

3-Boyutlu Galilean Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri Üzerine

Mustafa Dede

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Mart 2011

On the Parallel Ruled Weingarten Surfaces in 3-Dimensional Galilean Space

Mustafa Dede

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics

March 2011

# 3-Boyutlu Galilean Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri Üzerine

Mustafa Dede

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

Mart 2011

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Mustafa Dede'nin DOKTORA tezi olarak hazırladığı "3-Boyutlu Galilean Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Cumali Ekici

**İkinci Danışman** : -

### **Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoglu

**Üye** : Prof. Dr. Ali Görgülü

**Üye** : Prof. Dr. A. Ceylan Çöken

**Üye** : Doç. Dr. Cumali Ekici

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Erdal Özusağlam

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve .....  
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı Galilean uzayda regle Weingarten yüzeylerin var olan üç tipinin her birisi için paralel yüzeylerinin bazı geometrik özelliklerini incelemektir. Çalışmamızda, öncelikle Galilean uzayda paralel yüzeyleri ve paralel regle yüzeyleri tanımladık. Sonrasında regle Weingarten yüzeyine paralel olan yüzeyin de Weingarten yüzeyi olduğunu gösterdik. Çalışmanın ‘Giriş’ bölümünde, Galilean uzay, paralel yüzeyler ve Weingarten yüzeylerinin tarihsel gelişimini açıkladık.

İkinci bölümde çalışmamıza temel oluşturan, Weingarten yüzeyleri, paralel yüzeyler, regle yüzeyler ve Galilean uzay için önemli tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü ve dördüncü bölümünde, sırasıyla, Galilean uzayda paralel yüzeyler ve paralel regle yüzeyler tanımlanmıştır. Birinci ve İkinci esas formlarının katsayıları bulunmuştur. Ayrıca paralel yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanarak bunlar arasında bağıntılar elde edilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen paralel regle yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri yardımıyla Galilean uzayda regle Weingarten yüzeyinin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzeyi olduğu ispatlanmıştır. Son kısımda ise Galilean uzayda paralel regle Weingarten yüzeyi örnekleri verilmiştir. Ayrıca bu yüzeyler, maple yazılımı kullanılarak çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Galilean uzay, ortalama eğrilik, Gauss eğriliği, Weingarten yüzeyleri, paralel yüzeyler.

## SUMMARY

The aim of this thesis is to study geometric properties of three types of parallel ruled Weingarten surfaces in Galilean space. Firstly, we defined parallel surfaces and parallel ruled surfaces in Galiean space. Then using this definition we proved the fact that "the parallel surface of ruled Weingarten surfaces is also Weingarten surface". The historical development of the Galilean space, parallel surfaces and Weingarten surfaces are presented in 'Abstract'.

The second chapter contains the basic mathematical definitions and theorems for Weingarten surfaces, parallel surfaces, ruled surfaces and Galilean space.

In chapters three and four, we defined the parallel surfaces and parallel ruled surfaces in Galilean space, respectively. The coefficients of first and second fundamental forms are obtained. Then using the definition of parallel surfaces we determined the relation between Gauss and mean curvatures of parallel surfaces.

The idea of the Gauss and mean curvatures of parallel ruled surfaces in Galilean space, leads us to discuss that "parallel surfaces of ruled Weingarten surfaces are also Weingarten surfaces". So, as a final chapter, we proved this idea and gave some examples for parallel Weingarten ruled surfaces in Galilean space. Moreover these surfaces are plotted by using maple software.

Key Words: Galilean space, mean curvature, Gauss curvature, Weingarten surfaces, parallel surfaces.

**TEŞEKKÜR**

3-Boyutlu Galilean Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri üzerine adlı çalışmamda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın Doç. Dr. Cumali Ekici'ye teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	v
<b>SUMMARY</b> .....	vi
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	vii
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	ix
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	x
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	4
2.1 Öklid Uzayı.....	4
2.2 Riemann Manifoldu ve Hiperyüzey.....	6
2.2.1 Regle yüzeyler.....	9
2.2.2 Paralel yüzeyler.....	11
2.2.3 Weingarten yüzeyleri.....	12
2.3 Galilean Uzay.....	13
2.3.1 Galilean geometri.....	13
2.3.2 Galilean uzay.....	22
2.3.3 Galilean uzayda yüzey teorisi.....	27
2.3.4 Galilean uzayda A tipi regle yüzeyler .....	31
2.3.5 Galilean uzayda B tipi regle yüzeyler.....	35
2.3.6 Galilean uzayda C tipi regle yüzeyler.....	39
2.3.7 Galilean uzayda A tipi Weingarten regle yüzeyleri.....	44
2.3.7 Galilean uzayda B tipi Weingarten regle yüzeyleri.....	46
2.3.7 Galilean uzayda C tipi Weingarten regle yüzeyleri.....	47



## İÇİNDEKİLER (devam)

<b>3. GALİLEAN UZAYDA PARALEL YÜZEYLER.....</b>	<b>48</b>
3.1 Galilean Uzayda Paralel Yüzeylerin	
Karakterizasyonları.....	48
3.2 Galilean Uzayda Paralel Yüzeylerin Ortalama ve	
Gauss Eğrilikleri.....	51
<b>4. GALİLEAN UZAYDA PARALEL REGLE YÜZEYLER.....</b>	<b>56</b>
4.1 Galilean Uzayda A Tipi Paralel Regle Yüzeyler.....	56
4.2 Galilean Uzayda B Tipi Paralel Regle Yüzeyler.....	62
4.3 Galilean Uzayda C Tipi Paralel Regle Yüzeyler.....	65
<b>5. GALİLEAN UZAYDA PARALEL REGLE</b>	
<b>WEİNGARTEN YÜZEYLERİ.....</b>	<b>70</b>
5.1 Galilean Uzayda A Tipi Paralel Regle Weingarten	
Yüzeyleri.....	70
5.2 Galilean Uzayda B Tipi Paralel Regle Weingarten	
Yüzeyleri.....	73
5.3 Galilean Uzayda C Tipi Paralel Regle Weingarten	
Yüzeyleri.....	74
5.4 Galilean Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzey Örnekleri.....	75
<b>6. SONUÇ VE TARTIŞMA.....</b>	<b>86</b>
<b>7. KAYNAKLAR DİZİNİ.....</b>	<b>87</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>92</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b><u>Sekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
2.1a Düzlemsel hareket.....	14
2.1b Doğrusal hareket.....	14
2.2 Doğru üzerinde hareket.....	14
2.3a İki nokta arasındaki uzaklık.....	16
2.3b Özel iki nokta arasındaki uzaklık.....	16
2.4a Galilean çember.....	17
2.4b Özel Galilean çember.....	17
2.5a Öklidyen yay uzunluğu.....	18
2.5b Galilean yay uzunluğu.....	18
2.6 Galilean açısal hız.....	18
2.7 Saykıl.....	19
2.8 Saykılın eğriliği.....	20
2.9 Eğrinin teğetleri.....	20
2.10 Oskülatör Saykıl.....	21
2.11 Galilean düzlemde bir eğrinin ortonormal çatısı.....	22
2.12 Galilean uzayda bir eğrinin Frenet çatısı.....	26
2.13 Eliptik involusyon.....	26
2.14 Galilean uzayda bir yüzeyin birim normal vektörü.....	28
2.15 Galilean uzayda A tipi regle yüzey.....	31
3.1 Galilean uzayda paralel yüzeyler.....	49
5.1 Galilean uzayda A tipi regle yüzey.....	76
5.2 Galilean uzayda A tipi paralel regle yüzeyler.....	81
5.3 Galilean uzayda B tipi regle yüzey.....	82
5.4 Galilean uzayda B tipi paralel regle yüzeyler.....	85

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<b>Simge</b>	<b><u>Anlamı</u></b>
$I$	Eliptik involüsyon
$w$	İdeal düzlem
$f$	İdeal doğru
$d$	Uzaklık fonksiyonu
$\delta$	Özel uzaklık fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	3 – boyutlu Reel uzay
$\mathbb{E}^3$	3 – boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{G}^3$	3 – boyutlu Galilean uzay
$M^\lambda$	$M$ Yüzeyinin paralel yüzeyi
$Z$	Saykıl
$K$	Yüzeyin Gauss eğriliği
$H$	Yüzeyin ortalama eğriliği
$K_\lambda$	Paralel yüzeyin Gauss eğriliği
$H_\lambda$	Paralel yüzeyin ortalama eğriliği
$I^q$	$q$ -uncu Esas form
$I_\lambda$	Paralel yüzeyin birinci esas formu
$II_\lambda$	Paralel yüzeyin ikinci esas formu
$\Gamma^n$	$n$ – boyutlu Galilean uzayı
$\mathbb{E}^n$	$n$ – boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{I}^n$	$n$ – boyutlu İzotropik uzay

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Birçok bilim adamının hiperbolik geometri ile ilgilenmesi şaşırtıcı değildir, bunun nedeni hiperbolik geometrinin bir çok matematiksel ve bilimsel uygulamasının olmasıdır. Hiperbolik geometriyi asıl ilginç kılan, tek tip bir geometri olmamasıdır. Nedeni ise, içinde birçok sistem barındırmasından kaynaklanmaktadır. Bununla beraber hiperbolik geometri Öklidyen olmayan tek geometri değildir, daha sayısız böyle geometri vardır. Gauss C. F. (1777-1855), Lobachevsky N. I. (1793-1856) ve Bolyai J. (1802-1860) bu üç matematikçinin herbirinin hiperbolik geometriye ayrı ayrı çok büyük katkıları vardır. Lobachevsky hayatını hiperbolik geometriye adanmış ve çalışmalarını da 1829 yılında yayınlamıştır. Hiperbolik geometrinin keşfinden sonra iki tane admissible geometrik sistem ortaya çıkmıştır, fakat bu durum fazla sürmemiştir. 19. yüzyılda Reimann G. F. B. (1826-1866) iki geometrik sistemden daha fazlasının olduğunu ifade etmiştir. Alman matematikçi Klein F. (1849-1925) 1870 yılında bu listeyi daha da büyütülmüştür. Klein F. Öklid ve hiperbolik geometriyi de içeren dokuz tane daha bağlantılı düzlem geometri olduğunu açıklamıştır. Klein F. "geometri, şekillerin bütün hareketler altında invariant kalan özelliklerini inceler" olarak tanımlamıştır. Galilean geometri de  $((x, t)$  koordinatlı, 2-boyutlu olayların manifoldunun geometrisi) bunlardan biridir. Burada  $x$  doğru üzerindeki noktanın koordinatı,  $t$  ise zamandır. Bu geometrinin hareket denklemi ise klasik kinematikteki Galilean transformasyondur. Galilean geometri, bir doğru üzerindeki kayma ve ötelemenin klasik mekaniği olarak düşünülebilir. Hiperbolik geometri, Öklid geometrisine göre daha kompleks bir geometridir. Bununla birlikte, bütün Klein

geometrileri arasında en sade olanı Galilean geometrisidir. Mesela Galilean uzayda, sırasıyla, sinüs ve kosinüs fonksiyonları  $\sin g$  ve  $\cos g$  ile gösterilmek üzere, bütün  $A$  açıları için  $\sin g(A) = A$  ve  $\cos g(A) = 1$  dir. Galilean geometri 2-boyutlu olarak Yaglom I. M. tarafından incelenmiştir (Yaglom, 1979). Bu kitapta Galilean geometrinin temel özellikleri ve kinematikteki önemi ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Paralel yüzeyler uzun yıllardır birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Örneğin 1883 yılında Craig T. elipsoidin paralel yüzeyini araştırmıştır. 1909 yılında Eisenhart L. P. paralel yüzeyleri de içeren bir kitap yayınlamıştır. (Park and Kim, 1998) çalışmasında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin regle yüzey olmadığı, ancak açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğu ifade edilmiştir. Regle yüzeyler ile ilgili ayrıntılı bilgi (Carmo, 1976) kitabında bulunulabilir. Nizamoğlu Ş. 1986 yılında yayınladığı makalede paralel regle yüzeyleri birim dual küre üzerindeki bir parametreye bağlı dual eğriler olarak düşülmüştür. Minkowski uzayında ise Çöken ve arkadaşları iki paralel regle yüzeyin geometrik invariantları arasında bağıntılar elde etmişler (Çöken et al., 2008).

Galilean uzayı ve bu uzayda özellikle regle yüzeyler Röschel O. tarafından geliştirilmiştir (Röschel, 1984). Doktora tezinde Röschel O. Galilean uzaydaki regle yüzeyleri 3 tip olarak incelemiştir. 1991 yılında Kamenarovic I. Galilean uzayda regle yüzeylerin eğriliklerini hesaplamıştır. 2008 yılında Milin-Sipus Z. Galilean uzayda regle Weingarten yüzey olma şartlarını elde etmiştir. Son yıllarda Galilean uzay ile ilgili çalışmalar başarıyla devam etmektedir (Öğrenmiş et al., 2007; Öğrenmiş et al., 2009; Ekici et al., 2010; Ekici et al., 2011). Pseudo-Galilean uzayda eğriler bir çok çalışmada incelenmiştir (Divjak, 1998; Akyiğit and Azak, 2010). 2004 yılında pseudo-Galilean uzayda regle yüzeyin transversal yüzeyleri Milin-Sipus Z. ve Divjak B. tarafından

çalışılmıştır. 2011 yılında Ekici C. ve Dede M. pseudo-Galilean uzayda regle yüzeylerin Frenet ve Darboux vektörlerini hesaplayarak bunlar arasındaki bağıntıları elde etmiştir.

Weingarten yüzeyleri ise matematikçilerin uzun yıllar ilgisini çekmiştir. Öklid uzayında Beltrami ve Dini tarafından ifade edilen klasik teorem, açılabilir olmayan regle Weingarten yüzeyleri, helikoidsel regle yüzeyin bir parçası olarak tanımlar (Beltrami, 1865; Dini, 1865). Bu yüzeyler bir doğrunun helikoidsel hareket yaptırılmasıyla elde edilir. Weingarten regle yüzeyleri ile ilgili daha fazla ayrıntılı bilgi (Kühnel, 1994; Milnor, 1980) çalışmalarında bulunulabilir. Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeyleri ise (Dillen and Kühnel, 1999) çalışmasında incelenmiştir. 2003 yılında Sodsiri W. Minkowski uzayında regle lineer Weingarten yüzeyleri incelemiştir. (Yaylı et al., 2009) çalışmasında, Öklid uzayında paralel lineer Weingarten yüzeyleri üzerine çalışılmış ve bu yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Bu çalışmada da Galilean uzayda paralel yüzeyler tanımlanmıştır. Ayrıca paralel yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra Galilean uzayda paralel regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilmiştir. Böylece Galilean uzayda regle Weingarten yüzeyinin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzeyi olduğu ispatlanmıştır. Son olarak Galilean uzaydaki paralel regle Weingarten yüzeyleri için birinci ve ikinci temel formlar gibi kavramlar hesaplanmış ve örnekler verilmiştir.

## BÖLÜM 2

### TEMEL KAVRAMLAR

#### 2.1 Öklid Uzayı

Bu kısımda, tezimizde sıkca kullanılan kavramlara yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.1:** Boş olmayan bir  $A$  cümlesi ve bir  $K$  cismi üstünde bir vektör uzayı  $V$  olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$(1) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(2) \quad \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A$$

noktası vardır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.2:**  $\mathbb{R}^3$  3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş  $\mathbb{R}^3$  afin uzayını ele alalım.  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3)$  iki vektör olsun. Bu  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanırsa böylece  $\mathbb{R}^3$  afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve  $\mathbb{E}^3$  ile gösterilir.

Bir reel afin uzayda tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanırlar. Bununla beraber reel afin uzaylar ile Öklid uzayları farklıdır. Çünkü, bir  $V$  reel vektör uzayı ile birleşen  $A$  afin uzaydaki metrik özellikler  $V$  de seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar; bu nedenle Öklid

uzayındaki özelliklerle diğer afin uzaylardakiler farklı olurlar (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.3:**  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$  olmak üzere

$$\begin{aligned} d: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x, y \in \mathbb{E}^3$  noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.4:**

$$\begin{aligned} d: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $\mathbb{E}^3$  de Öklid metriği denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.5:**  $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^3$  için  $\widehat{xyz}$  açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{yx}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{yx}\| \|\vec{yz}\|}$$

den hesaplanan  $\theta$  reel sayısıdır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.6:**  $\mathbb{E}^3$  de sıralı bir  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  nokta dördlüsüne,  $\mathbb{R}^3$  de karşılık gelen  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$  vektör üçlüsü,  $\mathbb{R}^3$  için bir ortonormal baz ise  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  sistemine  $\mathbb{E}^3$  ün bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Sonuç 2.1.7:**  $\mathbb{E}^3$  de  $E_0 = (0, 0, 0), E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0)$  ve  $E_3 = (0, 0, 1)$  noktaları bir dik çatı oluştururlar.  $\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$  olduğundan,  $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$  sistemi  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayı için bir ortonormal bazdır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.8:**  $\mathbb{E}^3$  deki  $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$  çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 2000).



## 2.2 Riemann Manifoldu ve Hiperyüzey

Bu kısımda, manifold üzerinde koneksiyon ve bazı dönüşümler ifade edilmiştir.

**Tanım 2.2.1:**  $M$  bir topolojik uzay olsun.  $M$  için aşağıdaki önermeler doğru ise  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold veya  $n$ -manifold dur denir:

- (1)  $M$  bir Hausdorff uzayıdır.
- (2)  $M$   $n$ -boyutlu lokal Öklidyendir.
- (3)  $M$  açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986).

**Tanım 2.2.2:**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold olsun.  $M$  üzerinde  $C^k$  sınıftan diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse  $M$  ye  $C^k$  sınıftan diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986).

**Tanım 2.2.3:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olsun.  $P \in M$  üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \rightarrow \cup T_M(P)$$

örten ve birebir olarak tanımlanan  $X$  fonksiyonuna denir ve  $M$  üzerindeki vektör alanlarının cümlesi  $\chi(M)$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.4:** (Riemann Manifoldu)  $M$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M$  üzerindeki vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  ve reel değerli  $C^\infty$  fonksiyonların halkası  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  olmak üzere

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise  $M$  ye bir Riemann manifoldu denir. Burada,  $\langle , \rangle$  işlemine  $M$  üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.5:** (Kovaryant Türev ve Koneksiyon)  $M$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M$  üzerinde vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  olmak üzere

$$\begin{aligned} i) \quad D_{fX+gY}Z &= fD_XZ + gD_YZ, \\ ii) \quad D_X(fY) &= fD_XY + (Xf)Y, \end{aligned}$$

özellikleri sağlanıyorsa  $D$  ye  $M$  manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve  $D_X$  e de  $X$  e göre kovaryant türev operatörü denir (O'Neill, 1966).

**Tanım 2.2.6:** (Riemann Anlamında Kovaryant Türev ve Riemann Koneksiyon)  $M$  yarı-Riemann manifoldu olsun.  $M$  üstünde bir  $D$  afin koneksiyonu

- (1)  $D, C^\infty$  sınıfındadır.
- (2)  $M$  nin bir  $A$  bölgesi üzerinde,  $C^\infty$  olan  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  için

$$D_XY - D_YX = [X, Y]$$

dir.

- (3)  $M$  nin bir  $A$  bölgesi üzerinde,  $C^\infty$  olan  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall p \in A$  için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_XY, Z \rangle|_p + \langle Y, D_XZ \rangle|_p$$

özelliklerini sağlanıyorsa,  $D$  koneksiyonuna,  $M$  üstünde bir Riemann koneksiyonu ve  $D_X$  e de  $X$  e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (O'Neill, 1966).

**Tanım 2.2.7:**  $\mathbb{E}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $(n-1)$  boyutlu bir hiperyüzey diye  $\mathbb{E}^n$  deki boş olmayan bir  $M$  cümlesine denir, öyleki bu  $M$  cümlesi  $x \in U \subset \mathbb{E}^n$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = c \end{aligned}$$

$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$  biçiminde tanımlanır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.8:**  $\mathbb{E}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey  $M$  ve  $M$  nin birim normal vektör alanı,  $N$  verilsin.  $\mathbb{E}^n$  de Riemann Koneksiyonu  $D$  olmak üzere,  $\forall X \in \chi(M)$  için

$$S(X) = D_XN$$

şeklinde tanımlı,  $S$  dönüşümüne  $M$  üzerinde şekil operatörü veya  $M$  nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.9:**  $\mathbb{E}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir  $M$  hiperyüzeyi üzerinde  $q$ -uncu temel form diye,  $1 \leq q \leq n$  olmak üzere

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı,  $I^q$  fonksiyonuna denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.10:**  $\mathbb{E}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $P \in M$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $K$  fonksiyonuna  $M$  nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve  $K(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki Gauss eğriliği denir (Oprea, 1997).

**Tanım 2.2.11:**  $\mathbb{E}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $P \in M$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = iz(S(P)) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $H$  fonksiyonuna  $M$  nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve  $H(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki ortalama eğriliği denir (Oprea, 1997).

**Tanım 2.2.12:**  $\mathbb{E}^n$   $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey  $M$  ve  $M$  nin şekil operatörü  $S$  olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasına karşılık gelen  $S(P)$  nin karakteristik değerlerine  $M$  nin bu noktasındaki asli eğrilikleri denir. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlere de  $M$  nin  $P$  noktasındaki asli eğrilik vektörleri veya asli eğrilik doğrultuları denir (Hacısalihoglu, 2000).

## 2.2.1 Regle yüzeyler

Bu alt kısımda, çalışmamızda önemli yeri olan regle yüzeyler ele alınmıştır.

**Tanım 2.2.13:**  $M \subset \mathbb{E}^3$  yüzeyi verilsin.  $\forall p \in M$  noktasında,  $\mathbb{E}^3$  ün  $M$  de kalan bir doğrusu var ise  $M$  ye bir regle yüzey denir ve  $p \in M$  noktasından geçen ve  $M$  de kalan doğruya da  $M$  nin bir doğrultmanı denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Sonuç 2.2.14:**  $\mathbb{E}^3$  3–boyutlu Öklid uzayında  $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$  olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)) \end{aligned}$$

olsun. Her  $u \in I$  için  $\alpha(u)$  noktasındaki  $T$  teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ v &\rightarrow l(v) = (\alpha_i(u) + vX_i(u)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada  $1 \leq i \leq 3$  olmak üzere  $X_i(u) \in \mathbb{R}$  skalarları  $\alpha(u)$  noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir.

$l$  doğrusunun  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket etmesiyle,  $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$  parametrisasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\alpha_i(u) + vX_i(u)), \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

regle yüzey elde edilir (Gray, 1993).

**Tanım 2.2.15:** Bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.16:** Bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.17:** Bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz çizgisi (striksiyon eğrisi) adı verilir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.18:** Bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin merkez noktasının  $\bar{\alpha}$  yer vektörü,  $X(s)$  doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan  $\bar{u}$  uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(s, \bar{u}) = \alpha(s) + \bar{u}X(s)$$

şeklinde ifade edilir.  $\bar{u}$  parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultmanı cinsinden bulunabilir. regle yüzeyin ilk ikisi  $X(s)$  ve  $X(s) + dX(s)$  olan komşu üç anadoğrusunu seçelim. Burada  $P$  ve  $Q$  farklı iki boğaz noktasıdır. Böylece

$$\bar{\alpha}(s, \bar{u}) = \alpha(s) - \frac{\langle D_T X, T \rangle}{\|D_T X\|^2} X(s)$$

bulunur (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.19:** Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu iki komşu anadoğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir. Ayrıca yüzeyin dralinin diferensiyel denklemi

$$\lambda = -\frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle} \quad (2.2)$$

şeklindedir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.20:** Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalihoglu, 2000).

## 2.2.2 Paralel yüzeyler

Bu kısımda, paralel yüzeyler için sağlanan bazı özellikler verilmiştir.

**Tanım 2.2.21:**  $M_1$  ve  $M_2$ ,  $\mathbb{E}^n$  in iki hiperyüzeyi ve  $M_1$  in birim normal vektör alanı

$$N_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer bir  $r \in \mathbb{R}$  sabit sayısı ve  $\forall P \in M_1$  için

$$f(p) = (p_i + ra_i(p))$$

olacak şekilde bir

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa,  $M_2$  ye  $M_1$  in paralel hiperyüzeyi denir (Hacısalihoglu, 2000).

Bundan sonra,  $\mathbb{E}^n$  in  $M$  hiperyüzeyine paralel bir hiperyüzeyi  $M_r$  ile göstereceğiz. Buradaki  $r$  indisi  $r \in \mathbb{R}$  sabit sayısını gösterecektir.  $M$  nin birim normal vektör alanını  $N$ , şekil operetörünü  $S$  ve  $M_r$  nin birim normal vektör alanını  $N_r$ , şekil operatörünü de  $S_r$  ile göstereceğiz. O halde  $N_r = \overline{N_1}$  yani

$$N_r = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{a_i}(f(p)) = a_i(p)$$

olacaktır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.22:**  $\mathbb{E}^n$  in  $M$  hiperyüzeyine paralel  $M_r$  hiperyüzeyi verilsin.  $\mathbb{E}^n$  in  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  Öklid koordinat sistemine göre;  $X \in \chi(M)$ ,  $\overline{X} \in \chi(M_r)$  vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{X} = \sum_{i=1}^n \overline{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

öyleki,  $\forall P \in M$  için  $b_i(p) = \overline{b_i}(f(p))$ ,  $1 \leq i \leq n$ , özeliği ile verilsin. O zaman,

$$\begin{aligned} 1) \quad f_*(X) &= \overline{X} + r\overline{S(X)} \\ 2) \quad S_r f_*(X) &= \overline{S(X)} \end{aligned}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

**Teorem 2.2.23:**  $f : M \rightarrow M_r$  olmak üzere,  $M$  nin bir paralel hiperyüzeyi  $M_r$  olsun. O zaman,

- (1)  $f$ , üçüncü temel form olma özeliğini korur.
- (2)  $f$ , umbilik nokta olma özeliğini korur.

(3)  $f$ , asli eğrilik doğrultusu olma özeliğini korur.

(4)  $M$  nin temel formları, sırasıyla  $I, II, III$  ile gösterilmek üzere,  
 $\forall X, Y \in \chi(M), \forall P \in M$  için

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} = I(X_p, Y_p) + 2rII(X_p, Y_p) + r^2III(X_p, Y_p)$$

dir (Hacısalihoglu, 2000).

**Teorem 2.2.24:**  $M \subset \mathbb{E}^3$  yüzeyinin bir paralel yüzeyi  $M_r$  olsun.  $P \in M$  noktasında  $M$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,  $K$  ve  $H$ ,  $f(P) \in M_r$  noktasında  $M_r$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de  $K_r$  ve  $H_r$  olsun. O zaman,

$$K_r = \frac{K}{(1 + rH + r^2K)}$$

$$H_r = \frac{H + 2rK}{(1 + rH + r^2K)}$$

dir (Hacısalihoglu, 2000).

### 2.2.3 Weingarten yüzeyleri

Bu kısımda, bir yüzeyin Weingarten yüzeyi olma şartları verilmiştir.

**Tanım 2.2.25:**  $M \subset \mathbb{E}^3$  yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için yüzeyin  $K$  Gauss ve  $H$  ortalama eğrilikleri arasında

$$\Phi(H, K) = 0 \tag{2.3}$$

olacak şekilde  $\Phi$  fonksiyonel bir bağıntısının var olması yada bununla özdeş olarak,  $H$  ve  $K$  nın değişimlerinin lineer bağımsız olması lazımdır (Sipus, 2008).

**Teorem 2.2.26:**  $M(u, v) \subset \mathbb{E}^3$  yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için yüzeyin  $K$  Gauss ve  $H$  ortalama eğriliklerinin kısmi türevleri

$$K_u H_v - K_v H_u = 0 \tag{2.4}$$

eşitliğini sağlamalıdır (Sipus, 2008).

**Tanım 2.2.27:**  $M \subset \mathbb{E}^3$  yüzeyinin  $k_1$  ve  $k_2$  asli eğrilikleri arasında

$$W(k_1, k_2) = 0$$

olacak şekilde düzgün iki değişkenli bir  $W$  fonksiyonu varsa  $M$  ye Weingarten yüzeyi denir (Sipus, 2008).

## 2.3 Galilean Uzay

Bu kısımda, Galilean uzayda metrik özellikler, yüzey teorisi ve regle yüzeyler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

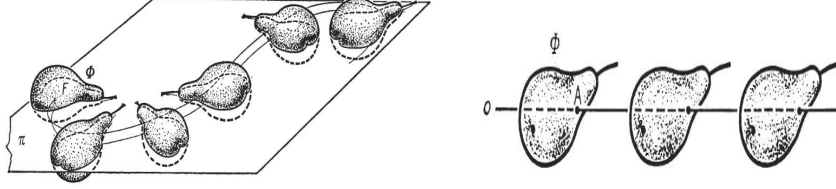
### 2.3.1 Galilean geometri

İlk olarak, 2-boyutlu Galilean geometriyi inceleyeceğiz. Bunun nedeni Galilean uzayı daha iyi anlamamıza yardım edecek olmasıdır. Galilean geometriyi oluşturan hareketin denklemi yardımıyla iki nokta arasındaki uzaklık, iki doğru arasındaki açı gibi bir çok temel kavram tanımlanmış ve ispatlanmıştır. Bu kısımda, aksi belirtilmedikçe (Yaglom, 1979) kaynağı esas alınmıştır.

Düzlem hareketi fiziksel olarak da gerçekleştirilebilir. Mesela bir  $\phi$  nesnesinin paralel düzlem hareketini ele alalım bu hareket süresince,  $\phi$  nesnesinin noktaları sabit bir  $\pi$  düzlemine paralel olarak hareket eder (Şekil 2.1a).  $F$  düzlem şeklinin,  $\pi$  düzlemindeki hareketi esnasında  $\phi$  ile  $\pi$  kesişir. Bu tip hareketin özel bir hali de doğrusal harekettir. Bu tip harekette  $\phi$  üzerindeki

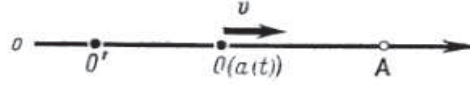


noktalar sabit bir hız ile  $o$  doğrusu üzerinde hareket eder (Şekil 2.1b).



Şekil 2.1a Düzlemsel hareket      Şekil 2.1b Doğrusal hareket

Doğrusal harekette  $o$  doğrusu üzerindeki bir  $A$  noktasının pozisyonu  $x$  sayısı ile belirlenir ve bu  $x$  sayısı  $A$  nın başlangıç noktasına olan uzaklığını gösterir. Doğrusal hareket diğer hareketlere göre daha basittir. Düşünmemiz gereken sadece bir  $o$  doğrusuna bağlı olan noktaların hareketidir.



Şekil 2.2 Doğru üzerinde hareket

$A = A(x)$  bir nokta,  $\{x\}$  ve  $\{x'\}$  koordinat sistemi olsun ve  $\{x\}$  koordinat sisteminin merkezi  $O$ ,  $\{x'\}$  koordinat sistemine göre  $t$  zamanında  $v$  hızında hareket etsin (Şekil 2.2). O halde hareket eden  $a(t)$  noktasının  $\{x'\}$  koordinat sistemine bağlı koordinatları

$$a(t) = a + vt$$

dir. Burada  $t$  zaman ve  $a$  ise  $t = 0$  anında  $O$  nun  $\{x'\}$  koordinatlarıdır.  $A$  noktasına göre  $\{x\}$  ve  $\{x'\}$  koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$x' = x + a(t)$$

olur ve  $a(t)$  yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$x' = x + vt + a$$

elde edilir.  $t' = t + b$  zaman merkezindeki kaymayı da eklersek

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + vt + a \\ t' &= t + b \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

olur. Bu (2.5) dönüşümü doğrusal harekette iki koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı verir.

Eğer  $t$  zamanında,  $o$  doğrusu üzerindeki  $A(x)$  noktasının koordinatlarını  $x$  ve  $t$  olarak alırsa  $xOt$  düzleminde  $A(x, t)$  noktası elde edilir. Böylece (2.5) denklemi altında invaryant kalan formüllerle gösterilen bir geometrimiz olur. Bu geometriye Galileo'nun görecelilik kuramının geometrisi veya kısaca Galilean geometrisi denir.

Galilean geometrisini Öklid geometrisi ile karşılaştırmak için  $x, y$  koordinatlarını Galilean geometrisinde de kullanalım. Bundan sonra  $y$  koordinatı  $o$  doğrusu üzerindeki  $A$  noktasının koordinatını ve önceden ifade edilen  $t$  koordinatı yerine de  $x$  koordinatı zamanı gösterecektir. Böylece (2.5) dönüşümü

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + vx + b \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

biçiminde ifade edilebilir.

O halde Öklid geometrisi

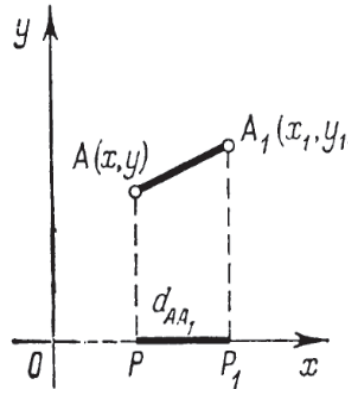
$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

dönüşümü altında invaryant kalan  $\{x, y\}$  düzlemindeki şekillerin özelliklerini incelerken Galilean geometrisi (2.6) dönüşümü altında invaryant kalan  $\{x, y\}$  düzlemindeki şekillerin özelliklerini inceler.

**Tanım 2.3.1:** Galilean düzlemde  $A(x, y)$  ve  $A_1(x_1, y_1)$  iki nokta olsun.  $A$  ve  $A_1$  noktaları arasındaki uzaklık

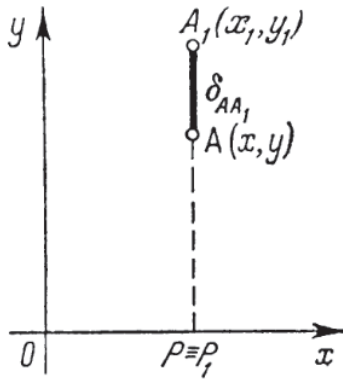
$$d_{AA_1} = x_1 - x \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Bulunan bu uzunluk  $AA_1$  doğru parçasının  $x$  eksenindeki  $PP_1$  izdü şümünün işaretli uzunluğudur (Şekil 2.3a).



Şekil 2.3a İki nokta arasındaki uzaklık

Eğer bu uzunluk sıfır ise yani  $x_1 = x$  ise  $A$  ve  $A_1$  noktaları  $y$  eksenine paralel olan aynı özel doğru üzerindedir (Şekil 2.3b).



Şekil 2.3b Özel iki nokta arasındaki uzaklık

Bu noktalara özel noktalar denir. Bu durumda özel noktalar arasında özel bir uzaklık olan

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y \quad (2.9)$$

tanımlanır.

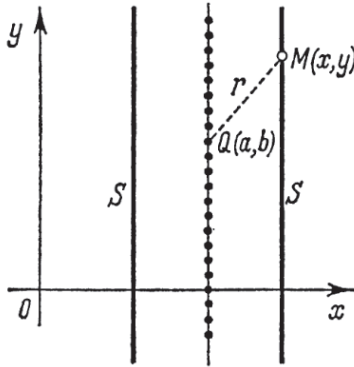
**Tanım 2.3.2:** Galilean düzlemde,  $Q$  sabit noktasına  $r$  uzaklığındaki  $M(x, y)$  noktalarının cümlesi

$$d_{QM} = x - a$$

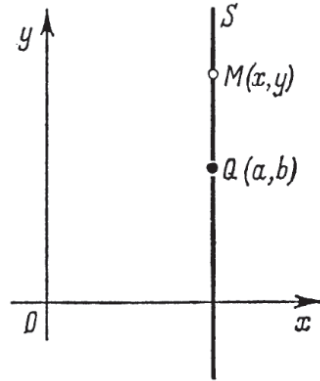
olmak üzere Galilean düzlemde bir çemberin denklemi

$$(x - a)^2 = r^2 \quad (2.10)$$

şeklinde elde edilir. (2.10) denkleminin iki kökü vardır. Açıkça görülüyor ki  $S$  Galilean çemberi,  $Q$  merkezine  $r$  uzaklığında iki tane özel doğru içerir (Şekil 2.4a). Eğer  $r = 0$  ise doğrular çakışiktır (Şekil 2.4b).



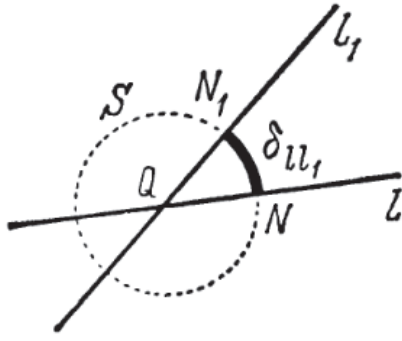
Şekil 2.4a Galilean çember



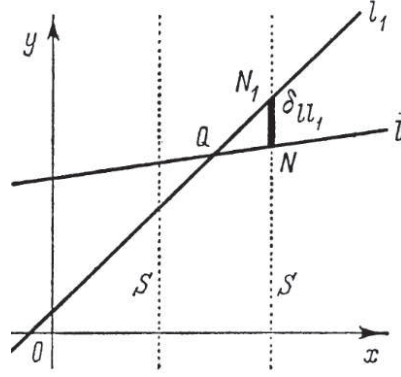
Şekil 2.4b Özel Galilean çember

**Tanım 2.3.3:** Galilean düzlemde kesişen iki doğru  $I$  ve  $I_1$  yardımıyla  $Q$  merkezli birim çemberde  $NN_1$  yay uzunluğu ile açığı tanımlanabilir. Öklid geometrisindeki yay uzunluğu (Şekil 2.5a) da Galilean geometrisindeki yay

uzunluğu ise (Şekil 2.5b) da gösterilmiştir.

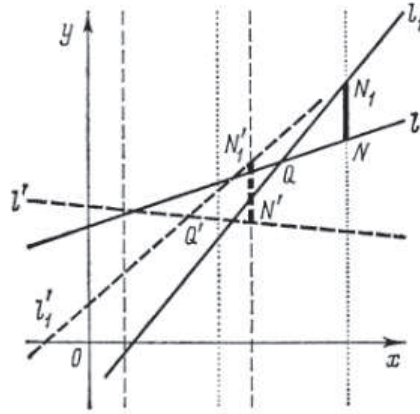


Şekil 2.5a Öklid yay uzunluğu



Şekil 2.5b Galilean yay uzunluğu

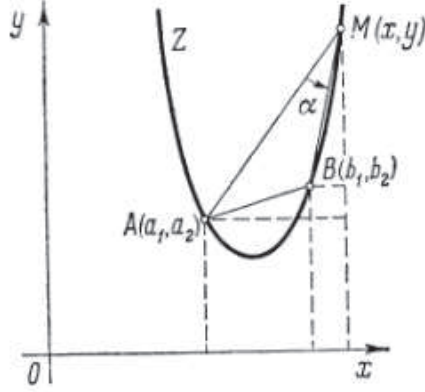
**Tanım 2.3.4:** Açısal hız Galilean düzlemde de anlamlıdır. Gerçekte Galilean düzlemde hareket, kesişen  $I$  ve  $I_1$  doğrularının  $Q$  noktasını, kesişen  $I'$  ve  $I'_1$  doğrularının  $Q'$  noktasına,  $S$  çemberinin  $NN_1$  yay uzunluğunu da  $S'$  çemberinde  $N'N'_1$  yay uzunluğuna taşır ( Şekil 2.6).



Şekil 2.6 Galilean açısal hız

**Tanım 2.3.5:** Galilean düzlemde  $A(a_1, a_2)$  ve  $B(b_1, b_2)$  iki nokta olsun.  $AB$  doğru parçası ile sabit  $\alpha$  açısı yapan noktaların cümlesine Galilean düz-

lemde saykıl denir ve  $Z$  ile gösterilir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7 Saykıl

Bir saykıl

$$y = ax^2 + 2bx + c \quad (2.11)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$a = \frac{\alpha}{(b_1 - a_1)}, \quad b = \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{2(b_1 - a_1)}, \quad c = \frac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{(b_1 - a_1)} \quad (2.12)$$

dir.

O halde Galilean düzlemdeki saykıl, Öklidyen parabolüdür.  $s$  yay uzunluğu olmak üzere  $Z$  saykılının  $AB$  kirişinin bitiş noktaları  $A(a_1, a_2)$  ve  $B(b_1, b_2)$  olsun. (2.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{d_{AB}}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{a}$$

bulunur. Burada  $\frac{s}{\alpha}$ , Öklidyen çemberdeki gibi sabit değerdedir. Böylece  $Z$  saykılının yarıçapı  $r$ ;  $AB$  yayının  $s$  yay uzunluğunun yarısının,  $AB$  kirişi tarafından belirlenen açığa oranı olarak tanımlanır. Bu durumda  $Z$  saykılının yarıçapı

$$r = \frac{s}{2\alpha} = \frac{1}{2a} \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) eşitliğinde ilginç olan parabolün durumuna göre  $Z$  saykılının  $r$  yarıçapı negatif veya pozitif olabilir.

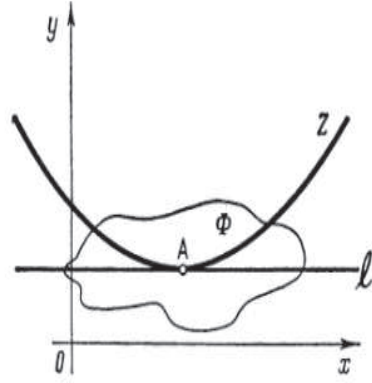
Eğer bir saykılın yarıçapı artarsa doğruya benzer, azalırda daha çok eğriye benzer. Bu yüzden saykılın eğriliği yarıçapla ilgilidir. Hatta

$$\frac{1}{r} = \frac{2\alpha}{s}$$

olduğundan yarıçap ile ters orantılıdır.  $Z$  saykılının eğriliği ise

$$\sigma = \frac{1}{r} = 2a$$

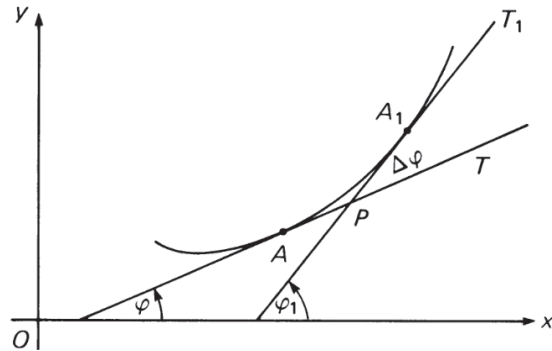
şeklindedir. Eğer burada  $r \rightarrow \infty$  olursa  $\sigma$  sifıra yaklaşır ve saykıl bir doğruya benzer şekil alır (Şekil 2.8).



Şekil 2.8 Saykılın eğriliği

**Teorem 2.3.6:** Galilean düzlemde bir  $A(x, y)$  noktasındaki  $y = f(x)$  eğrisinin teğetinin eğimi  $f'(x)$  ile bulunur.

**İspat:** Galilean durumunda eğriliği hesaplamak çok basittir.  $A(x, y)$  ve  $A_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  komşu iki nokta ve bu noktalardaki teğetler  $AT$  ve  $A_1T_1$



Şekil 2.9 Eğrinin teğetleri

olsun.  $AT$  ve  $A_1T_1$  teğetlerinin  $x$  eksenini ile yaptıkları açı  $\varphi$  ve  $\varphi_1$  olmak üzere

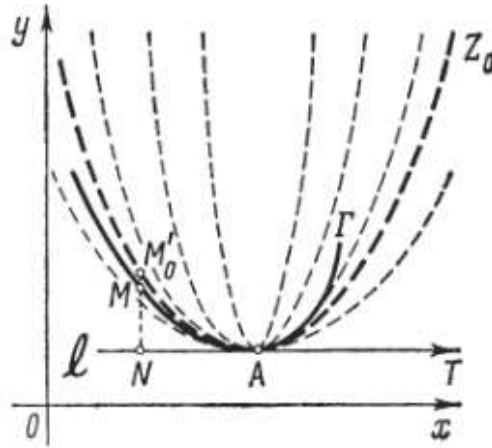
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \\ &= f''(x)\end{aligned}$$

elde edilir (Şekil 2.9). Öklidyen durum ise daha zordur yani

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan \Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2}$$

dir.

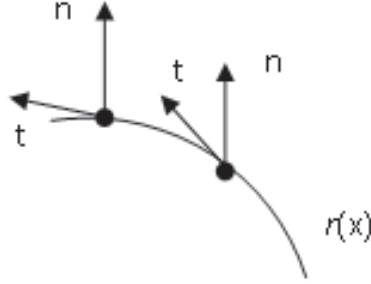
**Tanım 2.3.7:** Galilean düzlemde herhangi bir  $\Gamma$  eğrisinin eğrilik yarıçapını tanımlamak için bir  $A$  noktasından geçen ve teğeti  $AT$  olan bütün saykılar arasından  $\Gamma$  eğrisine en yakın  $Z_0$  saykılı seçelim. O halde  $Z_0$  saykılına oskülatör saykıl ve yarıçapına da eğrilik yarıçapı denir (Şekil 2.10).



Şekil 2.10 Oskülatör saykıl

**Tanım 2.3.8:** Galilean geometrisinde  $r = r(s)$  eğrisi,  $r = (x, f(x))$  şeklinde tanımlanabilir.  $r$  eğrisinin herhangi bir  $P$  noktasında  $\mathbf{t}$  ve  $\mathbf{n}$  vektörlerini içeren ortonormal çatısı vardır. Bu vektörler Galilean anlamında diktir.  $\mathbf{n}$  özel vektörü  $(0, 1)$  şeklindedir ve  $|\mathbf{n}| = 1$  dir. Ayrıca  $\mathbf{t}' = \eta \mathbf{n}$  olacak şekildeki  $\eta$  katsayısını eğrilik olarak tanımlayabiliriz (Şekil 2.11).





Şekil 2.11 Galilean düzlemde bir eğrinin ortonormal çatısı

### 2.3.2 Galilean uzay

$\Gamma^n$   $n$ - boyutlu Galilean uzay, hiperdüzlemi sonsuzda olan  $\mathbb{R}^{n-1}$  Öklidyen uzay ile ihtisas edilen afin uzayı olarak ele alınabilir. Bu uzayın hareket denklemleri

$$\dot{x}^1 = x^1 + a^1, \quad \dot{x}^i = A_1^i x^1 + A_j^i x^j + a^i \quad (i, j = 2, 3, \dots, n)$$

şeklindedir. Burada  $(A_j^i)$  ortogonal  $(n-1) \times (n-1)$  matristir (bu yazımda Einstein toplam kuralı uygulanmıştır). Bu formüller  $\mathbb{I}^n$   $n$ -boyutlu izotropik uzaydaki ortogonal koordinatların dönüşümü ile çakışır.  $\mathbb{I}^n$  uzayda hiperdüzlemi sonsuzda olan  $\mathbb{R}^{n-1}$  co-Öklidyen uzay ile ihtisas edilen afin uzay olarak ele alınabilir.

$\mathbb{I}^4$  Galilei-Newton un klasik mekaniğinin uzay-zamanı olarak ele alınabilir. Galilean uzay kavramının anlamı,  $\mathbb{G}_4$  uzaydaki hareketin formüllerinin  $\mathbb{I}^4$  uzayındaki ortogonal koordinatların dönüşüm formülleriyle çakışmasıyla açıklanabilir. Bu yüzden  $\mathbb{G}_4$  uzayını tanımlayan Kotelnikov, bu uzayın Galilei-Newton un klasik mekaniğinin uzay-zamanı olduğunu düşünmüştür, bu fikir bir çok geometrici tarafından desteklenmiştir (Rosenfeld and Maryukova, 1997).

3-boyutlu Galilean geometrinin hareket denklemleri

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a + v \cos \beta.t \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b + v \sin \beta.t \\ t' &= t + d \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) denklemleri üç kısma ayrılabilir.

(1)  $t$  eksenini boyunca bir dönme hareketi

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ t_1 &= t \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

(2)  $v = (v \cos \beta, v \sin \beta, 0)$  vektörü doğrultusunda bir kayma hareketi

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + v \cos \beta.t_1 \\ y_2 &= y_1 + v \sin \beta.t_1 \\ t_2 &= t_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

(3) bir  $(a, b, c)$  vektörü tarafından öteleme

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_2 + a \\ y' &= y_2 + b \\ t' &= t_2 + c \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Elde edilen 3-boyutlu Galilean geometrideki önermeler, (2.15) dönüşümü, (2.16) kayma hareketi ve (2.17) ötelemesi altında invaryant kalmalıdır (Yaglom, 1979).

**Tanım 2.3.9:**  $\mathbb{G}^3$  3-boyutlu Galilean uzay ideal şekli  $\{\omega, f, I, I_1\}$  olan bir kompleks projektif uzaydır. Burada  $\omega$  reel düzlemi ideal düzlem,  $f \subset \omega$  reel doğrusu ideal doğru,  $I$  ve  $I_1$  iki kompleks eşlenik noktalarıdır (Kamenarovic, 1991).

$\mathbb{G}^3$  uzayının reel modeli olarak,  $\mathbb{P}^3$  projektif uzayda  $\{\omega, f\}$  idealini alabiliriz. Burada  $\omega \subset \mathbb{G}^3$  reel düzlem, üzerinde  $\varepsilon$  eliptik involüsyonu tanımlı  $f \subset \omega$  reel doğrudur. Homojen koordinatlarda  $\varepsilon$  eliptik involüsyonu

$$(0 : 0 : x_2 : x_3) \rightarrow (0 : 0 : x_3 : -x_2)$$

şeklinde tanımlanabilir.

**Tanım 2.3.10:**  $\mathbb{G}^3$  uzayda 4 çeşit doğru vardır.

- a) reel izotropik olmayan doğrular;  $f$  ile kesişmezler.
- b) reel izotropik doğrular;  $\omega$  düzlemine ait olmayıp  $f$  ile kesişenler.
- c) reel ve izotropik olmayan doğrular;  $\omega$  düzleminin tüm doğruları ( $f$  dışında).
- d)  $f$  ideal doğrusu (Kamenarovic, 1991).

**Tanım 2.3.11:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $x = \text{sabit}$  olan düzlemler ( $\omega$ ) ideal düzlemi de dahil reel Öklidyen düzlemlerdir. Diğer düzlemler ise izotropiktir (Sipus, 2008).

**Tanım 2.3.12:** 3-boyutlu Galilean uzayda izotropik (özel) vektörler

$$u = (0, y, z)$$

şeklinindedir. Diğer vektörlere yani  $x \neq 0$ ,  $v = (x, y, z)$  şeklindeki vektörlere izotropik olmayan vektörler denir (Sipus, 2008).

**Tanım 2.3.13:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $A = (x, y, z)$  ve  $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$  iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$d_{AA_1} = x_1 - x$$

dir. Eğer bu uzaklık sıfır ise özel bir uzaklık olan

$$\delta_{AA_1} = \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

şeklinde tanımlanır (Sipus, 2008).

**Tanım 2.3.14:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $a = (x, y, z)$  ve  $b = (x_1, y_1, z_1)$  iki vektör olmak üzere

$$ab = x_1x \quad (2.18)$$

şeklinde iç çarpım tanımlanır. Eğer  $ap = 0$  ise  $a$  vektörü  $p$  vektörüne Galilean anlamında diktir denir. O halde açıkça görülüyorki  $a \perp p$  olması için gerek ve yeter şart  $p = (0, y, z)$  özel (izotropik) vektör olmasıdır.  $p = (0, y, z)$  ve  $q = (0, y_1, z_1)$  iki izotropik vektörün iç çarpımı ise

$$(pq)_1 = yy_1 + zz_1 \quad (2.19)$$

şeklinde ve bu izotropik vektörlerin dik olması ise  $(pq)_1 = 0$  ile tanımlanır (Yaglom, 1979).

**Tanım 2.3.15:**  $\mathbb{G}^3$  Galilean uzayda vektörel çarpım ise  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  vektörleri için

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (0, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanabilir (Sipus, 2008).

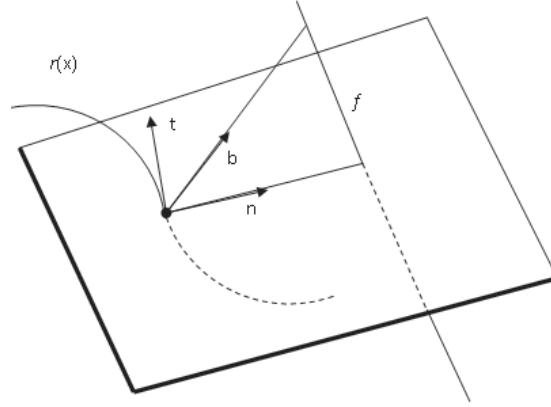
**Tanım 2.3.16:** Eğer  $C^r$  ( $r \geq 3$ ) sınıfından bir eğri

$$r(s) = (s, y(s), z(s))$$

parametrizasyonu ile verilirse, o zaman  $s$  yay parametresi ve Galilean in-varyanttır. Bükülmesi ve reel oskülör düzlemi olmayan eğriye admissible eğri denir. Bu eğrinin ortonormal çatısı ise

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= (1, y'(s), z'(s)) \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\kappa}(0, y''(s), z''(s)) \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\kappa}(0, -z''(s), y''(s)) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

olur.



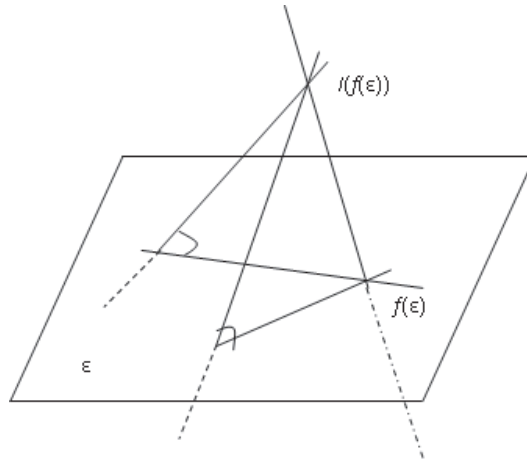
Şekil 2.12 Galilean uzayda bir eğrinin Frenet çatısı

Burada  $\kappa = \sqrt{y''(s)^2 + z''(s)^2}$  dir (Röschel, 1984). (Şekil 2.12) den de görüldüğü üzere  $\mathbf{b}$  vektörü eliptik involüsyon altında  $\mathbf{n}$  vektörünün görüntüsüdür. Ayrıca  $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$  olacak şekildeki  $\mathbf{n}$  vektörü oskulator düzlemedir.

**Tanım 2.3.17:**  $\varepsilon$  bir düzlem ve  $f(\varepsilon)$  noktasında  $f$  doğrusunun  $\varepsilon$  ile kesiştiği nokta olmak üzere  $f(\varepsilon)$  noktasına  $\varepsilon$  düzleminin mutlak noktası denir ve

$$f(\varepsilon)^\perp = I(f(\varepsilon))$$

şeklinde tanımlı  $f(\varepsilon)^\perp$  noktasına da ( $f(\varepsilon)$  noktasının eliptik involüsyon altındaki görüntüsü)  $f(\varepsilon)$  noktasına ortogonal olan  $f$  üzerindeki nokta denir (Şekil 2.13).



Şekil 2.13 Eliptik involüsyon

### 2.3.3 Galilean uzayda yüzey teorisi

Bu kısımda, çalışmamızda kullanılan Röschel O. tarafından verilen tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.3.18:**  $\mathbb{G}^3$  3-boyutlu Galilean uzayda  $C^3$  sınıfından bir  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyi

$$\varphi = \varphi(v^1, v^2) = (x(v^1, v^2), y(v^1, v^2), z(v^1, v^2)), \quad v^1, v^2 \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

parametrik denkleminde verilsin. Galilean uzayda

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi(v^1, v^2)}{\partial v^1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi(v^1, v^2)}{\partial v^2}$$

olmak üzere  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin regüler olması için

$$\varphi_1 \neq 0, \quad \varphi_2 \neq 0, \quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \neq 0$$

olmalıdır (Röschel, 1984).

Galilean uzayda yüzeyin  $N$  izotropik birim normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{|\varphi_1 \wedge \varphi_2|} = \frac{(0, z_1x_2 - z_2x_1, y_2x_1 - y_1x_2)}{w} \quad (2.23)$$

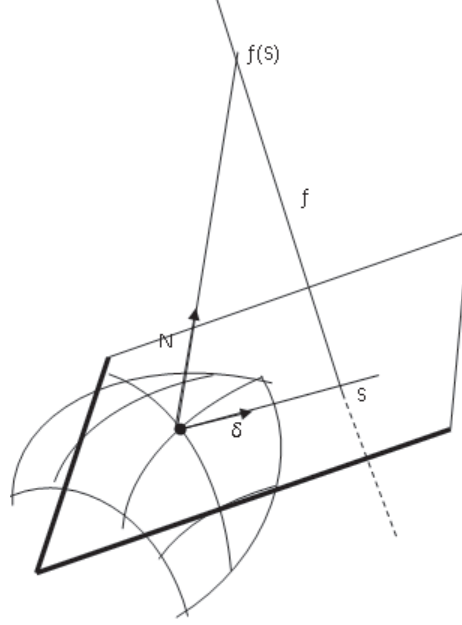
şeklinde ifade edilir (Röschel, 1984). Burada

$$w = \sqrt{(z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (y_2x_1 - y_1x_2)^2}$$

dir. Ayrıca  $N$  izotropik birim normal vektörüne dik olan  $\delta$  izotropik birim vektör,  $N$  nin eliptik involüsyon altındaki görüntüsü yardımıyla

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(0, y_1x_2 - y_2x_1, z_1x_2 - z_2x_1)}{w} \\ &= \left( \frac{x_2\varphi_1 - x_1\varphi_2}{w} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

dır.  $\delta$  izotropik birim vektörü yüzeyin teğet düzleminindedir (Şekil 2.14).



Şekil 2.14 Galilean uzayda bir yüzeyin normal vektörü

Galilean uzayda bir  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyi için

$$x_1 = \frac{\partial x(v^1, v^2)}{\partial v^1}, \quad x_2 = \frac{\partial x(v^1, v^2)}{\partial v^2} \quad (2.25)$$

olmak üzere

$$g_1 = x_1, \quad g_2 = x_2, \quad g_{ij} = g_i g_j \quad (2.26)$$

ve

$$g^1 = \frac{x_2}{w}, \quad g^2 = -\frac{x_1}{w}, \quad g^{ij} = g^i g^j \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece (2.27) denklemi yardımıyla  $\delta$  izotropik birim vektörü

$$\delta = g^i \varphi_i = g^1 \varphi_1 + g^2 \varphi_2$$

şeklinde de yazılabilir. Bir vektörün bu şekilde yazımına Einstein toplam konvensiyonu denir. Ayrıca

$$h_{ij} = \varphi_i \varphi_j \quad (2.28)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\delta^2} = \sqrt{(g^i \varphi_i)^2} \\ &= \sqrt{g^{ij} h_{ij}} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

**Tanım 2.3.19:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin  $I$  birinci esas formu (2.28) ve (2.26) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} I &= (ds)^2 \\ &= (g_i dv^i)^2 + \epsilon h_{ij} dv^i dv^j \end{aligned} \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & dv^1 : dv^2 \text{ izotropik değilse} \\ 1, & dv^1 : dv^2 \text{ izotropikse} \end{cases}$$

değerlerini alır (Röschel, 1984).

**Tanım 2.3.20:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin Gauss ve Weingarten denklemleri, sırasıyla,

$$\varphi_{ij} = \Gamma_{ij}^k \varphi_k + L_{ij} N \quad (2.30)$$

ve

$$N_i = B_i \delta + C_i N \quad (2.31)$$

dir. Burada  $L_{ij}$  değerleri  $II$  ikinci esas formun katsayılarıdır. Ayrıca

$$C_i = 0, \quad B_i = N_i \delta$$

olur (Röschel, 1984).

**Sonuç 2.3.21:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{ij}^1 = \left( \frac{\varphi_{ij} x_2 - x_{ij} \varphi_2}{w} \right) \delta \quad (2.32)$$



ve

$$\Gamma_{ij}^2 = \left( \frac{\varphi_{ij}x_1 - x_{ij}\varphi_1}{w} \right) \delta \quad (2.33)$$

biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca yüzeyin Christoffel sembolleri

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k, \quad g_{ij} = \Gamma_{ij}^k g_k \quad (2.34)$$

eşitliklerini de sağlar (Röschel, 1984).

**Teorem 2.3.22:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin  $II$  ikinci esas formunun  $L_{ij}$  katsayıları

$$L_{ij} = \left( \frac{\varphi_{ij}x_1 - x_{ij}\varphi_1}{x_1} \right) N \quad (2.35)$$

veya

$$L_{ij} = \left( \frac{\varphi_{ij}x_2 - x_{ij}\varphi_2}{x_2} \right) N \quad (2.36)$$

şeklinindedir (Röschel, 1984).

**Sonuç 2.3.23:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin, sırasıyla,  $K$  Gauss ve  $H$  ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{\det L_{ij}}{w^2} \quad (2.37)$$

ve

$$2H = g^{ij} L_{ij} \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilir (Röschel, 1984).

Galilean uzayda regle yüzeyler

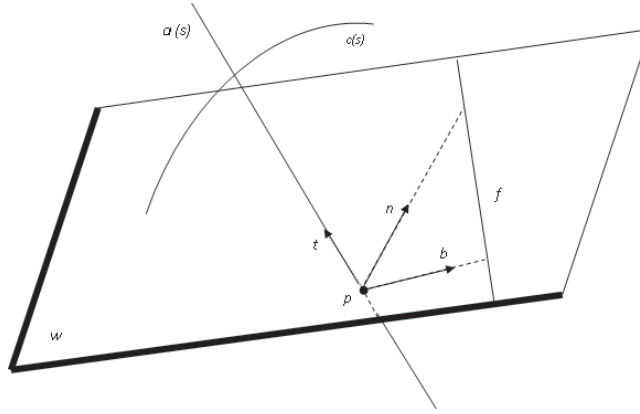
$$\varphi(s, v) = c(s) + va(s), \quad s \in I \subset \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilir. Burada  $c(s)$  dayanak eğrisidir.  $a(s)$  doğrultmanı ise  $c(s)$  eğrisi boyunca sıfır olmayan vektör alanıdır. Galilean uzayının mutlak şekline göre, Otto Röschel Galilean uzaydaki regle yüzeyleri üç tipe ayırmıştır. Sonraki kısımlarda bu üç tip regle yüzeyi ayrı ayrı tanımlayıp herbirinin  $K$  Gauss ve  $H$  ortalama eğriliklerini vereceğiz.

### 2.3.4 Galilean uzayda A tipi regle yüzeyler

Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzeyler en sık kullanılan regle yüzeylerdir. Bu kısımda,  $A$  tipi regle yüzeyler ayrıntılı olarak incelenecek ve gerekli olan teoremler ispatlanacaktır.

**Tanım 2.3.24:** Galilean uzaydaki  $A$  tipi regle yüzeyler, doğrultmanı reel ve izotropik olmayan doğru olan koniksel veya koniksel olmayan yüzeylerdir. Bu yüzeylerin boğaz çizgisi Öklidyen düzleme ait değildir.  $p$  boğaz noktası ve  $w$  ideal düzlemi (Şekil 2.15) de gösterilmiştir.



Şekil 2.15 Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzey

$\mathbb{G}^3$  Galilean uzayda bir  $A$  tipi regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned}\varphi(s, v) &= c(s) + va(s) \\ &= (x(s) + v, y(s) + va_2(s), z(s) + va_3(s))\end{aligned}\quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanır. Burada yüzeyin dayanak eğrisi

$$c(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

şeklinindedir.  $s$  de  $c(s)$  eğrisinin yay parametresidir (Röschel, 1984).

**Tanım 2.3.25:** Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzeyler için ortonormal çatı

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= a = (1, a_2, a_3) \\ \mathbf{n} &= \frac{a'}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}(0, a'_2, a'_3) \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\kappa}(0, -a'_3, a'_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $\kappa = \sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}$  ve  $\mathbf{n}$ , yüzeyin izotropik merkezi birim normalidir.

$$\tau(s) = \frac{\det[a, a', a'']}{\kappa^2} \quad (2.41)$$

olmak üzere Frenet formülleri ise

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

dir (Röschel, 1984).

**Sonuç 2.3.26:** Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzeyin drali

$$d(s) = -\frac{\det(c', a, a')}{\kappa} \quad (2.43)$$

şeklinde ifade edilir (Röschel, 1984).

**Tanım 2.3.27:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $A$  tipi  $\varphi(s, v)$  regle yüzeyin boğaz çizgisinin  $s$  yay parametresi olmak üzere,  $u$  standart parametresi

$$u = \int |a'(s)| ds = \int \kappa(s) ds$$

biçiminde tanımlanır. O halde  $A$  tipi regle yüzeyin drali

$$d(u) = -\det(c', a, a') \quad (2.44)$$

olur (Sipus, 2008).

**Sonuç 2.3.28:** Galilean uzayda  $A$  tipi  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $c(u)$  dayanak eğrisinin türevi

$$c'(u) = x'\mathbf{t} + q\mathbf{n} + d\mathbf{b} \quad (2.45)$$

biçiminde ifade edilir. “ $\sim$ ” bir vektörün  $yz$ -düzlemine izdüşümü olmak üzere  $q$  ve  $d$  değerleri, sırasıyla,

$$x' = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \quad q(u) = (\tilde{c}' - \tilde{a})\tilde{\mathbf{n}}, \quad d(u) = (\tilde{c}' - \tilde{a})\tilde{\mathbf{b}}$$

şeklinde elde edilir (Sipus, 2008).

**Sonuç 2.3.29:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzeyin  $s(u)$  boğaz çizgisi

$$s(u) = c(u) + v(u)a(u) \quad (2.46)$$

ve boğaz çizgisinin teğet vektörü ile doğrultman arasındaki  $\sigma$  açısı

$$\sigma(u) = \frac{d(u)}{x'(u) - q'(u)} \quad (2.47)$$

dır (Sipus, 2008).

**Teorem 2.3.30:** Galilean uzayda  $A$  tipi bir regle yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği ve  $H$  ortalama eğriliği

$$K = -\frac{d^2}{((v+q)^2 + d^2)^2} \quad (2.48)$$

ve

$$2H = -\frac{d(x' - q' + d\tau) + (v+q)^2\tau + d'(v+q)}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.49)$$

dir (Sipus, 2008).

**İspat:**  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyi için

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$$

olmak üzere  $A$  tipi  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin kısmi türevleri (2.45) (2.42) ve (2.40) denklemleri kullanılarak

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= x'\mathbf{t} + (q+v)\mathbf{n} + d\mathbf{b} \\ \varphi_2 &= \mathbf{t} \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

dir. Böylece (2.50) eşitlikleri yardımıyla yüzeyin normali

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2 &= (x'\mathbf{t} + (q+v)\mathbf{n} + d\mathbf{b}) \wedge \mathbf{t} \\ &= -(v+q)\mathbf{b} + d\mathbf{n} \end{aligned}$$

ve

$$w = |\varphi_1 \wedge \varphi_2| = \sqrt{(v+q)^2 + d^2} \quad (2.51)$$

olduğundan

$$N = -\frac{(v+q)\mathbf{b} - d\mathbf{n}}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} \quad (2.52)$$

elde edilir. Ayrıca  $N$  ve  $\mathbf{n}$  izotropik birim vektörleri arasındaki Öklidyen açı  $\phi$  olmak üzere

$$N\mathbf{n} = \frac{d}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} = \cos \phi \quad (2.53)$$

ve

$$N\mathbf{b} = -\frac{(v+q)}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} = \sin \phi \quad (2.54)$$

olur. Buradan da

$$-\frac{v+q}{d} = \tan \phi \quad (2.55)$$

elde edilir. O halde

$$N = \cos \phi \mathbf{n} + \sin \phi \mathbf{b} \quad (2.56)$$

şeklinde yazılır. (2.50) eşitlikleri kullanılarak  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin kısmi türevleri

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11} &= x''\mathbf{t} + (x' + q' - d\tau)\mathbf{n} + ((v+q)\tau + d')\mathbf{b} \\ \varphi_{12} &= \mathbf{n} \\ \varphi_{22} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

olur. Burada (2.42) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= x''\mathbf{t} + x'\mathbf{t}' + q'\mathbf{n} + (q+v)\mathbf{n}' + d'\mathbf{b} + d\mathbf{b}' \\ &= x''\mathbf{t} + x'\mathbf{n} + q'\mathbf{n} + (q+v)\tau\mathbf{b} + d'\mathbf{b} - d\tau\mathbf{n} \\ &= x''\mathbf{t} + (x' + q' - d\tau)\mathbf{n} + ((v+q)\tau + d')\mathbf{b} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer eşitlikler aşıkardır. Şimdi de  $A$  tipi regle yüzeyin  $II$  ikinci esas formunun katsayılarını hesaplayalım. (2.35) denklemleri yardımıyla

$$L_{11} = \frac{d(x' + q' - d\tau) - (v+q)^2\tau - d'(v+q)}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}}, \quad L_{22} = 0 \quad (2.57)$$

ve

$$L_{12} = \frac{d}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} \quad (2.58)$$

eşitlikleri kolayca hesaplanır. Buradan Galilean uzayda  $A$  tipi bir regle yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \frac{L_{22}L_{11} - L_{12}^2}{w^2} \\ &= -\frac{d^2}{((v+q)^2 + d^2)^2} \end{aligned}$$

dir. (2.27) denklemleri yardımıyla

$$g^{11} = \frac{1}{(v+q)^2 + d^2}, \quad g^{12} = -\frac{x'}{(v+q)^2 + d^2}, \quad g^{22} = \frac{(x')^2}{(v+q)^2 + d^2} \quad (2.59)$$

olduğundan Galilean uzayda  $A$  tipi bir regle yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} 2H &= g^{11}L_{11} + 2g^{12}L_{12} + g^{22}L_{22} \\ &= -\frac{d(x' - q' + d\tau) + (v+q)^2\tau + d'(v+q)}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

### 2.3.5 Galilean uzayda B tipi regle yüzeyler

**Tanım 2.3.31:** Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyin boğaz çizgisi Öklidyen düzlemedir. Bu yüzden teğet vektörü izotropik olur. O halde dayanak eğrisi

$$c(s) = (0, y(s), z(s)) \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir. Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzey

$$\begin{aligned} \phi(s, v) &= c(s) + va(s), \quad v \in (-\infty, +\infty) \\ &= (0, y(s), z(s)) + v(1, a_2(s), a_3(s)) \end{aligned} \quad (2.61)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada  $s$ ,  $c(s)$  dayanak eğrisinin yay parametresidir (Sipus, 2008).

(Ru, 1999) çalışmasında verilen Frenet formüllerine benzer olarak Galilean uzayda;

**Tanım 2.3.32:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyin ortonormal çatısı

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= (1, a_2(s), a_3(s)) \\ \mathbf{n} &= (0, -z'(s), y'(s)) \\ \mathbf{b} &= (0, y'(s), z'(s)) \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

dir. Frenet formülleri ise

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\kappa$  regle yüzeyin eğriliği ve  $\tau$  ise regle yüzeyin torsiyonu olmak üzere

$$\kappa = -\frac{a_2'}{z'}, \quad \tau = \frac{y''}{z'} \quad (2.64)$$

dır (Röschel, 1984).

**Sonuç 2.3.33:** Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyin drali

$$d(s) = \frac{\det(c', a, a')}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \quad (2.65)$$

şeklinde ifade edilir (Röschel, 1984).

**Tanım 2.3.34:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $B$  tipi bir  $\phi(s, v)$  regle yüzeyin boğaz çizgisinin  $s$  yay parametresi olmak üzere  $u$  standart parametresi

$$u = \int |a'(s)| ds$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda  $B$  tipi regle yüzeyin drali

$$d(u) = \det(c', a, a') \quad (2.66)$$

dir.

**Sonuç 2.3.35:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyler için (2.60) ve (2.62) denklemleri yardımıyla dayanak eğrisinin türevi

$$\begin{aligned} c'(u) &= (0, y'(u), z'(u)) \\ &= \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.67)$$

elde edilir.

**Teorem 2.3.36:** Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin  $K$  Gauss ve  $H$  ortalama eğriliği olmak üzere

$$K = -\frac{1}{(v^2+1)^2} \quad (2.68)$$

ve

$$2H = \frac{\tau}{\sqrt{1+v^2}} \quad (2.69)$$

dir.

**İspat:**  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyi için

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$$

olmak üzere Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyin kısmi türevleri

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \mathbf{b} + v\mathbf{n} \\ \varphi_2 &= \mathbf{t} \\ \varphi_{11} &= -\tau\mathbf{n} + v\tau\mathbf{b} \\ \varphi_{12} &= \mathbf{n} \\ \varphi_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

bulunur. Burada (2.62) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= c' + va' \\ &= \mathbf{b} + v\mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.71)$$



elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \mathbf{b}' + v\mathbf{n}' \\ &= -\tau\mathbf{n} + v\tau\mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.72)$$

olur. Diğer eşitlikler aşıkardır.  $B$  tipi regle yüzeyin  $N$  izotropik birim normal vektörü

$$\begin{aligned}\varphi_1 \wedge \varphi_2 &= (\mathbf{b} + v\mathbf{n}) \wedge \mathbf{t} \\ &= -\mathbf{n} + v\mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.73)$$

yardımla

$$w = |\varphi_1 \wedge \varphi_2| = \sqrt{1+v^2}\quad (2.74)$$

olduğundan

$$N = \frac{-\mathbf{n} + v\mathbf{b}}{\sqrt{1+v^2}}\quad (2.75)$$

elde edilir. Ayrıca  $N$  ve  $\mathbf{n}$  izotropik birim vektörleri arasındaki Öklidyen açı  $\phi$  olmak üzere

$$N\mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{v^2+1}} = \cos \phi\quad (2.76)$$

ve

$$N\mathbf{b} = \frac{v}{\sqrt{v^2+1}} = \sin \phi\quad (2.77)$$

olur. Buradan

$$-v = \tan \phi\quad (2.78)$$

elde edilir. Böylece

$$N = \cos \phi \cdot \mathbf{n} + \sin \phi \cdot \mathbf{b}\quad (2.79)$$

şeklinde yazılır. Şimdi de  $B$  tipi regle yüzeyin  $II$  ikinci esas form katsayılarını hesaplayalım. (2.35) denklemleri yardımcıyla

$$L_{11} = \tau\sqrt{1+v^2}, \quad L_{22} = 0\quad (2.80)$$

ve

$$L_{12} = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} \quad (2.81)$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir. Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \frac{L_{22}L_{11} - L_{12}^2}{w^2} \\ &= -\frac{1}{(1+v^2)^2} \end{aligned}$$

bulunur. (2.27) denklemleri yardımıyla

$$g^{11} = \frac{1}{1+v^2}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = 0 \quad (2.82)$$

olduğundan, Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} 2H &= g^{11}L_{11} + 2g^{12}L_{12} + g^{22}L_{22} \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{1+v^2}} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

### 2.3.6 Galilean uzayda $C$ tipi regle yüzeyler

3-boyutlu Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeyler izotropik doğrultmanlı koniksel yüzeylerdir. Bu kısımda,  $C$  tipi regle yüzeylerin Frenet formülleri, ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır.

**Tanım 2.3.37:**  $C$  tipi regle yüzeyler

$$\begin{aligned} \varphi(s, v) &= c(s) + v.a(s) \\ &= (s, y(s), 0) + v(0, a_2(s), a_3(s)) \end{aligned} \quad (2.83)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada  $a(s) = (0, a_2(s), a_3(s))$  izotropik birim vektör alanı (doğrultman),  $c(s) = (s, y(s), 0)$  ise dayanak eğrisidir.  $s, c(s)$  dayanak eğrisinin yay parametresidir (Röschel, 1984).

**Tanım 2.3.38:** Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeylerin ortonormal çatısı

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= (1, y'(s), 0) \\ \mathbf{n} &= (0, a_2(s), a_3(s)) \\ \mathbf{b} &= (0, -a_3(s), a_2(s)) \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $z = 0$  düzlemi ile  $\mathbf{n}$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$a_2 = \cos \psi, \quad a_3 = \sin \psi \quad (2.85)$$

olur. O halde

$$\mathbf{t}' = y''(\mathbf{n} \cdot \cos \psi - \mathbf{b} \cdot \sin \psi) \quad (2.86)$$

elde edilir. Şimdi de  $\mathbf{n}'$  izotropik vektörünü hesaplayalım.  $x, y, z \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\mathbf{n}' = x \cdot \mathbf{t} + y \cdot \mathbf{n} + z \cdot \mathbf{b} \quad (2.87)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$$

ve

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = -a_2' a_3 + a_2 a_3' = z \quad (2.88)$$

olur.  $a(s)$  birim vektör alanı olduğundan

$$a_2^2 + a_3^2 = 1$$

dir. Her iki tarafın türevini alırsak

$$a_2' a_2 + a_3 a_3' = 0$$

olduğundan,

$$a_3' = -\frac{a_2 a_2'}{a_3} \quad (2.89)$$

elde edilir. O halde (2.89) denklemini (2.88) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} z &= -a'_2 a_3 - a_2 \frac{a_2 a'_2}{a_3} \\ &= -\frac{a'_2 (a_3^2 + a_2^2)}{a_3} \\ &= -\frac{a'_2}{a_3} = \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bulduğumuz  $x, y, z$  değerlerini (2.87) denkleminde yerlerine koyarsak

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{\delta} \cdot \mathbf{b}$$

olur. Benzer şekilde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\mathbf{b}' = a \cdot \mathbf{t} + b \cdot \mathbf{n} + c \cdot \mathbf{b} \quad (2.90)$$

olduğundan

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} &= b \\ &= a'_2 a_3 - a_2 a'_3 \\ &= -\frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz  $a, b, c$  değerlerini (2.90) denkleminde yerlerine yazarsak

$$\mathbf{b}' = -\frac{1}{\delta} \cdot \mathbf{n} \quad (2.91)$$

olur. Böylece Frenet formülleri

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos \psi & -\kappa \sin \psi \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} \\ 0 & -\frac{1}{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

elde edilir. Burada  $\kappa = y''$  dayanak eğrisinin eğriliği,  $\delta = -\frac{a_3}{a_2'}$  yüzeyin dralidir (Röschel, 1984).

**Tanım 2.3.39:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $C$  tipi bir  $\phi(s, v)$  regle yüzeyin boğaz çizgisinin yay parametresi  $s$ , standart parametresi  $u$  olmak üzere

$$u = \int |a'(s)| ds$$

biçiminde elde edilir.

**Sonuç 2.3.40:** 3-boyutlu Galilean uzayda (2.83) ve (2.84) denklemleri yardımıyla  $C$  tipi regle yüzeyin dayanak eğrisinin türevi

$$\begin{aligned} c'(u) &= (1, y', 0) \\ &= \mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.93)$$

dir (Röschel, 1984).

**Teorem 2.3.41:** Galilean uzayda  $C$  tipi bir regle yüzeyin, sırasıyla,  $K$  Gauss ve  $H$  ortalama eğriliği

$$K = -\frac{1}{\delta^2}$$

ve

$$2H = 0 \quad (2.94)$$

dir (Röschel, 1984).

**İspat:**  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyi için

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$$

olmak üzere Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeyin kısmi türevleri

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \mathbf{t} + v \frac{1}{\delta} \mathbf{b} \\ \varphi_2 &= \mathbf{n} \\ \varphi_{11} &= (\cos \psi - v \left(\frac{1}{\delta}\right)^2) \mathbf{n} - \sin \psi \mathbf{b} \\ \varphi_{12} &= \frac{1}{\delta} \mathbf{b} \\ \varphi_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

dir. Burada (2.84) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= c' + v\mathbf{n}' \\ &= \mathbf{t} + v\frac{1}{\delta}\mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.96)$$

olur. (2.92) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \mathbf{t}' + v\left(\frac{1}{\delta}\right)\mathbf{b}' \\ &= (\mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{b} \sin \psi) - v\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\mathbf{n} \\ &= (\cos \psi - v\left(\frac{1}{\delta}\right)^2)\mathbf{n} - \sin \psi\mathbf{b}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlikler benzer şekilde hesaplanır.  $C$  tipi regle yüzeyin birim normal vektörü

$$\begin{aligned}\varphi_1 \wedge \varphi_2 &= \left(\mathbf{t} + v\frac{1}{\delta}\mathbf{b}\right) \wedge \mathbf{n} \\ &= \mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.97)$$

ve

$$w = |\varphi_1 \wedge \varphi_2| = 1 \quad (2.98)$$

yardımla

$$N = \mathbf{b} \quad (2.99)$$

bulunur. Şimdi de  $C$  tipi regle yüzeyin  $II$  ikinci esas form katsayılarını hesaplayalım. (2.35) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}L_{11} &= \left(\frac{\varphi_{11}x_1 - x_{11}\varphi_1}{x_1}\right)N \\ &= \left[(\cos \psi - v\left(\frac{1}{\delta}\right)^2)\mathbf{n} - \sin \psi\mathbf{b}\right] \cdot \mathbf{b} \\ &= -\sin \psi,\end{aligned}\quad (2.100)$$

$$\begin{aligned}L_{22} &= \left(\frac{\varphi_{22}x_1 - x_{22}\varphi_1}{x_1}\right)N \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.101)$$

ve

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \left( \frac{\varphi_{12}x_1 - x_{12}\varphi_1}{x_1} \right) N \\
&= \left( \frac{1}{\delta} \mathbf{b} \right) \mathbf{b} \\
&= \frac{1}{\delta}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

dir. Bu durumda Galilean uzayda  $C$  tipi bir regle yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K &= \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{1} \\
&= -\left( \frac{1}{\delta} \right)^2
\end{aligned}$$

olur. (2.27) denklemi yardımıyla

$$g^{11} = 0, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = 1 \tag{2.103}$$

olduğundan dolayı Galilean uzayda  $C$  tipi bir regle yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği

$$2H = g^{11}L_{11} + 2g^{12}L_{12} + g^{22}L_{22} = 0 \tag{2.104}$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 2.3.42:** (2.104) eşitliğinden dolayı 3-boyutlu Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeyler minimal yüzeylerdir.

Şimdi de Galilean uzayda var olan üç tip regle yüzeyin her birinin Weingarten yüzeyi olması için gereken şartları hesaplayacağız.

### 2.3.7 Galilean uzayda A tipi regle Weingarten yüzeyleri

Bu kısımda, (2.41), (2.44) ve (2.47) eşitlikleri göz önüne alınırsa  $\tau, d$  ve  $\sigma$  ifadeleri  $u$  parametresinin birer fonksiyonları olarak kullanılmıştır.

**Teorem 2.3.43:** Galilean uzayda  $A$  tipi bir regle yüzeyin, regle Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart regle yüzeyin  $\tau, \sigma, d$  (torsiyon, boğaz, dral) değerlerinin sabit olmasıdır (Sipus, 2008).

**İspat:**  $t$  parametresini (2.48) yardımıyla

$$t = \frac{(v+q)^2 + d^2}{\pm d} = (-K)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.105)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$\pm td - d^2 = (v+q)^2$$

bulunur. Buna göre  $A$  tipi bir regle yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği

$$2H(u, t) = -t^{-\frac{3}{2}} \left[ (\pm d)^{-\frac{3}{2}} d(x' - q') + t\tau(\pm d)^{-\frac{1}{2}} + d'(\pm d)^{-1} \sqrt{(t \pm d)} \right] \quad (2.106)$$

olur.  $2H(u, t)$  fonksiyonunun sadece  $t$  parametresine bağlı olması gerekir, yani  $A$  tipi bir regle yüzeyin, regle Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart  $u$  parametresine bağlı olan  $\tau, \sigma, d$  değerlerinin sabit olmasıdır (Sipus, 2008).

**Teorem 2.3.44:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $A$  tipi bir regle Weingarten yüzeyinin,  $H$  ve  $K$  eğrilikleri arasındaki fonksiyonel bağıntı

$$A = \tau(\pm d)^{-\frac{1}{2}}, \quad C = \frac{d'}{\pm d} \quad (2.107)$$

$$B = (\pm d)^{-\frac{3}{2}} d(x' - q'), \quad D = \pm d,$$

olmak üzere

$$2H + B(-K)^{\frac{3}{4}} + A(-K)^{\frac{1}{4}} = 0$$

dir (Sipus, 2008).

**İspat:** (2.107) kullanılarak (2.106) denklemini

$$2H(t, u) = -t^{-\frac{3}{2}} \left[ B + tA + C\bar{\epsilon}\sqrt{t - D} \right]$$

şeklinde yazılır, burada  $\bar{\epsilon} = \text{sgn}(q+v)$  dır. Bu fonksiyonun sadece  $t$  ye bağlı olması için  $A, B$  değerleri sabit ve  $C = 0$  olmalıdır. Bu durumda (2.105) denklemi yardımıyla

$$2H = -(-K)^{\frac{3}{4}} (B + (-K)^{-\frac{1}{2}} A) \quad (2.108)$$



bulunur. Böylece

$$2H + B(-K)^{\frac{3}{4}} + A(-K)^{\frac{1}{4}} = 0 \quad (2.109)$$

elde edilir.

### 2.3.8 Galilean uzayda B tipi regle Weingarten yüzeyleri

Bu kısımda,  $B$  tipi bir regle yüzeyin Weingarten yüzeyi olması incelenmiştir.

**Teorem 2.3.45:** 3-boyutlu Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin, regle Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart regle yüzeyin  $\tau$  (torsiyon) değerinin sabit olmasıdır.

**İspat:**  $t$  parametresini (2.68) denklemi yardımıyla

$$t = (1+v^2) = (-K)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.110)$$

biçiminde tanımlayalım. O halde

$$2H = \frac{\tau}{\sqrt{1+v^2}} = \tau(t)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.111)$$

elde edilir. Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin Weingarten yüzeyi olması için, (2.111) eşitliği ile verilen  $2H(u, t)$  fonksiyonunun sadece  $t$  ye bağlı olması gerekir, yani  $B$  tipi bir regle yüzeyin, regle Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart  $u$  parametresine bağlı olan  $\tau$  değerinin sabit olmasıdır.

**Teorem 2.3.46:** Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle Weingarten yüzeyinin,  $H$  ve  $K$  eğrilikleri arasındaki fonksiyonel bağıntı

$$A_2 = \tau$$

olmak üzere

$$2H - A_2(-K)^{\frac{1}{4}} = 0$$

dir.

### 2.3.9 Galilean uzayda $C$ tipi regle Weingarten yüzeyleri

Bu kısımda,  $C$  tipi bir regle yüzeyin Weingarten yüzeyi olma durumu belirtilmiştir.

**Teorem 2.3.47:** Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeyler Weingarten yüzeyidir.

**İspat:** Sonuç 2.3.42 den dolayı  $C$  tipi regle yüzeyler minimal yüzey olduğundan Weingarten yüzeyidir (Sipus, 2008).

## BÖLÜM 3

# GALİLEAN UZAYDA PARALEL YÜZEYLER

Bu bölümde 3–boyutlu Galilean uzayda bir yüzeyin paralel yüzeyi tanımlanmıştır. Ayrıca sonraki bölümlerde kullanılacak olan paralel yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri elde edilmiştir.

### 3.1 Galilean Uzayda Paralel Yüzeylerin Karakterizasyonları

**Tanım 3.1.1:**  $\mathbb{G}^3$  3–boyutlu Galilean uzayda bir  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin birim normal izotropik vektörü

$$N = \sum_{i=2}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (0, a_2, a_3)$$

ve  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\forall p \in \varphi(v^1, v^2)$  olmak üzere

$$f(p) = [p_1, p_2 + \lambda a_2(p), p_3 + \lambda a_3(p)] \quad (3.1)$$

şeklinde

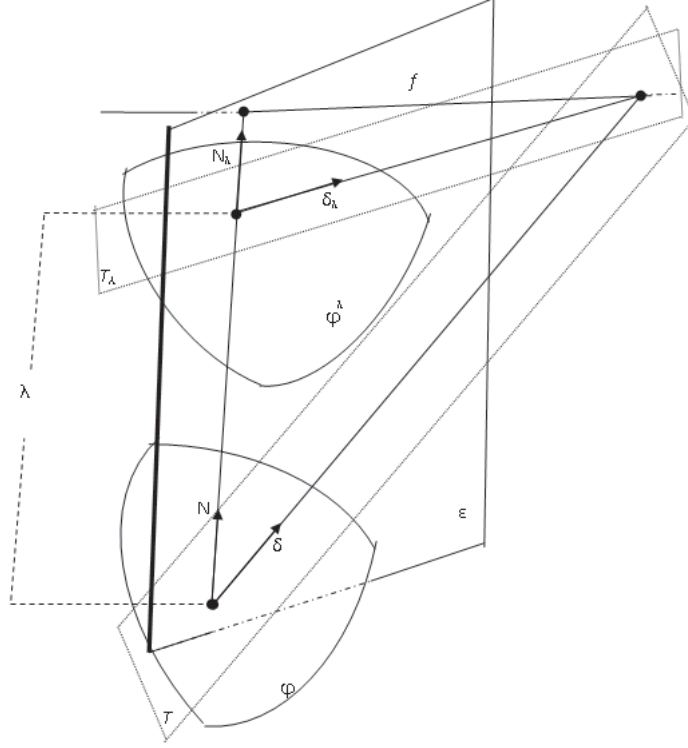
$$f : \varphi(v^1, v^2) \longrightarrow \varphi^\lambda(v^1, v^2)$$

fonksiyonu varsa  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  yüzeyine  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin paralel yüzeyi denir.

**Tanım 3.1.2:**  $\mathbb{G}^3$  3–boyutlu Galilean uzayda bir  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  paralel yüzeyi

$$\varphi^\lambda(v^1, v^2) = \varphi(v^1, v^2) + \lambda N \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $N$  vektörü  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin birim normal vektörü,  $\lambda$  ise reel katsayıdır.



Şekil 3.1 Galilean uzayda paralel yüzeyler

$T$  ve  $T_\lambda$ , sırasıyla,  $\varphi$  ve  $\varphi^\lambda$  paralel yüzeylerinin izotropik teğet düzlemleridir,  $\varepsilon$  düzlemi ise  $N$  birim izotropik vektörünün ötelendiği izotropik düzlemdir (Şekil 3.1).

**Sonuç 3.1.3:** Galilean uzayda  $A = (x, y, z)$  ve  $P = (p_1, p_2, p_3)$  noktaları,  $N$  ve  $\delta$  izotropik vektörlerinin gerdiği düzlemde iki nokta olsun. O halde bu düzlemin parametrik denklemi

$$\det [p - A, N, \delta] = \frac{1}{w^2} \begin{vmatrix} p_1 - x & p_2 - y & p_3 - z \\ 0 & z_1 x_2 - z_2 x_1 & y_2 x_1 - y_1 x_2 \\ 0 & y_1 x_2 - y_2 x_1 & z_1 x_2 - z_2 x_1 \end{vmatrix} = 0$$

buna göre,  $(p_1 - x) = 0$  bulunur. Tanım 2.3.11 gereğince

$$x = p_1$$

bir Öklid düzlemidir.

**Sonuç 3.1.4:**  $\mathbb{G}^3$  3–boyutlu Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  paralel yüzeyi olmak üzere (2.23) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\varphi^\lambda(v^1, v^2) &= \varphi(v^1, v^2) + \lambda N \\ &= (x, y, z) + \lambda \frac{(0, z_1x_2 - z_2x_1, y_2x_1 - y_1x_2)}{w}\end{aligned}\quad (3.3)$$

olur.

**Teorem 3.1.5:**  $\mathbb{G}^3$  3–boyutlu Galilean uzayda  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  paralel yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = \begin{cases} I, & dv^1: dv^2 \text{ izotropik değil} \\ I + (2\lambda N_i \varphi_j + \lambda^2 N_i N_j) dv^i dv^j, & dv^1: dv^2 \text{ izotropik} \end{cases}\quad (3.4)$$

değerlerini alır. Burada  $I$ ,  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin birinci esas formudur.

**İspat:** İlk olarak (2.29) denkleminde  $\epsilon = 0$  olduğunu düşünelim. O halde

$$I_\lambda = (g_i^\lambda dv^i)^2$$

olur. Ayrıca (3.3) ve (2.22) denklemleri yardımıyla

$$x_1^\lambda = x_1 \quad \text{ve} \quad x_2^\lambda = x_2 \quad (3.5)$$

bulunur. Bu durumda (2.26) denklemleri kullanılarak

$$g_i = g_i^\lambda \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece paralel yüzeyin  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = I = (g_i dv^i)^2$$

dir. Şimdi de  $\epsilon = 1$  olduğunu düşünelim. Bu durumda

$$I_\lambda = h_{ij}^\lambda dv^i dv^j \quad (3.7)$$

şeklinde yazılır. Buradan da (2.28) ve (3.3) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{ij}^\lambda &= \varphi_i^\lambda \varphi_j^\lambda \\ &= (\varphi_i + \lambda N_i)(\varphi_j + \lambda N_j) \\ &= h_{ij} + 2\lambda \varphi_i N_j + \lambda^2 N_i N_j \end{aligned}$$

olur. Son olarak (2.29) denklemi yardımıyla  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  paralel yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = I + (2\lambda N_i \varphi_j + \lambda^2 N_i N_j) dv^i dv^j$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1.6:** (3.4) ifadesinden de açıkça görüldüğü gibi  $dv^1 : dv^2$  izotropik değilse, yani  $\epsilon = 0$  durumunda  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  paralel yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formu ile  $\varphi(v^1, v^2)$  paralel yüzeyinin  $I$  birinci esas formu eşittir. O halde  $dv^1 : dv^2$  izotropik değilse yüzeyin birinci esas formu paralellik fonksiyonu altında invaryant kalır.

## 3.2 Galilean Uzayda Paralel Yüzeylerin Ortalama ve Gauss Eğrilikleri

Bu kısımda, Galilean uzayda paralel yüzey ile esas yüzeyin eğrilikleri arasında bağıntılar elde edilmiştir.

**Teorem 3.2.1:** Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin paralel yüzeyi  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  ve  $w = |\varphi_1 \wedge \varphi_2|$  olmak üzere,  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = \frac{\det [L_{ij} + \lambda N_{ij} N]}{w^2} \quad (3.8)$$

ve

$$2H_\lambda = 2H + \lambda g^{ij} N_{ij} N \quad (3.9)$$

dir.

**İspat:** (3.3) denklemi yardımıyla  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  yüzeyinin kısmi türevleri

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^\lambda &= \varphi_1 + \lambda N_1 \\ \varphi_{11}^\lambda &= \varphi_{11} + \lambda N_{11} \\ \varphi_{12}^\lambda &= \varphi_{12} + \lambda N_{12} \\ \varphi_{22}^\lambda &= \varphi_{22} + \lambda N_{22} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

bulunur. Yani

$$\varphi_{ij}^\lambda = \varphi_{ij} + \lambda N_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (3.5) ve (3.11) eşitlikleri (2.35) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L_{ij}^\lambda &= \frac{(\varphi_{ij} + \lambda N_{ij})x_1 - x_{ij}(\varphi_1 + \lambda N_1)}{x_1} N \\ &= \frac{\varphi_{ij}x_1 - x_{ij}\varphi_1 + \lambda(N_{ij}x_1 - \lambda x_{ij}N_1)}{x_1} N \\ &= \left( \frac{\varphi_{ij}x_1 - x_{ij}\varphi_1}{x_1} \right) N + \frac{\lambda x_1 N_{ij}}{x_1} N \\ &= L_{ij} + \lambda N_{ij} N \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. Böylece (2.37), (2.38) ve (3.12) eşitlikleri yardımıyla  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} K_\lambda &= \frac{\det L_{ij}^\lambda}{w^2} \\ &= \frac{\det [L_{ij} + \lambda N_{ij} N]}{w^2} \end{aligned}$$

ve  $H_\lambda$  ortalama eğriliği (3.6) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 2H_\lambda &= g^{ij} L_{ij}^\lambda \\ &= g^{ij} (L_{ij} + \lambda N_{ij} N) \end{aligned}$$

veya

$$2H_\lambda = 2H + \lambda g^{ij} N_{ij} N$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.2:** Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin paralel yüzeyi  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  olmak üzere,  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = \frac{\det[L_{ij} - \lambda N_i N_j]}{w^2}$$

ve

$$2H_\lambda = 2H - \lambda g^{ij} N_i N_j$$

dir.

**İspat:**  $N$  izotropik birim normal vektörü

$$\left. \begin{aligned} N_{11} N &= -N_1 N_1 \\ N_{22} N &= -N_2 N_2 \\ N_{12} N &= -N_1 N_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

eşitliklerini sağladığından

$$N_{ij} N = -N_i N_j, \quad i, j = 1, 2$$

olur. Buradan da

$$L_{ij}^\lambda = L_{ij} - \lambda N_i N_j \quad (3.14)$$

elde edilir. Bulduğumuz (3.14) eşitliği, (2.37) ve (2.38) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$K_\lambda = \frac{\det[L_{ij} - \lambda N_i N_j]}{w^2} \quad (3.15)$$



ve

$$2H_\lambda = 2H - \lambda g^{ij} N_i N_j \quad (3.16)$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.3:** Galilean uzayda  $\varphi(v^1, v^2)$  yüzeyinin paralel yüzeyi  $\varphi^\lambda(v^1, v^2)$  olmak üzere,  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = K - \lambda \frac{L_{22}N_1^2 + L_{11}N_2^2 - 2L_{12}N_1N_2}{w^2} \quad (3.17)$$

ve

$$2H_\lambda = 2H - \lambda(g^i N_i)^2 \quad (3.18)$$

dir.

**İspat:** (3.15) denklemi yardımıyla

$$K_\lambda = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda N_1 N_1 & L_{12} - \lambda N_1 N_2 \\ L_{12} - \lambda N_1 N_2 & L_{22} - \lambda N_2 N_2 \end{vmatrix}}{w^2}$$

olur. O halde

$$K_\lambda = K + \lambda \frac{-L_{22}N_1^2 - L_{11}N_2^2 + \lambda N_1^2 N_2^2 + 2L_{12}N_1 N_2 - \lambda(N_1 N_2)^2}{w^2} \quad (3.19)$$

elde edilir.  $N$  birim normal vektörü

$$N_1^2 N_2^2 = (N_1 N_2)^2$$

eşitliğini sağlar. Böylece bu eşitlik (3.19) denkleminde kullanılırsa

$$K_\lambda = K + \lambda \frac{-L_{22}N_1^2 - L_{11}N_2^2 + 2L_{12}N_1 N_2}{w^2}$$

elde edilir. (2.38) ve (3.14) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 2H_\lambda &= g^{11}L_{11}^\lambda + 2g^{12}L_{12}^\lambda + g^{22}L_{22}^\lambda \\ &= 2H - \lambda(g^{11}N_1^2 + 2g^{12}N_1N_2 + g^{22}N_2^2) \\ &= 2H - \lambda(g^i N_i)^2 \end{aligned}$$

olur.

## BÖLÜM 4

# GALİLEAN UZAYDA PARALEL REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde, öncelikli olarak Galilean uzaydaki üç tip regle yüzeyin herbirinin paralel yüzeyininin  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Sonrasında ise Galilean uzayda paralel regle yüzeylerle ilgili teoremler verilmiştir.

### 4.1 Galilean Uzayda A Tipi Paralel Regle Yüzeyler

Bu kısımda, Galilean uzayda  $A$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, birinci esas formu ve ikinci esas form katsayıları bulunmuştur.

**Teorem 4.1.1:** Galilean uzayda  $A$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = K - \lambda \frac{d^3(x' - q') + d'd^2(q + v) + d^2(v + q)^2\tau + d^4\tau}{((v + q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (4.1)$$

ve

$$2H_\lambda = 2H - \lambda \frac{(d(x' - q') + d'(q + v) + \tau(v + q)^2 + \tau d^2)^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} \quad (4.2)$$

dir.

**İspat:** (2.56) eşitliğinin  $u$  ya göre türevini alınırsa

$$\begin{aligned} N_1 &= -d\phi_1 \sin \phi \mathbf{n} + d\phi_1 \cos \phi \mathbf{b} + \cos \phi \tau \mathbf{b} - \sin \phi \tau \mathbf{n} \\ &= -(d\phi_1 + \tau) \sin \phi \mathbf{n} + (d\phi_1 + \tau) \cos \phi \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur ve benzer şekilde (2.56) eşitliğinin  $v$  ye göre türevi

$$N_2 = -d\phi_2 \sin \phi \mathbf{n} + d\phi_2 \cos \phi \mathbf{b} \quad (4.4)$$

bulunur. (4.3) ve (4.4) denklemleri kullanılarak

$$N_1^2 = (d\phi_1 + \tau)^2 \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} N_2^2 &= d\phi_2^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= d\phi_2^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Benzer şekilde

$$(N_1 N_2) = d\phi_2(d\phi_1 + \tau)$$

ve

$$(N_1 N_2)^2 = d\phi_2^2(d\phi_1 + \tau)^2 \quad (4.7)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.55) denkleminin  $u$  ya göre türevini alırsak

$$d\phi_1(1 + \tan^2 \phi) = \frac{-q'd + d'(q + v)}{d^2}$$

veya

$$d\phi_1 = \frac{-q'd + d'(q + v)}{(v + q)^2 + d^2} \quad (4.8)$$

elde edilir. (2.55) denkleminde  $v$  ye göre türev alınırsa

$$d\phi_2(1 + \tan^2 \phi) = \frac{-1}{d}$$

veya

$$d\phi_2 = \frac{-d}{(v + q)^2 + d^2} \quad (4.9)$$

bulunur. O halde (3.17) denklemi kullanılarak  $A$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K_\lambda &= K + \lambda \frac{-L_{11}d\phi_2^2 + 2L_{12}d\phi_2(d\phi_1 + \tau)}{w^2} \\
&= K + \lambda \frac{(-d^3x' - d^3q' + d^4\tau) + (v+q)^2\tau d^2 + d'(v+q)d^2}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} \\
&\quad - \frac{2d^2(-q'd + d'(q+v) + (v+q)^2\tau + d^2\tau)}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned}$$

veya

$$K_\lambda = K - \lambda \frac{d^3x' - q'd^3 + d'd^2(q+v) + d^2(v+q)^2\tau + d^4\tau}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (4.10)$$

biçiminde elde edilir. Benzer yolla (3.18) denklemi yardımıyla bu yüzeyin ortalama eğriliği de

$$\begin{aligned}
2H_\lambda &= 2H - \lambda(g^{11}N_1^2 + 2g^{12}N_1N_2 + g^{22}N_2^2) \\
&= 2H - \lambda \frac{N_1^2 - 2x'N_1N_2 + (x')^2N_2^2}{w^2} \\
&= 2H - \lambda \frac{[(-d\phi_1 - \tau + x'd\phi_2) \sin \phi \mathbf{n} + (d\phi_1 + \tau - x'd\phi_2) \cos \phi \mathbf{b}]^2}{w^2} \\
&= 2H - \lambda \frac{(d\phi_1 + \tau - x'd\phi_2)^2}{w^2} \\
&= 2H - \lambda \frac{(-q'd + d'(q+v) + \tau(v+q)^2 + \tau d^2 + x'd)^2}{((v+q)^2 + d^2)^3} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

olur.

**Teorem 4.1.2:** Galilean uzayda  $A$  tipi  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $I$  birinci esas formu,  $x' = 1$  olmak üzere

$$I = ((q+v)^2 + d^2)du^2 \quad (4.12)$$

elde edilir.  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel regle yüzeyi için  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = \left[ ((q+v)^2 + d^2) + 2\lambda \left( \frac{(v+q)^2 \tau + d'(v+q) - d(q' - d\tau + 3)}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} \right) \right. \\ \left. + \lambda^2 \left( \frac{d'(q+v) - (q'-1)d}{(v+q)^2 + d^2} + \tau \right)^2 \right] du^2 \quad (4.13)$$

dır.

**İspat:** Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzeyler için (2.29) denkleminde  $\epsilon = 1$  dir. (2.50) ve (2.28) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{11} &= 1 + (q+v)^2 + d^2 \\ h_{12} &= 1 \\ h_{22} &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.29) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} I &= h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 \\ &= (1 + (q+v)^2 + d^2)du^2 + 2dudv + dv^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda  $A$  tipi regle yüzeyler için  $du = -dv$  yerine yazılırsa

$$I = ((q+v)^2 + d^2)du^2$$

olur. Şimdi de (3.4) yardımıyla  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = ((q+v)^2 + d^2 - 2\lambda(L_{11} + 2L_{12}) + \lambda^2(d\phi_1 + \tau - d\phi_2)^2)du^2 \quad (4.14)$$

bulunur. (4.8), (4.9), (2.57) ve (2.58) denklemleri (4.14) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_\lambda &= ((q+v)^2 + d^2)du^2 + 2\lambda \left( \frac{(v+q)^2 \tau + d'(v+q) - d(1 + q' - d\tau) - 2d}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} \right) du^2 \\ &\quad + \lambda^2 \left( \frac{-q'd + d'(q+v) + d}{(v+q)^2 + d^2} + \tau \right)^2 du^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.3:** Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle yüzeyin  $II_\lambda$  ikinci esas form katsayıları

$$\left. \begin{aligned} L_{11}^\lambda &= \frac{d(1+q'-d\tau)-(v+q)^2\tau-d'(v+q)}{\sqrt{(v+q)^2+d^2}} - \lambda \left( \frac{d'(q+v)-q'd}{(v+q)^2+d^2} + \tau \right)^2 \\ L_{12}^\lambda &= \frac{d}{\sqrt{(v+q)^2+d^2}} + \lambda \left( \frac{dd'(q+v)-q'd^2}{((v+q)^2+d^2)^2} + \frac{d\tau}{(v+q)^2+d^2} \right) \\ L_{22}^\lambda &= -\lambda \left( \frac{d}{(v+q)^2+d^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

dır.

**İspat:** (3.14) denklemi kullanılırsa

$$L_{11}^\lambda = L_{11} - \lambda N_1^2$$

olur. (2.57), (4.8) ve (4.5) denklemleri yardımıyla

$$L_{11}^\lambda = \frac{d(1+q'-d\tau) - (v+q)^2\tau - d'(v+q)}{\sqrt{(v+q)^2+d^2}} - \lambda \left( \frac{-q'd + d'(q+v)}{(v+q)^2+d^2} + \tau \right)^2$$

bulunur. Benzer şekilde

$$L_{12}^\lambda = \frac{d}{\sqrt{(v+q)^2+d^2}} + \lambda \left( \frac{-q'd^2 + dd'(q+v)}{((v+q)^2+d^2)^2} + \frac{d\tau}{(v+q)^2+d^2} \right)$$

ve

$$L_{22}^\lambda = -\lambda \frac{d^2}{((v+q)^2+d^2)^2}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.4:** Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle yüzeyin  $d_\lambda$  drali esas yüzeyin  $d$  drali cinsinden

$$d_\lambda = d - \lambda \left( \frac{-q'd^2 + d'd(q+v)}{((v+q)^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\tau}{((v+q)^2+d^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.16)$$

dır.

**İspat:**  $\varphi(u, v)$  yüzeyin dayanak eğrisi  $c$  ve  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyin dayanak eğrisi  $\beta = f \circ c$  olmak üzere, (2.44) eşitliği yardımıyla

$$d_\lambda = -\det(\beta', a, a')$$

bulunur.  $\beta$  eğrisinin  $u$  ya göre türevi olan  $\beta_1 = c_1 + \lambda N_1$  yerine konursa

$$d_\lambda = -\langle c_1 + \lambda N_1, a \wedge a_1 \rangle$$

elde edilir. İç çarpımın lineerlik özeliği göz önüne alındığında,

$$d_\lambda = -\langle c_1, a \wedge a_1 \rangle - \lambda \langle N_1, a \wedge a_1 \rangle$$

olduğundan (2.44), (4.3) yardımıyla

$$d_\lambda = d - \lambda(d\phi_1 + \tau) \cos \phi \quad (4.17)$$

olur. (2.53) ve (4.8) eşitlikleri (4.17) denkleminde yerlerine konursa

$$d_\lambda = d - \lambda \left( \frac{-q'd^2 + d'd(q+v)}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\tau}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

bulunur.

## 4.2 Galilean Uzayda B Tipi Paralel Regle Yüzeyler

Bu kısımda, Galilean uzayda  $B$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, birinci esas formu ve ikinci esas form katsayıları bulunmuştur.

**Teorem 4.2.1:** Galilean uzayda  $B$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = -\frac{1}{(v^2+1)^2} + \lambda \frac{\tau}{(1+v^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (4.18)$$



ve

$$2H_\lambda = \frac{\tau}{\sqrt{1+v^2}} - \lambda \frac{\tau^2}{1+v^2} \quad (4.19)$$

dir.

**İspat:** (2.79) eşitliğinin  $u$  ya göre türevini alırsak

$$N_1 = -\tau \sin \phi \mathbf{n} + \tau \cos \phi \mathbf{b} \quad (4.20)$$

olur. Benzer şekilde  $v$  ye göre türevi

$$N_2 = -d\phi_2 \sin \phi \mathbf{n} + d\phi_2 \cos \phi \mathbf{b} \quad (4.21)$$

elde edilir. O halde (4.20) ve (4.21) denklemleri kullanılırsa

$$N_1^2 = \tau^2 \quad (4.22)$$

ve

$$N_2^2 = d\phi_2^2$$

olur. Benzer şekilde

$$(N_1 N_2) = d\phi_2 \tau$$

ve

$$(N_1 N_2)^2 = (d\phi_2 \tau)^2$$

eşitlikleri elde edilir. (2.78) denkleminde  $v$  ye göre türev alınırsa

$$d\phi_2(1 + \tan^2 \phi) = -1$$

veya

$$d\phi_2 = -\frac{1}{1+v^2} \quad (4.23)$$

elde edilir. O halde (3.17) denklemi yardımıyla  $B$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K_\lambda &= K + \lambda \frac{-L_{11}N_2^2 + 2L_{12}N_1N_2}{w^2} \\ &= K + \lambda \frac{-\tau - \tau v^2 + 2\tau(1+v^2)}{(1+v^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= K + \lambda \frac{\tau}{(1+v^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

dir. (3.18) denklemi kullanılarak, bu yüzeyin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} 2H_\lambda &= 2H - \lambda(g^{11}N_1^2) \\ &= 2H - \lambda \frac{\tau^2}{(1+v^2)} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.2:** Galilean uzayda  $B$  tipi  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $I$  birinci esas formu

$$I = \begin{cases} dv^2, & dv \neq 0 \\ (1+v^2)du^2, & dv = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

değerlerini alır.  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel regle yüzeyin  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = \begin{cases} dv^2, & dv \neq 0 \\ (1+v^2 - 2\lambda\tau\sqrt{1+v^2} + \lambda^2\tau^2)du^2, & dv = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

dır.

**İspat:** Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyler için (2.70) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{11} &= 1 + v^2 \\ h_{12} &= 0 \\ h_{22} &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.29) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} I &= (g_2)^2 dv^2 + \epsilon h_{11} du^2 \\ &= dv^2 + \epsilon(1 + v^2) du^2 \end{aligned}$$

olur. (3.4) yardımıyla  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formu

$$I_\lambda = dv^2 + \epsilon [(1 + v^2) du^2 - 2\lambda L_{11} du^2 + \lambda^2 N_1^2 du^2] \quad (4.26)$$

bulunur. Buradan da (2.80) ve (4.22) denklemleri (4.26) denkleminde yerlerine konursa

$$I_\lambda = dv^2 + \epsilon(1 + v^2 - 2\lambda\tau\sqrt{1+v^2} + \lambda^2\tau^2) du^2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.3:** Galilean uzayda  $B$  tipi paralel regle yüzeyin  $II_\lambda$  ikinci esas form katsayıları

$$\left. \begin{aligned} L_{11}^\lambda &= \tau\sqrt{1+v^2} - \lambda\tau^2 \\ L_{12}^\lambda &= -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{\lambda\tau}{1+v^2} \\ L_{22}^\lambda &= -\frac{\lambda}{(1+v^2)^2} \end{aligned} \right\}$$

dır.

**İspat:** (3.14) denklemini kullanıldığında

$$L_{11}^\lambda = L_{11} - \lambda N_1^2$$

olduğundan, (2.80) ve (4.22) denklemleri yardımıyla

$$L_{11}^\lambda = \tau\sqrt{1+v^2} - \lambda\tau^2$$

bulunur. Benzer şekilde

$$L_{12}^\lambda = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{\lambda\tau}{1+v^2}$$

ve

$$L_{22}^\lambda = -\lambda \frac{1}{(1+v^2)^2}$$

kolaylıkla elde edilir.

**Teorem 4.2.4:** Galilean uzayda  $B$  tipi paralel regle yüzeyin  $d_\lambda$  drali

$$d_\lambda = d - \lambda \frac{\tau}{\sqrt{v^2+1}} \quad (4.27)$$

eşitliği ile verilir.

**İspat:**  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin dayanak eğrisi  $c$  ve  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyin dayanak eğrisi  $\beta = f \circ c$  olmak üzere, (2.66) eşitliği yardımıyla

$$d_\lambda = \det(\beta', a, a')$$

bulunur.  $\beta$  eğrisinin  $u$  ya göre türevi olan  $\beta_1 = c_1 + \lambda N_1$  yerine konursa

$$d_\lambda = \langle c_1 + \lambda N_1, a \wedge a_1 \rangle$$

elde edilir. İç çarpımın lineerlik özeliği göz önüne alındığında,

$$d_\lambda = \langle c_1, a \wedge a_1 \rangle + \lambda \langle N_1, a \wedge a_1 \rangle$$

olduğundan (2.66), (4.20) eşitlikleri yardımıyla

$$d_\lambda = d - \lambda \tau \cos \phi \quad (4.28)$$

olur. (2.53) ve (2.76) denklemleri (4.28) denkleminde yerlerine konursa

$$d_\lambda = d - \lambda \frac{\tau}{\sqrt{v^2+1}}$$

bulunur.

### 4.3 Galilean Uzayda C Tipi Paralel Regle Yüzeyler

Bu kısımda, Galilean uzayda  $C$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, birinci esas formu ve ikinci esas form katsayıları bulunmuştur.

**Teorem 4.3.1:** Galilean uzayda  $C$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss ve  $H_\lambda$  ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = K = -\frac{1}{\delta^2} \quad (4.29)$$

ve

$$2H_\lambda = 0 \quad (4.30)$$

dir.

**İspat:** (2.99) denklemi göz önüne alınırsa

$$N = \mathbf{b}$$

olduğundan  $N$  izotropik birim normal vektörünün  $u$  ya göre türevinden

$$N_1 = -\frac{1}{\delta} \mathbf{n} \quad (4.31)$$

ve  $v$  ye göre türevinden de

$$N_2 = 0 \quad (4.32)$$

kolaylıkla elde edilir. O halde (4.31) ve (4.32) denklemleri kullanılarak

$$N_1^2 = \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \quad (4.33)$$

ve

$$(N_1 N_2) = 0 \quad (4.34)$$

olduğundan,  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyin  $K_\lambda$  Gauss eğriliği için

$$\begin{aligned} K_\lambda &= K - \lambda \frac{L_{22}N_1^2 + L_{11}N_2^2 - 2L_{12}N_1N_2}{w^2} \\ &= K \end{aligned} \quad (4.35)$$

olur. Benzer olarak (2.103) denklemleri yardımıyla  $H_\lambda$  ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H_\lambda &= H - \lambda(g^{11}N_1^2 + 2g^{12}N_1N_2 + g^{22}N_2^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.3.2:** (4.36) den dolayı Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeyin paraleli de bir minimal yüzeydir.

**Teorem 4.3.3:** Galilean uzayda  $C$  tipi  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyin  $I$  birinci esas formu

$$I = \begin{cases} du^2, & du \neq 0 \\ dv^2, & du = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

elde edilir.  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel regle yüzeyin  $I_\lambda$  birinci esas formu için de

$$I_\lambda = \begin{cases} du^2, & du \neq 0 \\ dv^2, & du = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

dır.

**İspat:** (2.29) ve (2.95) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} I &= du^2 + \epsilon(h_{22}dv^2) \\ &= du^2 + \epsilon dv^2 \end{aligned}$$

olur. Şimdi de (3.4) yardımıyla  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formunu

$$I_\lambda = du^2 + \epsilon(dv^2 - 2\lambda L_{22}dv^2 + \lambda^2 N_2^2 dv^2)$$

bulunur. Buradan da (2.101), (4.31) denklemleri yukarıdaki denklemde yerlerine konursa

$$I_\lambda = du^2 + \epsilon dv^2$$

elde edilir.

**Teorem 4.3.4:** Galilean uzayda  $C$  tipi paralel regle yüzeyin  $II_\lambda$  esas form

katsayıları

$$\left. \begin{aligned} L_{11}^\lambda &= -\sin \psi - \lambda \frac{1}{\delta^2} \\ L_{12}^\lambda &= \frac{1}{\delta} \\ L_{22}^\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

dır.

**İspat:** (3.14) denklemi kullanılarak

$$L_{11}^\lambda = L_{11} - \lambda N_1^2$$

olduğundan, (2.100) ve (4.31) denklemleri yardımıyla

$$L_{11}^\lambda = -\sin \psi - \lambda \frac{1}{\delta^2}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$L_{12}^\lambda = \frac{1}{\delta}$$

ve

$$L_{22}^\lambda = 0$$

oldukları elde edilir.

**Teorem 4.3.5:** Galilean uzayda  $C$  tipi paralel regle yüzeyin  $d_\lambda$  drali

$$d_\lambda = d \quad (4.40)$$

dır.

**İspat:** (2.44) eşitliği ve  $\beta = f \circ c$  olmak üzere

$$d_\lambda = -\det(\beta', a, a')$$

bulunur.  $\beta$  eğrisinin  $u$  ya göre türevi olan  $\beta_1 = c_1 + \lambda N_1$  yerine konursa

$$d_\lambda = -\langle c_1 + \lambda N_1, a \wedge a_1 \rangle$$

elde edilir. İç çarpımın lineerlik özeliği göz önüne alındığında,

$$d_\lambda = - \langle c_1, a \wedge a_1 \rangle - \lambda \langle N_1, a \wedge a_1 \rangle$$

olur. (2.44) ve (4.31) eşitlikleri yardımıyla da

$$d_\lambda = d$$

bulunur.



## BÖLÜM 5

### GALİLEAN UZAYDA PARALEL REGLE WEİNGARTEN YÜZEYLERİ

Bu bölümde Galilean uzayda regle Weingarten yüzeylerin paralel yüzeylerinin de Weingarten yüzey oldukları gösterilmiş, ayrıca Galilean uzayda  $A$  ve  $B$  tipi regle Weingarten yüzeyleri için bazı örnekler ve bunların paralel yüzeyleri için Weingarten olabilme özellikleri verilmiştir.

#### 5.1 Galilean Uzayda A Tipi Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri

Bu kısımda, Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle Weingarten yüzeyin birinci esas formu, ikinci esas form katsayıları ve drali hesaplanmıştır.

**Teorem 5.1.1:** Galilean uzayda  $A$  tipi regle Weingarten yüzeyinin paralel yüzeyi de bir Weingarten yüzeyidir.

**İspat:** İlk olarak Teorem 2.3.43 den dolayı  $d$  sabittir. Buradan da (4.1) eşitliği yardımıyla  $\varphi^\lambda(u, v)$  yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K_\lambda &= K - \lambda \frac{d^3(x' - q') + d^2(v + q)^2\tau + d^4\tau}{((v + q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= K - \lambda \frac{d^3(x' - q')}{((v + q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(d^2 + (v + q)^2)d^2\tau}{((v + q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= K - \lambda \frac{d^2d(x' - q')}{((v + q)^2 + d^2)^2((v + q)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d^2\tau((v + q)^2 + d^2)}{((v + q)^2 + d^2)^2((v + q)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

bulunur. O halde (2.105) eşitliği kullanılarak

$$K_\lambda = -(t)^{-2} - \lambda \left[ t^{-\frac{7}{2}}d(\pm d)^{-\frac{3}{2}}(x' - q') + t^{-\frac{5}{2}}\tau(\pm d)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (5.1)$$

elde edilir. Yani  $K_\lambda$  Gauss eğriliği de  $t$  parametresine bağlı bir fonksiyondur.

Ayrıca

$$A_1 = \lambda d(\pm d)^{-\frac{3}{2}}(x' - q'), \quad B_1 = \lambda \tau(\pm d)^{-\frac{1}{2}}$$

ve Galilean uzayda  $A$  tipi bir regle yüzeyin Gauss eğriliği negatif olduğundan, (5.1) denklemini kullanılarak

$$K_\lambda - K + (-K)^{\frac{7}{4}}A_1 + (-K)^{\frac{5}{4}}B_1 = 0 \quad (5.2)$$

olur.  $H_\lambda$  ortalama eğriliğini hesaplayalım; (4.2) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} 2H_\lambda &= 2H - \lambda \frac{(d(x' - q') + \tau((v + q)^2 + d^2))^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} \\ &= 2H - \lambda \left[ \frac{(x' - q')^2 d^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} + \frac{2\tau d(x' - q')((v + q)^2 + d^2)}{((v + q)^2 + d^2)^3} + \frac{\tau^2((v + q)^2 + d^2)^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} \right] \\ &= 2H - \lambda \left[ \frac{(x' - q')^2 d^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} + \frac{2\tau d(x' - q')}{((v + q)^2 + d^2)^2} + \frac{\tau^2}{(v + q)^2 + d^2} \right] \end{aligned}$$

olduğundan (2.105) denklemini kullanılarak

$$2H_\lambda = 2H - \lambda(t^{-3}(x' - q')^2(\pm d)^{-1} + 2\tau d^{-1}(x' - q')t^{-2} + (\pm d)^{-1}\tau^2 t^{-1}) \quad (5.3)$$

fonksiyonu elde edilir. Buradaki  $\tau, \sigma$  ve  $d$  değerleri Teorem 2.3.43 den dolayı sabit olduğundan, (5.3) eşitliği ile verilen  $2H_\lambda(t)$  fonksiyonu da sadece  $t$  ye bağlı bir fonksiyon olur. Sonuç olarak  $A$  tipi regle Weingarten yüzeyin paraleli olan  $\varphi^\lambda(u, v)$  yüzeyi de Weingarten yüzeyidir.

$$C_1 = \lambda(\pm d)^{-1}\tau^2, \quad D_1 = 2\tau d^{-1}(x' - q'), \quad E_1 = \lambda(x' - q')^2(\pm d)^{-1}$$

olmak üzere, (5.3) ve (2.107) denklemleri yardımıyla  $H_\lambda$  için

$$2H_\lambda = -(-K)^{\frac{3}{4}}(B + (-K)^{-\frac{1}{2}}A) - [C_1 t^{-1} + D_1 t^{-2} + t^{-3}E_1] \quad (5.4)$$

olur. O halde (2.105) denklemini (5.4) denkleminde yerine yazarsak

$$2H_\lambda + B(-K)^{\frac{3}{4}} + A(-K)^{\frac{1}{4}} + C_1(-K)^{\frac{1}{2}} + D_1(-K) + E_1(-K)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (5.5)$$

elde edilir. Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzeyler için (5.5) ve (5.2) denklemleri göz önüne alınırsa

$$K_\lambda - K + (-K)^{\frac{7}{4}}A_1 + (-K)^{\frac{5}{4}}B_1 = 0$$

ve

$$2H_\lambda + B(-K)^{\frac{3}{4}} + A(-K)^{\frac{1}{4}} + C_1(-K)^{\frac{1}{2}} + D_1(K) + E_1(-K)^{\frac{3}{2}} = 0$$

fonksiyonel bağıntıları vardır.

Bu durumda paralel yüzeyin (5.5) ve (5.2) denklemleri ile verilen  $K_\lambda$  ve  $H_\lambda$  eğrilikleri arasında  $A$  tipi regle Weingarten yüzeyin  $K$  Gauss eğriliğine bağlı fonksiyonel bağıntı vardır. Buda bize  $A$  tipi regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyinde Weingarten yüzeyi olduğunu ispatlar.

**Sonuç 5.1.2:** Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle Weingarten yüzeyinin  $I_\lambda$  birinci esas formu,  $d$  sabit olduğundan, (4.13) denklemi kullanılarak

$$I_\lambda = \left[ (q+v)^2 + d^2 + 2\lambda \left( \frac{(v+q)^2\tau - d(q-d\tau+3)}{\sqrt{(v+q)^2 + d^2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^2 \left( \tau - \frac{(q'-1)d}{(v+q)^2 + d^2} \right) \right] du^2$$

olarak bulunur.

**Sonuç 5.1.3:** Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle Weingarten yüzeyinin  $II_\lambda$  esas form katsayıları,  $d$  sabit olduğundan, (4.15) denklemi kullanılarak

$$\left. \begin{aligned} L_{11}^\lambda &= \frac{d(1+q'-d\tau)-(v+q)^2\tau}{\sqrt{(v+q)^2+d^2}} - \lambda \left( \tau - \frac{q'd}{(v+q)^2+d^2} \right)^2 \\ L_{12}^\lambda &= \frac{d}{\sqrt{(v+q)^2+d^2}} + \lambda \left( \frac{d\tau}{(v+q)^2+d^2} - \frac{q'd^2}{((v+q)^2+d^2)^2} \right) \\ L_{22}^\lambda &= -\lambda \left( \frac{d}{(v+q)^2+d^2} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

olarak bulunur.

**Sonuç 5.1.4:** Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle Weingarten yüzeylerinin  $d_\lambda$  drali için,  $d$  sabit olduğundan, (4.16) denklemi kullanılarak

$$d_\lambda = d - \lambda \left( \frac{d\tau}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{q'd^2}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

bulunur.

## 5.2 Galilean Uzayda B Tipi Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri

Bu kısımda, Galilean uzayda  $B$  tipi paralel regle Weingarten yüzeyin birinci esas formu, ikinci esas form katsayıları ve drali hesaplanmıştır.

**Teorem 5.2.1:** Galilean uzayda  $B$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle Weingarten yüzeyinin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyi de Weingarten yüzeyidir.

**İspat:**  $\varphi^\lambda(u, v)$  yüzeyinin  $K_\lambda$  Gauss eğriliği için

$$\begin{aligned} K_\lambda &= K + \lambda \frac{\tau}{(1+v^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -(t)^{-2} + \lambda\tau(t)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.3.45 den dolayı  $\tau$  sabittir. O halde  $K_\lambda$  Gauss eğriliği de  $t$  ye bağlı bir fonksiyondur.  $B_2 = \lambda\tau$  olmak üzere

$$K_\lambda = -(t)^{-2} + B_2(t)^{-\frac{5}{2}}$$

bulunur. Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin Gauss eğriliği negatif olduğundan ve (2.110) yardımıyla

$$K_\lambda = K + B_2(-K)^{\frac{5}{4}} \quad (5.6)$$

olur.  $H_\lambda$  ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H_\lambda &= 2H - \lambda \frac{\tau^2}{(1+v^2)} \\ &= \tau(t)^{-\frac{1}{2}} - \lambda \tau^2(t)^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

bulunur. Bu (5.7) eşitliği ile verilen  $2H_\lambda(t)$  fonksiyonu da sadece  $t$  ye bağlı olduğundan  $B$  tipi regle Weingarten yüzeyinin paraleli olan  $\varphi^\lambda(u, v)$  yüzeyi de Weingarten yüzeyidir. Ayrıca

$$H_\lambda = A_2(t)^{-\frac{1}{2}} - A_2 B_2(t)^{-1}$$

veya  $K$  Gauss eğriliği cinsinden

$$H_\lambda = A_2(-K)^{\frac{1}{4}} - A_2 B_2(-K)^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir. Galilean uzayda  $B$  tipi paralel regle yüzeyler için (5.6) ve (5.8) denklemleri göz önüne alınırsa

$$H_\lambda - A_2(-K)^{\frac{1}{4}} + A_2 B_2(-K)^{\frac{1}{2}} = 0$$

ve

$$K_\lambda - K - B_2(-K)^{\frac{5}{4}} = 0$$

fonksiyonel bağıntıları elde edilir.

### 5.3 Galilean Uzayda C Tipi Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri

**Teorem 5.3.1:** Galilean uzayda  $C$  tipi bir  $\varphi(u, v)$  regle Weingarten yüzeyinin  $\varphi^\lambda(u, v)$  paralel yüzeyi de Weingarten yüzeyidir.

**İspat:** Galilean uzayda  $C$  tipi regle yüzeyler Teorem 2.3.47 den dolayı minimal yüzey olduklarından Weingarten yüzeyleridir. Aynı şekilde  $C$  tipi regle yüzeyin paralel yüzeyi de minimal olduğundan Weingarten yüzeyidir.

## 5.4 Galilean Uzayda Paralel Regle Weingarten Yüzey Örnekleri

Bu kısımda, Galilean uzayda  $A$  ve  $B$  tipi regle Weingarten yüzeylere birer örnek verilmiştir. Ayrıca bu regle yüzeyler belirli parametre aralığında maple yazılımı kullanılarak çizdirilmiştir.

**Örnek 5.4.1:** Bir doğru parçası helikoidsel hareket altında hareket ettirilirse helikoidsel regle yüzey elde edilir.  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \neq 0$  olmak üzere Galilean uzayda helikoidsel hareket

$$\begin{aligned} x' &= pt + x \\ y' &= y \cos t + z \sin t \\ z' &= -y \sin t + z \cos t \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde ifade edilir. Galilean uzayda

$$v \rightarrow (v, A, Bv), \quad A \neq 0, B \neq 0$$

şeklinde doğru denklemi verilsin. Eğer bu doğru helikoidsel hareketin eksenleriyle kesişmezse, açık regle yüzey denklemi elde edilmiş olur (Sipus, 2008). O zaman bu regle yüzeyin parametrik gösterimi

$$\varphi(t, v) = (pt, A \cos t, -A \sin t) + v(1, B \sin t, B \cos t) \quad (5.10)$$

şeklinde ifade edilir. Boğaz çizgisinin denklemi, yay parametresi olan  $s$  cinsinden ifadesi kullanılırsa

$$\varphi(s, v) = \left(s, A \cos \frac{s}{p}, -A \sin \frac{s}{p}\right) + v\left(1, B \sin \frac{s}{p}, B \cos \frac{s}{p}\right)$$

biçiminde oluşturulur. Standart parametrizasyon  $\frac{s}{p} = \frac{u}{B}$  ile elde edilir. Bu durumda  $A \neq 0, B \neq 0$  ve  $p \neq 0$  olmak üzere standart parametrizasyonu ile

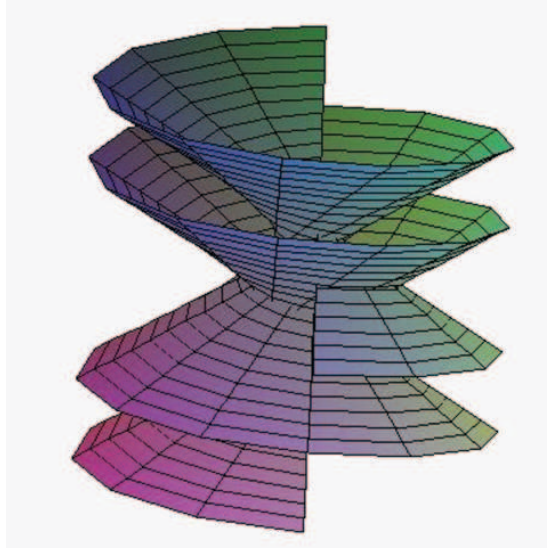
verilen  $A$  tipi regle yüzey için

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \left(\frac{p}{B}u, A \cos \frac{u}{B}, -A \sin \frac{u}{B}\right) + v(1, B \sin \frac{u}{B}, B \cos \frac{u}{B}) \\ &= \left(\frac{p}{B}u + v, A \cos \frac{u}{B} + vB \sin \frac{u}{B}, -A \sin \frac{u}{B} + vB \cos \frac{u}{B}\right) \quad (5.11)\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. (5.11) denkleminde  $p = 1$ ,  $A = 1$  ve  $B = 1$  alalım. Böylece  $A$  tipi regle yüzeyin parametrik gösterimi

$$\varphi(u, v) = (u + v, \cos u + v \sin u, -\sin u + v \cos u) \quad (5.12)$$

bulunur. Bu yüzeyin belli parametreler için grafiği, maple yazılımı yardımıyla (Şekil 5.1) deki gibidir.



Şekil 5.1 Galilean uzayda  $A$  tipi regle yüzey

Şimdide  $A$  tipi regle yüzeyin  $K$  ve  $H$  eğriliklerini hesaplayalım.  $A$  tipi regle yüzeyin ortonormal çatısı (2.40) denklemini yardımıyla

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{t} &= (1, \sin u, \cos u) \\ \mathbf{n} &= (0, \cos u, -\sin u) \\ \mathbf{b} &= (0, \sin u, \cos u)\end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

olarak bulunur. Uygun hesaplamalar yapılırsa  $\kappa = 1$  ve  $\tau = -1$  elde edilir.

(5.12) parametrik denklemleriyle verilen  $A$  tipi regle yüzeyin kısmi türevleri

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= (1, -\sin u + v \cos u, -\cos u - v \sin u) \\ \varphi_2 &= (1, \sin u, \cos u) \\ \varphi_{11} &= (0, -\cos u - v \sin u, \sin u - v \cos u) \\ \varphi_{12} &= (0, \cos u, -\sin u) \\ \varphi_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

şeklinde elde edilir. (5.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2 &= \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & -\sin u + v \cos u & -\cos u - v \sin u \\ 1 & \sin u & \cos u \end{vmatrix} \\ &= (0, -\cos u - \cos u - v \sin u, \sin u + \sin u - v \cos u) \\ &= (0, -2 \cos u - v \sin u, 2 \sin u - v \cos u) \end{aligned}$$

ve bu ifadenin normu

$$\begin{aligned} |\varphi_1 \wedge \varphi_2| &= \sqrt{(4 + v^2)(\cos^2 u + \sin^2 u) + 2v \cos u \sin u - 2v \sin u \cos u} \\ &= \sqrt{4 + v^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda yüzeyin  $N$  izotropik birim normal vektörü için

$$N = \frac{(0, -2 \cos u - v \sin u, 2 \sin u - v \cos u)}{\sqrt{4 + v^2}} \quad (5.15)$$

olur. Ayrıca (2.25) yardımıyla

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{11} &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$



olduğundan, (5.14), (5.15) ve (5.16) değerlerini (2.35) denkleminde yerlerine yazarsak, yüzeyin  $II$  ikinci temel form katsayıları için

$$L_{11} = \frac{2 + v^2}{\sqrt{4 + v^2}}, \quad L_{22} = 0 \quad (5.17)$$

ve

$$L_{12} = \frac{-2}{\sqrt{4 + v^2}} \quad (5.18)$$

elde edilir. Bu durumda (2.37) denklemi kullanılarak yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği için

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\left(\frac{-2}{\sqrt{4 + v^2}}\right)^2}{4 + v^2} \\ &= -\frac{4}{(4 + v^2)^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

bulunur. (2.27) denklemi yardımıyla

$$\left. \begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{4 + v^2} \\ g^{12} &= -\frac{1}{4 + v^2} \\ g^{22} &= \frac{1}{4 + v^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

olur. Böylece (5.17) ve (5.18) denklemleri yardımıyla bu regle yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} 2H &= g^{11}L_{11} + 2g^{12}L_{12} + g^{22}L_{22} \\ &= \frac{6 + v^2}{(4 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

olarak elde edilir. Şimdi de (5.12) denklemiyle verilen  $A$  tipi regle yüzeyin paralel yüzeyinin  $H_\lambda$  ve  $K_\lambda$  eğriliklerini hesaplayalım. (2.53) ve (2.54)

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{4+v^2}}(0, -2 \cos u - v \sin u, 2 \sin u - v \cos u) \cdot (0, \cos u, -\sin u) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{4+v^2}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \frac{1}{\sqrt{4+v^2}}(0, -2 \cos u - v \sin u, 2 \sin u - v \cos u) \cdot (0, \sin u, \cos u) \\ &= \frac{-v}{\sqrt{4+v^2}}\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\tan \phi = \frac{v}{2} \quad (5.22)$$

olur. (5.22) denkleminin  $v$  ye göre türevi

$$d\phi_2 \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad (5.23)$$

olduğundan

$$d\phi_2 = \frac{2}{4+v^2} \quad (5.24)$$

kolaylıkla elde edilir. (5.22) denkleminin  $u$  ya göre türevi,  $d\phi_1 = 0$  olduğu aşıkardır. Ayrıca

$$d = -2, \quad q = 0 \text{ ve } \tau = -1 \quad (5.25)$$

değerleri (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}K_\lambda &= K - \lambda \frac{d^3 + d^2(v)^2\tau + d^4\tau}{((v+q)^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= K - \lambda \frac{-8 - 4v^2 - 16}{(4+v^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= K + \lambda \frac{24 + 4v^2}{(4+v^2)^{\frac{7}{2}}}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla bulduğumuz (5.25) değerleri (4.2) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
2H_\lambda &= 2H - \lambda \frac{(d(x' - q') + d'(q + v) + \tau((v + q)^2 + d^2))^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} \\
&= 2H - \lambda \frac{(\tau((v)^2 + d^2) + d)^2}{((v + q)^2 + d^2)^3} \\
&= 2H - \lambda \frac{(6 + v^2)^2}{(4 + v^2)^3}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.12) denklemiyle verilen  $A$  tipi regle yüzeyin paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K_\lambda = -\frac{4}{(4 + v^2)^2} + \lambda \frac{24 + 4v^2}{(4 + v^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (5.26)$$

ve

$$2H_\lambda = \frac{6 + v^2}{(4 + v^2)^{\frac{3}{2}}} - \lambda \frac{(6 + v^2)^2}{(v^2 + 4)^3} \quad (5.27)$$

dir. O halde (5.26) denklemini  $(6 + v^2)$  ve (5.27) denklemini de  $\frac{4}{(4 + v^2)^{\frac{1}{2}}}$  ile çarpılırsa, sırasıyla,

$$\frac{8H_\lambda}{(4 + v^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(6 + v^2)4}{(4 + v^2)^2} - \lambda \frac{4(6 + v^2)^2}{(v^2 + 4)^{\frac{7}{2}}}$$

ve

$$K_\lambda(6 + v^2) = -\frac{4(6 + v^2)}{(4 + v^2)^2} + \lambda \frac{4(6 + v^2)^2}{(4 + v^2)^{\frac{7}{2}}}$$

olur. Bu iki denklemi karşılıklı çözersek

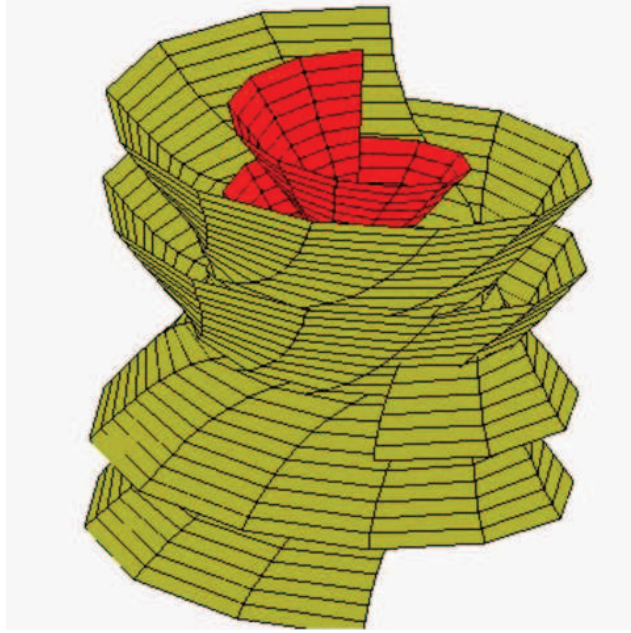
$$\frac{8H_\lambda}{(4 + v^2)^{\frac{1}{2}}} + K_\lambda(6 + v^2) = 0$$

bulunur. Buradan da (5.19) denklemi kullanılarak

$$2\sqrt{2}H_\lambda(-K)^{\frac{1}{4}} + K_\lambda + K_\lambda(-K)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

elde edilir. Buda paralel yüzeyin bir Weingarten yüzey olması anlamına gelir. Ayrıca maple yazılımı kullanılarak belli parametreler altında  $A$  tipi

regle yüzey ve onun paraleli olan yüzeyin grafiği (Şekil 5.2) deki gibi elde edilir.



Şekil 5.2 Galilean uzayda  $A$  tipi paralel regle yüzeyler

**Örnek 5.4.2:** (5.9) denkleminde  $p = 0$  olmak üzere

$$v \rightarrow (v, \frac{1}{B}, \frac{A}{B}v)$$

şeklinde verilen doğrunun, kesişmediği izotropik olmayan  $x$  eksenini etrafında döndürülmesiyle  $B$  tipi regle yüzey elde edilir (Sipus, 2008). Bu durumda bu regle yüzeyin denklemi

$$\varphi(t, v) = (0, \frac{1}{B} \cos t, -\frac{1}{B} \sin t) + v(1, \frac{A}{B} \sin t, \frac{A}{B} \cos t) \quad (5.28)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak  $B$  tipi regle yüzey için

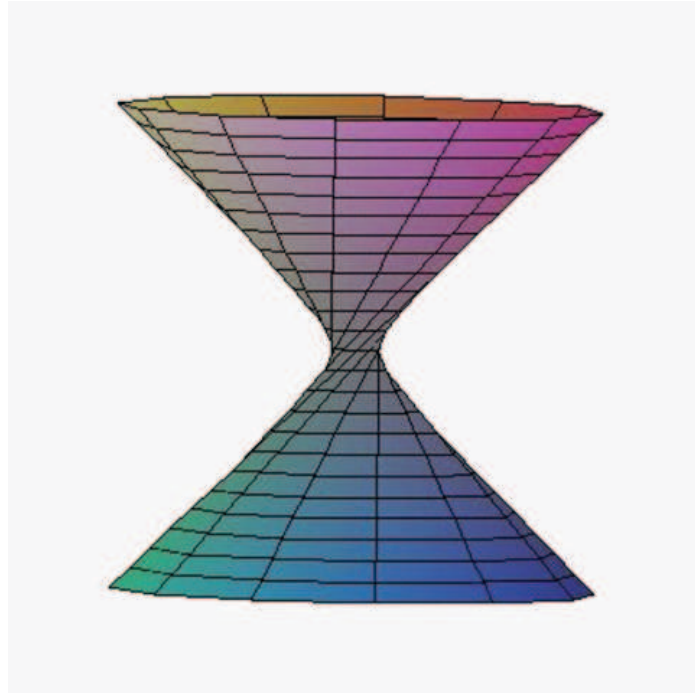
$$\varphi(u, v) = (0, \frac{1}{B} \cos Bu, -\frac{1}{B} \sin Bu) + v(1, \frac{A}{B} \sin Bu, \frac{A}{B} \cos Bu)$$

standart parametrik denklemi oluşturulur.

$B$  tipi regle yüzeyin  $x = 0$  Öklidyen düzlemde, yani  $yz$  düzleminde, boğaz çizgisi bir çemberdir.  $A = 1$  ve  $B = 1$  olmak üzere

$$\varphi(u, v) = (0, \cos u, -\sin u) + v(1, \sin u, \cos u) \quad (5.29)$$

şeklinde  $B$  tipi regle yüzeyin parametrik denklemi yazılır. Bu yüzeyin belli parametreler için grafiği, maple yazılımı yardımıyla (Şekil 5.3) deki gibidir.



Şekil 5.3 Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzey

$B$  tipi regle yüzeyin ortonormal çatısı

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= (1, \sin u, \cos u) \\ \mathbf{n} &= (0, -\sin u, \cos u) \\ \mathbf{b} &= (0, -\cos u, -\sin u) \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

şeklinde bulunur. Burada, sırasıyla,  $\kappa = 1$  yüzeyin eğriliği,  $\tau = 1$  ise yüzeyin torsiyonudur. Galilean uzayda  $B$  tipi regle yüzeyin drali  $d = 1$  dir.

Galilean uzayda (5.29) denklemiyle verilen  $\varphi(u, v)$   $B$  tipi regle yüzeyin

kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (0, -\sin u + v \cos u, -\cos u - v \sin u) \\
\varphi_2 &= (1, \sin u, \cos u) \\
\varphi_{11} &= (0, -\cos u - v \sin u, \sin u - v \cos u) \\
\varphi_{12} &= (0, \cos u, -\sin u) \\
\varphi_{22} &= 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde elde edilir. O halde  $B$  tipi regle yüzeyin  $N$  izotropik normal vektörü

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \wedge \varphi_2 &= \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & -\sin u + v \cos u & -\cos u - v \sin u \\ 1 & \sin u & \cos u \end{vmatrix} \\
&= (0, -\cos u - v \sin u, \sin u - v \cos u)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1 \wedge \varphi_2\| &= \sqrt{1 + 2v \cos u \sin u + v^2 \sin^2 u - 2v \sin u \cos u + v^2 \cos^2 u} \\
&= \sqrt{1 + v^2}
\end{aligned}$$

yardımla

$$N = \frac{(0, -\cos u - v \sin u, \sin u - v \cos u)}{\sqrt{1 + v^2}} \tag{5.33}$$

elde edilir. Şimdi de  $B$  tipi regle yüzeyin  $II$  ikinci esas form katsayılarını hesaplayalım.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_{11} &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.34}$$

yardımla

$$L_{11} = \frac{1 + v^2}{\sqrt{1 + v^2}}, \quad L_{22} = 0$$

ve

$$L_{12} = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}$$

dir. O halde Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği için

$$K = -\frac{1}{(1+v^2)^2} \quad (5.35)$$

elde edilir.

$$g^{11} = \frac{1}{1+v^2}, \quad g^{12} = 0$$

ve

$$g^{22} = 0$$

yardımıyla da Galilean uzayda  $B$  tipi bir regle yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği

$$2H = \frac{1}{\sqrt{(1+v^2)}} \quad (5.36)$$

bulunur. Paralel yüzeyin  $H_\lambda$  ortalama ve  $K_\lambda$  Gauss eğrilikleri

$$\begin{aligned} K_\lambda &= K + \lambda \frac{\tau}{(1+v^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -\frac{1}{(1+v^2)^2} + \lambda \frac{1}{(1+v^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2H_\lambda &= 2H - \lambda \frac{\tau^2}{(1+v^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+v^2)}} - \lambda \frac{1}{(1+v^2)} \end{aligned}$$

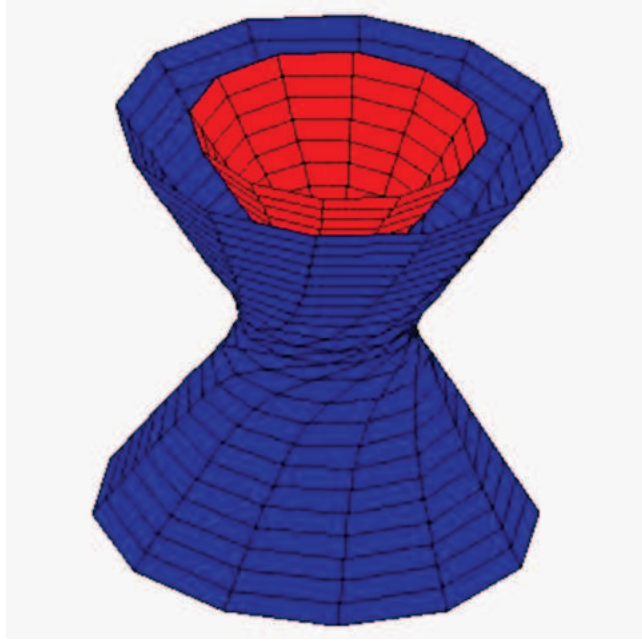
elde edilir. Uygun düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{2H_\lambda}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+v^2)^2} - \lambda \frac{1}{(1+v^2)^{\frac{5}{2}}}$$

olduğundan ve (5.35) kullanılarak

$$2H_\lambda(-K)^{\frac{3}{4}} + K_\lambda = 0$$

bulunur. Bu durumda  $B$  tipi regle yüzeyin paralelide Weingarten yüzeydir. Ayrıca maple yazılımı kullanılarak belli parametreler altında bu paralel yüzeylerin grafikleri (Şekil 5.4) deki gibidir.



Şekil 5.4 Galilean uzayda  $B$  tipi paralel regle yüzeyler



## SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma sırasında, Öklidyen ve Galilean uzaylardaki temel kavramlar ve teoremler verildi. Galilean 3-uzaydaki yüzey teorisi incelendi. Ayrıca paralel yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri üzerinde duruldu. Böylece paralel regle Weingarten yüzeylerin paralelinin de Weingarten yüzeyi oldukları hesaplandı. Bu doktora tezindeki tanımlamalar yardımıyla Galilean uzayda paralel regle yüzeylerin normal ve geodezik eğrilik gibi diğer eğrilikleri arasındaki bağıntılar incelenebilir. Ayrıca açılabilir paralel regle yüzeyler ayrı bir çalışma konusudur.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akyigit, M. and Azak, A. Z., 2010, Admissible Mannheim Curves in Pseudo-Galilean Space  $\mathbb{G}_1^3$ , Afr. Diaspora J. Math. (N.S.), 10(2), 58-65.
- Beltrami, E., 1865, Risoluzione di un Problema relativo alla teoria Delle Superficie Gobbe, Ann. Mat. Pura App 1.7 139-150.
- Boothby, W.M., 1986, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Second Edition, Academic Press Inc., Florida.
- Carmo, M. P. do, 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Craig, T., 1883, Note on Parallel Surfaces, Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 94, 162–170.
- Çöken, A.Ç., Çiftci, Ü. and Ekici, C., 2008, On Parallel Timelike Ruled Surfaces with Timelike Rulings, Kuwait Journal of Science & Engineering, 35, 21–31.
- Dillen, F. and Sodsiri, W., 2005, Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-space, Katholieke Universiteit Leuven, 83, 10-21.
- Dillen, F. and Kühnel W., 1999, Ruled Weingarten Surfaces in Minkowski 3-space, Manuscripta Math., 98, 307–320.

- Dini, U., 1865, Sulle Superficie Gobbe nelle quali Uno Dei Due Raggidi Curvatura Principale e una funzione dell'altro, *Ann. Mat. Pura App* 1.7 205-210.
- Divjak, B., 1998, Curves in Pseudo-Galilean Geometry, *Annales Univ. Sci. Budapest*, 41, 117-128.
- Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., 2003, Special Curves on Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces, *Acta Math. Hungar.*, 98(3), 203-215.
- Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., 2003 Minding Isometries of Ruled Surfaces in Pseudo-Galilean Space. *J. Geom.*, 77, 35–47.
- Eisenhart, L.P., 1909, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Boston: New York, Ginn and Company.
- Ekici, C., Dede, M. and Özüsağlam, E., 2010, On The Darboux Vector of Ruled Surfaces in Galilean Space, VIII. Geometri sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 29 Nisan-02 Mayıs, 114.
- Ekici, C. and Dede, M., 2011, On Darboux Vector of Ruled Surfaces in Pseudo-Galilean Space, *Mathematical and Computational Applications* (in press).
- Ekici, C., Dede, M. and Çöken A.C., 2011, On the Parallel Surfaces in Galilean Space, APM 2400, *Annales Polonici Mathematici* (unpublished).

Gray A., 1993, *Modern Differential Geometry of Curves And Surfaces*, CRC Press, Inc.

Hacısalihoglu, H.H., Ekmekçi N., 2003, *Tensör Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hacısalihoglu, H.H., 2000, *Diferensiyel Geometri*, Cilt: II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hacısalihoglu, H.H., 1998, *Diferensiyel Geometri*, Cilt: I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Kamenarovic, I., 1991, Existence Theorems For Ruled Surfaces in the Galilean Space  $\mathbb{G}^3$ , *Rad Hrvatske Akad. Znan. Umj. Mat.*, 10, 183-196.

Kuhnel, W., 1994, Ruled W-surfaces, *Arch. Math. (Basel)*, 62, 475-480.

Milin-Sipus, Z., 2008, Ruled Weingarten Surfaces in Galilean Space, *Periodica Mathematica Hungarica*, 56(2), 213-225.

Milin-Sipus, Z. and Divjak, B., 2004, Transversal Surfaces of Ruled Surfaces in the Pseudo-Galilean Space, *Sitzungsber. Abt. II*, 213, 23-32.

Milnor, T. K., 1980, Abstract Weingarten surfaces, *J. Differential Geometry*, 15, 365-380.

Nizamoglu Ş., 1986, Surfaces Réglées Parallèles, *Ege Üniv. Fen Fak. Derg.*, 9(Ser. A), 37-48.

- O'Neill, B., 1966, Elementary Differential Geometry, Academic Press, Inc.
- Oprea, J., 1997, Differential Geometry And Its Applications, Prentice-Hall, Inc.
- Öğrenmiş, A., Öztekin, H., Ergut, M., 2009, Bertrand Curves in Galilean space and Their Characterizations, Kragujevac J. Math., 32, 139-147.
- Öğrenmiş, A., Ergut, M., Bektaş, M., 2007, On the Helices in the Galilean Space  $\mathbb{G}^3$ , Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 31(A2).
- Park, K. R. and Kim, G. I., 1998, Offsets of Ruled Surfaces, J. Korean Computer Graphics Society, 4, 69-75.
- Rosenfeld, B.A., Maryukova, N.E., 1997, Surfaces of Constant Curvature and Geometric Interpretations of the Klein-Gordon, Sine-Gordon and Sinh-Gordon Equations, Publications de l'Institut Mathématique Nouvelle Série, tome 61, 75, 119-132.
- Röschel, O., 1984, Die Geometrie des Galileischen Raumes, Habilitationsschrift, Leoben.
- Ru, M., 1999, Lecture on Differential Geometry Part I., Huston University.
- Sodsiri W., 2003, Ruled Linear Weingarten Surfaces in Minkowski 3-Space, Soochow Journal of Mathematics, 29(4), 435-443.

Yaglom, I.M., 1979, A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag New York.

Yaylı, Y., Sağlam D., Kalkan, Ö., 2009, Parallel Linear Weingarten Surfaces in Euclidean Space, VII. Geometri Sempozyumu, 07-10 Temmuz, Kırşehir.

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Afyonkarahisar'da doğdum. 1991 yılında Yavuz Selim İlkokulu'dan mezun oldum ve sonrasında Afyon Fatih Lisesi'nde ortaöğretimime başladım . 1997 yılında Afyon Fatih lisesini bitirdim. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım ve 2003 yılında matematikçi olarak mezun oldum. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladım ve 2006 yılında mezun oldum. Aynı yıl Doktora öğrenimime başladım.

**Mustafa DEDE**