Indefinite Kompleks Uzay Formları Üzerine

Muradiye Çimdiker

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2011

On the Indefinite Complex Space Forms

Muradiye Çimdiker

MASTER DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

August 2011

Indefinite Kompleks Uzay Formları Üzerine

Muradiye Çimdiker

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

Ağustos 2011

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Muradiye Çimdiker'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Indefinite Kompleks Uzay Formları Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman **:** -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Ali Görgülü

Üye : Doç. Dr. İbrahim Günaltılı

Üye : Doç. Dr. Kürşat Yenilmez

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa Dede

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Dört bölümden oluşan çalışmamızın amacı, sabit holomorfik kesit eğrilikli indefinite Kaehler manifoldu anlamına gelen indefinite kompleks uzay formlarını incelemektir. Çalışmanın giriş bölümünde, konunun, tarihsel gelişimi ifade edilmiştir. Bir sonraki bölümde de konu ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmanın ilerleyen kısımları için temel teşkil eden kompleks vektör uzayları ve Hermitian skalar çarpım tanımları verilerek, bu kavramlarla ilgili önerme ve teoremler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, indefinite kompleks uzay formları ve bu formları oluşturan indefinite Kaehler manifold ve holomorfik kesitsel eğrilik kavramına yer verilmiştir. Ayrıca indefinite Kaehler altmanifold için lokal formüller incelenmiştir ve kompleks uzay formları sınıflandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kompleks vektör uzayı, Hermitian skalar çarpım, Indefinite Kaehler manifold, Indefinite kompleks uzay formları, holomorfik kesitsel eğrilik.

SUMMARY

The aim of this thesis is to study, constant holomorphic sectional curvature with indefinite Kaehler manifold defined indefinite complex space forms are examined. The historical development of the subject is presented in ‘Abstract’. At the after chapter fundamental definitions, theorems and concepts related to subject are given.

In the third chapter, the concepts of complex vector spaces and Hermitian inner product, which are indispensable for the subsequent parts of the work, are examined.

In the fourth chapter, indefinite complex space forms and contains the basic for this forms, indefinite Kaehler manifold and holomorphic sectional curvature are given. Besides, local formulas for indefinite Kaehler submanifolds are examined and some complex space forms are classified.

Key Words: Complex vector space, Hermitian inner product, indefinite Kaehler manifold, indefinite complex space form, holomorphic sectional curvature.

TEŞEKKÜR

Indefinite Kompleks Uzay Formları Üzerine adlı tez çalışmamda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın;

Doç. Dr. Cumali Ekici

hocama ve her şeyim anneme destekleri için çok teşekkür ederim.

ESKİŞEHİR, 2011 Muradiye ÇİMDİKER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
g	Skalar çarpma
υ	Kompleks vektör uzayı
V	Reel vektör uzayı
V^*	V vektör uzayının dual uzayı
J	Kompleks yapı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
υ	Yarı-Riemann manifoldunun indeksi
$\chi(\mathbb{M})$	$\mathbb{M}$ manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
T_PM	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
T_PM^*	$P \in M$ noktasındaki kotanjant uzay
K	Kesit eğriliği
h	Ortalama eğriliği
R	Riemann eğrilik tensörü
D	Riemann koneksiyonu
S	Ricci eğrilik tensörü
τ	Skalar eğrilik
$[,]$	Bracket operatörü
Γ	Christoffel sembolü
δ	Kronecker deltası
$\mathbb{H}$	Hermit formu
w_j^p	Koneksiyon 1-formu
Φ	2-Temel form
c	Sabit holomorfik kesitsel eğrilik

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Kaehler manifoldu ile ilgili ilk çalışma, 1933 yılında E. Kaehler tarafından verilmiştir. Daha sonra Hodge, Bochner, Nomizu, Chern, Ogiue, Yano gibi matematikçiler Kaehler manifoldunun diferensiyel geometrisi üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır..

Sabit holomorfik kesit eğrilikli Kaehler manifoldları, yani kompleks uzay formları ile ilgili de birçok çalışma yapılmıştır.

1970'li yıllarda manifold üzerinde yarı-Riemann (veya indefinite) metrik olarak adlandırılan simetrik, bilineer ve non-degenere bir metrik tensör alanının alınmasıyla yeni bir manifold tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan manifold yarı-Riemann manifold olarak adlandırılır. Riemann manifoldlarına ait özellikler, yarı-Riemann manifoldları için incelenmiştir.

1982 yılında Barros ve Romero, yarı-Riemann (indefinite) metriğe sahip bir çift boyutlu yarı-Riemann manifoldu alarak indefinite Kaehler manifoldunu tanımlamış ve $S_P\{X, JX\}$ düzleminin holomorfik kesit eğriliği olarak adlandırılan kesit eğriliğini incelemişlerdir (Barros and Romero, 1982). Bunun dışında, indefinite kompleks uzay formlarının standart modelleri, yine Barros ve Romero (1982) ve Wolf (1967) tarafından verilmiştir.

Daha sonraki yıllarda Banome, Garcia-Rio, Guggal, Bejancu, Küpeli, Pyo, Choi gibi matematikçiler de bu konuyla ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Küpeli 1993, 1995 ve 1996 yıllarında yapmış olduğu çalışmalarda Kaehler manifoldları için iyi bilinen teorem ve sonuçları, indefinite Kaehler manifoldları için vermiştir (Küpeli, 1993;1995;1996).

Indefinite kompleks uzay formları, yani sabit holomorfik kesit eğrilikli indefinite Kaehler manifoldları ile ilgili çalışmalar da Barros, Romero, Suh, Bejancu, Duggal, Ikawa, Nakagava gibi matematikçiler tarafından yapılmıştır (Barros and Romero, 1982; Romero, 1998; Duggal and Bejancu, 1996). Yazarların çalışmalarında özellikle, indefinite kompleks uzay formlarının ve bunların altmanifoldlarının diferensiyel geometrisi ve hiperyüzeyleri ile ilgili çalışılmıştır.

Bu çalışmada kompleks manifoldlar, Kaehler manifoldu fikri ve lokal formülleri ifade edilmiştir. Ayrıca holomorfik kesitsel eğriliği açıklanarak indefinite kompleks uzay formları tanımlanmış ve standart modellerine göre sınıflandırmalar yapılmıştır.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde konuyla ilgili ön bilgiler sunulmuş olup, konuya temel oluşturan tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $n-$**boyutlu topolojik manifold** veya $n-$**manifold** dur denir:

(1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(2) M $n-$boyutlu lokal Öklidyendir.

(3) M açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2. M bir $n-$boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından **diferensiyellenebilir manifold** denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.3. V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir **tanjant vektörü** denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.4. A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_A(P)$ de toplama ve skalar ile çarpma işlemleri sırası ile,

$$\begin{aligned} \oplus : \quad T_A(P) \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ ((P, \vec{v}), (P, \vec{u})) &\rightarrow (P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u}) \end{aligned}$$

veya

$$(\vec{v}_P, \vec{u}_P) \rightarrow \vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = (\vec{v} + \vec{u})_P$$

ve

$$\begin{aligned} \odot: \mathbb{R} \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ (\lambda, (P, \vec{v})) &\rightarrow \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

veya

$$(\lambda, \vec{v}_P) \rightarrow \lambda \odot \vec{v}_P = (\lambda \vec{v})_P$$

biçiminde verilsin. Burada $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki **tanjant uzayı** denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.5. $V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X: V \rightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.6. $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir ve $\vec{v}_P \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun. Bu durumda $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{v}_P[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), ..., P_n + t(Q_n - P_n))) \mid_{t=0}$$

reel sayısına f nin $\vec{v}_P$ **vektörü yönündeki türevi** denir (Hacısalihoğlu, 1998).

2.1 Simetrik Bilineer Formlar

Bu kısımda vektör uzayı üzerinde metrik ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\overline{g} : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

i) $\overline{g}(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{g}(\vec{v}, \vec{u})$

ii) $\overline{g}(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = a\overline{g}(\vec{u}, \vec{w}) + b\overline{g}(\vec{v}, \vec{w})$

iii) $\overline{g}(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = a\overline{g}(\vec{u}, \vec{v}) + b\overline{g}(\vec{u}, \vec{w})$

özelliklerine sahip ise $\overline{g}$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilineer form** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\overline{g}$ olsun.

i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\overline{g}(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise $\overline{g}$ simetrik bilineer formuna **pozitif (definite) tanımlı**,

ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\overline{g}(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\overline{g}$ simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı**,

iii) $\forall \vec{v} \in V$ için $\overline{g}(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise $\overline{g}$ simetrik bilineer formuna **pozitif (semi-definite) yarı tanımlı**,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ için $\overline{g}(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise $\overline{g}$ simetrik bilineer formuna **negatif yarı tanımlı**,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\overline{g}(\vec{v},\vec{w}) = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olmak zorunda ise $\overline{g}$ simetrik bilineer formuna **non-dejenere**, aksi taktirde **dejeneredir** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve

$$\overline{g} : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\overline{g}\mid_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\overline{g}$ **simetrik bilineer formun indeksi** denir ve ν ile gösterilir. W altuzayı üzerine indirgenmiş $\overline{g}\mid_W$ simetrik bilineer formuna **indirgenmiş simetrik bilineer form** adı verilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.4. Bir $\overline{g}$ simetrik bilineer formunun non-degenere olması için gerek ve yeter şart $\overline{g}$ nin herhangi bir baza göre ters matrisinin olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-degenere simetrik bilineer forma, V reel vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpma** denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\overline{g}$ ise $(V, \overline{g})$ ikilisine **skalar çarpımlı uzayı** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. $(V, \overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da onun altuzayı olsun

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \overline{g}(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W **uzayının diki** denir (O'Neill, 1983; Duggal and Bejancu, 1996).

Teorem 2.1.7. $(V, \overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da altuzayı olsun. Bu durumda,

i) $boyW + boyW^{\perp} = m,$

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W,$

iii) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dır. Burada

$$RadW = \{w \in W \mid \overline{g}\,(v, w) = 0, \forall v \in W\}$$

olarak verilir (O'Neill, 1983; Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.8. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma $\overline{g}$ olsun. Bir $\vec{v} \in V$ vektörünün normu

$$\left\| \vec{v} \right\| = \sqrt{\left| \overline{g}(\vec{v}, \vec{v}) \right|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre **birim vektör** ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de **ortonormal sistem** denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.9. $\overline{g}$ skalar çarpımıyla donatılan V bir vektör uzayı için aşağıdaki özellikler elde edilir.

(1) V için $\{e_1, ..., e_m\}$ ortonormal bazları mevcuttur.
Şöyleki $\overline{g}(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, burada $\varepsilon_j = \overline{g}(e_j, e_j) = \pm 1$ dir.

(2) V nin her bir v vektörü aşağıdaki gibi bir tek ifadeye sahiptir.

$$v = \sum \varepsilon_j \overline{g}(v, e_j) e_j$$

(3) V nin $\{e_1, ..., e_m\}$ herhangi ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ in işaretleri içerisindeki negatif işaretlilerinin sayısı V nin s indeksine eşittir.

(4) *Eğer* W non-dejenere ise

$$indV = indW + indW^{\perp}$$

dir (Romero and Suh, 2004).

2.2 Yarı-Riemann Manifoldlar

Bu kısımda yarı-Riemann manifoldlar için çalışmada kullanılacak geçerli tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M bir C^{∞} manifold olsun. $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_PM olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} g_P: & T_PM \times T_PM & \to & \mathbb{R} \\ & (X_P, Y_P) & \to & g_P(X_P, Y_P) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer ve non-dejenere $(0,2)$ tipindeki tensör alanına M üzerinde bir **metrik tensör** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. g metrik tensörü ile donatılmış bir C^{∞} M manifolduna **yarı-Riemann manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine **yarı-Riemann manifoldun indeksi** denir ve ind$M$ ile gösterilir. Eğer indeks υ ise, $0 \leq \upsilon \leq boyM$ dir. Özel olarak, $\upsilon = 0$ ise $\forall P \in M$ için g_P, T_PM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir **Riemann manifoldu** olur. $\upsilon = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir **Lorentz Manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir $\mathbb{C}^{\infty}$ altmanifoldu M ve $\bar{M}$ deki metrik g olsun.

$$\varphi : M \to \bar{M}$$

$$P \rightarrow \varphi(P)$$

inclusion(daldırma) dönüşümü için $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$T_P M \overset{\varphi_*|_P}{\rightarrow} T_{\varphi(p)} \bar{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$T_P M^* \overset{\varphi^*|_P}{\rightarrow} T_{\varphi(p)} \bar{M}^*$$

olmak üzere,

$$(\varphi^* \mid_P g_P)(X_P, Y_P) = g(\varphi_*(X_P), \varphi_*(Y_P)) \mid_P ; \forall X_P, Y_P \in T_P M$$

eşitliği ile tanımlı $\varphi^* \mid_P (g_P)$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\bar{M}$ nin bir **yarı-Riemann altmanifoldu** denir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. M bir C^∞ yarı-Riemann manifoldu ve g, M üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Eğer $\forall P \in M$ ve $X_P \in T_P M$ için

$$g : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

i) $g(X_P, X_P) > 0$ veya $X_P = 0$ ise X_P vektörüne **uzay benzeri (spacelike vektör)**,

ii) $g(X_P, X_P) < 0$ ise X_P vektörüne **zaman benzeri (timelike vektör)**,

iii) $g(X_P, X_P) = 0$, $X_P \neq 0$ ise X_P vektörüne **ışık benzeri (lightlike** veya **null vektör)** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $0 \leq v \leq n$ olmak üzere v tamsayısı için,

$$g_P(X_P, Y_P) = -\sum_{i=1}^{v} x_i y_i + \sum_{i=v+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay **semi-Öklid** $n-$**uzay** olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}^n_v$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7. $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde vektör alanları iseler,

$$D_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre **kovaryant türevi** denir.

Burada $\{\partial_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}^n_v)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

2.3 Riemann Manifoldlar ve Koneksiyonlar

Çalışmanın bu kısmında koneksiyon kavramı ve onun yardımıyla tanımlanan kavramlar ile 1-form, Lie operatörü ve bazı eğrilikler verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ ve $\overline{M}$ manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\overline{g} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer $\overline{g}$ Riemann metriği ile birlikte $\overline{M}$ ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.2. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ olmak üzere, $\forall f, g \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D : \ \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\to \chi(\overline{M}) \\ (X, Y) &\to D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için

i) $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$

ii) $D_X\,(fY) = fD_XY + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa D ye $\overline{M}$ manifoldu üzerinde bir **afin koneksiyon** ve D_X e de X e göre **kovaryant türev operatörü** denir (Hacısalihoğlu, 1983; Spivak, 1979).

Tanım 2.3.3. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\overline{D}$ da $\overline{M}$ üzerinde bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere, D dönüşümü

i) $D_XY - D_YX = [X, Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X(\overline{g}(Y, Z)) = \overline{g}(D_XY, Z) + \overline{g}(Y, D_XZ)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, D ye $\overline{M}$ üzerinde **Riemann (veya Levi-Civita) koneksiyonu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.4. $\overline{M}$ üzerinde bir afin koneksiyon D ve $U \subset M$ bir açık olmak üzere U daki bir lokal koordinat sistemi $\{\Phi, U\}$ ikilisine göre

$$\Phi : \quad Q \in U \quad \rightarrow \quad (x_1(Q), ..., x_n(Q))$$

olacak şekildeki lokal koordinat fonksiyonları $\{x_1, ..., x_n\}$ ve $D\mid_U$ da D nin U ya kısıtlanmışı olsun. $\chi(\overline{M})$ nin bir bazı $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ alınabilir. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} D: & \chi(U) \times \chi(U) & \rightarrow & \chi(U) \\ & (\partial_i, \partial_j) & \rightarrow & D_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ji}\partial_k \end{array} \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$\Gamma^k_{ji} : \quad U \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

ile tanımlanan n^3 tane Γ_{ji}^k bileşenlerine D **nin bileşenleri** (koneksiyon bileşenleri) veya **Christoffel katsayıları** denir ve

$$dx_k(D_{\partial_i}\partial_j) \quad = \quad \Gamma_{ji}^k$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.5. M manifoldunun koneksiyonu D ve bir $U \subset M$ açık alt cümlesi üzerinde bir koordinat komşuluğu (U, ϕ) ve $\chi(U)$ üzerinde C^∞ vektör alanlarının ortonormal bazı $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ ve bu bazın dual bazı da $\{w^1, ..., w^n\}$ olmak üzere

$\forall X \in \chi(U)$ için

$$D_X\partial_j \quad = \quad w_j^k(\partial_k)$$

ise

$$\begin{aligned} w^p(D_X\partial_j) &= w^p(w_j^k(X)\partial_k) \\ &= (w_j^k(X)w^p(\partial_k)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$w^p(D_X\partial_j) \quad = \quad w_j^p(X)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} w_j^p : \quad \chi(U) &\rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ X &\rightarrow w_j^p(X) = w^p(D_X\partial_j) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan w_j^p $1-$formlarına U üzerinde $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ baz vektör alanlarına göre D **koneksiyonunun** $1-$**formları** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.6. M bir C^∞ $n-$manifold ve M üzerinde bir afin koneksiyon D olsun.

$$\begin{aligned} Tor : \quad \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow Tor(X, Y) = D_XY - D_YX - [X, Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı D koneksiyonunun **torsiyon tensörü** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.7. V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{array}{rccc} [,]: & V \times V & \to & V \\ & (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array}$$

dönüşümü de;

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için;

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \equiv 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir **Lie operatörü (Lie parantez operatörü)** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.3.8. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\overline{M}$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ olsun.

$$\begin{array}{rccc} [,]: & \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \to & \chi(\overline{M}) \\ & (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[,]$ bir Lie operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.9. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(\overline{M})$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki

i) $L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$

ii) $L_X Y = [X, Y], \quad \forall Y \in \chi(\overline{M})$

iii) $L_X \overline{g}(Y, Z) = X(\overline{g}(Y, Z)) - \overline{g}([X, Y], Z) - \overline{g}([X, Z], Y),$
$\forall Y, Z \in \chi(\overline{M})$.

koşullarını sağlayan bir operatör olup, X vektör alanına göre **Lie türev operatörü** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984; Duggal and Bejancu, 1996)

Tanım 2.3.10.

$$\begin{array}{rccl} d: & C(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}) & \to & \chi^*(\mathbb{E}^n) \\ & f & \to & df \end{array}$$

öyle ki, $\forall X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ için $df(X) = X[f]$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna **diferensiyel operatör** denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.3.11. $P \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki kotanjant uzayı, $T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun.

$$w: \ \mathbb{E}^n \ \to \ \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w: \ \mathbb{E}^n \ \to \ \mathbb{E}^n$$

olacak şekilde

$$\pi: \ \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P) \ \to \ \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu mevcutsa w ya $\mathbb{E}^n$ üstünde $1-$**form** denir ve bu $1-$formların cümlesini $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösteririz (Hacısalihoğlu, 1998).

$\mathbb{E}^n$ ve $\mathbb{E}^m$ üzerindeki $k-$**formların** uzayını sırasıyla

$$\wedge^k(\mathbb{E}^m) = T^*_{\mathbb{E}^m} \wedge ... \wedge T^*_{\mathbb{E}^m}$$

$$\wedge^k(\mathbb{E}^n) = T^*_{\mathbb{E}^n} \wedge ... \wedge T^*_{\mathbb{E}^n}$$

olarak alabiliriz.

Diğer yandan $0-$formları, $1-$formlara dönüştüren d operatörünü de genelleştirebiliriz. $w \in \wedge^k(\mathbb{E}^n)$ olmak üzere

$$w = \sum_{i_1<\cdots<i_k} w_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

ise $k-$formundan bir $(k+1)-$form olarak

$$dw = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{\partial(w_{i_1\cdots i_k})}{\partial x_\alpha} \partial x_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

formunu tanımlarız. Buna göre aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 2.3.12.

i) $d(w+\zeta) = dw + d\zeta,\ \forall w, \zeta \in \wedge^p(\mathbb{E}^n)$

ii) w bir $p-$ form ve ζ bir $q-$ form ise $d(w \wedge \zeta) = dw \wedge \zeta + (-1)^p(w \wedge d\zeta)$

iii) $d(dw) = 0$, kısaca $d^2 = 0$

iv) $w \in \wedge^k(\mathbb{E}^n)$ ve $f \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^m)$ için $f^*(dw) = d(f^*w)$

dır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.13. $\overline{M}$ bir $n-$manifold ve $\overline{M}$ üzerinde bir A bölgesinde tanımlı bir C^∞ fonksiyon f olsun. f bir $0-$form olarak adlandırılır

$$df(X) = X[f] = \langle Df, X \rangle$$

olarak tanımlanan df $1-$formuna f nin A daki **dış türevi** denir. A üzerinde w bir C^∞ $1-$form olsun. w nın dw ile göstereceğimiz dış türevi A üzerinde bir $2-$form olarak

$$dw(X,Y) = \{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır ve buna **Ricci denklemi** denir.

Buradan da

$$dw_i = -\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \wedge w_j + T_i$$

I. Cartan Yapı Denklemleri ile

$$dw_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} w_{ik} \wedge w_{kj} + R_{ij}$$

II. Cartan Yapı Denklemlerine ulaşılır (Hacısalihoğlu, 2004).

d dış türev operatörünün bir özelliği aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.3.14. **(Poincare Teoremi)** M bir $n-$manifold ve $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olsun. O zaman,

$$d^2 f = d(df) = 0$$

dır (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 2.3.15. w bir $p-$form olsun. $dw = 0$ ise w, $p-$formuna **kapalı**dır denir ve $w = dy$ olacak şekilde bir y, $(p-1)$ formu var ise w, $p-$formuna **tam**dır denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Sonuç 2.3.16. Her tam form kapalıdır.

İspat: w tam olsun. O zaman $w = d\zeta$ olur. Buradan da.

$$dw = d(d\zeta) = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Sonuç 2.3.17. Her kapalı form tamdır.

İspat: $dw = 0$ ve $w = d\zeta$ olsun. Ozaman

$$d(d\zeta) = 0$$

dir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Teorem 2.3.18. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{D}$ de $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2\overline{g}(\overline{D}_X Y, Z) &= X\overline{g}(Y,Z) + Y\overline{g}(Z,X) - Z\overline{g}(X,Y) \\ &\quad -\overline{g}(X,[Y,Z]) + \overline{g}(Y,[Z,X]) + \overline{g}(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.19. $\overline{M}$ Riemann manifoldu ve $\overline{D}$, $\overline{M}$ üzerinde Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\begin{aligned} \overline{R}: \ \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\rightarrow \chi(\overline{M}) \\ (X,Y,Z) &\rightarrow \overline{R}(X,Y)Z = \overline{D}_X\overline{D}_Y Z\text{-}\overline{D}_Y\overline{D}_X Z\text{-}\overline{D}_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{R}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına $\overline{M}$ nin **Riemann eğrilik tensörü** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi 2003; Spivak, 1979).

Teorem 2.3.20. $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{R}$, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X, Y, Z, W \in \chi(\overline{M})$ için

i) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z, W) = -\overline{g}(\overline{R}(Y,X)Z, W)$,

ii) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z, W) = -\overline{g}(\overline{R}(X,Y)W, Z)$,

iii) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z, W) = \overline{g}(\overline{R}(Z,W)X, Y)$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.21. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{R}$, $(\overline{M},\overline{g})$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{R}(X,Y)Z + \overline{R}(Z,X)Y + \overline{R}(Y,Z)X = 0$$

eşitliği **I. Bianchi özdeşliği** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.22. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, $\overline{R}$, $(\overline{M},\overline{g})$ nin Riemann eğrilik tensörü ve $\overline{D}$ Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\left(\overline{D}_X \overline{R}\right)(Y, Z) + \left(\overline{D}_Y \overline{R}\right)(Z, X) + \left(\overline{D}_Z \overline{R}\right)(X, Y) = 0$$

eşitliği **II. Bianchi özdeşliği** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.23. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. Bir $P \in \overline{M}$ noktasındaki $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının, X_P ve Y_P tanjant vektörleri tarafından gerilen 2−boyutlu bir altuzayı Π olmak üzere

$$\overline{K}(\Pi) = \frac{\overline{g}(\overline{R}(X_P, Y_P)Y_P, X_P)}{\overline{g}(X_P, X_P)\overline{g}(Y_P, Y_P) - \overline{g}(X_P, Y_P)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{K}(\Pi)$ reel sayısına Π nin **kesit eğriliği** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.24. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1, ..., X_n\}$, $\chi(\overline{M})$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{S}: & \chi(\overline{M}) & \rightarrow & \chi(\overline{M}) \\ & X & \rightarrow & \widetilde{S}(X) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{R}(X_i, X)X_i \end{array}$$

şeklinde tanımlı $\widetilde{S}$ operatörüne $\overline{M}$ nin **Ricci operatörü** adı verilir. Ayrıca $\widetilde{S}$ yardımı ile $\overline{M}$ nin **Ricci eğrilik tensörü** $\overline{Ric}$,

$$\begin{array}{rccl} \overline{Ric}: & \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \rightarrow & C^{\infty}(\overline{M}, \mathbb{R}) \\ & (X, Y) & \rightarrow & \overline{Ric}(X, Y) = \overline{g}(\widetilde{S}(X), Y) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $(0, 2)$ tipinde bir tensördür. Eğer $\overline{Ric}(X, Y) = \lambda\overline{g}(X, Y)$ ise $(\overline{M}, \overline{g})$ manifolduna bir **Einstein manifoldu** denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.25. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının bir bazı olmak üzere $\overline{M}$ nin **skalar eğriliği**

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \overline{Ric}(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.3.26. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve bir $P \in \overline{M}$ noktasındaki $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının, X_P ve Y_P tanjant vektörleri tarafından gerilen 2−boyutlu bir altuzayı Π olmak üzere, Π nin kesit eğriliği $\overline{K}(\Pi)$ olsun. $\overline{M}$ nin her p noktasındaki her Π için $\overline{K}(\Pi)$ sabit ise $(\overline{M},\overline{g})$ **sabit eğrilikli uzay** adını alır. Sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu **uzay form** olarak adlandırılır. $\overline{M}$ nin sabit kesit eğriliği c olmak üzere $\overline{M}$ uzay formu $\overline{M}(c)$ ile gösterilir. Eğer

$$\begin{cases} c = 0 & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = E^n \text{ Öklid uzayı} \\ \\ c = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = S^n(r) \text{ Küresi} \\ \\ c = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay} \end{cases}$$

dır (Chen, 1973).

Teorem 2.3.27. $(\overline{M}, \overline{g})$ kesit eğriliği c olan bir sabit eğrilikli uzay ve $\overline{R}$, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\left[\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y\right]$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.28. M ve $\overline{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\overline{M}$ nin altmanifoldu, $\overline{D}$ ve D sırasıyla M ve $\overline{M}$ de kovaryant türevler olsun. Böylece $\forall X,\ Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + h(X,Y) \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya **Gauss formülü** adı verilir. Burada $D_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla, $\overline{D}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. (2.4) bağıntısında tanımlanan h ya M nin **ikinci temel formu** adı verilir. Eğer $h = 0$ ise M ye **total geodeziktir** denir (Chen, 1973).

Tanım 2.3.29.

$$\begin{array}{rlcl} h: & \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & \chi(M)^{\perp} \\ & (X, Y) & \rightarrow & h(X, Y) = \overline{D}_X Y - D_X Y \end{array}$$

olarak tanımlanan h fonksiyonuna M altmanifoldunun **ikinci temel formu** denir.

İkinci temel form h **nın kovaryant türevi** $\overline{\overline{D}}_X h$ olmak üzere

$$(\overline{\overline{D}}_X h)(Y, Z) \;=\; \overline{D}^{\perp}_X (h(Y, Z)) - h(\overline{D}_X Y, Z) - h(Y, \overline{D}_X Z) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. h nın kovaryant türevi $\overline{\overline{D}}_h$ ya M nin **üçüncü temel formu** adı verilir. Buradaki $\overline{\overline{D}}$, M nin $T^{\perp}M$ normal demetinde tanımlanan normal koneksiyon olup buna **Van der Waerden Bortolotti koneksiyonu** denir ve

$$(\overline{\overline{D}}_X h)(Y, Z) = (\overline{\overline{D}}_Y h)(X, Z) = (\overline{\overline{D}}_Z h)(X, Y) \tag{2.6}$$

şeklinde **Codazzi Denklemini** sağlar (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.30. N in $n-$boyutlu altmanifoldu M olsun.

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

biçiminde tanımlanan $\widetilde{H}$ vektör alanına M nin **ortalama eğrilik vektör alanı** adı verilir. Eğer $\widetilde{H} = 0$ ise M altmanifolduna **minimal**dir denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.31. $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir altmanifoldu olsun. (M, g) ve $(\overline{M}, \overline{g})$ üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\overline{R}$ ve R olsun. $\forall X,\ Y,\ Z,\ W \in \chi(M)$ için

$$\overline{g}(\overline{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - \overline{g}(h(X, W), h(Y, Z)) + \overline{g}(h(Y, W), h(X, Z))$$

ile tanımlanan bağıntıya **Gauss denklemi** denir. Gauss denkleminin normal bileşeninin alınması ile elde edilen

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (D_X h)(Y,Z) - (D_Y h)(X,Z)$$

bağıntısına ise **Codazzi denklemi** denir (Yano and Kon, 1984).

2.4 Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Çalışmanın bu kısmında hemen hemen kompleks yapı ve onun oluşturduğu hemen hemen kompleks manifold, holomorfik fonksiyon ve onun oluşturduğu kompleks manifold, holomorfik kesit eğriliği tanımları verilmiştir.

Tanım 2.4.1. $\overline{M}$ bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. $\overline{M}$ nin her p noktasındaki $T_p\overline{M}$ tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir

$$J : T_p\overline{M} \to T_p\overline{M}$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye $\overline{M}$ üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir. Hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış $\overline{M}$ manifolduna **hemen hemen kompleks manifold** denir. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.4.2. $\overline{M}$, hemen hemen kompleks bir manifold ve J, $\overline{M}$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. $\overline{g}$, $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere, $\forall X,Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{g}(JX,JY) = \overline{g}(X,Y)$$

koşulu sağlanıyor ise $\overline{g}$ ye $\overline{M}$ üzerinde **Hermit metrik** denir. Hermit metrik ile donatılmış hemen hemen kompleks $\overline{M}$ manifolduna **hemen hemen Hermit manifold** denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.4.3. U, $\mathbb{C}^n$ de bir açık cümle olsun. z_k koordinatları $z_k = x_k + iy_k$ olmak üzere U üzerinde

$$f(z_1, ..., z_n) \quad = \quad g(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) + ih(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$$

şeklinde tanımlanan bir C^∞ kompleks değerli f fonksiyonu

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial h}{\partial y_k} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y_k} = -\frac{\partial h}{\partial x_k}$$

$1 \leq k \leq n$.

Cauchy-Riemann şartlarını sağlıyorsa, f ye **holomorfik fonksiyon** denir (Chern et al., 1999).

Tanım 2.4.4. M bir Hausdorf uzay ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. $\forall P \in M$ için

$$\varphi_\alpha : \ U_\alpha \subset M \quad \rightarrow \quad W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizmi var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \quad \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \quad \rightarrow \quad \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \quad \rightarrow \quad \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

dönüşümleri holomorfik, yani $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ nın herbir koordinat fonksiyonu holomorfik ise M ye **kompleks manifolddur** denir (Chern et al., 1999).

Tanım 2.4.5. M bir indefinite Kaehler manifoldu ve $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_PM olsun. $X_P \in T_PM$ birim tanjant vektörü olmak üzere $S_P\{X_P, JX_P\}$ düzlemi için

$$K(X_P) \quad = \quad \langle R(X_P, JX_P)JX_P, X_P \rangle$$

değerine M nin **holomorfik kesit eğriliği** denir (Küpeli, 1996).

BÖLÜM 3
KOMPLEKSLEŞTİRMELER

Bu bölümde kompleks vektör uzayı ve Hermitian skalar çarpım ile ilgili bazı sonuçlar ve teoremler incelenmiştir.

3.1 Kompleks Vektör Uzayı

V bir reel vektör uzayı üzerinde bir kompleks yapı, $\dim V = m \geq 1$, $J^2 = -I$ olacak şekilde J, V nin bir lineer operatörüdür ve burada I, V nin bir özdeşlik dönüşümüdür. $\mathbb{C}$ üzerinde bu J kompleks yapısıyla donatılan bir vektör uzayı elde edilebilir. Bu vektör uzayı

$$\begin{aligned}(a+ib)v &= av+ibv \\ &= av+bJv\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir ve V_j ile gösterilir (i, sanal birim olarak tanımlanır)

($\forall\ v \in V$ ve a, b$\in \mathbb{R}$ için).

Bu vektör uzayı için $v \neq 0$ ve Jv lineer bağımsız olduğundan V nin boyutu m ise V_j nin boyutu $\dfrac{m}{2}$ dir.

Tersine n kompleks boyutlu V kompleks vektör uzayı verilsin. $\forall\ v \in V$ için $Jv = iv$ olarak tanımlanan V nin bir lineer operatörü J olsun. Eğer sadece reel skalar kullanılmışsa V bir reel vektör uzayı olarak sayılabilir ve boyutu da $2n$ olur.

Teorem 3.1.1. J kompleks yapısıyla birlikte V $2n-$boyutlu bir reel vektör uzayı için $\{v_1, ..., v_n, Jv_1, ..., Jv_n\}$ bazları mevcuttur.

İspat: V, $n-$boyutlu kompleks vektör uzayı haline aşağıdaki gibi dönüştürülebilir.

$X_1, ..., X_n$ bir kompleks vektör uzayı olarak V için bir baz olsun. Kolayca görülebilir ki $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ bir reel vektör uzayı olarak V için bir bazdır.

Şimdi V $m-$boyutlu reel vektör uzayı ve V^c, V nin bir komplekslesti rilmesi olsun. V^c kümesi $\forall\ v, w \in V$ için $v + iw$ şeklinde tanımlanan vektörlerin kümesidir. V^c üzerinde toplama ve skalar çarpım şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}(v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) &= (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)\\ (a + ib)(v + iw) &= (av - bw) + i(aw + bv)\end{aligned}$$

$(a, b \in \mathbb{R})(\forall\ v,\ w,\ v_j,\ w_j \in V,\ j = 1, 2)$

V^c, m kompleks boyutlu bir kompleks vektör uzayıdır. O halde V, V^c nin bir reel altuzayı olarak sayılabilir. $v+iw$ nin eşleniği $v-iw$ dir ve bu $\overline{v + iw}$ şeklinde gösterilir. Aynı zamanda bu da V^c nin bir vektörüdür ve bu vektör de bir reel vektör olarak tanımlanan onun eşleniğine eşit olur. Böylece doğal olarak V, V^c nin bir reel vektör uzayı olarak sayılabilir.

V nin bir lineer operatörü f için, V^c den V^c ye bir doğal uzatma f^c

$$f^c(v + iw) = f(v) + if(w)$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece görülebilir ki f^c, $\mathbb{C}-$lineerdir ve bu doğal uzatma tektir. f nin bir diğer uzatması f' olsun. Yani $f'(v) = f(v)$ olsun. $\forall\ v \in V$ için f' de $\mathbb{C}-$lineer olduğundan aralarında şöyle bir ilişki vardır:

$$\begin{aligned}f'(v + iw) &= f'(v) + if'(w)\\ &= f(v) + if(w)\\ &= f^c(v + iw)\end{aligned}$$

$(\forall v,\ w \in V)$

Teorem 3.1.2. V reel vektör uzayı için bir baz $\{v_1, ..., v_m\}$ ise bu baz V^c içinde bir bazdır.

Şu sonuca varılabilir ki V bir J kompleks yapısıyla donatılmış $2n-$boyutlu reel vektör uzayıdır. V^c nin bir kompleks lineer operatörü J^c olur ve $J^{c^2} = -I$ şeklinde ifade edilir. O yüzden J^c nin özdeğeri i ve $-i$ dir. $V^{1,0}$ ve $V^{0,1}$ sırasıyla i ve $-i$ özdeğerlerine karşılık gelen J^c nin özuzayları olsun. Diğer yandan V nin V^* dual uzayı $w \in V^*$, $v \in V$ için

$$(J^*w)(v) = w(Jv)$$

olarak tanımlanan J^* kompleks yapısını içine alır. O halde benzer şekilde V^* dual uzayının V^{*^c}komplekslеştirmeside J^{*^c}kompleks yapısını içine alır ve bu da J^* nin doğal bir uzatması olur. $V_{1,0}$ ve $V_{0,1}$ sırasıyla i ve $-i$ özdeğerlerine karşılık gelen J^{*^c} nin özuzayları olsun. O halde aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Önerme 3.1.3.

$$\begin{aligned} V^c &= V^{1,0} \oplus V^{0,1} \\ V^{*^c} &= V_{1,0} \oplus V_{0,1} \end{aligned}$$

şeklinde kompleks vektör uzayları olarak direkt toplam ayrışması vardır. Burada

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \{v - iJv \; ; v \in V\} \\ V^{0,1} &= \{v + iJv \; ; v \in V\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{1,0} &= \left\{w \in V^{*^c}; \forall v \in V^{0,1} \, , w(v) = 0\right\} \\ V_{0,1} &= \left\{w \in V^{*^c}; \forall v \in V^{1,0} \, , w(v) = 0\right\} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

3.2 Hermitian Skalar Çarpımlar

J kompleks yapısıyla beraber V reel vektör uzayı üzerinde g Hermitian skalar çarpımı J değişmez altında V de bir skalar çarpımdır. Yani g yi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$g(Jv, Jw) = g(v, w) \tag{3.1}$$

$(\forall v, w \in V)$. Bu ifadeyi açıklamak için, bir V' kompleks vektör uzayı üzerinde bir Hermit skalar çarpımı kavramı oluşturulmuştur.

Bu da, $h : V' \times V' \to \mathbb{C}$ şeklinde ve aşağıdaki özelikleri sağlayan bir $\mathbb{C}$-değerli h fonksiyonunun tanımlanmasıyla olur:

i) $h(v', w')$, V' de $\mathbb{C}$- lineerdir, yani $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h(v', w' + u') &= h(v', w') + h(v', u'), \\ h(av', w') &= ah(v', w'), \\ h(v', aw') &= \bar{a}h(v', w') \text{ dir.} \end{aligned}$$

ii) $h(v', w') = \bar{h}(w', v')$ dir ve burada $\bar{h}(w', v')$, $h(v', w')$ nün kompleks eşleniğidir.

iii) h non-degeneredir, yani herhengi $w' \in V$vektörü için, $v' = 0$ olmak üzere $h(v', w') = 0$ dır (Romero and Suh, 2004).

Varsayalımki V_j kompleks vektör uzayı, J bir kompleks yapısıyla birlikte $2n-$boyutlu bir V reel vektör uzayından elde edilsin ve bir h Hermitian skalar çarpıma sahip olsun. Eğer $V \times V$ üzerinde g bir reel-değer fonksiyonu h nin reel parçaları olarak tanımlıysa (V, J) üzerinde g Hermitian skalar çarpımdır.

Yani $\forall v, w \in V$ için verilen g fonksiyonu

$$g(v, w) = \frac{\{h(v, w) + h(w, v)\}}{2} \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan da g nin simetrik ve bilineer olduğu anlaşılır.

Ayrıca

$$h(v, Jw) = h(v, iw) = -ih(v, w) = a \tag{3.3}$$

dir. Burada $h(v,w)$ imgesel olarak ai ye karşılık gelir ($a \in \mathbb{R}$).

Ve daha önceden ifade edilen $\forall\ w \in V$ için $g(v,w) = 0$ ifadesini $h(v,w)$ için de ifade edilebilir. Bu durumda

$$-ih(v,w) = a$$

olmak üzere $\forall\ w \in V$ için

$$a = -ih(v,w) = 0$$

elde edilir. Bunun anlamı da g non-degenere olduğunda h da non-degeneredir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(Jv,Jw) &= \operatorname{Re} h(iv,iw) \\ &= \operatorname{Re} h(v,w) \\ &= g(v,w) \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$h(v,w) = g(v,w) - ig(Jv,w) \tag{3.4}$$

elde edilir. Yani J kompleks yapısıyla beraber bir reel vektör uzayı için ve g Hermitian skalar çarpımı için $V_j \times V_j$ üzerinde h kompleks değerli fonksiyonu (3.4) yardımıyla tanımlanır. Basit bir hesaplama gösterirki h, Hermitian skalar çarpımı şart(1) ve şart(2) yi sağlar. Şart(3), yani h nın non-degenerasyonu burada sadece ifade edilir.

Varsayalım ki, $\forall\ Y \in V_j$ için $h(X,Y) = 0$ dır. Burada $X = (a+ib)v$ olarak alalım ($a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$ ve $v \neq 0$). $V \subset V_j$ içindeki her w vektörü için o zaman aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} h(X,w) &= ah(v,w) + bh(Jv,w) \\ &= \{ag(v,w) - aig(Jv,w) + bg(v,w) - big(Jv,w)\} \\ &= \{ag(v,w) + bg(v,w)\} + i\,\{-ag(Jv,w) + bg(v,w)\ \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bu da

$$(a^2+b^2)g(v,w) \;=\; (a^2+b^2)g(v,w)=0$$

demektir. Böylece $\forall\ w$ için $a=b=0$ yani $X=0$ dır. Bu yüzden V_j üzerinde h Hermitian skalar çarpımı (V,J) üzerindekine bire-bir karşılık gelir ve bu da J kompleks yapısıyla birlikte g Hermitian skalar çarpımdır.

Şimdi bir V reel vektör uzayı J kompleks yapısıyla beraber ve g Hermitian skalar çarpımıyla donatılsın. Burada V^c üzerinde g nin doğal uzatması mevcuttur ve g uzatması şu şekilde tanımlanır:

$$g(X_1,X_2) \;=\; \{g(v_1,v_2)-g(w_1,w_2)\}+i\,\{g(v_1,v_2)+g(w_1,w_2)\} \tag{3.5}$$

Burada V_j nin her vektörü $j=1,2$ için $X_j=v_j+iw_j$ şeklindedir.

Önerme 3.2.1. g, V reel vektör uzayı üzerinde J kompleks yapısıyla beraber bir Hermitian skalar çarpım olsun. O zaman g, V^c üzerinde bir simetrik $\mathbb{C}-bilineer$ forma tek bir şekilde uzatılabilir ve o aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $g(\bar{X},\bar{Y})=\overline{g(X,Y)}$

(2) g bir non-degenere metriktir.

(3) $V^{1,0}$ yada $V^{0,1}$ içinde her X ve Y için $g(X,Y)=0$ dır.

Aksine V^c üzerinde her g simetrik $\mathbb{C}-bilineer$ form V üzerinde bir Hermitian skalar çarpımın doğal uzatması önceki (1), (2), (3) şartlarını sağlar (Romero and Suh, 2004).

Sonuç 3.2.2. V nin g Hermitian skalar çarpımının V^c de g doğal uzatması için $V^c\times V^c$ üzerinde kompleks değer fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h(X,Y) \;=\; g(X,\bar{Y})$$

Bu ifade V^c üzerinde bir Hermitian skalar çarpımdır (Romero and Suh, 2004).

Tüm bunlar gözönüne alınırsa, V üzerindeki bir h Hermit skalar çarpımı, dolayısıyla g Hermit skalar çarpımı, J kompleks yapısıyla uyumludur.

BÖLÜM 4
INDEFINITE KOMPLEKS UZAY FORMLARI

Bu bölümde, kompleks manifoldlar ve onların altmanifoldları, indefinite Kaehler manifoldlar incelenmiştir. Daha sonrasında bunlarla ilgili temel tanım ve kavramlar verilerek, indefinite Kaehler manifoldlar için verilen lokal formüller ispatlanmıştır. Ayrıca indefinite Kaehler manifoldların özel bir durumu olan indefinite kompleks uzay formları incelenmiştir. İndefinite kompleks uzay formlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

4.1 Kompleks Manifoldlar

Şimdi kompleks manifoldların bazı temel kavramlarını hatırlayarak hatırlatalım. M bir reel manifoldunun J hemen hemen kompleks yapısı $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır ve bu da M nin her x noktasında $J_x^2 = -I_x$ olarak ifade edilir. Burada I_x, T_xM tanjant uzayının özdeşlik dönüşümüdür. Bir manifold hemen hemen bir kompleks yapıyla donatılırsa bu manifold hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır.

M reel $2n-$boyutlu bir kompleks manifold ve M nin x koordinat komşuluğundaki $z^j = x^j + iy^j$ ile beraber $\{z^j\}$ şeklindeki bir kompleks koordinat sistemi için, $\{x^1, y^1, ..., x^n, y^n\}$ M nin bir reel koordinat sistemidir ve burada

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_x, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_x$$

T_xM için bir baz oluşturur. T_xM nin J_x operatörü de şu şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x &= \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x \\
J_x\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$(j = 1, 2, ..., n)$

Burada J_x, x civarındaki kompleks koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır.

J_x in x civarındaki kompleks koordinat sisteminin seçiminden bağımsız olmasını ispatlarsak,

$\{w^j\}$, $w^j = u^j + iv^j$ olarak tanımlanan başka bir kompleks koordinat sistemi olsun. $z^j = x^j + iy^j$ holomorfik olduğundan, x in bir komşuluğu üzerinde aşağıdaki Cauchy-Riemann denklemleri doğrulanır.

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \frac{\partial y^j}{\partial v^k} \quad , \quad \frac{\partial x^j}{\partial v^k} = -\frac{\partial y^j}{\partial u^k}$$

$(j, k = 1, 2, ..., n)$

Diğer bir yandan, her k için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^k} &= \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x^j}{\partial u^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x + \left(\frac{\partial y^j}{\partial u^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x \right\} \\
\frac{\partial}{\partial v^k} &= \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x^j}{\partial v^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x - \left(\frac{\partial y^j}{\partial v^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x \right\}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial}{\partial u^k}$ için J_x in tanımından yola çıkarsak

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_x = \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x^j}{\partial u^k}\right)_x J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x + \left(\frac{\partial y^j}{\partial u^k}\right)_x J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x \right\}$$

elde edilir. Buradan da

$$
\begin{aligned}
J\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_x &= \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x^j}{\partial u^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x - \left(\frac{\partial y^j}{\partial u^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x \right\} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right)_x
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right)_x &= \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial x^j}{\partial v^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x + \left(\frac{\partial y^j}{\partial v^k}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x \right\} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_x \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylelikle J_x in koordinat komşuluklarının seçiminden bağımsız olduğu ispatlanmış olur.

J tensör alanı, J nin bileşenleri olan $\{x^1, y^1, x^2, y^2, ..., x^n, y^n\}$ yerel koordinat sistemleriyle ilişkili olduğundan, bu durum M nin herbir x noktasında J_x in iyi tanımlı olduğunu işaret eder. J tensör alanının tanımı her x noktasında $J_x^2 = -I_x$ dir ve böylece J, M nin hemen hemen bir kompleks yapısıdır. Bu durumda M kompleks manifoldu üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanmış J_x hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğu görülür. Bu nedenle J_x e M nin **kanonik kompleks yapısı** denir.

Tersine (M, J) hemen hemen kompleks manifoldunda J integrallenebilir olsun. Bu durumda (M, J) ye kompleks manifold yapısı kazandırılabilir öyle ki, bu kompleks manifoldun kanonik kompleks yapısı J_x, J ile aynı olur (Yano and Kon, 1984).

M nin bir reel manifoldunun, T_xM, her x noktasındaki tanjant uzayının T_xM^c kompleksleştirilmişi x de kompleks tanjant uzayı olarak tanımlanır. Bir kompleks vektör alanı Z, $Z = X + \dot{I}Y$ olarak tek bir şekilde ifade edilir ve burada X ve Y birer reel vektör alanıdır. Eğer M üzerinde $r-form$ uzayını D^rM ile gösterirsek D^rM uzayının D^rM^c kompleksleştirilmişinin elemanı M üzerinde bir kompleks $r-form$ olarak adlandırılır. Her w kompleks $r-form$ $w' + iw''$ olarak yazılabilir. Burada w' ve w'' M üzerinde reel $r-form$lardır.

Varsayalımki J hemen hemen kompleks yapısıyla birlikte M hemen hemen kompleks bir manifold olsun. Önerme 3.1.3. ün yardımıyla direkt toplam ayrışması şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} T_xM^c &= T_xM^{1,0} \oplus T_xM^{0,1} \\ T_xM^{*c} &= D_x^{1,0} \oplus D_x^{0,1} \end{aligned}$$

Burada $T_xM^{1,0}$ ve $T_xM^{0,1}$ ($D_x^{1,0}$ ve $D_x^{0,1}$), i ve $-i$ özdeğerlerine karşı J (J^*) nin özuzayını gösterir. Eğer kompleks tanjant vektörü (kompleks $1-form$) $T_xM^{1,0}$ yada $T_xM^{0,1}$ e aitse bir x noktasındaki bir kompleks tanjant vektörü $(1,0)$ yada $(0,1)$ tipindendir diye ifade edilir.

Özellikle M bir kompleks manifold olsun ve $\{z^j\}$, $z^j = x^j + iy^j$ olarak ifade edilen M nin bir kompleks koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x^j &= \frac{1}{2}(z^j + \bar{z}^j) \\ y^j &= -\frac{i}{2}(z^j - \bar{z}^j) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^j} &= \left(\frac{\partial x^j}{\partial z^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \left(\frac{\partial y^j}{\partial z^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \frac{1}{2}.1.\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{i}{2}.1.\frac{\partial}{\partial y^j} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} &= \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \left(\frac{\partial y^j}{\partial \bar{z}^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \frac{1}{2}.1.\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{i}{2}.1.\frac{\partial}{\partial y^j} \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

olarak elde edilir.

$\dfrac{\partial}{\partial z^j}$ kompleks vektörü $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ nin $(1,0)$ tipinden bir elemanıdır ve $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ de $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ nin $(0,1)$ tipinden bir elemanıdır. Ayrıca kompleks vektör alanı

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, ..., \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^2}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n} \tag{4.2}$$

T_xM^c kompleks tanjant uzayının bir bazıdır. J kompleks yapısının önceki yapısından koordinat komşuluğundaki herbir x noktasında $\dfrac{\partial}{\partial z^1}, \dfrac{\partial}{\partial z^2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial z^n}$ $(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^2}, ..., \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^n})$ $T_xM^{1,0}$ $(T_xM^{0,1})$ için bir baz oluşturur.

$$dz^j = dx^j + idy^j \quad \text{ve} \quad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j$$

Burada z^j ve $\bar{z}^j$ diferensiyelleri (4.2) deki bazına karşılık gelen dual bazını oluşturur ve $dz^1, dz^2, ..., dz^n$ ($d\bar{z}^1, d\bar{z}^2, ..., d\bar{z}^n$) $D_x^{1,0}$ $(D_x^{0,1})$ ın bir bazını oluşturur (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

4.2 Indefinite Kaehler Manifoldu

Klasik olarak, bir Kaehler yapı, bir Riemann yapı ve bir kompleks yapıdan meydana gelir. Bu durumda Riemann metriğine bir Kaehler metrik de denir. Eğer bir Kaehler metriği indefinite olarak verilirse, indefinit Kaehler yapı kavramı doğal olarak ortaya çıkar. Yani, aynı zamanda hem kompleks hem de semi-Riemann olan bir geometriye sahip olunur. Indefinite Kaehler metriği, Lorentz metriğinin bir kompleks yorumudur. Tüm bunların dışında indefinit Kaehler geometrinin, uzay-zamanın kompleksleştirilmiş hali üzerinde holomorfik demetlerini çalışmak için kullanılan birleştirilmiş bir geometri olduğu ileri sürülmektedir.

M. Barros ve A. Romero, indefinit Kaehler manifoldlarını sistematik olarak ortaya koymuş ve bunların eğriliklerini içeren çeşitli özellikleri çalışmışlardır

(Barros ve Romero 1982). Sabit holomorfik kesitsel eğrilikli standart uzaylarının (yani, basit bağlantılı tam indefinit kompleks uzay formlarının) tanıtılmasının ardından, bunların kompleks altmanifoldları da düşünülmüştür. Bu altmanifollar, metriği indefinite yapma düşüncesiyle indefinite olarak alınırlar. Böylece bir kompleks altmanifoldun kendisi de bir indefinit Kaehler yapıya sahip olur. Yani, non-degenere kompleks altmanifoldlar, indefinite Kaehler altmanifoldlar olarak da adlandırılırlar.

Tanım 4.1.1. (M, J) hemen hemen kompleks manifold ve $\langle , \rangle$**,** M üzerinde $0 \leq \upsilon \leq 2n$ indeksli yarı-Riemann veya indefinit metrik olsun. Eğer $\forall X_P, Y_P \in T_P M$ için

$$\langle X_P, Y_P \rangle \;=\; \langle JX_P, JY_P \rangle$$

ise $(J, \langle , \rangle)$ ikilisine M üzerinde **indefinite hemen hemen Hermit yapı** denir. Buna göre M ye de **indefinite hemen hemen Hermit manifold** denir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 4.1.2. (M, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerindeki herhangi X ve Y vektör alanları için

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]$$

şeklinde tanımlı $N(1, 2)$ tensör alanına J nin **Nijenhuis (torsiyon) tensörü** denir (Martin, 1991).

Tanım 4.1.3. (M, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. J nin Nijenhuis tensörü sıfır ise J hemen hemen kompleks yapısına **integrallenebilirdir** denir (Martin, 1991)

Tanım 4.1.4. M bir indefinite hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Eğer J integrallenebilir ise M ye **indefinite Hermit manifold** denir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 4.1.5. M bir indefinite Hermit manifoldu olsun. M nin Φ **temel 2-formu**,

$$\Phi\left(V,W\right)=h\left(V,JW\right) \tag{4.3}$$

ile tanımlıdır ve **Kaehler formu** adını alır (Romero and Suh, 2004).

Tanım 4.1.6. Φ temel $2-$ formu kapalı olan bir M indefinite Hermit manifolduna bir **indefinite Kaehler manifold** denir (Romero and Suh, 2004).

Örnek 4.1.1.

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^{v} z_i\overline{w}_i+\sum_{j=v+1}^{n} z_j\overline{w}_j$$

indefinite Hermit metriğinin reel kısmı ile donatılmış $\mathbb{C}^n$ kompleks uzayı, kompleks $n-boyutlu$ ve $2v$, $0\leq v\leq n$, indeksli bir indefinite Kaehler manifoldudur ve $\mathbb{C}^n_v$ ile gösterilir (Romero, 1998).

M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde indefinite bir Hermitian metrik J hemen hemen kompleks yapısı altında $g-invariant$ indefinite bir Riemannian metriğidir. g, M üzerinde $(0,2)$ tipinde non-degenere simetrik tensör alanıdır ve

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

M nin her X ve Y vektör alanı için yukarıdaki şekilde ifade edilir. Böylece indefinite bir Hermitian metrik J hemen hemen kompleks yapısına bağlı herbir T_xM tanjant uzayı üzerinde Hermitian skalar çarpım olarak tanımlanır.

Bir $n-boyutlu$ kompleks manifold indefinite bir Hermitian metrikle beraber bir indefinite Hermitian manifold olarak tanımlanır. Bu yüzden T_xM nin her v spacelike (null yada timelike) vektörü için Jv spacelike (null yada timelike) dır ve böylece g nin indeksi $0\leq s\leq n$ olmak üzere $2s$ tamsayısıdır.

Bu bölümdeki ifadelerde aşağıdaki indisler kullanılır.

$$\begin{aligned} A, B, ... &= 1, ..., n, \bar{1}, ..., \bar{n}; \\ i, j, ... &= 1, ..., n; \\ j^* &= j + n \end{aligned}$$

M nin $\{z^j\}$ kompleks bir koordinat sistemi için

$$\{Z_A\} = \left\{Z_j, \bar{Z}_j\right\}, \quad Z_j = \frac{\partial}{\partial z^j}, \quad \bar{Z}_j = Z_{\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \tag{4.4}$$

g_x yardımıyla tanımlanan g bir indefinite Hermitian metriği, Hermitian skalar çarpımı, $T_x M^c$ kompleks tanjant uzayı üzerine g bir kompleks simetrik bilineer forma Önerme 3.2.1. kullanılarak herbir $T_x M$ tanjant uzayı üzerine uzatılabilir. $g_{AB} \;=\; g(Z_A, Z_B)$ dir. Önerme 3.2.1. in (1) ve (3) şartları ve Z_j ($\bar{Z}_j$) $(1,0)$ tipinde olduğundan ($(0,1)$ tipinde)

$$g_{jk} = g_{\overline{jk}} = 0 \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir. Burada $(g_{j\bar{k}})$ $n \times n$ tipinden bir Hermitian matristir.

Şimdi (4.5) denklemi ispatlanırsa,

$$g_{jk} = g(Z_j, Z_k)$$

olarak ifade edilsin. Burada Z_j ve Z_k değerlerini (4.4) eşitliklerinde olduğu gibi ifade edilir. g, $J-invariant$ olduğundan ve (4.4) gereği

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial z^j},\frac{\partial}{\partial z^k}\right) &= g\left(J\frac{\partial}{\partial z^j},J\frac{\partial}{\partial z^k}\right) \\ &= g\left(i\frac{\partial}{\partial z^j},i\frac{\partial}{\partial z^k}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z^k},-\frac{\partial}{\partial z^j}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial z^k},\frac{\partial}{\partial z^j}\right) \end{aligned}$$

dir.

Böylece

$$g_{jk}=0$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} g_{\overline{jk}}=g(Z_{\overline{j}},Z_{\overline{k}}) &= g\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j},\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right) \\ &= g\left(J\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j},J\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right) \\ &= g\left(-i\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j},-i\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j},\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$g_{\overline{jk}}=0$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca

$$ds^2=2\sum g_{j\overline{k}}dz^j d\overline{z}^k \tag{4.6}$$

ifadesi indifinite Kaehler manifoldu için 1.temel forma karşılık gelir.

(4.6) eşitliğinin ispatı:.

$$dZ = \sum (Z_j dz^j + \overline{Z}_k d\overline{z}^k)$$

olarak ifade edelim.

$$ds^2 \ = \ \langle dZ, dZ \rangle$$

olarak yazıp yukarıdaki dZ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum \left\langle (Z_j dz^j + \overline{Z}_k d\overline{z}^k), (Z_j dz^j + \overline{Z}_k d\overline{z}^k) \right\rangle \\ &= \sum \left(\langle Z_j, Z_j \rangle dz^j dz^j + \left\langle \overline{Z}_k, Z_j \right\rangle d\overline{z}^k dz^j \right. \\ & \quad \left. + \left\langle Z_j, \overline{Z}_k \right\rangle dz^j d\overline{z}^k + \left\langle \overline{Z}_k, \overline{Z}_k \right\rangle d\overline{z}^k d\overline{z}^k \right) \end{aligned}$$

eşitliğinde

$$\left\langle \overline{Z}_k, Z_j \right\rangle = \left\langle Z_j, \overline{Z}_k \right\rangle = g_{j\overline{k}}$$

olarak ifade edilir ve (4.5) gereği de

$$\langle Z_j, Z_j \rangle = \left\langle \overline{Z}_k, \overline{Z}_k \right\rangle = 0$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum (2 \left\langle Z_j, \overline{Z}_k \right\rangle dz^j d\overline{z}^k) \\ &= 2 \sum g_{j\overline{k}} dz^j d\overline{z}^k \end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

g_{jk}, g_{jk^*}, g_{j^*k}, $g_{j^*k^*}$, $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^j}, \dfrac{\partial}{\partial y^j} \right\}$ bazlarıyla ilişkili olarak g indefinite Hermitian metriğin elemanı olsun. Burada $z^j = x^j + iy^j$ olarak ifade edilir. g, $J - invariant$ olduğundan

$$g_{jk} = g_{j^*k^*} \quad , \quad g_{j^*k} = -g_{jk^*} \tag{4.7}$$

olur. Bunlar hem g indefinite Hermitian metriğin hem de onun kompleks tanjant vektörlerine doğal yayılımıyla aynı sembollerle gösterilir.

Bu son ifadenin ispatı:

g Hermitian metrik olduğundan

$$g(Z_j, Z_k) \quad = \quad g(JZ_j, JZ_k)$$

şeklinde ifade edilir. (4.4) gereği ve $J - invariant$ olduğundan

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) \quad = \quad g\left(J\frac{\partial}{\partial z^j}, J\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$g_{jk} \quad = \quad g_{j^*k^*}$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde

$$g(JZ_j, Z_k) \quad = \quad -g(Z_j, JZ_k)$$

$$g\left(J\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) \quad = \quad -g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, J\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$g_{j^*k} \quad = \quad -g_{jk^*}$$

elde edilmiş olur.

Yani $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$ ile ilgili olarak g metriği şöyle yazılır:

$$ds^2 \quad = \quad \sum \left(g_{jk}dx^j dx^k + g_{jk^*}dx^j dy^k + g_{j^*k}dy^j dx^k + g_{j^*k^*}dy^j dy^k\right)$$

M üzerinde Φ, 2-temel formu

$$V \quad = \quad \sum \left\{dz^j(V)Z_j + d\overline{z}^k(V)\overline{Z}_k\right\}$$

$$W \quad = \quad \sum \left\{dz^j(W)Z_j + d\overline{z}^k(W)\overline{Z}_k\right\}$$

kompleks vektör alanları şeklinde ifade edilebilr. Basit bir hesaplamayla M nin Φ, 2-temel formu

$$\Phi = -2i \sum g_{j\overline{k}} dz^j \Lambda d\overline{z}^k \tag{4.8}$$

şeklinde gösterilir.

(4.8) eşitliğinin ispatı:

(4.3) ifadesi mevcuttur. Bu ifade de (3.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi(V,W) &= h(V,JW) \\
&= h(dz^j(V)Z_j + d\overline{z}^k(V)\overline{Z}_k, dz^j(W)JZ_j + d\overline{z}^k(W)J\overline{Z}_k) \\
&= \sum \big(h(Z_j, JZ_j)dz^j(V)dz^j(W) + h(Z_j, J\overline{Z}_k)dz^j(V)d\overline{z}^k(W) \\
&\quad + h(\overline{Z}_k, JZ_j)d\overline{z}^k(V)dz^j(W) + h(\overline{Z}_k, J\overline{Z}_k)d\overline{z}^k(V)d\overline{z}^k(W)\big)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\varphi(W,V) &= h(W,JV) \\
&= h(JV,W) \\
&= h(JV,-J^2W) \\
&= h(V,-JW) \\
&= -\varphi(V,W)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen h Hermitian metriğin ters-simetrik özelliğinden yola çıkarak

$$\begin{aligned}
\varphi(\overline{Z}_k, Z_j) &= h(\overline{Z}_k, JZ_j) \\
&= h(JZ_j, \overline{Z}_k) \\
&= h(JZ_j, -J^2\overline{Z}_k) \\
&= h(Z_j, -J\overline{Z}_k) \\
&= -\varphi(Z_j, \overline{Z}_k)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bundan sonra

$$\begin{aligned}
\Phi(V,W) &= \sum \left(h(Z_j, J\overline{Z}_k)dz^j(V)d\overline{z}^k(W) + h(\overline{Z}_k, JZ_j)d\overline{z}^k(V)dz^j(W)\right) \\
&= \sum \left(h(Z_j, J\overline{Z}_k)dz^j(V)d\overline{z}^k(W) - h(Z_j, J\overline{Z}_k)d\overline{z}^k(V)dz^j(W)\right) \\
&= \sum \left(-ih(Z_j, \overline{Z}_k)dz^j(V)d\overline{z}^k(W) + ih(Z_j, \overline{Z}_k)d\overline{z}^k(V)dz^j(W)\right) \\
& \quad -i\sum h_{j\bar{k}}\left(dz^j(V)d\overline{z}^k(W) - d\overline{z}^k(V)dz^j(W)\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$\Phi(V,W) = -i\sum h_{j\bar{k}}dz^j \Lambda d\overline{z}^k(V,W)$$

elde edilir. $\forall V$, W için

$$\Phi = -i\sum h_{j\bar{k}}dz^j \Lambda d\overline{z}^k$$

dir. Buradan sonra

$$h_{j\bar{k}} = h(Z_j, \overline{Z}_k)$$

olup (3.2) gereği

$$2g_{j\bar{k}} = h_{j\bar{k}}$$

olarak ifade edilir. Bu da

$$\Phi = -i\sum h_{j\bar{k}}dz^j \Lambda d\overline{z}^k$$

de yerine konulursa

$$\Phi = -2i\sum g_{j\bar{k}}dz^j \Lambda d\overline{z}^k$$

olarak elde edilmiş olur. Buradan Φ için

$$d\Phi = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha} dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\overline{z}^k$$

olduğundan

$$d\left(d\Phi\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\overline{z}^k$$

ifadesi oluşturulur. Bu ifadeden α ve β nın birbirine göre durumlarını incelersek

$$
\begin{aligned}
d\,(d\Phi) &= \sum_{\alpha<\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \\
&\quad + \sum_{\alpha=\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \\
&\quad + \sum_{\alpha>\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\alpha = \beta$ için $dz^\alpha \wedge dz^\beta = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
d\,(d\Phi) &= \sum_{\alpha<\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \\
&\quad + \sum_{\alpha>\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade de α ile β nın yerleri değiştirilirse

$$
\begin{aligned}
d\,(d\Phi) &= \sum_{\alpha<\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \\
&\quad + \sum_{\alpha>\beta}^{n} \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k
\end{aligned}
$$

olur.

$$
dz^\alpha \wedge dz^\beta = -dz^\alpha \wedge dz^\beta \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} = \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}
$$

olduğundan

$$
d\,(d\Phi) = \sum_{\alpha<\beta}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} - \frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} \right) dz^\beta \wedge dz^\alpha \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k
$$

elde edilir ve bunun katsayıları sıfır olduğundan $d^2\Phi = 0$ elde edilir. Böylelikle Kaehler manifold fikri ispatlanmış olur.

4.2.1 Indefinite Kaehler altmanifoldlar için lokal formüller

Indefinite Kaehler manifoldunun eğrilik tensörü için bilinen lokal formüllerin birkaçını hatırlarsak onlar kompleks altmanifoldlarının birine adapte edilebilirler. $(\widetilde{M}, g', J)$, $2(s+t)$ indeksinin $(n+p)-boyutlu$ indefinite Kaehler manifoldu olsun ve M, $\widetilde{M}$ nin $2s$ indeksinin $n-boyutlu$ non-degenere kompleks altmanifoldu olsun $(n \geq 2,\ 0 \leq s \leq n,\ 0 \leq t \leq p)$. $\widetilde{M}$ nin açık alt cümlesi üzerinde $\{E_A\} = \{E_1, ..., E_{n+p}\}$ bir ortonormal çatı alanı seçilebilir. Burada $E_1, ..., E_n$ M ye teğet ve diğerleri M ye normal olur. Burada aksi bir durum gösterilmedikçe aşağıdaki indisler kullanılır:

$$\begin{aligned} A, B, ... &= 1, ..., n, n+1, ..., n+p; \\ i,\ j, ... &= 1, ..., n; \\ x, y, ... &= n+1, ..., n+p \end{aligned}$$

Bu çatı alanıyla ilgili olarak $\{w_A\} = \{w_i, w_y\}$ onun dual çatı alanı olsun. Yani bu dual çatı alanı

$$w_A(E_B) = dx_A(E_B) = \delta_B^A = g(E_A, E_B)$$

olarak gösterilir ve dolayısıyla

$$g' = 2\sum_A \varepsilon_A w_A \otimes \overline{w}_A$$

olarak yazılabilir. Burada $\{\varepsilon_A\} = \{\varepsilon_i, \varepsilon_x\}$ dir. Bu da metriğin negatif tanımlı olma durumunu aşağıdaki gibi ifade eder:

$$\varepsilon_i = -1 \text{ yada } 1,\ 1 \leq i \leq s \text{ yada } s+1 \leq i \leq n$$

$$\varepsilon_x = -1 \text{ yada } 1,\ n+1 \leq x \leq n+t \text{ yada } n+t+1 \leq x \leq n+p$$

w_A canonical formları ve $\widetilde{M}$ ambient uzayının w_{AB} bağlantı formu yardımıyla yapı denklemleri

$$\begin{aligned} dw^A + \sum_B \varepsilon_B (w_B^A \wedge w^B) &= 0 \\ w_B^A + \overline{w}_A^B &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde verilir.

Bu eşitliğin ispatı şöyledir:

Burada I. Cartan Yapı Denklemleri torsiyon tensörüne denktir ifadesi gereği

$\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için $T(X,Y) \in \chi(M)$

$$X = x^A \partial_A \quad , \quad Y = y^B \partial_B$$

olarak alalım. Buradan

$$w^k(Y) = w^k(y^B \partial_B) = y^B(w^k \partial_B) = y^B \delta_B^k \Rightarrow y^B = w^B(Y)$$

$$w^k(X) = w^k(x^A \partial_A) = x^A(w^k \partial_A) = x^A \delta_A^k \Rightarrow x^B = w^B(X)$$

olur.

$T(X,Y) \in \chi(M)$ olduğundan

$$T(X,Y) = T^A(X,Y)\partial_A$$

şeklinde yazılır. Her iki taraf ∂_A ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} T^A(X,Y) &= \langle T(X,Y), \partial_A \rangle \\ &= \langle D_X Y - D_Y X - [X,Y], \partial_A \rangle \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
T^A(X,Y) &= \left\langle D_X(w^B(Y)\partial_B)\text{-}D_Y(w^B(X)\partial_B)\text{-}\left[w^B(X)\partial_B, w^B(Y)\partial_B\right], \partial_A\right\rangle \\
&= \left\langle(w^B(Y)\partial_B + X(w^B(Y)\partial_B))\right. \\
&\quad - (w^B(X)\partial_B, Y(w^B(X)\partial_B) - (w^B\left[X,Y\right]\partial_B), \left.\partial_A\right\rangle \\
&= \left\langle(X(w^B(Y) - Y(w^B(X)) - w^B([X,Y]))\partial_B\right. \\
&\quad + w^B(Y)D_X\partial_B - w^B(X)D_Y\partial_B, \left.\partial_A\right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$D_X\partial_B = w_B^k(X)\partial_k\ ,\ D_Y\partial_B = w_B^k(Y)\partial_k$$

olarak ifade edilir ve bu eşitlikler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
T^A(X,Y) &= (X(w^B(Y) - Y(w^B(X)) - w^B([X,Y]))\delta_B^A \\
&\quad + (w^B(Y)w_B^k(X) - w^B(X)w_B^k(Y))\delta_k^A \\
&= (X(w^B(Y) - Y(w^B(X)) - w^B([X,Y])) \\
&\quad + (w^B(Y)w_B^k(X) - w^B(X)w_B^k(Y))
\end{aligned}$$

veya buradan

$$\begin{aligned}
T^A(X,Y) &= (X(w^A(Y) - Y(w^A(X)) - w^A([X,Y])) \\
&\quad + \varepsilon_B(w^B(Y)w_B^k(X) - w^B(X)w_B^k(Y))
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.2) denklemi ve dış çarpım tanımı kullanılırsa

$$T^A(X,Y) = \varepsilon_B(w_B^A \wedge w^B)(X,Y) + dw^A(X,Y)$$

olur. Her $(X,Y) \in \chi(M) \times \chi(M)$ olduğundan

$$T^A = \sum \varepsilon_B (w_B^A \wedge w^B) + dw^A$$

olarak elde edilir.

Daha sonra T^A sıfır torsiyon olduğundan

$$\sum_B \varepsilon_B (w_B^A \wedge w^B) + dw^A = 0$$

ifadesi elde edilir.

$$w_B^A + \overline{w}_A^B = 0$$

eşitliğinin ispatına gelince de, bu ifade

$$w_B^A = -\overline{w}_A^B$$

demektir.

$$w_A(E_B) = \delta_B^A$$

olarak ifade edilir. Buradan

$$v\left[\delta_B^A\right] = 0$$

olur. Çünkü $A \neq B$ dır. Leibniz formülü uygulanırsa

$$v\left[w_A(E_B)\right] = \langle D_v E_B, w_A(p) \rangle + \langle E_B(p), D_v w_A \rangle = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$w_B^A(v) + \overline{w}_A^B(v) = 0(v)$$

elde edilir. $\forall v$ için

$$w_B^A + \overline{w}_A^B = 0$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
dw_B^A + \sum_k \varepsilon_k (w_k^A \wedge w_B^k) &= \Omega_B^A \\
\Omega_B^A &= \sum_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l R'_{\overline{A}Bk\overline{l}} w^k \wedge \overline{w}^{\overline{l}}
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

denklemleri de indefinite Kaehler altmanifoldlar için verilir. Burada Ω_B^A $(R'_{\overline{A}Bk\overline{l}})$ Ω, $\widetilde{M}$ $2-form$ Riemannian eğriliğinin elemanını gösterir (R' Riemannian eğrilik tensörünün elemanıdır).

(4.10) eşitliğinin ispatı şöyledir**:**

II. Cartan Yapı Denklemleri eğrilik tensörüne denktir ifadesi gözönünde bulundurulursa ve I. Cartan Yapı Denklemlerinin elde edilişine benzer şekilde T yerine R alarak ispat yapılır.

$\forall X,\, Y \in \chi(M)$ için

$$
R(X, Y, \partial_B) = R_B^A(X, Y)\partial_A
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
R_B^A(X,Y)\left\langle \partial_A, \partial_A \right\rangle &= \left\langle R(X,Y,\partial_B), \partial_A \right\rangle \\
&= \left\langle D_X(D_Y\partial_B) - D_Y(D_X\partial_B) - D_{[X,Y]}\partial_B, \partial_A \right\rangle
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
D_X\partial_B = w_B^k(X)\partial_k\ ,\ D_Y\partial_B = w_B^k(Y)\partial_k\ ,\ D_{[X,Y]}\partial_B = w_B^k([X,Y])\partial_k
$$

eşitliklerini yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R_B^A(X,Y) &= \Big\langle D_X(w_B^k(Y)\partial_k\,) - D_Y(w_B^k(X)\partial_k\,) - w_B^k([X,Y])\partial_k\,, \partial_A \Big\rangle \\ &= \Big\langle (X(w_B^k(Y))\partial_k\, + w_B^k(Y) D_X \partial_k) - \big(Y(w_B^k(X))\partial_k \\ &\quad + w_B^k(X) D_Y \partial_k\big) - w_B^k([X,Y])\partial_k\,, \partial_A \Big\rangle \\ &= \Big\langle X(w_B^k(Y))\partial_k\, + w_B^k(Y) w_k^p(X)\partial_p \\ &\quad - Y(w_B^k(X))\partial_k\, - w_B^k(X) w_k^p(Y)\partial_p - w_B^k([X,Y])\partial_k\,, \partial_A \Big\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} R_B^A(X,Y) &= X(w_B^A(Y)) - Y(w_B^A(X)) - w_B^A([X,Y]) \\ &\quad + w_B^k(Y) w_k^A(X) - w_B^k(X) w_k^A(Y) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada dış çarpım ve Ricci denklemi tanımlarındanda yararlanarak

$$R_B^A(X,Y) = dw_B^A(X,Y) + (w_k^A \wedge w_B^k)(X,Y)$$

ifadesi elde edilir. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$R_B^A = dw_B^A + \sum_k \varepsilon_k (w_k^A \wedge w_B^k)$$

olur. Aynı zamanda

$$\Omega_B^A = dw_B^A + \sum_k \varepsilon_k (w_k^A \wedge w_B^k)$$

olarak elde edilir. Daha sonra gerekli işlemler yapıldığında

$$dw_B^A = R_B^A - \sum_k \varepsilon_k (w_k^A \wedge w_B^k) \tag{4.11}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemde sol taraftaki her iki terim birer $2-form$ olduğundan sağ taraftada bir $2-form$ olmalıdır. O halde $w^k \wedge \overline{w}^{\bar{l}}$ çarpanı da R^A_B nin yanında yer almalıdır. Dolayısıyla (4.11) ifadesindeki sağ taraf $R'_{\overline{A}Bk\bar{l}} w^k \wedge \overline{w}^{\bar{l}}$ şeklinde olmalıdır. Böylece (4.11) denkleminin son hali

$$\Omega^A_B \;=\; \textstyle\sum_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l R'_{\overline{A}Bk\bar{l}} w^k \wedge \overline{w}^{\bar{l}}$$

olur (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Ω^A_B nin Hermitian metriği ters simetriği (4.3.1) in ikinci denkleminden anlamlandırılır ki bu da

$$R'_{\overline{A}BC\overline{D}} = R'_{\overline{B}AD\overline{C}}$$

ifadesine denktir.

Bianchi özdeşlikleri

$$\sum_B \varepsilon_B \Omega^A_B \wedge w^B = 0$$

olarak verilen ifade (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden elde edilir. Bunların exterior türevlerini alarak, ilave simetrik ilişkiler verilir. Bu ilişkiler Teorem 2.3.20. nin şartlarını sağlayarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$R'_{\overline{A}BC\overline{D}} = R'_{\overline{A}CB\overline{D}} = R'_{\overline{D}BC\overline{A}} = R'_{\overline{D}CB\overline{A}} \tag{4.12}$$

Ayrıca M üzerinde kovaryant türev operatörü D ile beraber herhangi bir afin koneksiyon için (2.1) ifadesi mevcuttur.

Eğer $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ dönüşümü yapılabiliyorsa

$$\overline{\Gamma}^A_{BC} = \Gamma^{\overline{A}}_{\overline{BC}}$$

ifadesi elde edilebilir.

Şimdi Kaehler şartları için bu ilişki ispatlanırsa

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\overline{\gamma}} = \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\beta\gamma} = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(J\frac{\partial}{\partial z^\beta}) &= iD_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(\frac{\partial}{\partial z^\beta}) \\ &= i(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha}) \end{aligned}$$

dir. Bu son ifade J altında düşünülürse

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(J\frac{\partial}{\partial z^\beta}) &= J(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha}) \\ &= i\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} - i\Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler $\Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\beta} = 0$ şartını sağlar.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(J\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}) &= iD_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}) \\ &= -i\Gamma^\gamma_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma} - i\Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\gamma} \\ D_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}(J\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}) &= J(\Gamma^\gamma_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma} + \Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\gamma}) \\ &= i\Gamma^\gamma_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial z^\gamma} - i\Gamma^{\overline{\gamma}}_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\gamma} \end{aligned}$$

olur ki bu da $\Gamma^\gamma_{\alpha\overline{\beta}} = 0$ olması demektir. Sıfır torsiyon özelliğinden $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$, $\Gamma^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}\overline{\gamma}} = \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\overline{\gamma}\overline{\beta}}$ elde edilir.

Şimdi, önceki seçilen çatıyla ilgili olarak, $\widetilde{M}$ nin S' Ricci tensörünü aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$S' = \sum_{CD} \varepsilon_C\varepsilon_D(S'_{C\overline{D}} w_C \otimes \overline{w}_D + S'_{\overline{C}D}\overline{w}_C \otimes w_D)$$

Burada

$$S'_{C\overline{D}} = \sum_B \varepsilon_B R'_{\overline{B}BC\overline{D}} = S'_{\overline{D}C} = \overline{S}'_{\overline{C}D}$$

şeklinde ifade edilir. Aynı zamanda $S'_{C\overline{D}}$

$$S'_{C\bar{D}} = S'\left(X_C, JX_D\right) = \sum_B \varepsilon_B g\left(R\left(X_C, X_B\right) JX_D, JX_B\right) = R_{\bar{B}BC\bar{D}}$$

olarak yazılabilir. Aynı şekilde $S'_{\bar{D}C}$

$$S'_{\bar{D}C} = S'\left(JX_D, X_C\right) = \sum_B \varepsilon_B g\left(R\left(JX_D, X_B\right) X_C, JX_B\right) = R_{\bar{B}B\bar{D}C}$$

olarak ifade edilebilir. Yanısıra

$$R'_{\bar{A}BC\bar{D}} = g\left(R\left(X_C, X_B\right) JX_D, JX_A\right)$$

dir. Bu ifadenin eşleniği de

$$R'_{\bar{B}AD\bar{C}} = g\left(R\left(X_D, X_A\right) JX_C, JX_B\right)$$

dir. $g\left(R\left(X,Y\right)Z,W\right) = g\left(R\left(Z,W\right)X,Y\right)$ olduğundan
$R'_{\bar{A}BC\bar{D}} = \bar{R}_{\bar{B}AD\bar{C}}$ elde edilir. Aynı şekilde

$$\bar{S}'_{\bar{C}D} = S'\left(JX_C, X_D\right) = \sum_B \varepsilon_B g\left(R\left(JX_C, X_B\right) X_D, JX_B\right) = R_{\bar{B}B\bar{C}D}$$

ve $g\left(R\left(JX_C, X_B\right) X_D, JX_B\right) = g\left(R\left(JX_D, X_B\right) X_C, JX_B\right)$ olduğundan
$S'_{\bar{D}C} = \bar{S}'_{\bar{C}D}$ elde edilir. Böylelikle açıkça görülebilir ki

$$K = 2\sum_D \varepsilon_D S'_{D\overline{D}}$$

yardımıyla verilen K skalar eğriliğidir.

Son eşitliğin ispatı:

$$\begin{aligned}
S'_{C\bar{D}} &= S'(X_C, JX_D) \\
&= \sum_B \varepsilon_B g(R(X_C, X_B) JX_D, JX_B) \\
&= -\sum_B \varepsilon_B R(X_C, X_B) g(JX_D, JX_B) \\
&= \sum_B \varepsilon_B R(X_C, X_B) g(X_D, X_B) \\
&= \sum_B \varepsilon_B R(X_C, X_B) w_D(X_B)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned}
S'_{\bar{C}D} &= S'(JX_C, X_D) \\
&= \sum_B \varepsilon_B g(R(JX_C, X_B) X_D, JX_B) \\
&= -\sum_B \varepsilon_B R(JX_C, X_B) g(X_D, JX_B) \\
&= -\sum_B \varepsilon_B R(X_D, JX_B) g(JX_C, X_B) \\
&= -\sum_B \varepsilon_B R(X_D, JX_B) w_{\bar{C}}(X_B)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
S'_{CD} &= S'(X_C, X_D) \\
&= \sum_B \varepsilon_B g(R(X_C, X_B) X_D, X_B) \\
&= -\sum_B \varepsilon_B R(X_C, X_B) g(X_D, X_B) \\
&= -\sum_B \varepsilon_B R(X_C, X_B) w_D(X_B)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylelikle $S'_{C\bar{D}} = S'_{\bar{D}C}$ olur. Bu da $C = \bar{D}$, $\bar{C} = D$ demektir. Yani

$$S'_{D\bar{D}} = S'\left(X_D, JX_D\right) = \sum_D \varepsilon_D g\left(R\left(X_D, X_B\right) JX_D, X_B\right)$$

şeklinde ifade edilir ve bu ifade S' de yerine yazılırsa

$$S' = \sum_D \varepsilon_D \left(S'_{D\bar{D}} w_D \otimes w_{\bar{D}} + S'_{D\bar{D}} w_{\bar{D}} \otimes w_D\right) = 2\sum_D \varepsilon_D S'_{D\bar{D}} w_D \otimes w_{\bar{D}}$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Eğer $\widetilde{M}$ nin S' Ricci tensörü g' için parçalı ise $\widetilde{M}$ indefinite Kaehler manifolduna **Einstein manifoldu** da denir. Yani bu da

$$S'_{C\overline{D}} = \lambda \varepsilon_C \delta_{CD}, \quad \lambda = \frac{K}{2(n+p)}$$

demektir. Burada λ sabiti Einstein manifoldunun Ricci eğriliği olarak isimlendirilir.

R' Riemannian eğrilik tensörünün kovaryant türevi sırasıyla $R'_{\overline{A}BC\overline{D};E}$ ve $R'_{\overline{A}BC\overline{D};\overline{E}}$ bileşenleri yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_E \varepsilon_E (R'_{\overline{A}BC\overline{D};E} w_E + R'_{\overline{A}BC\overline{D};\overline{E}} \overline{w}_E) = dR'_{\overline{A}BC\overline{D}} - \sum_E \varepsilon_E \left(R'_{\overline{E}BC\overline{D}} \overline{w}_{EA} \right.$$

$$\left. + R'_{\overline{A}EC\overline{D}} w_{EB} + R'_{\overline{A}BE\overline{D}} w_{EC} + R'_{\overline{A}BC\overline{E}} \overline{w}_{ED}\right)$$

$$\sum_C \varepsilon_C (S'_{A\overline{B};C} w_C + S'_{A\overline{B};\overline{C}} \overline{w}_C) = dS'_{A\overline{B}} - \sum_C \varepsilon_C \left(S'_{C\overline{B}} w_{CA} + S'_{A\overline{C}} \overline{w}_{CB}\right)$$

II. Bianchi formülü tarafından verilen

$$R'_{\overline{A}BC\overline{D};E} = R'_{\overline{A}BE\overline{D};C} \tag{4.13}$$

ifadesi ve böylece

$$S'_{A\overline{B};C} = S'_{C\overline{B};A} = \sum_D \varepsilon_D R'_{\overline{B}AC\overline{D};D}, \quad K_B = 2\sum_C S_{B\overline{C};C} \tag{4.14}$$

olarak mevcuttur.

S' nün ikinci kovaryant türevi sırasıyla $S'_{A\overline{B};CD}$ ve $S'_{A\overline{B};C\overline{D}}$ bileşenleri yardımıyla ifade edilir. Bu ifade de aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}\sum_D \varepsilon_D(S'_{A\overline{B};CD}w_D + S'_{A\overline{B};C\overline{D}}\overline{w}_D) &= dS'_{A\overline{B};C} - \sum_D \varepsilon_D \Big(S'_{D\overline{B};C}w_{DA} + S'_{A\overline{D};C}\overline{w}_{DB} \\ &\quad + S'_{A\overline{B};D}w_{DC}\Big)\end{aligned} \tag{4.15}$$

Şimdi, $S'_{A\overline{B};C}$ ve $S'_{A\overline{B};\overline{C}}$ 'nin tanımının diferensiyel exterioru alınarak ve (4.15) kullanılarak S' Ricci tensörü için Ricci formülü aşağıdaki gibi verilir.

$$S'_{A\overline{B};C\overline{D}} - S'_{A\overline{B};\overline{D}C} = \sum_E \varepsilon_E \left(R'_{\overline{D}CA\overline{E}}S'_{E\overline{B}} - R'_{\overline{D}CE\overline{B}}S'_{A\overline{E}}\right) \tag{4.16}$$

Sonrasında dikkatimizi $\widetilde{M}$ nın non-degenere kompleks altmanifoldu olan M üzerine odaklarsak ve yukarıdaki $\{w_a\} = \{w_i, w_y\}$ kanonik formlarını M ye sınırlandırarak

$$w_x = 0 \tag{4.17}$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla $g = 2\sum_B \varepsilon_B w_B \otimes \overline{w}_B$ olarak yazılan M nin $2s$ indeksinin g indefinite Kaehler metriğini sağlar. Böylece $\{E_j\}$ çatı alanının M yi sınırlaması g ye göre bir lokal ortonormal çatı alanıdır ve $\{w_j\}$ de onun dual çatısıdır. Bu çatı M üzerinde $(1,0)$ tipinde kompleks $1-formları$ içerir. Üstelik $w_1, ..., w_n, \overline{w}_1, ...\overline{w}_n$ lineer bağımsızdır ve bunlar M üzerinde lokal kanonikal $1-formların$ kümesi olarak isimlendirilirler.

Buradan (4.17) ve Cartan yapı denklemlerini takiben

$$w_{xi} = \sum_j \varepsilon_j h^x_{ij} w_j, \quad h^x_{ij} = h^x_{ji} \tag{4.18}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin ispatı ise şöyledir:

$$dw^x = 0 = -w^x_B \wedge w^B = -w^x_i \wedge w^i$$

dir.

Ayrıca $-w^i_j = w^j_i$ olduğundan $w^i_x \wedge w^i = 0$ $\quad (*)$ ve $w^x_i = h^x_{ij} w^j$ $\quad (**)$

dir. h^x_{ij} ifadesinide Γ^x_{ij} gibi düşünürsek ve $(**)$ ifadesini $(*)$ da yerine yazarsak $h^x_{ij} w^j \wedge w^i = 0$ elde edilir. Bu ifadeyi i ve j nin durumuna göre incelersek

$1 \leq i, j \leq n$ için

$$\underbrace{\underbrace{h^x_{ij} w^i \wedge w^i}_{i=j}} + \underbrace{\underbrace{h^x_{ij} w^j \wedge w^i}_{i<j} + \underbrace{h^x_{ji} w^i \wedge w^j}_{i>j}} = 0$$

$$\left(h^x_{ij} - h^x_{ji}\right) w^i \wedge w^j = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $h^x_{ij} - h^x_{ji} = 0$ dan $h^x_{ij} = h^x_{ji}$ ve $w^x_i = \sum_j \varepsilon_j h^x_{ij} w^j$ elde edilir. h quadratik formu;

$$\sum_{ijx} \varepsilon_i \varepsilon_j h^x_{ij} w_i \otimes w_j \otimes E_x$$

şeklinde, normal demet içindeki değerleri M altmanifoldunun 2. temel formu olarak adlandırılır. İkinci temel formu h, M ye teğet her X, Y vektör alanları için $h(X,Y) = D'_X Y - D_X Y$ olarak tanımlanır. Burada D' ve D, sırasıyla, $\widetilde{M}$ ve M nin Levi-Civita koneksiyonlarını gösterir. Belirli bir durum için h, $h(JX,Y) = h(X,JY) = Jh(X,Y)$ ifadesini sağlar. Bu özellik her X, Y için $h(JX,JY) = -h(X,Y)$ yi ifade eder.

Önerme 4.3.1. M' Kaehler manifoldunun M kompleks altmanifoldunun ikinci temel formu h olsun.

$$h(JX,Y) = h(X,JY) = Jh(X,Y)$$

$(\forall X,\, Y \in M$ için$)$

İspat: M' nün Kaehlerian koneksiyonu D' ve M üzerindeki vektör alanları X, Y için, (2.4) gereği

$$D_X(JY) = D_X(JY) + h(X,JY)$$

ifadesi mevcuutur. Burada JY, M üzerinde bir vektör alanıdır. D' Kaehlerian olduğundan

$$D'_X(JY) = J(D'_XY) = J(D_XY) + Jh(X,Y)$$

Hem T_XM teğet uzayı hemde T_XM normal uzayı $J-invariant$tır. Böylelikle

$$D_X(JY) = J(D_XY) \quad \text{ve} \quad h(X,JY) = Jh(X,Y)$$

elde edilir.

Burada ilk eşitlik $h(X,Y)$ nin Kaehlerian olmasını ikinci eşitlik de simetrikliğini gösterir. Böylelikle

$$h(JX,Y) = h(Y,JX) = Jh(Y,X) = Jh(X,Y)$$

elde edilir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

$\widetilde{M}$ da kullanılan yapı denklemleri M nin yapı denklemleri tarafından aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} dw^i + \sum_j \varepsilon_j (w^i_j \wedge w^j) &= 0 \\ w^i_j + \overline{w}^j_i &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} dw^i_j + \sum_k \varepsilon_k (w^i_k \wedge w^k_j) &= \Omega_{ij} \\ \Omega_{ij} &= \sum_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l R'_{\bar{i}jk\bar{l}} w^k \wedge \overline{w}^{\bar{l}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Burada M nin Ω Riemannian eğrilik formunun bileşenleri Ω_{ij} ile gösterilir ve aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\begin{aligned} dw^x_y + \textstyle\sum_z \varepsilon_z (w^x_z \wedge w^z_y) &= \Omega_{xy} \\ \Omega_{xy} &= \sum_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l R'_{\bar{x}yk\bar{l}} w^k \wedge \overline{w}^{\bar{l}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Burada Ω_{xy}, M üzerinde normal eğrilik formunun bileşenidir. M nin R ve R' Riemannian eğrilik tensörleri için sırasıyla, (4.9), (4.10), (4.18), (4.19) ve (4.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdakiler gibi ifadeler elde edilir:

$$R_{\bar{i}jk\bar{l}} = R'_{\bar{i}jk\bar{l}} - \sum_x \varepsilon_x h^x_{jk} \overline{h}^x_{il} \tag{4.22}$$

Bu eşitliğin ispatı şu şekildedir:

$$dw_j^i + \sum_k \varepsilon_k w_k^i \wedge w_j^k + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha w_\alpha^i \wedge w_j^\alpha = \Omega_j'^i$$

olarak ifade edilir. M üzerindeki koneksiyon için II.Yapı Denklemi

$$dw_j^i + \sum_k \varepsilon_k w_k^i \wedge w_j^k = \Omega_j^i$$

olarak ifade edilmişti. Ayrıca

$$\begin{aligned} w_\alpha^i \wedge w_j^\alpha &= \sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{\alpha k}^i w^k \wedge \bar{h}_{jl}^\alpha \bar{w}^l \\ &= -\sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{ik}^\alpha w^k \wedge \bar{h}_{jl}^\alpha w^l \\ &= -\sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{ik}^\alpha \bar{h}_{jl}^\alpha w^k \wedge \bar{w}^l \end{aligned}$$

olduğundan ve bu ifade $\Omega_j'^i$ de yerine yazılırsa

$$\Omega_j^i - \sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha w^k \wedge \bar{w}^l = \Omega_j'^i$$

olarak elde edilir. Sonra gerekli işlemler yapıldığında

$$\Omega_j'^i - \Omega_j^i = -\sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{ik}^\alpha \bar{h}_{jl}^\alpha w^k \wedge \bar{w}^l$$

olur. Ayrıca bu son denkleme göre de

$$R'_{ijkl} w^k \wedge w^l - R_{ijkl} w^k \wedge w^l = -\sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{ik}^\alpha \bar{h}_{jl}^\alpha w^k \wedge \bar{w}^l$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\left(R'_{ijkl} - R_{ijkl}\right)\left(w^k \wedge w^l\right) = -\sum_\alpha \varepsilon_\alpha h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha w^k \wedge \bar{w}^l$$

olur. Böylelikle

$$R'_{\bar{\imath}jk\bar{l}} - R_{\bar{\imath}jk\bar{l}} = -\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \; h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha$$

ifadesi elde edilmiş olur (Willmore, 1993). Bu denklem Gauss denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemden, S Ricci tensörünün bileşenleri ve M nin r skalar eğriliği şu şekilde ifade edilir:

$$S_{i\bar{j}} = \sum_{k} \varepsilon_k R'_{\bar{i}jk\bar{k}} - h^2_{i\bar{j}} \tag{4.23}$$

(4.23) eşitliğinin ispatı:

$$S'_{C\bar{D}} = \sum_{B} \varepsilon_B R_{\bar{B}BC\bar{D}}$$

olduğundan

$$S'_{i\bar{j}} = \sum_{k} \varepsilon_k R_{\bar{k}ki\bar{j}}$$

olur. Burada (4.22) denklemini kullanarak (4.23) denklemi elde edilir. Bu denklemde $h^2_{i\bar{j}} = \sum\limits_{k,x} \varepsilon_k \varepsilon_x h^x_{ik} \bar{h}^x_{kj}$ şeklinde ifade edilir. Aynı zamanda

$$r = 2\sum_{j} S_{j\bar{j}} = 2\sum_{jk} \varepsilon_j \varepsilon_k R'_{\bar{j}jk\bar{k}} - 2h_2 \tag{4.24}$$

dir.

Bu son eşitliğin ispatı:

$$K = 2\sum_{D} \varepsilon_D S'_{D\bar{D}}$$

olduğundan

$$K = 2\sum_{j} \varepsilon_j S'_{j\bar{j}}$$

olur ve

$$S'_{j\bar{j}} = \sum_{k} \varepsilon_k R_{\bar{k}kj\bar{j}}$$

şeklinde ifade edilir ve burada (4.22) denklemi kullanılırsa

$$S'_{j\bar{j}} = \sum_{k} \varepsilon_k R'_{\bar{k}kj\bar{j}} - \sum_{x} \varepsilon_x h_{kj} \bar{h}_{kj}$$

olur ve böylelikle (4.24) denklemi elde edilmiş olur. Bu denklemdeki $h_2 = \sum\limits_{k} \varepsilon_k h^2_{k\bar{k}}$ şeklinde ifade edilir.

Şimdi M nin ikinci temel formunun kovaryant türevlerinin $h^x_{ij;k}$ ve $h^x_{ij;\bar{k}}$ bileşenleri tarafından verilen

$$\begin{aligned}\sum_k \varepsilon_k(h^x_{ij;k}w_k + h^x_{ij;\bar{k}}\overline{w}_k) &= dh^x_{ij} - \sum_k \varepsilon_k\Big(h^x_{kj}w_{ki} + h^x_{ik}w_{kj} \\ &+ \sum_y \varepsilon_y h^y_{ij}w_{xy}\Big)\end{aligned}$$

(4.18) ifadesinin exterior türevleri içine bu tanımdaki dh^x_{ij} ifadesi konularak, (4.9), (4.10) ve (4.19), (4.20) yapı denklemlerini kullanarak,

$$h^x_{ij;k} = h^x_{ji;k} = h^x_{ik;j}\ , \quad h^x_{ij;\bar{k}} = -R'_{\overline{x}ij\bar{k}} \tag{4.25}$$

elde edilir.

Benzer şekilde ikinci temel formunun ikinci kovaryant türevleri, $h^x_{ij;kl}$ ve $h^x_{ij;k\bar{l}}$ bileşenleri yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}\sum_l \varepsilon_l(h^x_{ij;kl}w_l + h^x_{ij;k\bar{l}}\overline{w}_l) &= dh^x_{ij;k} - \sum_l \varepsilon_l\Big(h^x_{lj;k}w_{li} + h^x_{il;k}w_{lj} \\ &+ h^x_{ij;l}w_{lk}\Big) + \sum_y \varepsilon_y h^y_{ij;k}w_{xy}\end{aligned}$$

Ve açık bir hesaplama Ricci formülünü de oluşturur. Ayrıca

$$h^x_{ij;kl} = h^x_{ij;lk}$$

dir. Bu da

$$\begin{aligned}h^x_{ij;k\bar{l}} + h^x_{ij;\bar{l}k} &= \sum_r \varepsilon_r\left(R_{\bar{l}ki\bar{r}}h^x_{rj} + R_{\bar{l}ki\bar{r}}h^x_{ir}\right) \\ &- \sum_y \varepsilon_y R_{\overline{x}yk\bar{l}}h^y_{ij}\end{aligned} \tag{4.26}$$

demektir.

4.2.2 Kompleks altmanifoldlar

g metrik tensörüyle birlikte N Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M ve N nin Riemannian eğrilik tensörleri R_M ve R_N tarafından gösterilsin ve N içinde M nin ikinci temel formu α ile gösterilsin. Bu durumda Gauss-Codazzi denklemi

$$\begin{aligned} R_M(X,Y,Z,W) &= g(\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)) - g(\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)) \\ &\quad + R_N(X,Y,Z,W) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Eğer N bir Kaehler manifold ve M bir kompleks altmanifold ise

$$\begin{aligned} R_M(X,JX,Y,JY) &= g(\alpha(X,Y),\alpha(JX,JY)) - g(\alpha(X,JY),\alpha(JX,Y)) \\ &\quad + R_N(X,JX,Y,JY) \end{aligned}$$

Burada Önerme(4.3.1) deki eşitlikler kullanılarak

$$R_M(X,JX,Y,JY) = -\left\|\alpha(X,Y)\right\|^2 - \left\|\alpha(X,JY)\right\|^2 + R_N(X,JX,Y,JY)$$

elde edilir.

Özellikle eğer M bir kompleks öklidyen uzayının bir kompleks altmanifoldu ise, M nin holomorfik bisectional eğriliği pozitif tanımlı değildir ve böylece M nin Ricci tensörüde pozitif tanımlı değildir (Goldberg ve Kobayashi, 1967).

4.3 Indefinite Kompleks Uzay Formları

M, J kompleks yapısı ve g Riemann metriği ile birlikte bir $n-$boyutlu Kaehler manifoldu olsun. Bu durumda bir **kompleks uzay formu**, sabit holomorfik kesit eğrilikli basit bağlantılı tam Kaehler manifoldu olarak ifade edilir. Bir indefinite kompleks uzay formu ise, sabit holomorfik kesit eğrilikli bir indefinite Kaehler manifoldudur. M. Barros ve A. Romero (1982), indefinite Kaehler manifoldlarını sistematik olarak ortaya koymuştur.

Tanım 4.3.1. M bir indefinite Kaehler manifoldu olsun. M nin herhangi x noktasındaki T_xM tanjant uzayının bir Π düzlem parçasına, $g_x\mid_\Pi$ non-degenere olmak üzere **non-degeneredir** denir.

Π non-degeneredir ancak ve ancak,

$$g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2 \neq 0$$

olacak şekilde Π nin $\{u,v\}$ bazları vardır. u ve Ju ile donatılmış bir holomorfik düzlem non-degeneredir ancak ve ancak,

$$g(v,v) \neq 0$$

olmak üzere bazı v vektörlerini içerir. u ve Ju tarafından gerilen Π non-degenere holomorfik düzlemin kesit eğriliğine **holomorfik kesit eğriliği** denir ve $H(\Pi) = H(u)$ şeklinde gösterilir (Romero and Suh, 2004).

Bir indefinite Kaehler manifoldu olan M, M nin herhangi bir noktası için ve bütün Π non-degenere holomorfik düzlemi için eğer $H(\Pi)$ holomorfik kesitsel eğrilik fonksiyonu sabitse bu indefinite Kaehler manifoldu olan M sabit holomorfik kesitsel eğriliği olarak söylenir. Bu durumda M, $2s$ indeksinin ve m kompleks boyutunun $c \in \mathbb{R}$ sabit holomorfik kesitsel eğriliği ise M ye bir **indefinite kompleks uzay form** denir ve $M_s^m(c)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.2. M bir indefinite Kaehler manifoldu olsun. Eğer M nin $H(\Pi)$ holomorfik kesit eğrilik fonksiyonu tüm non-degenere holomorfik Π düzlemleri ve M nin herhangi bir noktası için sabit ise, M indefinite Kaehler manifolduna **sabit holomorfik kesit eğriliklidir** denir (Romero and Suh, 2004).

Tanım 4.3.3. M bir indefinite Kaehler manifoldu olsun. $\forall P \in M$ ve $\forall X_P \in T_P M$ birim tanjant vektörü için $K(X_P)$ holomorfik kesit eğriliği sabit ise M ye **sabit holomorfik kesit eğrilikli uzay** veya **indefinite kompleks uzay formu** denir (Küpeli, 1996).

4.3.1 Indefinite kompleks uzay formlarının standart modelleri

Indefinite kompleks uzay formlarının standart modelleri sabit holomorfik kesitsel eğriliğinin durumuna göre üç çeşittir. Bunlar c sabit holomorfik kesit eğriliğine göre

$$\begin{aligned} c &= 0 \text{ indefinite kompleks Öklidyen uzay } \mathbb{C}^m_s \\ c &> 0 \text{ indefinite kompleks projektif uzay } \mathbb{C}P^m_s(c) \\ c &< 0 \text{ indefinite kompleks hiperbolik uzay } \mathbb{C}H^m_s(c) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\mathbb{C}^m_s$, $\mathbb{C}P^m_s(c)$, $\mathbb{C}H^m_s(c)$ uzayları, $2s-$indeksli, $m-boyutlu$, geodezik olarak tam, basit bağlantılı ve bağlantılı tek indefinite kompleks uzay formlarıdır (Romero and Suh, 2004).

Şimdi düşünelimki ambient uzay, c' sabit holomorfik kesitsel eğriliğinin $\widetilde{M}^{n+p}_{s+t}(c')$ bir indefinite kompleks uzay formudur. Eğer $\widetilde{M}^{n+p}_{s+t}(c')$ nin kompleks altmanifoldu M^n_s ise, o zaman (4.22), (4.23), (4.24), (4.25) ve (4.26) denklemleri özelleştirilerek şunlar elde edilir:

$$R_{\bar{i}jk\bar{l}} = \frac{c'}{2}\varepsilon_j\varepsilon_k(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - \sum_x \varepsilon_x h^x_{jk}\overline{h}^x_{il} \tag{4.27}$$

$$S_{i\bar{j}} = (n+1)\frac{c'}{2}\varepsilon_i\delta_{ij} - h^2_{i\bar{j}} \tag{4.28}$$

$$r = n(n+1)c' - 2h_2 \tag{4.29}$$

$$h^x_{ij;k} = h^x_{ji;k} = h^x_{ik;j} \ , \quad h^x_{ij;\bar{k}} = 0 \tag{4.30}$$

$$h^x_{ij;k\bar{l}} = \frac{c'}{2}(\varepsilon_k h^x_{ij}\delta_{kl} + \varepsilon_i h^x_{jk}\delta_{il} + \varepsilon_j h^x_{ki}\delta_{jl}) - \sum_{ry} \varepsilon_r \varepsilon_y (h^x_{ri}h^y_{jk} + h^x_{rj}h^y_{ki} + h^x_{rk}h^y_{ij})\overline{h}^y_{rl} \tag{4.31}$$

Holomorfik kesitsel eğriliğinin yanısıra, indefinite Kaehler manifoldlarının üzerinden bir diğer eğrilik fonksiyonlarını düşünmek mümkündür.

$T_X M$ nin $Sp\{u,v\}$ total reel düzlemi onun görüntüsü olan $Sp\{Ju, Jv\}$ kompleks yapısına ortogonal olarak tanımlanır. Böylece u, v ve v, Jv ortonormalse u ve v iki ortonormal vektör bir total reel düzlemi gerer $Sp\{u,v\}$ tarafından gerilen bir total reel düzlemin total reel bisectional eğriliği B olarak gösterilirse

$$B(u,v) = \frac{g(R(u,Ju)Jv,v)}{g(u,u)g(v,v)} \tag{4.32}$$

şeklinde ifade edilir.

Varsayalımki $g(u,u) = g(v,v) = \pm 1$ ise, (4.32) içinde I. Bianchi özdeşliği kullanılabilir. Burada

$$\begin{aligned} B(u,v) &= g(R(u,Jv)Jv,u) + g(R(u,v)v,u) \\ &= K(u,v) + K(u,Jv) \end{aligned} \tag{4.33}$$

dir. Burada $K(u,v)$ ve $K(u,Jv)$,sırasıyla, $Sp\{u,v\}$ ve $Sp\{u,Jv\}$ tarafından gerilen düzlemlerin kesitsel eğriliği olarak ifade edilir. Eğer $u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$ ve $v' = \frac{1}{\sqrt{2}}J(u-v)$ olarak alınırsa, $g(u',u') = \pm 1$, $g(v',v') = \pm 1$, $g(u',Jv') = 0$ olduğu rahatlıkla görülebilir.

Şöyleki

$$\begin{aligned} g(u',u') &= g(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v),\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)) \\ &= \frac{1}{2}\left(g(u,u)+g(u,v)+g(v,u)+g(v,v)\right) \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $g(v',v')$ ve $g(u',Jv')$ içinde aynı işlemler uygulanınca sırasıyla ± 1 ve 0 sonuçları elde edilir. Böylece

$$B(u',v') = \frac{g(R(u',Ju')Jv',v')}{g(u',u')g(v',v')}$$

ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} g(u',u')g(v',v')B(u',v') &= g(R(u',Ju')Jv',v') \\ &= \frac{1}{4}g(u,u)g(v,v)\left\{H(u)+H(v)+2B(u,v)\right. \\ &\quad \left. -4K(u,Jv)\right\} \end{aligned}$$

olur. Burada $H(u)=K(u,Ju)$ ve $H(v)=K(v,Jv)$,sırasıyla, $Sp\{u,Ju\}$ ve $Sp\{v,Jv\}$ tarafından gerilen düzlemlerin holomorfik kesitsel eğriliğidir.

$Sp\{u,v\}$ definite olduğunda $g(u',u')g(v',v')=g(u,u)g(v,v)=1$ olur ve böylece

$$4B(u',v')-2B(u,v)=H(u)+H(v)-4K(u,Jv) \qquad (4.34)$$

elde edilir.

Eğer u'' ve v'' yerine $u''=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+Jv)$ ve $v''=\frac{1}{\sqrt{2}}(Ju+v)$ konulursa $Sp\{u,v\}$ tarafından gerilen düzlemin tanımlılığı $g(u,u)g(v,v)=1$ olacak şekilde $g(u'',u'')=\pm 1$, $g(v'',v'')=\pm 1$, $g(u'',v'')=0$ elde edilir. (4.34) eşitliğini elde ederken kullandığımız metodu burada da kullandığımızda

$$4B(u'', v'') - 2B(u, v) = H(u) + H(v) - 4K(u, v) \tag{4.35}$$

elde edilir.

(4.34) ve (4.35) denklemlerinin taraf tarafa toplamından

$$4B(u'', v'') + 4B(u', v') - 4B(u, v) = 2H(u) + 2H(v) - 4K(u, Jv) - 4K(u, v)$$

ifadesi elde edilir. Burada $B(u, v) = K(u, v) + K(u, Jv)$ olduğundan

$$4B(u'', v'') + 4B(u', v') - 4B(u, v) = 2(H(u) + H(v)) - 4B(u, v)$$

dir. Buradan da

$$2B(u'', v'') + 2B(u', v') = H(u) + H(v) \tag{4.36}$$

ifadesi elde edilmiş olur. Bunun anlamı c sabit kesit eğriliği olmak üzere bisectional eğriğin, $0 \leq B(u, v) \leq \frac{c}{2}$ olmasıdır.

4.3.2 Sabit holomorfik kesitsel eğrilikli uzayları

Eğer c sabit holomorfik kesitsel eğriliğinin bir Kaehler metriği g ise

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \frac{c}{4}[g(X, Z)g(Y, W)) - g(X, W)g(Y, Z) \\ &\quad +g(X, JZ)g(Y, JW)) - g(X, JW)g(Y, JZ) \\ &\quad +2g(X, JY)g(Z, JW)] \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} R(X, JX, Y, JY) &= \frac{c}{4}[g(X, Y)g(JX, JY)) - g(X, JY)g(JX, Y) \\ &\quad +g(X, Y)g(JX, JY) - g(X, JY)g(JX, Y) \\ &\quad +2g(X, JX)g(Y, JY)] \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} R(X,JX,Y,JY) &= \frac{c}{4}(g(X,Y)^2+g(X,Y)^2+2g(X,X)g(Y,Y)+2g(X,JY)^2) \\ &= \frac{c}{4}(2g(X,Y)^2+2g(X,X)g(Y,Y)+2g(X,JY)^2) \\ &= \frac{c}{2}(g(X,Y)^2+g(X,X)g(Y,Y)+g(X,JY)^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu takiben, c sabit holomorfik kesitsel eğriliğinin bir Kaehler manifoldu için $H(\sigma,\sigma')$ holomorfik bisectional eğrilikleri $\frac{c}{2}$ ile c arasındadır.

$$\frac{c}{2} \leq H(\sigma,\sigma') \leq c \quad \text{yada} \quad c \leq H(\sigma,\sigma') \leq \frac{c}{2}$$

σ, σ' ye dik olduğunda $\frac{c}{2}$ değeri verilir. $\sigma = \sigma'$ olduğunda c değeri verilir (Goldberg ve Kobayashi, 1967).

Örnek 4.3.1. $0 \leq s \leq n$, $2s$ indeksinin ve c sabit holomorfik kesitsel eğriliğinin indefinite kompleks uzay formu $\widetilde{M}_s^n(c)$ olsun.

$\widetilde{M}_s^n(c)$, $\frac{c}{2}$ sabit total reel bisectional eğriliğe sahiptir. Gerçekte eğer $S_P\{u,v\}$ tarafından gerilen düzlem bir total reel düzlemse

$$B(u,v) = \frac{g(R(u,Ju)Jv,v)}{g(u,u)g(v,v)} = \frac{c}{2}$$

$\widetilde{M}_s^n(c)$ nin eğrilik tensörünün algebratik formundan kolaylıkla takip edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sabit holomorfik kesit eğrilikli indefinite Kaehler manifoldu anlamına gelen indefinite kompleks uzay formları incelendi. Kompleks vektör uzayları ve Hermitian skalar çarpıma ilaveten Riemann ve yarı-Riemann manifoldlar için temel kavramlar ve teoremler verildi. Indefinite kompleks uzay formları ve bu formları oluşturan indefinite Kaehler manifold ve holomorfik kesitsel eğrilik kavramı incelendi. Bu indefinite Kaehler altmanifold için lokal formüller ele alınarak indefinite kompleks uzay formları için de bazı formüller bulundu. Daha sonra indefinite kompleks uzay formlarının standart modelleri verildi.

Teorik fiziğin bazı alanlarında kullanılan indefinite Kaehler altmanifold konusu için elde edilen bu özellikler yardımıyla indefinite kompleks uzay formlarında holomorfik helisler incelenebilir, bunlarla ilgili bazı sınıflandırmalara ve geometrik yorumlara ulaşılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Barros, M., Romero, A., 1982. Indefinite Kaehler Manifolds, Math. Ann., 261, 55-62.

Boothby, W. M., 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Second Edition, Academic Press Inc., Florida.

Chen, B-Y., 1973. Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker NY.

Chern, S. S., Chen,W. H., Lam, K. S., 1999. Lectures on Differential Geometry, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore.

Duggal, L. K., Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Goldberg, S. I., Kobayashi, S., 1967. Holomorphic Bisectional Curvature, J.Differential Geometry, 1, 225-233.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998. Diferensiyel Geometri, Cilt I. Ankara Üniversitesi, 269s.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II. Ankara Üniversitesi, 340s.

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003. Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi, 251s.

Hacısalihoğlu, H. H., 2004. Diferensiyel Geometri, Cilt III. Ankara Üniversitesi, 206s.

Kobayashi, S., Nomizu, K. , 1963. Foundations of Differential Geometry, Vol.I. Interscience Publishers.

Kobayashi, S., Nomizu, K. , 1969. Foundations of Differential Geometry, Vol.II. Interscience Publishers.

Küpeli, N. D., 1996. Singular Semi-Riemannian Geometry, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press. Inc., 482p.

Martin, D. , 1991. Manifold Theory, Ellis Horwood.

Romero, A., 1998. Differential Geometry of Complex Hypersurfaces in Indefinite Complex Space Forms, Proceedings of the Third International Workshop on Differential Geometry. Taegu, Korea, October 30-31.

Romero, A., Suh, J. Y., 2004. Differential Geometry of Indefinite Complex Submanifolds in Indefinite Complex Space Forms, Extracta Mathematicae, Vol.19, No.3, 339-398.

Spivak, M., 1979. Differential Geometry, Volume II., III., IV., New York. NY:Wiley.

Willmore, T. J., 1993. Riemannian Geometry, Oxford University Press. Inc., New York.

Yano, K., Kon, M., 1984. Structures on Manifolds, World Sci. Publishing Co. Ptc. Ltd., 508p