Leibniz Çaprazlanmış Cebirler

Nagihan Gürbüz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2011

Leibniz Crossed Algebras

Nagihan Gürbüz

Department of Mathematics

MASTER OF SCIENCE DISSERTATION

Haziran 2011

Leibniz Çaprazlanmış Cebirler

Nagihan Gürbüz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans Üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Haziran 2011

ONAY

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Nagihan Gürbüz ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Leibniz Çaprazlanmış Cebirler**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

İkinci Danışman:

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Zekeriya Arvasi

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker Akça

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sedat Pak

Üye: Yrd. Doç. Dr. Alper Odabaş

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Leibniz cebirler üzerine hazırlanmış bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde kısa bir giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde çaprazlanmış modül kavramının temel özelliklerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde cebir ve Lie cebirlerinin çaprazlanmış modül kavramının bazı özellikleri verilerek Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi oluşturulmuştur. Daha sonra da Lie cebirlerinin derivasyonları ve biderivasyonları tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise Lie cebirlerinin abelyan olmayan hali Leibniz cebirlerinin çaprazlanmış modül kavramının özellikleri verilmiş daha sonra da Leibniz cebirlerinin değişmeli olmayan tensör çarpımı tanımlanmış ve teoremler ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Leibniz cebirler, Çaprazlanmış Leibniz cebirler, Leibniz cebirlerin değişmeli olmayan tensör çarpımları.

SUMMARY

This thesis based on Leibniz algebras consist of four chapters.

In the first chapter, we give a short introduction.

In the second chapter, we recall the elementary properties of crossed modules.

In the third chapter, we recall the elementary properties of crossed modules of Lie algebras.

We give the some properties of crossed modules of Leibniz algebras. Also definations and theorems on a non-abelian tensor product of Leibniz algebras are stated in the last chapter.

Keywords: Leibniz algebras, Crossed Leibniz algebras, A non-abelian tensor product of Leibniz algebras.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten , bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mahmut KOÇAK'a, ayrıca her zaman yanımda olan ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen aileme sozsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Çaprazlanmış modül kavramı, 1949 yılında (Whitehead, 1949) tarafından tanımlanmıştır. Witehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. O zamandan itibaren çaprazlanmış modül kavramı diğer alanlarda da önemli bir yer tutmuştur. Günümüzde çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak düşünülebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli(cycilic) homoloji, kombinatoriyel grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin bir çok dalında önemli rolü vardır.

Lie cebirleri için çaprazlanmış modüller ilk olarak (Kassel and Loday, 1982) de tanımlanmıştır. Bu tanımlamanın üzerine araştırmacılar (Casas, 1990), (Casas and Ladra, 2000) gibi pek çok çalışmalar yapmışlardır.

Daha sonra (Loday, 1993) Lie cebirlerin değişmeli olmayan hali Leibniz cebirleri çalışılmaya başlanmıştır. Her Lie cebirinin bir Leibniz cebiri olduğunu ancak bir Leibniz cebirin her x elemanı için $[x, x] = 0$ koşulunu sağlarsa bir Lie cebiri olacağı gösterilmiştir. Serbest Leibniz cebirleri ise (Loday and Pirashvili, 1993) tarafından tanımlanmıştır.

Bu tezde önce cebirlerin çaprazlanmış modülleri verilerek bazı özellikleri incelenecektir.Daha sonra da Lie cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve bazı özellikleri incelenerek Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin CM kategorisi oluşturulacak ve çaprazlanmış Lie cebirlerinin derivasyonlarının temel tanım ve teoremleri verilecektir.

Bu tezin son bölümünde ise Lie cebirler için verilmiş olan derivasyon kavramı benzer şekilde Leibniz cebirler için biderivasyon kavramı olarak tanımlanacaktır.(Loday 1993)

Bu tezin ana amacı ise Leibniz cebirlerin biderivasyonları vasıtası ile Lie cebirler için yapılmış olduğu gibi Leibniz cebirlerin değişmeli olmayan tensör çarpımı kavramını oluşturmaktır.

M ve N bir çaprazlanmış Lie G-cebir olarak verildiğinde $Der_G(M, N)$ derivasyonlarının kümesininin bir ön-çaprazlanmış Lie cebir olduğu (Guin, 1995) de gösterilmiştir.

Bundan faydalanarak (Genedbaye, 1999) tarafından ön-çaprazlanmış Leibniz G-cebir kavramı tanımlanmıştır. M ve N bir çaprazlanmış Leibniz G-cebir olarak verildiğinde $Bider_G(M,N)$ biderivasyonlarının kümesininin bir ön-çaprazlanmış Leibniz cebir olduğu gösterilmiştir. Daha sonra ise N nin M üzerine etkisi ve M nin N üzerine etkisi aynı iken Leibniz cebirlerin değişmeli olmayan $M * N$ tensör çarpımı oluşturulmuştur. M ve N çaprazlanmış Leibniz G-cebir olarak verildiğinde bu tensör çarpım yapısının bir çaprazlanmış Leibniz G-cebir olduğu gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde önce cebirler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ve çaprazlanmış modüllerin bazı özelliklerini verelim. Daha sonra da Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ve Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin bazı özelliklerini verelim.

2.1 Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 2.1 R bir halka ve M bir küme olsun.

$$\begin{array}{ll} + : M \times M \to M & \cdot : R \times M \to M \\ (m_1, m_2) \to m_1 + m_2 & (r, m) \to r \cdot m \end{array}$$

ikili işlemleriyle birlikte aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise M ye bir sol R-modül denir.

M1). (M,+) bir Abelyan gruptur.

M2). Her $r \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ için

$$r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$$

dir.

M3). Her $r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için

$$(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$$

dir.

M4). Her $r_1, r_2 \in R$ ve $m \in M$ için

$$(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$$

dir.

Çarpım

$$\begin{array}{c} M \times R \to M \\ (m, r) \mapsto m \cdot r \end{array}$$

şeklinde sağdan tanımlı ise M toplamsal abelyen gruba sağ R-modül denir.

Örnek 2.1 R bir halka olmak üzere, herhangi bir A abelyen grubu $r \in R$, $a \in A$ için

$$R \times A \to A$$
$$(r, a) \mapsto ra = 0$$

tanımlaması ile bir R-modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.2 $\mathbf{k}$ bir halka S bir cisim ve $\mathrm{Der}(S)$, S nin $\mathbf{k}$-derivasyonları kümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} + : \quad (\mathrm{Der}S) \times \mathrm{Der}(S) &\to \mathrm{Der}(S) \\ (D_{1,}D_2) &\to (D_1 + D_2)(s) = D_1(s) + D_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbf{k} \times \mathrm{Der}(S) &\to \mathrm{Der}(S) \\ (k, D) &\to (k \cdot D)(s) = D(ks) \end{aligned}$$

işlemleriye birlikte

M1). $(\mathrm{Der}(S), +)$ bir Abelyan gruptur.

M2). Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} (k \cdot (D_1 + D_2))(s) &= (D_1 + D_2)(ks) \\ &= D_1(ks) + D_2(ks) \\ &= k \cdot D_1(s) + k \cdot D_2(s) \\ &= (k \cdot D_1 + k \cdot D_2)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$k \cdot (D_1 + D_2) = k \cdot D_1 + k \cdot D_2$$

dir.

M3). Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} ((k_1 + k_2) \cdot D)(s) &= D((k_1 + k_2)s) \\ &= D(k_1 s + k_2 s) \\ &= D(k_1 s) + D(k_2 s) \quad (\mathrm{Der}(S))\ \mathbf{k} - lineer) \\ &= (k_1 \cdot D)(s) + (k_2 \cdot D)(s) \\ &= (k_1 \cdot D + k_2 \cdot D)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1 + k_2) \cdot D = k_1 \cdot D + k_2 \cdot D$$

dir.

M4). Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}((k_1k_2) \cdot D)(s) &= D((k_1k_2)s) \\ &= D(k_1(k_2s)) \\ &= k_1 \cdot D(k_2s) \\ &= k_1 \cdot (k_2 \cdot D)(s)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1k_2) \cdot D = k_1 \cdot (k_2 \cdot D)$$

dir. Bu durumda $Der(S)$ bir **k**-modüldür.

Tanım 2.2 R ve S iki halka olsun. Bir M abelyen grubu hem sol R-modül hem de sağ S-modül ve her $r \in R$, $m \in M$ ve $s \in S$ için $r\,(ms) = (rm)\,s$ özelliğini sağlıyor ise M ye $(R$-$S)$-bimodül denir ve ${}_RM_S$ olarak gösterilir.

Örnek 2.3 R halkasının kendisi bir $(R$-$S)$- bimodüldür. R halkası asosyatiflik şartını sağladığından istenen elde edilir.

Tanım 2.3 R bir birimli halka , M bir R-modül olmak üzere her $m \in M$ için

$$1_R m = m$$

ise M ye birimli R-modül denir.

Örnek 2.4 Her G toplamsal abelyen grup bir birimli $\mathbb{Z}$-modüldür.

Tanım 2.4 M ve N iki R-modül olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu her x, $y \in M$ ve $r \in R$ için

i). $f(x + y) = f(x) + f\,(y)$

ii). $f\,(rx) = rf(x)$

şartlarını sağlıyor ise f ye bir R-modül homomorfizmi denir.

Tanım 2.5 M bir R-modül olsun. M' , M nin alt grubu olmak üzere $m' \in M'$ ve her $r \in R$ için $rm' \in M'$ ise M' ye M nin bir alt modülü denir.

Örnek 2.5 $f : M \to N$ bir R modül homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\ker f = \{m \in M : f(m) = 0\}$$

M nin alt modülüdür. Çünkü; $\ker f$, M nin bir alt grubu ve $m \in M,\ r \in R$ için

$$f\,(rm) = rf(m) = r0 = 0$$

olduğundan $rm \in \ker f$ dir. Ayrıca

$$f(M) = \{n \in N \mid n = f(m), m \in M\}$$

de N nin bir alt modülüdür. Çünkü; $f(M)$, N nin alt grubu ve $n \in f(M),\ r \in R$ için

$$nr = f(m)r = f(mr)$$

ve M bir R-modül olduğundan $mr \in M$ dir. Dolayısıyla $nr \in f(M)$ elde edilir.

Tanım 2.6 M bir R-modül ve bir halka olsun. Eğer her $r \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ için

$$r \cdot (m_1 m_2) = (r \cdot m_1)m_2 = m_1(r \cdot m_2)$$

oluyorsa M ye bir R-cebir denir.

Tanım 2.7 $\mathbf{k}$ bir değişmeli halka ve M bir $\mathbf{k}$-cebir olsun. Her $m_1, m_2 \in M$ ve $k_1 \in \mathbf{k}$ için M,

$$M \times M \to M$$
$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2$$
$$(m_1 m_2)k_1 = m_1\,(m_2 k_1)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir $\mathbf{k}$-modüldür.

Tanım 2.8 R, bir $\mathbf{k}$-cebir ise R üzerinde A cebiri

$$A \times A \to A$$
$$(a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2$$

ve

$$(a_1 a_2)\,a_3 = a_1\,(a_2 a_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir R-modüldür.

Örnek 2.6 Her halka bir $\mathbb{Z}$ cebirdir. Çünkü her R halkası bir toplamsal abelyen grup olduğundan bir $\mathbb{Z}$- modüldür ve $k \in K$, $r_1,\ r_2 \in R$ için

$$k\left(r_1 r_2\right) = \left(k r_1\right) r_2 = r_1 \left(k r_2\right)$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla R bir $\mathbb{Z}$-cebirdir.

Tanım 2.9 A bir R-cebir, $\emptyset \neq B \subset A$ olmak üzere $b,\ b' \in B$, $r \in R$ için

i).$bb' \in B$,

ii).$b - b' \in B$,

iii).$br \in B$ ve $rb \in B$ ise B ye A nın alt cebiri denir. Aynı zamanda B de bir R-cebirdir.

Tanım 2.10 M ve R , **k**-cebirler olmak üzere

$$\begin{aligned} R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r.m \end{aligned}$$

dönüşümü her $k \in \mathbf{k}$, $m, m' \in M$, $r, r' \in R$ için

i). $k(m.r) = (kr).m = r.(km)$

ii). $r.(m + m') = r.m + r.m'$

iii). $\left(r + r'\right).m = r.m + r'.m$

iv). $r.(mm') = (r.m)m' = m(r.m')$

v). $(rr').m = r(r'.m)$

şartlarını sağlıyor ise bu dönüşüme bir sol etki(action) denir. $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r.m$ ile gösterilir. Benzer şekilde sağ etki de tanımlanır ve $m.r$ ile gösterilir.

Tanım 2.11 M bir **k**-cebir ve $n \geq 2$ için $M_1,\ M_2, \cdots,\ M_n$, M nin alt cebirleri olsun.

i). $1 \leq s \leq n$ için $M_1 + M_2 + \cdots + M_s,\ M$ nin bir ideali ii). $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M$

iii). $(M_1 + M_2 + \cdots + M_s) \cap M_t = 0, \quad 1 \leq s < t \leq n$

şartlarını sağlayan M, **k**-cebirine $M_1, M_2, \cdots, M_n$ nin bir n-yarı direkt çarpımı denir ve $M = M_1 \ltimes M_2 \ltimes ... \ltimes M_n$ ile gösterilir. Yarı direkt çarpımın herhangi bir elemanı $m_i \in M_i$ için $m_1 + ... + m_n$ şeklinde tek türlü ifade edilir.

Tanım 2.12 R-birimli bir **k**-cebir ve

$$\partial : C \to R$$

bir R-cebir morfizmi olsun.

$$R \times C \to C$$
$$(r, c) \mapsto r.c$$

ve

$$C \times R \to R$$
$$(c, r) \mapsto c.r$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

ÇM1).

$$\partial(r, c) = r\partial(c)$$
$$\partial(c, r) = \partial(c)r$$

ÇM2).

$$\partial c.c' = cc'$$
$$c.\partial c' = cc'$$

şartlarını sağlıyor ise R üzerinde C cebirine bir çaprazlanmış(crossed) modül denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir.

Tanım 2.13 (C, R, ∂) ve (C', R', ∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\theta(r.c) = \psi(r).\theta(c)$$
$$\theta(c.r) = \theta(c).\psi(r)$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\psi"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif yani

$$\partial'\theta(c) = \psi\partial(c)$$

olacak şekilde $\theta : C \to C'$ ve $\psi : R \to R'$, **k**-cebir morfizimleri var ise

$$(\theta, \psi) : (C, R, \partial) \to (C', R', \partial')$$

ye çaprazlanmış modüller arasındaki morfizim denir. O halde $R = R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, θ bir R-cebir morfizmi olduğundan $\theta\,(r.c) = r\theta\,(c)$ dir ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ R & \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olduğundan, yani

$$\partial'\theta(c) = \partial(c)$$

sağlandığından θ bir çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

Örnek 2.7 R bir **k**-cebir ve I, R nin ideali olsun.

$$i : I \to R$$
$$i \mapsto i$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$R \times I \to I$$
$$(r, i) \mapsto r.i = ri$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\text{ÇM1).} \quad \partial(r.i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i)$$
$$\text{ÇM2).} \quad \partial i.i' = i.i' = ii'$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla (I, R, i) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.8 M herhangi bir R-modül olsun.

$$M \times M \to M$$
$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2 = 0$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$0 : M \to R$$
$$x \mapsto 0(x) = 0$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi

$$R \times M \to M$$
$$(r, m) \mapsto r.m = rm$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\text{ÇM1).} \quad 0(r.m) = 0(rm) = 0 = r0 = r0(m)$$
$$\text{ÇM2).} \quad 0m.m' = 0.m' = 0m' = 0 = mm'$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.9 L ve M birer R-modül ve

$$\theta : L \to M$$

R- modüllerin bir morfizmi olsun. $R \ltimes M$ yarı direkt çarpımı

$$(r, m)(r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda L, her $l, l' \in L$ için

$$l.l' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$R \times M \to R$$
$$(r, m) \mapsto r$$

şeklinde izdüşüm (protection) yoluyla bir $R \times M$ modül yapısı verildiğinde

$$\theta : L \to R \times M$$
$$l \mapsto (0, \theta(l))$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R \times M$ modül yapısı oluşturur.

$$(R \times M) \times L \to L$$
$$((r, m), l) \mapsto (r, m).l = rl$$

şeklinde fonksiyonu etki fonksiyonu ile birlikte

$$\theta : L \to R \times M$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\text{ÇM1).}\quad \theta((r,m).l) &= \theta(rl) && \text{(etki tanımından)}\\
&= (0,\theta(rl)) && (\theta \text{ tanımından})\\
&= (0,r\theta(l)) && (\theta,\ R\text{-modül morfizmi})\\
&= (r0,(r\theta(l)+0m)) &&\\
&= (r,m)\,(0,\theta(l)) && \text{(yarı direkt çarpım tanımı)}\\
&= (r,m)\theta(l) && (\theta \text{ tanımından})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ÇM2).}\quad \theta l.l' &= (0,\theta(l))\,.l' && (\theta \text{ tanımından})\\
&= 0l' && \text{(etki tanımından)}\\
&= 0 &&\\
&= ll' && (L \text{ de sıfır çarpımdan })
\end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlar. Bu örnekte sol etki kullanılmıştır. Çaprazlanmış modül aksiyomları benzer şekilde sağ etki kullanılarak da sağlanır.

Önerme 2.14 (C,R,∂) bir çaprazlanmış R-modül olmak üzere,

i). $\ker\partial$, C nin bir merkez idealidir ve R üzerinde bir modüldür.

ii). $\partial\,(C)\,,R$ de bir idealdir. Ayrıca, R nin bu ideali, $\ker\partial$ üzerinde sıfır olarak (trivally) etki eder ve $\ker\partial$ bir $R/\partial\,(C)$-modül yapısı oluşturur.

iii). C/C^2 ve $\partial C/\partial C^2$, birer $R/\partial\,(C)$-modül yapısı oluştururlar.

İspat. i). $a\in\ker\partial$ ve $c\in C$ için

$$\partial(ca)=\partial(c)\partial(a)=\partial(c)0=0$$

ve

$$\partial(ac)=\partial(a)\partial(c)=0\partial(c)=0$$

olduğundan $ca,\ ac\in\ker\partial$ elde edilir. Ayrıca

$$ac=\partial a.c=0c=c0=c.\partial a=ca$$

olduğundan $\ker\partial$, C nin merkezindedir.

$\ker\partial$ nin bir R-modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

$$R \times \ker\partial \to \ker\partial$$
$$(r,a) \mapsto r.a$$

dönüşümü, R nin C üzerine etki fonksiyonu olan

$$R \times C \to C$$
$$(r,c) \mapsto r.c$$

ile uyumlu olmak üzere, etki şartları her $a \in \ker\partial \subset C$ içinde geçerli olacağından, $\ker\partial$ bir R-modül yapısı oluşturur.

ii). $\partial(C)$ nin R de bir ideal olduğunu göstermek için, $\partial(c)$ nin R ile çarpım altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. (C,R,∂) çaprazlanmış modül olduğundan,

$$R \times C \to C$$
$$(r,c) \mapsto r.c$$

etki fonksiyonu gereğince , $r.c \in C$ ve $\partial(rc) \in \partial(C)$ dir. Ayrıca $\partial c \in \partial(C)$ ve $r \in R$ için,

$$r\partial c = \partial\left(r.c\right) \in \partial(C)$$

eşitliği geçerlidir. Benzer olarak

$$\partial cr = \partial\left(c.r\right) \in \partial(C)$$

bulunur. Dolayısıyla, $\partial(C)$, R de bir idealdir.

$\partial(C)$ nin $\ker\partial$ üzerine sıfır etkisi, $a \in \ker\partial$, $\partial c \in \partial C$ için

$$\partial ca = ca = c\partial\left(a\right) = c0 = 0$$

ve benzer olarak

$$a\partial c = ac = \partial\left(a\right)c = 0c = 0$$

şeklinde görülür. Böylece

$$R/\partial\left(C\right) \times \ker\partial \to \ker\partial$$
$$(r+\partial c, a) \mapsto \left(r+\partial c\right).a = ra$$

fonksiyonu yardımı ile $\ker \partial$ nin bir $R/\partial\left(C\right)$-modül yapısı oluşturduğu görülür. Etki fonksiyonunun tanımı ve $\ker \partial$ nin bir R-modül olması kullanılarak

a).

$$\begin{aligned}(r+\partial c)\left(a_1+a_2\right) &= r\left(a_1+a_2\right)\\ &= ra_1+ra_2\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}\left(\left(r_1+\partial c\right)+\left(r_2+\partial c\right)\right)a &= \left(\left(r_1+r_2\right)+\partial c\right)a\\ &= (r_1+r_2)a\\ &= r_1a+r_2a\end{aligned}$$

c).

$$\begin{aligned}\left(\left(r_1+\partial c\right)\cdot\left(r_2+\partial c\right)\right)a &= (r_1r_2+\partial c)a\\ &= (r_1r_2)a\\ &= (r_1+\partial c)r_2a\\ &= (r_1+\partial c)\left((r_2+\partial c)a\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

(iii). ∂C nin C/C^2 üzerine etkisini inceleyelim. $b,\ c\in C$ ve $c+C^2\in C/C^2$ için $x=\partial b\in\partial C$ olmak üzere

$$\begin{aligned}x\left(c+C^2\right) &= xc+C^2\\ &= \partial bc+C^2\\ &= bc+c\end{aligned}$$

elde edilir. $bc\in C^2$ ve $C^2/C^2\cong\left\{\overline{0}\right\}$ olduğundan bu ifade sıfırı verir. Dolayısıyla, ∂C nin C^2/C^2 üzerine etkisi sıfırdır. Böylece

$$\begin{gathered}R/\partial\left(C\right)\times C/C^2\to C/C^2\\ \left(r+\partial c,c+C^2\right)\mapsto\left(r+\partial c\right).\left(c+C^2\right)=rc+C^2\end{gathered}$$

fonksiyonu ile

a).

$$\begin{aligned}(r+\partial c)\left(c_1+C^2+c_2+C^2\right) &= (r+\partial c)\left((c_1+c_2)+C^2\right)\\ &= r(c_1+c_2)+C^2\\ &= (rc_1+rc_2)+C^2\\ &= \left(rc_1+C^2\right)+\left(rc_2+C^2\right)\\ &= (r+\partial c)\left(c_1+C^2\right)+(r+\partial c)\left(c_2+C^2\right)\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}((r_1+\partial c)+(r_2+\partial c))\left(c+C^2\right) &= ((r_1+r_2)+\partial c)\left(c+C^2\right)\\ &= (r_1+r_2)c+C^2\\ &= (r_1c+r_2c)+C^2\\ &= \left(r_1c+C^2\right)\left(r_2c+C^2\right)\\ &= (r_1+\partial c)\left(c+C^2\right)+(r_2+\partial c)\left(c+C^2\right)\end{aligned}$$

c).

$$\begin{aligned}((r_1+\partial c)\cdot(r_2+\partial c))\left(c+C^2\right) &= ((r_1r_2)+\partial c)\left(c+C^2\right)\\ &= (r_1r_2)c+C^2\\ &= r_1(r_2c)+C^2\\ &= (r_1+\partial c)\left(r_2c+C^2\right)\\ &= (r_1+\partial c)\left((r_2+\partial c)\left(c+C^2\right)\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından, ∂C bir $R/\partial\,(C)$-modüldür. $\square$

Benzer düşünce ile $\partial C/\partial C^2$ nin $R/\partial\,(C)$-modül olduğu gösterilir.

BÖLÜM 3

Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 3.1 R birimli ve değişmeli halka ve G de bir $\mathbf{k}$-modül olsun.Eğer her $x,\ y,\ z \in G$ için

i).$[x,x]=0$

ii).$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

özelliklerini sağlayan bir $[,]:G\times G\to G$ iki lineer (bilineer) fonksiyonu varsa G ye $\mathbf{k}$ üzerinde bir Lie cebiri denir. $[,]$ fonksiyonuna Lie braketi ya da çarpımı ve (ii) deki özelliğe jakobi özdeşliği denir. İki linerlik özelliği ve (i) gereğince

$$0=[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x]$$

olduğundan

iii).$[x,y]=-[y,x]$ ve

iv).$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$ olduğu gösterilir.(Amoya, 1974)

Örnek 3.1 G, $\mathbf{k}$ üzerinde bir cebir olsun. $[,]:G\times G\to G$ fonksiyonu

$$[x,y]=xy-yx$$

şeklinde tanımlansın. $[,]$ fonksiyonun iki lineer olduğunun gösterilmesi zor değildir.

i).

$$\begin{aligned}[x,x]&=xx-xx\\&=0\end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]&=[x,yz-zy]+[y,zx-xz]+[z,xy-yx]\\&=x(yz-zy)-(yz-zy)x+(xy-yx)z\\&-(zx-xz)y+z(xy-yx)-(xy-yx)z\\&=0\end{aligned}$$

olur. Böylece G, $[,]$ ile birlikte Lie cebiridir.

Tanım 3.2 G bir Lie cebiri olsun. Her $x, y \in G$ için $[x, y] = 0$ oluyorsa G ye abelyan Lie cebiri denir.(Amoya 1974)

Tanım 3.3 G_1, G_2 **k** üzerinde iki Lie cebir ve $f : G_1 \to G_2$ bir **k**-modül homomorfizmi olsun. Her $x, y \in G_1$ için

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

koşulunu sağlayan $f : G_1 \to G_2$ lineer dönüşümü varsa f ye bir Lie cebir homomorfizmi denir. Eğer f bir Lie cebir homomorfizmi ve bire bir örtense f ye bir Lie cebir izomorfizmi denir. Bu durumda G_1 ve G_2 ye izomorfiktirler denir.(Casas 1990)

Tanım 3.4 G bir Lie cebir ve $H \subseteq G$ olsun. Her $x, y \in H$ için $[x, y] \in H$ ve H, G nin alt modülü ise H a G nin bir Lie alt cebiri denir. H, G nin Lie alt cebiri ve her $x \in H$, $y \in G$ için $[x, y] \in H$ oluyorsa H a G nin ideali denir.

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının bir genellemesi olarak görülebilir. Şimdi **k** sıfırdan farklı birimi olan, değişmeli halka olmak üzere, T. Porter ratafından tanımlanan (Porter, 1986) de verilen **k**-cebirler üzerine çaprazlanmış modül arasındaki morfizim kavramını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim.

3.1 Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 3.5 M ve G iki Lie **k**-cebirler olmak üzere M üzerinde G nin Lie etkisi aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$G \times M \to M$$

$$(g, m) \mapsto g.m$$

dönüşümüdür.(Norrie, 1987)Her $k \in \mathbf{k}$, $m, m' \in M$, $g, g' \in G$ için

i).$k(g.m) = (kg).m = g.(km)$

ii).$g.(m + m') = g.m + g.m'$

iii).$(g + g').m = g.m + g'.m$

iv).$[g,g']\,.m = g(g'.m) - g'(g.m)$

v).$g.\,[m,m'] = [g.m,m'] + [m,g.m']$

Tanım 3.6 G ve M iki Lie **k**-cebir olsun.

$$\mu : M \to G$$

bir G cebir morfizmi ve

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g,m) &\mapsto g.m \end{aligned}$$

G nin M üzerine Lie etkisi ile birlikte her $m, m' \in M$ ve $g \in G$ için

ÇM1).$\mu\,(g,m) = [g,\mu(m)]$

ÇM2). $\mu(m).m' = [m,m']$

şartları sağlanıyor ise $(M,\ G,\ \mu)$ üçlüsüne Lie çaprazlanmış (crossed) G-modül denir. Sadece (ÇM1) aksiyomunu sağlayan $(M,\ G,\ \mu)$ üçlüsüne ön çaprazlanmış (crossed) G-modül denir. (ÇM2) özelliğine de Peiffer özdeşliği denir. (Norrie 1987)

Örnek 3.2 R bir Lie cebiri ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{aligned} \partial :\quad I &\to R \\ i &\mapsto i \end{aligned}$$

içine dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} R \times I & \to & I \\ (r,i) & \mapsto & [r,i] \end{array}$$

şeklinde Lie çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

ÇM1).

$$\begin{aligned} \partial(r,i) &= \partial[r,i] \\ &= [r,i] \\ &= [r,\partial i] \end{aligned}$$

ÇM2).

$$\begin{aligned} \partial r_{r'} &= r_{r'} \\ &= [r, r'] \end{aligned}$$

olduğundan dolayı (I, R, ∂) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.3 M, herhangi bir G-bimodül olsun.

$$\begin{aligned} M \times M &\rightarrow M \\ (m_1, m_2) &\mapsto [m_1, m_2] = 0 \end{aligned}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir Lie G-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 : \quad M &\rightarrow R \\ x &\mapsto 0(x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen verilen sıfır morfizminin

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g.m = gm \end{aligned}$$

etkisi ile birlikte çaprazlanmış modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

ÇM1).

$$\begin{aligned} 0(r, m) &= 0[r, m] \\ &= 0 \\ &= [r, 0m] \end{aligned}$$

ÇM2).

$$\begin{aligned} \partial m_{m'} &= 0m' \\ &= 0 \\ &= [m, m'] \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $(M, G, 0)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.4 M bir Lie G-cebir ve

$$\pi_2 : M \rightarrow G$$

ikinci izdüşüm fonksiyonu bir Lie G-cebir morfizmidir. G nin $G \bowtie M$ üzerinde Lie etkisi $g' \in G$ ve $(g', m) \in G \bowtie M$ için

$$g'(m, g) = (g'm, [g', g])$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(G \bowtie M, G, \pi_2)$ bir ön çaprazlanmış modüldür. Genellikle $(G \bowtie M, G, \pi_2)$ bir çaprazlanmış modül değildir.

Şimdi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.7 $(M,\ G,\ \mu)$ ve $(M',\ G',\ \mu')$ iki Lie çaprazlanmış modül (çaprazlanmış ön modül) olsun.

$$f(g.m) = \phi(g).f(m)$$

ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & M' \arrow[d, "\mu'"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\mu' f(m) = \phi\mu(m)$$

olacak şekilde $f : M \to M'$, $\phi : G \to G'$ Lie G-Cebir morfizimleri varsa

$$(f, \phi) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizim denir. Eğer f ve ϕ örtense $(f,\ \phi)$ ye örten, f ve ϕ bire bir ise $(f,\ \phi)$ ye bire bir denir. $f,\ \phi$ izomorfizma ise yani f ve ϕ birebir ve örtense

$$(f, \phi) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$$

morfizmine izomorfizm denir. Bu durumda

$$(f, \phi)^{-1} = (f^{-1}, \phi^{-1}) : (M', G', \mu') \to (M, G, \mu)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve

$$(f, \phi)^{-1}(f, \phi) = (I_d, I_d) = (f, \phi)(f, \phi)^{-1}$$

dir.Birleşim işlemi morfizimlerin bileşkesi ve birim morfizm

$$(Id_M, Id_G) = (1, 1)$$

olmak üzere çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulur ve bu kategori $\mathcal{CM}$ (ön çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathcal{PCM}$) ile gösterilir. Özel olarak $G = G'$ ve ϕ birim dönüşüm ise, f bir Lie G-Cebir morfizmi olduğundan

$$f(gm) = gf(m)$$

dir ve diyagram değişmeli olduğundan, yani

$$\mu' f(m) = \mu(m)$$

sağlandığından, f bir çaprazlanmış Lie G-modül morfizmidir. G üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış Lie G-modül morfizmi olduğundan $\mathcal{CM}$ nin bir alt kategorisi elde edilir ve bu kategori $\mathcal{CM}_G$ ile gösterilir. (Casas 1990)

Örnek 3.5 $(f, I) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi ise (M, M', f) bir çaprazlanmış modüldür. Burada M' nün M ye etkisi μ' yardımıyladır. Yani $m' \in M'$ ve $m \in M$ için

$$m'm = \mu'(m')m$$

dir.

3.2 Çaprazlanmış Alt Modüller

Genel olarak, bir matematiksel yapının alt yapıları ilgili alandaki çalışmalarda önemli yer tutar. Bir grubun (normal) alt grubu, bir cebrin alt cebiri, ideali, bir topolojik uzayın alt uzayı gibi. Benzer olarak, bir çaprazlanmış modülün, alt çaprazlanmış modülü, ideali ve bölüm çaprazlanmış modülü gibi kavramlar da çaprazlanmış modüllerle ilgili çalışmalarda önem kazanır. (Shammu, 1992) da $\mathcal{CM}_G$ de bunlara ver verilmiştir.

Tanım 3.8 $(G,\ M,\ \mu)$ bir çaprazlanmış modül olsun. M', M nin ve G', G nin bir alt Lie cebiri olmak üzere,

$$\mu' : \mu\mid_{M'} : M' \to G'$$

μ nin M' ye kısıtlanmışı ve G' nün M' ne etkisi G nin M üzerine etkisinin kısıtlanmışı olmak üzere (M', G', μ') çaprazlanmış modülüne (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü denir ve $(M', G', \mu') \leq (M, G, \mu)$ şeklinde gösterilir.(Casas 1990)

Örnek 3.6 A, G Lie cebirinin bir alt Lie cebiri olsun. Bu durumda (A, A, I_{dA}), $(0, A, i)$, (G, G, I_{dG}) ve $(0, G, i)$ birer çaprazlanmış modüldür. Üstelik, (A, A, I_{dA}), (G, G, I_{dG}) nin bir çaprazlanmış modülü ve $(0, A, i)$ de $(0, G, i)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür.(Casas 1990)

Örnek 3.7 I, G Lie cebirinin herhangi bir ideali olmak üzere (I, G, i), (G, G, I_d) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.(Casas 1990)

Örnek 3.8 A ve B, G nin ideali, $B \subseteq A$ olmak üzere (B, A, i), (A, G, i) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.(Casas 1990)

Örnek 3.9 A, G-modül, B, A içinde R-alt modül olmak üzere $(B, G, 0)$, $(A, G, 0)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.(Casas 1990)

3.3 Çaprazlanmış İdeal

Tanım 3.9 (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün (M', G', μ') alt çaprazlanmış modülü olmak üzere

i). G', G cebirinin bir idealidir, yani $G' \trianglelefteq G$

ii).Her $g \in G$ ve $m' \in M'$ için $g.\ m' \in M'$

iii).Her $g' \in G'$ ve $m \in M$ için $g'.\ m \in M'$

şartını sağlıyorsa (M', G', μ') alt çaprazlanmış modülüne, (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün ideali denir ve $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ şeklinde gösterilir. Eğer $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ ise her $m \in M$ ve $m' \in M'$ için

$$[m, m'] = \mu(m).m' \in M'$$

olduğundan M', M nin bir idealidir.(Casas 1990)

Örnek 3.10 I, G Lie cebirinin bir ideali olmak üzere $(I,\ I,\ I_d)$, $(G,\ G, I_g)$ nin ve $(0, I, i)$ de $(0, G, i)$ nin birer çaprazlanmış idealidir.(Casas 1990)

Önerme 3.10 $(M', G', \mu') \leq (M'', G'', \mu'') \leq (M, G, \mu)$ şeklindeki alt çaprazlanmış modüller için (M', G', μ'), (M, G, μ) nin ideali ise (M', G', μ'), (M'', G'', μ'') nün idealidir.(Casas 1990)

İspat. i). $g \in G$, $g' \in G'$, $g'' \in G''$, $m \in M$ ve $m' \in M'$ için $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ olduğundan $G' \trianglelefteq G$ olur ve $G' \leq G'' \leq G$ olduğundan $[g', g''] \in G'$ olup, $G' \trianglelefteq G''$ olur.

ii). $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ olduğundan $gm' \in M'$ olur ve $G'' \leq G$ olduğundan $g''m' \in M'$ sağlanır.

iii).$gm' \in M'$ ve $M' \leq M'' \leq M$ olduğundan $g'm'' \in M'$ olur.

Böylece $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M'', G'', \mu'')$ elde edilir. $\square$

3.4 Bölüm Çaprazlanmış Modül

Tanım 3.11 (M', G', μ'), (M, G, μ) nin bir ideali olsun. Bu durumda G, M/M' üzerine etki eder. G' nün M/M' üzerine etkisi ise

$$\begin{array}{rcl} G' \times M/M' & \rightarrow & M/M' \\ (g', (m + M')) & \mapsto & g'.(m + M') \end{array}$$

olmak üzere

$$g'.(m + M') = g'.m + M'$$

ve $g'm \in M'$ olduğundan sıfırdır. Dolayısıyla, G/G' bölüm Lie cebiri M/M' üzerine

$$\begin{array}{rcl} G/G' \times M/M' & \rightarrow & M/M' \\ ((g + G'), (m + M')) & \mapsto & g.m + M' \end{array}$$

şeklinde etki eder ve bu etki bir Lie etkisidir.

$$\begin{array}{rrcl} \overline{\mu}: & M/M' & \rightarrow & G/G' \\ & (m + M') & \mapsto & \mu(m) + G' \end{array}$$

bölüm dönüşümü bir Lie cebir homomorfizmidir. Böylece bu dönüşüm ve etki fonksiyonuna göre

$$(M/M', G/G', \overline{\mu}) = \frac{(M, G, \mu)}{(M', G', \mu')}$$

Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturur ve buna bölüm çaprazlanmış modül denir.(Casas 1990)

Örnek 3.11 G', G nin ideali olmak üzere,

$$\frac{(0, G, i)}{(0, G', i)} = (0, G/G', i)$$

ve

$$\frac{(G, G, Id)}{(G', G', Id)} = (G/G', G/G', Id)$$

şeklinde bölüm çaprazlanmış modülleri elde edilir.(Casas 1990)

3.5 Çaprazlanmış Modüllerin Direkt Çarpımı

Tanım 3.12 $(S,\ H,\ \mu)$, (M,G,μ') çaprazlanmış modüller, $S\times M$ ve $H\times G$ Lie cebirlerin direkt çarpımı olmak üzere

$$\begin{array}{rlcl} \mu\times\mu': & S\times M & \to & H\times G \\ & (s,m) & \mapsto & (\mu(s),\mu'(m)) \end{array}$$

dönüşümü ve

$$\begin{array}{lcl} (H\times G)\times(S\times M) & \to & S\times M \\ ((h,g),(s,m)) & \mapsto & (h,g).(s,m)=(h.s,g.m) \end{array}$$

şeklinde verilen çaprazlanmış modüllerin indirgenen Lie etkileriyle birlikte,

$$(S\times M,H\times G,\mu\times\mu')$$

çaprazlanmış modülünü oluşturur. Bu modüle $(S,\ H,\ \mu)$ ve (M,G,μ') çaprazlanmış modüllerinin direkt çarpımı denir ve $(S,\ H,\ \mu)\times(M,G,\mu')$ ile gösterilir.(Casas 1990)

3.6 Çaprazlanmış Modüllerin Çekirdeği ve Görüntüsü

Tanım 3.13 $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\mu:\ker f\to\ker\phi$$

çaprazlanmış modülüne (f,ϕ) morfizminin çekirdeği denir ve $\ker(f,\phi)=(\ker f,\ker\phi)$ ile gösterilir.

$$\mu':\operatorname{im} f\to\operatorname{im}\phi$$

çaprazlanmış modülüne (f,ϕ) morfizminin görüntüsü denir ve $\operatorname{im}(f,\phi)=(\operatorname{im} f,\operatorname{im}\phi)$ ile gösterilir.

Önerme 3.14 $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun.

$$\ker(f,\phi)=(\ker f,\ker\phi)$$

çaprazlanmış modülü, (M,G,μ) nun bir idealidir.(Casas 1990)

İspat. $g\in G$ ve $g_1\in\ker\phi$ için

$$\phi([g,g_1])=[\phi(g),0]=0$$

olduğundan $[g, g_1] \in \ker\phi$ dir. Böylece $\ker\phi$, G nin idealidir. Ayrıca $g \in G$ ve $m_1 \in \ker f$ için

$$f(gm_1) = \phi(g)f(m_1) = \phi(g)0 = 0$$

olduğundan $gm_1 \in \ker f$ olur. $g_1 \in \ker\phi$, $m \in M$ için

$$f(g_1m) = \phi(g_1)f(m) = 0f(m) = 0$$

olduğundan $g_1m \in \ker f$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.15 $(f, \phi) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun.

$$\operatorname{im}(f, \phi) = (\operatorname{im} f, \operatorname{im}\phi)$$

(M, G, μ) nun bir alt çaprazlanmış modülüdür.(Casas 1990)

İspat. $g' \in G'$, $\operatorname{im} f \subseteq M'$, $\operatorname{im}\phi \subseteq G'$ ve M' üzerine G'-etkisi,

$$\phi(g)f(m) = f(gm) \in \operatorname{im} f$$

şeklinde, $\operatorname{im} f$ üzerine $\operatorname{im}\phi$-etkisine indirgendiğinden $\operatorname{im}(f, \phi)$, (M, G, μ) nun bir alt çaprazlanmış modülüdür. $\square$

Önerme 3.16 $(f, \phi) : (M, G, \mu) \to (M^*, G^*, \mu^*)$ çaprazlanmış modül morfizmi örten olsun. Bu durumda (M', G', μ') , (M, G, μ) nin bir ideali ise $(f, \phi)\left((M', G', \mu')\right) = (f(M'), \phi(G'), \mu^*)$ da (M^*, G^*, μ^*) nün bir idealidir.(Casas 1990)

İspat. i). $g^* \in G^*, g' \in G'$ olsun. Bu durumda $g^* = \phi(g)$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Böylece

$$[g^*, \phi(g')] = [\phi(g), \phi(g')] \in \phi(G)$$

olur.

ii).$g^* \in G^*, g \in G$ ve $m' \in M$ olsun. Bu durumda $g^* = \phi(g)$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Böylece

$$g^*f(m') = \phi(g)f(m') \in f(M')$$

olur.

iii). $g' \in G', m^* \in M^*$ olsun. Bu durumda $m^* = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Böylece

$$\phi(g')m^* = \phi(g')f(m) = f(g'm) \in f(M)$$

olur. $\square$

Önerme 3.17 M ve G bir Lie cebiri olmak üzere G nin M üzerine bir Lie etkisi olsun. $\mu : M \to G$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.(CasasLadra 2000)

i).(M, G, μ) çaprazlamış modüldür.

ii).

$$(\mu, 1) : M \bowtie G \to G \bowtie G$$

ve

$$(1, \mu) : M \bowtie M \to M \bowtie G$$

Lie cebirlerinin homomorfizmidir. Burada $M \bowtie G$, M ve G nin yarı-direkt çarpımıdır.

Yukarıdakilerden aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.18 i).(M, G, μ) ön çaprazlanmış modül ise $Im\,(\mu) = H$, G nin bir idealidir.

ii).(M, G, μ) çaprazlanmış modül ise,

a).$M \to H$ ve $H \to G$ çaprazlanmış modüldürler.

b).$\ker \mu = L \subseteq Z(M)$ burada $Z(M)$, M nin merkezi ve $0 \to L \to M \to H \to 0$ Lie cebirinin merkez genişlemesidir.

c).H nın $Z(M)$ üzerine Lie etkisi aşikardır, $Z(M)$ ve L, Q-modüldür. $Q = G/\mu(M)$

Tanım 3.19 (M, G, μ) çaprazlanmış modül olmak üzere G yardımıyla M nin sabit elemanlarının oluşturduğu küme

$$M^G = \{m \in M : \text{her } g \in G \text{ için } g.m = m\}$$

şeklinde tanımlanır ve M^G, M ve G nin idealidir. Aynı zamanda M^G, $Z(M)$ (M nin merkezi) nin idealidir.

Tanım 3.20 G bir Lie **k**-cebir ve $d : G \to M$, k-lineer dönüşümler olsun. Her $g,\ g' \in G$ için,

$$d\,[g, g'] = gd(g') - g'd\,(g)$$

özelliği sağlanıyorsa d ye bir derivasyon denir. G den M ye bütün derivasyonların kümesi $\mathrm{Der}\,(G)$ ile gösterilir.

$d : G \to G$ derivasyonlarının kümesi de $\mathrm{Der}(G)$ ile gösterilir.

$\mathrm{Der}(G)$ bir Lie cebiridir. $g \in G$ için $\mathrm{ad}_g(g') = [g, g']$ şeklinde tanımlı $\mathrm{ad}_g : G \to G$ fonksiyonu bir derivasyondur. $\mathrm{ad}(g) = \mathrm{ad}_g$ şeklinde tanımlanan $\mathrm{ad} : G \to \mathrm{Der}(G)$ fonksiyonu da bir Lie cebir morfizmidir.

Örnek 3.12 M Lie cebir olmak üzere $(M, \mathrm{Der}(M), \mathrm{ad})$ bir çaprazlamış modüldür.

3.7 İzomorfizma Teoremleri

Cebir teoriye benzer olarak, izomorfizm teoremleri çaprazlanmış modüller için de geçerlidir. Dolayısıyla bu teoremleri ispatsız olarak ifade edeceğiz.

Teorem 3.21 (I. İzomorfizm) $(f, \phi) : (M, G, \mu) \longrightarrow (M', G', \mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\frac{(M, G, \mu)}{\ker(f, \phi)} \cong \mathrm{Im}(f, \phi)$$

izomorfizmi geçerlidir.(Grandjean, 1971)

Teorem 3.22 (II. İzomorfizm) (M'', G'', μ''), (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü ve (M', G', μ') , (M, G, μ) nün ideali ise

$$\frac{(M', G', \mu') + (M'', G'', \mu'')}{(M', G', \mu')} \cong \frac{(M'', G'', \mu'')}{(M', G', \mu') \cap (M'', G'', \mu'')}$$

izomorfizmi geçerlidir.(Grandjean 1971)

Teorem 3.23 (III. İzomorfizm) (M', G', μ') ve (M'', G'', μ'') ,(M, G, μ) çaprazlanmış modülün ideali ve $(M'', G'', \mu'') \subset (M', G', \mu')$ ise

$$\frac{(M, G, \mu)(M'', G'', \mu'')}{(M', G', \mu')(M'', G'', \mu'')} \cong \frac{(M, G, \mu)}{(M', G', \mu')}$$

izomorfizmi geçerlidir.(Grandjean 1971)

Tanım 3.24 (A, G, α) ön çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda A nın peiffer elemanları ya da çaprazlanmış komütatörleri $a, a' \in A$ için

$$[a, a']_c = [a, a'] - \alpha(a) \cdot a'$$

şeklinde tanımlanır. A nın Peiffer elemanları A nın bir alt cebirini üretir. Bu alt cebir $[A, A]_c$ ile gösterilir ve $[A, A]_c$ ye A nın Peiffer alt cebiri denir.(Casas 1990)

Teorem 3.25 (A, G, α) ön çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a). A nın Peiffer altcebiri $[A, A]_c$, sabittir. Yani $[A, A]_c$ G etkisi altında kapalıdır.

b). A nın Peiffer altcebiri $[A, A]_c$, A nın idealidir.

c). $(A/[A, A]_c, G, \alpha^c)$ üçlüsü çaprazlanmış modüldür ve şu evrensel özelliği sağlar:

(M, H, μ) bir çaprazlanmış modül ve $(f, \phi) : (A, G, \alpha) \longrightarrow (M, H, \mu)$ bir morfizm ise

$$\begin{tikzcd}
(A, G, \alpha) \arrow[r, "(\pi,1)"] \arrow[dr, "(f,\phi)"'] & (A/[A, A]_c, G, \alpha^c) \arrow[d, "(f^c,\phi)"] \\
 & (M, H, \mu)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$(f^c, \phi) : (A/[A, A]_c, G, \alpha^c) \longrightarrow (M, H, \mu)$$

vardır.

İspat. a). $g, g' \in G$, $a, a' \in A$ için

$$[g, g'] \cdot a = g \cdot (g' \cdot a) - g' \cdot (g \cdot a)$$

olup buradan da

$$\begin{aligned}
g \cdot [a, a']_c &= g \cdot ([a, a'] - \alpha(a) \cdot a') \\
&= g \cdot [a, a'] - g \cdot (\alpha(a) \cdot a') \\
&= [g \cdot a, a'] + [a, g \cdot a'] - g \cdot (\alpha(a) \cdot a') \\
&= [g \cdot a, a'] + [a, g \cdot a'] - [g, \alpha(a)]\, a' - \alpha(a) \cdot (g \cdot a') \\
&= [g \cdot a, a'] + [a, g \cdot a'] - \alpha(g \cdot a) \cdot a' - \alpha(a) \cdot (g \cdot a') \\
&= [g \cdot a, a'] - \alpha(g \cdot a) \cdot a' + [a, g \cdot a'] - \alpha(a) \cdot (g \cdot a') \\
&= [g \cdot a, a']_c + [a, g \cdot a']_c
\end{aligned}$$

elde edilir.

b).$[a,[a',a'']_c] \in [A,A]_c$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
[[a',a''],a]_c &= [[a',a''],a] - \alpha[a',a'']\cdot a \\
&= [[a',a''],a] - [\alpha(a'),\alpha(a'')]\cdot a \\
&= -[a,[a',a'']] - \alpha(a')\cdot(\alpha(a'')\cdot a) + \alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a) \\
&= -[a,[a',a'']] - \alpha(a')\cdot[a'',a] + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c + \alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a) \\
&= -[a,[a',a'']] - \alpha(a')\cdot[a'',a] - [a'',\alpha(a')\cdot a] + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c + \alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a) \\
&= -[a,[a',a'']_c] - [a'',\alpha(a')\cdot a]_c + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c
\end{aligned}$$

ve böylece

$$[a,[a',a'']_c] = -[[a',a''],a]_c - [a'',\alpha(a')\cdot a]_c + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c \in [A,A]_c$$

elde edilmiş olur.

c).G nin A üzerine etkisi (a) şıkkından dolayı G nin $A/[A,A]_c$ üzerine etkisi vardır. Ayrıca $[A,A]_c$ nın elemanlarının α altındaki görüntüleri

$$\begin{aligned}
\alpha([a,a']) &= \alpha([a,a'] - \alpha(a)\cdot a') \\
&= [\alpha(a),\alpha(a')] - \alpha(a)\cdot\alpha(a') \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\alpha^c : A/[A,A]_c \longrightarrow G$$

şeklinde bir Lie G-cebir morfizmi vardır. $[A,A]_c$ nin tanımı gereğince $(A/[A,A]_c, G, \alpha^c)$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
f([a,a']_c) &= f([a,a']) - f(\alpha(a)\cdot a') \\
&= [f(a),f(a')] - \phi\alpha(a)\cdot f(a') \\
&= [f(a),f(a')] - \mu f(a)\cdot f(a') \\
&= [f(a),f(a')] - [f(a),f(a')] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f^c tek türlü belirlidir (Casas 1990). $\square$

3.8 Lie Cebirlerin Derivasyonları

Grup teoride bir grubun diğeri üzerine etkisinin otomorfizm grubuyla belirlendiği iyi bilinir. A grubunun B grubu üzerine etkisi $A \longrightarrow Aut(B)$ homomorfizmi ile verilir. A

grubu ile B grubunun herhangi bir genişlemesi ile bir $A \longrightarrow Out(B)$ homomorfizması ilgilidir. Cebir teoride ise bir cebirin diğeri üzerine etkisi aşağıda söz edeceğimiz çarpım cebri ile verilir. Cebirsel genişlemede ise P_B dış (outer) çarpım yer alır. Çarpım cebri kavramı, S.Mac Lane tarafından (Mac Lane, 1958) da tanımlanmıştır. L. Lavendhomme ve T.H. Lucas ise (Lavendhomme and Lucas, 1996) çalışmalarında bu kavram ile çaprazlanmış modül yapısı arasındaki ilişkiden söz etmişlerdir.

Tanım 3.26 (M, G, μ) ve (N, G, ν) çaprazlanmış iki Lie modül ve $\alpha : M \longrightarrow N$ bir **k**-lineer dönüşüm olsun. Her $m, m' \in M$ için

$$\alpha\,[m, m'] = \mu(m) \cdot \alpha(m') - \mu(m') \cdot \alpha(m)$$

ise α ya M den N ye bir derivasyon denir. Bütün derivasyonların kümesi $\mathrm{Der}_G(M, N)$ şeklinde gösterilir.

$g \in G$, $\alpha \in \mathrm{Der}_G(M, N)$ ve $ad_g : M \longrightarrow G$ fonksiyonu $ad_g(m) = [g, \mu(m)]$ şeklinde tanımlanmak üzere $\nu(\alpha(m)) = ad_g(m)$ yani $\nu\alpha = ad_g$ ise (α, g) ikilisine $\mathrm{Der}_G(M, N)$ nin konjugate elemanı denir.(Casas 1990)

Tanım 3.27 Her $g, g' \in G$ için

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G & \longrightarrow & \mathrm{Der}(G) \\ & g & \mapsto & \mu(g) = \mu_g \end{array}$$

olmak üzere, $\mu(g)g' = gg'$ şeklinde tanımlı $\mu(g) = \mu_g : G \longrightarrow G$ dönüşümüne iç (inner) derivasyon denir.(Casas 1990)

Yardımcı Teorem 3.28 $\mathrm{Der}_G(M, N)$ nin konjugate elemanlarının kümesi bir Lie **k**-cebiridir.(Guin, 1986)

Tanım 3.29 G nin $\mathrm{Der}_G(M, N)$ üzerine etkisi $g \in G$, $(\alpha, h) \in \mathrm{Der}_G(M, N)$ ve her $m \in M$ için

$$\beta(m) = g \cdot \alpha(m) - \alpha(g \cdot m)$$

olmak üzere

$$g \cdot (\alpha, h) = (\beta, [g, h])$$

şeklinde tanımlanmıştır(Casas 1990).

Yardımcı Teorem 3.30 Yukarıda tanımlanan G nin $\mathrm{Der}_G(M, N)$ üzerine etkisi bir Lie etkisidir (Guin 1986).

Yardımcı Teorem 3.31 $\eta(\alpha, g) = g$ şeklinde tanımlanan $\eta : \mathrm{Der}_G(M, N) \longrightarrow G$ fonksiyonu bir Lie cebir homomorfizmidir ve $\eta(g \cdot (\alpha, h)) = [g, \eta(\alpha, h)]$ dır.(Guin 1986)

Yukarıdaki yardımcı teoremler gereğince aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.32 (M, G, μ) bir Lie ön çaprazlanmış modül ve (N, G, ν) bir çaprazlanmış Lie modül olsun. Bu durumda $\mathrm{Der}_G(M, N)$ konjugati bir ön çaprazlanmış G-modüldür.(Casas 1990)

Önceden verdiğimiz derivasyon tanımını kısaca hatırlayalım.

Tanım 3.33 G den M ye bütün derivasyonların kümesi $\mathrm{Der}(G)$ olsun. (M, G, μ) çaprazlanmış modül ve $f : M \longrightarrow M$, $\phi : G \longrightarrow G$ birer fonksiyon olmak üzere $(f, \phi) : (M, G, \mu) \longrightarrow (M, G, \mu)$ verilsin.

i).$f \in \mathrm{Der}(M)$, $\phi \in \mathrm{Der}(G)$

ii). $\phi\mu = \mu f$

iii).Her $g \in G$ ve her $m \in M$ için $f(g \cdot m) = g \cdot f(m) + \phi(g) \cdot m$

özellikleri sağlanıyorsa (f, ϕ) ye (M, G, μ) nin bir derivasyonu denir. (M, G, μ) nin bütün derivasyonlarının kümesi $\mathrm{Der}(M, G, \mu)$ ile gösterilir.(Casas 1990)

Önerme 3.34 $\mathrm{Der}(M, G, \mu)$ kümesi $(f, \phi), (f_1, \phi_1), (f_2, \phi_2) \in \mathrm{Der}(M, G, \mu)$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

+). $(f_1, \phi_1) + (f_2, \phi_2) = (f_1 + f_2, \phi_1 + \phi_2)$

·). $k(f, \phi) = (kf, k\phi)$

∘). $[(f_1, \phi_1), (f_2, \phi_2)] = ([f_1, f_2], [\phi_1, \phi_2])$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte bir Lie **k**-cebir yapısı oluşturur.(Casas 1990)

İspat. $(f, \phi), (f_1, \phi_1), (f_2, \phi_2) \in \mathrm{Der}(M, G, \mu)$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{k} \times \mathrm{Der}(M, G, \mu) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(M, G, \mu) \\ (k, (f, \phi)) & \mapsto & k \cdot (f, \phi) = k(f, \phi) \end{array}$$

olmak üzere

i).

$$\begin{aligned} k((f_1,\phi_1)+(f_2,\phi_2)) &= k(f_1+f_2,\phi_1+\phi_2) \\ &= (k(f_1+f_2),k(\phi_1+\phi_2)) \\ &= (kf_1+kf_2,k\phi_1+k\phi_2) \\ &= k(f_1,\phi_1)+k(f_2,\phi_2) \end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned} (k_1+k_2)(f,\phi) &= ((k_1+k_2)f,(k_1+k_2)\phi) \\ &= (k_1f+k_2f,k_1\phi+k_2\phi) \\ &= (k_1f,k_1\phi)+(k_2f,k_2\phi) \\ &= k_1(f,\phi)+k_2(f,\phi) \end{aligned}$$

iii).

$$\begin{aligned} (k_1k_2)(f,\phi) &= (k_1k_2f,k_1k_2\phi) \\ &= k_1(k_2f,k_2\phi) \\ &= k_1(k_2(f,\phi)) \end{aligned}$$

olduğundan $(\mathrm{Der}(M,G,\mu),+,\cdot,(\circ))$ dörtlüsü bir **k**-modül yapısı oluşturur. Ayrıca,

iv).

$$\begin{aligned} k((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)) &= k(f_1f_2,\phi_1\phi_2) \\ &= (k(f_1f_2),k(\phi_1\phi_2)) \\ &= ((kf_1)f_2,(k\phi_1)\phi_2) \\ &= (kf_1,k\phi_1)\circ(f_2,\phi_2) \\ &= (k(f_1,\phi_1))\circ(f_2,\phi_2) \\ (f_1,\phi_1)\circ(k(f_2,\phi_2)) &= (f_1,\phi_1)\circ(kf_2,k\phi_2) \\ &= (f_1,(kf_2)),\phi_1(k\phi_2)) \\ &= (k(f_1f_2),k(\phi_1\phi_2)) \\ &= k(f_1f_2,\phi_1\phi_2) \\ &= k((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)) \end{aligned}$$

olduğundan $\mathrm{Der}(M,G,\mu)$, bir **k**-cebirdir. □

Tanım 3.35 $d:G\to M$ bir derivasyon olsun. Bu durumda $g\in G$ ve $m\in M$ için $\sigma_d(g)=\mu d(g)$ ve $\theta_d(m)=d\mu(m)$ şeklinde tanımlı $\sigma_d(g):G\to G$, $\theta_d(m):M\to M$ fonksiyonları için $\sigma_d \in \mathrm{Der}(G)$ ve $\theta_d \in \mathrm{Der}(M)$ dir. Bunlara d ye karşılık gelen derivasyonlar denir. θ_d nin bir derivasyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\theta_d\,[m, m'] &= d\mu\,[m, m'] \\
&= d\,[\mu(m), \mu(m')] \\
&= \mu(m).d\mu(m') - \mu(m').d\mu(m) \\
&= [m, \theta_d(m')] - [m', \theta_d(m)] \\
&= m\theta_d(m') - m'\theta_d(m)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde σ_d nin de bir derivasyon olduğu gösterilir (Casas 1990).

Teorem 3.36 θ_d ve σ_d derivasyonları aşağıdaki şartları sağlar (Casas 1990).

a) $\theta_d d = d\ \sigma_d$

b) $\sigma_d \mu = \mu \theta_d$

c) $(\theta_d, \sigma_d) \in \mathrm{Der}(M, G, \mu)$

İspat. (a) ve (b) açıktır.

c)

$$\begin{aligned}
\theta_d(g \cdot m) &= d\mu(g \cdot m) \\
&= d\,[g, \mu(m)] \\
&= g \cdot d\mu(m) - \mu(m) \cdot d(g) \\
&= g \cdot d\mu(m) - [m, d(g)] \\
&= g \cdot d\mu(m) + \mu d(g) \cdot m \\
&= g\theta_d(m) + \sigma_d(g) \cdot m
\end{aligned}$$

dir.

$\mathrm{Der}(G, M)$ üzerinde aşağıdaki şekilde $(+), (.)ve([,])$ işlemleri tanımlanır. $i = 1, 2$ için θ_i ve σ_i, d_i derivasyonuna karşılık gelen derivasyonlar olmak üzere

+). $(d_1 + d_2)(g) = d_1(g) + d_2(g)$

$\cdot$). $(kd)(g) = kd(g)$

[,]). $[d_1, d_2]\,(g) = d_1\sigma_2(g) - d_2\sigma_1(g)$

$$= \theta_1 d_2(g) - \theta_2 d_1(g)$$

$[,]$ operatörünü biraz daha detaylı incelersek

$$\begin{aligned}
[d_1, d_2]\,[g, g'] &= d_1\sigma_2\,[g, g'] - d_2\sigma_1\,[g, g'] \\
&= d_1\,[g, \mu d_2(g')] - d_1\,[g', \mu d_2(g)] - d_2\,[g, \mu d_1(g')] + d_2\,[g', \mu d_1(g)] \\
&= g \cdot d_1\mu d_2(g') - g' \cdot d_1\mu d_2(g) - g \cdot d_2\mu d_1(g') + g' \cdot d_2\mu d_1(g) \\
&= g \cdot (d_1\sigma_2(g') - d_2\sigma_1(g')) - g'(d_1\sigma_2(g) - d_2\sigma_1(g)) \\
&= g \cdot [d_1, d_2]\,(g') - g' \cdot [d_1, d_2]\,(g)
\end{aligned}$$

dir. $\square$

Teorem 3.37 $i = 1, 2$ için σ_i ve θ_i ler $d_i \in \mathrm{Der}(G, M)$ ye karşılık gelen ifadeler olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur (Casas 1990).

a) Eğer $d = d_1 + d_2$ ise $\sigma_d = \sigma_1 + \sigma_2$ ve $\theta_d = \theta_1 + \theta_2$ dir.

b) Eğer $d = kd_1$ ise $\sigma_d = k\sigma_1$ ve $\theta_d = k\theta_1$ dir.

c) Eğer $d = [d_1, d_2]$ ise $\sigma_d = [\sigma_1, \sigma_2]$ ve $\theta_d = [\theta_1, \theta_2]$ dir.

İspat. a) $d = d_1 + d_2$ ise

$$\begin{aligned}
\sigma_d(g) &= \mu(d_1 + d_2)(g) \\
&= \mu(d_1(g) + d_2(g)) \\
&= \mu(d_1(g)) + \mu(d_2(g)) \\
&= \sigma_{d_1}(g) + \sigma_{d_2}(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_d(m) &= (d_1 + d_2)\mu(m) \\
&= d_1\mu(m) + d_2\mu(m) \\
&= \theta_{d_1}(m) + \theta_{d_2}(m)
\end{aligned}$$

b) $d = kd_1$ ise

$$\begin{aligned}
\sigma_d(g) &= \sigma_{kd_1}(g) \\
&= \mu(kd_1)(g) \\
&= \mu(k(d_1(g)) \\
&= k\mu(d_1(g)) \\
&= k\sigma_{d_1(g)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_d(m) &= kd_1\mu(m) \\ &= k\theta_{d_1}(m) \end{aligned}$$

c) $d = [d_1, d_2]$ise

$$\begin{aligned} \sigma_d(g) &= \sigma_{[d_1,d_2]}(g) \\ &= \mu\left[d_1, d_2\right](g) \\ &= \mu(d_1\mu d_2)(g) \\ &= \mu d_1(\mu d_2(g)) \\ &= \sigma_{d_1}(\mu d_2(g)) \\ &= \sigma_{d_1}(\sigma_{d_2}(g)) \\ &= \left[\sigma_{d_1}, \sigma_{d_2}\right](g) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\theta_d = [\theta_1, \theta_2]$ olduğu gösterilebilir. $\square$

Önerme 3.38 $(\mathrm{Der}(G, M), +, \cdot, [,])$ bir Lie **k**-cebirdir (Casas 1990).

Sonuç 3.39 $d \in \mathrm{Der}(G, M)$ için $\tau(d) = \sigma_d$ ve $\phi(d) = \theta_d$ şeklinde tanımlı $\tau : \mathrm{Der}(G, M) \to \mathrm{Der}(G)$ ve $\phi : \mathrm{Der}(G, M) \to \mathrm{Der}(M)$ fonksiyonları birer Lie cebir homomorfizmleridir (Casas 1990).

Teorem 3.40 $\mathrm{Der}(M, G)$ kümesi

+). $(d_1 + d_2)(g) = d_1(g) + d_2(g)$

$\cdot$). $(kd)(g) = kd(g)$

$[,]$). $[d_1, d_2](g) = d_1\sigma_2(g) - d_2\sigma_1(g)$

$$= \theta_1 d_2(g) - \theta_2 d_1(g)$$

işlemleriyle birlikte bir **k**-cebir yapısı oluşturur (Casas 1990).

İspat. $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(G, M)$ için

$$\begin{aligned} (d_1 \circ d_2)(g_1 g_2) &= d_1\mu d_2(g_1 g_2) \\ &= d_1\mu(g_1 \cdot d_2(g_2)) \\ &= d_1(g_1\mu d_2(g_2)) \\ &= g_1 \cdot (d_1\mu d_2(g_2)) \\ &= g_1 \cdot (d_1 \circ d_2)(g_2) \end{aligned}$$

olduğundan $(d_1 \circ d_2) \in \mathrm{Der}(G,M)$ elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}\times\mathrm{Der}(G,M) & \to & \mathrm{Der}(G,M) \\ (k,d) & \to & kd \end{array}$$

olmak üzere,

a)

$$\begin{aligned} k(d_1+d_2)(g) &= k(d_1(g)+d_2(g)) \\ &= (kd_1)(g)+(kd_2)(g) \\ &= (kd_1+kd_2)(g) \end{aligned}$$

b)

$$(k_1+k_2)d(g) = k_1d(g)+k_2d(g)$$

c)

$$(k_1k_2)d(g) = k_1(k_2d)(g)$$

d)

$$\begin{aligned} k\left[d_1,d_2\right](g) &= k(d_1\mu d_2)(g) \\ &= kd_1(\mu d_2)(g) \\ &= \left[(kd_1),d_2\right](g) \\ &= \left[d_1,(kd_2)\right](g) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. □

Sonuç 3.41

$$\begin{array}{cccccccc} \tau:\mathrm{Der}(G,M) & \to & \mathrm{Der}(G) & \quad \text{ve} \quad & \phi:\mathrm{Der}(G,M) & \to & \mathrm{Der}(M) \\ d & \to & \sigma_d=\mu d & & d & \to & \theta_d=d\mu \end{array}$$

dönüşümleri cebir homomorfizmleridir (Casas 1990).

Yardımcı Teorem 3.42

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Der}(M,G,\mu)\times\mathrm{Der}(G,M) & \to & \mathrm{Der}(G,M) & \\ ((\alpha,\phi),d) & \to & (\alpha,\phi)\cdot d & =\alpha d-d\phi \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $\mathrm{Der}(M,G,\mu)$ nin $\mathrm{Der}(G,M)$ üzerine bir Lie etkisidir (Casas 1990).

İspat. İspat için aşağıdaki şartların sağlandığını göstermek yeterlidir.

a)

$$\begin{aligned}((\alpha,\phi)\cdot d)[g_1,g_2] &= \alpha(g_1\cdot d(g_2))-\alpha(g_2\cdot d(g_1))-d[g_1,\phi(g_2)]+d[g_2,\phi(g_1)]\\ &= g_1\cdot\alpha d(g_2)-g_2\cdot\alpha d(g_1)-g_1\cdot d\phi(g_2)+g_2\cdot d\phi(g_1)\\ &= g_1\cdot(((\alpha,\phi)\cdot d)(g_2))-g_2\cdot(((\alpha,\phi)\cdot d)(g_1))\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}[(\alpha,\phi),(\alpha',\phi')]\cdot d &= ([\alpha,\alpha'],[\phi,\phi'])\cdot d\\ &= [\alpha,\alpha']\,d-d\,[\phi,\phi']\\ &= \alpha\alpha' d-\alpha'\alpha d-d\phi\phi'+d\phi'\phi\\ &= (\alpha,\phi)\cdot(\alpha' d-d\phi')-(\alpha',\phi')\cdot(\alpha d-d\phi)\\ &= (\alpha,\phi)\cdot((\alpha',\phi')\cdot d)-(\alpha',\phi')\cdot((\alpha,\phi)\cdot d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha,\phi)[d_1,d_2] &= (\alpha,\phi)(d_1\sigma_2-d_2\sigma_1)\\ &= \alpha d_1\sigma_2-\alpha d_2\sigma_1-d_1\sigma_2\phi+d_2\sigma_1\phi\\ &= \alpha d_1\sigma_2+d_2\mu d_1\phi-\alpha d_2\sigma_1-d_1\mu d_2\phi\\ &= [\alpha d_1,d_2]-[d_1\phi,d_2]+[d_1,\alpha d_2]-[d_1,d_2\phi]\\ &= [(\alpha,\phi)\cdot d_1,d_2]+[d_1,(\alpha,\phi)\cdot d_2]\end{aligned}$$

□

Teorem 3.43 $\Delta(d)=(\theta_d,\phi_d)=(d\mu,\mu d)$ şeklinde tanımlı $\Delta:\mathrm{Der}(G,M)\to\mathrm{Der}(M,G,\mu)$ fonksiyonu bir Lie **k**-cebir homomorfizmidir. Üstelik $(\mathrm{Der}(G,M),\mathrm{Der}(M,G,\mu),\Delta)$ üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur (Casas 1990).

İspat. a) $(\theta_d,\phi_d)\in\mathrm{Der}(M,G,\mu)$ olduğunu daha önceden göstermiştik.

b)

$$\begin{aligned}\Delta[d_1,d_2] &= (\mu[d_1,d_2],[d_1,d_2]\mu)\\ &= (\mu d_1\mu d_2-\mu d_2\mu d_1,d_1\mu d_2\mu-d_2\mu d_1\mu)\\ &= ([\mu d_1,\mu d_2],[d_1\mu,d_2\mu])\\ &= [\Delta(d_1),\Delta(d_2)]\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\Delta((\alpha,\phi)\cdot d) &= ((\alpha d - d\phi)\mu, \mu(\alpha d - d\phi)) \\
&= (\alpha d\mu - d\phi\mu, \mu\alpha d - \mu d\phi) \\
&= ([\alpha, d\mu], [\phi, \mu d]) \\
&= [(\alpha,\phi), \Delta(d)]
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\Delta(d_1)d_2 &= (d_1\mu, \mu d_1)\cdot d_2 \\
&= d_1\mu d_2 - d_2\mu d_1 \\
&= d_1\sigma_2 - d_2\sigma_1 \\
&= [d_1, d_2]
\end{aligned}$$

□

BÖLÜM 4

Leibniz Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 4.1 R değişmeli halka, A, B ve G birer R-modül olmak üzere $f : A \times B \to G$ fonksiyonu

i).$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$

ii).$f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$

iii).$rf(a, b) = f(ra, b) = f(a, rb)$

şartlarını sağlıyor ise f ye R-bilineer denir.

Tanım 4.2 G bir **k**-modül olsun. Her $x, y, z \in G$ için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leibniz özdeşliğini sağlayan bir $[,] : G \times G \to G$ bilineer fonksiyonu varsa G ye **k** üzerinde Leibniz cebir denir. Eğer ayrıca

$$[x, x] = 0$$

Jakobi özdeşliği sağlanıyorsa G , **k** üzerinde bir Lie cebir olur. Bu nedenle Lie cebir, Leibniz cebire örnek olarak gösterilebilir.

İki lineerlik özelliği ve Jakobi özdeşliği gereğince

$$0 = [x + y, x + y] = [x, y] + [y, x]$$

olduğundan

$$[x, y] = - [y, x]$$

ve

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

olduğu gösterilir.(Genedbaye 1999)

Örnek 4.1 M ve G iki Lie G-cebir olsun. Her $m \in M$ ve $g \in G$ için G'nin M üzerine etkisi

$$M \times G \to M$$
$$(m, g) \to m^g$$

ve

$$\mu : M \to G$$

equivariant dönüşümü,

$$[m, m'] = m^{\mu(m')}$$

şeklinde tanımlansın.Bu dönüşüm M üzerinde bir Leibniz cebir olur.

$m, m', m'' \in M$ olarak alalım. Verilen dönüşümün Leibniz cebir olduğunu göstermek için

$$[m, [m', m'']] = [[m, m'], m''] - [[m, m''], m']$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
[m, [m', m'']] &= \left[m, m'^{\mu(m'')}\right] \\
&= m^{\mu(m'^{\mu(m'')})} \\
&= m^{\mu(m')^{\mu(m'')}} - m^{\mu(m'')^{\mu(m')}} \\
&= \left[m^{\mu(m')}, m''\right] - \left[m^{\mu(m'')}, m'\right] \\
&= [[m, m'], m''] - [[m, m''], m']
\end{aligned}$$

olduğundan Leibniz özdeşliği sağlanır ve bu dönüşüm M üzerinde bir Leibniz cebir yapısı oluşturur.(Genedbaye 1999)

Tanım 4.3 K bir cisim, L , K üzerinde bir Leibniz cebiri ve H ,L nin bir alt kümesi olsun.

i) Her $x, y \in H$ ve her $a, b \in K$ için $ax + by \in H$

ii)Her $x, y \in H$ için $[x, y] \in H$

koşulları sağlanıyorsa H ye L nin bir alt Leibniz cebiri denir.

Tanım 4.4 G_1, G_2 **k** üzerinde iki Leibniz cebir olsun. Her $x, y \in G_1$ için

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

koşulunu sağlayan $f : G_1 \to G_2$ lineer dönüşümü varsa f ye bir Leibniz cebir morfizması denir (Genedbaye 1999).

Tanım 4.5 G bir Leibniz cebir ve $H \subseteq G$ olsun. Her $x, y \in H$ için $[x, y] \in H$ ve H, G nin alt modülü ise H'a G'nin bir Leibniz alt cebiri denir. H, G nin Leibniz alt cebiri ve her $x \in H$, $y \in G$ için $[x, y] \in H$ ve $[y, x] \in H$ oluyorsa H a G nin ideali denir (Genedbaye 1999).

Örnek 4.2 G bir Leibniz cebir ve H, G nin bir ideali olsun.G deki braketler tarafından üretilen G/H bölüm modülü bir Leibniz cebir olur.

Özel olarak G deki bütün $[x, x]$ braketleri tarafından üretilen $[x, x]$ idealini alalım. Bu durumda Leibniz cebir $G/[x, x]$ bir Lie cebir olur (Genedbaye 1999).

Tanım 4.6 V bir $\mathbf{k}-$modül ve $\overline{T}(V) := \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$ indirgenmiş tensör modül olsun. Her $x \in \overline{T}(V)$ ve $v \in V$ için

$$[x, v] = x \otimes v$$

ve her $x, y \in \overline{T}(V)$ ve $v \in V$ için tümevarımsal yolla elde edilen

$$[x, y \otimes v] = [x, y] \otimes v - [x \otimes v, y]$$

Leibniz özdeşliği sağlanıyorsa $\overline{T}(V)$ tensör modülü tanımlanan bu özellikler ile birlikte V üzerinde Serbest Leibniz cebir olur ve $F(V)$ ile gösterilir. Ayrıca her $v_1, v_2, ...v_n \in V$ için

$$v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n = [... [[v_1, v_2], v_3] ...v_n]$$

olduğu kolayca gösterilebilir (LodayPirashvili 1993).

Yardımcı Teorem 4.7 Her $x, y \in \overline{T}(V)$ ve $v \in V$ için

i) $[x, v] = x \otimes v$

ii) $[x, y \otimes v] = [x, y] \otimes v - [x \otimes v, y]$

özellikleri sağlanıyorsa $\overline{T}(V)$ tensör modülü tanımlanan bu özellikler ile birlikte V üzerinde Serbest Leibniz cebir olur.(LodayPirashvili 1993)

İspat. V bir $\mathbf{k}-$modül olsun.

$$\overline{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... \oplus V^{\otimes n} \oplus ...$$

$$A_0 = V \ , \ A_1 = V^2, ..., A_n = V^{\otimes n-1}$$

olmak üzere $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$ olduğundan $\overline{T}(V)$ derecelendirilmiş cebirdir. Dolayısıyla ispatta tümevarım kullanılabilir. Sağdan çarpılan elemanlara z diyelim.

$$z \in V \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... \oplus V^{\otimes n-1}$$

için Leibniz bağıntısı sağlansın.

$z \in V^{\otimes n}$ alalım. $t \in V^{\otimes n-1}, v \in V$ için $z = t \otimes v$ olduğunu söyleyebiliriz. Eğer burada ii) yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] &= [x,[y,t\otimes v]] \\
&= [x,[y,t]\otimes v] - [x,[y\otimes v,t]] \\
&= [x,[y,t]]\otimes v - [x\otimes v,[y,t]] - [[x,y\otimes v],t] + [[x\otimes t],y\otimes v] \\
&= [x,[y,t]]\otimes v - [x\otimes v,[y,t]] - [[x,y\otimes v],t] + [[x\otimes t],y]\otimes v - [[x\otimes t]\otimes v,y]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[x,y],z] &= [[x,y],t\otimes v] \\
&= [[x,y],t]\otimes v - [[x,y]\otimes v,t] \\
&= [[x,y],t]\otimes v - [[x,y\otimes v],t] - [[x\otimes v,y],t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[x,z],y] &= [[x,t\otimes v],y] \\
&= [[x,t]\otimes v,y] - [[x\otimes v,t],y]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bulunanları

$$[x,[y,z]] - [[x,y],z] + [[x,z],y]$$

Leibniz özdeşliğinde yerlerine yazıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] - [[x,y],z] + [[x,z],y] &= [x,[y,t]]\otimes v - [x\otimes v,[y,t]] + [[x\otimes t],y]\otimes v \\
&\quad - [[x,y],t]\otimes v - [[x\otimes v,y],t] - [[x\otimes v,t],y] \\
&= ([x,[y,t]] + [[x,t],y] - [[x,y],t])\otimes v \\
&\quad -([x\otimes v,[y,t]] - [[x\otimes v,y],t] + [[x\otimes v,t],y]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Leibniz özdeşliği sağlanmış olur.

Şimdi de $\overline{T}(V)$ nin evrensel olduğunu gösterelim.

G bir Leibniz cebir,$i : V \rightarrow \overline{T}(V)$ olacak şekilde bir içine dönüşüm ve $\theta : V \rightarrow G$ olsun. Öyle bir $f : \overline{T}(V) \rightarrow G$ dönüşümü vardır ki

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & \overline{T}(V) \arrow[dl, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

$\theta = fi$ dir.Burada $f(v) = \theta(v)$ ve

$$f(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = [f(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}), f(v_n)]$$

dir. i) den dolayı

$$\begin{aligned} f((v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_{n-1}) \otimes v_n) \quad &= f([v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_{n-1}, v_n]) \\ &= [f(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}), f(v_n)] \\ &= f\left[\left[... \left[\left[\left[v_1, v_2\right], v_3\right], v_4\right], ...v_{n-1}\right], v_n\right] \end{aligned}$$

olur. G bir Leibniz cebir olduğundan f, ii) özelliğini sağlar.

$$f([x, y \otimes v]) = f\left([x, y] \otimes v\right) - f\left([x \otimes v, y]\right)$$

dir. Böylece $\overline{T}(V)$ evrenseldir. Yani $\overline{T}(V)$, V üzerinde Serbest Leibniz cebirdir. $\square$

4.0.1 Leibniz Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 4.8 G ve M iki Leibniz G-cebir olsun.G nin M üzerine etkisi aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{array}{lll} G \times M \rightarrow M & \text{ve} & M \times G \rightarrow M \\ (g, m) \rightarrow^g m & & (m, g) \rightarrow m^g \end{array}$$

bilineer dönüşüm çiftidir (Genedbaye 1999). Her $m, m' \in M$ ve $g, g' \in G$ için

i). $m^{[g,g']} = (m^g)^{g'} - (m^{g'})^g$

ii).${}^{[g,g']}m = ({}^g m)^{g'} - {}^g(m^{g'})$

iii).${}^g({}^{g'}m) = -{}^g(m^{g'})$

iv). $^{g}[m,m'] = [^{g}m,m'] - [^{g}m',m]$

v). $[m,m']^{g} = [m^{g},m'] + [m,m'^{g}]$

vi). $[m,^{g}m'] = -[m,m'^{g}]$

Eğer i). aksiyom $(m;g,g')$ ve $(m;g',g)$ üçlülerine uygulanırsa

$$m^{[g,g']} = -m^{[g',g]}$$

bağıntısı elde edilir.

Tanım 4.9 G bir Leibniz cebir ve M bir Leibniz G-cebir olsun.

$$\mu : M \to G$$

Leibniz cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{lcl} G \times M \to M & \text{ve} & M \times G \to M \\ (g,m) \to^{g} m & & (m,g) \to m^{g} \end{array}$$

sırası ile G nin M üzerine etkisi ve M nin G üzerine etkisi ile birlikte her $m,m' \in M$ ve $g \in G$ için

$$\mu(^{g}m) = [g,\mu(m)] \quad \text{ve} \quad \mu(m^{g}) = [\mu(m),g]$$

şartlarını sağlıyorsa (M,G,μ) üçlüsüne ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir denir. Ayrıca her $m,m' \in M$ için

$$^{\mu(m)}m' = [m,m'] \quad \text{ve} \quad m^{\mu(m')} = [m,m']$$

Preffier özdeşliği sağlanıyorsa (M,μ) ikilisine ya da (M,G,μ) üçlüsüne çaprazlanmış Leibniz G-cebir denir (Genedbaye 1999).

Örnek 4.3 Herhangi bir Leibniz cebir $\mathbf{g}$, id_g birim dönüşümü ile bir çaprazlanmış Leibniz $\mathbf{g}$-cebir olur.

$$id_g : M \to \mathbf{g}$$

olmak üzere, her $m,m\prime \in M$ ve $g \in \mathbf{g}$ için

i). $id(^{g}m) = id\,[g,m] = [id(g),id(m)] = [g,id(m)]$

ii). $id(m^{g}) = id\,[m,g] = [id(m),id(g)] = [id(m),g]$

iii). $^{id(m)}m' = [id(m), m'] = [m, m']$

iv). $m^{id(m')} = [m, id(m')] = [m, m']$

şartları sağlandığından (M, id_g) ikilisi çaprazlanmış Leibniz **g**-cebir olur (Genedbaye 1999).

Örnek 4.4 G bir Leibniz cebir ve H, G nin bir ideali olsun.

$$\begin{aligned} \mu : H &\to G \\ h &\to h \end{aligned}$$

içine dönüşümünü ele alalım. Sırası ile G nin H üzerine etkisi ve H ın G üzerine etkisi her $g \in G$ ve $h, h' \in H$ için

$$\begin{array}{lcl} G \times H \to H & \text{ve} & H \times G \to H \\ (g, h) \to [g, h] =^{g} h & & (h, g) \to [h, g] = h^{g} \end{array}$$

şeklinde Leibniz çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

i).

$$\begin{aligned} \mu(^{g}h) &= {}^{g}h \\ &= [g, h] \\ &= [g, \mu(h)] \end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned} \mu(h^{g}) &= h^{g} \\ &= [h, g] \\ &= [\mu(h), g] \end{aligned}$$

iii).

$$\begin{aligned} {}^{\mu(h)}h' &= {}^{h}h' \\ &= [h, h'] \end{aligned}$$

iv).

$$\begin{aligned} h^{\mu(h')} &= h^{h'} \\ &= [h, h'] \end{aligned}$$

şartları sağlandığından dolayı (H, G, μ) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur (Genedbaye 1999).

Örnek 4.5 $\phi : C \to G$ Leibniz cebirlerin bir merkezi genişlemesi olsun. Yani $\phi : C \to G$ örten morfizmasının çekirdeği C nin merkezinde olsun. G nin C üzerine olan Leibniz etkisi her $g \in G$ ve $c \in C$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{array}{lll} G \times C \to C & \text{ve} & C \times G \to C \\ (g, c) \to^{g} c = \left[\phi^{-1}(g), c\right] & & (c, g) \to c^{g} = \left[c, \phi^{-1}(g)\right] \end{array}$$

Bu durumda çaprazlanmış (C, ϕ) ikilisi bir çaprazlanmış Leibniz G-cebir olur (Genedbaye 1999) .

i).

$$\begin{aligned} \phi({}^{g}c) &= \phi\left[\phi^{-1}(g), c\right] \\ &= \left[\phi(\phi^{-1}(g)), \phi(c)\right] \\ &= [g, \phi(c)] \end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned} \phi(c^{g}) &= \phi\left[c, \phi^{-1}(g)\right] \\ &= \left[\phi(c), \phi(\phi^{-1}(g))\right] \\ &= [\phi(c), g] \end{aligned}$$

iii).

$$\begin{aligned} {}^{\phi(c)}c' &= \left[\phi^{-1}(\phi(c)), c'\right] \\ &= [c, c'] \end{aligned}$$

iv).

$$\begin{aligned} c^{\phi(c')} &= \left[c, \phi^{-1}(\phi(c'))\right] \\ &= [c, c'] \end{aligned}$$

.

Önerme 4.10 (M, μ) ön çaprazlanmış Leinbiz G-cebir olsun. Bu durumda $im(\mu)$ ve benzer şekilde $\ker(\mu)$, G de birer ideal olurlar. Ayrıca (M, μ) çaprazlanmış Leibniz G-cebir ise $\ker(\mu)$, M nin merkezindedir (Genedbaye 1999).

İspat. Öncelikle $im(\mu)$ nun G de bir ideal olduğunu gösterelim. (M, μ) ön çaprazlanmış Leibniz cebir olduğundan her $m \in M$ ve $g \in G$ için

$$\mu({}^{g}m) = [g, \mu(m)] \text{ ve } \mu(m^{g}) = [\mu(m), g]$$

olur ve bunların $im(\mu)$ nun elemanları olduğu açıktır. Dolayısıyla $im(\mu)$, G de bir idealdir. Ayrıca her $m' \in M$ ve $m \in \ker(\mu)$ için

$$\mu([m, m']) = [\mu(m), \mu(m')] = 0 = [\mu(m'), \mu(m)] = \mu([m', m])$$

dir. Böylece $\ker(\mu)$ nun da G de bir ideal olduğu görülür.

Eğer (M, μ) çaprazlanmış ise her $m \in \ker(\mu)$ ve $m' \in M$ için

$$[m, m'] =^{\mu(m)} m' = 0 = m'^{\mu(m)} = [m', m]$$

olduğundan $\ker(\mu)$, M nin merkezindedir. □

Tanım 4.11 G bir Leibniz cebir ,(M, μ) ve (N, ϕ) iki ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olsun.

$$f(gm) = gf(m)$$

ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[dl, "\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\phi f(m) = \mu(m)$$

olacak şekilde $f : M \to N$ Leibniz G-cebir morfizmleri varsa

$$f : (M, \mu) \to (N, \phi)$$

morfizmine ön çaprazlanmış Leibniz G-cebirler arasındaki morfizm denir.

f , bir Leibniz G-cebir morfizmi olduğundan

$$f({}^g m) =^g (f(m)) \text{ ve } f(m^g) = (f(m))^g$$

dir ve diyagram değişmeli olduğundan, yani

$$\phi f(m) = \mu(m)$$

sağlandığından ,f bir ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir morfizmidir. G üzerinde iki ön çaprazlanmış cebirin bileşkesi bir ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir morfizmi olduğundan bir kategori elde edilir ve bu $(pc{-}Leib(G))$ ile gösterilir. Çaprazlanmış Leibniz G-cebirlerin morfizimleri de benzer şekilde tanımlanır ve bunlardan elde edilen kategori de $(c{-}Leib(G))$ ile gösterilir (Genedbaye 1999).

Önerme 4.12 $f : (M, \mu) \to (N, \phi)$ çaprazlanmış Leibniz G-cebir morfizmi olsun. N nin M üzerine Leibniz etkisi her $m \in M$ ve $n \in N$ için

$${}^n m =^{\phi(n)} m \qquad \text{ve} \qquad m^n = m^{\phi(n)}$$

olarak verilsin. Bu durumda (M, f) çaprazlanmış Leibniz N-cebir olur (Genedbaye 1999).

İspat. M nin Leibniz N cebir olduğu kolayca gösterilebilir. Her $m, m' \in M$ ve $n \in N$ için

i).
$$f({}^n m) = f({}^{\phi(n)} m) =^{\phi(n)} f(m) = [n, f(m)]$$

ii).
$$f(m^n) = f(m^{\phi(n)}) = f(m)^{\phi(n)} = [f(m), n]$$

olduğundan dolayı (M, f) ön çaprazlanmış Leibniz N-cebir olur. Ayrıca

iii).
$${}^{f(m)} m' =^{\phi(f(m))} m' =^{\mu(m)} m' = [m, m']$$

iv).
$$m^{f(m')} = m^{\phi(f(m'))} = m^{\mu(m')} = [m, m']$$

olur. Dolayısıyla (M, f) çaprazlanmış Leibniz N-cebirdir. □

4.0.2 Derivasyonlar

Tanım 4.13 (M,μ) ve (N,ϕ) iki ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir ve $d : M \to N$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $m, m' \in M$ için

$$d([m,m']) = d(m)^{\mu(m')} +^{\mu(m)} d(m')$$

ise d ye (M,μ) dan (N,ϕ) ye bir derivasyon denir (Genedbaye 1999).

Tanım 4.14 (M,μ) ve (N,ϕ) iki ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir ve $D : M \to N$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $m, m' \in M$ için

$$D([m,m']) = D(m)^{\mu(m')} - D(m')^{\mu(m)}$$

ise D ye (M,μ) dan (N,ϕ) ye bir anti-derivasyon denir (Genedbaye 1999).

Örnek 4.6 (G, id_G) ve (N,ϕ) birer çaprazlanmış Leibniz G-cebir ve $k : G \to N$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned} k : \quad & G \to N \\ & g \to^{g} n \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Eğer Tanım 4.8 de verilen ii). ve iii). çaprazlanmış Leibniz cebir aksiyomlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} k\,[g,g'] \quad &=^{[g,g']} n \\ &= ({}^{g}n)^{g'} +^{g} ({}^{g'}n) \\ &= ({}^{g}n)^{id(g')} +^{id(g)} ({}^{g'}n) \\ &= k(g)^{id(g')} +^{id(g)} k(g') \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla yukarıdaki şekilde tanımlanan k lineer dönüşümü (G, id_G) den (N,ϕ) ye bir derivasyon olur (Genedbaye 1999).

Örnek 4.7 (G, id_G) ve (N,ϕ) birer çaprazlanmış Leibniz G-cebir ve $K : G \to N$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned} K : \quad & G \to N \\ & g \to -n^{g} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Eğer Tanım 4.8 de verilen i). çaprazlanmış Leibniz cebir aksiyomunu kullanırsak benzer şekilde

$$\begin{aligned} K\,[g,g'] \quad &= -n^{[g,g']} \\ &= (n^{g'})^{g} - (n^{g})^{g'} \\ &= (n^{g'})^{id(g)} - (n^{g})^{id(g')} \\ &= -K(g')^{id(g)} + K(g)^{id(g')} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. O halde K ya (G, id_G) den (N, ϕ) ye bir anti-derivasyon denir (Genedbaye 1999).

Tanım 4.15 (M, μ) ve (N, ϕ) iki ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir ve d , D sırası ile (M, μ) dan (N, ϕ) ye derivasyon ve anti-derivasyon olarak tanımlansın. Her $g, h \in G$ ve $m \in M$ için (d, D, G) üçlüsü tarafından üretilen serbest **k**-modül

i).$\phi(d(m)) = \mu(m^g)$

ii).$\phi(D(m)) = -\mu({}^g m)$

iii).${}^h d(m) ={}^h D(m)$

iv).$D(m^h) = -D({}^h m)$

koşullarını sağlar ve $Bider_G(M, N)$ ile gösterilir (Genedbaye 1999).

Önerme 4.16 (N, ϕ) bir Leibniz G-cebir olsun. Her $m \in M$ için

$$\delta(m) = d'(m^g) - d(m^{g'}) \text{ ve } \Delta(m) = -D(m^{g'}) - d'({}^g m)$$

olarak tanımlansın. Eğer (N, ϕ) çaprazlanmış bir Leibniz G-cebir ise

$$[(d, D, G), (d', D', G')] = (\delta, \Delta, [g, g'])$$

braketi ile tanımlanan **k**-modül $Bider_G(M, N)$ yapısı bir Leibniz cebir olur (Genedbaye 1999).

İspat. δ ve Δ sırası ile derivasyon ve anti-derivasyon dönüşümleri olsun. Her $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned}
\delta([m, m']) &= d'([m, m']^g) - d([m, m']^{g'}) \\
&= d'([m^g, m']) + d'([m, m'^g]) - d(\big[m^{g'}, m'\big]) - d(\big[m, m'^{g'}\big]) \\
&= d'(m^g)^{\mu(m')} +^{\mu(m^g)} d'(m') + d'(m)^{\mu(m'^g)} +^{\mu(m)} d'(m'^g) \\
&\quad -d(m^{g'})^{\mu(m')} -^{\mu(m^{g'})} d(m') - d(m)^{\mu(m'^{g'})} -^{\mu(m)} d(m'^{g'}) \\
&= (d'(m^g) - d(m^{g'}))^{\mu(m')} +^{\mu(m)} (d'(m'^g) - d(m'^{g'}) \\
&\quad +^{\phi(d(m))} d'(m') + d'(m)^{\phi(d(m'))} -^{\phi(d'(m))} d(m') - d(m)^{\phi(d'(m'))} \\
&= \delta(m)^{\mu(m')} +^{\mu(m)} \delta(m') \\
&\quad + [d(m), d'(m')] + [d'(m), d(m')] - [d'(m), d(m')] - [d(m), d'(m')] \\
&= \delta(m)^{\mu(m')} +^{\mu(m)} \delta(m')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Delta([m,m']) &= -D([m,m']^{g'}) - d'({}^{g}[m,m'])\\
&= -D(\left[m^{g'},m'\right]) - D(\left[m,m'^{g'}\right]) - d'([{}^{g}m,m']) + d'([{}^{g}m',m])\\
&= -D(m^{g'})^{\mu(m')} + D(m')^{\mu(m^{g'})} - D(m)^{\mu(m'^{g'})} + D(m'^{g'})^{\mu(m)}\\
&-d'({}^{g}m)^{\mu(m')} -{}^{\mu({}^{g}m)}\, d'(m') + d'({}^{g}m')^{\mu(m)} +{}^{\mu({}^{g}m')}\, d'(m)\\
&= (-D(m^{g'}) - d'({}^{g}m))^{\mu(m')} - (-D(m'^{g'}) - d'({}^{g}m'))^{\mu(m)}\\
&+D(m')^{\phi(d'(m))} - D(m)^{\phi(d'(m'))} +{}^{\phi(D(m))}\, d'(m') -{}^{\phi(D(m'))}\, d'(m)\\
&= \Delta(m)^{\mu(m')} - \Delta(m')^{\mu(m)}\\
&+ [D(m'),d'(m)] - [D(m),d'(m')] + [D(m),d'(m')] - [D(m'),d'(m)]\\
&= \Delta(m)^{\mu(m')} - \Delta(m')^{\mu(m)}
\end{aligned}$$

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
\phi(\delta(m)) &= \phi(d'(m^{g})) - \phi(d(m^{g'}))\\
&= \mu((m^{g})^{g'} - \mu((m^{g'})^{g}\\
&= \mu(m^{[g,g']})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\Delta(m)) &= -\phi(D(m^{g'}) - \phi(d'({}^{g}m))\\
&= \mu({}^{g}(m^{g'})) - \mu(({}^{g}m)^{g'})\\
&= -\mu({}^{[g,g']}m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{h}\delta(m) &=^{h} d'(m^{g}) -^{h} d(m^{g'}) =^{h} D'(m^{g}) -^{h} D(m^{g'})\\
&= -^{h}D'({}^{g}m) -^{h} D(m^{g'}) = -^{h}d'({}^{g}m) -^{h} D(m^{g'})\\
&=^{h} \Delta(m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta({}^{h}m) &= -D(({}^{h}m)^{g'}) - d'({}^{g}({}^{h}m))\\
&= -D({}^{[h,g']}m) - D({}^{h}(m^{g'})) + d'({}^{g}(m^{h}))\\
&= D((m^{h})^{g'}) + d'({}^{g}(m^{h}))\\
&= -\Delta(m^{h})
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $(\delta,\Delta,[G,G'])$ üçlüsü; (M,μ) dan (N,ϕ) ye bir biderivasyondur.

$(d,D,G),(d',D',G')$ ve (d'',D'',G'') ; (M,μ) dan (N,ϕ) ye birer biderivasyon olsun. Bu durumda

$$(\delta,\Delta,[G',G'']) = [(d',D',G'),(d'',D'',G'')]$$
$$(\delta_0,\Delta_0,G_0) = [(d,D,G),(\delta,\Delta,[G',G''])]$$

$$(\delta',\Delta',[G,G']) = [(d,D,G),(d',D',G')]$$
$$(\delta_1,\Delta_1,G_1) = [(\delta',\Delta',[G,G']),(d'',D'',G'')]$$

$$(\delta'', \Delta'', [G, G'']) \quad = [(d, D, G), (d'', D'', G'')]$$

$$(\delta_2, \Delta_2, G_2) = [(\delta'', \Delta'', [G, G'']), (d', D', G')]$$

olarak yazabiliriz. Burada $g_0 = g_1 - g_2$ olduğu açıktır. Her $m \in M$ için

$$\begin{aligned}
(\delta_1 - \delta_2)(m) &= d''(m^{[g,g']}) - \delta'(m^{g''}) - d'(m^{[g,g']}) + \delta''(m^{g'}) \\
&= d''((m^g)^{g'}) - d''((m^{g'})^g) - d'((m^{g''})^g) + d((m^{g''})^{g'}) \\
&\quad -d'((m^g)^{g''}) + d'((m^{g''})^g) + d''((m^{g'})^g) - d((m^{g'})^{g''}) \\
&= d''((m^g)^{g'}) - d'((m^g)^{g''}) - d(m^{[g',g'']}) \\
&= \delta(m^g) - d(m^{[g',g'']}) \\
&= \delta_0(m)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 - \Delta_2)(m) &= -\Delta'(m^{g''}) - d''({}^{[g,g']}m) + \Delta''(m^{g'}) + d'({}^{[g,g'']}m) \\
&= D((m^{g''})^{g'}) + d'({}^g(m^{g''})) - d''(({}^gm)^{g'}) + d''({}^g(m^{g'})) \\
&\quad -D((m^{g'})^{g''}) - d''({}^g(m^{g'})) + d'(({}^gm)^{g''}) - d'({}^g(m^{g''})) \\
&= -D(m^{[g',g'']}) - d''(({}^gm)^{g'}) + d'(({}^gm)^{g''}) \\
&= -D(m^{[g',g'']}) - \delta({}^gm) \\
&= \Delta_0(m)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde **k**-modül $Bider_G(M, N)$ bir Leibniz cebirdir. $\Box$

Önerme 4.17 (M, μ) bir ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir ve (N, ϕ) de çaprazlanmış Leibniz G-cebir olsun. Bu durumda

$$({}^hd)(m) = d(m^h) - d(m)^h \quad \text{ve} \quad ({}^hD)(m) = {}^h d(m) - d({}^hm)$$

$$(d^h)(m) = d(m)^h - d(m^h) \quad \text{ve} \quad (D^h)(m) = D(m)^h - D(m^h)$$

ve

$${}^h(d, D, g) = ({}^hd, {}^hD, [h, g]) \quad (d, D, g)^h = (d^h, D^h, [g, h])$$

olarak tanımlanırsa $Bider_G(M, N)$ bu işlemlerle birlikte bir ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olur (Genedbaye 1999).

İspat. *Verilenler tek tek doğrulanarak ispat yapılabilir. Bunun yerine verilenlerin doğruluğunu göstermek için bir örnek vereceğiz. Tanımdan*

$${}^h[(d, D, g), (d', D', g')] = ({}^h\delta, {}^h\Delta, [h, [g, g']]$$

$$\left[{}^h(d, D, g), (d', D', g')\right] = (\delta_1, \Delta_1, [[h, g], g'])$$

$$\left[{}^h(d', D', g'), (d, D, g)\right] = (\delta_2, \Delta_2, [[h, g'], g])$$

olarak yazabiliriz. Her $m \in M$ *için*

$$\begin{aligned}
(\delta_1 - \delta_2)(m) &= d'(m^{[h,g]}) - ({}^h d)(m^{g'}) - d(m^{[h,g']}) + ({}^h d')(m^g) \\
&= d'((m^h)^g) - d'((m^g)^h) - d((m^{g'})^h) + d(m^{g'})^h \\
&-d((m^h)^{g'}) + d((m^{g'})^h) + d'((m^g)^h) - d'(m^g)^h \\
&= (d'((m^h)^g) - d((m^h)^{g'})) - (d'(m^g) - d(m^{g'}))^h \\
&= \delta(m^h) - \delta(m)^h \\
&= ({}^h\delta)(m)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 - \Delta_2)(m) &= -({}^h D)(m^{g'}) - d'({}^{[h,g]}m) + ({}^h D')(m^g) + d({}^{[h,g']}m) \\
&= -{}^h d(m^{g'}) + d({}^h(m^{g'})) - d'(({}^h m)^g) + d'({}^h(m^g)) \\
&+{}^h d'(m^g) - d'({}^h(m^g)) + d(({}^h m)^{g'}) - d({}^h(m^{g'})) \\
&=^h (d'(m^g) - d(m^{g'})) - (d'({}^h m)^g - d(({}^h m)^{g'})) \\
&=^h \delta(m) - \delta({}^h m) \\
&= ({}^h\Delta)(m)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$${}^h\left[(d,D,g),(d',D',g')\right] = \left[{}^h(d,D,g),(d',D',g')\right] - \left[{}^h(d',D',g'),(d,D,g)\right]$$

elde edilir. □

Önerme 4.16 ve Önerme 4.17 'ün sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.18 $Bider_G(M,N)$ bir Leibniz G-cebir olsun. Herhangi ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir (M,μ) ,çaprazlanmış Leibniz G-cebir (N,ϕ) ve

$$\begin{aligned}
\rho : Bider_G(M,N) &\to G \\
(\partial, \mathfrak{D}, G) &\to G
\end{aligned}$$

morfizmi için $Bider_G(M,N)$ bir ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olur (Genedbaye 1999).

4.1 Leibniz Cebirlerin Değişmeli Olmayan Tensör Çarpımları

4.1.1 Leibniz Çiftleri (Pairing)

Tanım 4.19 M ve N birer Leibniz cebir olsun. Eğer $m, m\prime \in M$ için

$$\begin{aligned} h_1(m,[n,n']) &= h_1(m^n,n') - h_1(m^{n'},n) \\ h_2(n,[m,m']) &= h_2(n^m,m') - h_2(n^{m'},m) \\ h_1([m,m'],n) &= h_2({}^m n,m') - h_1(m,n^{m'}) \\ h_2([n,n'],m) &= h_1({}^n m,n') - h_2(n,m^{n'}) \end{aligned}$$

$$h_1(m,^{m'}n) = -h_1(m,n^{m'}) \quad h_2(n,^{n'}m) = -h_2(n,m^{n'})$$

$$\begin{aligned} h_1(m^n,^{m'}n) &= [h_1(m,n),h_1(m',n')] = h_2({}^m n,m'^{n'}) \\ h_1({}^n m,n'^{m'}) &= [h_2(n,m),h_2(n',m')] = h_2({}^m n,m'^{n'}) \\ h_1(m^n,n'^{m'}) &= [h_1(m,n),h_2(n',m')] = h_2({}^m n,^{n'}m') \\ h_1({}^n m,^{m'}n') &= [h_2(n,m),h_1(m',n')] = h_2(n^m,m'^{n'}) \end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan

$$h_1 : M \times N \to \beta \qquad \text{ve} \qquad h_2 : N \times M \to \beta$$

bilineer dönüşümleri varsa (β, h_1, h_2) üçlüsüne M ve N nin Leibniz çifti (pairing) denir (Genedbaye 1999).

Örnek 4.8 M ve N Leibniz cebir G nin iki ideali olsun. $\beta = M \cap N$ için

$$h_1(m,n) = [m,n] \qquad \text{ve} \qquad h_2(n,m) = [n,m]$$

olarak tanımlanırsa (β, h_1, h_2) üçlüsü M ve N nin bir Leibniz çifti (pairing) olur (Genedbaye 1999).

4.1.2 Değişmeli Olmayan Tensör Çarpımı

Tanım 4.20 (β, h_1, h_2) ve (β', h_1', h_2') M ve N nin Leibniz çifti olsun.

$$\theta h_1 = h_1' \qquad \text{ve} \qquad \theta h_2 = h_2'$$

olacak şekilde tek bir $\theta : \beta \to \beta'$ Leibniz cebir morfizmi varsa M ve N nin (β, h_1, h_2) Leibniz çifti (pairing) universal denir.

Eğer universal çifti (pairing) varsa ve tekse bu universal çift dönüşümü bir izomorfizm olur. Bu durumda universal çift yapısı bir değişmeli olmayan tensör çarpımı olur (Genedbaye 1999).

Teorem 4.21 M ve N,birbirleri üzerine doğal Leibniz etkisi olan iki Leibniz cebir ve V de $m \in M$ ve $n \in N$ olmak üzere $m * n$ ve $n * m$ tarafından üretilen serbest K-modül olsun. V tarafından üretilen serbest Leibniz cebiri W ve

i)

$$\lambda(m * n) = \lambda m * n = m * \lambda n$$
$$\lambda(m * n) = \lambda m * n = m * \lambda n$$

ii)

$$(m + m') * n = m * n + m' * n \qquad (n + n') * m = n * m + n' * m$$
$$m * (n + n') = m * n + m * n' \qquad n * (m + m') = n * m + n * m'$$

iii)

$$m * [n, n'] = m^n * n' - m^{n'} * n \qquad n * [m, m'] = n^m * m' - n^{m'} * m$$
$$[m, m'] * n =^m n * m' - m * n^{m'} \qquad [n, n'] * m =^n m * n' - n * m^{n'}$$

iv)

$$m *^{m'} n = -m * n^{m'} \qquad n *^{n'} m = -n * m^{n'}$$

v)

$$\begin{aligned} m^n *^{m'} n' &= [m * n, m' * n'] &= {}^m n * m'^{n'} \\ m^n * n'^{m'} &= [m * n, n' * m'] &= {}^m n *^{n'} m' \\ {}^n m * n'^{m'} &= [n * m, n' * m'] &= n^m *^{n'} m' \\ {}^n m *^{m'} n' &= [n * m, m' * n'] &= n^m * m'^{n'} \end{aligned}$$

şartları tarafından üretilen ikitaraflı ideal I olmak üzere W nin I ile bölüm Leibniz cebirini $M * N$ ile gösterelim.

$$h_1 : M \times N \to M * N \quad \text{ve} \quad h_2 : N \times M \to M * N$$
$$h_1(m, n) = m * n \qquad\qquad h_2(n, m) = n * m$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda $(M * N, h_1, h_2)$, M ve N evrensel Leibniz çiftidir ve bu değişmeli olmayan tensör çarpımı ya da kısaca tensör çarpımı denir(Genedbaye 1999).

İspat. $(M*N, h_1, h_2)$ nin M ve N nin Leibniz çifti olduğu açıktır. Eğer dikkat edilirse (β, h_1', h_2') de M ve N nin diğer Leibniz çiftidir. Bu durumda $m \in M$ ve $n \in N$ için θ dönüşümünün

$$\theta(m * n) = h_1'(m, n) \qquad \text{ve} \qquad \theta(n * m) = h_2'(n, m)$$

olarak verilmesi gerekir.

Etki aşikar olduğu zaman da bu yapının görüntüsü değişmeli olmayan tensör çarpımını verir. □

Önerme 4.22 M ve N Leibniz cebir , M nin N üzerine etkisi ve N nin M üzerine etkisi de aşikar olsun. Bu durumda

$$M_{ab} = M/\left[M, M\right] \quad \text{ve} \quad N_{ab} = N/\left[N, N\right]$$

olmak üzere

$$M * N \cong M_{ab} \otimes N_{ab} \oplus N_{ab} \otimes M_{ab}$$

değişmeli Leibniz cebirlerin bir izomorfizmi olur (Genedbaye 1999).

İspat. V tarafından üretilen serbest Leibniz cebirin K-modülü

$$\overline{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

olarak tanımlanmıştı.

Etki aşikar olduğu için ,$\overline{T}(V)$ üzerindeki braketlerin tanımı ve v). maddeden dolayı $M * N$ nin bir değişmeli Leibniz cebir olduğu ve $n \geq 2$ için $V^{\otimes n}$ toplamlarının sağlandığı görülür. Teorem 4.21 de ki i) ve ii) maddelerinden dolayı K-modül $M * N$ nin $M_{ab} \otimes N_{ab} \oplus N_{ab} \otimes M_{ab}$ değişmeli Leibniz cebiri olduğu görülür. □

4.1.3 Uyumlu Leibniz Etkileri

Tanım 4.23 M ve N birer Leibniz cebir ve M nin N üzerine olan Leibniz etkisi ile N nin M üzerine olan Leibniz etkisi aynı olsun. Eğer $m, m' \in M$ ve $n, n' \in N$ için

$$\begin{array}{ll}
{}^{({}^{m}n)}m' = [m^n, m'] & {}^{({}^{n}m)}n' = [n^m, n'] \\
{}^{(n^m)}m' = [{}^{n}m, m'] & {}^{(m^n)}n' = [{}^{m}n, n'] \\
m^{({}^{m'}n)} = [m, m'^n] & n^{({}^{n'}m)} = [n, n'^m] \\
m^{(n^{m'})} = [m, {}^{n}m'] & n^{(m^{n'})} = [n, {}^{m}n']
\end{array}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa etkiler uyumludur denir (Genedbaye 1999).

Örnek 4.9 M ve N aynı Leibniz cebirin birer ideali olsunlar. Bu durumda başlangıç braketleri tarafından oluşturulan etkiler uyumludur (Genedbaye 1999).

Örnek 4.10 (M,μ) ve (N,ϕ) birer ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olsun. M nin N üzerine Leibniz etkisi ve N nin M üzerine Leibniz etkisi de aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$
\begin{aligned}
{}^{m}n &= {}^{\mu(m)}n \quad \text{ve} \quad n^{m} = n^{\mu(m)} \\
{}^{n}m &= {}^{\phi(n)}m \quad \text{ve} \quad m^{n} = m^{\phi(n)}
\end{aligned}
$$

Eğer (M,μ) ve (N,ϕ) Leibniz cebirleri çaprazlanmış ise bunların Leibniz etkileri uyumludur (Genedbaye 1999).

4.1.4 Birinci Çaprazlanmış Yapı

M ve N birer Leibniz cebir, birbirleri üzerine olan etkileri de aynı ve uyumlu olsun. $m,m' \in M$ ve $n,n' \in N$ için;

M nin $M * N$ üzerindeki işlemleri

$$
\begin{aligned}
{}^{m}(m' * n') &= [m,m'] * n' - {}^{m}n' * m' \\
{}^{m}(n' * m') &= {}^{m}n' * m' - [m,m'] * n' \\
(m * n)^{m'} &= [m,m'] * n + m * n^{m'} \\
(n * m)^{m'} &= n^{m'} * m + n * [m,m']
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde N nin $M * N$ üzerindeki işlemleri de

$$
\begin{aligned}
{}^{n}(m' * n') &= {}^{n}m' * n' - [n,n'] * m' \\
{}^{n}(n' * m') &= [n,n'] * m' - {}^{n}m' * n' \\
(m * n)^{n'} &= m^{n'} * n + m * [n,n'] \\
(n * m)^{n'} &= [n,n'] * m + n * m^{n'}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır.

Önerme 4.24 Yukarıdaki işlemlerle birlikte

$$\mu : M * N \to M, \quad m * n \to m^{n}, \quad n * m \to {}^{n}m$$

dönüşümü, çaprazlanmış Leibniz M-cebirin bir $M * N$ yapısını oluşturur. Benzer şekilde

$$\phi : M * N \to N, \quad m * n \to^{m} n, \quad n * m \to n^{m}$$

dönüşümü de, çaprazlanmış Leibniz N-cebirin bir $M * N$ yapısını oluşturur (Genedbaye 1999).

İspat. Uyumluluk koşulları sayesinde verilenler kolayca kontrol edilebilir. Örneğin $m, m' \in M$ ve $n, n' \in N$ olarak alacak olursak

$$\begin{aligned} {}^{\mu(m*n)}(m' * n') &={}^{m^n} (m' * n') \\ &= [m^n, m'] * n' -^{(m^n)} n' * m' \\ &=^{(m^n)} n' * m' - m^n * n'^{m'} -^{(m^n)} n' * m' \\ &= m^n *^{m'} n \\ &= [m * n, m' * n'] \end{aligned}$$

elde ederiz. □

4.1.5 İkinci Çaprazlanmış Yapı

Tanım 4.25 (M, μ) ve (N, ϕ) birer ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olsun. M nin N üzerine Leibniz etkisi ve N nin M üzerine Leibniz etkisi

$$\begin{aligned} {}^{m}n &=^{\mu(m)} n \quad \text{ve} \quad n^{m} = n^{\mu(m)} \\ {}^{n}m &=^{\phi(n)} m \quad \text{ve} \quad m^{n} = m^{\phi(n)} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda G nin $M * N$ üzerine Leibniz etkisi

$$\begin{aligned} {}^{g}(m * n) &=^{g} m * n -^{g} n * m \quad {}^{g}(n * m) =^{g} n * m -^{g} m * n \\ (m * n)^{g} &= m^{g} * n + m * n^{g} \quad (n * m)^{g} = n^{g} * m + n * m^{g} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Genedbaye 1999).

Önerme 4.26 (M, μ) ve (N, ϕ) birer ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olsun.

$$\eta(m * n) = [\mu(m), \phi(n)] \quad \text{ve} \quad \eta(n * m) = [\phi(n), \mu(m)]$$

özelliklerini sağlayan $\eta : (M * N) \to G$ dönüşümü varsa $M * N$, ön çaprazlanmış Leibniz cebir G nin bir yapısını oluşturur .

Ayrıca M veya N Leibniz G-cebirlerinden herhangi biri çaprazlanmış ise $M*N$ Leibniz G-cebiri de çaprazlanmış olur (Genedbaye 1999).

İspat. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\eta({}^{g}(m*n)) &= [\mu({}^{g}m),\phi(n)]-[\phi({}^{g}n),\mu(m)]\\
&= [[g,\mu(m)],\phi(n)]-[[g,\phi(n)],\mu(m)]\\
&= [g,[\mu(m),\phi(n)]]\\
&= [g,\eta(m*n)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta({}^{g}(n*m)) &= -\eta({}^{g}(m*n)) = -[g,\eta(m*n)]\\
&= -[g,[\mu(m),\phi(n)]]\\
&= [g,[\phi(n),\mu(m)]]\\
&= [g,\eta(m*n)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta((m*n)^{g}) &= [\mu({}^{g}m),\phi(n)]+[\mu(m),\phi(n^{g})]\\
&= [[\mu(m),g],\phi(n)]+[\mu(m),[\phi(n),g]]\\
&= [[\mu(m),\phi(n)],g]\\
&= [\eta(m*n),g]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta((n*m)^{g}) &= [\phi(n^{g}),\mu(m)]+[\phi(n),\mu(m^{g})]\\
&= [[\phi(n),g],\mu(m)]+[\phi(n),[\mu(m),g]]\\
&= [[\phi(n),\mu(m)],g]\\
&= [\eta(n*m),g]
\end{aligned}$$

olduğundan $(M*N,\eta)$ ikilisinin bir ön çaprazlanmış Leibniz G-cebir olduğu görülür. Varsayalım ki Leibniz G-cebir M çaprazlanmış olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
{}^{\eta(m*n)}(m'*n') &= {}^{[\mu(m),\phi(n)]}(m'*n')\\
&= {}^{\mu(m^{\phi(n)})}(n'*m')\\
&= {}^{\mu(m^{\phi(n)})}m'*n' - {}^{\mu(m^{\phi(n)})}n'*m'\\
&= \left[m^{\phi(n)},m'\right]*n' - {}^{\mu(m^{\phi(n)})}n'*m'\\
&= {}^{\mu(m^{\phi(n)})}n'*m' - m^{\phi(n)}*n'^{\mu(m')} - {}^{\mu(m^{\phi(n)})}n'*m'\\
&= m^{\phi(n)} * {}^{\mu(m')}n'\\
&= [m*n,m'*n']
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(m*n)^{\eta(m'*n')} &= (m*n)^{[\mu(m'),\phi(n')]}\\
&= (m*n)^{\mu(m'^{\phi(n')})}\\
&= m^{\mu(m'^{\phi(n')})}*n + m*n^{\mu(m'^{\phi(n')})}\\
&= \left[m,m'^{\phi(n')}\right]*n + m*n^{\mu(m'^{\phi(n')})}\\
&= {}^{\mu(m)}n*m'^{\phi(n')} - m*n^{\mu(m'^{\phi(n')})} + m*n^{\mu(m'^{\phi(n')})}\\
&= [m*n,m'*n']
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı yolla

$$\begin{aligned}
{}^{\eta(m*n)}(n' * m') &= [m * n, n' * m'] \\
(m * n)^{\eta(n' * m')} &= [m * n, n' * m'] \\
{}^{\eta(n*m)}(n' * m') &= [n * m, n' * m'] \\
(n * m)^{\eta(n' * m')} &= [n * m, n' * m'] \\
{}^{\eta(n*m)}(m' * n') &= [n * m, m' * n'] \\
(n * m)^{\eta(m' * n')} &= [n * m, m' * n']
\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde Leibniz G-cebir $M * N$ çaprazlanmıştır. □

Örnek 4.11 Herhangi $g \in G$ için $ad_g : h \to [h, g]$ ve $Ad_g : h \to -[g, h]$ sırası ile derivasyon ve anti derivasyon olacak şekilde Leibniz cebir G-nin lineer dönüşümleri olsun. Bu durumda (ad_g, Ad_g) çiftine G'nin iç biderivasyonu denir. Böylece ön-çaprazlanmış Leibniz G-cebir $Bider_G(M, N)$, G'nin iç biderivasyonları ile birlikte (M, μ) dan (N, ϕ) ye olan biderivasyonlarının kümesi olarak görülebilir (Genedbaye 1999).

KAYNAKLAR DİZİNİ

Amoya, R., *Infinite dimesional Lie algebras,* Nordhoff.

Casas, J.M., 1990. *Invariantes de módulo cruzados en Álgebras de Lie,* Ph.D.Theses, University of Santiago, 173.

Casas, J.M., 1991. *Invariantes de módulos cruzados en álgebras de Lie. Ph. D. Thesis, Alxebra 57,* Universidad de Santiago de Compostela.

Casas, J.M., Ladra, M.,1995. *Perfect crosed modules in Lie algebras,* Comm. Alg., 1625-1644.

Casas, J.M., Ladra, M.,2000. *Colimits in the Crosed Modules Category in Lie Algebras,* Georgian Mathematical Journal, 7, 3, 461-474.

Ellis, G.J., 1991. *A non abelian tensor product of Lie algebras,* Glasgow Math. J., 101-120.

Genedbaye A.V., 1999. *A non abelian tensor product of Leibniz algebras,* 1151-1165.

Grandjean, A.R., 1971. *Reticulo de ideales de un objeto en una R-categoria,* Rev. Mth. Hisp. Amer. T.32, 14-20.

Guin, D., 1986. *Cohomologie non abelienne des algebras de lie,* Universite Louis Pasteur. Irma., Strasbourg.

Guin, D., 1995. *Cohomogie des algebres de Lie croisees et K-theorie de Milnor additive,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 45-1, 93-118.

Kassel, C., Loday, J.L., 1982. *Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz,* L' Enseignement Math., 39, 269-293.

Lavendhomme, R. and Lucas, T.H., 1996. *On modules and crosed modules,* Journal of Algebra, 179, 936-963.

Loday, J.L., 1993. *Extensions centrales d'algebres de Lie,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 32,4, 119-142.

Loday, J.L., Pirashvili, T., 1993. *Universal enveloping algebra of Leibniz algebras and (co)homology,* Math. Annal., 296, 139-158.

Mac Lane, S., 1958. *Extensions and Obstructions for Rings,* Illinois J. Math., 121, 316-345.

Norrie, K.J., 1987. *Crossed Modules and Analoguses of Group Theorems,* Ph.D.Thesis, King's College.

Porter, T., 1986. *Homology of Commutative Algebras and an nvariant of Simis and Vasconceles,* J. Algebra, 99, 458-465.

Samelson, H., 1969. *Notes on Lie Algebra,* University of Crete Department of Mathematics, 165, 1-3.

Shammu, N.M., 1992. *Algebraic and Categorical Structure of Category of Crosed Modules of Algebras,* Ph.D. Thesis, U.C.N.W.

Whitehead, J.H.C., 1949. *Combinatorial homotopy II,* Bull. Amer. Math. Soc., 55, 453-456.

Whitehead, J.H.C., 1986. *Combinatorial homotopy II,* Bull. Amer. Math. Soc., 453-496.