birden fazla ziyaret etmeye ihtiyaç duyar ve yeniden geçiş miktarını en düşüğe getirmek ister. Rotanın her bölümünün uzunluğunun bilindiği varsayılabilir.

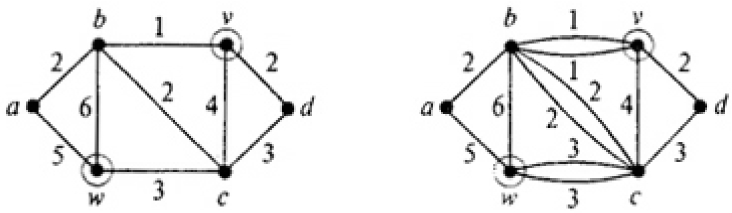
Chinese Postman Problemine benzer olarak, Zürih'te kar-temizleme rotaları ile ilgili bir çalışma yapılmıştır. Kar temizleme deneyi uygulama yapmak için pahalıdır. Mümkün olduğunca küçük yeniden temizlenecek caddeler içeren bir rota düzenlemek gerekir. Diğer şehirlerde de caddeleri temizlemek için benzer araştırmalar başlatmıştır.

Chinese Postman probleminin çözümü için ağırlıklı graflardan yararlanılacaktır.

Tanım 4.2.2: Her ayrıtı bir pozitif sayıyla tayin edilen grafa **ağırlıklı graf** denir. Bu sayıya ayrıtın ağırlığı denir.

Bu tanımı kullanılarak Chinese Postman problemi şu şekilde ifade edilebilir: Her ayrıtı en az bir kere içeren minimum toplam ağırlığa sahip bir kapalı yol bulunabilir mi?

Aşağıdaki iki graf göz önüne alınırsa, burada v ve w gibi iki tane tek dereceli düğüm vardır.



(a) (b)

Şekil 4.19

v'den w'ya minimum ağırlıklı yol v_b_c_w'dur. Toplam ağırlık 1+2+3=6'dır. Bu yoldaki her ayrıt iki defa çizilirse (b)'deki Euler grafı elde edilir. Minimum toplam ağırlıklı gereken kapalı yol bu grafta bir Euler gezisidir. Örneğin, a_b_v_d_c_v_b_c_b_w_c_w_a gibi. Burada tekrar çizilmesi gerekli olan ayrıtlar v_b_c_w yolunun ayrıtlarıdır.

Tek dereceli düğümleri ikiden fazla olan graflar için, bu gibi düğümler en kısa yollar ile birleştirilerek bu metot uygulanabilir.

4.3 Euler Yönlü Grafları:

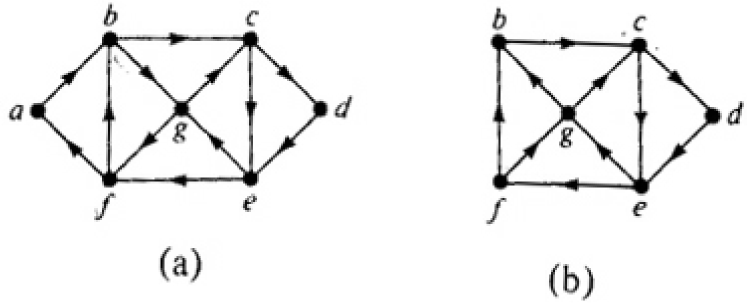
Şimdiye kadar ki problem bir grafın her ayrıtını bir kere içeren bir gezi bulmaktı. Bu problem yönlü graflarla da ifade edilebilir.

Tanım 4.3.1: D bağlantılı yönlü graf olsun. D nin her yayını içeren bir kapalı gezi varsa, D ye **Euler yönlü grafı** denir. Bu geziye de Euler gezisi denir.

Eğer D bağlantılı yönlü grafının her yayını içeren bir açık gezi varsa, D yönlü grafına **yay-izlenebilir graf** denir.

Örnek 4.3.1

Aşağıdaki yönlü graflar düşünülecek olursa;



Şekil 4.20

Yönlü graf(a) Eulerdir. Buradaki Euler gezisi a_b_c_d_e_f_b_g_c_e_g_f_ a dır.

Yönlü graf(b) ise yay-izlenebilir graftır, buradaki uygun açık gezi f_g_c_d_e_g_b_c_e_f_b dur.

Euler graflarıyla ilgili daha önceki tartışmaların çoğu Euler yönlü graflarına uygulanabilir.

Teorem 4.3.1: D bir bağlantılı yönlü graf olsun.

Buradan;

1) D nin Euler olması için gerek ve yeter koşul her düğümünün dış-derecesi ile iç-derecesinin eşit olmasıdır.

2) D nin yay-izlenebilir olması için gerek ve yeter koşul D’nin x ve y gibi iki düğümü için aşağıdaki eşitliklerin geçerli olmasıdır.

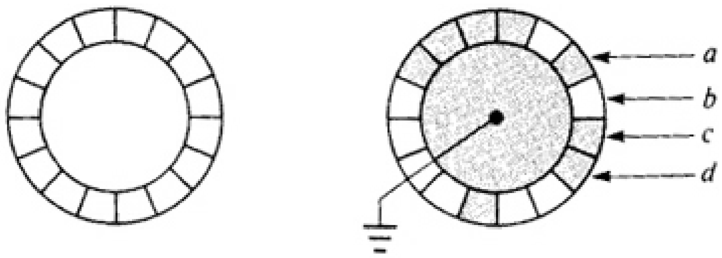
$d_{dıs}(x) - d_{iç}(x) = 1$

$d_{iç}(y) - d_{dıs}(y) = 1$

$d_{iç}(v) = d_{dıs}(v)$ (x ve y dışındaki bütün v düğümleri için geçerlidir).

4.4 Euler Yönlü Graflarının Uygulama Alanları

4.4.1 Dönen Davul Problemi: Euler yönlü graflarıyla ilgili kısa tartışmalar telekomünikasyonda ortaya çıkan bir problem verilerek bitirilmektedir. Bu problem dönen davul problemi ya da teleprinter problemi olarak adlandırılır.



Şekil 4.21

Bir dönen davulun yüzeyi solda gösterildiği gibi 16 parçaya bölünmüştür. Davulun pozisyonu a, b, c ve d gibi dört ikilik sayıyla sağdaki gibi gösterilebilir.

Bu diyagramda gölgeli alanlar iletilen materyalleri gösterir, gölgeli olmayan alanlar ise iletilmeyen materyalleri gösterir. Davulun pozisyonun bağlı olarak terminaller a, b, c ve d ile gösterilmiştir, bunlar ya topraklanmıştır ya da yalıtılmıştır. Örneğin, bu diyagramda topraklanmış terminalller a, c ve d'dir. Davulun 16 pozisyonu a, b, c ve d işaretleri ile tek şekilde gösterilmiştir.

İletken alanlar öyle bir yerleştirilmelidir ki; dört ardışık iletken ya da iletken olmayan pozisyonların bütün mümkün modelleri meydana gelmelidir. Bunu yapılması mümkün müdür, eğer yapılabilirse nasıl düzenlenebilir?

Yukarıdaki sağ-el diyagramında bir çözüm verilmiştir. 1011 ikilik sayısına karşılık gelen pozisyon gösterilmiştir. Burada 1 gölgeli (iletken) alana, 0 gölgesiz (iletken olmayan) alana karşılık gelir. Davulun saat yelkovanının tersi yönünde peş peşe döndürülmesi, aşağıdaki ikilik sayıları verir.

0110, 1100, 1001, 0010, 0100, 1000, 0000, 0001

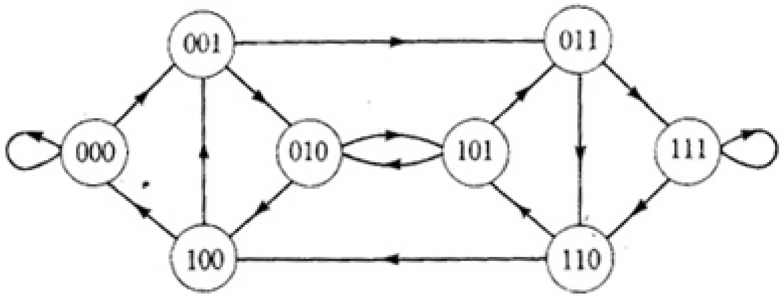
0011, 0111, 1111, 1110, 1101, 1010, 0101, 1011

Bu dört-bitlik sayıların hepsi farklıdır ve davul için bütün pozisyonları gösterir.

Bu çözüm nasıl elde edildi ya da başka çözümler var mıdır? Bu soruları cevaplamak için aşağıdaki 3-bitlik ikilik kelimelere karşılık olan 8 düğümlü bir yönlü graf inşa edilebilir.

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Burada her abc düğümünden bc0 ve bc1 düğümlerine yaylar vardır. Bu aşağıdaki yönlü grafı verir.



Şekil 4.22

Bu graf Eulerdir. Çünkü her düğümün dış derecesi ve iç derecesi 2 dir. Yani eşittir (Teorem 4.3.1 den).

Dönen davul problemini çözmek için herhangi bir Euler gezisi kullanılabilir. Örneğin, aşağıdaki gibi bir Euler gezisi alınırsa, 101→011→110→100→001→010→100→000→

000→001→011→111→110→101→010→101

Ardışık terimler kümülatif şekilde kompres yapılınca (örneğin 011→110 kompres yapılırsa 0110 elde edilir) aşağıdaki seriyi verir:

1011001000011110...

BÖLÜM 5

HAMİLTON GRAFLARI VE UYGULAMA ALANLARI

Bu bölümde Hamilton grafları (her düğümünü içeren bir çevrim bulunduran graflar) incelenmektedir. Bir bağlantılı grafın Hamilton grafı olması için gerekli koşullar verilmektedir. Hamilton grafları arasındaki bağlantılar gösterilmektedir. Satranç problemi, satış temsilcisi problemi, sıralı işler problemi gibi problemler üzerinde durulmaktadır.

Hamilton ismi Sir William Roman Hamiltonian (1805-1865)'den gelmektedir. Sir William Roman Hamiltonian zamanına yön veren bir matematikçidir. Dahi çocuktu, 22 yaşında İrlanda krallığının gök bilimcisi haline geldi ve 30 yaşında Şövalye oldu. Geometrik Optikler, dinamik ve cebirde çok başarılı çalışmalar yapmıştır.

Gezginci Problemi (**Traveler's Problem**): Bir gezgin birkaç şehri ziyaret etmek istiyor. Her şehri sadece bir kere ziyaret eden bir tur bulunabilir mi?

Gezgin bir şehirden başlayan ve her şehre bir kere gidip, tekrar başladığı şehirde biten bir tur bulmak istiyor. Bu durumda, gezgin her şehri sadece bir kere dolaşır ve aynı yolu birden fazla geçebilir.

Bu problem bir grafa uygulanarak çözülebilir. Bu grafın düğümleri şehirlere, ayrıtları yollara tekabül eder. Gezginci problemi; grafın her düğümünü içeren bir çevrim bulma problemidir.

5.1 Hamilton Grafları

Tanım 5.1.1: Bağlantılı bir G grafının her düğümünü içeren bir çevrim varsa

G grafına **Hamilton graf** denir. Buradaki çevrim, **Hamilton çevrimi** olarak adlandırılır.

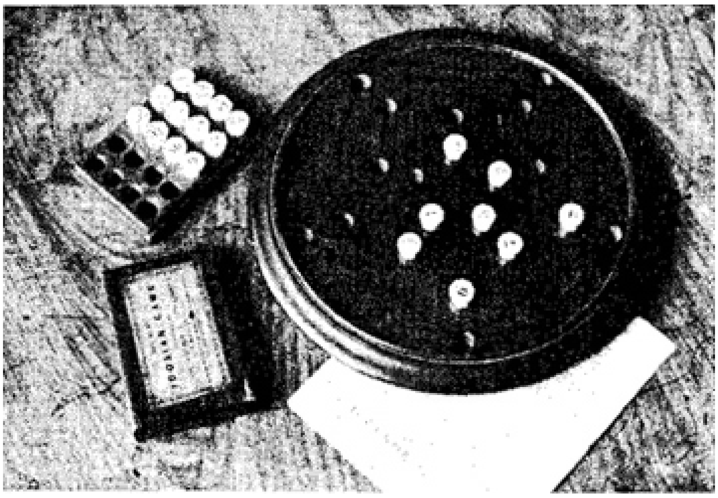
5.1.1 Hamilton'un Oyunu

Hamilton'un en önemli buluşlarından biri, cebir sistemleri ile ilgilidir. Bu buluş, cebirdeki çarpma işleminin değişme özelliğidir (xy=yx).

Hamilton bu problemi Icosian oyunu adı verilen bir probleme döndürmüştür. Bu oyunda, oyuncu verilen beş başlangıç harfi ile başlayarak hamilton çevrimlerini bulmalıdır. Örneğin, verilen BCPNM başlangıç harfleriyle oyuncu bunları iki mümkün yoldan aşağıdaki hamilton çevrimlerine tamamlayabilir.

BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB ve BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB

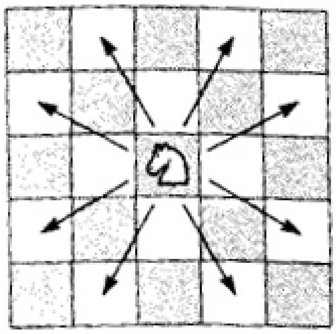
Bu oyun 1859'da bir broşür ile beraber pazarlanmıştır. Bu daha çok A Voyage Round the World (Dünya'nın Etrafında Bir Gezi) başlığı altında, katı on iki yüzlülerde uygulandı.



Şekil 5.1

Hamilton çevrimi yanlış bir isim olarak sayılabilir çünkü Hamilton bir grafın her düğümünden geçen çevrimleri çalışan ilk kişi değildir.

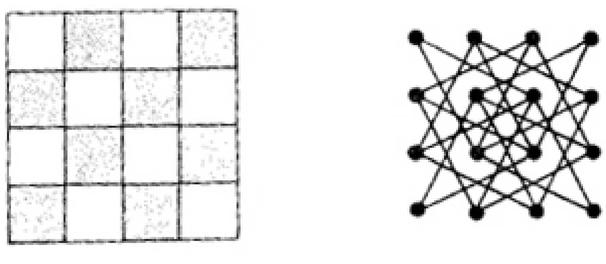
Hamilton çevrimlerinin terimleri ile açıklanabilen eski bir örnekte; satrançta atın tur problemidir (Aşağıda görüldüğü gibi, at bir yönde iki kare hareket ederken, dikey yönde bir kare hareket eder).



Şekil 5.2

5.1.2 At'ın Tur Problemi: Bir at, satranç tahtasının her karesini at hareketlerinin bir dizisi ile ziyaret edip hareketini başladığı karede bitirebilir mi?

Bu problemle, bir graftaki Hamilton çevrimini bulma problemi arasındaki bağlantıyı görmek için; atın tur probleminin 4x4'lük bir satranç tahtasındaki basit biçimi düşünülmelidir. Tahta bir graf olarak gösterilebilir, bu grafta her düğüm bir kareye karşılık gelir. Ayrıtlar ise at hareketleri ile bağlantılı olan kare çiftlerine karşılık gelir. Aşağıdaki diyagram 4x4'lük satranç tahtasına ait grafı gösterir.

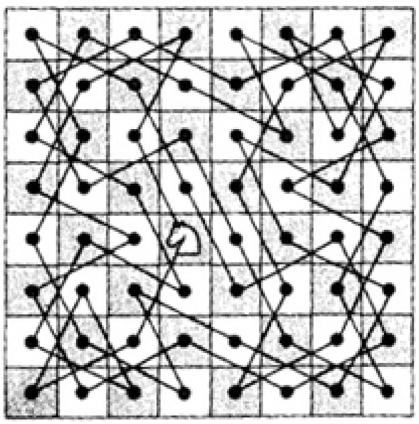


Şekil 5.3

Eğer kısa bir süre denendiğinde görüleceği gibi 4x4'lük satranç tahtasında bir at turu yoktur.

Tek sayıda kareli satranç tahtalarında (5x5 satranç tahtaları gibi) at turu olmamasına rağmen, bazı farklı satranç tahtalarında atın turunu görmek mümkündür. At turu problemi için 1759'da Euler tarafından bir çözüm bulunmuştur. Euler bu problemin çözümü için sistematik bir yaklaşım tarzı tarif etmiştir. Bir başka sistematik ele alış biçimi 12 yıl sonra Ax.-T. Vandermonde tarafından verilmiştir.

Aşağıdaki diyagramda, 8x8 satranç tahtasında bir at turu gösterilmektedir.



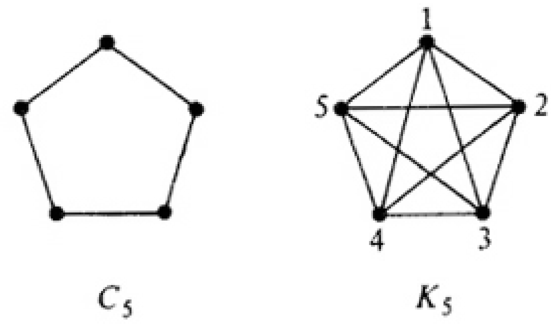
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Şekil 5.4

Çözüm ilginçtir, çünkü sağdaki diyagramdaki gibi karakterlerin sırası yazılırsa, sihirli bir kare elde edilir. Bu karede her satır ya da sütundaki karakterlerin toplamları eşit ve 260'dır.

İlk bakışta verilen bir grafın Hamilton olup olmadığını anlamak, bu grafın Euler olup olmadığını anlamaya benzer. Bir grafın Hamilton olması için gerekli ve yeterli şartlar bilinmemektedir. Bu şartları bulmak için çeşitli graf tiplerini incelenebilir. Örneğin; C_n çevrim garfı n'in her değeri için Hamiltondur. K_n grafı

$n \geq 3$ için Hamiltondur, burada düğümler 1,2,3...,n ile gösterilmek üzere Hamilton çevrimi 123...n1'dir.



Şekil 5.5

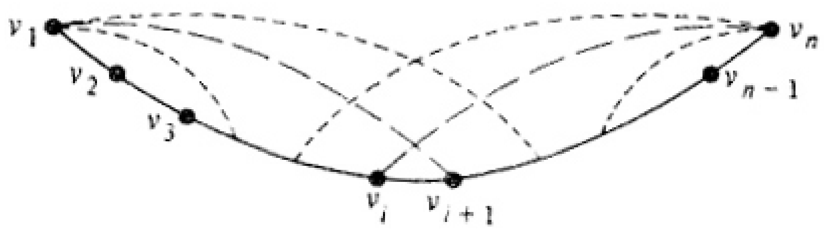
Bir Hamilton grafı alınır ve ayrıtlar eklenirse sonuçta yine bir Hamilton grafı elde edilir. Önceki ile aynı Hamilton çevrimi alınabilir. Çok ayrıtlı graflar az ayrıtlılardan daha çok Hamilton graflarına benzer. Bu fikir çeşitli yollarla açıklanabilir. Bunların en önemli iki tanesi G.A. Dirac ve O.Ore tarafından bulunmuştur.

Teorem 5.1.1(**DIRAC TEOREMİ**): $n \geq 3$ olmak üzere, G n düğümlü bir yalın graf olsun. Her v düğümü için $\deg v \geq \frac{1}{2}n$ ise G Hamiltondur.

Teorem 5.1.2 (**ORE TEOREMİ**): $n \geq 3$ olmak üzere, G n düğümlü bir yalın graf olsun. Bitişik olmayan v ve w düğümleri için $\deg v + \deg w \geq n$ ise G Hamiltondur.

İspat: İspat çelişki yöntemiyle verilmektedir. Bitişik olmayan her v ve w düğüm çiftleri için $\deg v + \deg w \geq n$ olan ama Hamilton olmayan bir G grafı varolsun. Gerekirse G ye daha fazla ayrıtlar eklenerek (G Hamilton değildi, ayrıt eklenmesi G yi Hamilton yapacaktır.)

Bunu anlamı, her düğümü içeren bir $v_1v_2v_3\ldots v_n$ yolu vardır, ama v_1 ve v_n düğümleri bitişik değildir. Aşağıdaki diyagram bunu göstermektedir. (v_nv_1 ayrıtının eklenmesi Hamilton çevrimi oluşturur).



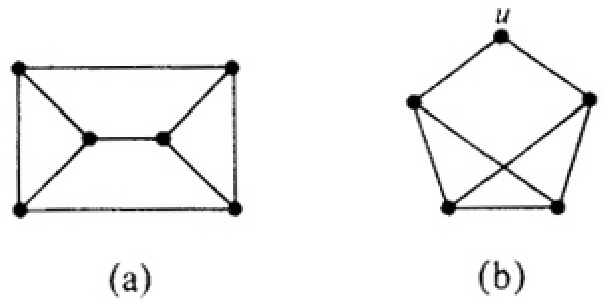
Şekil 5.6

v_1 ve v_n bitişik değildir. $\deg v_1 + \deg v_n \geq n$ dir. Buradan; $\deg v_n \geq n - \deg v_1$ olur.

Eğer $\deg v_1 = r$ ise, v_n ile bitişik olmayan v_n düğümünün kendiside dahil en çok r tane düğüm vardır.

Şimdi v_1 e bitişik olan düğümler düşünülecek olursa, S; yoldaki her bir düğümden önce gelen düğümlerin kümesi olsun. Örneğin; eğer v_1 ; v_k ile birleşmişse, v_{k-1} S de bir düğümdür. Buradan S, r tane düğüm içerir ve v_n bunlardan biri değildir ve S; v_n ile bitişik olan v_i düğümünü içermelidir. O halde yukarıdaki diyagramda görüldüğü gibi v_1 ve v_{i+1}i , v_i ve v_n i birleştiren ayrıtlar olmalıdır. Ama G de $v_1v_2\ldots v_{i-1}v_nv_{n-1}\ldots v_{i+1}v_1$ bir Hamilton çevrimi yazılabilir ve bu G'nin Hamilton olmamasıyla çelişir. O halde, G Hamilton graftır.

Bu teoremlerin kullanılışı, aşağıdaki graflar düşünülerek örneklenebilir.



Şekil 5.7

(a) daki graf için n=6, her v düğümü için $\deg v = 3$ Dirac Teoreminden bu grafın Hamilton olduğu söylenebilir.

(b) deki graf için n=5 ama deru=2. Bu nedenle Dirac Teoremi uygulanamaz. Ancak; $\deg v + \deg w \geq 5$ tir (Bütün bitişik olmayan v ve w düğümleri için) (Her v ve w düğüm çiftleri için de). Buradan; Ore Teoreminden graf Hamiltondur.

Her düğüm için $\deg v \geq \frac{1}{2}n$ ise her v ve w düğüm çiftleri için $\deg v + \deg w \geq n$ dir. Buradan Dirac Teoreminin, Ore Teoreminin bir sonucu olduğu söylenebilir.

Teorem 5.1.3: D, n düğümlü bir yalın graf olsun. D'nin her v düğümü için $d_{dıs}(v) \geq \frac{1}{2}n$, $d_{iç}(v) \geq \frac{1}{2}n$ ise D hamilton graftır.

Teorem 5.1.4: D, n düğümlü bir yalın graf olsun. Bitişik olmayan her u ve v düğümleri için; $d_{dıs}(u) + d_{iç}(v) \geq n$ ise D Hamilton graftır.

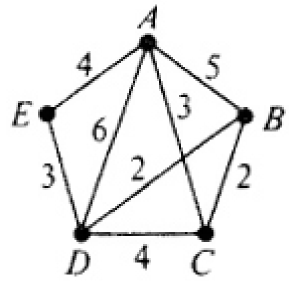
5.2 Hamilton Graflarının Uygulama Alanları

5.2.1 Satış Temsilcisi Problemi

Bir satış temsilcisi, birkaç şehri ziyaret edip, başlangıç noktasına dönmek istiyor. Burada her şehir bir kere ziyaret edilecek ve toplam mesafe mümkün olduğu kadar kısa olacak. Şehirler arasındaki uzaklıklar verildiğinde, hangi rota seçilmelidir?

Bu problemi çözmek için; bütün mümkün rotalara bakıp en kısa toplam uzaklığı içeren rota seçilebilir. Örneğin; A;B;C;D ve E beş şehir olsun ve bu şehirler arasındaki uzaklıklar aşağıdaki grafta gösterilsin.

A da bulunan bir satış temsilcisi, şehirleri A_C_B_D_E_A sırasında ziyaret etmelidir (ya da A_E_D_B_C_A). Burada toplam uzaklık 14 tür.



Şekil 5.8

Şehirlerin sayısı arttıkça zorluklarla karşılaşılabilir. Çünkü bu problem için basit ve randımanlı çözüm sağlayacak algoritma bilinmemektedir. Yaklaşık sonuçlar vermek için önceden tasarlanmış birçok prosedürler vardır. Bir çözüm etkili bir şekilde bütün rotalara bakmayı ve en kısa olanı seçmeyi içerir. Eğer on şehir varsa bu uygulanabilir. Mümkün rotaların sayısı en fazla 362880 dir. Bir bilgisayar bunları saniyede bir milyon oranında sıralar ve en iyi rotayı yaklaşık 0.36 saniyede bulur. Diğer taraftan, eğer 20 şehir varsa mümkün olan rotaların sayısı yaklaşık 1.22×10^{17} dir ve bilgisayar bunu aynı oranda sıralar ve bu yaklaşık 4000 yıl alır.

Satış temsilcisi problemi önemlidir, çünkü bu farklı ziyaretçi sayılarında görülebilir. Buna örnek olarak, sıralı işler problemi verilebilir.

5.2.2 Sıralı İşler Problemi

Bağımsız işlerin sayısı bir makinede uygulanabilmektedir ve bir önceki tamamlandıktan sonra makine her yeni iş için yeniden kurulmalıdır. Makine işlerden bir tanesi için kurulur, diğer işler tamamlandığında makine bu iş için sıfırlanır. Kurulma masrafları (emek ve materyali içeren) tamamlanmış işe bağlı ise ve iş başlamak üzereyse, toplam kurulum masrafları minimum olan bir iş nasıl ısmarlanabilir?

Bu iki problem arasındaki bağlantı, problemler graflar yardımıyla ifade edilebilirse daha iyi anlaşılabilir. Satış temsilcisi probleminde bir ağırlıklı tam graf çizilir, bu grafta düğümler ziyaret edilen şehirlere karşılık gelir, ayrıtlarda bunları birleştiren rotalara karşılık gelir, ağırlıklar ise şehirler arasındaki uzaklıkları ifade eder. Sıralı işler probleminde de bir ağırlıklı tam graf çizilir, bu grafta düğümler işlere karşılık gelir, ayrıtlarda işleri birleştirir, ağırlıklar ise, işler ile ilişkili kurulum masraflarını ifade eder.

Her iki durumda da amaç; her düğümden geçen minimum toplam ağırlıklı çevrimi bulmaktır. Başka kelimelerle; minimum-ağırlık Hamilton çevrimini bulmaktır.

Satış temsilcisi probleminde; bir ağırlıklı tam graf verilir, buradaki minimum-ağırlık Hamilton çevriminin bulunması istenir.

Satış Temsilcisi Problemi şu şekilde de ifade edilebilir: Bu probleme karşılık gelen graf Hamilton mıdır? Problem, grafta minimum-uzunluklu bir Hamilton çevrimi bulma problemidir.

Eğer ayrıtların ağırlıklarına gönderme yapıldıysa (şehirler arasındaki uzaklıklarına değil) ve bunlar arasında yolculuk için gerekli olan zaman ya da ücrete gönderme yapıldıysa, satış temsilcisi probleminin çözümü minimum-süre ya da minimum-ücretli çevrimi verir.

Bu problem Çinli postacı problemi ile karşılaştırılırsa; Çinli postacı probleminde, karşılık gelen graf Euler ise hiçbir zorluk çıkmaz, problem Fleury algoritmasıyla bir Euler gezisi bulma problemine basitleştirilebilir ve bulunan herhangi bir gezi bu probleme çözüm olmalıdır. Eğer graf Euler değilse; minimum-ağırlık kapalı yolu bulmak için kullanabilecek bir standart algoritma vardır.

Satış temsilcisi probleminde, başlangıçta grafın Hamilton olduğu varsayılsın ancak farklı total ağırlıklarda birçok farklı Hamilton çevrimleri vardır. Bu bakış açısıyla, hangi Hamilton çevriminin en kısa olduğuna karar vermek için bir algoritmaya ihtiyaç vardır ama bilinen bir algoritma yoktur.

Eğer şehirlerin sayısı azsa, yapılabilecek en iyi şey yaklaşık sonuçlar bulmaktır. Örneğin; en kısa toplam uzaklık için üst ve alt sınırları belirlemek mümkündür.

KAYNAKLAR

[1] Berge, C., 1985, Graphs, North-Holland, Amsterdam-New York.

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R., 1985, Graph Theory With Applications, American Elsevier, New York.

[3] Chan, W.K., 1976, Applied Graph Theory, North Holland Publishing Company.

[4] Chartrand, G. and Lesniak, L., 1996, Graphs and Digraphs, Chapman and Hall, London.

[5] Günaltılı, İ., Sonlu Graf Teorisi Üzerine, Yayınlanmamış Ders Notları.

[6] Henley, E.J. and Williams, R.A., 1973, Graph Theory In Modern Engineering, Academic Press, New York.

[7] Palmer, E.M., 1985, Graphical Evolution, John Wiley And Sons.

[8] Roberts, F., 1976, Discrete Mathematical Models With Applications To Social, Biological And Environmental Problems, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[9] Wilson, R.J. and Beineke, L.W., 1979, Applications Of Graph Theory, Academic Press, London

[10] Wilson, R.J. and Watkins, J.J., 1990, Graphs An Introductory Approach, John Wiley And Sons.

[11] Temperly, H.N.V., 1981, Graph Theory And Applications, John Wiley

And Sons., New York.