Lineer Olmayan Denklemlerin Analitik Ve Yaklaşık Çözümleri

Delal Kırmızıtoprak

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2008

Analytical And Approximation Solutions Of Nonlinear Equations

Delal Kırmızıtoprak

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

August-2008

Lineer Olmayan Denklemlerin Analitik Ve Yaklaşık Çözümleri

Delal Kırmızıtoprak

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Filiz Taşcan

Ağustos 2008

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Delal Kırmızıtoprak'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Denklemlerin Analitik ve Yaklaşık Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Yrd. Doç. Dr. Filiz Taşcan

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma AYAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, rehberliğini ve ilgisini esirgemeyen çok kıymetli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca yüksek lisans süresince benden maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen aileme, Ahmet Demir'e teşekkürü bir borç bilirim.

Delal KIRMIZITOPRAK

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

1 GİRİŞ

Lineer olmayan diferensiyel denklemler uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendisliğin birçok alanında önemli rol oynamaktadır. Uygulamalı Matematikte sıkça karşılaşılan, zamana göre türeve bağlı olarak yazılmış olan lineer olmayan oluşum (evolution) denklemleri olarak adlandırılan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirlikleri üzerindeki araştırmalar günümüze kadar devam etmiş ve önemli gelişmeler elde edilmiştir.

Bir lineer olmayan diferensiyel denklemin, integrallenebilmesi veya analitik çözümünün varlığının gösterilmesi için bazı ölçütler geliştirilmiştir. Bu ölçütlerden sıkça kullanılan ve iyi bilinenler, Ters Saçılım Dönüşümü (T.S.D), Hamiltoniyen Yapılar, Korunum Kanunları, Lax Çiftleri, Lineer Spektral Problem, Painleve Analizi, Adomiyan Decomposition Metodu, Varyasyonel İterasyon Metot, Homotopy Pertürbasyon Metot, ... vb dir (Calegora et al., 2000; Ablowitz et al., 1974; Gelfand ve Levitan., 1995; Özer., 1995).

Bu çözüm teknikleri arasında; adomiyan ayrıştırma metodu uygun bir diferensiyel operatörün seçimine dayanır. Denklemler adi veya kısmi, lineer veya lineer olmayan olabilir ve metodun uygulanması oldukça kolaydır. Bu metot ile çözüm, terimleri kolayca hesaplanabilen bir kuvvet serisi formunda elde edilir. Bu teknik bir yaklaşım yöntemi olup, bunun çözümü genel olarak sonsuz seri şeklindedir.

Varyasyonel iterasyon metodu lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümünü bulmada kullanılır. Bu metotta, problemler başlangıç koşulları ile verilirler. Varyasyon teorisi yoluyla Lagrange parametresi belirlenerek çözüme ulaşılır.

Homotopi pertürbasyon metot lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin, integral denklemlerin çözümü için uygulanabilmektedir. Bu yöntemde, homotopi tekniğine göre, $p \in [0,1]$ parametresi ile bir homotopi kurulur ve bu parametre küçük bir parametre olarak düşünülür. Bilinen pertürbasyon metotlarının ve topolojideki homotopinin avantajlarını kapsayan bu metot, kolaylıkla çözülebilecek basit problemlere dönüştürülerek çözüm elde edilebilmektedir. Bu yöntem lineer olmayan dalga denklemlerine, başlangıç değer problemlerine, lineer olmayan salınım denklemlerine ve integral denklemlerine uygulanabilmektedir. Pek çok durumda bu metot çabuk bir şekilde seri çözümü vermektedir.

Bu çalışmanın, tez bölümlerindeki dağılımı aşağıdaki gibidir.

Bölüm 2 de, ileriki bölümlerde verilecek olan nümerik ve analitik metotlarının kullanılmasına alt yapı oluşturacak bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Takip eden bölüm 3 te, lineer ve lineer olmayan denklemlere kolaylıkla uygulanabilecek olan nümerik ve analitik metotlardan birkaçı anlatılıp, ilgili örnekler aktarılmıştır.

Bölüm 4 te, bir önceki bölümde ele alınan metotlar arasından varyasyonel iterasyon ile homotopi pertürbasyon metotlarının integral denklemlerine uygulanması verilmiştir.

Sonuçların bulunmasında Maple 10 paket programı kullanılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde adi diferensiyel denklemlere, kısmi türevli denklemlere ait bazı tanım ve kavramları vereceğiz.

2.1. Adi Diferensiyel Denklemler

Bağımlı değişken ve bu değişkenin türevlerini içinde bulunduran denklemlere diferensiyel denklem denir.

. Bir diferensiyel denklemde eğer bir tek bağımsız değişken mevcut ise denkleme adi diferensiyel denklem denir ve genel olarak

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde ifade edilir (Tuncer, 1996).

Eğer F fonksiyonu $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ terimlerinin bir lineer fonksiyonu ise, be denkleme lineer, aksi halde lineer olmayan adi diferensiyel denklem denir.

n-inci mertebeden lineer adi bir diferensiyel denklem,

$$b_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x) \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)$, katsayıları sabit iseler (2.1) denklemine sabit katsayılı, aksi takdirde değişken katsayılı diferensiyel denklem denir.

2.1.1. Çözümlerin varlık ve tekliği

Bir diferensiyel denklemin çözümünün varlık ve tekliğinin incelenmesi bazı teoremler yardımıyla yapılır. Bu teoremler bize hiçbir zaman ele alınan diferensiyel denklemin çözümü için bir ip ucu vermez, ancak diferensiyel denklemin çözümünün var olup olmadığı hakkında fikir verir. Esas varlık ve teklik teoremini ifade etmeden önce teoremin ispatında kullanılacak olan ardışık yaklaşımlar metodu olarak bilinen Picard metodunu ele alalım (Özer ve Eser, 1996).

D bölgesi merkezi (x_0, y_0) noktasında olan

$$|x - x_0| \le a\,,\ |y - y_0| \le b \tag{2.2}$$

ile tanımlı dikdörtgensel bölge ve bu bölgede

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \tag{2.3}$$

türevli denklemindeki f ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları sürekli olsun. (2.3) denkleminin her iki yanının x değişkenine göre integralini alırsak

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \tag{2.4}$$

denklemini ve başlangıç şartının kullanılmasıyla

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt = y_0 \tag{2.5}$$

$c = y_0$ değerini, yerine yazılmasıyla

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \tag{2.6}$$

ifadesini buluruz.

Önce Picard metodunun ilk adımında sıfırıncı yaklaşım olarak başlangıç şartı y_0 alınır, sonra y_1 birinci yaklaşımı

$$y_1'(x) = f(x, y_0(x)),\ y_1(x_0) = y_0 \tag{2.7}$$

olacak şekilde, $f(x, y_0)$ fonksiyonunun sürekli olması kabulü altında

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt \tag{2.8}$$

denkleminden bulunur. Benzer olarak y_2 ikinci yaklaşımı

$$y_2'(x) = f(x, y_1(x)),\ y_2(x_0) = y_0 \tag{2.9}$$

olacak şekilde, $f(x, y_1)$ fonksiyonunun sürekli olması kabulü altında

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right) dt \tag{2.10}$$

denkleminden ve n-inci yaklaşım, y_{n-1}, $(n-1)$-inci yaklaşım

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt \tag{2.11}$$

denkleminden bulunur. Böylece $y_0, y_1, y_2, ..., y_n, ...$ fonksiyonlarının bir dizisini buluruz. Öyleyse, uygun şartlar altında

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanan y fonksiyonu (2.3) başlangıç-değer probleminin tam çözümünü verecektir. Ayrıca y_n n-inci yaklaşım ile y tam çözümü arasındaki hata, n nin yeterince büyük ve x in başlangıç noktası x_0 a yeteri kadar yakın olmaları şartıyla, keyfi olarak küçük olacaktır (Özer ve Eser, 1996).

2.1.2. Varlık ve teklik teoremi

(2.3) başlangıç değer problemini ele alalım. D bölgesi, merkezi (x_0, y_0) noktasında olan

$$|x - x_0| \le a\,,\ |y - y_0| \le b \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanan bir dikdörtgensel bölge olsun. Ayrıca (2.3) denklemindeki f fonksiyonu ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi D de y ye göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $h = \min\left(a, \dfrac{b}{m}, \dfrac{1}{k}\right)$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $F(x)$ fonksiyonu y ve $|x - x_0| \le h$ aralığı vardır.

i) $y = F(x)$, (2.3) denkleminin $|x - x_0| \le h$ aralığında bir çözümüdür.

ii) $F(x)$ fonksiyonu $|x - x_0| \le h$ aralığında $|F(x) - y_0| \le b$ eşitsizliğini sağlar.

iii) $F(x_0) = y_0$ dır.

iv) (i), (ii), (iii) özelliklerinin hepsini birden sağlayan, $|x - x_0| \le h$ aralığında tanımlı olan $F(x)$ fonksiyonu bir tanedir.

Bu teoremin ispatı aşağıda verilen üç kısımdan oluşmaktadır (Özer ve Eser, 1996).

2.1.3. Lipschitz şartı

D kapalı bölgesinde $f(x,y)$ fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer her $(x, y_1) \in D$ ve $(x, y_2) \in D$ çiftleri için

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le K |y_1 - y_2| \tag{2.14}$$

olacak şekilde bir K sayısı bulunabiliyorsa, $f(x,y)$ fonksiyonu D üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

Sonuç : $f(x,y)$ fonksiyonu D üzerinde y ye göre sürekli türevlere sahip olsun . O halde Weirstrass teoremi gereği $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sınırlı fonksiyon olacak, ayrıca D üzerinde bir en büyük (K_1) ve en küçük (K_2) değerine sahip olacaktır. Dolayısıyla $f(x,y)$ fonksiyonu D üzerinde Lipschitz koşulunu sağlayacaktır. Bunun için

$$K = \max(K_1, K_2) \tag{2.15}$$

seçmek yeterli olacaktır (Özer ve Eser, 1996).

Varlık Teoreminin İspatı

f fonksiyonu D dikdörtgeninde sürekli olduğundan, D de sınırlı olmak zorundadır. $m > 0$, D deki her bir nokta için

$$\left| f(x,y) \right| \le M \tag{2.16}$$

şartını sağlayan bir nokta olsun. Şimdi h yı, $a, b/M$ ve $1/K$ sayılarının en küçüğü olarak alalım ve

$$|x - x_0| \le h \text{ ve } |y - y_0| \le b \tag{2.17}$$

şeklindeki (x, y) noktalarının kümesinden oluşan D_1 dikdörtgenini tanımlayalım. D_1 in D nin bir alt kümesi olduğu açıktır. Picard metodundan bulunan

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))\,dt \tag{2.18}$$

fonksiyonlarının dizisi için aşağıdaki sonucu ispatlayalım (Özer ve Eser, 1996).

Sonuç 1:

Eğer $|x - x_0| \leq h$ ise $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$|y_n(x) - y_0| \leq b \tag{2.19}$$

sağlanır. Yani $(x, y_n(x))$ noktaları D_1 dikdörtgenindedir.

İspat:

İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ için, $|x - x_0| \leq h$ ise

$$\begin{aligned}
|y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t))\,dt \right| \\
&\leq M \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t))\,dt \right| \\
&\leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| \\
&\leq M |x - x_0| \\
&\leq Mh \\
&\leq b
\end{aligned}$$

buluruz.

Şimdi $n = k$ için $|x - x_0| \leq h$ iken $|y_k(x) - y_0| \leq b$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(x, y_k(x))$ noktası

$$|f(x, y_k(x))| \leq M \tag{2.20}$$

olacak şekilde D_1 de bir noktadır. Öyleyse

$$\begin{aligned}\left|y_{k+1}(x)-y_0\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_k(t)\right) dt\right| \\ &\le M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \\ &\le Mh \\ &\le b\end{aligned}$$

olur ki sonuç ispatlanır (Özer ve Eser, 1996).

Sonuç 2:

Eğer $\left|x-x_0\right| \le h$ ise $n=1,2,3,...$ için

$$\left|f\left(x, y_n(x)\right)-f\left(x, y_{n-1}(x)\right)\right| \le K\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right| \tag{2.21}$$

eşitliği doğrudur.

Şimdi başka bir sonucun ispatını vereceğiz (Özer ve Eser, 1996).

Sonuç 3:

Eğer $\left|x-x_0\right| \le h$ ise $n=1,2,3,...$ için

$$\left|y_1(x)-y_0\right| \le \frac{M}{n!}K^{n-1}\left|x-x_0\right|^n \le \frac{M}{n!}K^{n-1}h^n \tag{2.22}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$n=1$ için Sonuç 1 den

$$\left|y_1(x)-y_0\right| \le M\left|x-x_0\right| \tag{2.23}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$\left|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)\right| \le \frac{MK^{n-2}\left|x-x_0\right|^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.24}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu kabul ederek (2.23) eşitsizliğinin doğruluğunu göstermeliyiz. Bunu biz $x_0 \le x \le x_0+h$ aralığı için ispatlayacağız. Sonuç 2 den

$$
\begin{aligned}
\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\left(t,y_{n-1}(t)\right)-f\left(t,y_{n-2}(t)\right)\right]dt\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\left(t,y_{n-1}(t)\right)-f\left(t,y_{n-2}(t)\right)\right]dt\right| \\
&\le K\int_{x_0}^{x}\left|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)\right|dt
\end{aligned}
$$

olduğunu buluruz. (2.23) hipotezini kullanırsak

$$
\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right| \le \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^{n-1}\,dt \tag{2.25}
$$

yada sağ yandaki integrali alırsak (2.22) eşitsizliğini buluruz.

$x_0-h\le x\le x_0$ olması halinde de benzer işlemler yapılarak aynı sonuca ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Sonuç 3 den yararlanarak

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x)-y_{n-1}(x)\right] \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n!}K^{n-1}h^n
$$

sonsuz serilerini karşılaştıralım. Bu serilerden ikincisi mutlak yakınsak bir seridir. Üstelik Sonuç 3 gereğince ikinci seri, birinci seriyi sınırladığından Weierstrass testinden

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x)-y_{n-1}(x)\right] \tag{2.26}
$$

serisi $|x-x_0|\le h$ aralığında düzgün ve mutlak yakınsaktır. (2.26) serisinin k-inci kısmi toplamları

$$
S_k=\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x)-y_{n-1}(x)\right]=\left[y_1(x)-y_0(x)\right]+\left[y_2(x)-y_1(x)\right]+\ldots+\left[y_k(x)-y_{k-1}(x)\right]
$$

olduğundan

$$
S_k=y_k(x)-y_0(x) \tag{2.27}
$$

buluruz. Öyleyse $y_0(x)$ verilmiş bir sabit olduğundan (2.26) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı $y_n(x)$ dizisinin $|x-x_0|\le h$ aralığında düzgün yakınsaklığını gerektirir. Eğer

$$
F(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x) \tag{2.28}
$$

olarak tanımlar ve $y_n(x)$ dizisinin tanımından her bir $y_n(x)$-in $|x-x_0|\le h$ aralığında sürekli olduğunu hatırlarsak(yakınsaklık düzgün olduğundan) $F(x)$ de süreklidir ve

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left(y, y_{n-1}(t)\right)dt \tag{2.29}$$

elde edilir.

f fonksiyonunun sürekli ve $y_n(x)$ dizisinin düzgün yakınsak olmalarından dolayı limit işleminin sırasını değiştirerek $F(x)$ fonksiyonunun

$$F(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(t, F(t)\right)dt \tag{2.30}$$

integral denkleminin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Buradan (2.30) denkleminin türevinin alınmasıyla, $F(x)$ fonksiyonu $|x-x_0|\le h$ aralığında (2.18) diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca (2.18) denkleminden $F(x)=y_0$ olduğu da açıktır.

Sonuç olarak, Sonuç 1 den $|x-x_0|\le h$ ve her bir n için

$$|y_n(x)-y_0|\le b \tag{2.31}$$

olduğu gösterildiğinden aynı eşitlik

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x) \tag{2.32}$$

için de geçerlidir. Yani, eğer $|x-x_0|\le h$ ise $|F(x)-y_0|\le b$ olur.

Böylece teoremin (i), (ii), (iii) kısımlarının ispatı tamamlanmıştır (Özer ve Eser, 1996).

Teklik Teoreminin İspatı:

Şimdi yukarıda bulduğumuz $F(x)$ fonksiyonunun bir tek olduğunu göstermeliyiz. Bunu $|x-x_0|\le h$ için $|G(x)-y_0|\le b$ ve

$$\frac{dG}{dx}=f\left(x, G(x)\right),\; G(x)=y_0 \tag{2.33}$$

olacak şekilde başka bir $G(x)$ fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$G(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, G(t)\right) dt \tag{2.34}$$

yazabiliriz. Eğer $G(x)$ ile varlık teoreminin ispatında bulunan $y_n(x)$ fonksiyon dizisini karşılaştırırsak

$$\left|G(x) - y_n(x)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left[f\left(t, G(t)\right) - f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \right] dt\right| \tag{2.35}$$

buluruz. Şimdi $n \to \infty$ iken (2.35) eşitsizliğinin sağındaki integralin $\left|x - x_0\right| \leq h$ için sıfıra yakınsadığını göstermeliyiz. Bu durumda $G(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ olacağından $\left|x - x_0\right| \leq h$ aralığında $G(x) = F(x)$ olduğunu yani çözümün tek olduğunu ispatlamış oluruz.

$\left|x - x_0\right| \leq h$ aralığındaki herhangi bir x değeri için, $\left(x, G(x)\right)$ ve $\left(x, y_{n-1}(x)\right)$ noktaları D_1 dikdörtgeninde olacağından Lipschitz şartından (2.35) eşitsizliği

$$\left|G(x) - y_n(x)\right| \leq K \int_{x_0}^{x} \left|G(t) - y_{n-1}(t)\right| dt \tag{2.36}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi ispatı tümevarımla x in x_0 dan büyük değerleri için yapalım.(benzer yolla $x_0 - h \leq x \leq x_0$ aralığı için de bulunur)

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} \left|G(x) - y_1(x)\right| &\leq K \int_{x_0}^{x} \left|G(t) - y_0\right| dt \\ &\leq Kb\left(x - x_0\right) \end{aligned}$$

buluruz. Buradan

$$\left|G(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq \frac{K^{n-1} b\left(x - x_0\right)^{n-1}}{(n-1)!}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edersek

$$\left|G(x) - y_n(x)\right| \leq \frac{K^n b\left(x - x_0\right)^n}{n!} \tag{2.37}$$

sonucunu gösterirsek ispat tamamlanır. $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ için

$$
\begin{aligned}
\left|G(x)-y_n(x)\right| &\le \int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,G(t)\right)-f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\right|dt \\
&\le K\int_{x_0}^{x}\left|G(t)-y_{n-1}(t)\right|dt \\
&\le \frac{K^n b}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\left|t-t_0\right|^{n-1}dt \\
&\le \frac{K^n b}{n!}\left(x-x_0\right)^n
\end{aligned}
$$

olduğundan (2.37) eşitsizliği doğrudur.

Dolayısıyla $\left|x-x_0\right|\le h$ için (2.37) eşitsizliğinden

$$
\left|G(x)-y_n(x)\right|\le \frac{K^n b h^n}{n!} \tag{2.38}
$$

bulunur. $n\to\infty$ iken (2.38) eşitsizliğinin sağındaki ifade sıfıra yakınsak olduğundan $\left|x-x_0\right|\le h$ için $y_n(x)\to G(x)$ olur. Öyleyse $G(x)=F(x)$ olmalıdır, yani $F(x)$ çözümü tektir (Özer ve Eser, 1996).

2.1.4. Adi diferensiyel denklemlerin kuvvet serileri yardımı ile çözümü

Bazen uygun bir değişken değiştirmesi yaparak değişken katsayılı bir diferensiyel denklemden sabit katsayılı bir denklem elde etmek mümkün ise de genellikle bu yöntem ile çözüm aramak kolay değildir. Bu nedenle, değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için yeni bir yönteme gereksinim vardır.

Kuvvet seri metodu, değişken katsayılı diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan en güçlü metotlardan biridir. Doğrudan denklemin çözümünü veren fonksiyonlar değil de bazı şartlar altında ancak bu fonksiyonların kuvvet serisi açılımını veren bir metottur.

Bu metodun uygulanması için ikinci mertebeden değişken katsayılı, lineer ve homojen olmayan bir diferensiyel denklem $a\ne 0$, a,b,c x in fonksiyonları olmak üzere

$$
a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x) \tag{2.39}
$$

şeklinde verilsin ve $f(x)=0$ durumunda

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \tag{2.40}$$

homojen diferensiyel denklem şeklindedir. Amacımız, (2.40) ile verilen denklemin bazı şartlar altında genel çözümünü bulmaktır. (2.40) ile verilen denklemde $a \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b(x)}{a(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{c(x)}{a(x)}y=0 \tag{2.41}$$

şeklinde yazılabilir. Burada b/a ve c/a fonksiyonları $x=0$ noktası civarında Taylor serisine açılabilen x in herhangi fonksiyonlarıdır. Bu durum, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem olan (2.41) denklemi için hemen aklımıza gelen çözüm şekli; her biri $x_0=0$ noktası civarında Taylor serisine açılabilen iki fonksiyonun lineer kombinasyonu olan bir fonksiyon olmasıdır. (2.41) denklemini

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0 \tag{2.42}$$

şeklinde yazalım. (2.42) denkleminin çözümünü ele alabilmek için önce bazı önemli tanımları verelim. Sonra da $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının hangi şartlar altında birer analitik fonksiyonlar olduklarını araştıralım.

Eğer herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktası civarında

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

şeklinde Taylor serisine açılabiliyorsa ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x in bütün değerleri için Taylor açılımı, $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa adı geçen fonksiyona $x=x_0$ noktasında analitik fonksiyon denir. Bu durumda, yukarıda verilen Taylor seri açılımı

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

şeklini alır. Burada $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ katsayı değerleri bulunması gereken sabit sayılardır.

$P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de herhangi bir x noktasında, örneğin $x = x_0$ noktasında analitik ise bu durumda $x = x_0$ noktasına adi noktadır denir.

Eğer bu fonksiyonların en az biri $x = x_0$ noktasında analitik değilse o zaman $x = x_0$ noktasına diferensiyel denklemin singüler veya tekil noktası denir (Çiçek, 2002).

Örnek 1:

$y'' - y = 0$ diferensiyel denkleminin $x = 0$ noktasında kuvvet seri çözümlerini bulalım.

Verilen denklemde $P_1(x) = 0$ ve $P_2(x) = -1$ dir. Bu fonksiyonlar her x değeri için analitik olduklarından, verilen denklemin $x_0 = 0$ adi noktasında $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde kuvvet serisi çözümü vardır ve bu çözüm $n = 0$ için verilen denklemi sağlamalıdır. Bu kuvvet serisi çözümünün gerekli türevleri alınırsa;

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{2.43}$$

olduğundan, verilen denklemde $y,\ y''$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n \right] x^n = 0$$

eşitliği ve buradan

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)},\ n \geq 0 \tag{2.44}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Bulunacak bu katsayılar $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seri çözümünde yerine yazılırsa

$$y = a_0 \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \right] + a_1 \left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \right]$$

şeklinde olur. Bu çözüm kapalı formda

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x \tag{2.45}$$

şeklinde yazılabilir.

2.1.5. Regüler ve irregüler singüler nokta

Eğer x_0 noktası

$$y^{(n)}+...+P_{n-2}(x)y''(x)+P_{n-1}(x)y'(x)+P_n(x)y(x)=0 \tag{2.46}$$

denkleminin bir singüler noktası ve $j=1,2,...$,için $(x-x_0)^j P_{n-j}(x)$ fonksiyonlarının hepsi x_0 noktasında analitik ise, x_0 noktasına (2.46) denkleminin regüler(düzgün) singüler noktası denir. Bu özelliği sağlamayan singüler noktalara da irregüler(düzgün olmayan) singüler nokta denir (Özer ve Eser, 1996).

2.1.6. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve yakınsaklık yarıçapı

Genellikle her kuvvet serisinin bir R yakınsaklık yarıçapı vardır. Bu yakınsaklık yarıçapı $0 \le R \le \infty$ şeklinde ifade edilen bir sayıdır, $|x|<R$ olduğu zaman seri yakınsak ve $|x|>R$ olduğu zaman seri ıraksaktır. Başka bir deyişle

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.47}$$

kuvvet serisi 0 merkezli R yarıçaplı bir aralık içindeki tüm x değerleri için yakınsak, bu aralığın dışındaki x değerleri için ıraksaktır. Aralığın sınır noktalarında serinin yakınsak veya ıraksak olduğu her seri için ayrıca belirlenir.

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(x-x_0)^n\right|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ serisine x noktasında mutlak yakınsaktır denir ve mutlak yakınsak olan bir seri yakınsaktır.

Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığını belirlemek için en iyi metot oran testidir. x in herhangi bir değeri için, örneğin $x=x_1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x_1^n}\right|=|x_1|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L \tag{2.48}$$

dır. Burada $L<1$ ise seri yakınsak, $L>1$ ise seri ıraksaktır ve $L=1$ durumunda ise serinin yakınsak veya ıraksaklığı hakkında bir şey söylenemez. Bu durumun ayrıca irdelenmesi gerekmektedir.

Bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R \tag{2.49}$$

olarak belirlendiğinden yukarıda belirtildiği gibi $|x|<R$ eşitsizliğini sağlayan x değerleri için kuvvet serisi yakınsaktır (Çiçek, 2002).

2.2. Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini içeren diferensiyel denkleme kısmi türevli diferensiyel denklem denir.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli diferensiyel denklem genel olarak

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \ldots\right) = 0 \tag{2.50}$$

şeklindedir. Burada kısmi türevler aşağıdaki gibidir.

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\ z_y = \frac{\partial z}{\partial y},\ z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots \tag{2.51}$$

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken(veya bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem denir

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y)\,z_x + Q(x,y)\,z_y + R(x,y)\,z = S(x,y)$$

$$A(x,y)\,z_{xx} + B(x,y)\,z_{xy} + C(x,y)\,z_{yy} + D(x,y)\,z_x + E(x,y)\,z_y + F(x,y)\,z = G(x,y)$$

Bu denklemlerde x, y bağımsız; z bağımlı değişkenlerdir.

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem yarı-lineer(kuasi-lineer) adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x,y,z)\,z_x + Q(x,y,z)\,z_y = R(x,y,z)$$

$$A(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{xx} + B(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{xy} + C(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x,y)\,z_{xx} + B(x,y)\,z_{xy} + C(x,y)\,z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \qquad (2.52)$$

formundadır (Koca, 2003).

3. LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde lineer olmayan denklemlerin çözümlerine dair bazı metotlar vereceğiz.

3.1. Adomiyan Ayrıştırma Metodu

Bu metot bir yaklaşım yöntemidir ve lineer olmayan diferensiyel denklemler için analitik yaklaşım verir. Bu çözüm genel itibariyle sonsuz seri biçimindedir. Lineer ve lineer olmayan terimlerin her ikisini de kapsayan genel bir ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel operatörü F olmak üzere,

$$Fu(x) = g(x) \tag{3.1}$$

veya

$$Lu + Ru + Nu = g(x) \tag{3.2}$$

diferensiyel denklemini ve

$$u(x_0) = w \text{ ve } u'(x_0) = z \tag{3.3}$$

başlangıç şartlarını göz önüne alalım. Burada L lineer operatörü, L^{-1} de L nin tersi olarak alınabilen bir ters operatörü, N ise lineer olmayan terimi ve R de lineer operatörün kalanı olarak alınır. n-inci mertebeden denklemlerde L^{-1} ters operatörü, n-katlı belirli integrali ifade eder. Mesela L üçüncü mertebeden bir operatörse, L^{-1} de x_0 dan x e üç katlı integral operatörüdür. (3.2) denklemine L^{-1} operatörünü sol taraftan uygularsak

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.4}$$

denklemi oluşur. Bu denklemde (3.3) şartlarını kullanarak, u için çözersek;

$$u = w + zx + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.5}$$

biçiminde bulunur. A_n polinomları özel polinomlar olmak üzere Nu lineer olmayan terim $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ile eşitlenir ve u da $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ e ayrıştırılıp $u_0 = w + zx + L^{-1}g(x)$ şeklinde verilirse (3.5) denklemi

$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olarak yazılabilir. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n,\; n \geq 0 \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

söylenebilir.(Bulut, 2002)

A_n Adomiyan polinomunun açık hali ise literatürde

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = f(u_0) \\ A_1 = u_1\left(\dfrac{d}{du_0}\right) f(u_0) \\ A_2 = u_2\left(\dfrac{d}{du_0}\right) f(u_0) + \left(\dfrac{u_1^2}{2!}\right)\left(\dfrac{d^2}{du_0^2}\right) f(u_0) \\ A_3 = u_3\left(\dfrac{d}{du_0}\right) f(u_0) + u_1u_2\left(\dfrac{d^2}{du_0^2}\right) f(u_0) + \left(\dfrac{u_1^3}{3!}\right)\left(\dfrac{d^3}{du_0^3}\right) f(u_0) \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

biçiminde verilmektedir (Adomian, 1994). Bu polinomların genel hali ise

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[\phi(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0}\,,\;\; n > 0 \tag{3.8}$$

şeklinde formülize edilmiştir (Seng, et al., 1996). Buradan, A_0 yalnız u_0 a, A_1 sadece u_0 ve u_1 e, A_2 sadece u_0, u_1 ve u_2 ye bağlı olurlar. Çözüm fonksiyonu ise $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ şeklinde verilir.

Örnek 2:

$$y' + 2y^2 = 0\,,\ y(0) = 1 \tag{3.9}$$

lineer olmayan denklemi ele alalım.

$L = \dfrac{d}{dx}$ olsun. Denklemin operatör formu $Ny(y, y') = y^2$ olmak üzere

$$Ly + 2Ny = 0 \tag{3.10}$$

biçimindedir. L^{-1} operatörü uygulanıp, A_n polinomları oluşturulduğunda $n \geq 0$ için y_0 teriminden sonraki bileşenler

$$y_{n+1} = -2L^{-1}(A_n) \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir Böylece her terimde bir önceki terim kullanılarak bulunabilir.

$$\begin{array}{ll}
y_0 = 1 & A_0 = y_0^2 = 1 \\
y_1 = -2L^{-1}1 = -2x & A_1 = 2y_0y_1 = 2(1)(-2x) = -4x \\
y_2 = -2L^{-1}(-4x) = 4x^2 & A_2 = y_1^2 + 2y_0y_2 = 4x^2 + 2(4x^2) = 12x^2 \\
y_3 = -2L^{-1}(12x^2) = -8x^3 & A_3 = 2y_1y_2 + 2y_0y_3 = 2(-2x)(4x^2) + 2(1)(-8x^3) = -32x^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

biçiminde bulunur. Buradan

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$$

şeklinde denklemin çözümü elde edilir. Bu çözümün $|x| < \dfrac{1}{2}$ için $y(x) = \dfrac{1}{1+2x}$ gerçek çözümüne yakınsadığı görülür.

Örnek 3:

$u(0)=A,\ u'(0)=0$ başlangıç koşulları ile verilen $u_{tt}+u+\varepsilon u^3=0$ duffing denklemini ele alalım.

$L_t u=\dfrac{d^2u}{dt^2}$, $Ru=u$, $Nu=u^3$ olmak üzere denklemin operatör formu

$$L_t u=-Ru-\varepsilon Nu \tag{3.12}$$

şeklindedir. Burada $L_t^{-1}=\int\limits_0^t\int\limits_0^t .dtdt$ olmak üzere (3.12) denkleminin her iki tarafına soldan L_t^{-1} operatörü uygulanırsa $u(t)=w+tz-L_t^{-1}Ru(t)-\varepsilon L_t^{-1}Nu(t)$ olur. Nu lineer olmayan terim $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n$ ile eşitlenip, u da $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ e ayrıştırılırsa; $Nu=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n$, $u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ şeklindedir. $u_0=w+tz=A$ yerine yazılırsa u_{n+1}, $n\geq 0$ için iterasyon formülü $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_{n+1}=L_t^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n-\varepsilon L_t^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n$ biçiminde yazılabilir. Adomiyan polinomlarının $A_n=\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left(N\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right)\Bigg|_{k=0}$ şeklinde olduğu anımsanırsa buradan Adomiyan polinomları

$$A_0=u_0^3$$
$$A_1=3u_0^2u_1$$
$$A_2=3u_0u_1^2+3u_0^2u_2$$
$$A_3=u_0^3+6u_0u_1u_2+3u_0^2u_3$$
$$A_4=\frac{1}{4!}\left(72u_1^2u_2+72u_0u_2^2+144u_0u_1u_3+72u_4u_0^2\right)$$

....

şeklinde bulunur. Buradan

$$u_1 = -L_t^{-1}u_0 - \varepsilon L_t^{-1}A_0 = -\frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{2}\varepsilon A^3t^2$$

$$u_2 = -L_t^{-1}u_1 - \varepsilon L_t^{-1}A_1 = \frac{1}{24}At^4 + \frac{1}{6}\varepsilon A^3t^4 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 A^5t^4$$

$$u_3 = -L_t^{-1}u_2 - \varepsilon L_t^{-1}A_2 = -\frac{1}{720}At^6 - \frac{5}{144}\varepsilon A^3t^6 - \frac{17}{240}\varepsilon^2 A^5t^6 - \frac{3}{80}\varepsilon^3 A^7t^6$$

$$u_4 = -L_t^{-1}u_3 - \varepsilon L_t^{-1}A_3 = \frac{1}{40320}At^8 + \frac{13}{2520}\varepsilon A^3t^8 + \frac{47}{2240}\varepsilon^2 A^5t^8 + \frac{3}{112}\varepsilon^3 A^7t^8 + \frac{7}{640}\varepsilon^4 A^5t^8$$

olmak üzere (3.12) denkleminin yaklaşık çözümü $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ şeklindedir.

3.2. Varyasyonel Ardıştırma Metodu

Lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmada kullanılan bir metottur. Bu metotta, problemlerin çözümü için başlangıç koşullarıgerekir. Varyasyon teorisi yoluyla genel lagrange çarpanı ile belirlenir. Diğer lineer olmayan analitik metotlardan farklı olarak bu metot küçük parametrelere bağlı değildir. Bu metot, Adomiyan metoduna göre daha hızlı gerçek çözüme ulaştırır.

1978'de Inokuti lineer olmayan problemleri çözmek için genel bir Lagrange çarpanı metodu öne sürdü.

Lineer olmayan

$$Lu + Nu = g(x) \tag{3.13}$$

denklemini ele alalım. Burada L lineer operatör, N ise lineer olmayan operatör, $g(x)$ heterojen terimlerdir. Lu denkleminin bir çözümünü $u_0(x)$ olarak kabul edelim. Bazı özel nokta değerlerinde doğru olan aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz. Örneğin $x = 1$ noktasında

$$u(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda \left(Lu_0 + Nu_0 - g \right) dx \tag{3.14}$$

yazılabilir. Burada λ, genel bir Lagrange çoklusudur. Daha sonra bu metot aşağıdaki yolla bir iterasyon metoduna değiştirilir.

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda \left(Lu_n + N\tilde{u}_n - g \right) dx \tag{3.15}$$

Burada $u_0\left(x\right)$ olası bilinmeyenlerle başlangıç yaklaşımı ve $\tilde{u}_n$ sınırlı değişim olarak düşünülür. Örneğin $\delta\tilde{u}_n = 0$ dır.

Keyfi bir değer için (3.14) denklemi

$$u_{n+1}\left(x\right) = u_n\left(x\right) + \int_0^x \lambda\left(Lu_n\left(\varepsilon\right) + N\tilde{u}_n\left(\varepsilon\right) - g\left(\varepsilon\right)\right)d\varepsilon \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Lineer problemler için direk çözüm Lagrange çarpanına göre bir iterasyon basamağıyla kolayca belirlenebilir (He, 1999).

Örnek 4:

$y\left(0\right) = 1$ başlangıç koşulu ile verilen

$$y' + 2y^2 = 0 \tag{3.17}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Bu denklem için iterasyon fonksiyonu

$$y_{n+1}\left(x\right) = y_n\left(x\right) + \int_0^x \lambda\left(\tau\right)\left\{y_n'\left(\tau\right) + 2\tilde{y}_n^2\left(\tau\right)\right\}d\tau \tag{3.18}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int_0^x \lambda\left(\tau\right)y_{n\tau}'\left(\tau\right)d\tau \tag{3.19}$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanıp mertebe düşürülerek varyasyona geçilmesiyle;

$$\begin{aligned} 1 + \lambda\left(\tau\right)\Big|_{\tau=x} &= 0 \\ -\lambda'\left(\tau\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

bulunur. Böylece $\lambda = -1$ olarak alınabilir. Buradan da

$$y_{n+1}\left(x\right) = y_n\left(x\right) - \int_0^x \left\{y_n'\left(\tau\right) + 2y_n^2\left(\tau\right)\right\}d\tau \tag{3.21}$$

iterasyon formülü elde edilir. Bu iterasyon yardımıyla çözümler

$$\begin{aligned} y_1\left(x\right) &= y_0\left(x\right) - \int_0^x \left\{y_0'\left(\tau\right) + 2y_0^2\left(\tau\right)\right\}d\tau = 1 - 2x \\ y_2\left(x\right) &= y_1\left(x\right) - \int_0^x \left\{y_1'\left(\tau\right) + 2y_1^2\left(\tau\right)\right\}d\tau = 1 - 2x + 4x^2 - \frac{8}{3}x^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.22}$$

biçiminde elde edilir. $y\left(x\right)$ çözümü bu bileşenlerin toplamı şeklindedir.

3.3. Homotopi Pertürbasyon Metot

Yakın zamana kadar lineer olmayan problemlerin çözümü için pek çok teknik, pertürbasyon metotları ile yaygın biçimde verildi. Hemen hemen tüm pertürbasyon metotları, bir küçük parametrenin mevcut olması varsayımına dayanır. Bilindiği gibi lineer olmayan problemlerin büyük çoğunluğu küçük parametreler içermez. Küçük parametreleri belirlemek özel teknikler içerir. Uygun olmayan küçük parametre seçimleri kötü sonuçlar verebilir. Uygun parametre varsa, pertürbasyon metotları ile elde edilen çözüm doğrudur. Birçok durumda sadece parametrelerin küçük değerlerinde sağlanır. Tüm bu kısıtlamalar küçük parametre kabulünden kaynaklanmaktadır.

Bu bölümde, geliştirilen pertürbasyon metotlarından homotopi pertürbasyon metodunu inceleyeceğiz.

$$A(u) + f(r) = 0\,,\ r \in \Omega \tag{3.23}$$

lineer olmayan ve

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0\,,\ u \in \Gamma \tag{3.24}$$

başlangıç koşulu ile verilen diferensiyel denklemi düşünelim. Burada, A genel diferensiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen fonksiyon, Γ ise Ω örnek uzayının bir bölgesi olsun

A genel diferensiyel operatörü L ve N şeklinde iki kısma ayrılır. L lineer kısmı, N ise lineer olmayan kısmı temsil eder. Böylelikle (3.23) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{3.25}$$

şekline dönüşür.

$$\mathcal{H}(v, p) = (1-p)\left[L(v) - L(u_0)\right] + p\left[A(v) - f(r)\right] = 0, p \in [0,1], r \in \Omega \tag{3.26}$$

yada

$$\mathcal{H}(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\left[N(v) - f(r)\right] = 0 \tag{3.27}$$

olacak şekilde bir

$$v(r, p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

homotopi kuralım. Burada u_0;başlangıç yaklaşımı olarak alınır. (3.26) ve (3.27) denklemleri, p yi bir küçük parametre gibi kullanarak bilinen pertürbasyon metotları ile çözülür (He, 2003).

Örnek 5:

$$y' + 2y^2 = 0\,,\; x \geq 0\,,\; x \in \Omega\,,\; y(0) = 1 \tag{3.28}$$

denklemini ele alalım. $y_0 = 1$ başlangıç yaklaşımı ile

$$(1-p)(Y' - y_0') + p(Y' + 2Y^2) = 0\,,\; p \in [0,1]\,,\; x \in \Omega \tag{3.29}$$

olacak şekilde $\Omega \times [0,1] \to ¡$ homotopisini kuralım. (3.45) denkleminin

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2 Y_2 + p^3 Y_3 \tag{3.30}$$

biçiminde bir çözüme sahip olduğunu düşünelim. (3.47) çözümünü (3.46) denkleminde yerine yazıp p nin kuvvetlerine göre parantezleme yapılırsa

$$p^0;\; Y_0' = y_0'\,,\; Y_0(0) = 0$$

$$p^1;\; Y_1' + y_0' + 2Y_0^2 = 0\,,\; Y_1(0) = 0$$

$$p^2;\; Y_2' + 4Y_0 Y_1 = 0\,,\; Y_2(0) = 0$$

elde edilir. Kolaylık olsun diye $\mathrm{Y}_0 = y_0 = 1$ alalım. Sırasıyla denklemlerin çözümü $Y_1 = -2x$, $Y_2 = 4x^2$ olarak bulunur. (3.45) denkleminin iki basamaklı yaklaşımını

$$y_2 = Y_0 + \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 = 1 - 2x + 4x^2 \tag{3.31}$$

olarak buluruz .

Örnek 6:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0\,,\; u(0) = A\,,\; u'(0) = 0 \tag{3.32}$$

duffing denklemini ele alalım. Homotopinin;

$$\mathcal{H}(\mathrm{v,p}) = \mathrm{L}(\nu) - \mathrm{L}(\mathrm{u}_0) + pL(\mathrm{u}_0) + p[N(\nu) - f(r)] = 0 \tag{3.33}$$

şeklinde olduğunu anımsarsak; $Lu = \dfrac{d^2u}{dt^2} + u$ olmak üzere

$$L(\nu) - L(u_0) + pL(u_0) + p\varepsilon\nu^3 = 0 \tag{3.34}$$

biçiminde homotopi kurulur. Burada

$$\nu = \nu_0 + \mathrm{p}\nu_1 + \mathrm{p}^2\nu_2 + \mathrm{p}^3\nu_3 + \ldots \tag{3.35}$$

şeklinde olduğunu unutmayalım.(3.35) denklemini (3.34) de yerine yazıp, p nin kuvvetlerine göre parantezlersek;

$$p^0;\ L(v_0) - L(u_0) = 0,\ \ v_0(0) = A, v_0'(0) = 0 \tag{3.36}$$

$$p^1;\ L(v_1) + L(u_0) + \varepsilon v_0^{\,3} = 0,\ \ v_1(0) = 0, v_1'(0) = 0 \tag{3.37}$$

$$p^2;\ L(v_2) + 3v_0^{\,2}v_1 = 0,\ \ v_2(0) = A, v_2'(0) = 0 \tag{3.38}$$

elde ederiz. (3.36) denkleminin çözümünden, başlangıç koşulunun kullanılmasıyla $v_0 = u_0 = A\cos\alpha t$ elde edilir. v_1 çözümünü varyasyonel ardıştırma metodu yardımıyla

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{d^2u_n(\tau)}{d\tau^2} + u_n(\tau) + \varepsilon u_n^3(\tau) \right\} d\tau \tag{3.39}$$

şeklinde yazabiliriz. $\int_0^t \lambda u_{\tau\tau} d\tau$ ifadesine iki kez kısmi integrasyon uygulanıp mertebe düşürülmesiyle;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \lambda u_n'\big|_{\tau=t} - \lambda' u_n\big|_{\tau=t} + \int_0^t (\lambda'' + \lambda) u_n(\tau) d\tau \tag{3.40}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} 1 - \lambda'(\tau)\big|_{\tau=t} &= 0 \\ \lambda(\tau)\big|_{\tau=t} &= 0 \\ \lambda''(\tau) + \lambda(\tau) &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

denklemleri elde edilir. Buradan $\lambda = \sin(\tau - t)$ olarak belirlenebilir. (He, 1997)

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \sin(\tau - t) \left\{ \frac{d^2u_n(\tau)}{d\tau^2} + u_n(\tau) + \varepsilon u_n^3(\tau) \right\} d\tau \tag{3.42}$$

biçimini alır.

Bu iterasyon yardımıyla $u_0(t)$ yerine yazılıp, $\left(\cos(\alpha t)\right)^3 = \frac{1}{4}\cos(3\alpha t) + \frac{3}{4}\cos(\alpha t)$ olduğu da dikkate alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$u_1(t) = A\cos(\alpha t) + \int_0^t \sin(\tau - t) \left[-\alpha^2 + 1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 \cos(\alpha t) + \frac{\varepsilon A^3}{4}\cos(3\alpha\tau) \right] d\tau \tag{3.43}$$

bulunur. Seküler terimden kurtulmak için $\alpha=\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2}$ şeçilebilir. Böylece

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A\cos(\alpha t)+\frac{\varepsilon A^2}{4}\int_0^t \sin(\tau-t)\left[\cos(3\alpha\tau)\right]d\tau \\ &= A\cos\left(\sqrt{1+\frac{3\varepsilon A^2}{4}}\right)t-\frac{\varepsilon A^2}{4\left(9+\frac{27\varepsilon}{4}\right)}\left[\cos 3\left(\sqrt{1+\frac{3\varepsilon A^2}{4}}\right)t-\cos t\right] \qquad (3.44) \\ &= A\cos(\alpha t)-\frac{\varepsilon A^2}{4(9+\frac{27\varepsilon}{4})}\left[\cos(3\alpha t)-\cos t\right] \end{aligned}$$

bulunur. Örneğin birinci yaklaşım için; $u_1(t)=v_0(t)+v_1(t)$ şeklinde bulunabilir.

Buradan periyodu

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2}} \qquad (3.45)$$

şeklinde verebiliriz. Bu denklemin ne kadar hata payı ile çözüldüğünü bulmak için T_{ex} i bulalım. Nayfeh in referans verilen kitabında aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$u''=v'=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{du}\frac{du}{dt}=v\frac{dv}{du} \qquad (3.46)$$

dönüşümü (3.32) denkleminde yerine yazılırsa $v\frac{dv}{du}+u+\varepsilon u^3=0$ bulunur. Buradan v çözümlenirse

$$\frac{1}{2}v^2=c-\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{4}\varepsilon u^4\right)=c-F(u),\ F(u)=\int\left(u+\varepsilon u^3\right)du \qquad (3.47)$$

$$v=\pm\left(2c-u^2-\frac{1}{2}\varepsilon u^4\right)^{\frac{1}{2}},\ c=\frac{1}{2}v^2+\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{4}\varepsilon u^4\right) \qquad (3.48)$$

bulunur. $u(0)=A$ başlangıç koşulunu uygularsak;

$$c=\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{4}\varepsilon A^4 \qquad (3.49)$$

$v=\dot{u}=\pm\left(2c-u^2-\frac{1}{2}\varepsilon u^4\right)^{\frac{1}{2}}$ olur. Buradan t ye göre integral alınırsa

$$dt = \pm \int \frac{du}{\left(u^2 - A^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon A^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.50}$$

$$\int_0^{T_{ex}} dt = \pm \int_0^{2\pi} \frac{du}{\left(u^2 - A^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon A^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.51}$$

bulunur. $u = -A\cos\theta$ dönüşümü yapılırsa;

$$\int_0^{T_{ex}} dt = \pm \int_0^{2\pi} \frac{A\sin\theta d\theta}{\left(A^2 - A^2\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon A^2 + \frac{1}{2}\varepsilon A^2\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.52}$$

buradan da

$$\int_0^{T_{ex}} dt = \pm \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \varepsilon A^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon A^2 \sin^2\theta}{1 + \varepsilon A^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.53}$$

olur. Burada

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon A^2}{1 + \varepsilon A^2}\right) = m \tag{3.54}$$

kabul edelim. Böylece

$$T_{ex} = \pm \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \varepsilon A^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - m\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.55}$$

olarak bulunur. Buradan periyot

$$T_{ex} = \pm \frac{4}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} \tag{3.56}$$

şeklinde yazılabilir.

$\left(1 - m\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$ binom açılımı yapılıp integral alınırsa

$$T_{ex} = \frac{4}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{8}m^2\frac{3}{16}\pi + \dots\right) \tag{3.57}$$

olur. Buradan m değeri yerine yazılırsa;

$$T_{ex}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+\varepsilon A^2}}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\varepsilon A^2}{\left(1+\varepsilon A^2\right)}+\frac{9}{256}\frac{\varepsilon^2 A^4}{\left(1+\varepsilon A^2\right)^2}+...\right) \tag{3.58}$$

bulunur.(Nayfeh, 1981). $\lim\limits_{\varepsilon A^2\to\infty}\frac{T_{ex}}{T}$ değeri hesaplanırsa

$$0\le\left|\frac{T_{ex}-T}{T}\right|\le 0.02 \tag{3.59}$$

elde edilir.

Örnek 7:

$$u\left(x,0\right)=a\tan\left(bx\right),\ u_t\left(x,0\right)=abc\sec\left(bx\right) \tag{3.60}$$

Başlangıç koşulu ile verilen

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\alpha\frac{d^2u}{dx^2}=\beta u+\gamma u^3 \tag{3.61}$$

lineer olmayan Klein-Gordon denklemini ele alalım. Burada α, β, γ sabitlerdir ve $a=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$, $b=\sqrt{\frac{\beta}{2\left(a+c\right)^2}}$ olsun. Homotopi metoduna göre aşağıdaki diferensiyel denklemler elde edilir.

$$p^0;\ \frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}=0,\qquad u_0\left(x,0\right)=a\tan\left(bx\right),\ \frac{\partial u_0}{\partial t}\left(x,0\right)=abc\sec^2\left(bx\right)$$

$$p^1;\ \frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=-\alpha\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2},\qquad u_1\left(x,0\right)=0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(x,0\right)\left(x,0\right)=0$$

$$p^2;\ \frac{d^2u_2}{dt^2}=-\alpha\frac{d^2u_1}{dx^2}+\beta u_0,\qquad u_2\left(x,0\right)=0,\qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}\left(x,0\right)\left(x,0\right)=0$$

$$p^3;\ \frac{d^2u_3}{dt^2}=-\alpha\frac{d^2u_2}{dx^2}+2\beta u_0u_1+\gamma u_0^3,\ u_3\left(x,0\right)=0,\qquad \frac{\partial u_3}{\partial t}\left(x,0\right)\left(x,0\right)=0$$

sırasıyla denklemler u_0, u_1, u_2 ye göre çözümlenirse şu denklemler elde edilir

$$u_0\left(x,t\right)=a\tan\left(bx\right)+abc\sec^2\left(bx\right)t \tag{3.62}$$

$$u_1\left(x,t\right)=-\alpha ab^2\sec^2\left(bx\right)\tan\left(bx\right)t^2-\alpha ab^3c\left(6\sec^4\left(bx\right)-4\sec^2\left(bx\right)\right)\frac{t^3}{6} \tag{3.63}$$

$$\left.\begin{aligned}u_2(x,t)&=\beta a\tan(bx)\frac{t^2}{2}+\beta abc\sec^2(bx)\frac{t^3}{6}\\&+\alpha^2ab^4\left(12\sec^4(bx)\tan(bx)-4\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\frac{t^4}{12}\\&+\alpha^2ab^5c\left(20\sec^6(bx)-20\sec^4(bx)+\frac{8}{3}\sec^2(bx)\right)\frac{t^5}{20}\end{aligned}\right\}\tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}u_3(x,t)&=\frac{1}{2}\gamma a^3\tan(bx)t^2+\frac{1}{2}\gamma a^3bcs\,ec^2(bx)\tan^2(bx)t^3\\&+\left[3\gamma a^3b^2c^2\sec^6(bx)-\alpha\beta ab^2\left(\sec^2(bx)\tan(bx)+2a\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\right]\frac{t^4}{12}\\&+\left[\gamma a^3b^3c^3\sec^6(bx)-\alpha\beta ab^3c\left(\sec^4(bx)-\frac{2}{3}\sec^2(bx)\right)\right.\\&\left.-2\alpha\beta a^2b^3c\left(2\sec^4(bx)\tan(bx)-\frac{2}{3}\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\right]\frac{t^5}{20}\qquad(3.100)\\&+\left[\alpha^3ab^6\left(30\sec^6(bx)\tan(bx)-20\sec^4(bx)\tan(bx)+\frac{4}{3}\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\right.\\&\left.+2\alpha\beta a^2b^4\left(\sec^6(bx)-\frac{2}{3}\sec^4(bx)\right)\right]\frac{t^6}{30}\\&-\alpha^3ab^7c\left[42\sec^8(bx)-56\sec^6(bx)+\frac{84}{5}\sec^4(bx)-\frac{18}{5}\sec^2(bx)\right]\frac{t^7}{42}\end{aligned}$$

böylece denklemin dört terim yaklaşımı

$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)$ şeklindedir.

Yani

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= a\tan(bx) + abc\sec^2(bx)t \\
&-\alpha ab^2\sec^2(bx)\tan(bx)t^2 - \alpha ab^3c\left(6\sec^4(bx) - 4\sec^2(bx)\right)\frac{t^3}{6} \\
&+\beta a\tan(bx)\frac{t^2}{2} + \beta abc\sec^2(bx)\frac{t^3}{6} \\
&+\alpha^2ab^4\left(12\sec^4(bx)\tan(bx) - 4\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\frac{t^4}{12} \\
&+\alpha^2ab^5c\left(20\sec^6(bx) - 20\sec^4(bx) + \frac{8}{3}\sec^2(bx)\right)\frac{t^5}{20} \\
&+\frac{1}{2}\gamma a^3\tan(bx)t^2 + \frac{1}{2}\gamma a^3bc\sec^2(bx)\tan^2(bx)t^3 \\
&+\left[3\gamma a^3b^2c^2\sec^6(bx) - \alpha\beta ab^2\left(\sec^2(bx)\tan(bx) + 2a\sec^2(bx)\tan^2(bx)\right)\right]\frac{t^4}{12} \\
&+\left[\gamma a^3b^3c^3\sec^6(bx) - \alpha\beta ab^3\left(\sec^4(bx) - \frac{2}{3}\sec^2(bx)\right)\right. \\
&\left.-2\alpha\beta a^2b^3c\left(2\sec^4(bx)\tan(bx) - \frac{2}{3}\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\right]\frac{t^5}{20} \\
&-\left[\alpha^3ab^6\left(30\sec^6(bx)\tan(bx) - 20\sec^4(bx)\tan(bx) + \frac{4}{3}\sec^2(bx)\tan(bx)\right)\right. \\
&\left.+2\alpha\beta a^2b^4\left(\sec^6(bx) - \frac{2}{3}\sec^4(bx)\right)\right]\frac{t^6}{30} \\
&-\alpha^3ab^7c\left[42\sec^8(bx) - 56\sec^6(bx) + \frac{84}{5}\sec^4(bx) - \frac{18}{5}\sec^2(bx)\right]\frac{t^7}{42}
\end{aligned}
$$

dır (Odibat, Momani, 2007).

4 İNTEGRAL DENKLEMLER

Bu bölümde integral denklemlerin genel bir sınıflandırılmasını verip, bir önceki bölümde anlatılan Adomiyan Ayrıştırma, Varyasyonel Ardıştırma, Homotopi Pertürbasyon Metotlarını integral denklemler için vereceğiz.

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmaktadır.

İntegral denklemler yapılarına göre üç sınıfa ayrılırlar. Bilinmeyen fonksiyonun $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$u(x) = f(x) \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{4.1}$$

şeklindeki denkleme integral denklemi denir. Burada $K(x,t)$ fonksiyonuna integral denklemin çekirdeği denir.

$u(x)$ bilinmeyen; $K(x,t)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlar, λ ise sayısal değer olmak üzere

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt, \quad a \le x,\, t \le b \tag{4.2}$$

şeklindeki denkleme birinci çeşit lineer Fredholm integral denklem denir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt, \quad a \le x,\, t \le b \tag{4.3}$$

şeklindeki denklemlere ikinci çeşit lineer Fredholm integral denklem denilmektedir. $f(x) = 0$ ise

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt \tag{4.4}$$

denklemine homojen Fredholm integral denklemi denir.

Yukarıda bahsedilen Fredholm integral denklemlerinde integral işaretinin üst sınırında(veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunuyorsa bu gibi denklemlere Volterra integral denklemleri denilmektedir . Volterra ve Fredholm denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısından kaynaklanmaktadır (Majıd and Wazwaz,1997).

4.1. İntegral Denklem Çözümleri İçin Bazı Metotlar

4.1.1. Ardışık yaklaştırma metodu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) u(y)\, dy \tag{4.5}$$

integral denklemini göz önüne alalım. İlk yaklaşım olarak $\lambda = 0$ halini düşünelim. $\lambda = 0$ için:

$$u(x) = f(x) \tag{4.6}$$

olup $u_0(x)$ ile gösterelim. (4.5) denklemine gidilirse, elde edilecek fonksiyon $u_1(x)$ ile gösterilerek,

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) u_0(y)\, dy \tag{4.7}$$

olur. Buradaki integral x in bir fonksiyonu olacağından, bunu

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x,y) u_0(y)\, dy \tag{4.8}$$

ile göstererek (4.7) ifadesi daha kısa olarak

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \phi_1(x) \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Buna uyması bakımından da ilk yaklaşımı

$$u_0(x) = f(x) = \phi_0(x) \tag{4.10}$$

ile gösterelim. Bu şekilde devam ederek, üçüncü yaklaşım

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) u_1(y)\, dy \tag{4.11}$$

yazarak yapılacaktır. (4.9) de (4.10) gereğince $f(x)$ yerine $\phi_0(x)$ yazılır ve (4.11) yerine yazılırsa

$$u_1(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) \tag{4.12}$$

olup,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\left[\phi_0(y) + \lambda \phi_1(y)\right] dy \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\phi_0(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b K(x,y)\phi_1(y)\,dy \end{aligned} \tag{4.13}$$

(4.8) gereğince $f(x)$ yerine $\phi_0(x)$ yazılır. Birinci integral ifadesi (4.8) ve (4.10) gereğince $\phi_1(x)$ dir. Bunlara uyularak ikinci integral ifadesi de $\phi_2(x)$ ile gösterilerek

$$\phi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\phi_1(y)\,dy \tag{4.14}$$

yazılırsa, buradan

$$u_2(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) \tag{4.15}$$

yazılabilecektir.

İşlemlere böylece devam edildiğini farz edelim. $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x),\ldots,u_{n-1}(x)$, $u_n(x)$ gibi bir fonksiyon dizisi elde edilir. Sonuçta yukarıdaki işlemlerden de anlaşılacağı gibi

$$u_n(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + \ldots + \lambda^n\phi_n(x) \tag{4.16}$$

şeklinde bir seri oluşacaktır. Burada,

$$\phi_0(x) = f(x) \text{ ve } \phi_n(x) = \int_a^b K(x,y)\phi_{n-1}(y)\,dy \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{4.17}$$

dir. (4.5) denklemine gidilirse

$$u(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + \ldots + \lambda^n\phi_n(x) + \ldots \tag{4.18}$$

serisi elde edilir. Burada $u(x)$ fonksiyonu, $u_n(x)$ in $n \to \infty$ için limit durumu olarak tanımlanmış olur. Buna göre

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{4.19}$$

dir .

4.1.2. Çözücü çekirdek metodu

Genel olarak, bir integral denklemde $K(x,t)$ ile gösterdiğimiz bir çekirdek fonksiyon bulunacaktır. Bu çekirdeğin

$$K_{(2)}(x,t);\ K_{(3)}(x,t);...;K_{(n)}(x,t) \tag{4.20}$$

ile gösterilen ve sırasıyla 2. mertebeden; 3. mertebeden;…; $n.$ mertebeden itere çekirdek denilen değişik şekilleri de tanımlanır. Örneğin 2. mertebeden bir itere çekirdek, y bir değişken olmak üzere

$$K_{(2)}(x,t) = \int_a^b K(x,y)K(y,t)\,dy \tag{4.21}$$

şeklindedir. 3. mertebeden bir itere çekirdek ise

$$K_{(3)}(x,t) = \int_a^b K(x,y)K_{(2)}(y,t)\,dy \tag{4.22}$$

şeklindedir. Bunu

$$\begin{aligned} K_{(3)}(x,t) &= \int_a^b K(x,y)K_{(2)}(y,t)\,dy \\ &= \int_a^b K(x,y_1)\left[\int_a^b K(y_1,y_2)K(y_2,t)\,dy_2\right]dy_1 \\ &= \int_a^b\int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)K(y_2,t)\,dy_2dy_1 \end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde de ifade etmemiz mümkündür. Genel olarak, $n.$ mertebeden bir itere çekirdek

$$K_{(n)}(x,t) = \int_a^b ...(n-1)...\int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)...K(y_{n-1},t)\,dy_1dy_2...dy_{n-1} \tag{4.24}$$

bağıntısı ile belirtilir.

İtere çekirdeğin, bir başka bakımdan genel ifadesi ise, h ve k pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$K_{(h+k)}(x,t) = \int_a^b K_{(h)}(x,y)K_{(k)}(y,t)\,dy \tag{4.25}$$

veya

$$K_{(h)}(x,t) = \int_a^b K_{(k)}(x,y)K_{(h-k)}(y,t)\,dy \tag{4.26}$$

olarak verilir. Bunun yukarıdaki tanıma uyduğu kolayca görülebilir. Burada $K(x,t)$ çekirdeğinin, yeni değişkenler ithal etmek suretiyle parçalanabileceği, dolayısıyla daha yüksek mertebeden itere çekirdeklerin yazılabileceği anlaşılmaktadır. Dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, integralin katlılık mertebesidir. Yukarıdaki bağıntılar incelenirse, bir itere çekirdekteki integral sayısı, ithal edilen yeni değişkenlerin sayısına eşittir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t)\, dt \tag{4.27}$$

şeklindeki volterra integral denklemini ele alalım. Bu denklemin

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots + \lambda^n u_n(x) + \ldots \tag{4.28}$$

biçiminde çözümünü araştırdığımızda

$$u_n(x) = \int_a^b K_{(n)}(x,t)\, f(t)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.29}$$

olduğu görülecektir. $K_{(n)}(x,t)$ fonksiyonları itere çekirdekler olarak adlandırılmışlardır. $u(x)$ serisi

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^i \int_0^x K_{(i)}(x,t)\, f(t)\, dt \tag{4.30}$$

şeklinde yazılabilir. $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t)$ serisine çözücü çekirdek denir ve $\Gamma(x,t;\lambda)$ ile gösterilir. Çözücü çekirdek hesaplanabildiği taktirde integral denklemin çözümü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt \tag{4.31}$$

olarak bulunacaktır (Aksoy,1998)

Örnek 8:

$x(t) = \lambda \int_0^{1/2} x(s)\, ds + t$ integral denklemini ardışık yaklaşımlar metodu ile çözelim. $x_0(t) = t$ olsun. Bu durumda

$$x_1(t)=\lambda\int_0^{1/2}x_0(s)\,ds+t=\frac{\lambda}{8}+t$$

$$x_2(t)=\lambda\int_0^{1/2}\left(\frac{\lambda}{8}+s\right)ds+t=\frac{\lambda^2}{16}+\frac{\lambda}{8}+t$$

....

$$x_n(t)=\frac{\lambda^n}{8.2^{n-1}}+\frac{\lambda^{n-1}}{8.2^{n-2}}+...+\frac{\lambda}{8}+t$$

$$=\frac{\lambda}{8}\left[\frac{\lambda^{n-1}}{2^{n-1}}+...+\frac{\lambda}{2}+1\right]+t=\frac{\lambda}{8}\frac{1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{1-\frac{\lambda}{2}}+t$$

$$=\frac{\lambda}{4(2-\lambda)}\left(1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\right)+t$$

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\frac{\lambda}{4(2-\lambda)}+t$$

elde edilir.

Örnek 9:

$$x(t)=1-\int_0^t x(s)\,ds\,,\ x_0(t)=1;$$

Volterra integral denklemini çözücü çekirdek yardımı ile çözelim.

$f(t)=1,\ \lambda=-1,\ k(t,s)=1$ olmak üzere

$$k_1(t,s)=k(t,s)=1$$

$$k_2(t,s)=\int_s^t k(t,z)k_1(z,s)\,dz=t-s$$

$$k_3(t,s)=\int_s^t k(t,z)k_2(z,s)\,dz=\int_s^t(z-s)\,dz=\frac{(z-s)^2}{2}=\frac{(t-s)^2}{2!}$$

....

$$k_n(t,s)=\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

bulunur. Çözücü çekirdek yardımıyla çözüm

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= y_0(t) + \lambda y_1(t) + \ldots + \lambda^n y_n(t) \\
&= 1 + (-1)\int_0^t k_1(t,s)\,ds + \ldots + (-1)^n \int_0^t k_n(t,s)\,ds \\
&= 1 + (-1)\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (t-s)^k}{k!}\,ds
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Şimdi 3. bölümde ele alınan homotopi pertürbasyon metodunun integral denklemlere nasıl uygulandığını gösterip, örnekler vereceğiz.

4.2. İntegral Denklemler İçin Homotopi Pertürbasyon Metot

Lineer olmayan Fredholm integral denklemlerinin

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\left\{R(u(t)) + N(u(t))\right\} dt \tag{4.32}$$

ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\left\{R(u(t)) + N(u(t))\right\} dt \tag{4.33}$$

şeklinde olduğu hatırlanırsa, burada $u(x)$ daha sonra belirlenecek olan bilinmeyen fonksiyon, $K(x,t)$ integral denkleminin çekirdeği, $f(x)$ bilinen fonksiyon $R(u)$ ve $N(u)$ sırasıyla u fonksiyonunun lineer ve lineer olmayan fonksiyonlarıdır.

Şimdi bu integral denklemlere homotopi metodunun uygulanmasını verelim. (4.32) denklemini

$$L(u) = u(x) - f(x) - \int_0^1 K(x,t)\left\{R(u(t)) + N(u(t))\right\} dt \tag{4.34}$$

şeklinde düşünelim. $H(u,p)$ homotopisini $H(u,0) = F(u)$, $H(u,1) = L(u)$ ile tanımlayalım. Burada $F(u)$, u_0 bilinen çözümü ile rahatlıkla bulunabilen integral operatördür. Homotopimizi

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) \tag{4.35}$$

şeklinde belirleyebiliriz. p parametresi ile denklemin

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \ldots \tag{4.36}$$

şeklinde bir çözümün olduğunu varsayalım. $p \to 1$ iken, (4.36) denklemi (4.35) denkleminde yazılırsa, (4.35) denkleminin yaklaşık çözümü elde edilir ve

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + ... \tag{4.37}$$

şeklindedir (Ganji, et al., 2007).

Örnek 10:

$u_0(x) = \sinh(x)$ başlangıç çözümü ile verilen

$$u(x) = \sinh(x) - 1 + \int_0^1 \left(\cosh(t)^2 - u(t)^2 \right) dt \tag{4.38}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemini düşünelim. Homotopi;

$$u(x) = \sinh(x) - 1 + p\int_0^1 \left(\cosh(t)^2 - u(t)^2 \right) dt \tag{4.39}$$

şeklinde kurulabilir. (4.39) denkleminin bir çözümünü

$$v(x) = v_0(x) + pv_1(x) + ... \tag{4.40}$$

şeklinde arasak; (4.40) denklemine göre başlangıç yaklaşımı

$$v_0(x) = \sinh(x) \tag{4.41}$$

biçimindedir. (4.40) ve (4.41) denklemlerini (4.39) denkleminde yerini yazıp, p nin katsayılarına göre gruplandırırsak

p^0; $v_0(x) = \sinh(x)$

p^1; $v_1(x) = -1 + \int_0^1 \left(\cosh(t)^2 - v_0(t)^2 \right) dt \Rightarrow v_1(x) = 0$

p^2; $v_2(x) = \int_0^1 2v_0(t)v_1(t)\,dt \Rightarrow v_2(x) = 0$

elde edilir.

$$u(x) = \lim_{p \to 1} v(x) = v_0(x) + v_1(x) + ... \tag{4.42}$$

olduğundan

$$u(x) = v(x) = \sinh(x) \tag{4.43}$$

bulunur (Ganji, et al., 2007).

Örnek 11:

$u_0(x)=1$ başlangıç koşulu ile verilen

$$u(x)=1+x+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.44}$$

integral denklemi ele alalım. Homotopi

$$u(x)=1+x+p\int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.45}$$

şeklinde alınabilir. (4.39) denkleminin bir çözümünün

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+... \tag{4.46}$$

şeklinde olduğu göz önüne alınırsa (4.46) denklemine göre başlangıç yaklaşımı

$$v_0(x)=1 \tag{4.47}$$

dır. (4.46) ve (4.47) denklemlerini (4.45) denkleminde yerine yazıp p nin kuvvetlerine göre gruplandırırsak;

$p^0;\ v_0(x)=1$

$$p^1;\ v_1(x)=x+\int_0^x (x-t)v_0(t)\,dt=x+\frac{x^2}{2!}$$

$$p^2;\ v_2(x)=\int_0^x (x-t)v_1(t)\,dt=\int_0^x (x-t)\left(\frac{t^2}{2}+t\right)dt=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}=\frac{x^4}{4!}+\frac{x^3}{3!}$$

$$p^3;\ v_3(x)=\int_0^x (x-t)v_2(t)\,dt=\int_0^x (x-t)\left(\frac{t^4}{24}+\frac{t^3}{6}\right)dt=\frac{x^6}{30.24}+\frac{x^5}{5.24}=\frac{x^6}{6!}+\frac{x^5}{5!}$$

elde edilir. Buradan çözüm

$$\begin{aligned} u(x)&=\lim_{p\to 1} v(x)=v_0(x)+v_1(x)+v_2(x)+... \\ &=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+... \\ &=e^x \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 12:

$u_0(x)=1$ başlangıç koşulu ile verilen

$$u(x)=1+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.48}$$

integral denklemi ele alalım. Homotopi

$$u(x)=1+p\int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.49}$$

şeklinde alınabilir. (4.49) denkleminin bir çözümünü

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+... \tag{4.50}$$

şeklinde olduğu göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$p^0;\ v_0(x)=1$

$p^1;\ v_1(x)=\int_0^x (x-t).1dt=\dfrac{x^2}{2!}$

$p^2;\ v_2(x)=\int_0^x (x-t)v_1(t)\,dt=\int_0^x (x-t)\dfrac{t^2}{2}dt=\dfrac{x^4}{24}=\dfrac{x^4}{4!}$

elde edilir. Buradan çözüm

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{p\to 1} v(x)=v_0(x)+v_1(x)+v_2(x)+... \\ &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+... \\ &= \cosh(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.3. İntegral Denklemler İçin Varyasyonel Ardıştırma Metodu

Burada, 3. bölümde anlatmış olduğumuz Varyasyonel Ardıştırma metodunu integral denklemlere uygulayacağız.

Örnek 13:

$$u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.51}$$

Volterra integral denklemi ele alalım. Leibnitz formülü yardımıyla türevler alınırsa;

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 - \int_0^x u(t)\,dt \\ u''(x) &= -u(x) \end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Buradan da

$$u''(x) + u(x) = 0 \tag{4.53}$$

bulunur. (4.47) denklemi için Varyasyonel Ardıştırma metodunu

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (x-t)\{u_n''(t) + u_n(t)\}\,dt \tag{4.54}$$

şeklinde kurabiliriz.

$$v(x) = -\int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.55}$$

biçiminde tanımlarsak;

$$\begin{aligned} v'(x) &= -\int_0^x u(t)\,dt \\ v''(x) &= -u(x) \end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. Buradan

$$v''(x) + u(x) = 0 \tag{4.57}$$

bulunur. Bu bağıntı bize $v(x)$ in (4.47) denkleminin bir özel çözümü olduğunu gösterir. Daha basit bir iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x) = u_0(x) + v_n(x) \tag{4.58}$$

biçiminde kurulabilir. Burada u_0 bir başlangıç çözümüdür.

$$u_0(x) = u(0) + u'(0)x = x \tag{4.59}$$

başlangıç koşulu ile başlayarak

$$u_{n+1}(x) = u_0(x) + v_n(x) = x - \int_0^x (x-t)u_n(t)\,dt \tag{4.60}$$

iterasyon formülü elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x-\int_0^x (x-t)u_0(t)\,dt = x-\frac{1}{3!}x^3 \\ u_2(x) &= x-\int_0^x (x-t)u_1(t)\,dt = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5 \\ u_3(x) &= x-\int_0^x (x-t)u_2(t)\,dt = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7 \end{aligned} \tag{4.61}$$

bulunur. Böylelikle $u(x)$ çözümü kapalı formda

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{4.62}$$

şeklinde bulunur.

Buradan anlaşılacağı gibi, basit olarak

$$u_{n+1}(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)u_n(t)\,dt \tag{4.63}$$

iterasyon formülü elde edilir (Xu, 2007)

Örnek 14:

$$u(x)=1+x+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt \tag{4.64}$$

Volterra integral denklemine Varyasyonel Ardıştırma metodunu uygulayalım.

İterasyon formülü

$$u_{n+1}(x)=1+x+\int_0^x (x-t)u_n(t)\,dt \tag{4.65}$$

şeklinde yazılabilir. (4.64) denklemine göre $u_0(x)=1+x$ olarak alınabilir.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1+x+\int_0^x (x-t)u_0(t)\,dt = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \\ u_2(x) &= 1+x+\int_0^x (x-t)u_1(t)\,dt = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. $u(x)$ çözümü kapalı formda

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x \tag{4.67}$$

şeklinde elde edilir.

4.4. İntegral Denklemler İçin Adomian Ayrıştırma Metodu

İntegral denklemin çözümü olan $u(x)$ i $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ şeklinde alalım. Bu çözüm integral denklemde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt \tag{4.68}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$u_0(x)+u_1(x)+...=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)\,dt+\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)\,dt+... \tag{4.69}$$

bulunur. u_n bileşenleri

$$\begin{aligned}&u_0(x)=f(x)\\&u_1(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)\,dt\\&.............\\&u_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_n(t)\,dt,\ n\geq 0\end{aligned} \tag{4.70}$$

yardımıyla bulunarak integral denklemin seri şeklindeki çözümü bulunmuş olur. Benzer şekilde Volterra integral denklemleri de çözülebilir. Lineer olmayan denklemler için bu metodu ele alacak olursak

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u^n(t)\,dt \tag{4.71}$$

Fredholm integral denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümünü $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ şeklinde ararsak, $u^n(t)$ lineer olmayan terimin $\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)$ Adomiyan polinomlarına ayrıştırılmasıyla çözüm;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right) dt \tag{4.72}$$

biçiminde bulunur. Buradaki u_n bileşenleri

$$\begin{aligned} & u_0(x) = f(x) \\ & u_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) A_0(t)\, dt \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) A_n(t)\, dt \end{aligned} \tag{4.73}$$

biçimindedir.

Örnek 15:

$u_0(x) = 1$ başlangıç koşulu ile verilen

$$u(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t) u(t)\, dt \tag{4.74}$$

Volterra integral denklemini Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözelim

$$\begin{aligned} & u_0(x) = 1 + x \\ & u_1(x) = \lambda \int_a^b (x-t) u_0(t)\, dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\ & u_2(x) = \lambda \int_a^b (x-t) u_1(t)\, dt = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece çözüm

$$u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = e^x$$

elde edilir.

Örnek 16:

$$u(x)=\frac{7}{8}x+\frac{1}{2}\int_0^x xtu^2(t)\,dt \qquad (4.75)$$

lineer olmayan fredholm integral denklemini ele alalım. Burada A_n polinomları lineer olmayan terim vasıtasıyla

$$A_0=u_0^2$$
$$A_1=2u_0u_1$$
$$A_2=2u_0u_2+u_1^2$$
....

biçimindedir. u_n bileşenleri

$$u_0(x)=\frac{7}{8}x$$
$$u_1(x)=\frac{1}{2}x\int_0^1 tA_0(t)\,dt=\frac{49}{512}x$$
$$u_2(x)=\frac{1}{2}x\int_0^1 tA_1(t)\,dt=\frac{343}{16384}x$$
....

şeklinde bulunur. Böylece çözüm

$$u_0(x)=\frac{7}{8}x+\frac{49}{512}x+\frac{343}{16384}x+\ldots\cong x$$

olarak elde edilir (Majid and Wazwaz, 1997)

5 SONUÇ

Bu çalışmada uygulamalı matematik dallarında sıkça karşılaşılan ve çözümleri üzerinde ilgilenilen lineer olmayan diferensiyel denklemler verildi. Verilen bu denklemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmak için bazı metotlar ele alındı: Homotopi Pertürbasyon, Varyasyonel Ardıştırma, Adomiyan Ayrıştırma. Bu metotlar adi diferensiyel denklemlere ve integral denklemlere uygulandı. Metotlar uygulandıktan sonra denklemlerin elde edilen çözümleri birbirleriyle karşılaştırıldı. Bu karşılaştırmada, Homotopi Pertürbasyon ve Varyasyonel Ardıştırma metotlarının Adomiyan Ayrıştırma metoduna göre daha hızlı sonuca ulaştırdığı görüldü.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Adomian, G., 1986, Nonlinear Stochostic System Theory and Applications to Physics, Kluwer Academic Press, 219.

Adomian, G., 1986, Stochostic Water Reservoir Modelling, J. Math. Aral. Appl., 115, 233-234 p.

El-Sayed, A.M.A. and Gaber, M., 2006, The Adomian Decomposition Method, Physics Leters A, 359, 175-182 p.

Adomian, G., 1994, Solving Frontier Problems of Physics İntegral Equations, Kluwer Academic Publishers, 352

Adomian, G., 1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, 352

Abbasbandy, S., 2007, Application of He's Homotopy-Perturbation Method to Functional İntegral Equations, Chaos, Solitions and Fractals, 31, 1243-1247 p.

Abbasbandy, S., 2006, Numerical Solutions of the İntegral Equations:Homotopy Perturbation Method and Adomian's Decomposition Method, Applied Mathematics and Computation, 173, 493-500 p.

Aksoy, Y., 1998, İntegral Denklemler, Yıldız Teknik Ü. Basım Yayın Merk., 158

Bulut, H., 2002, Lineer ve Lineer Olmayan Skokastik Diferensiyel Denklemlerin Ayrışım Metodu ile Çözümü, Doktora tezi, Fırat Ü. Fen Bil. Ens., 115.

Çiçek, S., 2002, Başlangıç ve Sınır Değer Problemlerinin Seriler Yardımı ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Ü. Fen bilimleri Ens., 71

Dernek, N. ve Dernek, A., 2001, Diferensiyel Denklemler, Birsen Yayınevi, 296

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ganji, D. D., Afrouzi, G. A., Hosseinzadef, H. and Talarpashti, R. A., 2007. Application of Homotop-Perturbation Metod to the Second Kind of Nonlinear İntegral Equations, Physics Leters A., 371, 20-25 p.

He, Ji-Huan, 1997, A New Approach to Nonlinear Partial Differential Equations, Communications in Nonlinear Science&Numerical Simulation, 2, 230-235 p.

He, Ji-Huan, 1999, Variational İteration Method-A kind of Non-Linear Analytical Technique:Some Examples, International Journal of Non-Linear Mechanics, 34, 699-708 p.

He, Ji-Huan, 2000, A Coupling Method of a Homotopy Technique and a Perturbation Technique for Non-Linear Problems, International Journal of Non-Linear Mechanics, 35, 37-43 p.

He, Ji-Huan, 2000, Homotopy Perturbation Method: A New Nonlinear Analytical Technique, Appl. Math. Comput., 35, 37-43 p.

Koca, K., 2003, Kısmi Türevli Denklemler, Ankara, Eğitim Yayıncılık, 233

Krasnov, M., Kısalev, A. and Makeronko, G., 1976, İntegral Denklemler, (Çev. C. Cerit), İstanbul, 159

Momani, S. and Odibat, Z., 2007, Homotopy Perturbation Method for Non-Linear Partial Diferential Equations of Fractional Order, Physics Leters A, 1-6 p.

Momonial, E., Selway, and Jina, T.A. K., 2007, Analysis of Adomian Decomposition Applied to a Third-Order Ordinary Diferential Equation from Thin Film Flow, Physics Leters A., 66, 2315-2324 p.

Rafei, M., Ganji, D. D., Daniali, H.R. and Pashaei, M. H., 2007, Application of Homotopy Perturbation Method to the RLW and Generalized Modified Boussinesq Equations, Physics Leters A., 364, 1-6 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Nayfeh A. H., 1981, İntroduction to Perturbation Techniques, A Wıley-Interscience Publication, Blacksburg Virginia, 113-118 p

Özer M. N. ve Eser D., 1996, Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları), Birlik Ofset Yayıncılık, Eskişehir, 200

Seng, V., Abbaoui, K. and Cherruavit, Y., 1996, Adomian Polynomials for Nonlinear Operators, 24, 59-65 p.

Xu, Lan, 2007, Variational Iteration Method for Solving Integral Equations, Computers and Mathematics with Applications, 54, 1071-1078 p.

Wazwaz and Majid A., 1997, A First Course in Integral Equations, Word Scientific Publishing Company, New Jersey

Zhang, Li-Na, He, Ji-Huan, Homotopy Perturbation Method for the Solution of the Electrostatic Potential Differential Equation, College of Science, Donghua University, 1-8 p. (unpublished)