

Singularly Perturbed Diferensiyel Denkleminin Geometrik Olarak Değişen Sonlu  
Elemanlarda B-Spline Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü

Özlem Gezbiç

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2012

Solution of the Singularly Perturbed Differential Equation with B-Spline Functions  
over the Geometrically Graded Mesh

Özlem Gezbiç

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics and Computer Sciences

January 2012

Singularly Perturbed Diferensiyel Denkleminin Geometrik Olarak Değişen Sonlu  
Elemanlarda B-Spline Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü

Özlem Gezbiç

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı  
Bilgisayar Bilimleri Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İbrahim Günaltılı

Ocak 2012

## ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Özlem Gezbiç'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Singularly Perturbed Diferensiyel Denkleminin Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda B-Spline Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. İbrahim Günaltılı

**İkinci Danışman** : Prof. Dr. İdris Dağ

### **Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Doç. Dr. İbrahim Günaltılı

**Üye** : Prof. Dr. İdris Dağ

**Üye** : Doç. Dr. Bülent Saka

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Ali Şahin

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve .....  
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu tezde, Singularly Perturbed Diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümü B-spline sonlu elemanlar metodu kullanılarak elde edilmiştir.

Birinci bölümde, sonlu elemanlar metodlarından ve Singularly Perturbed Sınır Değer probleminden bahsedilmiş ve bir örnek problem verilmiştir. Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik B-spline ve kübik B-spline fonksiyonlarının çıkarılışı yapılmıştır.

İkinci bölümde, geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik ve kübik kolokeyşin metodları ile Singularly Perturbed denkleminin çözümleri gösterilmiştir. Sayısal çözümler ile analitik çözümler karşılaştırılmıştır.

Üçüncü bölümde geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik Galerkin metodu kullanılarak Singularly Perturbed denkleminin yaklaşık çözümü elde edilmiştir ve sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Dördüncü ve beşinci bölümde sırasıyla geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda, Singularly Perturbed denkleminin yaklaşık çözümü kuadratik subdomain Galerkin ve kübik subdomain Galerkin metodları kullanılarak elde edilmiştir. Sayısal hesaplamalar ile analitik hesaplamalar karşılaştırılmıştır.

Son bölümde ise önerilen metodlar kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sonlu elemanlar metodu, Singularly Perturbed Diferensiyel denklemi, kuadratik B-spline, kübik B-spline, kolokeyşin metodu, Galerkin metodu

## SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of Singularly Perturbed Differential equation using the finite element method with B-Spline functions over the geometrically graded mesh.

In the first chapter, finite element methods and Singularly Perturbed Differential equation are described. A test problem is studied about this problem. Then both graded quadratic B-spline and graded cubic B-spline functions needed in the next chapters are introduced.

In the second chapter: One of the Singularly Perturbed Problem is solved numerically by using quadratic collocation method and cubic collocation method and numerical results are compared with the analytical solutions and each other.

In the third chapter: The same problem is solved numerically by using quadratic Galerkin method and numerical results of the equation are given to compare with analytical solutions.

In the fourth and fifth chapters : The Perturbed problem is solved numerically by using both quadratic subdomain Galerkin method and cubic subdomain Galerkin method and obtained results are compared with analytic ones.

In the last chapter, the result obtained by using the proposed methods are discussed.

**Keywords:** Finite element methods, Singularly Perturbed Boundary Layer problems, quadratic B-Spline, cubic B-Spline, collocation method, Galerkin method,

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, derslerimde ve tez çalışmalarımnda, bana danışmanlık eden, beni yönlendiren ve hiçbir yardımını esirgemeyen danışmanlarım Doç Dr. İbrahim Günaltılı ve Prof. Dr. İdris Dağ'a ve değerli fikirlerine başvurduğum hocalarım Doç. Dr. Bülent Saka, Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk ve Yrd. Doç. Dr. Ali Şahin'e ve bana her türlü olanağı sağlayan, her zaman yanımda olup beni destekleyen eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. TEMEL KAVRAMLAR .....	1
1.1 Sonlu Elemanlar Metodu .....	1
1.1.1 Ağırlıklı rezidü metodu.....	2
1.1.2 Kolokeyşin metodu .....	3
1.1.3 Galerkin metodu .....	3
1.1.4 Subdomain Galerkin metodu .....	4
1.2 Singularly Perturbed Problemleri .....	5
1.3 Spline Fonksiyonlar .....	10
1.3.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik B-spline fonksiyonlar.....	12
1.3.2 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik B-spline fonksiyonlar.....	18
2. GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA KUADRATİK VE KÜBİK KOLOKEYŞİN METODU .....	24
2.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kuadratik Kolokeyşin Metodu.....	24
2.1.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik kolokeyşin metodu için sayısal hesaplamalar .....	27
2.2 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kübik Kolokeyşin Metodu.....	27
2.2.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik kolokeyşin metodu için sayısal hesaplamalar .....	30



**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)****Sayfa**

3. GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA	
KUADRATİK GALERKİN METODU .....	33
3.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda	
Kuadratik Galerkin Metodu .....	33
3.1.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda	
kuadratik Galerkin metodu için sayısal hesaplamalar .....	41
4. GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA	
KUADRATİK SUBDOMAİN GALERKİN METODU .....	44
4.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda	
Kuadratik Subdomain Galerkin Metodu .....	44
4.1.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda	
kuadratik subdomain Galerkin metodu için sayısal hesaplamalar.....	58
5. GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA	
KÜBİK SUBDOMAİN GALERKİN METODU .....	51
5.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda	
Kübik Subdomain Galerkin Metodu .....	51
5.1.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda	
Kübik Subdomain Galerkin Metodu için nümerik hesaplamalar .....	56
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	59
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	60

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	GODSE kuadratik B-spline şekil fonksiyonu ..... 16
1.2	GODSE kübik B-spline şekil fonksiyonu ..... 22
2.1	Kuadratik ve kübik kolokeyşin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için eşit aralıklı bölünme ..... 31
2.2	Kuadratik ve kübik kolokeyşin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme..... 31
2.3	Kuadratik ve kübik kolokeyşin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için eşit aralıklı bölünme ..... 31
2.4	Kuadratik ve kübik kolokeyşin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme..... 31
3.1	Kübik Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için eşit aralıklı bölünme..... 42
3.2	Kübik Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme ..... 42
3.3	Kübik Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için eşit aralıklı bölünme..... 42
3.4	Kübik Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme ..... 42
4.1	Kuadratik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için eşit aralıklı bölünme..... 49
4.2	Kuadratik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme..... 49
4.3	Kuadratik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için eşit aralıklı bölünme..... 50
4.4	Kuadratik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme..... 50
5.1	Kübik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için eşit aralıklı bölünme..... 58
5.2	Kübik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.01$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme..... 58

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**

<b><u>Sekil</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
5.3	Kübik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için eşit aralıklı bölünme.....	58
5.4	Kübik subdomain Galerkin metodu sonucu $\varepsilon=0.001$ için geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünme.....	58

## TABLOLAR DİZİNİ

<b><u>Tablo</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
1.1	(1.9) ile verilen Singularly perturbed sınır değer probleminin çözüm tipleri .....	16
1.2	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik B-spline fonksiyon değerleri.....	17
1.3	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik B-spline fonksiyon değerleri.....	23
2.1	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik kolokeyşin metodunda (1.13) problemi için $L_\infty$ hata normları .....	27
2.2	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik kolokeyşin metodunda (1.13) problemi için $L_\infty$ hata normları .....	30
3.1	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik Galerkin metodunda (1.13) problemi için $L_\infty$ hata normları.....	41
4.1	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik subdomain Galerkin metodunda (1.13) problemi için $L_\infty$ hata normları.....	49
5.1	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik subdomain Galerkin metodunda (1.13) problemi için $L_\infty$ hata normları.....	57

**KISALTMALAR DİZİNİ**

<b><u>Kısaltmalar</u></b>	<b><u>Açıklama</u></b>
CKM	Kübik kolokeyşin metodu
CSGM	Kübik subdomain Galerkin metodu
GODSE	Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda
QKM	Kuadratik kolokeyşin metodu
QGM	Kuadratik Galerkin metodu
QSGM	Kuadratik subdomain Galerkin metodu
SPP	Singularly Perturbed problem

## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavram ve metotlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak sonlu elemanlar metodu hakkında kısaca bilgiler verilmiş ve kolokeyşin, ağırlıklı rezidü, Galerkin ve subdomain Galerkin metotları tanıtılmıştır. Singularly Perturbed probleminden ve yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümü, tanım aralığı eşit parçalara bölünerek elde edilmiştir. Sayısal çözümleri iyileştirmek için çözümlerin ani değişim gösterdiği bölgelerinde, aralıkları daha küçük bölerek sayısal yaklaşım yapılmıştır (Kadalbajoo and Aggarwal, 2005). Bu tezde, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin tanım aralığını eşit parçalara bölmek yerine, bir aralık bir önceki aralığın herhangi bir  $\alpha$  katı olarak alınarak, sonlu elemanlar metotları ile sayısal çözüm araştırılmıştır. Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümü araştırılırken, probleme göre eğer ani değişimler tanım aralığının sağ tarafında oluşuyorsa,  $\alpha$  değeri  $0 < \alpha < 1$  şartını sağlayacak şekilde belirlenir. Diğer durumda, yani ani değişimler tanım aralığının sol tarafında oluşuyorsa,  $\alpha$  değeri  $\alpha > 1$  olacak şekilde seçilebilir. En uygun  $\alpha$  değeri belirlendikten sonra, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümleri tanım aralığının eşit olarak bölünmesiyle bulunan sonuçlar ile geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda bölünmesiyle bulunan sonuçları karşılaştırılacaktır.

#### 1.1 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar metodunda, diferensiyel denklemin tanım bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan alt bölgelere ayrılarak aranılan çözüm fonksiyonu, sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadarki türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilirler. Sonlu elemanlar metodunun kullanımı ile ilgili genel bilgiler aşağıdaki gibi özetlenebilir;

1. Sonlu elemanlar metoduyla diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak kolay olmamasına rağmen metodların iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

2. Sonlu elemanlar metodunda, diferensiyel denklemin sayısal çözümü için, alt aralıklarda parçalı fonksiyonlar ile yaklaşım yapılır.
3. Sonlu elemanlar metodunda her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir. Bölünme noktalarında parçalı fonksiyonların istenen dereceye kadar sürekliliği sağlanabilir.
4. Sonlu elemanlar metodu hem düzgün hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir.

Sonlu elemanlar metodlarından bazıları aşağıda verilmiştir.

### 1.1.1 Ağırlıklı rezidü metodu

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilen bir diferensiyel denklemde;  $L$  bir diferensiyel operatör,  $f(x)$  bilinen bir fonksiyon ve  $u(x)$  aranan çözüm olsun. (1.1) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında, aranan  $u(\cdot)$  ifadesi yerine

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.2)$$

formundaki sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(1.2) eşitliğinde verilen  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonksiyonları, diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda,  $\phi_j(\cdot)$  fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemi sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidü metodu,  $\tilde{u}(x)$  sayısal çözümüyle orijinal denklem arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçüsü rezidü ile tanımlanır.

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x). \quad (1.3)$$

$V_j$  ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (1.3) ile verilen rezidü ifadesi,  $V_j(x)$  ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak problemin  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki integrali alınır

$$\int_{\Omega} V_j(x)R(x)dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

formunda  $N$  bilinmeyen  $N$  denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden  $a_j$  bilinmeyenleri bulunarak (1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa  $\tilde{u}(x)$  sayısal çözümüne ulaşılır.

### 1.1.2 Kolokeyşin metodu

Adi diferensiyel denklemleri, kısmi diferensiyel denklemlerin ve integral denklemlerinin çözümünde uygulaması kolay olan yöntemdir. Başlangıç ve sınır koşulları ile verilen diferensiyel denklemin tanım bölgesinde tanımlan kolokeyşin noktalarında sağlayan bir fonksiyon bulmak için kullanılır.

Kolokeyşin metodu, ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta  $V_j$  ağırlık fonksiyonları olarak

$$V_j = \delta(x - x_j) \quad (1.5)$$

Dirac Delta fonksiyonları seçilir.  $R(x_j) = 0, j = 1, \dots, N$  olduğunda (1.4) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşin metodu için problemin tanımlanan aralığında verilen  $x_j, j = 1, \dots, N$  kolokeyşin noktalarında (1.4) eşitliğinin yazılmasıyla

$$L\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)\right) - f(x) = 0 \quad (1.6)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sınır koşulları kullanılarak, denklemdeki  $a_j$  bilinmeyenleri bulunduktan sonra,  $\tilde{u}(x)$  sayısal çözümüne ulaşılır (Lapidus and Pinder, 1982).

### 1.1.3 Galerkin metodu

Galerkin metodu başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte verilen diferensiyel denklemini sayısal olarak çözmek için kullanılan diğer bir metottur.



$V_j$  ağırlık fonksiyonları, yaklaşım fonksiyonunda kullanılan  $\phi_j(x)$  fonksiyonlarına eşit olarak alındığında metod Galerkin metodu olarak adlandırılır. Tamam bölgesi  $\Omega$  olmak üzere, (1.4) denkleminin cebirsel denklemleri

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i L(\phi_j) dx$$

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i f dx$$

olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = F_i \quad (1.7)$$

ile ifade edilir. Sistemin çözülmesiyle bulunan  $a_j$  bilinmeyenlerinin (1.2) denkleminde yerine yazılmasıyla (1.2) formunda sayısal çözüm belirlenir.

#### 1.1.4 Subdomain Galerkin metodu

$\Omega$  tamam bölgeli problemi çözmek için Galerkin metodunda  $V_i$  ağırlık fonksiyonu

$$V_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.8)$$

ifadesine eşit olarak alındığında Galerkin metodu, subdomain Galerkin metoduna döndürür. Subdomain Galerkin metodunun cebirsel denklemleri

$$A_{ij} = \int_{\Omega} L(\phi_j) dx$$

$$F_i = \int_{\Omega} f dx$$

olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = F_i$$

ile ifade edilir.

## 1.2 Singularly Perturbed Problemleri

Singularly Perturbed Sınır Değer problemi, yüksek mertebeli türevlerin katsayılarının, oldukça küçük bir parametreyle çarpılmasıyla elde edilen problemlerden biridir. Bu tip problemlerin çözümü, tanım bölgesinin, özellikle sınıra yakın yerlerinde hızlı ve düzensiz değişim gösterirken, sınıra yakın olmayan yerlerde yavaş ve düzenli değişim gösterir. Bu değişiklik sınırın sağ uç noktasına yakın yerlerde veya sol uç noktasına yakın yerlerde olabileceği gibi her iki uç noktaya yakın yerlerde de olabilir. Hızlı değişimin olduğu yerlerde çözüm bölgesinin tanım aralıklarının eşit olarak bölünmesiyle yapılan standart sayısal yaklaşımların incelenmesi çok etkili bir metod değildir. Çünkü en yüksek mertebeli türevin katsayısı olan pertürbasyon parametresi (problemin başkatsayısı) küçük alındığında, klasik sayısal metotlar genelde tatmin edici sayısal sonuçlar vermemektedir. Hatta çözüme yakınsama istenirken tam tersi çözümden uzaklaşılabilir (Doolan et al., 1980; O'Malley, 1991; Nayfeh, 1993). Bu yüzden Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin çözümleri için farklı metodlar denenmekte ve geliştirilmektedir.

Bu kısımda

$$-\varepsilon u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega = [a, b] \quad (1.9)$$

Singularly Perturbed Sınır Değer problemi ele alınacaktır. Bu problemin sınır koşulları aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$u(0) = \lambda, \quad u(1) = \beta. \quad (1.10)$$

Burada  $\varepsilon > 0$  pertürbasyon parametresi,  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $f(x)$  düzgün ve sınırlı fonksiyonlar,  $\lambda$  ve  $\beta$  sonlu sabitlerdir.

Bu problemin çeşitli versiyonları Tablo 1.1 ile verilmiştir.

Tablo 1.1: (1.9) ile verilen Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin çözüm tipleri

Koşul		Çözüm tipi
$p(x) \neq 0$	$p(x) < 0$	çözüm bölgesinin sol tarafına yakın bölgelerindeki çözümlerinde ani değişiklikler ve sapmalar vardır.
	$p(x) > 0$	çözüm bölgesinin sağ tarafına yakın bölgelerindeki çözümlerinde ani değişiklikler ve sapmalar vardır.
$p(x) = 0$	$q(x) > 0$	çözüm bölgesinin her iki tarafındaki bölgelerindeki çözümlerinde ani değişiklikler ve sapmalar vardır.
	$q(x) < 0$	Hızlı salınımına sahip çözüm vardır.
	$q(x)$ kökü	Dönüm noktası vardır.
$p'(x) \neq q(x)$ $p(0) = 0$	$p'(0) < 0$	0 noktasını içeren bir aralıkta, 0 noktasındaki çözümlerinde ani değişiklikler ve sapmalar vardır.
	$p'(0) > 0$	0 noktasını içeren bir aralıkta, $a$ ve $b$ noktalarındaki çözümlerinde ani değişiklikler ve sapmalar vardır.

Bu çalışmada

$$p(x) \geq p > 0, \text{ ve } q(x) \geq q > 0, x \in \Omega \quad (1.11)$$

(1.11) koşulları altında Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümleri ile ilgilenilecektir. Problemin çözüm bölgesinin sağ tarafına yakın bölgelerindeki çözümlerinde ani değişiklikler ve sapmalar olduğu gözlemlenmektedir.

Singularly Perturbed problemi, akarsulardaki su kalitesini modelleme problemi (Baumert et al., 1981), akışkanlar mekaniğinde dinamik benzerliği tanımlamak için kullanılan Reynolds sayıları (Hirsch, 1988), ısı transferinin hangi mekanizmayla gerçekleşeceği bulan Peclet sayıları (Jacob, 1959), difüzyon denklemlerinin modellenmesi (Polak et al., 1987), görsel medyada elektromanyetik alan problemi (Hahn,

1987), finansal modellemesi ( Black and Scholes, 1973), türbulans modellemesi (Lauder and Spalding, 1972) gibi problemlerin yanısıra, kuantum mekaniği, optimal kontrol, kimyasal reaksiyon teorisi, reaksiyon-difüzyon işlemleri, jeofizik, aerodinamik, plazma dinamik, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, kütlelin hareketi, plastik, meteoroloji, yayma teori, ışık yayan dalgalar, iletişim hatları, elektrik akımı, iyon akustik dalgaları gibi fen ve mühendisliğin bir çok alanında sıkça kullanılmaktadır. Normalde, bu problemde, en yüksek basamaktan türevin katsayısı (pertürbasyon parametresi ya da problemin başkatsayısı)  $\varepsilon$  küçük olduğunda, sınıra yakın yerlerdeki çözümlerde ani değişiklikler olur. Çözümler bu bölgelerde ani değişkenlik gösterdiği için, sayısal çözümde büyük sıçramalar meydana gelir. Bunu önlemek için problemin çözüm bölgesinin tanım aralıkları, çözümün ani değişiklik gösterdiği bölgeyi, diğer yerlere oranla daha küçük parçalara bölünerek sayısal çözüm incelenmektedir. Bu metod ilk defa Bakhvalov (1969) tarafından reaksiyon difüzyon problemlerinin çözümünde ortaya çıkmıştır.

Singularly Perturbed Sınır Değer problemi literatürde de çok sık geçen bir problemdir. O'Malley (1989), Singularly Perturbed probleminin çözümünün varlığını, tekliğini ve çözümün asimptotik davranışlarını incelemiştir. Temel olarak bölünme aralıklarını birbirine eşit alt aralıklara bölerek sayısal çözümün incelendiği bir çok sayısal metod ve Singularly Perturbed Sınır Değer probleminde en yüksek mertebeli türevin katsayısı olan pertürbasyon parametresi (problemin başkatsayısı) olan  $\varepsilon$  değişirken çözümdeki değişikliklerin incelendiği metodlar (Doolan et al., 1980; Farrell et al., 2000; Miller et al., 1980; Roos et al., 1996) verilmiştir. Singularly Perturbed adi diferensiyel denkleminin farklı sayısal çözüm metodları, Kadalbajoo ve Patidar (2002 a) tarafından incelenmiştir. Kadalbajoo ve Gupta (2009) bazı standart singularly perturbation modelleri sunmuşlar ve 1984-2000 yılları arasında yapılan çalışmaları üzerine çeşitli sayısal yöntemler geliştirmişlerdir. İki noktalı Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümleri için spline yaklaşımı metodu bir çok bilim adamı tarafından araştırılmıştır. Stojanovic (2002), parçalı kuadratik polinom kullanarak kolokeyşim metoduyla sayısal yaklaşımlar yapmışlardır. Sakai ve Usmani (1986) hiperbolik ve trigonometrik terimleri cinsinden spline fonksiyonları

kullanarak kolokeyşin metoduyla sayısal yaklaşımlar üzerinde çalışmışlardır. Sakai ve Usmani (1989), singularly perturbation probleminin sayısal çözümüne, basit üstel yaklaşımlarda bulunmuşlardır. Kadalbajoo ve Aggarwal (2005), iki noktalı Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin tanım bölgesi Shishkin bölünmesi kullanılarak, bölünme noktalarında ikinci meretebeden B-Spline kolokeyşin metodu önermişlerdir.

Bir çok bilim adamı bu problemle ilgili araştırma yapmakta ve yukarıda bahsedilen zorlukların üstesinden gelmeye çalışmaktadır. Fyfe (1969) birbirine eşit olan ve olmayan aralıklarda kübik B-spline fonksiyonları ile ilgili çalışma yapmış ve sonuçları karşılaştırmıştır. Birbirine eşit olmayan aralıklarda kübik B-Spline fonksiyonlarıyla çalışmanın avantajını gözlemlemiştir. Beckett ve Mackenzie (2001) birbirine eşit olmayan aralıklar üzerinde  $p$ . mertebeden Galerkin sonlu elemanlar yöntemini önermişlerdir. Çalışmalarında bir monitor fonksiyonuyla, pozitif eş dağılımlı aralık oluşturmuşlardır. Monitor fonksiyonunun parametrelerinin uygun seçiminden sonra, singular perturbasyon parametresinin boyutuna bağlı olmayan sayısal çözümü araştırmışlardır ve bölünme yoğunluğuna göre yakınsaklığın optimal değerine ulaşmışlardır. Liu ve Gu (2006) konveksiyon baskın Singularly Perturbed problemi için farklı yapıda meshless metodlar önermişlerdir. Kadalbajo ve Patidar (2002 b), metodun 2. mertebeden kararlılığını göstermişlerdir. Rao ve Kumar (2007) kübik B-spline fonksiyonu ile ilgilenmişlerdir. Çalışmalarında, tanım kümesini birbirini örtmeyen üç alt bölgeye ayırmışlar ve bu tanım kümeleri üzerinde diferensiyel denklemin çözümünü araştırmışlardır. Son zamanlarda, (Tirmizi, et al. 2008) adlı çalışmada, interpolasyon fonksiyonu olarak polinom olmayan quartik spline metodunu çalışmışlardır. Dağ ve Şahin (2009) geometrik olarak değişen alt aralıklar üzerinde tanımlı kuadratik B-spline ve kübik B-spline fonksiyonları ile kolokeyşin metodlarını kullanarak, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin çözümünü araştırmışlardır.

Bu tezde Singularly Perturbed diferensiyel denkleminin,  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$  ve  $f(x) = e^x$  özel hali incelenecektir. Bu durumda genel denklem

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = e^x. \quad (1.12)$$

olarak yazılabilir. Bu diferensiyel denklemin

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

sınır koşulları altındaki çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir.

Sabit katsayılı homojen olmayan diferensiyel denklemin, belirsiz katsayılar metodu ile çözümü yapılabilir. Denklemin homojen kısmının çözümü için karakteristik denklem;

$$(-\varepsilon m^2 + m) = 0$$

olacağından kökleri  $m_1 = 0$  ve  $m_2 = 1/\varepsilon$  dir. Buna göre homojen çözüm

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \\ &= c_1 + c_2 e^{x/\varepsilon} \end{aligned}$$

şeklindedir. Varsayılan özel çözümün

$$y_{\ddot{o}} = k e^x$$

olduğu kabul edilir ve özel çözüm genel denklemde yerine yazılırsa  $k$  sabiti

$$\begin{aligned} -\varepsilon k e^x + k e^x &= e^x \Rightarrow (k - \varepsilon k - 1)e^x = 0 \\ \Rightarrow (k - \varepsilon k - 1) &= 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{aligned}$$

olarak bulunacağından özel çözüm

$$y_{\ddot{o}} = \frac{1}{1 - \varepsilon} e^x$$

formunda elde edilebilir. Dolayısıyla genel çözüm, homojen kısmın çözümüyle özel çözümün toplamından

$$u(x) = c_1 + c_2 e^{x/\varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon} e^x$$

şeklindedir.  $u(0) = 0$  ve  $u(1) = 0$  sınır koşulları genel çözümde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{1 - \varepsilon} &= 0 \\ c_1 + c_2 e^{1/\varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon} e &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{e^{1/\varepsilon}(1 - e^{1-1/\varepsilon})}{(1 - \varepsilon)(1 - e^{1/\varepsilon})} \\ c_2 &= \frac{e - 1}{(1 - \varepsilon)(1 - e^{1/\varepsilon})} \end{aligned}$$

olarak belirlenebileceğinden verilen sınır şartlarını sağlayan çözüm

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{e^{1/\varepsilon}(1 - e^{1-1/\varepsilon})}{(1 - \varepsilon)(1 - e^{1/\varepsilon})} + \frac{e - 1}{(1 - \varepsilon)(1 - e^{1/\varepsilon})}e^{x/\varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon}e^x \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \left[ e^x - \frac{1 - e^{1-1/\varepsilon} + (e - 1)e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### 1.3 Spline Fonksiyonlar

Çok sayıda veri noktalarından geçen interpolasyon polinomu bulmak kolay değildir ve hesaplamalarda hatalar olabilmektedir. Lagrange ve Newton interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayılarıyla doğru orantılıdır. Nokta sayısı arttıkça, polinomun derecesi de artar. Dolayısıyla yapılacak işlemlerin karmaşıklığı artar. Bunun yerine ard arda gelen iki veri arasında birinci, ikinci ya da daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşım yapılması daha uygundur. Çok sayıda veri noktalarına düşük dereceden polinom yaklaşımı spline interpolasyonu yardımıyla yapılabilir. Böylece spline interpolasyonu; tanım aralığı üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulmayı amaçlar.

Reel sayıların monoton artan bir  $x_1, x_2, \dots, x_N$  dizisinin noktalarında tanımlı  $m$ . dereceden  $s(x)$  spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

1.  $s(x)$  her  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığında  $m$ . dereceden ya da daha küçük dereceden bir polinomdur. (Burada  $x_0 \rightarrow -\infty$  ve  $x_{n+1} \rightarrow \infty$  olabilir. )
2.  $s(x)$  ve kendisinin  $1, 2, \dots, m - 1$  basamaktan türevleri tanımlı oldukları her aralıkta ve  $x_i, (i = 1, 2, \dots, N)$  bölüm noktalarında süreklidir.

Bu tanıma göre, spline fonksiyonları, tanımlanan alt aralıklarda ve bölünme noktalarında süreklilik ve türevlenme koşullarını sağlayan parçalı sürekli fonksiyonlardır.  $m = 0$  için 2 koşulu geçersizdir ve 0. dereceden bir spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır.  $m = 1$  için ise spline fonksiyonu kırık bir çizgidir.  $m > 0$  için  $m$ . dereceden bir spline fonksiyonunun  $m$ . türevi bir adım fonksiyonudur. Tersine  $m$ . dereceden bir spline fonksiyonu, bir adım fonksiyonunun  $m$ . basamaktan belirsiz integralidir.

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır.

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar, uygun tabana sahip ve boyutları sonlu olan lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonlarla elle hesaplama yapılması veya uygun programların yazılması oldukça kolaydır.
- Spline fonksiyonların türevleri de yine spline fonksiyonlardır.
- Derecesi küçük olan fonksiyonlar oldukça esnektir ve polinomlardaki gibi salınım yapmazlar.

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

sonsuz reel eksenin bölünme noktaları olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} x_m = \infty = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$$

B-spline fonksiyonlarının oluşturacağı noktaların bir kümesi olsun. Bu durumda 0. dereceden bir B-spline fonksiyonu

$$B_{m+1}^0 = \begin{cases} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.14)$$



formunda tanımlanır.  $B_m^0$  B-spline fonksiyonunun sürekli olmadığı açıktır. Diğer yandan sıçramanın olduğu her noktada

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_m^+} B_{m+1}^0(x) = 1 = B_m^0(x_m) \\ \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^+} B_{m+1}^0(x) = 0 = B_m^0(x_{m+1}) \end{aligned} \right\} \text{ her } m \text{ ve } x_m \text{ için} \quad (1.15)$$

olduğundan  $B_m^0$  B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir. (1.14) ve (1.15) ile verilen iki eşitlikten dolayı  $B_m^0(x)$  B-spline fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \text{Her } m \text{ ve } x_m \text{ için, } B_{m+1}^0(x) &\geq 0, \\ \text{Her } x \text{ için, } \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{m+1}^0(x) &= 1 = B_{m+1}^0(x_{m+1}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

özelliklerini sağladığı ve sadece  $[x_m, x_{m+1})$  aralığında değer aldığı açıktır.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonları ise

$$B_{m+1}^0 = \begin{cases} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.17)$$

olmak üzere

$$B_m^k = \frac{x - x_m}{x_{m+k} - x_m} B_m^{k-1}(x) + \frac{x_{m+k+1} - x}{x_{m+k+1} - x_{m+1}} B_{m+1}^{k-1}(x) \quad (1.18)$$

$k = 1, 2, \dots$   $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  indirgeme bağıntısıyla türetilebilir (Höllig, 2003).  $B_m^k$  B-spline fonksiyonu aynı nokta dizileri için tanımlı ve derecesi  $k$  olan spline fonksiyonları için tabandır.

### 1.3.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  tanım aralığını geometrik olarak değişen noktalarda

$$x_{m+1} = x_m + h_m, \quad m = 1, \dots, N$$

olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (1.19)$$

şeklinde parçalansın. Her bir alt aralığın boyu olan  $h_m$ ,  $\alpha$  sabit bir reel sayı olmak üzere  $h_m = \alpha h_{m-1}$  bağıntısını sağlamalıdır.

GODSE fonksiyonunu geometrik olarak inşa etmek için,  $h_0$  m ilk eleman olarak belirlenmesi gerekir.

$$h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{N-1} = (b - a) \quad (1.20)$$

eşitliğindeki her terim  $h_0$  cinsinden yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$h_0 + \alpha h_0 + \alpha^2 h_0 + \cdots + \alpha^{N-1} h_0 = (b - a). \quad (1.21)$$

eşitliği bulunacağından ilk aralığın uzunluğu

$$h_0 = \frac{(b - a)}{1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1}} \quad (1.22)$$

formunda elde edilebilir.

Bu bölünmede özel olarak  $\alpha = 1$  olarak alınır, tüm aralıkların eşit uzunlukta olduğu bölünme elde edilir. Bölünmenin büyüklüğü sınırın solunda küçük olucaksa, aralıklar gitgide büyüyeceğinden  $\alpha > 1$  olarak seçilmelidir. Diğer taraftan bölünmenin büyüklüğü sınırın sağında küçük olucaksa aralıklar gitgide küçüleceğinden  $\alpha < 1$  olarak seçilmelidir.

$[a, b]$  aralığının alt aralıklarında tanımlı  $B_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki kuadratik B-spline fonksiyonları gösterebilir. Bu durumda  $B_{-1}^2, \dots, B_N^2$  fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975). Kuadratik B-spline kolokeyşin metodunda, kuadratik B-spline fonksiyonlarının kombinasyonu deneme fonksiyonları olarak kullanılarak,  $u(x)$  çözümü

$$u_N = \sum_{m=-1}^N \delta_m B_m^2 \quad (1.23)$$

formundaki  $u_N(x)$  sayısal çözümü araştırılır. Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik B-spline fonksiyonları (1.17) ile (1.18) indirgeme bağıntısı kullanılarak aşağıdaki gibi türetilebilir:

- $k = 1$  için

$$B_{m+1}^1 = \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} B_{m+1}^0(x) + \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} B_{m+2}^0(x)$$

formülünden

$$B_{m+1}^1 = \begin{cases} \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m}, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}}, & x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.24)$$

olarak belirlenebilir.

- $k = 2$  için

$$B_{m+1}^2 = \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} B_{m+1}^1(x) + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} B_{m+2}^1(x)$$

formülünden

$$B_{m+1}^2 = \begin{cases} \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m}, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}}, & x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+2}}, & x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.25)$$

olarak belirlenebilir.

$x_{m+1} \leq x < x_{m+2}$  aralığı üzerinde tanımlı  $B_m^2(x)$ ,  $B_{m+1}^2(x)$  ve  $B_{m+2}^2(x)$  kuadratik B-Spline fonksiyonları  $x_m$  koordinatlarından bağımsız olarak  $\xi = x - x_{m+1}$  dönüşümü yardımıyla sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} B_m^2(x) &= \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} = \frac{h_{m+1} - \xi}{h_m + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} \\ &= \frac{h_{m+1} - \xi}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} = \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1} \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right)} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} \\ &= \frac{(h_{m+1} - \xi)^2}{h_{m+1}^2 \frac{1 + \alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha (h_{m+1} - \xi)^2}{h_{m+1}^2 (1 + \alpha)}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
B_{m+1}^2(x) &= \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \\
&= \frac{\xi + h_m}{h_m + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{h_{m+2} + h_{m+1} - \xi}{h_{m+1} + h_{m+2}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\xi + \frac{h_{m+1}}{\alpha}}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{\alpha h_{m+1} + h_{m+1} - \xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\alpha \xi + h_{m+1}}{h_{m+1}(1 + \alpha)} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{\alpha h_{m+1} + h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}(1 + \alpha)} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\alpha \xi h_{m+1} - \alpha \xi^2 + h_{m+1}^2 - h_{m+1} \xi}{h_{m+1}^2(1 + \alpha)} + \frac{\alpha \xi h_{m+1} + \xi h_{m+1} - \xi^2}{h_{m+1}^2(1 + \alpha)} \\
&= \frac{h_{m+1}^2 + 2\alpha \xi h_{m+1} - (\alpha + 1)\xi^2}{h_{m+1}^2(1 + \alpha)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B_{m+2}^2(x) &= \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} = \frac{\xi}{h_{m+1} + h_{m+2}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1}} = \frac{\xi}{h_{m+1}(1 + \alpha)} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\xi^2}{h_{m+1}^2(1 + \alpha)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece yerel koordinat dönüşümü ile  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde tanımlı kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarının  $[0, h_m]$  aralığındaki ifadesi bulunmuş olur.

$B_m^2(x)$  spline fonksiyonu ve onun birinci türevi,  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$  aralığının dışında sıfırdır.  $\phi_m(x)$ ,  $[0, h_m]$  aralığındaki B-spline şekil fonksiyonlarını göstermek üzere,  $\phi_m(x)$  ve onun birinci türevi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{matrix} \phi_{m-1} \\ \phi_m \\ \phi_{m+1} \end{matrix} = \frac{1}{h_m^2} \begin{cases} \alpha(h_m - \xi)^2 \\ h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1 + \alpha)\xi^2 \\ \xi^2 \end{cases} \quad (1.26)$$

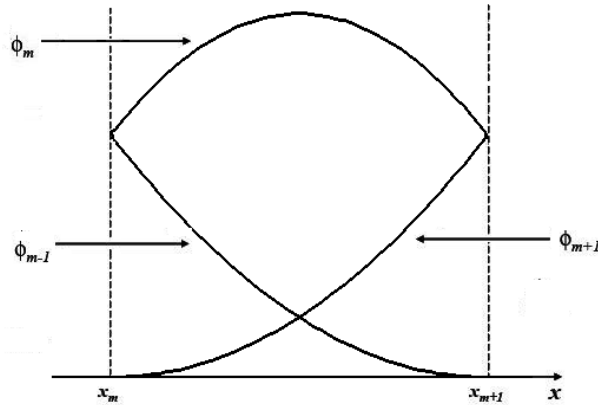
$$\begin{matrix} \phi'_{m-1} \\ \phi'_m \\ \phi'_{m+1} \end{matrix} = \frac{1}{h_m^2} \begin{cases} -2\alpha(h_m - \xi) \\ 2\alpha h_m - 2(1 + \alpha)\xi \\ 2\xi \end{cases} \quad (1.27)$$

$x = x_m + \xi$  için  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı ele alırsa

$$\begin{aligned} x = x_m &\Rightarrow x_m = x_m + \xi \Rightarrow \xi = 0 \\ x = x_{m+1} &\Rightarrow x_{m+1} = x_m + \xi \Rightarrow \xi = h_m \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla  $0 \leq \xi \leq h_m$  dir.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 3 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  GODSE kuadratik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.1'de  $\alpha = 1$  durumu için gösterilmiştir.



Şekil 1.1: GODSE kuadratik B-spline şekil fonksiyonu

Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elamanı üzerinde, 3 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  GODSE kuadratik

B-spline şekil fonksiyonu cinsinden  $u$  için yaklaşım ifadesi

$$u_N = \sum_{m=j-1}^{j+1} \delta_m \phi_m \quad (1.28)$$

eşitliği ile bulunabilir. Buna göre  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki yaklaşım

$$u_N = \phi_{m-1} \delta_{m-1} + \phi_m \delta_m + \phi_{m+1} \delta_{m+1} \quad (1.29)$$

olarak elde edilir. Burada  $\delta_m$  ler bilinmeyen parametrelerdir. Bölünme noktalarında (1.26) ve (1.27) kullanılarak elde edilen GODSE kuadratik B-spline fonksiyonunun değerleri Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.2: Bölünme noktalarında GODSE kuadratik B-spline fonksiyonunun değerleri

	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m$	0	$\alpha$	1	0
$h_m \phi'_m$	0	$-2\alpha$	$2\alpha$	0

$u_m$  ve  $u'_m$  sayısal çözümünün GODSE kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden değerleri Tablo 1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} u_m &= u(x_m) = \sum_{m=-1}^N \delta_m B_m^2(x) \\ &= \alpha \delta_m + \delta_{m+1} \end{aligned} \quad (1.30)$$

ve

$$\begin{aligned} u'_m &= u'(x_m) = \sum_{m=-1}^N \delta_m (B_m^2)'(x) \\ &= -\frac{2\alpha}{h_m} \delta_m + \frac{2\alpha}{h_m} \delta_{m+1} \\ &= \frac{2\alpha}{h_m} (\delta_{m+1} - \delta_m) \end{aligned} \quad (1.31)$$

olarak elde edilebilir.

### 1.3.2 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralğının parçalanması üzerinde  $B_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki kübik B-spline fonksiyonları gösterebilir. Bu durumda  $B_{-1}^3, \dots, B_{N+1}^3$  fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975). Kübik B-spline kolokeyşin metodunda, kübik B-spline fonksiyonları deneme fonksiyonları olarak kullanılarak,  $u(x)$  çözümü için

$$u_N = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m B_m^3 \quad (1.32)$$

formundaki  $u_N(x)$  sayısal çözümü araştırılır. Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda Kübik B-Spline fonksiyonları (1.18) indirgeme bağıntısıyla, (1.14), (1.24) ve (1.25) fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki gibi türetilir.

- $k = 3$  için

$$B_{m+1}^3 = \frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} B_{m+1}^2(x) + \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} B_{m+2}^2(x)$$

formülünden

$$B_{m+1}^3(x) = \begin{cases} \frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m}, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ \frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} \left( \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right) + \\ \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} \left( \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right), & x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ \frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} \left( \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+2}} \right) + \\ \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} \left( \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+2}} + \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+2}} \frac{x - x_{m+2}}{x_{m+3} - x_{m+2}} \right), & x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+2}} \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+3}}, & x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.33)$$

olarak belirlenebilir.

$x_{m+1} \leq x < x_{m+2}$  aralığı üzerinde tanımlı  $B_m^3(x)$ ,  $B_{m+1}^3(x)$ ,  $B_{m+2}^3(x)$  ve  $B_{m+3}^3(x)$  kübik B-Spline fonksiyonları  $x_m$  koordinatlarından bağımsız olarak  $\xi = x - x_{m+1}$  dönüşümü yardımıyla sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
B_m^3(x) &= \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m-1}} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} \\
&= \frac{(h_{m+1} - \xi)}{(h_{m-1} + h_m + h_{m+1})} \frac{(h_{m+1} - \xi)}{(h_m + h_{m+1})} \frac{(h_{m+1} - \xi)}{h_{m+1}} \\
&= \frac{(h_{m+1} - \xi)^3}{\left(\frac{h_{m+1}}{\alpha^2} + \frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}\right) \left(\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}\right) h_{m+1}} \\
&= \frac{\alpha^3 (h_{m+1} - \xi)^3}{h_{m+1}^3 (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\begin{aligned}
B_{m+1}^3(x) &= \left( \frac{x - x_{m-1}}{x_{m+2} - x_{m-1}} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_m} \left( \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right) \right) \\
&= \left( \frac{h_m + h_{m-1} + \xi}{h_{m-1} + h_m + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_m + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{m+2} + h_{m+1} - \xi}{h_m + h_{m+1} + h_{m+2}} \left( \frac{h_m + \xi}{h_m + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{h_{m+2} + h_{m+1} - \xi}{h_{m+1} + h_{m+2}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \right) \\
&= \left( \frac{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + \frac{h_{m+1}}{\alpha^2} + \xi}{\frac{h_{m+1}}{\alpha^2} + \frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha h_{m+1} + h_{m+1} - \xi}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \left( \frac{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + \xi}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{\alpha h_{m+1} + h_{m+1} - \xi}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \right) \\
&= \left( \frac{\alpha h_{m+1} + h_{m+1} + \alpha^2 \xi}{h_{m+1}(1 + \alpha + \alpha^2)} \frac{\alpha h_{m+1}^2 - 2\alpha \xi h_{m+1} + \alpha \xi^2}{h_{m+1}^2(1 + \alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha^2 h_{m+1} + \alpha h_{m+1} - \alpha \xi}{h_{m+1}(1 + \alpha + \alpha^2)} \left( \frac{h_{m+1} + \alpha \xi}{h_{m+1}(1 + \alpha)} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{\alpha h_{m+1} + h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}(1 + \alpha)} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \right) \\
&= \frac{\alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^3 - 3\alpha^2 h_m(\alpha + 1)\xi^2 + h_m^2 3\alpha(\alpha^2 - 1)\xi + 2\alpha h_m^3(\alpha + 1)}{h_{m+1}^3(1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \alpha)}
\end{aligned}$$



ve

$$\begin{aligned}
B_{m+2}^3(x) &= \left( \frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} \left( \frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} + \frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} \left( \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right) \right) \\
&= \left( \frac{\xi + h_m}{h_m + h_{m+1} + h_{m+2}} \left( \frac{\xi + h_m}{h_m + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{h_{m+1} + h_{m+2} - \xi}{h_{m+1} + h_{m+2}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{m+1} + h_{m+2} + h_{m+3} - \xi}{h_{m+1} + h_{m+2} + h_{m+3}} \frac{\xi}{h_{m+1} + h_{m+2}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \\
&= \left( \frac{\xi + \frac{h_{m+1}}{\alpha}}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \left( \frac{\xi + \frac{h_{m+1}}{\alpha}}{\frac{h_{m+1}}{\alpha} + h_{m+1}} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{h_{m+1} + \alpha h_{m+1} - \xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{m+1} + \alpha h_{m+1} + \alpha^2 h_{m+1} - \xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1} + \alpha^2 h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \\
&= \left( \frac{\alpha \xi + h_{m+1}}{h_{m+1}(\alpha^2 + \alpha + 1)} \left( \frac{\alpha \xi + h_{m+1}}{h_{m+1}(\alpha + 1)} \frac{h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}} + \frac{h_{m+1} + \alpha h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}(\alpha + 1)} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{m+1} + \alpha h_{m+1} + \alpha^2 h_{m+1} - \xi}{h_{m+1}(1 + \alpha + \alpha^2)} \frac{\xi}{h_{m+1}(\alpha + 1)} \frac{\xi}{h_{m+1}} \right) \\
&= \frac{-(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^3 + 3\alpha^2 h_{m+1} \xi^2 + 3\alpha h_{m+1}^2 \xi + h_{m+1}^3}{h_{m+1}^3 (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B_{m+3}^3(x) &= \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+4} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+3} - x_{m+1}} \frac{x - x_{m+1}}{x_{m+2} - x_{m+1}} \\
&= \frac{\xi}{h_{m+1} + h_{m+2} + h_{m+3}} \frac{\xi}{h_{m+1} + h_{m+2}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1} + \alpha^2 h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1} + \alpha h_{m+1}} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\xi}{h_{m+1}(1 + \alpha + \alpha^2)} \frac{\xi}{h_{m+1}(1 + \alpha)} \frac{\xi}{h_{m+1}} \\
&= \frac{\xi^3}{h_{m+1}^3 (1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \alpha)}
\end{aligned}$$

olarak belirlenebilir.

Böylece yerel koordinat dönüşümü ile  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde tanımlı kübik B-spline şekil fonksiyonlarının  $[0, h_m]$  aralığındaki ifadesi bulunmuş olur.

$B_m^3(x)$  spline fonksiyonu ve onun birinci türevi ile ikinci türevi,  $[x_{m-1}, x_{m+3}]$  aralığının dışında sıfırdır.  $\phi_m(x)$ ,  $[0, h_m]$  aralığındaki B-spline şekil fonksiyonlarını göstermek üzere,  $\phi_m(x)$  ve onun birinci türevleri ile ikinci türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} \\ \phi_m \\ \phi_{m+1} \\ \phi_{m+2} \end{aligned} = \frac{1}{h_m^3} \begin{cases} \alpha^3(h_m - \xi)^3 \\ \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^3 - 3\alpha^2 h_m(\alpha + 1)\xi^2 + h_m^2 3\alpha(\alpha^2 - 1)\xi + 2\alpha h_m^3(\alpha + 1) \\ -(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^3 + 3\alpha^2 h_m \xi^2 + 3\alpha h_m^2 \xi + h_m^3 \\ \xi^3 \end{cases} \quad (1.34)$$

olarak hesaplanabilir. GODSE kübik B-spline şekil fonksiyonunun 1. türevi

$$\begin{aligned} \phi'_{m-1} \\ \phi'_m \\ \phi'_{m+1} \\ \phi'_{m+2} \end{aligned} = \frac{1}{h_m^3} \begin{cases} -3\alpha^3(h_m - \xi)^2 \\ 3\alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^2 - 6\alpha^2 h_m(\alpha + 1)\xi + h_m^2 3\alpha(\alpha^2 - 1) \\ -3(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^2 + 6\alpha^2 h_m \xi + 3\alpha h_m^2 \\ 3\xi^2 \end{cases} \quad (1.35)$$

olarak hesaplanabilir. GODSE kübik B-spline şekil fonksiyonunun 2. türevi ise

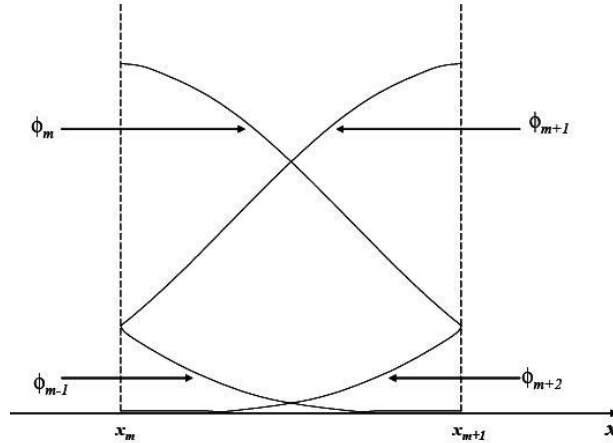
$$\begin{aligned} \phi''_{m-1} \\ \phi''_m \\ \phi''_{m+1} \\ \phi''_{m+2} \end{aligned} = \frac{1}{h_m^3} \begin{cases} 6\alpha^3(h_m - \xi) \\ 6\alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi - 6\alpha^2 h_m(\alpha + 1) \\ -6(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi + 6\alpha^2 h_m \\ 6\xi \end{cases} \quad (1.36)$$

olarak hesaplanabilir. Burada  $x = x_m + \xi$  için  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı ele alınırsa

$$\begin{aligned} x = x_m &\Rightarrow x_m = x_m + \xi \Rightarrow \xi = 0 \\ x = x_{m+1} &\Rightarrow x_{m+1} = x_m + \xi \Rightarrow \xi = h_m \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla  $0 \leq \xi \leq h_m$  dir.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 4 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  GODSE kübik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.2'de  $\alpha = 1$  durumu için gösterilmiştir.



Şekil.1.2: GODSE kübik B-spline şekil fonksiyonu

Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde, 4 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  GODSE kübik B-spline şekil fonksiyonu cinsinden  $u$  için yaklaşım ifadesi

$$u_N = \sum_{m=m-1}^{m+1} \delta_m \phi_m \quad (1.37)$$

eşitliği ile bulunabilir. Buna göre  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki yaklaşım

$$u_N = \phi_{m-1} \delta_{m-1} + \phi_m \delta_m + \phi_{m+1} \delta_{m+1} + \phi_{m+2} \delta_{m+2}$$

olarak elde edilir. Burada  $\delta_m$  ler bilinmeyen parametrelerdir. Bölünme noktalarında (1.34), (1.35) ve (1.36) kullanılarak elde edilen GODSE kübik B-spline fonksiyonunun değerleri Tablo 1.3 de verilmiştir.

Tablo 1.3: Bölünme noktalarında GODSE kübik B-spline fonksiyonunun değerleri

	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m$	0	$\alpha^3$	$2\alpha(\alpha + 1)$	1	0
$h_m\phi'_m$	0	$-3\alpha^3$	$3\alpha(\alpha^2 - 1)$	$3\alpha$	0
$h_m^2\phi''_m$	0	$6\alpha^3$	$-6\alpha^2(\alpha + 1)$	$6\alpha^2$	0

$u_m$ ,  $u'_m$  ve  $u''_m$  sayısal çözümünün GODSE kübik B-spline fonksiyonları cinsinden değerleri Tablo 1.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_m &= u(x_m) \\
&= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m B_m^3 \\
&= \alpha^3 \delta_{m-1} + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_m + \delta_{m+1}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

ile belirlenebilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
u'_m &= u'(x_m) \\
&= \sum_{m=-1}^N \delta_m (B_m^3)' \\
&= \frac{3\alpha [\delta_{m+1} + (\alpha^2 - 1)\delta_m - \alpha^2\delta_{m-1}]}{h_m}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

ve

$$\begin{aligned}
u''_m &= u''(x_m) \\
&= \sum_{m=-1}^N \delta_m (B_m^3)'' \\
&= \frac{6\alpha^2 [\alpha\delta_{m-1} - (\alpha + 1)\delta_m + \delta_{m+1}]}{h_m^2}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

şeklinde belirlenebilir.

Sayısal metodların doğruluğu, verilen bölünme noktalarındaki analitik ve sayısal değerlerin hesaplanmasının ardından aşağıda verilen  $L_\infty$  hata normu yardımıyla incelenecektir.

$$L_\infty = \|u - u_N\|_\infty = \max_j |u_j - (u_N)_j|.$$

## BÖLÜM 2

### GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA KUADRATİK VE KÜBİK KOLOKEYŞİN METODU

Bu bölümde (1.10) sınır şartları ile verilen (1.9) formunda Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin çözümü, geometrik olarak azalan sonlu elemanlar üzerinde kuadratik ve kübik kolokeyşin metodu kullanılarak yapılacaktır. Bu bölüm İdris Dağ ve Ali Şahin'in makalesinden alınmıştır (Dağ and Şahin, 2007).

#### 2.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kuadratik Kolokeyşin Metodu

Bu bölümde Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümü, kuadratik kolokeyşin metodu kullanılarak yapılmıştır.

$[0, h_m]$  aralığındaki  $\phi_m(x)$  B-spline şekil fonksiyonları ve onun birinci türevi (1.26) ve (1.27) belirlenmiştir. Herhangi bir B-spline  $\phi_m$  ve onun birinci türevi  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$  aralığında mevcuttur ve bu yüzden herhangi bir eleman kuadratik B-spline fonksiyonunun ardışık  $\{\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}\}$  üç elemanı tarafından örtülür.  $\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N\}$  kuadratik B-spline fonksiyonlarının kümesi,  $[a, b]$  çözüm kümesinde tanımlı fonksiyonlar için taban formundadır.  $u$  analitik çözümüne  $u_N$  yaklaşımı

$$u_N = \sum_{m=-1}^N \delta_m \phi_m \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır.  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde, 3 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  GODSE kuadratik B-spline şekil fonksiyonu cinsinden  $u$  analitik çözümüne  $u_N$  yaklaşımı

$$u_N = \sum_{m=j-1}^{j+1} \delta_m \phi_m \quad (2.2)$$

eşitliği ile bulunabilir. Buna göre  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki yaklaşım

$$u_N = \phi_{m-1} \delta_{m-1} + \phi_m \delta_m + \phi_{m+1} \delta_{m+1} \quad (2.3)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde, 3 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  GODSE kuadratik B-spline şekil fonksiyonu cinsinden  $v$  analitik çözümüne  $v_N$  yaklaşımı

$$v_N = \sum_{m=j-1}^{j+1} \xi_m \phi_m \quad (2.4)$$

eşitliği ile bulunabilir. Buna göre  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki yaklaşım

$$v_N = \phi_{m-1} \xi_{m-1} + \phi_m \xi_m + \phi_{m+1} \xi_{m+1} \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Burada  $j = m - 1, m, m + 1$  olmak üzere  $\delta_j$  ve  $\xi_j$  ler bilinmeyen parametrelerdir.

Kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak sayısal çözümün yapılabilmesi için diferensiyel denklem en fazla birinci mertebeden türevlere sahip olmalıdır. Fakat (1.9) denklemi ikinci mertebededir. Bu yüzden (1.9) denkelemine

$$-u' = v \quad (2.6)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} -\varepsilon v'(x) - p(x)v(x) + q(x)u(x) &= f(x) \\ v + u' &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

1. basamaktan denklem sistemi elde edilir. (2.7) denklem sisteminde kullanılacak olan  $u_m$  ve  $u'_m$  değerleri (1.30) ve (1.31) ile verilmiştir. Benzer hesaplamalar ile  $v_m$  ve  $v'_m$  değerleri de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$v_m = v(x_m) = \alpha \xi_m + \xi_{m+1} \quad (2.8)$$

$$v'_m = v'(x_m) = \frac{2\alpha}{h_m} (\xi_{m+1} - \xi_m) \quad (2.9)$$

(2.7) denklem sistemine kolokeyşin metodu uygulanırsa,  $u, u', v, v'$  yerine sırasıyla (1.30), (1.31), (2.8) ve (2.9) eşitlikleri uygulanırsa aşağıdaki denklem sistemine ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{2\alpha}{h_m} (\delta_m - \delta_{m-1}) - p(x_m)(\alpha \xi_{m-1} + \xi_m) + q(x_m)(\alpha \delta_{m-1} + \delta_m) &= f(x_m) \\ (\alpha \xi_{m-1} + \xi_m) + \frac{2\alpha}{h_m} (\delta_m - \delta_{m-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$



sistemi Thomas algoritmasıyla çözülebilir hale gelir. Bulunan  $\delta_m$ ,  $m = -1, \dots, N$  değerleri (1.30) ve (1.31) eşitliklerinde yerine konularak  $x_m$  noktalarındaki sayısal çözüm bulunur.

### 2.1.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik kolokeysın metodu için sayısal hesaplamalar

Tablo 2.1 de (1.13) sınır şartları ile verilen (1.12) Singularly Perturbed Sınır Değer problemi için farklı  $\varepsilon$  başkatsayısı ve  $N$  bölünme noktalarının sayıları alınarak, sayısal sonuçların maximum hataları verilmiştir. Tabloya göre Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin başkatsayısı  $\varepsilon$  ve bölünme noktası olan  $N$  sayısı artarken analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki fark azalmaktadır. Bu durumda  $\varepsilon$  ve  $N$  sayısı büyüdükçe hatanın küçüldüğü görülmektedir.

Tablo 2.1: (1.12) problemi için  $L_\infty$  hata normları

$\varepsilon$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
1/4	$0.14 \times 10^{-2}$	$0.36 \times 10^{-3}$	$0.91 \times 10^{-4}$	$0.23 \times 10^{-4}$	$0.65 \times 10^{-5}$	$0.15 \times 10^{-5}$
1/8	$0.43 \times 10^{-2}$	$0.11 \times 10^{-2}$	$0.27 \times 10^{-3}$	$0.66 \times 10^{-4}$	$0.17 \times 10^{-4}$	$0.45 \times 10^{-5}$
1/16	$0.68 \times 10^{-2}$	$0.17 \times 10^{-2}$	$0.43 \times 10^{-3}$	$0.11 \times 10^{-3}$	$0.27 \times 10^{-4}$	$0.74 \times 10^{-5}$
1/32	$0.96 \times 10^{-2}$	$0.24 \times 10^{-2}$	$0.60 \times 10^{-3}$	$0.15 \times 10^{-3}$	$0.38 \times 10^{-4}$	$0.95 \times 10^{-5}$
1/64	$0.13 \times 10^{-1}$	$0.32 \times 10^{-2}$	$0.81 \times 10^{-3}$	$0.20 \times 10^{-3}$	$0.51 \times 10^{-4}$	$0.13 \times 10^{-4}$
1/128	$0.17 \times 10^{-1}$	$0.42 \times 10^{-2}$	$0.11 \times 10^{-2}$	$0.26 \times 10^{-3}$	$0.66 \times 10^{-4}$	$0.17 \times 10^{-4}$
1/256	$0.21 \times 10^{-1}$	$0.53 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-2}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.83 \times 10^{-4}$	$0.21 \times 10^{-4}$
1/512	$0.25 \times 10^{-1}$	$0.65 \times 10^{-2}$	$0.16 \times 10^{-2}$	$0.41 \times 10^{-3}$	$0.10 \times 10^{-3}$	$0.25 \times 10^{-4}$
1/1000	$0.31 \times 10^{-1}$	$0.77 \times 10^{-2}$	$0.19 \times 10^{-2}$	$0.48 \times 10^{-3}$	$0.12 \times 10^{-3}$	$0.30 \times 10^{-4}$

## 2.2 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kübik Kolokeysın Metodu

Bu bölümde Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal çözümü, geo-



metrik olarak değişen sonlu elamanlarda kübik kolokeyşin metodu kullanılarak yapılmıştır.

$[0, h_m]$  aralığındaki B-spline Şekil fonksiyonları  $\phi_m(x)$  ile onun birinci, ikinci ve türevleri (1.34), (1.35) ve (1.36) ile belirlenmiştir. Herhangi bir B-spline  $\varphi_m$ , onun birinci ve ikinci türevleri  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$  aralığında mevcuttur ve bu yüzden herhangi bir eleman kübik B-spline fonksiyonunun ardışık  $\{\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}\}$  dört elemanı tarafından örtülür.  $\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N\}$  kuadratik B-spline fonksiyonlarının kümesi,  $[a, b]$  çözüm kümesinde tanımlı fonksiyonlar için tabandır.  $u$  analitik çözümüne  $u_N$  yaklaşımı

$$u_N = \sum_{m=-1}^N \delta_m \phi_m \quad (2.19)$$

Şeklinde yazılır.  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde, 4 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  GODSE kübik B-spline Şekil fonksiyonu cinsinden  $u$  için yaklaşım ifadesi

$$u_N = \sum_{m=j-1}^{j+2} \delta_m \phi_m \quad (2.20)$$

eşitliği ile bulunabilir. Buna göre  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki yaklaşım

$$u_N = \phi_{m-1} \delta_{m-1} + \phi_m \delta_m + \phi_{m+1} \delta_{m+1} + \phi_{m+2} \delta_{m+2} \quad (2.21)$$

olarak elde edilir. Burada  $j = m - 1, m, m + 1$  olamk üzere  $\delta_j$  ler bilinmeyen parametrelerdir. Buna göre elde edilen  $u_m, u'_m$  ve  $u''_m$  değerleri (1.38), (1.39) ve (1.40) ile verilmiştir. Bu değerlerin (1.10) sınır Şartları ile verilen (1.9) Singularly Perturbed Sınır Değer probleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \frac{6\alpha}{h_m^2} (\alpha \delta_{m-1} - (\alpha + 1) \delta_m + \delta_{m+1}) \\ & -p(x_m) \frac{3\alpha}{h_m} (\delta_{m+1} + (\alpha^2 - 1) \delta_m - \alpha^2 \delta_{m-1}) \\ & +q(x_m) (\alpha^3 \delta_{m-1} + 2\alpha(\alpha + 1) \delta_m + \delta_{m+1}) \\ & = f(x_m), \quad m = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.22) denklem sistemi elde edilir. Bu sisteme gerekli işlemler yapıldıktan sonra

(2.22) denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_{01} & \sigma_{02} & \sigma_{03} & & & \\ & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$X = \begin{bmatrix} \delta_{-1}, & \delta_0, & \cdots, & \delta_{N+1} \end{bmatrix}^T \quad (2.24)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_0, & f_1, & \cdots, & f_N \end{bmatrix}^T \quad (2.25)$$

ve

$$\begin{aligned} p_m &= p(x_m), \quad q_m = q(x_m), \quad f_m = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \\ \sigma_{m1} &= -\varepsilon \frac{6\alpha^2}{h_m^2} - p_m \frac{3\alpha}{h_m} + q_m \alpha^3, \\ \sigma_{m2} &= \varepsilon \frac{6\alpha^2(\alpha + 1)}{h_m^2} + p_m \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{h_m} + 2q_m \alpha(\alpha + 1), \\ \sigma_{m3} &= -\varepsilon \frac{6\alpha^2}{h_m^2} - p_m \frac{3\alpha}{h_m} + q_m \end{aligned}$$

olmak üzere

$$AX = F \quad (2.26)$$

şeklinde matris formu ile ifade edilebilir. (2.26) ile verilen denklem sistemi,  $N + 3$  bilinmeyenden ve  $N + 1$  denklemden oluşur. Bu sistemin çözülebilmesi için, bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olması gerektiğinden 2 tane bilinmeyeninin elimine edilmesi gerekir. (1.10) ile verilen sınır şartlarından ve (1.38) eşitliğinden

$i = 0$  için

$$u(x_0) = u(0) = \alpha^3 \delta_{-1} + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_0 + \delta_1 = \lambda \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow \delta_{-1} = \frac{-2(\alpha + 1)}{\alpha^2} \delta_0 - \frac{1}{\alpha^3} \delta_1 + \frac{1}{\alpha^3} \lambda \quad (2.28)$$

$i = N$  için

$$u(x_N) = u(1) = \alpha^3 \delta_{N-1} + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_N + \delta_{N+1} = \beta \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow \delta_{N+1} = \beta - \alpha^3 \delta_{N-1} - 2\alpha(\alpha + 1)\delta_N \quad (2.30)$$

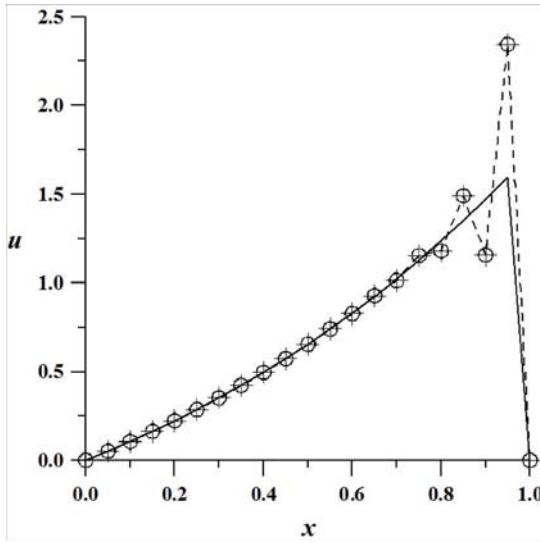
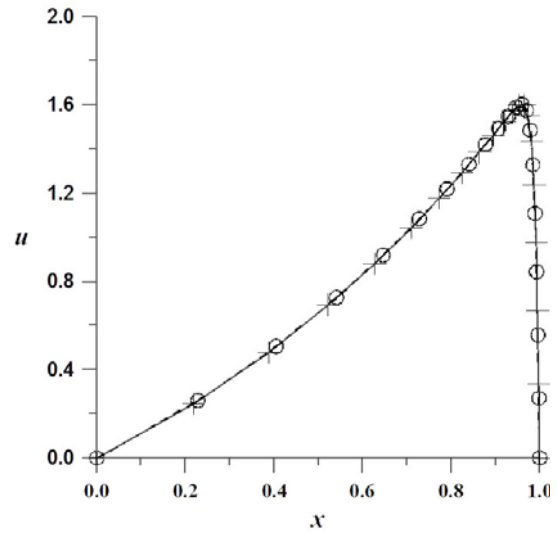
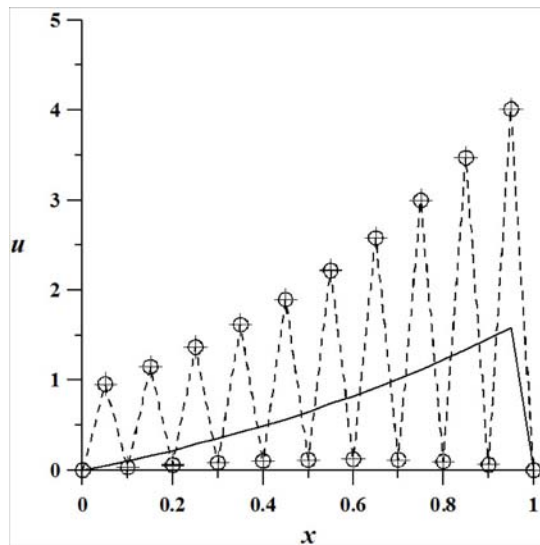
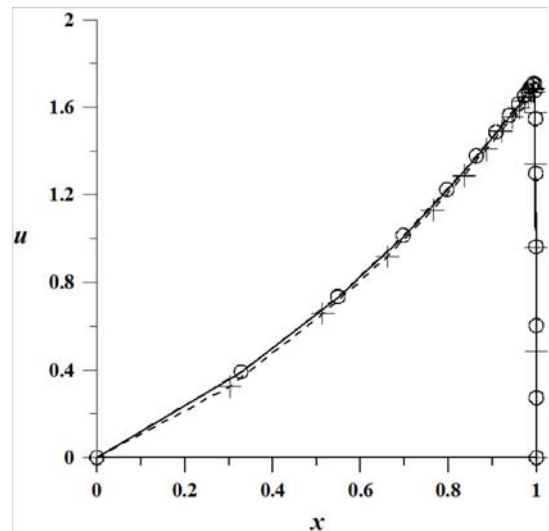
elde edilir. Sınır şartlarından elde edilen eşitliklerin kullanılması sonucu (2.23) sistemi  $N + 1$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan sisteme döner ve bu denklem sistemi Thomas algoritmasıyla çözülebilir hale gelir. Sistemin çözülmesiyle bulunan  $\delta_m$ ,  $m = -1, \dots, N + 1$  değerleri (1.38), (1.39) ve (1.40) eşitliklerinde yerine konularak  $x_m$  noktalarındaki sayısal çözüm bulunur.

### 2.2.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik kolokeyşin metodu için sayısal hesaplamalar

Tablo 2.2 de (1.13) sınır şartları ile verilen (1.12) Singularly Perturbed Sınır Değer problemine, GODSE kübik kolokeyşin metodu uygulandıktan sonra elde edilen sonuçlar verilmiştir. Tablo 2.2 de GODSE kübik metodu kullanılarak elde edilen sayısal çözümünün doğruluğu maksimum hata normu kullanılarak farklı  $\varepsilon$  başkatsayısı ve  $N$  bölünme noktaları sayısı için incelenmiştir. Buna göre Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin  $\varepsilon$  katsayısı ve problemin bölünme nokta sayısı olan  $N$  sayısı arttıkça analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki fark azalmaktadır. Dolayısıyla  $\varepsilon$  ve  $N$  sayısı büyüdükçe, hatanın küçüldüğü görülecektir.

Tablo 2.2: (1.12) problemi için  $L_\infty$  hata normları

$\varepsilon$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
1/4	$0.33 \times 10^{-2}$	$0.81 \times 10^{-3}$	$0.20 \times 10^{-3}$	$0.51 \times 10^{-4}$	$0.13 \times 10^{-4}$	$0.35 \times 10^{-5}$
1/8	$0.82 \times 10^{-2}$	$0.21 \times 10^{-2}$	$0.52 \times 10^{-3}$	$0.13 \times 10^{-3}$	$0.32 \times 10^{-4}$	$0.85 \times 10^{-5}$
1/16	$0.14 \times 10^{-1}$	$0.35 \times 10^{-2}$	$0.87 \times 10^{-3}$	$0.22 \times 10^{-3}$	$0.54 \times 10^{-4}$	$0.14 \times 10^{-4}$
1/32	$0.20 \times 10^{-1}$	$0.51 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-2}$	$0.32 \times 10^{-3}$	$0.80 \times 10^{-4}$	$0.20 \times 10^{-4}$
1/64	$0.27 \times 10^{-1}$	$0.70 \times 10^{-2}$	$0.17 \times 10^{-2}$	$0.44 \times 10^{-3}$	$0.11 \times 10^{-3}$	$0.27 \times 10^{-4}$
1/128	$0.32 \times 10^{-1}$	$0.90 \times 10^{-2}$	$0.23 \times 10^{-2}$	$0.57 \times 10^{-3}$	$0.14 \times 10^{-3}$	$0.36 \times 10^{-4}$
1/256	$0.28 \times 10^{-1}$	$0.11 \times 10^{-1}$	$0.29 \times 10^{-2}$	$0.72 \times 10^{-3}$	$0.18 \times 10^{-3}$	$0.45 \times 10^{-4}$
1/512	$0.34 \times 10^{-1}$	$0.14 \times 10^{-1}$	$0.35 \times 10^{-2}$	$0.88 \times 10^{-3}$	$0.22 \times 10^{-3}$	$0.55 \times 10^{-4}$
1/1000	$0.42 \times 10^{-1}$	$0.16 \times 10^{-1}$	$0.42 \times 10^{-2}$	$0.10 \times 10^{-3}$	$0.26 \times 10^{-3}$	$0.65 \times 10^{-4}$

Şekil. 2.1:  $\varepsilon = 0.01$  için eşit aralıklı bölünmeŞekil. 2.2:  $\varepsilon = 0.01$  için GODSE bölünmeŞekil 2.3:  $\varepsilon = 0.001$  için eşit aralıklı bölünmeŞekil. 2.4:  $\varepsilon = 0.001$  için GODSE bölünme

Şekil 2.2.1-Şekil 2.2.4 grafiklerinde (1.13) sınır şartları ile verilen (1.12) Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin, GODSE kuadratik ve GODSE kübik kolokeyşim metodu uygulandıktan sonra elde edilen sayısal sonuçları verilmiştir. Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin GODSE kuadratik kolokeyşim metoduyla sayısal çözümü  $\dots o \dots o \dots$  ile, GODSE kübik kolokeyşim metoduyla sayısal çözümü

$\dots + \dots + \dots$  ile gerçek çözüm ise sürekli çizgiler ile gösterilmiştir. Grafiklerin hepsi  $N = 20$  durumu için çizilmiştir. Problemin çözüm aralıklarının birbirine eşit alt aralıklardan oluştuğu durum Şekil 2.1 ve Şekil 2.3 ile gösterilirken, çözüm aralıklarının geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda alınmasıyla oluşan durum Şekil 2.2 ve Şekil 2.4 ile gösterilmiştir. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 ile verilen grafikte, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin katsayısı  $\varepsilon = 0.01$  olarak alınırken, Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 ile verilen grafikte, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin katsayısı  $\varepsilon = 0.001$  olarak alınmıştır. Şekil 2.1 ve Şekil 2.3 ile verilen grafikte yaklaşım çok iyi değildir ve hata oranı oldukça fazladır. Diğer yandan Şekil 2.2 ve Şekil 2.4 ile verilen grafikte yaklaşım diğerlerine göre daha iyidir ve hata oranı oldukça düşük olduğu görülmektedir. (Dağ and Şahin, 2007).

## BÖLÜM 3

### GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA KUADRATİK GALERKİN METODU

#### 3.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kuadratik Galerkin Metodu

Bu bölümde (1.10) sınır şartları ile verilen (1.9) formundaki Singularly Perturbed Sınır Değer problemi, GODSE kuadratik Galerkin metodu kullanılarak yapılacaktır. (1.9) formundaki diferensiyel denklemin her iki tarafı  $v$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak

$$-\varepsilon v u''(x) + p(x) v u'(x) + q(x) v u(x) = f(x) \quad (3.1)$$

formundaki diferensiyel denklem elde edilir. Elde edilen diferensiyel denklemin her iki tarafının  $[x_0, x_N]$  aralığında integrali alınarak

$$\int_{x_0}^{x_n} (-\varepsilon v u''(x) + v p(x) u'(x) + v q(x) u(x) - v f(x)) dx = 0 \quad (3.2)$$

integral denkleme ulaşılır. (3.2) ifadesinde ilk terime kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_{x_0}^{x_n} (-\varepsilon v' u'(x) + v p(x) u' + v q(x) u(x)) dx - \varepsilon v u'(x) \Big|_{x_0}^{x_n} - \int_{x_0}^{x_n} v f(x) dx = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) integral denkleminin  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığındaki ifadesi

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (-\varepsilon v' u'(x) + v p(x) u' + v q(x) u(x)) dx - \varepsilon v u'(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \int_{x_m}^{x_{m+1}} v f(x) dx = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde integral denklemdir.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde, (2.3)  $u(x)$  yaklaşımına benzer şekilde,  $u'$  türevine yaklaşım

$$u'_N = \phi'_{m-1} \delta_{m-1} + \phi'_m \delta_m + \phi'_{m+1} \delta_{m+1} \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir.

(3.4) integral denkleminde  $v(x)$  ağırlık fonksiyonu sırasıyla  $\phi_j, j = m-1, m, m+1$  fonksiyonları olarak seçilebilir ve (2.3) değerleri kullanılırsa

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} [-\varepsilon \int_0^{h_m} (\phi'_i \phi'_j + p \phi_i \phi'_j + q \phi_i \phi_j) d\xi] \delta_j - \varepsilon \phi_i \phi'_j \Big|_0^{h_m} \delta_j - \int_0^{h_m} \phi_i f(x_m + \xi) d\xi = 0 \quad (3.6)$$

formunda integral denkleminde ulaşılır. (3.6) formundaki integral denkleminde  $i, j = m-1, m, m+1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^{h_m} \phi'_i \phi'_j d\xi, & r_{ij} &= \phi_i \phi'_j \Big|_0^{h_m}, \\ b_{ij} &= \int_0^{h_m} \phi_i \phi'_j d\xi, & f_i &= \int_0^{h_m} \phi_i f(x_m + \xi) d\xi, \\ c_{ij} &= \int_0^{h_m} \phi_i \phi_j d\xi, \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

$A^{(m)}$  matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} a_{i-1,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_{i-1} \phi'_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} d\xi = \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{h_m} \\ a_{i-1,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_{i-1} \phi'_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} \frac{2\alpha h_m - 2(1 + \alpha)\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{h_m} (1 - 2\alpha) \\ a_{i-1,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_{i-1} \phi'_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} \frac{2\xi}{h_m^2} d\xi = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{h_m} \\ a_{i,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_i \phi'_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{2\alpha h_m - 2(1 + \alpha)\xi}{h_m^2} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} d\xi = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{h_m} (2\alpha - 1) \\ a_{i,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_i \phi'_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{2\alpha h_m - 2(1 + \alpha)\xi}{h_m^2} \frac{2\alpha h_m - 2(1 + \alpha)\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{4}{3h_m} (\alpha^2 - \alpha + 1) \\ a_{i,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_i \phi'_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{2\alpha h_m - 2(1 + \alpha)\xi}{h_m^2} \frac{2\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{2}{3h_m} (\alpha - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{i+1,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_{i+1} \phi'_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{2\xi}{h_m^2} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} d\xi = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{h_m} \\
a_{i+1,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_{i+1} \phi'_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{2\xi}{h_m^2} \frac{2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{2}{3h_m} (\alpha - 2) \\
a_{i+1,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi'_{i+1} \phi'_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{2\xi}{h_m^2} \frac{2\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{4}{3h_m}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre  $A^{(m)}$  matrisi

$$A^{(m)} = \frac{2}{3h_m} \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & \alpha(1-\alpha) & -\alpha \\ \alpha(1-\alpha) & 2(1-\alpha+\alpha^2) & \alpha-2 \\ -\alpha & \alpha-2 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenebilir. Benzer şekilde  $B^{(m)}$  matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
b_{i-1,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i-1} \phi'_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} d\xi = -\frac{1}{2} \alpha^2 \\
b_{i-1,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i-1} \phi'_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} \frac{2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{6} \alpha (3\alpha - 1) \\
b_{i-1,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i-1} \phi'_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} \frac{2\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{6} \alpha \\
b_{i,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_i \phi'_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} d\xi = -\frac{1}{6} \alpha (3\alpha + 5) \\
b_{i,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_i \phi'_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} \frac{2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{2} \\
b_{i,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_i \phi'_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} \frac{2\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{5}{6} \alpha + \frac{1}{2} \\
b_{i+1,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i+1} \phi'_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{-2\alpha(h_m - \xi)}{h_m^2} d\xi = -\frac{1}{6} \alpha
\end{aligned}$$



$$b_{i+1,j}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i+1} \phi_j' d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{2}$$

$$b_{i+1,j+1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i+1} \phi_{j+1}' d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{2\xi}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{2}$$

olarak elde edilir. Buna göre  $B^{(m)}$  matrisi

$$B^{(m)} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^2}{2} & \frac{1}{6}\alpha(3\alpha - 1) & \frac{\alpha}{6} \\ -\frac{1}{6}\alpha(3\alpha + 5) & \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} & \frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{2} \\ -\frac{\alpha}{6} & \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenebilir.  $C^{(m)}$  matrisinin elemanları

$$c_{i-1,j-1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i-1} \phi_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{5}\alpha^2 h_m$$

$$c_{i-1,j}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i-1} \phi_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{30}\alpha h_m (4\alpha + 9)$$

$$c_{i-1,j+1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i-1} \phi_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} \frac{\xi^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{30}\alpha h_m$$

$$c_{i,j-1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_i \phi_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{30}\alpha h_m (4\alpha + 9)$$

$$c_{i,j}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_i \phi_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} d\xi$$

$$= \frac{1}{15} h_m (8\alpha^2 + 11\alpha + 8)$$

$$c_{i,j+1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_i \phi_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} \frac{\xi^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{30} h_m (9\alpha + 4)$$

$$c_{i+1,j-1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i+1} \phi_{j-1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{\alpha(h_m - \xi)^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{30}\alpha h_m$$

$$c_{i+1,j}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i+1} \phi_j d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{30} h_m (9\alpha + 4)$$

$$c_{i+1,j+1}^{(m)} = \int_0^{h_m} \phi_{i+1} \phi_{j+1} d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{\xi^2}{h_m^2} d\xi = \frac{1}{5} h_m$$

olarak elde edilir. Buna göre  $C^{(m)}$  matrisi

$$C^{(m)} = h_m \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\alpha^2 h_m & \frac{1}{30}\alpha h_m (4\alpha + 9) & \frac{\alpha}{30} \\ \frac{1}{30}\alpha h_m (4\alpha + 9) & \frac{8}{15}\alpha^2 + \frac{11}{5}\alpha + \frac{8}{15} & \frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{15} \\ \frac{\alpha}{30} & \frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{15} & \frac{1}{5}h_m \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenebilir.  $R^{(m)}$  matrisinin girdileri

$$r_{i-1,j-1}^{(m)} = \phi_{i-1} \phi'_{j-1} \Big|_0^{h_m} = \frac{(\alpha(h_m - \xi)^2) (-2\alpha(h_m - \xi))}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = \frac{2\alpha^2}{h_m}$$

$$r_{i-1,j}^{(m)} = \phi_{i-1} \phi'_j \Big|_0^{h_m} = \frac{(\alpha(h_m - \xi)^2) (2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi)}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = \frac{2\alpha^2}{h_m}$$

$$r_{i-1,j+1}^{(m)} = \phi_{i-1} \phi'_{j+1} \Big|_0^{h_m} = \frac{(\alpha(h_m - \xi)^2) 2\xi}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = 0$$

$$r_{i,j-1}^{(m)} = \phi_i \phi'_{j-1} \Big|_0^{h_m} = \frac{(h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2) (-2\alpha(h_m - \xi))}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = \frac{-2\alpha}{h_m}$$

$$r_{i,j}^{(m)} = \phi_i \phi'_j \Big|_0^{h_m} = \frac{(h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2) (2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi)}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = \frac{-4\alpha}{h_m}$$

$$r_{i,j+1}^{(m)} = \phi_i \phi'_{j+1} \Big|_0^{h_m} = \frac{(h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1+\alpha)\xi^2) 2\xi}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = \frac{2\alpha}{h_m}$$

$$r_{i+1,j-1}^{(m)} = \phi_{i+1} \phi'_{j-1} \Big|_0^{h_m} = \frac{\xi^2 (-2\alpha(h_m - \xi))}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = 0$$

$$r_{i+1,j}^{(m)} = \phi_{i+1} \phi'_j \Big|_0^{h_m} = \frac{\xi^2 (2\alpha h_m - 2(1+\alpha)\xi)}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = 0$$

$$r_{i+1,j+1}^{(m)} = \phi_{i+1} \phi'_{j+1} \Big|_0^{h_m} = \frac{\xi^2 2\xi}{h_m^2 h_m^2} \Big|_0^{h_m} = 0$$

olarak elde edilir. Buna göre  $R^{(m)}$  matrisi

$$R^{(m)} = \frac{1}{h_m} \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 0 & 0 \\ 2\alpha(3\alpha + 2) & -4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenebilir.  $F^{(m)}$  matrisinin girdileri ise

$$\begin{aligned}
f_{i-1,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i-1} f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{(\alpha(h_m - \xi)^2)}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= -\frac{\alpha}{h_m^2} (2h_m - 2e^{h_m} + h_m^2 + 2) \\
f_{i-1,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i-1} f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{(\alpha(h_m - \xi)^2)}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= -\frac{\alpha}{h_m^2} (2h_m - 2e^{h_m} + h_m^2 + 2) \\
f_{i-1,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i-1} f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{(\alpha(h_m - \xi)^2)}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= -\frac{\alpha}{h_m^2} (2h_m - 2e^{h_m} + h_m^2 + 2) \\
f_{i,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_i f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{(h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1 + \alpha)\xi^2)}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^2} (2\alpha - 2e^{h_m} - h_m^2 + 2\alpha h_m - 2\alpha e^{h_m} + 2h_m e^{h_m} + \alpha h_m^2 e^{h_m} + 2) \\
f_{i,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_i f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{(h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1 + \alpha)\xi^2)}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^2} (2\alpha - 2e^{h_m} - h_m^2 + 2\alpha h_m - 2\alpha e^{h_m} + 2h_m e^{h_m} + \alpha h_m^2 e^{h_m} + 2) \\
f_{i,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_i f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{(h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1 + \alpha)\xi^2)}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^2} (2\alpha - 2e^{h_m} - h_m^2 + 2\alpha h_m - 2\alpha e^{h_m} + 2h_m e^{h_m} + \alpha h_m^2 e^{h_m} + 2) \\
f_{i+1,j-1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i+1} f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi = \frac{1}{h_m^2} (e^{h_m} (h_m^2 - 2h_m + 2) - 2) \\
f_{i+1,j}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i+1} f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} \frac{h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1 + \alpha)\xi^2}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^2} (e^{h_m} (h_m^2 - 2h_m + 2) - 2) \\
f_{i+1,j+1}^{(m)} &= \int_0^{h_m} \phi_{i+1} f(x_m + \xi) d\xi = \int_0^{h_m} \frac{\xi^2}{h_m^2} e^{x_m + \xi} d\xi = \frac{1}{h_m^2} (e^{h_m} (h_m^2 - 2h_m + 2) - 2)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre  $F^{(m)}$  matrisi

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= -\alpha (2h_m - 2e^{h_m} + h_m^2 + 2) \\ \vartheta_2 &= 2(\alpha + 1)(1 - e^{h_m}) + 2h_m(\alpha + e^{h_m}) - h_m^2(1 - \alpha e^{h_m}) \\ \vartheta_3 &= (e^{h_m} (h_m^2 - 2h_m + 2) - 2)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$F^{(m)} = \frac{1}{h_m^2} \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_1 & \vartheta_1 \\ \vartheta_2 & \vartheta_2 & \vartheta_2 \\ \vartheta_3 & \vartheta_3 & \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenebilir.

$$\delta^{(i)} = (\delta_{m-1}^{(i)}, \delta_m^{(i)}, \delta_{m+1}^{(i)}, \delta_{mi+2}^{(i)}), \quad F^{(i)} = (f_{m-1}^{(i)}, f_m^{(i)}, f_{m+1}^{(i)}, f_{m+2}^{(i)})$$

olmak üzere, belirlenen  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$ ,  $C^{(i)}$ ,  $R^{(i)}$  ve  $F^{(i)}$  yerel matrisleri cinsinden (3.6)

$$(-\varepsilon A^{(i)} + pB^{(i)} + qC^{(i)} - \varepsilon R^{(i)})\delta^{(i)} = F^{(i)}$$

formunda ifade edilebilir.

$$\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{n+1})$$

olmak üzere  $[x_i, x_{i+1}]$   $i = 0, \dots, N - 1$  aralıklarında tanımlı yerel matrislerin birleştirilmesiyle,  $[x_0, x_n]$  aralığında global system

$$(-\varepsilon A + pB + qC - \varepsilon R)\delta = F \quad (3.7)$$

şeklinde belirlenebilir. Sistemdeki  $A$  matrisi

$$\begin{aligned}\sigma_{1,1}^{*(1)} &= \sigma_{1,1}^{(0)} + \sigma_{1,1}^{(1)}, & \sigma_{1,2}^{*(1)} &= \sigma_{1,2}^{(0)} + \sigma_{1,2}^{(1)}, \\ \sigma_{2,1}^{*(1)} &= \sigma_{2,1}^{(0)} + \sigma_{2,1}^{(1)}, & \sigma_{2,2}^{*(2)} &= \sigma_{2,2}^{(0)} + \sigma_{2,2}^{(1)} + \sigma_{2,2}^{(2)}, \\ \sigma_{2,3}^{*(2)} &= \sigma_{2,3}^{(2)} + \sigma_{2,3}^{(1)}, & \sigma_{i,i-1}^{*(i)} &= \sigma_{i,i-1}^{(i-1)} + \sigma_{i,i-1}^{(i)},\end{aligned}$$



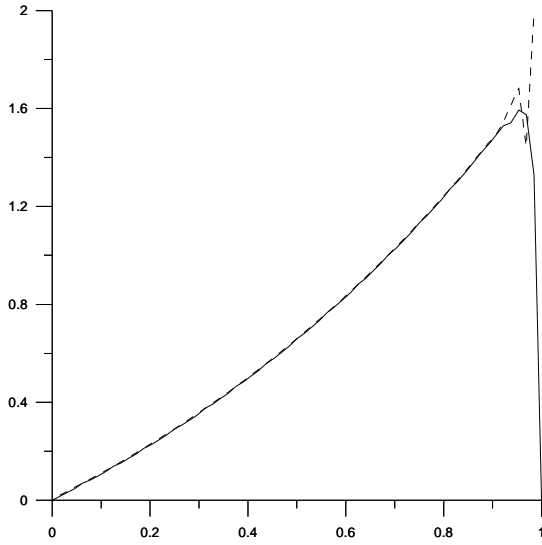
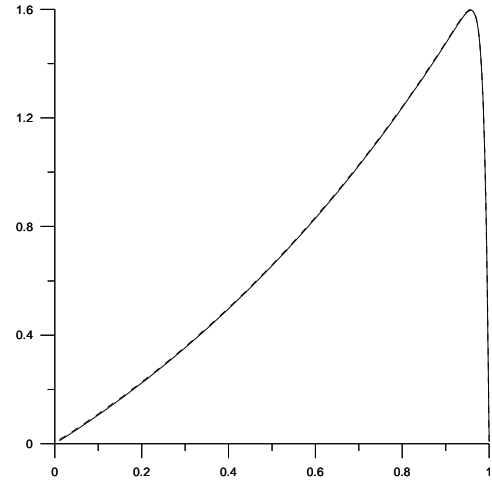
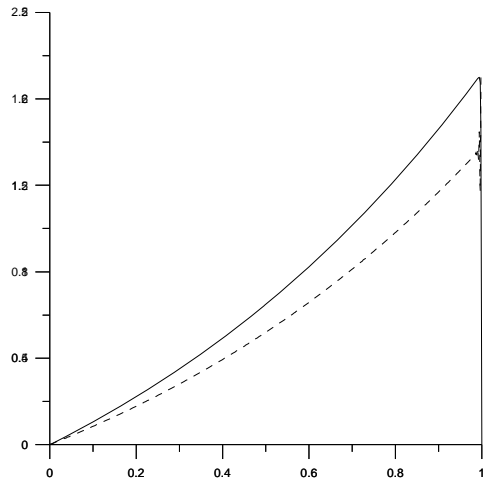
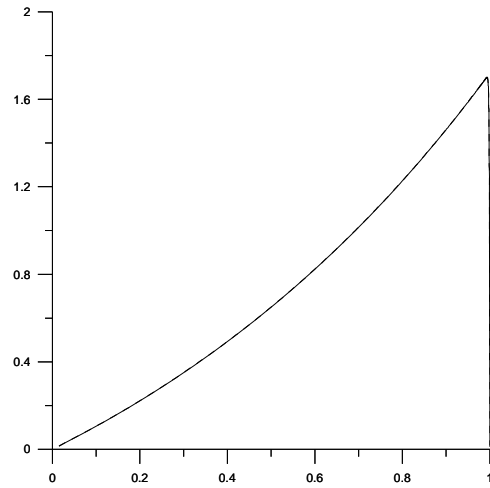
olarak hesaplanabilir. Elde edilen (3.7) denklem sistemi,  $N + 3$  bilinmeyenden ve  $N + 1$  denklemden oluştuğundan 2 tane bilinmeyen elimine edilmesi gerekir. (3.7) denklem sisteminden, (1.9) formunda verilen Singularly Perturbed Sınır Değer problemin (1.10) sınır koşulları kullanılarak  $\delta_{-1}$  parametresi ve  $\delta_N$  parametresi sırasıyla (2.17) ve (2.18) formunda belirlenebilir. Sınır şartlarından elde edilen eşitliklerin kullanılması sonucu (3.7) sistemi  $(N + 1)$  bilinmeyenden ve  $(N + 1)$  denklemden oluşan sisteme döner ve bu sistem Thomas algoritmasıyla çözülebilir.

### 3.1.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kuadratik Galerkin metodu için sayısal hesaplamalar

Tablo 3.2 de (1.13) sınır şartları ile verilen (1.12) formundaki Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin sayısal sonuçları elde edilmiştir. (1.12) probleminin GODSE kuadratik Galerkin metodu yardımıyla sayısal çözümünün doğruluğu maksimum hata normu kullanılarak farklı  $\varepsilon$  katsayısı ve  $N$  bölünme noktaları sayısı için incelenmiştir. Tabloya göre Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin katsayısı  $\varepsilon$  ve bölünme noktası olan  $N$  sayısı artarken analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki fark azalmaktadır. Dolayısıyla  $\varepsilon$  ve  $N$  sayısı ise büyüdükçe hatanın minimuma yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 3.2: (1.12) problemi için  $L_\infty$  hata normları

$\varepsilon$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
1/4	$0.71 \times 10^{-1}$	$0.41 \times 10^{-1}$	$0.21 \times 10^{-1}$	$0.11 \times 10^{-1}$	$0.60 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-2}$	$0.16 \times 10^{-2}$
1/8	$0.66 \times 10^{-1}$	$0.47 \times 10^{-1}$	$0.26 \times 10^{-1}$	$0.13 \times 10^{-1}$	$0.81 \times 10^{-2}$	$0.38 \times 10^{-2}$	$0.22 \times 10^{-2}$
1/16	$0.78 \times 10^{-1}$	$0.39 \times 10^{-1}$	$0.24 \times 10^{-1}$	$0.14 \times 10^{-1}$	$0.82 \times 10^{-2}$	$0.46 \times 10^{-2}$	$0.24 \times 10^{-2}$
1/32	$0.99 \times 10^{-1}$	$0.52 \times 10^{-1}$	$0.25 \times 10^{-1}$	$0.13 \times 10^{-1}$	$0.85 \times 10^{-2}$	$0.46 \times 10^{-2}$	$0.24 \times 10^{-2}$
1/64	0.11	$0.65 \times 10^{-1}$	$0.32 \times 10^{-1}$	$0.16 \times 10^{-1}$	$0.75 \times 10^{-2}$	$0.46 \times 10^{-2}$	$0.27 \times 10^{-2}$
1/128	0.13	$0.75 \times 10^{-1}$	$0.38 \times 10^{-1}$	$0.19 \times 10^{-1}$	$0.96 \times 10^{-2}$	$0.45 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-2}$
1/256	0.16	$0.85 \times 10^{-1}$	$0.44 \times 10^{-1}$	$0.22 \times 10^{-1}$	$0.11 \times 10^{-1}$	$0.56 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-2}$
1/512	0.15	$0.94 \times 10^{-1}$	$0.51 \times 10^{-1}$	$0.26 \times 10^{-1}$	$0.13 \times 10^{-1}$	$0.65 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-2}$
1/1000	0.16	0.10	$0.56 \times 10^{-1}$	$0.29 \times 10^{-1}$	$0.15 \times 10^{-1}$	$0.72 \times 10^{-2}$	$0.40 \times 10^{-2}$

Şekil 3.1:  $\varepsilon = 0.01$  için eşit aralıklı bölünmeŞekil 3.2:  $\varepsilon = 0.01$  için GODSE bölünmeŞekil 3.3:  $\varepsilon = 0.001$  için eşit aralıklı bölünmeŞekil 3.4:  $\varepsilon = 0.001$  için GODSE bölünme

Şekil 3.1-3.4 grafiklerinde, sürekli çizgi ile gösterilenler, (1.13) ile verilen Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin GODSE kuadratik Galerkin metoduyla elde

edilen gerçek çözümleri, kesikli çizgi ile gösterilenler ise sayısal çözümlerdir. Grafiklerin hepsi  $N = 20$  için çizilmiştir. Şekil 3.1 ve Şekil 3.3 ile verilen grafikte problemin çözüm aralıkları birbirine eşit alt aralıklardan oluşurken, Şekil 3.2 ve Şekil 3.4 ile verilen grafikte ise problemin çözüm aralıkları geometrik olarak değişen sonlu elemanlar olarak alınmıştır. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 ile verilen grafikte, (1.13) ile verilen Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin katsayısı  $\varepsilon = 0.01$  olarak alınırken, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ile verilen grafikte, probleminin katsayısı  $\varepsilon = 0.001$  olarak alınmıştır. Şekil 3.1 ve Şekil 3.3 ile verilen grafikte yaklaşım çok iyi değildir ve hata oranı oldukça fazladır. Oysaki Şekil 3.2 ve Şekil 3.4 ile verilen grafikte yaklaşım diğerlerine göre daha iyidir ve hata oranı oldukça düşüktür.



## BÖLÜM 4

### GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA KUADRATİK SUBDOMAIN GALERKİN METODU

Bu bölümde (1.10) sınır şartları ile verilen (1.9) formundaki Singularly Perturbed Sınır Değer problemi, GODSE kuadratik subdomain Galerkin metodu kullanılarak çözülecektir.

#### 4.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kuadratik Subdomain Galerkin Metodu

$p$  ve  $q$  sabitler olmak üzere

$$-\varepsilon u''(x) + pu'(x) + qu(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile verilen Singularly Perturbed denkleminin her iki tarafı, ağırlık fonksiyonu  $V_n$

$$V_n = \begin{cases} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile çarpılır ve  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinden integre edilirse

$$\int_{x_0}^{x_n} [-\varepsilon u''(x) + pu'(x) + qu(x) - f(x)] dx = 0$$

bulunur. İlk iki terimin integrali alınırsa

$$-\varepsilon u'(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + pu(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + q \int_{x_m}^{x_{m+1}} u(x) dx = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) dx \quad (4.1)$$

bulunur. Son denklemden bilinmeyen  $u$

$$u = \sum_{J=m-1}^{m+1} \phi_J \delta_j$$

ve  $u$  nun türevi

$$u' = \sum_{J=m-1}^{m+1} \phi_J' \delta_j$$

yaklaşımları (4.1) denklemimde yazılır ve bölünme noktalarındaki değerleri alınırsa

$$\begin{aligned}
& [-\varepsilon \left( \sum_{J=m-1}^{m+1} \phi_i' \Big|_0^{hm} \right) \delta_j) + p(x_m + \xi) \left( \sum_{J=m-1}^{m+1} \phi_i \Big|_0^{hm} \right) \delta_j) + q(x_m + \xi) \sum_{J=m-1}^{m+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \delta_j dx \\
& = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m + \xi) dx
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir.

Geometrik olarak artan aralıklar  $[x_m, x_{m+1}]$  üzerinde tanımlı B-spline kauadratik şekil fonksiyonlarının ardışık 3 tanesi kullanılarak oluşturulan  $u$  ve  $u'$  yaklaşımının bölünme noktalarındaki değerleri (1.30) ve (1.31) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} u''(x) dx &= u'(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \\
&= u'(x_{m+1}) - u'(x_m) \\
&= \left[ \frac{2\alpha}{h_{m+1}} (\delta_{m+1} - \delta_m) \right] - \left[ \frac{2\alpha}{h_m} (\delta_m - \delta_{m-1}) \right] \\
&= \frac{2\alpha}{h_{m+1}} \delta_{m+1} + \left( -\frac{2\alpha}{h_{m+1}} - \frac{2\alpha}{h_m} \right) \delta_m + \frac{2\alpha}{h_m} \delta_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} u'(x) dx &= u(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = u(x_{m+1}) - u(x_m) \\
&= \alpha \delta_m + \delta_{m+1} - (\alpha \delta_{m-1} + \delta_m) \\
&= \delta_{m+1} + (\alpha - 1) \delta_m - \alpha \delta_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

integralleri elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} u(x) dx &= \int_0^{h_m} \left( \sum_{J=m-1}^{m+1} \phi_j \delta_j \right) d\xi \\
&= \int_0^{h_m} \phi_{m-1} \delta_{m-1} d\xi + \int_0^{h_m} \phi_m \delta_m d\xi + \int_0^{h_m} \phi_{m+1} \delta_{m+1} d\xi \\
&= \delta_{m-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx + \delta_m \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx + \delta_{m+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ifadesindeki  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx$ ,  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx$ ,  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx$  değerleri

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx &= \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \alpha(h_m - \xi)^2 d\xi = \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \alpha(h_m^2 - 2h_m\xi + \xi^2) d\xi \\ &= \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} (\alpha h_m^2 - \alpha 2h_m\xi + \alpha \xi^2) d\xi \\ &= \left( \alpha h_m^2 \xi - \alpha h_m \xi^2 + \frac{\alpha \xi^3}{3} \right) \Big|_0^{h_m} \\ &= \frac{1}{3} \alpha h_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx &= \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} (h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - (1 + \alpha)\xi^2) d\xi \\ &= \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} (h_m^2 + 2\alpha h_m \xi - \xi^2 - \alpha \xi^2) d\xi \\ &= \frac{1}{h_m^2} \left( h_m^2 \xi + \alpha h_m \xi^2 - \frac{\xi^3}{3} - \frac{\alpha \xi^3}{3} \right) \Big|_0^{h_m} \\ &= \frac{2}{3} h_m (\alpha + 1) \end{aligned}$$

ve

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx = \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \xi^2 d\xi = \frac{1}{h_m^2} \frac{\xi^3}{3} \Big|_0^{h_m} = \frac{1}{3} h_m$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan integraller (4.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} u(x) dx &= \delta_{m-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx + \delta_m \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx + \delta_{m+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx \quad (4.6) \\ &= \frac{1}{3} \alpha h_m \delta_{m-1} + \frac{2}{3} h_m (\alpha + 1) \delta_m + \frac{1}{3} h_m \delta_{m+1} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.4) ve (4.6) değerleri (4.2) de yerine yazılırsa

$$-\varepsilon \left( \frac{2\alpha}{h_{m+1}} \delta_{m+1} + \left( -\frac{2\alpha}{h_{m+1}} - \frac{2\alpha}{h_m} \right) \delta_m + \frac{2\alpha}{h_m} \delta_{m-1} \right) + p(x) (\delta_{m+1} + (\alpha - 1) \delta_m - \alpha \delta_{m-1})$$

$$+ q(x) \left( \frac{1}{3} \alpha h_m \delta_{m-1} + \frac{2}{3} h_m (\alpha + 1) \delta_m + \frac{1}{3} h_m \delta_{m+1} \right) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) dx$$



$$f_m = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere

$$AX = F \tag{4.7}$$

yazılabilir.  $N+3$  bilinmeyenden ve  $N+1$  denklemden oluşan sistemin çözülebilmesi için, bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olmalıdır. (1.10) ile verilen sınır şartlarından ve (1.30) ile verilen eşitlikten

$i = 0$  için

$$\begin{aligned} u(x_0) = u(0) &= \alpha\delta_{-1} + \delta_0 = \lambda \\ \Rightarrow \delta_{-1} &= \frac{\lambda - \delta_0}{\alpha} \end{aligned}$$

$i = N$  için

$$\begin{aligned} u(x_N) = u(1) &= \alpha\delta_{N-1} + \delta_N = \beta \\ \Rightarrow \delta_N &= \beta - \alpha\delta_{N-1} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_N$  parametreleri (4.7) denklem sisteminden elimine edilerek elde edilen  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu ve üç bantlı lineer denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülür.

#### 4.1.1 GODSE kuadratik B-spline fonksiyonu ile subdomain Galerkin metodu için sayısal hesaplamalar

Tablo 4.1 de Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin

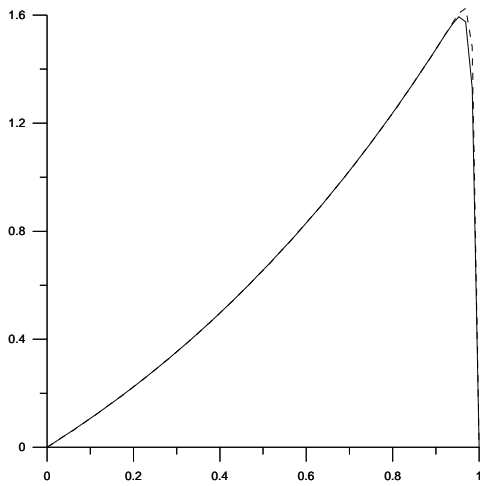
$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = e^x,$$

$u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  ve  $u'(0) = 0$  sınır koşulları altındaki çözümleri çalışılmıştır. Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin en yüksek türevinin katsayısı  $\varepsilon$  ve çözüm bölgesi üzerinde bölünme sayısı  $N$  nin farklı değerleri için  $L_\infty$  hata normları incelenmiştir.  $\varepsilon$  azalırken analitik çözümler ile yaklaşık çözümler arasındaki fark

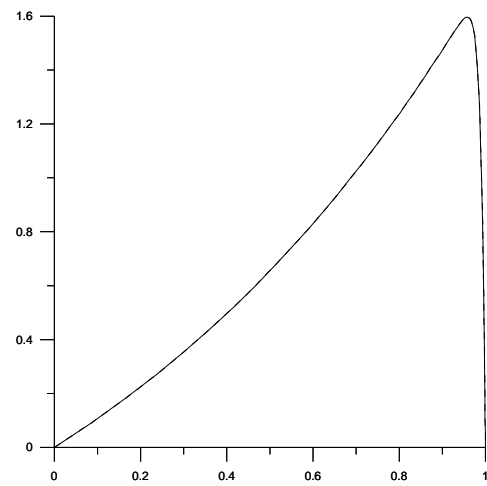
artmaktadır. Problemin bölünme nokta sayısı  $N$  artarken ise analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki farkın azalmakta olduğu görülmektedir.

Tablo 4.1: (1.12) problemi için  $L_\infty$  hata normları

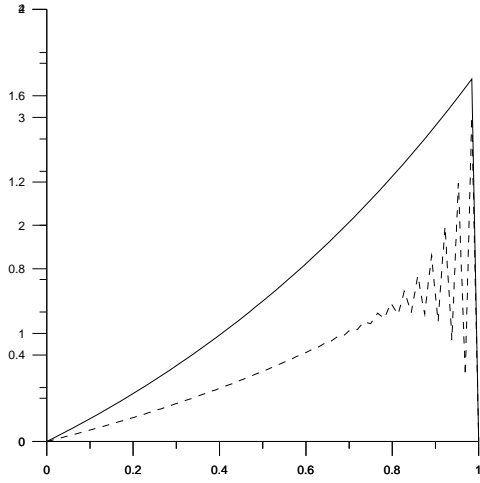
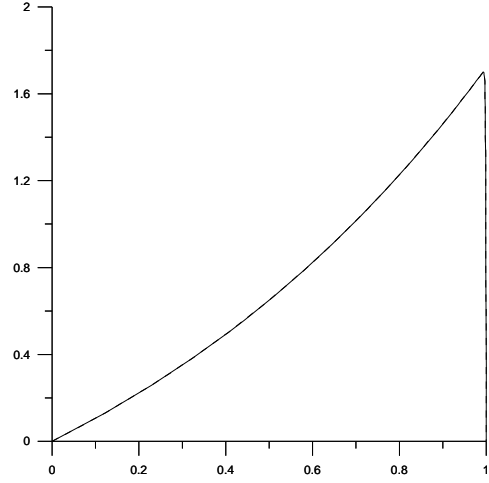
$\varepsilon$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
1/4	$0.10 \times 10^{-2}$	$0.26 \times 10^{-3}$	$0.65 \times 10^{-4}$	$0.16 \times 10^{-4}$	$0.41 \times 10^{-5}$	$0.10 \times 10^{-5}$	$0.26 \times 10^{-6}$
1/8	$0.35 \times 10^{-2}$	$0.89 \times 10^{-3}$	$0.22 \times 10^{-3}$	$0.55 \times 10^{-4}$	$0.13 \times 10^{-4}$	$0.35 \times 10^{-5}$	$0.90 \times 10^{-6}$
1/16	$0.55 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-2}$	$0.34 \times 10^{-3}$	$0.86 \times 10^{-4}$	$0.21 \times 10^{-4}$	$0.54 \times 10^{-5}$	$0.13 \times 10^{-5}$
1/32	$0.75 \times 10^{-2}$	$0.18 \times 10^{-2}$	$0.47 \times 10^{-3}$	$0.11 \times 10^{-3}$	$0.29 \times 10^{-4}$	$0.73 \times 10^{-5}$	$0.18 \times 10^{-5}$
1/64	$0.97 \times 10^{-2}$	$0.24 \times 10^{-2}$	$0.61 \times 10^{-3}$	$0.15 \times 10^{-3}$	$0.38 \times 10^{-4}$	$0.96 \times 10^{-5}$	$0.24 \times 10^{-5}$
1/128	$0.12 \times 10^{-1}$	$0.31 \times 10^{-2}$	$0.78 \times 10^{-3}$	$0.19 \times 10^{-3}$	$0.49 \times 10^{-4}$	$0.12 \times 10^{-4}$	$0.30 \times 10^{-5}$
1/256	$0.15 \times 10^{-1}$	$0.38 \times 10^{-2}$	$0.97 \times 10^{-3}$	$0.24 \times 10^{-3}$	$0.60 \times 10^{-4}$	$0.15 \times 10^{-4}$	$0.38 \times 10^{-5}$
1/512	$0.18 \times 10^{-1}$	$0.46 \times 10^{-2}$	$0.11 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-3}$	$0.73 \times 10^{-4}$	$0.18 \times 10^{-4}$	$0.46 \times 10^{-5}$
1/1000	$0.21 \times 10^{-1}$	$0.57 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-2}$	$0.34 \times 10^{-3}$	$0.86 \times 10^{-4}$	$0.21 \times 10^{-4}$	$0.54 \times 10^{-5}$



Şekil 4.1:  $\varepsilon = 0.01$  için eşit aralıklı bölünme



Şekil 4.2:  $\varepsilon = 0.01$  için GODSE bölünme

Şekil 4.3:  $\varepsilon = 0.001$  için eşit aralıklı bölünmeŞekil 4.4:  $\varepsilon = 0.001$  için GODSE bölünme

Şekil 4.1-Şekil 4.4 grafiklerinde (1.13) ile verilen Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin GODSE kuadratik subdomain Galerkin metoduyla sayısal çözümünü kesikli çizgiler ile gösterilirken, gerçek çözüm ise sürekli çizgiler ile gösterilmiştir. Grafiklerin hepsi  $N = 20$  için çizilmiştir. Problemin çözüm aralıklarının birbirine eşit alt aralıklardan oluştuğu durum Şekil 4.1 ve Şekil 4.3 ile gösterilirken, çözüm aralıklarının geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda alınmasıyla oluşan durum Şekil 4.2 ve Şekil 4.4 ile gösterilmiştir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 ile verilen grafikte, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin baş katsayısı  $\varepsilon = 0.01$  olarak alınırken, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 ile verilen grafikte, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin baş katsayısı  $\varepsilon = 0.001$  olarak alınmıştır. Şekil 4.1 ve Şekil 4.3 ile verilen grafikte yaklaşım çok iyi değildir ve hata oranı oldukça fazladır. Oysaki Şekil 4.2 ve Şekil 4.4 ile verilen grafikte yaklaşım diğerlerine göre daha iyidir ve hata oranı oldukça düşüktür.

## BÖLÜM 5

### GEOMETRİK OLARAK DEĞİŞEN SONLU ELEMANLARDA KÜBİK SUBDOMAIN GALERKİN METODU

Bu bölümde (1.10) sınır şartları ile verilen (1.9) formundaki Singularly Perturbed Sınır Değer problemi, GODSE kübik subdomain Galerkin metodu kullanılarak çözülecektir.

#### 5.1 Geometrik Olarak Değişen Sonlu Elemanlarda Kübik Subdomain Galerkin Metodu

$p$  ve  $q$  sayısal değerler olmak üzere

$$-\varepsilon u''(x) + pu'(x) + qu(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Singularly Perturbed denklemi ele alınsın. Denklemin her iki taraf, ağırlık fonksiyonu  $V_n$

$$V_n = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile çarpılıp  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında integre edilirse

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [-\varepsilon u''(x) + pu'(x) + qu(x) - f(x)] dx = 0$$

elde edilir. İntegral denklemi

$$-\varepsilon u'(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + pu(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + q \int_{x_m}^{x_{m+1}} u(x) dx = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) dx \quad (5.1)$$

olarak düzenlenebilir. Denklemdaki (5.1) bilinmeyen  $u$

$$u_N = \sum_{J=m-1}^{m+2} \phi_j \delta_j$$

ve  $u'$  nun türevi

$$u'_N = \sum_{J=m-1}^{m+2} \phi'_j \delta_j$$



yaklaşımları (5.1) yazılır ve bölünme noktalarındaki değerleri alınırsa

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \left( \sum_{J=m-1}^{m+2} \phi_i' \Big|_0^{hm} \right) \delta_j + p \left( \sum_{J=m-1}^{m+2} \phi_i \Big|_0^{hm} \delta_j \right) \\
& + q \sum_{J=m-1}^{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i \delta_j dx = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m + \xi) dx
\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir.

Geometrik olarak azalan aralıklar üzerinde tanımlı B-spline kübik şekil fonksiyonlarının ardışık 4 tanesi kullanılarak oluşturulan  $u$  ve  $u'$  yaklaşımının bölünme noktalarındaki değerleri (1.38) ve (1.39) yardımıyla

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u''(x) dx = u'(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
& = u'(x_{m+1}) - u'(x_m) \\
& = \frac{3\alpha}{h_{m+1}} (\delta_{m+2} + (\alpha^2 - 1)\delta_{m+1} - \alpha^2\delta_m) \\
& \quad - \frac{3\alpha}{h_m} (\delta_{m+1} + (\alpha^2 - 1)\delta_m - \alpha^2\delta_{m-1})
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{3\alpha}{h_{m+1}} \delta_{m+2} + \left( \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{h_{m+1}} - \frac{3\alpha}{h_m} \right) \delta_{m+1} \\
& \quad + \left( -\frac{3\alpha^3}{h_{m+1}} - \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{h_m} \right) \delta_m + \frac{3\alpha^3}{h_m} \delta_{m-1}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u'(x) dx = u(x) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
& = u(x_{m+1}) - u(x_m) \\
& = \alpha^3 \delta_m + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_{m+1} + \delta_{m+2} - (\alpha^3 \delta_{m-1} + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_m + \delta_{m+1}) \\
& = \delta_{m+2} + (2\alpha(\alpha + 1) - 1)\delta_{m+1} + (\alpha^3 - 2\alpha(\alpha + 1))\delta_m - \alpha^3 \delta_{m-1}
\end{aligned}$$

integralleri elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} u(x) dx &= \int_0^{h_m} \left( \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j \delta_j \right) d\xi \\
&= \int_0^{h_m} \phi_{m-1} \delta_{m-1} d\xi + \int_0^{h_m} \phi_m \delta_m d\xi + \int_0^{h_m} \phi_{m+1} \delta_{m+1} d\xi + \int_0^{h_m} \phi_{m+2} \delta_{m+2} d\xi \quad (5.7) \\
&= \delta_{m-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx + \delta_m \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx + \delta_{m+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx + \delta_{m+2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+2} dx
\end{aligned}$$

ifadesindeki  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx$ ,  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx$ ,  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx$ ,  $\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+2} dx$  değerleri

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m-1} dx &= \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} \alpha^3 (h_m - \xi)^3 d\xi = \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} \alpha^3 (h_m^3 - 3\xi h_m^2 + 3\xi^2 h_m - \xi^3) d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} (\alpha^3 h_m^3 - 3\alpha^3 \xi h_m^2 + 3\alpha^3 \xi^2 h_m - \alpha^3 \xi^3) d\xi \\
&= \left( \alpha^3 \xi - \frac{3}{2h_m} \alpha^3 \xi^2 + \frac{\alpha^3 \xi^3}{h_m^2} - \frac{\alpha^3 \xi^4}{4h_m^3} \right) \Big|_0^{h_m} = \frac{1}{4} \alpha^3 h_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_m dx &= \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} (-\alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)(h_m - \xi)^2 - 6\alpha h_m (h_m - \xi) - 3\alpha^2 h_m^2) d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} [(-\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha)h_m^2 + 2\xi(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)h_m \\
&\quad + \xi^2(-\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha) - 6\alpha h_m^2 + 6\alpha \xi h_m - 3\alpha^2 h_m^2] d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} ((-\alpha^3 - 4\alpha^2 - 7\alpha)h_m^2 + 2\xi(\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha)h_m + \xi^2(-\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha)) d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^3} \left( (-\alpha^3 - 4\alpha^2 - 7\alpha)\xi h_m^2 + \xi^2(\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha)h_m + \frac{\xi^3}{3}(-\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha) \right) \Big|_0^{h_m} \\
&= -\frac{1}{3} \alpha (\alpha^2 + 10\alpha + 10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+1} dx &= \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} (-(\alpha^2 + \alpha + 1)\xi^3 + 3\alpha^2 h_m \xi^2 + 3\alpha h_m^2 \xi + h_m^3) d\xi \\
&= \frac{1}{h_m^3} \left( -(\alpha^2 + \alpha + 1) \frac{\xi^4}{4} + \alpha^2 h_m \xi^3 + \frac{3}{2} \alpha h_m^2 \xi^2 + \xi h_m^3 \right) \Big|_0^{h_m} \\
&= \frac{1}{4} h_m (3\alpha^2 + 5\alpha + 3)
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_{m+2} dx = \frac{1}{h_m^3} \int_0^{h_m} \xi^3 d\xi = \frac{1}{h_m^3} \frac{\xi^4}{4} \Big|_0^{h_m} = \frac{1}{4} h_m$$

olarak hesaplanabilir. Hesaplanan integraller (5.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{x_m}^{x_{m+1}} u(x) dx &= \int_0^{h_m} \left( \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j \delta_j \right) d\xi \\
&= \delta_{m-1} \int_0^{h_m} \phi_{m-1} dx + \delta_m \int_0^{h_m} \phi_m dx + \delta_{m+1} \int_0^{h_m} \phi_{m+1} dx + \delta_{m+2} \int_0^{h_m} \phi_{m+2} dx \\
&= \frac{1}{4} \alpha^3 h_m \delta_{m-1} - \frac{1}{3} \alpha (\alpha^2 + 10\alpha + 10) \delta_m \\
&\quad + \frac{1}{4} h_m (3\alpha^2 + 5\alpha + 3) \delta_{m+1} + \frac{1}{4} h_m \delta_{m+2}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.3), (5.6) ve (5.8) ifadeleri (5.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \left( \frac{3\alpha}{h_{m+1}} \delta_{m+2} + \left( \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{h_{m+1}} - \frac{3\alpha}{h_m} \right) \delta_{m+1} + \left( -\frac{3\alpha^3}{h_{m+1}} - \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{h_m} \right) \delta_m + \frac{3\alpha^3}{h_m} \delta_{m-1} \right) \\
& + p(x) (\delta_{m+2} + (2\alpha(\alpha + 1) - 1) \delta_{m+1} + (\alpha^3 - 2\alpha(\alpha + 1)) \delta_m - \alpha^3 \delta_{m-1}) \\
& + q(x) \left( \frac{1}{4} \alpha^3 h_m \delta_{m-1} - \frac{1}{3} \alpha (\alpha^2 + 10\alpha + 10) \delta_m + \frac{1}{4} h_m (3\alpha^2 + 5\alpha + 3) \delta_{m+1} + \frac{1}{4} h_m \delta_{m+2} \right) \\
& = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) dx
\end{aligned}$$

bulunur. Denklem  $\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}$  ve  $\delta_{m+2}$  katsayılarına göre tekrar düzenlenirse ve

$h_{m+1} = \alpha h_m$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{3\varepsilon\alpha^3}{h_m} - p(x)\alpha^3 + q(x)\frac{1}{4}\alpha^3 h_m \right) \delta_{m-1} \\
& + \left( \frac{3\varepsilon\alpha^2}{h_m} + \frac{3\varepsilon\alpha(\alpha^2 - 1)}{h_m} + p(x)(\alpha^3 - 2\alpha(\alpha + 1)) - q(x)\left(\frac{1}{3}\alpha(\alpha^2 + 10\alpha + 10)\right) \right) \delta_m \\
& + \left( -\frac{3(\alpha^2 - 1)\varepsilon}{h_m} + \frac{3\alpha\varepsilon}{h_m} + p(x)(2\alpha(\alpha + 1) - 1) + q(x)\frac{1}{4}h_m(3\alpha^2 + 5\alpha + 3) \right) \delta_{m+1} \\
& + \left( \frac{-3\varepsilon}{h_m} + p(x) + q(x)\frac{1}{4}h_m \right) \delta_{m+2} \\
& = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) dx
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Sistem matris formunda

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} & \alpha_{04} & & & & \\ & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & & & \\ & & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & & \\ & & & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{m1} = -\frac{3\varepsilon\alpha^3}{h_m} - p_m\alpha^3 + q_m\frac{1}{4}\alpha^3 h_m$$

$$\alpha_{m2} = \frac{3\varepsilon\alpha(1 + \alpha - \alpha^2)}{h_m} + p_m(\alpha^3 - 2\alpha(\alpha + 1)) - q_m\left(\frac{1}{3}\alpha(\alpha^2 + 10\alpha + 10)\right)$$

$$\alpha_{m3} = \frac{3(1 + \alpha - \alpha^2)\varepsilon}{h_m} + p_m(2\alpha(\alpha + 1) - 1) + q_m\frac{1}{4}h_m$$

$$\alpha_{m4} = \frac{-3\varepsilon}{h_m} + p_m + q_m\frac{1}{4}h_m,$$

ve

$$\begin{aligned}
X &= \left[ \delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \delta_{n+1}, \delta_{n+2} \right]^T \\
F &= \left[ f_0, f_1, \dots, f_n \right]^T, \quad f_m = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$BX = F \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem sistemi,  $N + 4$  bilinmeyen  $N + 1$  denklemden oluşur. Bu sistemin çözülebilmesi için, bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olmalıdır. (1.38) ile verilen sınır şartlarından ve (1.10) ile verilen eşitlikten  $i = N + 1$  için

$$\begin{aligned}
u(x_N) = u(1) &= \alpha^3 \delta_N + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = \beta \\
\Rightarrow \delta_{N+2} &= \beta - \alpha^3 \delta_N - 2\alpha(\alpha + 1)\delta_{N+1}
\end{aligned}$$

kolaylıkla elde edilir. Ayrıca (1.38) ve (1.39) değerleri ortak çözümlere  $i = 0$  için

$$\begin{aligned}
u(0) &= \alpha^3 \delta_{-1} + 2\alpha(\alpha + 1)\delta_0 + \delta_1 \\
h(0)u'(0) &= \frac{3\alpha [\delta_1 + (\alpha^2 - 1)\delta_0 - \alpha^2 \delta_{-1}]}{h_0}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\delta_{-1} = \frac{1}{\alpha^3} \delta_1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha^3(\alpha + 1)} u(0) - \frac{2}{3\alpha^3(\alpha + 1)} h(0)u'(0)$$

ve

$$\delta_0 = \frac{-1}{\alpha(\alpha + 1)} \delta_1 + \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)^2} u(0) + \frac{1}{3\alpha(\alpha + 1)^2} h(0)u'(0)$$

olarak elde edilir. Böylelikle elde edilen lineer denklem sistemi verilen 5 bant matrisin çözümü için verilen Thomas algoritmasıyla çözülebilir.

### 5.1.1 Geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda kübik subdomain Galerkin metodu için sayısal hesaplamalar

Tablo 5.1 de Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = e^x,$$

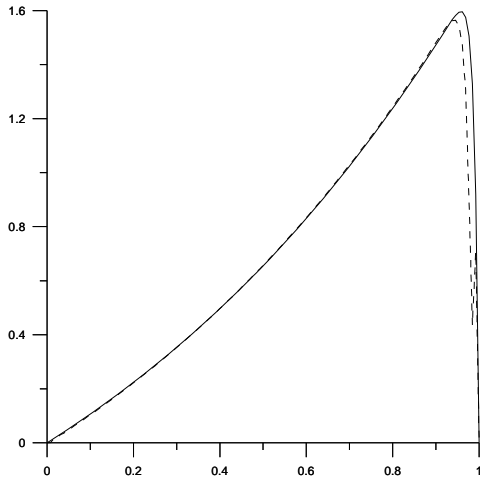
$u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  ve  $u'(0) = 0$  sınır koşulları altındaki çözümleri elde edilecektir. En yüksek türevinin katsayısı  $\varepsilon$  ve bölünme noktası sayısı  $N$  nin farklı değerleri için  $L_\infty$  hata normları bulunmuştur.  $\varepsilon$  azalırken analitik çözümler ile yaklaşık çözümler arasındaki fark arttığı görülmektedir. Diğer yandan  $N$  artarken ise analitik çözümler ile sayısal çözümler arasındaki farkın azalmakta olduğu görülmektedir.

Tablo 5.1: (1.12) problemi için  $L_\infty$  hata normları

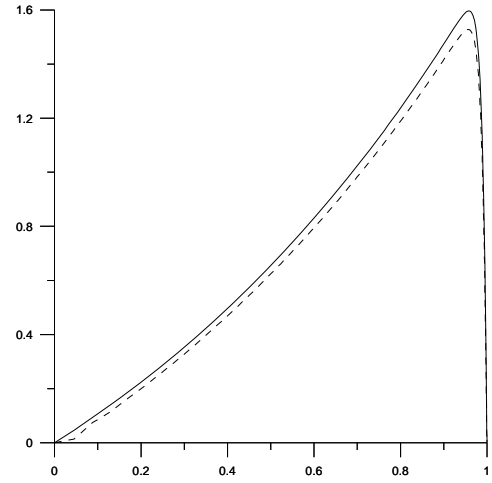
$\varepsilon$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
1/4	0.12	$0.61 \times 10^{-1}$	$0.30 \times 10^{-1}$	$0.15 \times 10^{-1}$	$0.78 \times 10^{-2}$	$0.38 \times 10^{-2}$
1/8	0.17	$0.87 \times 10^{-1}$	$0.43 \times 10^{-1}$	$0.22 \times 10^{-1}$	$0.11 \times 10^{-1}$	$0.55 \times 10^{-2}$
1/16	0.22	0.13	$0.56 \times 10^{-1}$	$0.28 \times 10^{-1}$	$0.14 \times 10^{-1}$	$0.78 \times 10^{-2}$
1/32	0.27	0.13	$0.69 \times 10^{-1}$	$0.34 \times 10^{-1}$	$0.17 \times 10^{-1}$	$0.87 \times 10^{-2}$
1/64	0.30	0.16	$0.81 \times 10^{-1}$	$0.40 \times 10^{-1}$	$0.20 \times 10^{-1}$	$0.10 \times 10^{-1}$
1/128	$0.75 \times 10^{-1}$	0.17	$0.91 \times 10^{-1}$	$0.46 \times 10^{-1}$	$0.23 \times 10^{-1}$	$0.11 \times 10^{-1}$
1/256	$0.53 \times 10^{-1}$	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.98 \times 10^{-1}$	$0.5 \times 10^{-1}$	$0.25 \times 10^{-1}$	$0.13 \times 10^{-1}$
1/512	$0.91 \times 10^{-1}$	$0.61 \times 10^{-1}$	$0.70 \times 10^{-1}$	$0.53 \times 10^{-1}$	$0.28 \times 10^{-1}$	$0.14 \times 10^{-1}$
1/1000	0.11	$0.46 \times 10^{-1}$	$0.90 \times 10^{-1}$	$0.56 \times 10^{-1}$	$0.29 \times 10^{-1}$	$0.15 \times 10^{-1}$

Şekil 5.1-Şekil 5.4 grafiklerinde (1.13) ile verilen Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin GODSE kübik subdomain Galerkin metoduyla sayısal çözümü kesikli çizgiler ile gösterilirken, gerçek çözüm sürekli çizgiler ile gösterilmiştir. Grafiklerin hepsi  $N = 20$  için çizilmiştir. Problemin çözüm aralıklarının birbirine eşit alt aralıklardan oluştuğu durum Şekil 5.1 ve Şekil 5.3 ile gösterilirken, çözüm aralıklarının geometrik olarak değişen sonlu elemanlarda alınmasıyla oluşan durum Şekil 5.2 ve Şekil 5.4 ile gösterilmiştir. Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 ile verilen grafikte, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin katsayısı  $\varepsilon = 0.01$  olarak alınırken, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 ile verilen grafikte, Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin baş katsayısı  $\varepsilon = 0.001$  olarak alınmıştır. Şekil 5.1 ve Şekil 5.3 ile verilen grafikte yaklaşım çok

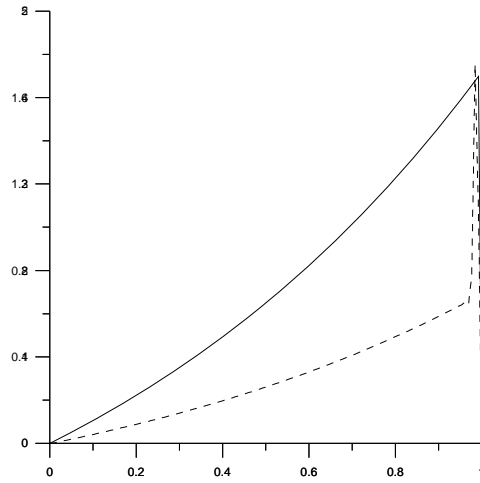
iyi değildir ve hata oranı oldukça fazladır. Oysaki Şekil 5.2 ve Şekil 5.4 ile verilen grafikte yaklaşım diğerlerine göre daha iyidir ve hata oranı oldukça düşüktür.



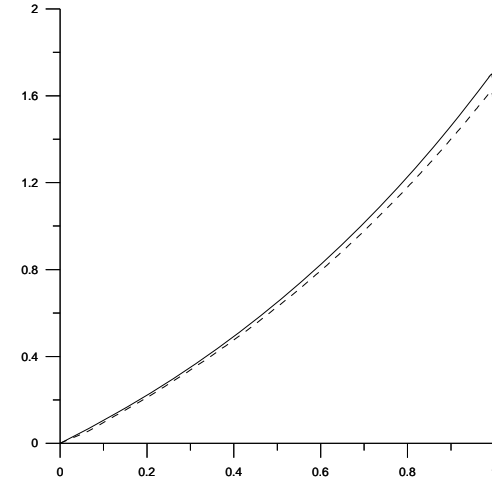
Şekil 5.1:  $\varepsilon = 0.01$  için eşit aralıklı bölünme



Şekil 5.2:  $\varepsilon = 0.01$  için GODSE bölünme



Şekil 5.3:  $\varepsilon = 0.001$  için eşit aralıklı bölünme



Şekil 5.4:  $\varepsilon = 0.001$  için GODSE bölünme

## BÖLÜM 6

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Singularly Perturbed Sınır Değer probleminin çözümü sonlu elemanlar metodu kullanılarak araştırılmıştır. B-spline sonlu elemanlar metodu Singularly Perturbed problemine uygulanırken geometrik olarak değişen aralıklar üzerinde modifiye edilmiştir. Tanım aralıkları, her aralık bir önceki aralığın  $\alpha$  katı olarak alınmak suretiyle GODSE bölünmesi oluşturulmuştur. İlk olarak GODSE kuadratik B-spline fonksiyonları ve GODSE kübik B-spline fonksiyonları kullanarak oluşturulan kolokeyşin metodunun Singularly Perturbed Sınır Değer problemine uygulaması incelenmiştir. Singularly Perturbed problemin çözümü GODSE kuadratık Galerkin algoritması yazılmıştır, sonuçlar ve çözüm grafikleri verilmiştir. Metodun Singularly Perturbed Sınır Değer problemindeki  $\varepsilon$  katsayısı ve tanım aralığındaki nokta sayısı  $N$  değişirken, GODSE bölünme ve eşit aralıklı bölünme kullanılmasına göre sonuçlar değerlendirilmiştir. Singularly Perturbed probleminin çözümleri için tanım aralıkların eşit olarak parçalanmasıyla oluşturulan metoda göre GODSE parçalanmanın daha küçük hata verdiği ve dolayısıyla gerçek çözüme daha iyi bir yaklaşım yapılabileceği sonucuna varılmıştır. Son iki bölümde Singularly perturbed denklemi için kuadratık ve kübik B-spline Galerkin subdomain algoritmaları tanımlanmıştır. Her iki algoritmanın sonuçları Singularly Perturbed Sınır Değer problemindeki  $\varepsilon$  katsayısı ve tanım aralığındaki nokta sayısı  $N$  değişirken, tablolar halinde sunulmuş ve çözümlerinin grafikleri çizilmiştir. GODSE kuadratık Galerkin metoduna göre, GODSE kuadratık subdomain Galerkin metodu daha iyi sonuç vermiştir. Diğer yandan GODSE kübik subdomain Galerkin metodunun, GODSE kuadratık subdomain Galerkin metodundan daha iyi sonuçlar vermediği tablo ve grafiklerden görülmektedir.



## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bakhvalov, A. S., 1969, Optimizacii metodov resenia kraevyh zadac prinalicii pograan-icnogo sloja, Zh. Vychisl. Mat. Fiz. 9, 841-859.
- Lauder, B. E. and Spalding, B., 1972, Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, New York.
- Hirsch, C., 1988, Numerical computation of internal and external flows, Vol. 1, Wiley, Chichester.
- Fyfe, D. J., 1969, The use of cubic splines in the solution of two-point boundary value problems, Comput. J., 12(2), 188-192.
- Doolan, E. P., Miller, J. J. H. and Schilders, W. H. A., 1980, Uniform numerical methods for problem with initial and boundary layers, Boole Press Dublin.
- Black, F. and Scholes, M., 1973, The price of options and corporate liabilities, J. Polit, Economy 81, 637-659.
- Beckett, G. and Mackenzie, J. A., 2001, Uniformly convergent high order finite element solutions of a singularly perturbed reaction-diffusion equation using mesh equidistribution, Appl. Numer. Math., 39, 31-45.
- Liu, G. R. and Gu, Y. T., 2006, Meshless techniques for convection dominated problems, Computational Mechanics, 38(2), 171-182.
- Dağ, I. and Şahin, A., 2009, Numerical solution of singularly perturbed problems, International Journal of Nonlinear Science, Vol. 8, No. 1, 32-39.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- Baumert, H., Braun, P., Glos, E., Müller, W. D. and Stoyan, G., 1981, Modelling and computation of water quality problems in river networks, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Vol. 23, Springer-Verlag, Berlin.
- Roos, H. G., Stynes, M. and Tobiska, L., 1996, Numerical methods for singularly perturbed differential equations, Springer-Verlag, Berlin.
- Dağ, İ., 1994, Studies of B-spline finite elements, PhD Thesis, University College of North Wales, Bangor, UK.
- Dağ, İ. and Şahin, A., 2007, Numerical solution of the Burgers equation over geometrically graded mesh, *Kybernetes*, 36, 721-735.
- Miller, J. J. H., O’Riordan, E. and Shishkin, G. I., 1996, Fitted numerical methods for singular perturbations problems: Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions, World Scientific, Singapore.
- Lapidus L. and Pinder, G. F., 1982, Numerical solutions of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons, Inc.
- Kadalbajoo, M. K. and Gupta, V., 2009, Numerical solution of singularly perturbed convection diffusion problem using parameter uniform B-Spline collocation method, *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 439-452.
- Kadalbajoo, M. K. and Patidar, K. C., 2002, A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations, *Appl. Math. Comput.*, 130, 457-710.
- Kadalbajoo, M. K. and Patidar, K. C., 2002, Numerical solution of singularly perturbed two-point boundary value problems by spline in tension., *Appl. Math. Comput.*, 131, 299-320.
- Kadalbajoo, M. K. and Patidar, K. C., 2002, Spline techniques for the numerical solution of singular perturbation problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 112, 575-594.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- Kadalbajoo, M. K. and Arora, P., 2008, B-Spline collocation method for the singular perturbation problem using artificial viscosity.
- Kadalbajoo, M. K. and Gupta, V., 2009, Numerical solution of singularly perturbed convection-diffusion problem using parameter uniform B-Spline collocation method, *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 439-452.
- Sakai, M. and Usmani, R. A., 1989, A class of simple exponential B-splines and their applications to numerical solution to singular perturbation problems, *Num. Math.*, 55, 493-500.
- Sakai, M. and Usmani, R. A., 1986, On exponential splines, *J. Approx. Theory*, 47, 122-131.
- Kadalbajoo, M. K. and Aggarwal, V. K., 2005, Fitted mesh B-Spline collocation method for solving self adjoint singularly perturbed boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, 161, 973-987.
- Stojanovic, M., 2002, Spline collocation method for singular perturbation problem, *Glas. Mat.*, 37, 393-403.
- Jacob, M., 1959, *Heat transfer*, Wiley, New York.
- Nayfeh, A. H., 1993, *Introduction to perturbation techniques.*, Wiley, New York.
- O'Malley, R. E., 1991, Jr. *Singular perturbations method for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York.
- Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E. and Shishkin, G. I., 2000, *Robust computational techniques for boundary layers*, Chapman & Hall, CRC Press, Boca Raton, FL.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- O'Malley, R., 1989, Singular perturbation methods for ordinary differential equations, Springer-Verlag, New York.
- Rao, S. C. S., and Kumar, M., 2007, Optimal B-spline collocation method for self adjoint singularly perturbed boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, 188(1), 749-761.
- Polak, S., Heiger, C. D., Shilders, W. H. and Markowich, P., 1987, Semiconductor device modelling from the numerical point of view, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24, 763-838.
- Hahn, S. Y., Bignon, J. and Sabonnadiere, J. C., 1987, An 'upwind' finite element method for electromagnetic field problems in moving media, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24, 2071-2086.
- Liu, W. and Tang, T., 2001, Error analysis for a Galerkin-spectral method with coordinate transformation for solving singularly perturbed problems, *Appl. Numer. Math.*, 38, 315-345.