

Laguerre Geometrisinin Benzerlik Geometrisi
Olarak İncelenmesi Üzerine

Hamdiye Can Yılmaz

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2010

A Study of Laguerre Geometry
as the Similarity Geometry

Hamdiye Can Yılmaz

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

June 2010

Laguerre Geometrisinin Benzerlik Geometrisi
Olarak İncelenmesi Üzerine

Hamdiye Can Yılmaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Münevver Özcan

Haziran 2010

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Hamdiye Can Yılmaz'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Laguerre Geometrisinin Benzerlik Geometrisi Olarak İncelenmesi Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Münevver Özcan

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Münevver Özcan

Üye : Prof. Dr. Rüstem Kaya

Üye : Prof. Dr. Süleyman Çiftçi

Üye : Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Yard. Doç. Dr. Aytaç Kurtuluş

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Laguerre düzleminin benzerlik geometrisi incelenmiştir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; çalışma hakkında genel bilgi verilerek çalışmanın amacı belirtilmiştir. İkinci bölümde; çalışma ile ilgili olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; ilk olarak Laguerre düzleminin aksiyomatik yapısı verilmiştir. Daha sonra, Laguerre düzleminin izotrop modeli, klasik reel Laguerre düzlemi, $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzlem örneği ve bu düzlemin otomorfizmleri tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde; öncelikle $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde iki çember arasındaki açı tanımlanmıştır. Daha sonra, $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde çemberler arasındaki açıların $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ 'nin otomorfizmleri altında korunup korunmadığı incelenmiş ve bu otomorfizmlerin hangi durumlarda benzerlik dönüşümü olduğu belirtilmiştir. Beşinci bölümde ise; dördüncü bölümde elde edilen bulgular özetlenmiş ve sonuç olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Laguerre düzlemi, benzerlik, otomorfizm

SUMMARY

In this thesis, similarity geometry of Laguerre plane was studied. The work consists of five chapters. In the first chapter; general information about the work was given and the goal of the work was indicated. In the second chapter; some basic concepts related to the work were indicated. In the third chapter; firstly axiomatic structure of Laguerre plane was given. Then isotropic model of Laguerre plane, classic reel Laguerre plane, $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre plane sample and automorphisms of $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ were introduced. In the fourth chapter; firstly the angle between two circles in $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre plane was defined. Then, angles between the circles in $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre plane were examined to determine whether they are preserved or not under automorphisms of $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ and under which conditions that these automorphisms are similarity transformations were indicated. In the fifth chapter; the findings achieved in the fourth chapter were summarized and given as a result.

Keywords: Laguerre plane, similarity, automorphism

TEŞEKKÜR

Gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın;

Prof. Dr. Münevver Özcan'a

bu vesileyle şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Eskişehir, 2010

Hamdiye Can Yılmaz

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. LAGUERRE DÜZLEMİ.....	8
3.1 Laguerre Düzlemi	8
3.2 Laguerre Düzleminin İzotrop Modeli (Parabolik Model).....	13
3.3 Klasik Reel Laguerre Düzlemi	16
3.4 $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre Düzlemi.....	21
3.4.1 $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzlemi.....	21
3.4.2 $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin otomorfizmleri	22
3.4.3 $\mathcal{A}(\mathbf{K})$ da açıların parabolik ölçümü.....	24
4. $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ LAGUERRE DÜZLEMİNİN OTOMORFİZMLERİNİN HANGİ DURUMLARDA BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ OLDUĞUNUN BELİRLENMESİ	26
4.1 İki Eğri Arasındaki Açılı.....	26
4.2 $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre Düzleminde İki Çember Arasındaki Açılı.....	27

İÇİNDEKİLER (devam)**Sayfa**

4.3 $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre Düzleminde Çemberler Arasındaki Açıların $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ nın Otomorfizmleri Altındaki Değişimi ve Bu Otomorfizmlerin Hangi Durumlarda Benzerlik Dönüşümü Olduğunun Belirlenmesi	34
5. SONUÇLAR	64
KAYNAKLAR DİZİNİ	66
ÖZGEÇMİŞ	68

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
2.1	Koniklerin dış merkezliği	5
3.1	2. mertebeden Laguerre düzlemi	12
3.2	\mathfrak{A}_C , C noktasındaki rezidu	13
3.3	Laguerre düzleminin izotrop modeli (Parabolik model).....	16
4.1	İki eğri arasındaki açı	26

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\mathcal{P}, \mathcal{N}	Noktalar kümesi
\mathcal{G}, \mathcal{D}	Doğrular (üreteçler) kümesi
\mathcal{C}, \mathcal{Z}	Çemberler kümesi
\circ, \notin	Üzerindedir, üzerinde değildir
$\mathbf{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \circ)$	Üzerinde bulunma (insidens) yapısı
$\mathbf{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$	Afin düzlem
$\mathbf{B} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{C})$	Benz düzlemi
\subseteq, \emptyset	Altküme, boşküme
\in, \notin	Elemanıdır, elemanı değildir
\forall, \exists	Her, en az bir
\parallel, \nparallel	Paraleldir, paralel değildir
$(\mathbf{R}, +, \cdot)$	Halka
$\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$	Laguerre düzlemi
$\mathcal{L}(\mathbf{K})$	Laguerre düzlemi örneği
$\mathfrak{A}(\mathbf{K}) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$	\mathbf{K} cismi yardımıyla tanımlanan afin düzlem
\overline{P}	P noktasındaki üreteç
\mathfrak{A}_P	P noktasındaki rezidu
$[g_1, g_2]$	g_1 ve g_2 doğruları arasındaki açı
$\angle(g_1, g_2)$	g_1 ve g_2 doğruları arasındaki açının parabolik ölçüsü
$\angle(z_1, z_2)$	z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının parabolik ölçüsü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Zincir geometri, bir cebir yardımıyla kurulan bir üzerinde bulunma yapısıdır. Möbiüs, Laguerre ve Minkowski geometrileri, birer zincir geometri örneğidir. Benz (1973), bu üç geometri için genel bir kavram olan Benz düzlemi (çember düzlemi) kavramını ortaya koymuştur.

Bir Benz düzlemi $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{C})$, \mathcal{P} noktalar kümesinden ve \mathcal{P} nin altkümeleri olan \mathcal{G} üreteçler kümesi ve \mathcal{C} çemberler kümesinden oluşur ve aşağıdaki aksiyomları sağlar:

- 1) Her üreteç, her çemberi bir tek noktada keser;
- 2) Herhangi ikisi aynı üreteç üzerinde bulunmayan her üç noktadan geçen bir tek çember vardır;
- 3) c bir çember, P , c üzerinde bir nokta ve Q , c nin dışında ve P ile aynı üreteç üzerinde bulunmayan bir nokta ise o zaman Q dan geçen ve c yi yalnız P de kesen bir tek çember vardır (teğet aksiyomu);
- 4) Her çember üzerinde en az üç nokta vardır ve en az bir çember mevcuttur;
- 5a) $\mathcal{G} = \emptyset$ ise \mathcal{B} bir Möbiüs düzlemdir;
- 5b) \mathcal{G} , \mathcal{P} nin bir bölüntü kümesi ise \mathcal{B} bir Laguerre düzlemdir;
- 5c) \mathcal{G}_1 ve \mathcal{G}_2 , \mathcal{P} nin bölüntü kümeleri olmak üzere, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ ve \mathcal{G}_1 in her üreteci \mathcal{G}_2 nin her üretecini bir tek noktada kesiyor ise \mathcal{B} bir Minkowski düzlemdir.

Bu çalışmada, bir Benz düzlemi olan Laguerre düzleminin benzerlik geometrisi incelenmiştir. Bunun için öncelikle Laguerre düzleminin aksiyomatik yapısı verilmiş, daha sonra sırasıyla Laguerre düzleminin izotrop modeli, klasik reel Laguerre düzlemi, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzlem örneği ve bu düzlemin otomorfizmleri tanıtılmıştır.

Laguerre düzleminin genel yapısı incelendikten sonra, benzerlik dönüşümlerinin, düzlemin açıları koruyan birebir dönüşümleri olduğu gerçeğinden yola çıkarak $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin otomorfizmlerinin hangi durumlarda benzerlik dönüşümü olduğu araştırılmıştır. Bunun için öncelikle $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde iki çember arasındaki açı tanımlanmıştır. Daha sonra, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde çemberler arasın-

daki açıların, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nın otomorfizmleri altında korunup korunmadığı incelenmiş ve bu otomorfizmlerin hangi durumlarda benzerlik dönüşümü olduğu belirlenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma ile ilgili olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1: \mathcal{P} ve \mathcal{G} , elemanları sırasıyla *noktalar* ve *doğrular* olan herhangi iki küme olsun. $\mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ve $\circ \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ de *üzerinde bulunma (insidens) bağıntısı* olmak üzere $\mathbf{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \circ)$ sıralı üçlüsüne bir *üzerinde bulunma (insidens) yapısı* denir (Ramroth, 1991).

$(P, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ için $(P, g) \in \circ$ yerine $P \circ g$ de yazılabilir. \mathcal{P} ve \mathcal{G} kümeleri sonlu ise $\mathbf{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \circ)$ yapısına *sonlu üzerinde bulunma yapısı* denir.

Tanım 2.2: $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \circ)$ ve $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \circ')$ herhangi iki üzerinde bulunma yapısı (geometrik yapı) olsun.

Eğer $f : \mathcal{P} \cup \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}' \cup \mathcal{G}'$ fonksiyonu,

$$1) f(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}'$$

$$2) f(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}'$$

3) Her $P \in \mathcal{P}$, $g \in \mathcal{G}$ ve $P \circ g \Rightarrow f(P) \circ' f(g)$ (Yani, f üzerinde bulunmayı korur) koşullarını da sağlıyorsa f ye $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \circ)$ dan $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \circ')$ ye bir *homomorfizm* denir. Birebir ve örten özelliği bulunan homomorfizme *izomorfizm* denir. Bir üzerinde bulunma yapısını kendisine dönüştüren izomorfizme de *kolinasyon* veya *otomorfizm* denir (Kaya, 2005).

Tanım 2.3: \mathcal{N} ve \mathcal{D} , elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ özelliğine sahip iki küme, \circ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını gerçekleyen $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine *afin düzlem* denir (Kaya, 2005).

A1 : Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ noktaları için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A2 : $N \not\circ d$ olmak üzere her $N \in \mathcal{N}$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A3 : Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Bir afin düzlemde sonlu sayıda nokta ve buna bağlı olarak da sonlu sayıda doğru varsa afin düzleme *sonlu afin düzlem* denir.

Teorem 2.1: Her sonlu \mathbb{A} afin düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır (Bu tamsayıya \mathbb{A} nın *mertebesi* denir) (Kaya, 2005):

- (1) \mathbb{A} nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.
- (2) \mathbb{A} nın her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.
- (3) \mathbb{A} daki noktaların toplam sayısı n^2 dir.
- (4) \mathbb{A} daki doğruların toplam sayısı $n^2 + n$ dir.

Tanım 2.4: Bir açıyı daima mutlak değeri aynı olan bir diğer açıya dönüştüren dönüşümlere *benzerlik dönüşümleri* denir.

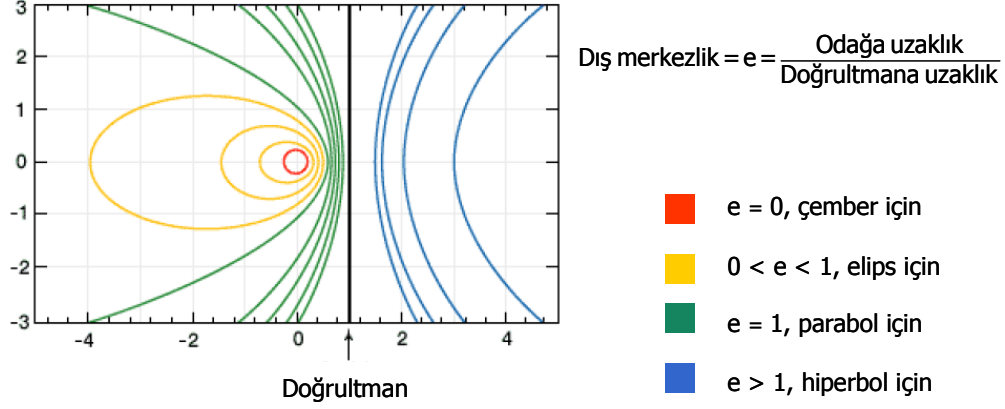
Benzerlik dönüşümleri, her bir şekli kendine benzer olan bir diğer şekle dönüştürürler. Bir başka deyişle, bir şeklin resmi aynı biçimdedir, fakat aynı büyüklükte olmak zorunda değildir, daha büyük veya küçüktür.

Benzerlik dönüşümleri, düzlemin açıları koruyan birebir dönüşümleridirler, daha açık bir ifade ile, benzerlik dönüşümleri, her açıyı kendi mutlak değerine eşit bir açıya ve köşesini de resmi olan açının köşesine ve kenarlarını da resim açının kenarlarına dönüştürür.

Benzerlik dönüşümleri üçgenleri benzer üçgenlere, daha genel olarak, n -kenarlı poligonları benzer n -kenarlı poligonlara dönüştürür. Bunun için her açı kendine eşit bir açıya dönüştür. Özel olarak diklik korunur.

Doğrulardan meydana gelmeyen şekiller olarak bir koniğin benzerlik dönüşümleri altındaki resmi, aynı dış merkezliğe sahip bir koniktir ve böylece aynı tip bir koniktir. O halde bir çemberin resmi de bir çemberdir (bakınız Şekil 2.1).

Çemberler ve paraboller dış merkezlikleri, sırası ile, 0 ve 1 olan birer koniktirler. Bu nedenle bütün çemberler birbirine benzerdir ve benzer şekilde bütün paraboller birbirine benzerdir (Hacısalıhoğlu, 1998).



Şekil 2.1. Koniklerin dış merkezliği

Tanım 2.4 de verilen benzerlik dönüşümü tanımı, iyi bilinen klasik bir tanımdır. Fakat, Bölüm 4.3 de, otomorfizmlerin benzerlik dönüşümleri olup olmadıkları incelenirken Tanım 4.3.1 ve Tanım 4.3.2 kullanılmaktadır.

Tanım 2.5: $\mathbf{R} \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve \cdot olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir (Çallıalp, 2001).

H1 : $(\mathbf{R}, +)$ bir değişmeli gruptur.

H2 : \cdot işleminin \mathbf{R} de birleşme özelliği vardır.

H3 : \cdot işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır.

$\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ için, $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$.

Halkanın $+$ işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfır elemanı* denir ve $0_{\mathbf{R}}$ ile gösterilir. Halkanın \cdot işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer \cdot işlemine göre etkisiz elemanı varsa böyle bir halkaya *birimli halka* denir ve bu etkisiz elemana da halkanın *birim elemanı* denir ve $1_{\mathbf{R}}$ ile gösterilir.

Halka, \cdot işlemine göre değişme özelliğine sahip ise halkaya *değişmeli halka* denir.

Tanım 2.6: $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka ve $\mathbf{R} - \{0_{\mathbf{R}}\} = \mathbf{R}^*$, ikinci işlem \cdot ya göre bir grup ise \mathbf{R} ye bir *cisim* denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.7: $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ birim elemanı 1 olan bir halka olsun. Toplanan 1 lerin sayısı n olmak üzere $1 + 1 + \dots + 1 = 0$ özelliğinde bazı n pozitif tamsayıları varsa bunların en küçüğüne *halkanın karakteristiği* denir. Böyle sonlu bir n sayısı yoksa halkanın karakteristiği *sıfır* olarak tanımlanır.

Bir *cismin karakteristiği* de halkanınki gibi tanımlanır. Bir cismin karakteristiği ya sıfırdır ya da bir asal sayıdır. Bütün sonlu cisimlerin karakteristikleri asaldır (Kaya, 2005).

Tanım 2.8: $(\mathbf{K}, +, \cdot)$, bir cisim ve f , \mathbf{K} yı kendi üzerine döndüren birebir ve örten bir dönüşüm iken,

$$i) \text{ Her } a, b \in \mathbf{K} \text{ için } f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$ii) \text{ Her } a, b \in \mathbf{K} \text{ için } f(ab) = f(a) f(b)$$

özellikleri sağlanıyor ise f ye *cisim otomorfizmi* denir (Freeman, 2008).

Tanım 2.9: \mathbf{K} , elemanları skaler olarak isimlendirilen bir cisim olsun. \mathbf{V} boş olmayan, üzerinde vektörel toplama diyeceğimiz bir toplama ve skalerle çarpım işlemleri tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in \mathbf{V} \text{ için } x + y \in \mathbf{V}$$

$$r \in \mathbf{K}, x \in \mathbf{V} \text{ için } rx \in \mathbf{V}$$

biçiminde tanımlı olsun; yani \mathbf{V} kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa \mathbf{V} kümesine \mathbf{K} *cismi üzerinde bir vektör uzayı* veya kısaca \mathbf{K} -*vektör uzayı* denir (Çetin ve Orhun, 1999).

$$\mathbf{V1}) \forall x, y \in \mathbf{V} \text{ için } x + y = y + x \text{ olmalıdır (Toplamanın değişme özelliği).}$$

$\mathbf{V2}) \forall x, y, z \in \mathbf{V} \text{ için } (x + y) + z = x + (y + z) \text{ olmalıdır (Toplamanın birleşme özelliği).}$

$\mathbf{V3}) \forall x \in \mathbf{V} \text{ için } x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x \text{ olacak şekilde bir } \mathbf{0} \in \mathbf{V} \text{ bulunmalıdır (Toplama işlemine göre etkisiz eleman özelliği).}$

$\mathbf{V4}) \forall x \in \mathbf{V} \text{ için } x + y = y + x = \mathbf{0} \text{ olacak şekilde bir } y \in \mathbf{V} \text{ bulunmalıdır (Toplama işlemine göre ters eleman özelliği).}$

$\mathbf{V5}) \forall x, y \in \mathbf{V}, \forall c \in \mathbf{K} \text{ için } c(x + y) = cx + cy \text{ olmalıdır (Skalerle çarpımın toplama üzerine dağılma özelliği).}$

V6) $\forall x \in \mathbf{V}, \forall c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ için $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$ olmalıdır.

V7) $\forall x \in \mathbf{V}, \forall c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ için $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$ olmalıdır.

V8) $\forall x \in \mathbf{V}$ için $1x = x$ olmalıdır ($\mathbf{1}, \mathbf{K}$ daki çarpmanın birim elemanı).

\mathbf{V} , bir \mathbf{K} -vektör uzayı ise \mathbf{V} nin elemanlarına *vektörler*, \mathbf{K} nin elemanlarına da *skalerler* denir.

Tanım 2.10: Bir \mathbf{K} cismi verilsin. \mathbf{V} ve \mathbf{W} , \mathbf{K} -vektör uzayları olmak üzere, \mathbf{V} den \mathbf{W} ye tanımlanan \mathbf{T} fonksiyonu, aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona *lineer dönüşüm* denir (Orhun, 1999).

$\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$

i) Her $x, y \in \mathbf{V}$ için $\mathbf{T}(x + y) = \mathbf{T}(x) + \mathbf{T}(y)$

ii) Her $x \in \mathbf{V}, c \in \mathbf{K}$ için $\mathbf{T}(cx) = c \mathbf{T}(x)$

Bir başka deyişle, $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ dönüşümü vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemlerini koruyorsa bu dönüşüme lineer dönüşüm denir.

Tanım 2.11: Bir \mathbf{K} cismi verilsin. θ , \mathbf{K} nin bir otomorfizmi, \mathbf{V} ve \mathbf{W} da \mathbf{K} -vektör uzayları olmak üzere \mathbf{V} den \mathbf{W} ye tanımlanan \mathbf{T} fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona *θ -yarı lineer dönüşüm* denir (Gruenberg and Weir, 1977).

$\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$

i) Her $x, y \in \mathbf{V}$ için $\mathbf{T}(x + y) = \mathbf{T}(x) + \mathbf{T}(y)$

ii) Her $x \in \mathbf{V}, c \in \mathbf{K}$ için $\mathbf{T}(cx) = c^\theta \mathbf{T}(x)$, (c^θ , c nin θ altındaki resmidir).

Tanım 2.12: \mathbf{E} boş olmayan bir küme ve Ω , \mathbf{E} kümesi üzerinde etki eden bir permütasyon kümesi olsun. $n \geq 2$ olmak üzere, ikişer ikişer farklı $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{E}$ ve ikişer ikişer farklı $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{E}$ sıralı n -lileri için $\delta(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ olacak şekilde bir $\delta \in \Omega$ varsa Ω kümesi *n -geçişkendir* denir.

Eğer $\delta(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ olacak şekilde bir tek $\delta \in \Omega$ varsa Ω kümesi *kesin n -geçişkendir* denir (Ramroth, 1991).

Eğer \mathbf{E} nin her x, y eleman ikilisi için $\delta(x) = y$ olacak şekilde bir $\delta \in \Omega$ varsa Ω kümesi *geçişken* denir ve δ bir tek ise *kesin geçişken* olarak isimlendirilir.

BÖLÜM 3

LAGUERRE DÜZLEMİ

Bu bölümde, Hartmann (2004) esas alınarak Laguerre düzlemlerinin genel yapısı incelenmiştir. Öncelikle, Laguerre düzleminin aksiyomatik yapısı verilmiştir. Daha sonra, sırasıyla Laguerre düzleminin izotrop modeli, klasik reel Laguerre düzlemi, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzlem örneği ve bu düzlemin otomorfizmleri tanıtılmıştır.

3.1. Laguerre Düzlemi

Tanım 3.1.1: $\mathfrak{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$, noktalar kümesi \mathcal{P} ve çemberler kümesi \mathcal{Z} olan bir üzerinde bulunma yapısı olsun. A ve B gibi iki nokta için, $A = B$ ise ya da A ve B yi üzerinde bulunduran çember yoksa A, B noktaları *paraleldir* ($A \parallel B$), denir. \mathfrak{L} , aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise *Laguerre düzlemi* olarak isimlendirilir (Hartmann, 2004):

L1) İkişer ikişer paralel olmayan her A, B, C nokta üçlüsü için A, B, C yi üzerinde bulunduran bir tek z çemberi vardır.

L2) Her P noktası ve her z çemberi için, $P \parallel P'$ olacak şekilde bir tek $P' \in z$ noktası vardır (Her çember, her üretici bir tek noktada keser).

L3) Her z çemberi, her $P \in z$ noktası ve P ye paralel olmayan her $Q \notin z$ noktası için, P, Q dan geçen ve $z \cap z' = \{P\}$ olacak şekilde bir tek z' çemberi vardır, yani “ z ve z' , P noktasında birbirine değeri”.

L4) Her çember üzerinde en az üç nokta vardır ve en az bir çember mevcuttur. Hepsi aynı bir çember üzerinde olmayan en az dört nokta vardır.

İkişer ikişer paralel olmayan üç nokta A, B, C ise bu noktaların belirttikleri çember (ABC) ile gösterilir ve noktalar *çemberdaştır* denir.

Bir $\mathfrak{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminin \mathcal{P} noktalar kümesi sonlu ise \mathfrak{L} ye *sonlu Laguerre düzlemi* denir.

\parallel bağıntısının tanımından ve L2 aksiyomundan şu yardımcı teorem elde edilir:

Yardımcı Teorem 3.1.1: \parallel bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır (Hartmann, 2004).

Tanım 3.1.2: $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$, bir Laguerre düzlemi olsun. $P \in \mathcal{P}$ noktası için, $\bar{P} := \{Q \in \mathcal{P} \mid P \parallel Q\}$ kümesi tanımlansın. Bir denklik sınıfı olan \bar{P} , *üreteç* olarak isimlendirilir (Hartmann, 2004).

Tanım 3.1.3: Bir $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzlemi ve $P \in \mathcal{P}$ noktası için,

$$\mathfrak{A}_P := (\mathcal{P} \setminus \{\bar{P}\}, \{z \setminus \{\bar{P}\} \mid P \in z \in \mathcal{Z}\} \cup \{\bar{Q} \mid Q \in \mathcal{P} \setminus \{\bar{P}\}\}, \in)$$

kümesi tanımlanır ve P noktasındaki *rezidu* olarak isimlendirilir (Hartmann, 2004).

Teorem 3.1.1: Bir Laguerre düzleminin her rezidusu bir afin düzlemdir (Hartmann, 2004).

İspat: Bir $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminin her $P \in \mathcal{P}$ noktası için tanımlanan,

$$\mathfrak{A}_P := (\mathcal{P} \setminus \{\bar{P}\}, \{z \setminus \{\bar{P}\} \mid P \in z \in \mathcal{Z}\} \cup \{\bar{Q} \mid Q \in \mathcal{P} \setminus \{\bar{P}\}\}, \in)$$

rezidusunun afin düzlem olduğunu göstermek için Tanım 2.3 de verilen aksiyomların bu sistemde sağlandığı gösterilmelidir.

A1 : \mathcal{L} den atılan P noktası ile atılmayan noktalardan iki tanesi \mathcal{L} Laguerre düzleminde bir tek çember belirtir. Bu çemberin bir tek oluşunu L1 aksiyomu garantilemektedir. P noktasının çıkarılmasıyla sözü edilen çemberin “bir tek” olma durumu değişmez. Dolayısıyla da geriye kalan iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır. (L1 \Rightarrow A1)

A2 : \mathcal{L} Laguerre düzleminde P noktasında birbirine teğet olan çemberleri düşünelim. P noktası atıldığında bunların hiç bir ortak noktası kalmaz. Bu, \mathfrak{A}_P rezidusunda iki doğrunun paralel olması anlamına gelir. L3 aksiyomu gereğince, P noktasından geçen bir z çemberine, P noktasında teğet olan ve $Q \not\parallel P$ özellikli bir Q noktasından geçen bir tek z' çemberi vardır. O halde \mathfrak{A}_P rezidusunda z doğrusunun dışındaki Q dan geçerek z doğrusuna paralel olan bir tek z' doğrusu vardır. (L3 \Rightarrow A2)

A3 : \mathcal{L} Laguerre düzleminde L4 aksiyomu gereğince, çemberdaş olmayan en az dört nokta vardır. Bunlardan biri atıldığında geriye doğruduş olmayan üç nokta kalır. (L4 \Rightarrow A3)

A1, A2, A3 aksiyomlarının sağlanması, \mathfrak{A}_P rezidusunun gerçekten bir afin düzlem olduğunu gösterir (Gökdal, 1982). ■

Sonlu Laguerre düzlemleri için, yani $|\mathcal{P}| < \infty$ olduğu durumda aşağıdaki tanım ve teoremler verilebilir:

Tanım 3.1.4: Bir sonlu $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzlemi ve bir $z \in \mathcal{Z}$ çemberi için, $n := |z| - 1$ tamsayısı \mathcal{L} nin *mertebesi* olarak isimlendirilir (Hartmann, 2004).

Teorem 3.1.2: $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$, n . mertebeden sonlu bir Laguerre düzlemi olsun. Her z_1, z_2 çember ikilisi ve her \bar{P} üreteci için, $|z_1| = |z_2| = |\bar{P}| + 1$ dir (Hartmann, 2004).

İspat: Tanım 3.1.3 den \mathfrak{A}_P rezidusunun doğrular kümesi,

$$\{z \setminus \{\bar{P}\} \mid P \in z \in \mathcal{Z}\} \cup \{\bar{Q} \mid Q \in \mathcal{P} \setminus \{\bar{P}\}\}$$

olarak tanımlanır ve burada her bir $z \in \mathcal{Z}$ çemberinden üzerinde bulunan bir tek noktanın atıldığı görülmektedir.

Teorem 3.1.1 den \mathfrak{A}_P rezidusu bir afin düzlem olduğuna göre, doğrular üzerindeki nokta sayıları eşittir. Buna göre, $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$ çemberleri için,

$$|z_1| - 1 = |z_2| - 1 = |\bar{P}| \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |\bar{P}| + 1$$

dir. ■

Yardımcı Teorem 3.1.2: $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$, n . mertebeden bir Laguerre düzlemi olsun. O zaman \mathcal{L} Laguerre düzlemi için,

- a) Her \mathfrak{A}_P rezidusu, n . mertebeden bir afin düzlemdir.
- b) $|\mathcal{P}| = n^2 + n$ dir.
- c) $n + 1$ tane üreteç vardır.
- d) Bir noktadan geçen çember sayısı n^2 dir.

e) $|\mathcal{Z}| = n^3$ tür.

(Hartmann, 2004).

İspat: a) Tanım 3.1.4 ve Teorem 3.1.2 den, n . mertebeden bir \mathfrak{L} Laguerre düzleminde her $z \in \mathcal{Z}$ çemberi ve her $P \in \mathcal{P}$ noktası için, $|z| = n + 1$ ve $|\overline{P}| = |z| - 1 = n$ dir. \mathfrak{A}_P rezidusunun tanımı gereği, her $z \in \mathcal{Z}$ den \overline{P} üretici üzerinde bulunan bir nokta atıldığında, \mathfrak{A}_P rezidusunun her $z \setminus \{\overline{P}\}$ doğrusu üzerinde n tane nokta kalır ve her bir üretçi üzerinde de n tane nokta bulunur. Teorem 3.1.1 den, \mathfrak{A}_P rezidusu bir afin düzlem olduğundan mertebesi n dir.

b) \mathfrak{L} Laguerre düzleminin bir $P \in \mathcal{P}$ noktasındaki \mathfrak{A}_P rezidusunun noktalar kümesi $\mathcal{P} \setminus \{\overline{P}\}$ dir ve $|\overline{P}| = n$ dir. İspat a) ya göre, \mathfrak{A}_P rezidusu n . mertebeden bir afin düzlem olduğundan, Teorem 2.1 (3) gereğince \mathfrak{A}_P rezidusundaki toplam nokta sayısı n^2 dir. Buradan, $|\mathcal{P}| = n^2 + n$ olduğu sonucu elde edilir.

c) n . mertebeden bir \mathfrak{L} Laguerre düzleminde her $z \in \mathcal{Z}$ çemberi için, $|z| = n + 1$ dir. L2 aksiyomu gereğince, her çember her üretçi bir tek noktada kestiğinden her $z \in \mathcal{Z}$ çemberi tam olarak $n + 1$ tane üretçi keser. Böylece, \mathfrak{L} Laguerre düzleminde $n + 1$ tane üretçi vardır.

d) \mathfrak{L} Laguerre düzleminin bir $P \in \mathcal{P}$ noktasındaki \mathfrak{A}_P rezidusunun üretçi olmayan doğruları, \mathfrak{L} Laguerre düzleminin P noktasından geçen çemberleridir. Teorem 2.1 (4) gereğince, n . mertebeden bir afin düzlemin toplam doğru sayısının $n^2 + n$ olduğu biliniyor. n tanesi üretçi (\overline{P} hariç) olan bu doğruların geriye kalanlarının sayısı n^2 dir. Bu durumda, \mathfrak{L} Laguerre düzleminde bir noktadan geçen çember sayısı n^2 dir.

e) \mathfrak{L} Laguerre düzleminde,

$$(\text{Toplam çember sayısı}) = \frac{(\text{Toplam nokta sayısı}) \cdot (\text{Bir noktadan geçen çember sayısı})}{\text{Her çember üzerindeki nokta sayısı}}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$|\mathcal{Z}| = \frac{(n^2 + n) \cdot n^2}{n + 1} = n^3$$

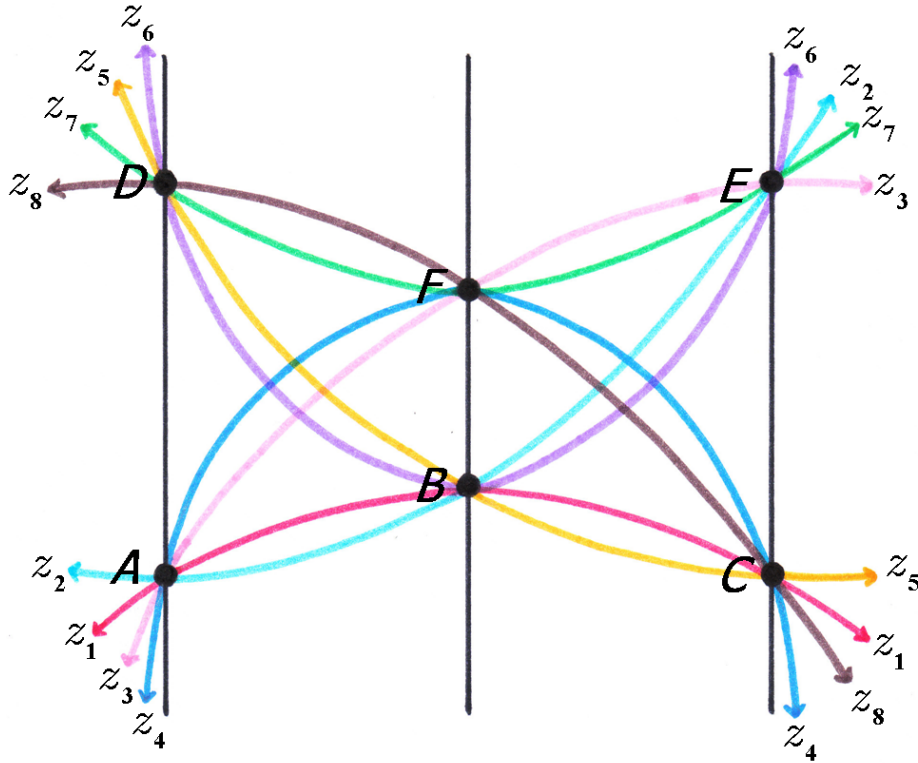
tür. ■

Bu bilgilerden yararlanarak, Laguerre düzleminin en küçük modeli olan 2. mertebeden Laguerre düzlemi aşağıdaki gibi verilebilir (Gökdal, 1982):

$$\mathcal{P} := \{A, B, C, D, E, F : A \parallel D, B \parallel F, C \parallel E\}$$

$$\mathcal{Z} := \{z_1 = (ABC), z_2 = (ABE), z_3 = (AFE), z_4 = (AFC), z_5 = (DBC), z_6 = (DBE), z_7 = (DFE), z_8 = (DFC)\}$$

olmak üzere $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ yapısı, 2. mertebeden Laguerre düzlemidir. Burada, $|\mathcal{P}| = 6$ ve $|\mathcal{Z}| = 8$ olduğu görülür (bakınız Şekil 3.1).



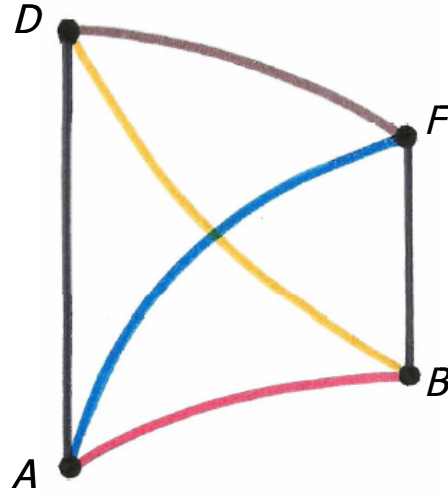
Şekil 3.1. 2. mertebeden Laguerre düzlemi

2. mertebeden Laguerre düzleminin C noktasındaki rezidusu \mathfrak{A}_C , aşağıdaki gibi verilebilir (Gökdal, 1982):

$$\mathcal{P} := \{A, B, D, F\}$$

$$\mathcal{D} := \{AB, AF, AD, BF, BD, DF\}$$

olmak üzere $\mathfrak{A}_C = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \epsilon)$ yapısı, C noktasındaki rezidudur. Burada, $|\mathcal{P}| = 4$ ve $|\mathcal{D}| = 6$ olduğu görülür (bakınız Şekil 3.2).



Şekil 3.2. \mathfrak{A}_C , C noktasındaki rezidu

3.2. Laguerre Düzleminin İzotrop Modeli (Parabolik Model)

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (3.2.1)$$

biçiminde bir \mathcal{S} silindiri tanımlansın. \mathcal{S} silindirinden her $z \in \mathbb{R}$ için $(0, 1, z)$ biçimindeki noktaların bulunduğu g doğrusu çıkarıldıktan sonra geriye kalan noktalar için aşağıdaki fonksiyon tanımlansın.

xyz -kartezyen koordinat sistemine göre $y = 0$ düzlemi \mathbf{E} ile gösterilsin. Silindirin g dışındaki noktalarının kümesi $\mathcal{S} \setminus g$ dir.

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{S} \setminus g \rightarrow \mathbf{E} \\ f &: (x, y, z) \rightarrow (x(1-y)^{-1}, z(1-y)^{-1}) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

olsun.

Bu fonksiyon $(0, 1, 0)$ merkezli stereografik izdüşümdür. Üç boyutlu öklidyen uzayda seçtiğimiz xyz -kartezyen koordinat sisteminin başlangıç noktası, \mathbf{E} düzleminde seçeceğimiz uv -kartezyen koordinat sisteminin başlangıç noktası olmak üzere,

$$u = x(1-y)^{-1}, \quad v = z(1-y)^{-1} \quad (3.2.3)$$

olsun. (u, v) koordinatlı noktaların herbirine \mathbf{E} nin bir *izotrop noktası* denir.

(3.2.2) fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır:

$$f^{-1} : (u, v) \rightarrow \left(2u(u^2 + 1)^{-1}, (u^2 - 1)(u^2 + 1)^{-1}, 2v(u^2 + 1)^{-1} \right)$$

dir.

Burada silindirin, $ax + by + cz + d = 0$ düzlemiyle arakesiti belirlenirken dikkat edilmesi gereken husus, düzlemin silindirin eksenine paralel olmaması gerektiridir, bu nedenle $c \neq 0$ olması gerekir.

Silindirin, $ax + by + cz + d = 0$ düzlemiyle arakesitinin f altındaki görüntüsü:

$$a \left(2u(u^2 + 1)^{-1} \right) + b \left((u^2 - 1)(u^2 + 1)^{-1} \right) + c \left(2v(u^2 + 1)^{-1} \right) + d = 0$$

dır. Böylece görüntünün denklemi;

$$v = \left(-(b + d)(2c)^{-1} \right) u^2 + \left(-ac^{-1} \right) u + (b - d)(2c)^{-1}$$

olarak elde edilir.

(3.2.2) ile veilen f fonksiyonunun, g doğrusunun noktalarını da görüntüleyecek biçimde genişletilmesi mümkündür. Şöyle ki,

$$ax + by + cz + d = 0, \quad c \neq 0$$

düzlemiyle g doğrusunun arakesiti olan

$$(0, 1, - (b + d) c^{-1})$$

noktasını,

$$p = - (b + d) (2c)^{-1}$$

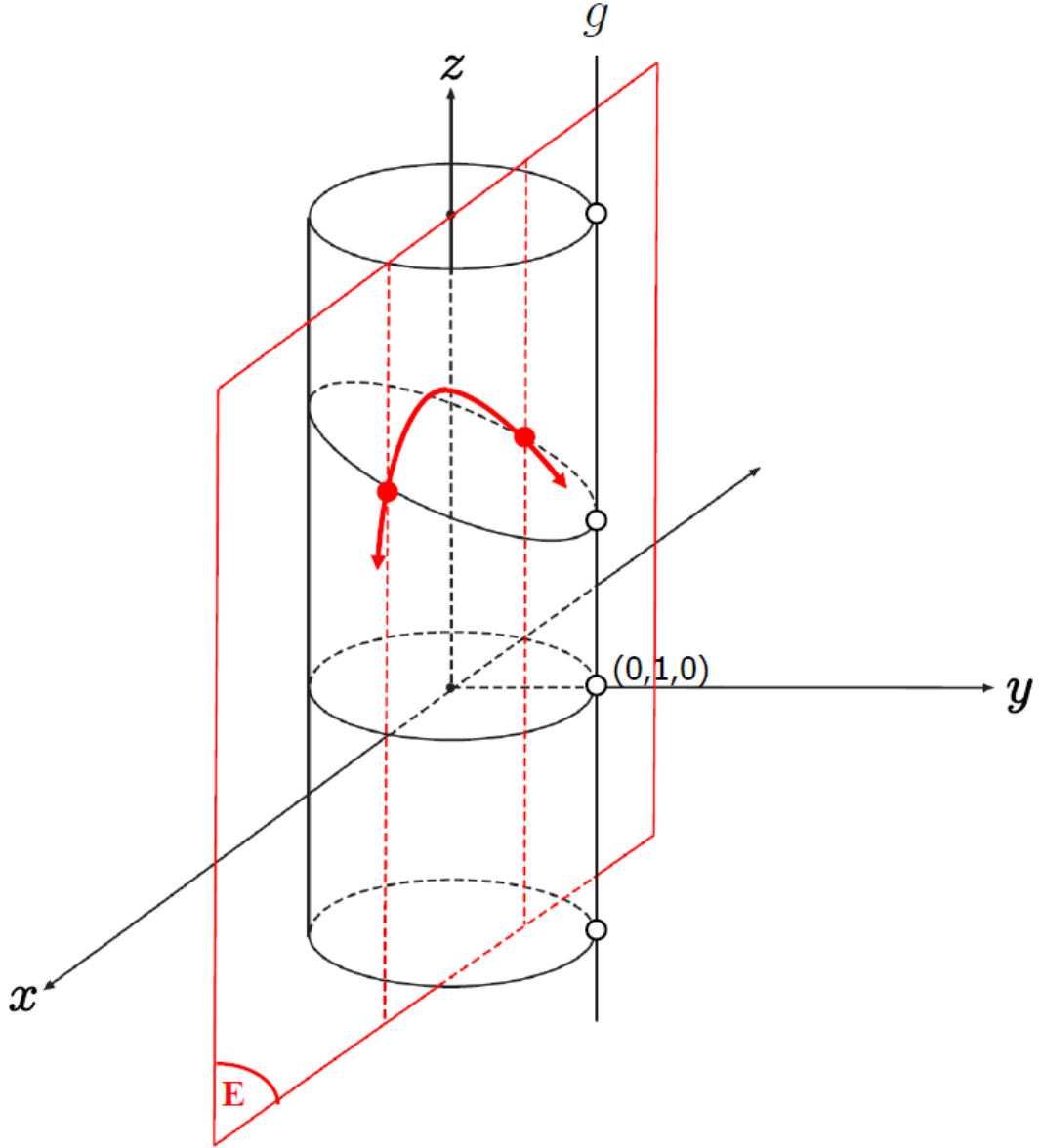
olmak üzere, (∞, p) *ideal izotrop nokta* diyeceğimiz noktaya eşlersek, bir düzlemsel kesitin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün ifadesi

$$\{(u, v) \mid v = pu^2 + qu + r\} \cup \{(\infty, p)\} \quad (3.2.4)$$

olur. (3.2.4) cümlesine *izotrop çember* denir.

\mathcal{S} silindirinin aynı üretici üzerinde bulunmayan üç noktası bir tek düzlemsel kesit belirtir. Buna karşılık \mathbf{E} düzlemindeki görüntüleri bir tek izotrop çember belirtir (bakınız Şekil 3.3).

Silindirin aynı üretici üzerindeki noktalar, f fonksiyonu yardımıyla \mathbf{E} düzleminde v -eksenine paralel bir doğru üzerindeki noktalara dönüştürler. Bu nedenle bu dönüşümde noktaların paralellığı korunur. Tüm ideal izotrop noktalar da birbirine paraleldir. Paralellik bağıntısı, \mathbf{E} düzleminin nokta cümlesi üzerinde de bir denklik bağıntısıdır (Gökdal, 1982).



Şekil 3.3. Laguerre düzleminin izotrop modeli (Parabolik model)

3.3. Klasik Reel Laguerre Düzlemi

Aslında klasik Laguerre düzlemi, reel öklidyen düzlemde yönlü doğru ve çemberlerin geometrisi olarak tanımlanmıştır (Benz, 1973). Burada ise, reel düzlemde

yukarıda elde edildiği şekliyle, Laguerre düzlemi parabollerin geometrisi olarak düşünül-
müştü ve parabol modeli incelenmiştir.

Böylece,

$$\mathcal{P} := (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbb{R}), \infty \notin \mathbb{R} \text{ kümesi noktalar kümesi,}$$

$\mathcal{Z} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesi çemberler
kümesi,

$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$ üzerinde bulunma bağıntısı,

olmak üzere $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ üzerinde bulunma yapısı, *klasik reel Laguerre düzlemi*
olarak isimlendirilir (Hartmann, 2004).

Klasik reel Laguerre düzleminde, (a_1, a_2) , (b_1, b_2) noktalarının paralel olması için
gerek ve yeter koşul $a_1 = b_1$ olmasıdır. Burada, \parallel bağıntısının (paralellik bağıntısı)
bir denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Şimdi klasik reel Laguerre düzleminin, Laguerre düzlem aksiyomlarını sağladığı
gösterilmektedir (Gökdal, 1982).

L1) İkişer ikişer paralel olmayan üç noktayı üzerinde bulduran bir tek çember
vardır.

İspat:

1. Durum: Verilen üç nokta (x_i, y_i) , $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ biçiminde
olsun. Bu noktaların üzerinde buldukları çemberi,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\} \quad (3.3.1)$$

ile gösterelim.

Verilen noktaların herbiri (3.3.1) denklemini sağlayacağından,

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.2)$$

denklem sistemi hemen yazılır.

Bu denklem sisteminin katsayılar determinanı,

$$D = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

olup, x_1, x_2, x_3 ün seçiliş biçiminden dolayı sıfırdan farklıdır.

i . satırı $(x_i, y_i, 1)$ olan determinantı, $\det(x_i, y_i, 1)$ ile gösterirsek:

$$\begin{aligned} a &= D^{-1} \det(y_i, x_i, 1) \\ b &= D^{-1} \det(x_i^2, y_i, 1) \\ c &= D^{-1} \det(x_i^2, x_i, y_i) \end{aligned}$$

bulunur. a, b, c birer tek olduklarından verilen üç noktayı üzerinde bulunduran çember tektir.

2. Durum: Verilen noktalardan biri (∞, a) ideal izotrop nokta, diğer ikisi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$ olsun.

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c, \quad i = 1, 2$$

denklemlerinden,

$$d = x_1 - x_2 \quad (\neq 0)$$

kabul edilerek,

$$\begin{aligned} b &= d^{-1} \det(y_i - ax_i^2, 1) \\ c &= d^{-1} \det(x_i, y_i - ax_i^2) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu durumda da a, b, c birer tek olarak bulduklarından verilen üç noktayı üzerinde bulunduran çember tektir. ■

L2) Her z çemberi ve bu çemberin dışındaki her P noktası için, çemberin üzerinde bulunan ve P noktasına paralel olan bir tek Q noktası vardır.

İspat: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\}$ çemberi üzerinde bulunmayan $P = (x_1, y_1)$ noktası için,

$$y_1 \neq ax_1^2 + bx_1 + c$$

dir. En az bir y_2 için,

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_2 \quad \text{ve} \quad y_1 \neq y_2$$

dir. Noktaların paralel olması bunlara karşılık tutulan ikililerin birinci bileşenlerinin aynı olması demek olduğundan,

$$(x_1, y_1) \parallel (x_1, y_2)$$

elde edilir.

Eğer $P = (\infty, p)$ ise, $(\infty, p) \neq (\infty, a)$ için, $(\infty, p) \parallel (\infty, a)$ dır.

Demek ki P noktasının tipi ne olursa olsun, istenen özellikte bir tek Q noktası bulunabiliyor. ■

L3) $P = (x_1, y_1)$ noktasından geçen z çemberine, $P \nparallel Q$ özellikli $Q = (x_2, y_2)$ noktasından geçerek P noktasında teğet olan birtek z' çemberi vardır. $z \cap z' = \{P\}$ dir.

İspat:

$$z; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\}$$

ve

$$z'; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = Ax^2 + Bx + C\} \cup \{(\infty, A)\}$$

olsun.

1. Durum: Ortak izotrop noktaların varlığı,

$$g(x) = (A - a)x^2 + (B - b)x + (C - c) = 0 \quad (3.3.3)$$

denkleminin çözümlerine bağlıdır.

Ortak noktanın sadece $P = (x_1, y_1)$ olması istendiğinden, z ve z' çemberlerinin ideal izotrop noktaları farklı olmalıdır ($(\infty, a) \neq (\infty, A)$). Bu durumda,

$$A \neq a$$

dir. P ve Q noktaları z' çemberinin noktaları olacaklarından,

$$y_i = Ax_i^2 + Bx_i + C, \quad i = 1, 2$$

dir. Bu denklemlerden,

$$B = (x_1 - x_2)^{-1} ((y_1 - y_2) - A(x_1^2 - x_2^2))$$

$$C = (x_1 - x_2)^{-1} (x_1 y_2 - x_2 y_1) + Ax_1 x_2$$

bulunur.

$x_1 \neq 0$ ise $C - c \neq 0$ dir. Bu durumda (3.3.3) denkleminin biri x_1 olan sıfırdan farklı iki kökü vardır. Bu denklemin çakışık iki kökünün olabilmesi için,

$$g'(x_1) = 2(A - a)x_1 + (B - b) = 0$$

ve dolayısıyla da,

$$A = (x_1 - x_2)^{-2}((b + 2ax_1)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2))$$

olmalıdır.

Eğer $x_1 = 0$ ise (3.3.3) denkleminde,

$$C = c = y_1$$

elde edilir. Üstelik, (3.3.3) denkleminin sıfırdan farklı reel kökünün olmaması için,

$$B = b$$

olması gerekir ve yeter. Bu durum,

$$A = (y_2 - y_1 - bx_2)x_2^{-2}$$

olmasını gerektirir.

2. Durum: $P = (x_1, y_1)$, $Q = (\infty, A)$ iken,

$$A \neq a$$

ve

$$C = y_1 - Ax_1^2 - Bx_1$$

olur.

$x_1 \neq 0$ için $g'(x_1) = 0$ ise (3.3.3) denkleminin kökleri çakışır ve,

$$B = b - 2(A - a)x_1$$

bulunur.

$x_1 = 0$ iken (3.3.3) denkleminin sıfırdan farklı çözümlerinin bulunmaması,

$$B = b$$

sonucunu doğurur.

3. Durum: $P = (\infty, a)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ iken,

$$A = a$$

$$B = b$$

$$C = y_2 - ax_2^2 - bx_2$$

bulunur.

Böylece, uygun her durum için A, B, C birer tek olarak elde edilmiş oldu. Yani, z' çemberi belirtilmiş oldu. ■

L4) Her $P \in \mathcal{P}$ için, $Q \neq P \neq R$, $P \parallel Q$ ve $P \nparallel R$ özelliğinde $Q, R \in \mathcal{P}$ vardır. Her çember üzerinde en az üç farklı nokta vardır.

İspat: Seçilen çemberlerin ve noktaların istenenleri sağladıkları kolayca görülür.

3.4. $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre Düzlemi

3.4.1. $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzlemi

Bir Laguerre düzleminin klasik modelinin biçimsel genelleştirilmesi ile, yani \mathbb{R} yerine keyfi bir cisim alınmasıyla, her bir durumda bir Laguerre düzlemi örneği elde edilir.

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \quad \infty \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a) \mid a, b, c \in \mathbf{K}\},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere $\mathfrak{L}(\mathbf{K}) := (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ üzerinde bulunma yapısı, bir Laguerre düzlemidir (Hartmann, 2004).

$\mathfrak{L}(\mathbf{K}) := (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminin, Laguerre düzlem aksiyomlarını sağladığının ispatı, klasik reel Laguerre düzlemine benzer şekilde yapılabilir.

3.4.2. $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin otomorfizmleri

Tanım 3.4.2.1: \mathfrak{L} Laguerre düzleminde çemberdaş noktaları çemberdaş noktalara dönuştüren, birebir ve örten fonksiyonlara bu düzlemin *otomorfizmleri* denir.

f , \mathfrak{L} Laguerre düzleminin bir otomorfizmi ise, A, B, C noktalarından geçen (ABC) çemberi, $f(A), f(B), f(C)$ noktalarından geçen $(f(A)f(B)f(C))$ çemberine dönuştür (Soytürk, 1989).

Yardımcı Teorem 3.4.2.1: Aşağıda verilen, \mathcal{P} nin kendi üzerine olan dönuştürmeleri $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin otomorfizmleridir. (Hartmann, 2004).

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (sx, ty), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, \frac{t}{s^2}a) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 0 \neq s, t \in \mathbf{K} \end{array}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x + s, y + t), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \\ \\ s, t \in \mathbf{K} \end{array}$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \\ \\ s \in \mathbf{K} \end{array}$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx^2), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a + s) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \\ \\ s \in \mathbf{K} \end{array}$$

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}), \quad x \neq 0, \infty \\ (0, y) \rightarrow (\infty, y) \\ (\infty, a) \rightarrow (0, a) \end{array} \right\}$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (\alpha(x), \alpha(y)), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, \alpha(a)) \end{array} \right\} \quad \alpha : \mathbf{K} \text{ nin otomorfizmi}$$

Yardımcı Teorem 3.4.2.1 den şu yardımcı teorem elde edilir:

Yardımcı Teorem 3.4.2.2: $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin otomorfizm grubu,

a) İkişer ikişer paralel olmayan nokta üçlülerinin kümesi,

b) Çemberlerin kümesi,

üzerinde geçişken olarak etki eder.

Dolayısıyla, otomorfizm grubu yukarıda belirtilen nokta kümeleri üzerinde geçişken olarak etki eder. Böylece, Teorem 3.1.1 in kullanılmasıyla $\mathfrak{A}(\infty, 0)$ rezidusunun bir afin düzlem olduğunun aşikar olarak doğru olduğu görülebilir (Hartmann, 2004).

Not 3.4.2.1: Yardımcı Teorem 3.4.2.1 deki (1), (2), (3) ve (6) otomorfizmleri, $\mathfrak{A}(\infty, 0)$ rezidusunun üreteçlerin kümesini sabit bırakan kolinasyonlarını (dilatasyonlar ve yarılineseer dönüşümler) oluşturur. (5) otomorfizmi, $\mathfrak{A}(1, 0)$ rezidusunda eğer Karakteristik $\mathbf{K} \neq 2$ ise, $x = -1$ doğrusunda bir yansımayı ve Karakteristik $\mathbf{K} = 2$ ise, bir ötelemeyi oluşturur (Hartmann, 2004).

Teorem 3.4.2.1: Yardımcı Teorem 3.4.2.1 in otomorfizmleri, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin tüm otomorfizm grubunu oluşturur (Hartmann, 2004).

İspat: Ψ , $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin keyfi bir otomorfizmi olsun. Yardımcı Teorem 3.4.2.2 gereğince, Yardımcı Teorem 3.4.2.1 deki (1) – (6) otomorfizmleri ile üretilen bir μ otomorfizmi mevcuttur öyle ki, $\mu\Psi$, $(\infty, 0)$ noktasını sabit bırakır. $\mu\Psi$, $\mathfrak{A}(\infty, 0)$ içinde, y -ekseninin sonsuzdaki noktasını sabit bırakan bir kolinasyon oluşturur. Böylece, $\mu\Psi$ otomorfizmi \mathbf{K}^2 üzerinde, $s, t, u, v, w \in \mathbf{K}$ olmak üzere $(x, y) \rightarrow (s + u\alpha(x), t + v\alpha(x) + w\alpha(y))$ formuna sahiptir ve α , \mathbf{K} cisminin bir otomorfizmidir. Yardımcı Teorem 3.4.2.1 in kullanılmasıyla, $\delta\mu\Psi$ birim dönüşüm olacak şekilde bir δ otomorfizmi bulunabilir. Böylece Ψ , (1) – (6) otomorfizmleri tarafından üretilen grup tarafından içerilir. ■

3.4.3. $\mathfrak{A}(\mathbf{K})$ da açuların parabolik ölçümü

Tanım 3.4.3.1: $(\mathbf{K}, +, \cdot)$, bir aykırı cisim (değişimli olması gerekmeyen cisim, bölümlü halka),

$$\mathcal{P} = \mathbf{K}^2$$

ve

$$\mathcal{G} = \{ \{ (x, y) \in \mathcal{P} \mid y = mx + b \} \mid m, b \in \mathbf{K} \} \cup \{ \{ (x, y) \in \mathcal{P} \mid x = c \} \mid c \in \mathbf{K} \}$$

olsun. $\mathfrak{A}(\mathbf{K}) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ üzerinde bulunma yapısı, bir afin düzlemdir.

Denklemleri $y = mx + c$ olan doğrular arasındaki açılar için uygun bir ölçüm aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Hartmann, 2004).

Tanım 3.4.3.2: $\mathfrak{A}(\mathbf{K})$ afin düzleminin,

$$g_1 : y = m_1x + c_1, \quad g_2 : y = m_2x + c_2$$

gibi iki doğrusu için, $[g_1, g_2]$ sıralı ikilisi *açı* olarak isimlendirilir ve

$$\angle(g_1, g_2) = m_1 - m_2$$

de $[g_1, g_2]$ *açısının ölçüsü* olarak isimlendirilir (Hartmann, 2004).

Tanım 3.4.3.3: Paralel olmayan ve $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ yani $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$ biçiminde verilen herhangi üç nokta için,

$$\angle(P_1, P_2, P_3) := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

eşitliği oluşturulur. Bu tanımla, parabol için giriş açısı teoremi ispatlanabilir (Hartmann, 2004).

Teorem 3.4.3.1 (Bir parabol üzerinde 4 nokta): İkişer ikişer paralel olmayan ve $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ şeklinde verilen dört noktanın $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ parabolü üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul,

$$\angle(P_1, P_3, P_2) = \angle(P_1, P_4, P_2)$$

olmasıdır (Hartmann, 2004).

İspat:

1) Eğer P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları, bir $y = ax^2 + bx + c$ parabolü üzerinde iseler o zaman,

$$\begin{aligned}\angle(P_1, P_3, P_2) &= \frac{a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2)}{x_3 - x_2} \\ &= a(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

dir ve benzer şekilde $\angle(P_1, P_4, P_2) = a(x_1 - x_2)$ dir.

Bundan dolayı, $\angle(P_1, P_3, P_2) = \angle(P_1, P_4, P_2)$ olur.

2) İkişer ikişer paralel olmayan ve P_1, P_2, P_3 ve $P = (x, y)$ biçiminde verilen dört nokta için $\angle(P_1, P_3, P_2) = \angle(P_1, P, P_2)$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_1}{x - x_1} - \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

dir ki, bu üç noktası belli bir parabolün denklemini verir ve uygun a, b, c değerleri için $y = ax^2 + bx + c$ denklemine denktir. ■

BÖLÜM 4

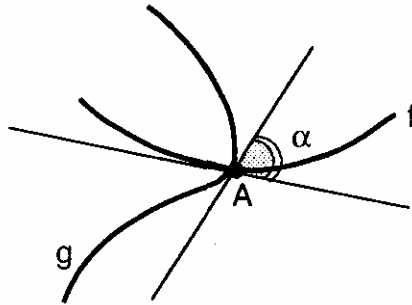
$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ LAGUERRE DÜZLEMİNİN OTOMORFİZMLERİNİN HANGİ DURUMLARDA BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ OLDUĞUNUN BELİRLENMESİ

Bu bölümde benzerlik dönüşümlerinin, düzlemin açıları koruyan birebir dönüşümleri olduğu gerçeğinden yola çıkarak $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin otomorfizmlerinin hangi durumlarda benzerlik dönüşümü olduğu araştırılmıştır. Bunun için öncelikle $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde iki çember arasındaki açı tanımlanmıştır. Daha sonra, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde çemberler arasındaki açıların $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin otomorfizmleri altında korunup korunmadığı incelenmiş ve bu otomorfizmlerin hangi durumlarda benzerlik dönüşümü olduğu belirlenmiştir.

4.1. İki Eğri Arasındaki Açı

İki eğrinin kesim noktasındaki teğetleri arasındaki açığa, bu noktadaki *eğriler arasındaki açı* denir (bakınız Şekil 4.1).

Eğriler birkaç noktada kesişiyorsa eğriler arasındaki açı, her kesim noktasında farklı olabilir. Eğer eğriler arasındaki açı her kesim noktasında α ise bu eğriler α açısı altında kesişiyorlar, denir (Derman vd., 2002).



Şekil 4.1. İki eğri arasındaki açı

4.2. $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre Düzleminde İki Çember Arasındaki Aç

z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı ölçümü, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen ve denklemleri sırasıyla,

$$t_1 : y = m_1x + c_1 \quad \text{ve} \quad t_2 : y = m_2x + c_2$$

olan teğetleri arasındaki açı ölçümüne eşit olur. Dolayısıyla $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ da açılarm parabolik ölçümü tanımından,

$$\angle(z_1, z_2) = \angle(t_1, t_2) = m_1 - m_2$$

yazılabilir.

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin iki çemberi;

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

olsun.

z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen teğetleri arasındaki açıdır. Bu açıyı bulmak için iki ayrı durum incelenmelidir.

1. Durum: $a_1 = a_2$ olsun.

$y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ve $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ denklemlerinin ortak çözümünden,

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$(b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$$

denklemini elde edilir.

i) $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise, z_1 ve z_2 çemberleri çakışiktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1, z_2) = 0$ dır. Yani,

$$a_1 = a_2 \text{ iken, } b_1 = b_2 \text{ ve } c_1 = c_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = 0 \text{ dır.} \quad (4.2.1)$$

ii) $b_1 = b_2$ ve $c_1 \neq c_2$ ise, z_1 ve z_2 çemberleri sadece (∞, a_1) noktasında kesişirler. z_1 ve z_2 çemberlerinin (∞, a_1) noktasındaki teğetleri çakışık ve sonsuzdaki doğru olduğundan z_1 ve z_2 arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = 0$ dir. Yani,

$$a_1 = a_2 \text{ iken, } b_1 = b_2 \text{ ve } c_1 \neq c_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = 0 \text{ dir.} \quad (4.2.2)$$

iii) $b_1 \neq b_2$ ise, z_1 ve z_2 çemberleri biri (∞, a_1) olmak üzere iki noktada kesişirler.

(ii) den dolayı, (∞, a_1) noktasında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = 0$ dir. Yani,

$$a_1 = a_2 \text{ iken, } b_1 \neq b_2 \Rightarrow (\infty, a_1) \text{ kesişim noktasında } \angle(z_1, z_2) = 0 \text{ dir.} \quad (4.2.3)$$

Diğer kesişim noktasının apsisi de, yukarıda verilen ortak çözümün denkleminde

$$x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}, \quad (b_1 - b_2 \neq 0)$$

olarak bulunur. Bu kesişim noktasında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı, z_1 ve z_2 ye bu noktada çizilen teğetler arasındaki açıdır. Teğetler arasındaki açıyı bulmak için, teğetlerin eğimlerini bulmamız yeterlidir.

z_1 çemberine $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasında çizilen t_1 teğetinin eğimi,

$$y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$$

$$y' = 2a_1 x + b_1$$

$$m_1 = 2a_1 \left(\frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2} \right) + b_1$$

$$m_1 = \frac{2a_1 c_2 - 2a_1 c_1 + b_1^2 - b_1 b_2}{b_1 - b_2}$$

dir.

z_2 çemberine $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasında çizilen t_2 teğetinin eğimi,

$$y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$y = a_1x^2 + b_2x + c_2$$

$$y' = 2a_1x + b_2$$

$$m_2 = 2a_1 \left(\frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2} \right) + b_2$$

$$m_2 = \frac{2a_1c_2 - 2a_1c_1 - b_2^2 + b_1b_2}{b_1 - b_2}$$

dir.

Böylece t_1 ve t_2 teğetleri arasındaki açı,

$$\begin{aligned} \angle(t_1, t_2) &= m_1 - m_2 \\ &= \frac{2a_1c_2 - 2a_1c_1 + b_1^2 - b_1b_2}{b_1 - b_2} - \frac{2a_1c_2 - 2a_1c_1 - b_2^2 + b_1b_2}{b_1 - b_2} \\ &= b_1 - b_2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yani, $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ absisli kesişim noktasında, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki

açı, $\angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2$ dir. Sonuç olarak,

$$a_1 = a_2 \text{ iken, } b_1 \neq b_2 \Rightarrow x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2} \text{ absisli kesişim noktasında}$$

$$\angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2 \text{ dir.} \quad (4.2.4)$$

2. Durum: $a_1 \neq a_2$ olsun.

$y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ve $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ denklemlerinin ortak çözümünden,

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$$

denklemini elde edilir.

$$\Delta = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$$

olmak üzere üç ayrı durum incelenmelidir.

i) $\Delta > 0$ ise, z_1 ve z_2 çemberleri iki noktada kesişirler. Bu kesişim noktalarının apsisi,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}, \quad (a_1 - a_2 \neq 0)$$

dir. Bu kesişim noktalarında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı, z_1 ve z_2 ye bu noktalarda çizilen teğetler arasındaki açıdır. Teğetler arasındaki açıyı bulmak için, teğetlerin eğimlerini bulmamız yeterlidir.

z_1 çemberine $x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında çizilen t_1 teğetinin eğimi,

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$y' = 2a_1x + b_1$$

$$m_1 = 2a_1 \left(\frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \right) + b_1$$

$$m_1 = \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 2a_1\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

dir.

z_2 çemberine $x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında çizilen t_2 teğetinin eğimi,

$$y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$y' = 2a_2x + b_2$$

$$m_2 = 2a_2 \left(\frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \right) + b_2$$

$$m_2 = \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 2a_2\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

dir.

Böylece t_1 ve t_2 teğetleri arasındaki açı,

$$\begin{aligned}\angle(t_1, t_2) &= m_1 - m_2 \\ &= \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 2a_1\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} - \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 2a_2\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \\ &= \sqrt{\Delta}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yani, $x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında, z_1 ve z_2 çemberleri

arasındaki açı, $\angle(z_1, z_2) = \sqrt{\Delta}$ dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}a_1 \neq a_2 \text{ iken, } \Delta > 0 \Rightarrow x_1 &= \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \text{ apsisli kesişim noktasında,} \\ \angle(z_1, z_2) &= \sqrt{\Delta} \text{ dir.} \tag{4.2.5}\end{aligned}$$

z_1 çemberine $x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında çizilen t_1 teğetinin eğimi,

$$\begin{aligned}y &= a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ y' &= 2a_1x + b_1 \\ m_1 &= 2a_1 \left(\frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \right) + b_1 \\ m_1 &= \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 - 2a_1\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}\end{aligned}$$

dir.

z_2 çemberine $x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında çizilen t_2 teğetinin eğimi,

$$\begin{aligned}y &= a_2x^2 + b_2x + c_2 \\ y' &= 2a_2x + b_2 \\ m_2 &= 2a_2 \left(\frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \right) + b_2 \\ m_2 &= \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 - 2a_2\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}\end{aligned}$$

dir.

Böylece t_1 ve t_2 teğetleri arasındaki açı,

$$\begin{aligned}\angle(t_1, t_2) &= m_1 - m_2 \\ &= \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 - 2a_1\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} - \frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1 - 2a_2\sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \\ &= -\sqrt{\Delta}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yani, $x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında, z_1 ve z_2 çemberleri

arasındaki açı, $\angle(z_1, z_2) = -\sqrt{\Delta}$ dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}a_1 \neq a_2 \text{ iken, } \Delta > 0 \Rightarrow x_2 &= \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \text{ apsisli kesişim noktasında,} \\ \angle(z_1, z_2) &= -\sqrt{\Delta} \text{ dir.} \tag{4.2.6}\end{aligned}$$

ii) $\Delta = 0$ ise, z_1 ve z_2 çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisi,

$$x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}, \quad (a_1 - a_2 \neq 0)$$

dir. Bu teğet oldukları noktada z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı, z_1 ve z_2 ye bu noktada çizilen teğetler arasındaki açıdır. Teğetler arasındaki açıyı bulmak için, teğetlerin eğimlerini bulmamız yeterlidir.

z_1 çemberine $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktada çizilen t_1 teğetinin eğimi,

$$\begin{aligned}y &= a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ y' &= 2a_1x + b_1 \\ m_1 &= 2a_1 \left(\frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)} \right) + b_1 \\ m_1 &= \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}\end{aligned}$$

dir.

z_2 çemberine $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktada çizilen t_2 teğetinin eğimi,

$$y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$y' = 2a_2x + b_2$$

$$m_2 = 2a_2 \left(\frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)} \right) + b_2$$

$$m_2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}$$

dir.

Böylece t_1 ve t_2 teğetleri arasındaki açı,

$$\begin{aligned} \angle(t_1, t_2) &= m_1 - m_2 \\ &= \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2} - \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yani, $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktada, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı, $\angle(z_1, z_2) = 0$ dır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} a_1 \neq a_2 \text{ iken, } \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)} \text{ apsisli teğet oldukları noktada} \\ \angle(z_1, z_2) = 0 \text{ dır.} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

iii) $\Delta < 0$ ise, z_1 ve z_2 çemberleri kesişmezler, dolayısıyla aralarındaki açıdan söz edilemez. Yani,

$$\begin{aligned} a_1 \neq a_2 \text{ iken, } \Delta < 0 \Rightarrow z_1 \text{ ve } z_2 \text{ çemberleri arasındaki açıdan söz} \\ \text{edilemez.} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Sonuç 4.2.1: $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

çemberleri arasındaki $\angle(z_1, z_2)$ açısı ölçüsü aşağıdaki gibidir:

1) $a_1 = a_2$ iken,

i) $b_1 = b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = 0$ dir.

ii) $b_1 \neq b_2 \Rightarrow (\infty, a_1)$ kesişim noktasında $\angle(z_1, z_2) = 0$ dir.

$$b_1 \neq b_2 \Rightarrow x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2} \text{ apsisli kesişim noktasında, } \angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2$$

dir.

2) $a_1 \neq a_2$ iken,

$$\Delta = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \text{ olmak üzere,}$$

i) $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli kesişim noktasında,

$$\angle(z_1, z_2) = \sqrt{\Delta} \text{ dir.}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$
 apsisli kesişim noktasında,

$$\angle(z_1, z_2) = -\sqrt{\Delta} \text{ dir.}$$

ii) $\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktada,

$$\angle(z_1, z_2) = 0 \text{ dir.}$$

iii) $\Delta < 0 \Rightarrow z_1$ ve z_2 çemberleri arasındaki açıdan söz edilemez.

4.3. $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre Düzleminde Çemberler Arasındaki Açıların $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nın Otomorfizmleri Altındaki Değişimi ve Bu Otomorfizmlerin Hangi Durumlarda Benzerlik Dönüşümü Olduğunun Belirlenmesi

Bu kısımda $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde çemberler arasındaki açıların, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nın otomorfizmleri altında korunup korunmadığı incelenmiş ve bu otomorfizmlerin hangi durumlarda benzerlik dönüşümü olduğu belirlenmiştir.

Tanım 4.3.1: $\mathfrak{L}(\mathbf{K}) := (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzlemine ait otomorfizm grubunun, \mathcal{Z} yi kendi üzerine resmeden ve açı ölçümünü koruyan bir σ otomorfizmine $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin bir *esas benzerliği* denir.

$\forall z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$ için $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^\sigma, z_2^\sigma)$ dir (Blunck and Herzer, 2005).

Tanım 4.3.2: $\mathfrak{L}(\mathbf{K}) := (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$ çemberleri verilsin. Eğer $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$ ise, $\angle(z_1, z_2)$ ye *esas açısı* denir.

Eğer $\angle(z_1, z_2)$ ve $\angle(z_1', z_2')$ esas açıları bir esas benzerlik ile birbirlerine dönüştürülebiliyorsa, yani σ , $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin bir esas benzerliği olmak üzere, $z_1^\sigma = z_1'$ ve $z_2^\sigma = z_2'$ oluyorsa, $\angle(z_1, z_2)$ ve $\angle(z_1', z_2')$ açılarna *benzerdir*, denir (Blunck and Herzer, 2005).

Şimdi $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminde çemberler arasındaki açıların, $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nin otomorfizmleri altında korunup korunmadığı incelenecek ve bu otomorfizmlerin hangi durumlarda esas benzerlik dönüşümü olduğu belirlenecektir.

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin iki çemberi;

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

olsun.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (sx, ty), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, \frac{t}{s^2}a) \end{array} \right\} \quad 0 \neq s, t \in \mathbf{K}$$

otomorfizmleri altında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının korunup korunmadığı incelenecektir.

$$(x, y) \rightarrow (sx, ty) = (x', y')$$

şeklinde dönüştürülürse,

$$\begin{aligned} x' = sx &\Rightarrow x = \frac{x'}{s} \\ y' = ty &\Rightarrow y = \frac{y'}{t} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu x ve y değerleri sırasıyla z_1 ve z_2 çemberlerinin denklemlerinde yerine konulursa, bu çemberlerin **(1)** otomorfizmleri altındaki görüntüleri elde edilir.

z_1 çemberinin **(1)** otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_1) \rightarrow (\infty, \frac{t}{s^2}a_1)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z_1^1; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid \frac{y'}{t} = a_1 \left(\frac{x'}{s}\right)^2 + b_1 \left(\frac{x'}{s}\right) + c_1\} \cup \left\{ \left(\infty, \frac{t}{s^2}a_1\right) \right\}, a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

$$z_1^2; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = \frac{t}{s^2}a_1 (x')^2 + \frac{t}{s}b_1 (x') + tc_1\} \cup \left\{ \left(\infty, \frac{t}{s^2}a_1\right) \right\}, a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_2 çemberinin **(1)** otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_2) \rightarrow (\infty, \frac{t}{s^2}a_2)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z_2^1; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid \frac{y'}{t} = a_2 \left(\frac{x'}{s}\right)^2 + b_2 \left(\frac{x'}{s}\right) + c_2\} \cup \left\{ \left(\infty, \frac{t}{s^2}a_2\right) \right\}, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

$$z_2^2; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = \frac{t}{s^2}a_2 (x')^2 + \frac{t}{s}b_2 (x') + tc_2\} \cup \left\{ \left(\infty, \frac{t}{s^2}a_2\right) \right\}, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_1^1 ve z_2^1 çemberleri arasındaki açı, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen teğetleri arasındaki açıdır. Bu açıyı bulmak için iki ayrı durum incelenmelidir.

1. Durum: $a_1 = a_2$ olsun.

$y' = \frac{t}{s^2}a_1 (x')^2 + \frac{t}{s}b_1 (x') + tc_1$ ve $y' = \frac{t}{s^2}a_2 (x')^2 + \frac{t}{s}b_2 (x') + tc_2$ denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} \frac{t}{s^2}a_1 (x')^2 + \frac{t}{s}b_1 (x') + tc_1 &= \frac{t}{s^2}a_2 (x')^2 + \frac{t}{s}b_2 (x') + tc_2 \\ \frac{t}{s}b_1 (x') + tc_1 &= \frac{t}{s}b_2 (x') + tc_2 \\ \frac{t}{s}(b_1 - b_2)x' + t(c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

i) $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise, z_1^1 ve z_2^1 çemberleri çakışıktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1^1, z_2^1) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.1) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(1)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^1, z_2^1)$ dır.

ii) $b_1 = b_2$ ve $c_1 \neq c_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri sadece $(\infty, \frac{t}{s^2}a_1)$ noktasında kesişirler. $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberlerinin $(\infty, \frac{t}{s^2}a_1)$ noktasındaki teğetleri çakışık ve sonsuzdaki doğru olduğundan $z_1^!$ ve $z_2^!$ arasındaki açı $\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.2) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(1)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

iii) $b_1 \neq b_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri biri $(\infty, \frac{t}{s^2}a_1)$ olmak üzere iki noktada kesişirler.

(ii) den dolayı, $(\infty, \frac{t}{s^2}a_1)$ noktasında $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.3) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(1)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

Diğer kesişim noktasının apsisi de, yukarıda verilen ortak çözümün denkleminde

$$x^! = \frac{s(c_2 - c_1)}{b_1 - b_2}$$

olmak üzere, bu kesişim noktasında $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^!, z_2^!) = \frac{t}{s}(b_1 - b_2)$$

dir. Bu durum ile (4.2.4) karşılaştırılırsa, $s = t$ iken z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(1)** otomorfizmleri altında korunduğu, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ olduğu, diğer durumlarda korunmadığı görülür (Burada, $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasının, **(1)** otomorfizmleri altında $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberlerinin $x^! = \frac{s(c_2 - c_1)}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasına dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

2. Durum: $a_1 \neq a_2$ olsun.

$$y^! = \frac{t}{s^2}a_1(x^!)^2 + \frac{t}{s}b_1(x^!) + tc_1 \quad \text{ve} \quad y^! = \frac{t}{s^2}a_2(x^!)^2 + \frac{t}{s}b_2(x^!) + tc_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} \frac{t}{s^2}a_1(x^!)^2 + \frac{t}{s}b_1(x^!) + tc_1 &= \frac{t}{s^2}a_2(x^!)^2 + \frac{t}{s}b_2(x^!) + tc_2 \\ \frac{t}{s^2}(a_1 - a_2)(x^!)^2 + \frac{t}{s}(b_1 - b_2)(x^!) + t(c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}\Delta' &= \frac{t^2}{s^2} (b_1 - b_2)^2 - 4 \frac{t^2}{s^2} (a_1 - a_2) (c_1 - c_2) \\ \Delta' &= \frac{t^2}{s^2} [(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)] \\ \Delta' &= \frac{t^2}{s^2} \Delta\end{aligned}$$

olmak üzere, üç ayrı durum incelenmelidir.

i) $\Delta' > 0$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri iki noktada kesişirler. Bu kesişim noktalarının apsisleri,

$$x_1^l = \frac{\frac{t}{s} (b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta'}}{2 \frac{t}{s^2} (a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2^l = \frac{\frac{t}{s} (b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta'}}{2 \frac{t}{s^2} (a_1 - a_2)}$$

dir.

$\frac{t}{s} > 0$ olması durumunda, $a_1 \neq a_2$, $\Delta > 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktaları, **(1)** otomorfizmleri altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin sırasıyla,

$$x_1^l = \frac{\frac{t}{s} (b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta'}}{2 \frac{t}{s^2} (a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2^l = \frac{\frac{t}{s} (b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta'}}{2 \frac{t}{s^2} (a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarına döndürürler ($x_1 \rightarrow x_1^l$ ve $x_2 \rightarrow x_2^l$). Buna göre,

x_1^l apsisli kesişim noktasında, z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\frac{t^2}{s^2} \Delta} = \left| \frac{t}{s} \right| \sqrt{\Delta} = \frac{t}{s} (\sqrt{\Delta})$$

dır.

x_2^l apsisli kesişim noktasında, z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = -\sqrt{\Delta'} = -\sqrt{\frac{t^2}{s^2} \Delta} = \left| \frac{t}{s} \right| (-\sqrt{\Delta}) = \frac{t}{s} (-\sqrt{\Delta})$$

dır.

Bu durum ile (4.2.5) ve (4.2.6) karşılaştırılırsa, $s = t$ iken z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(1)** otomorfizmleri altında korunduğu, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ olduğu, diğer durumlarda korunmadığı görülür.

$\frac{t}{s} < 0$ olması durumunda, $a_1 \neq a_2$, $\Delta > 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktaları, **(1)** otomorfizmleri altında $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberlerinin sırasıyla (başlangıçtaki nokta isimlendirilmeleri gözönüne alınarak),

$$x_2^! = \frac{\frac{t}{s}(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta^!}}{2\frac{t}{s^2}(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_1^! = \frac{\frac{t}{s}(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta^!}}{2\frac{t}{s^2}(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarına dönüştürler ($x_1 \rightarrow x_2^!$ ve $x_2 \rightarrow x_1^!$). Buna göre,

$x_1^!$ apsisli kesişim noktasında, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^!, z_2^!) = \sqrt{\Delta^!} = \sqrt{\frac{t^2}{s^2}\Delta} = \left| \frac{t}{s} \right| \sqrt{\Delta} = \frac{t}{s} (-\sqrt{\Delta})$$

dır.

$x_2^!$ apsisli kesişim noktasında, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^!, z_2^!) = -\sqrt{\Delta^!} = -\sqrt{\frac{t^2}{s^2}\Delta} = \left| \frac{t}{s} \right| (-\sqrt{\Delta}) = \frac{t}{s} (\sqrt{\Delta})$$

dır.

Bu durum ile (4.2.5) ve (4.2.6) karşılaştırılırsa, $s = t$ iken z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(1)** otomorfizmleri altında korunduğu, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ olduğu, diğer durumlarda korunmadığı görülür.

ii) $\Delta^! = 0$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisi,

$$x^! = \frac{s(b_2 - b_1)}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere, bu noktada $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$$

dır.

Bu durum ile (4.2.7) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (1) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta = 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisi teğet oldukları noktanın, (1) otomorfizmleri altında z_1' ve z_2' çemberlerinin $x' = \frac{s(b_2 - b_1)}{2(a_1 - a_2)}$ apsisi teğet oldukları noktaya dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

iii) $\Delta' < 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri kesişmezler, dolayısıyla aralarındaki açıdan söz edilemez. Bu durum ile (4.2.8) karşılaştırılırsa, bir fark olmadığı görülür.

Sonuç 4.3.1: $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

çemberleri arasındaki $\angle(z_1, z_2)$ açı ölçüsü ile (1) otomorfizmleri altındaki görüntü çemberleri arasındaki $\angle(z_1', z_2')$ açı ölçüsü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

1) $a_1 = a_2$ iken,

$$i) \quad b_1 = b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$$

$$ii) \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2') \Leftrightarrow s = t$$

2) $a_1 \neq a_2$ iken,

$$\Delta' = \frac{t^2}{s^2} [(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)] \text{ olmak üzere,}$$

$$i) \quad \Delta' > 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2') \Leftrightarrow s = t$$

$$ii) \quad \Delta' = 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$$

$$iii) \quad \Delta' < 0 \Rightarrow \text{Çemberler arasındaki açıdan söz edilemez.}$$

Böylece aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir:

Yardımcı Teorem 4.3.1: $\mathfrak{L}(\mathbf{K}) = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde,

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \quad \infty \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a) \mid a, b, c \in \mathbf{K}\},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere,

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (sx, ty), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, \frac{t}{s^2}a) \end{array} \right\} \quad 0 \neq s, t \in \mathbf{K}$$

otomorfizmlerinin esas benzerlik dönüşümü olması için gerek ve yeter şart, $s = t$ olmasıdır.

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x + s, y + t), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right\} \quad s, t \in \mathbf{K}$$

otomorfizmleri altında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının korunup korunmadığı incelenecektir.

$$(x, y) \rightarrow (x + s, y + t) = (x', y')$$

şeklinde dönüştürülürse,

$$x' = x + s \Rightarrow x = x' - s$$

$$y' = y + t \Rightarrow y = y' - t$$

yazılabilir.

Bu x ve y değerleri sırasıyla z_1 ve z_2 çemberlerinin denklemlerinde yerine konursa, bu çemberlerin (2) otomorfizmleri altındaki görüntüleri elde edilir.

z_1 çemberinin (2) otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_1) \rightarrow (\infty, a_1)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z'_1; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' - t = a_1(x' - s)^2 + b_1(x' - s) + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

$$z'_1; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = a_1(x')^2 + (b_1 - 2a_1s)(x') + (a_1s^2 - b_1s + c_1 + t)\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_2 çemberinin **(2)** otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_2) \rightarrow (\infty, a_2)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z_2^!; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' - t = a_2 (x' - s)^2 + b_2 (x' - s) + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

$$z_2^!; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = a_2 (x')^2 + (b_2 - 2a_2s) (x') + (a_2s^2 - b_2s + c_2 + t)\} \cup \{(\infty, a_2)\}, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

dır.

$z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen teğetleri arasındaki açıdır. Bu açıyı bulmak için iki ayrı durum incelenmelidir.

1. Durum: $a_1 = a_2$ olsun.

$$y' = a_1 (x')^2 + (b_1 - 2a_1s) (x') + (a_1s^2 - b_1s + c_1 + t)$$

ve

$$y' = a_2 (x')^2 + (b_2 - 2a_2s) (x') + (a_2s^2 - b_2s + c_2 + t)$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$a_1 (x')^2 + (b_1 - 2a_1s) (x') + (a_1s^2 - b_1s + c_1 + t) = a_2 (x')^2 + (b_2 - 2a_2s) (x') + (a_2s^2 - b_2s + c_2 + t)$$

$$(b_1 - b_2) (x') - s (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = 0$$

denklemini elde edilir.

i) $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri çakışiktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.1) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(2)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

ii) $b_1 = b_2$ ve $c_1 \neq c_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri sadece (∞, a_1) noktasında kesişirler. $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberlerinin (∞, a_1) noktasındaki teğetleri çakışık ve sonsuzdaki doğru olduğundan $z_1^!$ ve $z_2^!$ arasındaki açı $\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.2) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(2)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

iii) $b_1 \neq b_2$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri biri (∞, a_1) olmak üzere iki noktada kesişirler.

(ii) den dolayı, (∞, a_1) noktasında z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1^l, z_2^l) = 0$ dir. Bu durum ile (4.2.3) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (2) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür.

Diğer kesişim noktasının apsisi de, yukarıda verilen ortak çözümün denkleminde

$$x' = \frac{s(b_1 - b_2) + (c_2 - c_1)}{b_1 - b_2}$$

olmak üzere, bu kesişim noktasında z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = b_1 - b_2$$

dir. Bu durum ile (4.2.4) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (2) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür (Burada, $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasının, (2) otomorfizmleri altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin $x' = \frac{s(b_1 - b_2) + (c_2 - c_1)}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasına dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

2. Durum: $a_1 \neq a_2$ olsun.

$$y' = a_1 (x')^2 + (b_1 - 2a_1s) (x') + (a_1s^2 - b_1s + c_1 + t)$$

ve

$$y' = a_2 (x')^2 + (b_2 - 2a_2s) (x') + (a_2s^2 - b_2s + c_2 + t)$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$a_1 (x')^2 + (b_1 - 2a_1s) (x') + (a_1s^2 - b_1s + c_1 + t) = a_2 (x')^2 + (b_2 - 2a_2s) (x') + (a_2s^2 - b_2s + c_2 + t)$$

$$(a_1 - a_2) (x')^2 + [(b_1 - b_2) - 2s(a_1 - a_2)] (x') + [s^2(a_1 - a_2) - s(b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)] = 0$$

denklemini elde edilir.

$$\Delta' = [(b_1 - b_2) - 2s(a_1 - a_2)]^2 - 4(a_1 - a_2)[s^2(a_1 - a_2) - s(b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)]$$

$$\Delta' = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$$

$$\Delta' = \Delta$$

olmak üzere, üç ayrı durum incelenmelidir.

i) $\Delta' > 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri iki noktada kesişirler. Bu kesişim noktalarının apsisleri,

$$x_1' = \frac{[(b_2 - b_1) + 2s(a_1 - a_2)] + \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)}$$

ve

$$x_2' = \frac{[(b_2 - b_1) + 2s(a_1 - a_2)] - \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere,

x_1' apsisli kesişim noktasında, z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\Delta}$$

dır.

x_2' apsisli kesişim noktasında, z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = -\sqrt{\Delta'} = -\sqrt{\Delta}$$

dır.

Bu durum ile (4.2.5) ve (4.2.6) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(2)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dir (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta > 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarının, **(2)** otomorfizmleri altında z_1' ve z_2' çemberlerinin sırasıyla,

$$x_1' = \frac{[(b_2 - b_1) + 2s(a_1 - a_2)] + \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2' = \frac{[(b_2 - b_1) + 2s(a_1 - a_2)] - \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarına dönüştüğüne dikkat edilmelidir ($x_1 \rightarrow x_1'$ ve $x_2 \rightarrow x_2'$)).

ii) $\Delta' = 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisleri,

$$x' = \frac{(b_2 - b_1) + 2s(a_1 - a_2)}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere, bu noktada z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = 0$$

dır.

Bu durum ile (4.2.7) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(2)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta = 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktanın, **(2)** otomorfizmleri altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin $x^l = \frac{(b_2 - b_1) + 2s(a_1 - a_2)}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktaya dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

iii) $\Delta^l < 0$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri kesişmezler, dolayısıyla aralarındaki açıdan söz edilemez. Bu durum ile (4.2.8) karşılaştırılırsa, bir fark olmadığı görülür.

Sonuç 4.3.2: $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

çemberleri arasındaki $\angle(z_1, z_2)$ açı ölçüsü ile **(2)** otomorfizmleri altındaki görüntü çemberleri arasındaki $\angle(z_1^l, z_2^l)$ açı ölçüsü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

1) $a_1 = a_2$ iken,

$$i) \quad b_1 = b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$$

$$ii) \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$$

2) $a_1 \neq a_2$ iken,

$$\Delta^l = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \text{ olmak üzere,}$$

$$i) \quad \Delta^l > 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$$

$$ii) \quad \Delta^l = 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$$

$$iii) \quad \Delta^l < 0 \Rightarrow \text{Çemberler arasındaki açıdan söz edilemez.}$$

Böylece aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir:

Yardımcı Teorem 4.3.2: $\mathcal{L}(\mathbf{K})=(\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde,

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \infty \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a) \mid a, b, c \in \mathbf{K}\},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x + s, y + t), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} s, t \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

otomorfizmleri, esas benzerlik dönüşümleridir.

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} s \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

otomorfizmleri altında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının korunup korunmadığı incelenecektir.

$$(x, y) \rightarrow (x, y + sx) = (x', y')$$

şeklinde dönüştürülürse,

$$x' = x \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

$$y' = y + sx \quad \Rightarrow \quad y = y' - sx'$$

yazılabilir.

Bu x ve y değerleri sırasıyla z_1 ve z_2 çemberlerinin denklemlerinde yerine konursa, bu çemberlerin (3) otomorfizmleri altındaki görüntüleri elde edilir.

z_1 çemberinin (3) otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_1) \rightarrow (\infty, a_1)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z_1'; \quad \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' - sx' = a_1 (x')^2 + b_1 (x') + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

$$z_1^!; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = a_1 (x')^2 + (b_1 + s) (x') + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_2 çemberinin **(3)** otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_2) \rightarrow (\infty, a_2)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z_2^!; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' - sx' = a_2 (x')^2 + b_2 (x') + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

$$z_2^!; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = a_2 (x')^2 + (b_2 + s) (x') + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

dır.

$z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen teğetleri arasındaki açıdır. Bu açıyı bulmak için iki ayrı durum incelenmelidir.

1. Durum: $a_1 = a_2$ olsun.

$$y' = a_1 (x')^2 + (b_1 + s) (x') + c_1 \quad \text{ve} \quad y' = a_2 (x')^2 + (b_2 + s) (x') + c_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} a_1 (x')^2 + (b_1 + s) (x') + c_1 &= a_2 (x')^2 + (b_2 + s) (x') + c_2 \\ (b_1 - b_2) (x') + (c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

i) $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri çakışiktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.1) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(3)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

ii) $b_1 = b_2$ ve $c_1 \neq c_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri sadece (∞, a_1) noktasında kesişirler. $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberlerinin (∞, a_1) noktasındaki teğetleri çakışık ve sonsuzdaki doğru olduğundan $z_1^!$ ve $z_2^!$ arasındaki açı $\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.2) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(3)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

iii) $b_1 \neq b_2$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri biri (∞, a_1) olmak üzere iki noktada kesişirler.

(ii) den dolayı, (∞, a_1) noktasında z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$ dir. Bu durum ile (4.2.3) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(3)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dir.

Diğer kesişim noktasının apsisi de, yukarıda verilen ortak çözümün denkleminde

$$x' = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$$

olmak üzere, bu kesişim noktasında z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$$

dir. Bu durum ile (4.2.4) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(3)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dir (Burada, $a_1 = a_2, b_1 \neq b_2$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasının, **(3)** otomorfizmleri altında z_1' ve z_2' çemberlerinin $x' = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasına dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

2. Durum: $a_1 \neq a_2$ olsun.

$$y' = a_1 (x')^2 + (b_1 + s) (x') + c_1 \quad \text{ve} \quad y' = a_2 (x')^2 + (b_2 + s) (x') + c_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} a_1 (x')^2 + (b_1 + s) (x') + c_1 &= a_2 (x')^2 + (b_2 + s) (x') + c_2 \\ (a_1 - a_2) (x')^2 + (b_1 - b_2) (x') + (c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$$\Delta' = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$$

$$\Delta' = \Delta$$

olmak üzere, üç ayrı durum incelenmelidir.

i) $\Delta' > 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri iki noktada kesişirler. Bu kesişim noktalarının apsisi,

$$x_1' = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2' = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere,

x_1^l apsisli kesişim noktasında, z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = \sqrt{\Delta^l} = \sqrt{\Delta}$$

dır.

x_2^l apsisli kesişim noktasında, z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = -\sqrt{\Delta^l} = -\sqrt{\Delta}$$

dır.

Bu durum ile (4.2.5) ve (4.2.6) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(3)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta > 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarının, **(3)** otomorfizmleri altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin sırasıyla,

$$x_1^l = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta^l}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2^l = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta^l}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarına dönüştüğüne dikkat edilmelidir ($x_1 \rightarrow x_1^l$ ve $x_2 \rightarrow x_2^l$)).

ii) $\Delta^l = 0$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisli,

$$x^l = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere, bu noktada z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = 0$$

dır.

Bu durum ile (4.2.7) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(3)** otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta = 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları

noktanın, **(3)** otomorfizmleri altında z_1' ve z_2' çemberlerinin $x' = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktaya dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

iii) $\Delta' < 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri kesişmezler, dolayısıyla aralarındaki açıdan söz edilemez. Bu durum ile (4.2.8) karşılaştırılırsa, bir fark olmadığı görülür.

Sonuç 4.3.3: $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

çemberleri arasındaki $\angle(z_1, z_2)$ açı ölçüsü ile **(3)** otomorfizmleri altındaki görüntü çemberleri arasındaki $\angle(z_1', z_2')$ açı ölçüsü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

1) $a_1 = a_2$ iken,

$$i) \quad b_1 = b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$$

$$ii) \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$$

2) $a_1 \neq a_2$ iken,

$$\Delta' = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \text{ olmak üzere,}$$

$$i) \quad \Delta' > 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$$

$$ii) \quad \Delta' = 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$$

$$iii) \quad \Delta' < 0 \Rightarrow \text{Çemberler arasındaki açıdan söz edilemez.}$$

Böylece aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir:

Yardımcı Teorem 4.3.3: $\mathfrak{L}(\mathbf{K}) = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde,

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \quad \infty \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{ \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\} \mid a, b, c \in \mathbf{K} \},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere,

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right\} \quad s \in \mathbf{K}$$

otomorfizmleri, esas benzerlik dntstmleridir.

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx^2), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a + s) \end{array} \right\} \quad s \in \mathbf{K}$$

otomorfizmleri altında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının korunup korunmadığı inceleneyecektir.

$$(x, y) \rightarrow (x, y + sx^2) = (x', y')$$

eklinde dntrlrse,

$$x' = x \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

$$y' = y + sx^2 \quad \Rightarrow \quad y = y' - s(x')^2$$

yazılabilir.

Bu x ve y değerleri sırasıyla z_1 ve z_2 çemberlerinin denklemlerinde yerine konulursa, bu çemberlerin (4) otomorfizmleri altındaki görüntüleri elde edilir.

z_1 çemberinin (4) otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_1) \rightarrow (\infty, a_1 + s)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z'_1; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' - s(x')^2 = a_1(x')^2 + b_1(x') + c_1\} \cup \{(\infty, a_1 + s)\},$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

$$z'_1; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = (a_1 + s)(x')^2 + b_1(x') + c_1\} \cup \{(\infty, a_1 + s)\},$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_2 çemberinin (4) otomorfizmleri altındaki görüntüsü, $(\infty, a_2) \rightarrow (\infty, a_2 + s)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z_2'; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' - s(x')^2 = a_2(x')^2 + b_2(x') + c_2\} \cup \{(\infty, a_2 + s)\},$$

$$a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

$$z_2'; \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = (a_2 + s)(x')^2 + b_2(x') + c_2\} \cup \{(\infty, a_2 + s)\},$$

$$a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen teğetleri arasındaki açıdır. Bu açıyı bulmak için iki ayrı durum incelenmelidir.

1. Durum: $a_1 = a_2$ olsun.

$$y' = (a_1 + s)(x')^2 + b_1(x') + c_1 \quad \text{ve} \quad y' = (a_2 + s)(x')^2 + b_2(x') + c_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} (a_1 + s)(x')^2 + b_1(x') + c_1 &= (a_2 + s)(x')^2 + b_2(x') + c_2 \\ (b_1 - b_2)(x') + (c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

i) $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri çakışiktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.1) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (4) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır.

ii) $b_1 = b_2$ ve $c_1 \neq c_2$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri sadece $(\infty, a_1 + s)$ noktasında kesişirler. z_1' ve z_2' çemberlerinin $(\infty, a_1 + s)$ noktasındaki teğetleri çakışık ve sonsuzdaki doğru olduğundan z_1' ve z_2' arasındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.2) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (4) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır.

iii) $b_1 \neq b_2$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri biri $(\infty, a_1 + s)$ olmak üzere iki noktada kesişirler.

(*ii*) den dolayı, $(\infty, a_1 + s)$ noktasında z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$ dır. Bu durum ile (4.2.3) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (4) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır.

Diğer kesişim noktasının apsisi de, yukarıda verilen ortak çözümün denkleminde

$$x' = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$$

olmak üzere, bu kesişim noktasında z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$$

dir. Bu durum ile (4.2.4) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (4) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır (Burada, $a_1 = a_2, b_1 \neq b_2$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasının, (4) otomorfizmleri altında z_1' ve z_2' çemberlerinin $x' = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}$ apsisli kesişim noktasına döndüğüne dikkat edilmelidir).

2. Durum: $a_1 \neq a_2$ olsun.

$$y' = (a_1 + s)(x')^2 + b_1(x') + c_1 \quad \text{ve} \quad y' = (a_2 + s)(x')^2 + b_2(x') + c_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} (a_1 + s)(x')^2 + b_1(x') + c_1 &= (a_2 + s)(x')^2 + b_2(x') + c_2 \\ (a_1 - a_2)(x')^2 + (b_1 - b_2)(x') + (c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$$\Delta' = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$$

$$\Delta' = \Delta$$

olmak üzere, üç ayrı durum incelenmelidir.

i) $\Delta' > 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri iki noktada kesişirler. Bu kesişim noktalarının apsisi,

$$x_1' = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2' = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere,

x_1' apsisli kesişim noktasında, z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\Delta}$$

dır.

x_2^l apsisli kesişim noktasında, z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = -\sqrt{\Delta'} = -\sqrt{\Delta}$$

dır.

Bu durum ile (4.2.5) ve (4.2.6) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (4) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta > 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarının, (4) otomorfizmleri altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin sırasıyla,

$$x_1^l = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2^l = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta'}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarına dönüştüğüne dikkat edilmelidir ($x_1 \rightarrow x_1^l$ ve $x_2 \rightarrow x_2^l$)).

ii) $\Delta' = 0$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisi,

$$x^l = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere, bu noktada z_1^l ve z_2^l çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^l, z_2^l) = 0$$

dır.

Bu durum ile (4.2.7) karşılaştırılırsa, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (4) otomorfizmleri altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dür (Burada, $a_1 \neq a_2$, $\Delta = 0$ iken z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktanın, (4) otomorfizmleri altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin $x^l = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktaya dönüştüğüne dikkat edilmelidir).

iii) $\Delta' < 0$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri kesişmezler, dolayısıyla aralarındaki açıdan söz edilemez. Bu durum ile (4.2.8) karşılaştırılırsa, bir fark olmadığı görülür.

Sonuç 4.3.4: $\mathcal{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

çemberleri arasındaki $\angle(z_1, z_2)$ açı ölçüsü ile (4) otomorfizimleri altındaki görüntü çemberleri arasındaki $\angle(z'_1, z'_2)$ açı ölçüsü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

1) $a_1 = a_2$ iken,

$$i) \quad b_1 = b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z'_1, z'_2)$$

$$ii) \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z'_1, z'_2)$$

2) $a_1 \neq a_2$ iken,

$$\Delta' = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \text{ olmak üzere,}$$

$$i) \quad \Delta' > 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z'_1, z'_2)$$

$$ii) \quad \Delta' = 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z'_1, z'_2)$$

iii) $\Delta' < 0 \Rightarrow$ Çemberler arasındaki açıdan söz edilemez.

Yardımcı Teorem 4.3.4: $\mathcal{L}(\mathbf{K}) = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde,

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \quad \infty \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{ \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\} \mid a, b, c \in \mathbf{K} \},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx^2), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a + s) \end{array} \right\} \quad s \in \mathbf{K}$$

otomorfizimleri, esas benzerlik dönüşümleridir.

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right), \quad x \neq 0, \infty \\ (0, y) \rightarrow (\infty, y) \\ (\infty, a) \rightarrow (0, a) \end{array} \right\}$$

otomorfizmi altında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının korunup korunmadığı incelenecektir.

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right) = (x', y')$$

şeklinde dönüştürülürse,

$$\begin{aligned} x' = \frac{1}{x} &\Rightarrow x = \frac{1}{x'} \\ y' = \frac{y}{x^2} &\Rightarrow y = \frac{y'}{(x')^2} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu x ve y değerleri sırasıyla z_1 ve z_2 çemberlerinin denklemlerinde yerine konulursa, bu çemberlerin (5) otomorfizmi altındaki görüntüleri elde edilir.

z_1 çemberinin (5) otomorfizmi altındaki görüntüsü,

$(\infty, a_1) \rightarrow (0, a_1)$ ve $(0, c_1) \rightarrow (\infty, c_1)$ olduğu gözönüne alınır,

$$z_1'; \quad \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid \frac{y'}{(x')^2} = a_1 \left(\frac{1}{x'}\right)^2 + b_1 \left(\frac{1}{x'}\right) + c_1\} \cup \{(\infty, c_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

$$z_1'; \quad \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = c_1 (x')^2 + b_1 (x') + a_1\} \cup \{(\infty, c_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_2 çemberinin (5) otomorfizmi altındaki görüntüsü,

$(\infty, a_2) \rightarrow (0, a_2)$ ve $(0, c_2) \rightarrow (\infty, c_2)$ olduğu gözönüne alınır,

$$z_2'; \quad \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid \frac{y'}{(x')^2} = a_2 \left(\frac{1}{x'}\right)^2 + b_2 \left(\frac{1}{x'}\right) + c_2\} \cup \{(\infty, c_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

$$z_2'; \quad \{(x', y') \in \mathbf{K}^2 \mid y' = c_2 (x')^2 + b_2 (x') + a_2\} \cup \{(\infty, c_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

dır.

z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı, bu çemberlerin kesişim noktalarında çizilen teğetleri arasındaki açıdır. Bu açıyı bulmak için iki ayrı durum incelenmelidir.

Burada z_1 ve z_2 çemberlerinin **(5)** otomorfizmi altındaki görüntüleri, **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)** otomorfizmlerine göre biraz daha farklı olarak karşımıza çıktığından daha ayrıntılı bir inceleme yapmak gerekmektedir.

1. Durum: $c_1 = c_2$ olsun.

$$y' = c_1 (x')^2 + b_1 (x') + a_1 \quad \text{ve} \quad y' = c_2 (x')^2 + b_2 (x') + a_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} c_1 (x')^2 + b_1 (x') + a_1 &= c_2 (x')^2 + b_2 (x') + a_2 \\ (b_1 - b_2) (x') + (a_1 - a_2) &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

i) $b_1 = b_2$ ve $a_1 = a_2$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri çakışıktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$ dır.

Bununla birlikte (4.2.1) den dolayı, $a_1 = a_2$ iken, $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise z_1 ve z_2 çemberleri de çakışıktır ve aralarındaki açı $\angle(z_1, z_2) = 0$ dır.

Böylece, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(5)** otomorfizmi altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır.

ii) $b_1 = b_2$ ve $a_1 \neq a_2$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri sadece (∞, c_1) noktasında kesişir. z_1' ve z_2' çemberlerinin (∞, c_1) noktasındaki teğetleri çakışık ve sonsuzdaki doğru olduğundan z_1' ve z_2' arasındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$ dır.

Bununla birlikte (4.2.7) den dolayı, $a_1 \neq a_2$ iken, $b_1 = b_2$ ve $c_1 = c_2$ ($\Delta = 0$) ise z_1 ve z_2 çemberleri sadece $(0, c_1)$ noktasında kesişirler ve bu noktada z_1 ve z_2 arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = 0$ dır.

Burada, **(5)** otomorfizmi altında $(0, c_1) \rightarrow (\infty, c_1)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının **(5)** otomorfizmi altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1', z_2')$ dır.

iii) $b_1 \neq b_2$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri biri (∞, c_1) olmak üzere iki noktada kesişirler. *(ii)* den dolayı, (∞, c_1) noktasında z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1', z_2') = 0$

dır. Diğer kesişim noktasının apsisi de, yukarıda verilen ortak çözümün denkleminde $x' = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}$ olmak üzere, bu kesişim noktasında z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı, $\angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$ dir.

Eğer $a_1 = a_2$ ise, bu durumda z_1' ve z_2' çemberlerinin kesişim noktası $(0, a_1)$ olur ve bu noktada z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı yine $\angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$ dir.

Eğer $a_1 \neq a_2$ ise, bu durumda z_1' ve z_2' çemberlerinin kesişim noktasının apsisi $x' = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}$ olur ve bu noktada z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı yine $\angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$ dir.

Şimdi aynı durumlar için z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı incelenecektir.

$a_1 = a_2$ iken, $b_1 \neq b_2$ ve $c_1 = c_2$ ise z_1 ve z_2 çemberleri biri (∞, a_1) olmak üzere iki noktada kesişirler. (4.2.3) den dolayı, (∞, a_1) noktasında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = 0$ dir. Diğer kesişim noktası da $(0, c_1)$ noktasıdır ve (4.2.4) den dolayı, bu kesişim noktasında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2$ dir.

Burada, (5) otomorfizmi altında $(\infty, a_1) \rightarrow (0, a_1)$ ve $(0, c_1) \rightarrow (\infty, c_1)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Dolayısıyla,

$$(\infty, a_1) \rightarrow (0, a_1) \text{ için,}$$

$$(\infty, a_1) \text{ noktasında, } \angle(z_1, z_2) = 0$$

$$(0, a_1) \text{ noktasında, } \angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$$

ve

$$(0, c_1) \rightarrow (\infty, c_1) \text{ için,}$$

$$(0, c_1) \text{ noktasında, } \angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2$$

$$(\infty, c_1) \text{ noktasında, } \angle(z_1', z_2') = 0$$

olduğundan z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (5) otomorfizmi altında korunmadığı görülür, yani $\angle(z_1, z_2) \neq \angle(z_1', z_2')$ dir.

$a_1 \neq a_2$ iken, $b_1 \neq b_2$ ve $c_1 = c_2$ ($\Delta > 0$) ise z_1 ve z_2 çemberleri biri $(0, c_1)$ olmak üzere iki noktada kesişirler. (4.2.5) ve (4.2.6) dan dolayı, $(0, c_1)$ noktasında z_1 ve

z_2 çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2$ dir. Diğer kesişim noktasının apsisi de $x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$ dir ve (4.2.5) ve (4.2.6) dan dolayı, bu kesişim noktasında z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı $\angle(z_1, z_2) = b_2 - b_1$ dir.

Burada, (5) otomorfizmi altında

$$(0, c_1) \rightarrow (\infty, c_1) \text{ ve } x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \rightarrow x' = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Dolayısıyla,

$$(0, c_1) \rightarrow (\infty, c_1) \text{ için,}$$

$$(0, c_1) \text{ noktasında, } \angle(z_1, z_2) = b_1 - b_2$$

$$(\infty, c_1) \text{ noktasında, } \angle(z_1', z_2') = 0$$

ve

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \rightarrow x' = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} \text{ için,}$$

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \text{ apsisli noktada, } \angle(z_1, z_2) = b_2 - b_1$$

$$x' = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} \text{ apsisli noktada, } \angle(z_1', z_2') = b_1 - b_2$$

olduğundan z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (5) otomorfizmi altında korunmadığı görülür, yani $\angle(z_1, z_2) \neq \angle(z_1', z_2')$ dür.

2. Durum: $c_1 \neq c_2$ olsun.

$$y' = c_1 (x')^2 + b_1 (x') + a_1 \text{ ve } y' = c_2 (x')^2 + b_2 (x') + a_2$$

denklemlerinin ortak çözümünden,

$$c_1 (x')^2 + b_1 (x') + a_1 = c_2 (x')^2 + b_2 (x') + a_2$$

$$(c_1 - c_2) (x')^2 + (b_1 - b_2) (x') + (a_1 - a_2) = 0$$

denklemini elde edilir.

$$\Delta' = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$$

$$\Delta' = \Delta$$

olmak üzere, üç ayrı durum incelenmelidir.

i) $\Delta' > 0$ ise, z_1' ve z_2' çemberleri iki noktada kesişirler. Bu kesişim noktalarının apsisi,

$$x_1' = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta'}}{2(c_1 - c_2)} \quad \text{ve} \quad x_2' = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta'}}{2(c_1 - c_2)}$$

olmak üzere,

x_1' apsisi kesişim noktasında, z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\Delta}$$

dir ve

x_2' apsisi kesişim noktasında, z_1' ve z_2' çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1', z_2') = -\sqrt{\Delta'} = -\sqrt{\Delta}$$

dir.

Bununla birlikte $a_1 \neq a_2$, $\Delta > 0$ iken, z_1 ve z_2 çemberleri iki noktada kesişirler ve bu kesişim noktalarının apsisi,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

dir. (4.2.5) ve (4.2.6) dan dolayı,

x_1 apsisi kesişim noktasında, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1, z_2) = \sqrt{\Delta}$$

dir ve

x_2 apsisi kesişim noktasında, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1, z_2) = -\sqrt{\Delta}$$

dir.

Burada, z_1 ve z_2 çemberlerinin,

$$x_1 = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$$

apsisli kesişim noktalarının, (5) otomorfizmi altında $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberlerinin sırasıyla (başlangıçtaki nokta isimlendirilmeleri gözönüne alınarak),

$$x_2^! = \frac{(b_2 - b_1) - \sqrt{\Delta^!}}{2(c_1 - c_2)} \quad \text{ve} \quad x_1^! = \frac{(b_2 - b_1) + \sqrt{\Delta^!}}{2(c_1 - c_2)}$$

apsisli kesişim noktalarına dönüştüğüne dikkat edilmelidir ($x_1 \rightarrow x_2^!$ ve $x_2 \rightarrow x_1^!$).

Dolayısıyla,

$x_1 \rightarrow x_2^!$ için,

x_1 apsisli noktada, $\angle(z_1, z_2) = \sqrt{\Delta}$

$x_2^!$ apsisli noktada, $\angle(z_1^!, z_2^!) = -\sqrt{\Delta}$

ve

$x_2 \rightarrow x_1^!$ için,

x_2 apsisli noktada, $\angle(z_1, z_2) = -\sqrt{\Delta}$

$x_1^!$ apsisli noktada, $\angle(z_1^!, z_2^!) = \sqrt{\Delta}$

olduğundan z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (5) otomorfizmi altında korunmadığı görülür, yani $\angle(z_1, z_2) \neq \angle(z_1^!, z_2^!)$ dır.

ii) $\Delta^! = 0$ ise, $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisi,

$$x^! = \frac{b_2 - b_1}{2(c_1 - c_2)}$$

olmak üzere, bu noktada $z_1^!$ ve $z_2^!$ çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1^!, z_2^!) = 0$$

dır.

Bununla birlikte $a_1 \neq a_2$, $\Delta = 0$ iken, z_1 ve z_2 çemberleri bir noktada kesişirler ve bu noktada birbirine teğettirler. Bu teğet oldukları noktanın apsisi,

$$x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$$

olmak üzere, (4.2.7) den dolayı bu noktada z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açı,

$$\angle(z_1, z_2) = 0$$

dır.

Burada, z_1 ve z_2 çemberlerinin $x = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$ apsisli teğet oldukları noktanın, (5) otomorfizmi altında z_1^l ve z_2^l çemberlerinin $x^l = \frac{b_2 - b_1}{2(c_1 - c_2)}$ apsisli teğet oldukları noktaya dönüştüğüne dikkat edilmelidir. Böylece, z_1 ve z_2 çemberleri arasındaki açının (5) otomorfizmi altında korunduğu görülür, yani $\angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$ dir.

iii) $\Delta^l < 0$ ise, z_1^l ve z_2^l çemberleri kesişmezler, dolayısıyla aralarındaki açıdan söz edilemez. Bu durum ile (4.2.8) karşılaştırılırsa, bir fark olmadığı görülür.

Sonuç 4.3.5: $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$z_1; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_1x^2 + b_1x + c_1\} \cup \{(\infty, a_1)\}, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{K}$$

ve

$$z_2; \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = a_2x^2 + b_2x + c_2\} \cup \{(\infty, a_2)\}, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{K}$$

çemberleri arasındaki $\angle(z_1, z_2)$ açı ölçüsü ile (5) otomorfizmi altındaki görüntü çemberleri arasındaki $\angle(z_1^l, z_2^l)$ açı ölçüsü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

1) $c_1 = c_2$ iken,

$$i) \quad b_1 = b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$$

$$ii) \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) \neq \angle(z_1^l, z_2^l)$$

2) $c_1 \neq c_2$ iken,

$$\Delta^l = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \text{ olmak üzere,}$$

$$i) \quad \Delta^l > 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) \neq \angle(z_1^l, z_2^l)$$

$$ii) \quad \Delta^l = 0 \Rightarrow \angle(z_1, z_2) = \angle(z_1^l, z_2^l)$$

$$iii) \quad \Delta^l < 0 \Rightarrow \text{Çemberler arasındaki açıdan söz edilemez.}$$

Yardımcı Teorem 4.3.5: $\mathfrak{L}(\mathbf{K}) = (\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde,

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \quad \in \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{ \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\} \mid a, b, c \in \mathbf{K} \},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere,

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right), \quad x \neq 0, \infty \\ (0, y) \rightarrow (\infty, y) \\ (\infty, a) \rightarrow (0, a) \end{array} \right\}$$

otomorfizmi, esas benzerlik dönüşümü değildir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})=(\mathcal{P}, \mathcal{Z}, \in)$ Laguerre düzleminde,

\mathbf{K} bir cisim ve

$$\mathcal{P} := (\mathbf{K} \cup \{\infty\}) \times \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbf{K}), \infty \notin \mathbf{K},$$

$$\mathcal{Z} := \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a) \mid a, b, c \in \mathbf{K}\},$$

$$\in \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Z}$$

olmak üzere, yapılan incelemeler sonucunda $\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ nın otomorfizmlerinin aşağıda belirtilen durumlarda esas benzerlik dönüşümü olduğu belirlenmiştir.

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (sx, ty), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, \frac{t}{s^2}a) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ 0 \neq s, t \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

otomorfizmlerinin esas benzerlik dönüşümü olması için gerek ve yeter şart, $s = t$ olmasıdır.

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x + s, y + t), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ s, t \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ s \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (x, y + sx^2), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, a + s) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ s \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

otomorfizmleri, esas benzerlik dönüşümleridir.

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin,

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right), \quad x \neq 0, \infty \\ (0, y) \rightarrow (\infty, y) \\ (\infty, a) \rightarrow (0, a) \end{array} \right\}$$

otomorfizmi, esas benzerlik dönüşümü değildir.

$\mathfrak{L}(\mathbf{K})$ Laguerre düzleminin diğer bir otomorfizm sınıfı da,

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \rightarrow (\alpha(x), \alpha(y)), \quad x \neq \infty \\ (\infty, a) \rightarrow (\infty, \alpha(a)) \end{array} \right\} \quad \alpha : \mathbf{K} \text{ nin otomorfizmi}$$

şeklinindedir. Bu otomorfizmlerin esas benzerlik dönüşümü olup olmadıklarının ayrıntılı olarak incelenmesi bir makale çalışma konusu olarak düşünüldüğünden, bu konu üzerinde burada çalışılmamıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Benz, W., 1973, Vorlesungen über geometrie der algebren, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 197, Springer Berlin/Heidelberg/New York , 363, 368 p.
- Blunck, A. and Herzer, A., 2005, Kettengeometrien, Shaker Verlag, Aachen, 336 p.
- Çallıalp, F., 2001, Örneklerle soyut cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 300 s.
- Çetin, N. ve Orhun, N., 1999, Lineer cebir, Editör: Özer, O., Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı, AÖF Yayını No: 588, (4.,5.Üniteler), Eskişehir, 126 s.
- Derman M. Z., Özköseler, Ö. ve Çetiner B., 2002, Analitik geometri 1-2, Zafer Yayınları, Ankara, 384 s.
- Freeman, L., 2008, Web sitesi: <http://mathrefresher.blogspot.com/2008/03/field-automorphism.html>, Erişim Tarihi: 05.03.2010.
- Gökdal, F., 1982, Laguerre düzlemlerinin koordinatlanması üzerine, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Doktora Tezi, 61 s.
- Gruenberg, K. W. and Weir, A. J. , 1977, Linear geometry, 2nd Ed. (English) Graduate Texts in Mathematics. 49., New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag. X, 198 p.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1998, İki ve üç boyutlu uzaylarda dönüşümler ve geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Ankara, 326 s.
- Hartmann, E., 2004, Planar circle geometries, Lecture Notes, Darmstadt University of Technology, 136 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kaya, R., 2005, Projektif geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 3.Baskı, Eskişehir, 392 s.

Orhun, N., 1999, Lineer cebir, Editör: Özer, O., Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı, AÖF Yayın No: 589, (6, 7, 8, 9, 10. Üniteler), Eskişehir, 235 s.

Ramroth, H., 1991, Charakterisierung von minkowski-geometrien durch ihre automorphismengruppe, Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 90 s.

Soytürk, Çakalgöz, E., 1989, Laguerre düzlemlerinin cebirsel yapıları üzerine, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 66 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Hamdiye Can Yılmaz

Uyruđu: T.C.

Dođum Yeri, Tarihi: Sakarya, 10.12.1979

Medeni hali: Evli

Adres bilgileri:

Ev adresi: İnönü Mah. Yargı-2 Sitesi

6. Blok Daire No:6

Ankara

İş adresi: Yunus Emre Anadolu Lisesi

Milli Eğitim Bakanlığı

Ankara

E-posta: hcan1980@hotmail.com

Eğitim Bilgileri:

Doktora (devam ediyor):

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(2004-devam ediyor)

Yüksek Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(2001-2004)

Yüksek Lisans:

Sakarya Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı
(2007-2009)

Lisans:

Eskişehir Anadolu Üniversitesi
Eğitim Fakóltesi
Matematik Öğretmenliği Bölümü
(1997-2001)

İş Deneyimi:

Milli Eğitim Bakanlığı
Matematik Öğretmeni
(2001-devam ediyor)